UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

Jaime Aníbal Acosta Amaya

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA FACULTAD DE

EDUCACIÓN. DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

AVANZADA

MEDELLÍN. COLOMBIA.

1996

UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

EN EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

Jaime Aníbal Acosta Amaya

Trabajo de investigación para optar por el título de Magister en

Sicopedagogia - Pensamiento - Lógico - Matemático

Director
ORLANDO MESA BETANCUR

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA FACULTAD DE EDUCACIÓN.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA MEDELLÍN.

COLOMBIA.

1996

UNIVERSIDAD
DE
ANTIOQUIA

APARTADO: 1226
MEDELLIN-COLOMBIA

CITE ESTA REFERENCIA AL CONTESTAR

ACTA DE APROBACION DE TESIS

Entre presidente y jurados de la tesis UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN EDUCACION BASICA SECUNDARIA, presentada por el estudiante Jaime Aníbal Acosta Amaya, como requisito para optar al título de Magister en Educación: Psicopedagogía, nos permitimos conceptuar que ésta cumple con los criterios teóricos y metodológicos exigidos por la Facultad y por lo tanto se aprueba.

Medellín, 13 de noviembre de 1996

Orlando Mesa Betancur
ORLANDO MESA BETANCUR
Presidente

GRIMALDO OLEAS LIÑAN
Jurado

Jaime Ulloa A.
JAIME ESCOBAR ACOSTA
Jurado

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL JORGE ELIECER GAITÁN, El Carmen de Viboral (Ant.).

ORLANDO MESA BETANCUR, profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y Director de la presente investigación.

MIGUEL MONSALVE G., Profesor Investigador de la Universidad Nacional Seccional Medellín y Asesor de Tesis.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, Medellín, Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

GLOSARIO

ADYACENTE: Inmediato, próximo, cercano.

AGRUP AMIENTO: Estructura de la Lógica Operativa constituida sicogenéticamente.

ARQUCMEDIANO: Poliedro cuyas caras son polígonos regulares no iguales y sus ángulos poliedros iguales.

AXIOMA: Proposición que por ser evidente no se demuestra.

CONGRUENTES: Cuando coinciden todas las partes de las figuras, (iguales).

FIGURA GEOMÉTRICA: Todo punto, línea, superficie sólida o toda combinación de puntos.

GEOPLANO: Material multivalente en el que se analizan propiedades geométricas.

MECANO: Material compuesto por tiras que se pueden engoznar e intercambiar. NUDO:

Punto común a líneas de una red que se cortan.

POLIGONAL: Línea compuesta por dos o más segmentos unidos con al menos un extremo común.

INTRODUCCION

Es preocupante el poco interés que se ha tenido en la enseñanza de la geometría en la educación básica y media vocacional, siendo relegada a las últimas unidades en los programas de matemáticas, por lo que en muchos casos quedan sin estudiar, restándole la importancia que tiene dentro de la formación del pensamiento de los estudiantes.

La geometría es pilar fundamental en el que se apoya el edificio del conocimiento matemático del joven estudiante y lo prepara para abordar el análisis de conceptos, la deducción, generalización y solución de problemas. Su aprendizaje debe realizarse mediante estrategias que motiven la creatividad y el acercamiento a la formalización, con actitudes agradables que conduzcan lentamente a la conceptualización y la deducción.

En este trabajo se plantea una estrategia que permite por medio de material multivalente, en especial el geoplano, abordar el aprendizaje, movilizando el pensamiento espacial en el proceso de la construcción del pensamiento lógico matemático.

1 MARCO CONCEPTUAL

1.1 FORMULACION DEL PROBLEMA.

Los estudiantes del Grado 7° del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral (Ant), presentan dificultades para la ejecución del programa de Geometría. Se observa una apatía general para el desarrollo de los temas propuestos.

Los profesores manifiestan que existe gran dificultad para la comprensión de los temas planteados y la falta de interés de los alumnos por la materia, presentándose por esto altos Índices de mortalidad académica, cuando se dedica un espacio a la geometría, pues está relegada a los últimos temas en los programas de matemáticas.

Lo anterior, unido a la forma magistral de desarrollo de las clases, la improvisación y la poca participación activa de los estudiantes, a los que se satura de definiciones y “demostraciones”, hace que se acreciente el desinterés y la falta de comprensión de la geometría.

¿ Una estrategia para la enseñanza de la geometría desarrollada mediante la manipulación de materiales, en actividades orientadas, facilita el aprendizaje intuitivo de los estudiantes del grado 7° del Instituto Jorge Eliecer Gaitán ?.

¿ Es posible despertar el interés para el aprendizaje geométrico de los estudiantes del grado 7° de Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán, por medio de los conceptos de una estrategia que permita el descubrimiento intuitivo ?

1.2 DELIMITACIÓN DEL TEMA.

1.2.1 Título de la Investigación; Una Estrategia para la Enseñanza de la geometría en la Educación Básica Secundaria.

1.2.2 Delimitación de la Población Beneficiaría: Los alumnos de la educación básica secundaria.

1.2.3 Delimitación Espacial: La experiencia se desarrolla con los 40 alumnos del grado *T* del instituto Técnico Industríal Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral.

1.2.4 Delimitación Temporal: Noviembre de 1994: la elaboración del diagnóstico.

Año lectivo de 1995: Desarrollo de la estrategia propuesta para la enseñanza de la Geometría.

Noviembre de 1995: Evaluación y análisis de los resultados de la estrategia desarrollada.

1.3 JUSTIFICACION

El papel del maestro de matemáticas no debe circunscribirse a una actividad en donde se entrega a los estudiantes definiciones que serán memorizadas sin comprender su significado, enunciar leyes sin analizar su contenido; realizar ejercicios mecánicamente en forma repetitiva sin comprender su esencia; esto no es hacer matemáticas. El estudiante no está aprendiendo, pues no tiene claridad del porque y para qué de los temas que tiene que aprender obligatoriamente para ser promovido. Esta actitud del maestro, unida a la espantosa cantidad de elementos incomprensibles que el estudiante tiene que abordar, hacen que la matemática sea tediosa y poco interesante, al no encontrar aplicabilidad en la cotidianidad a tanto concepto abstracto e incomprensible.

La actividad matemática escolar debe dirigirse a movilizar el pensamiento lógico matemático, para que a través de actividades interesantes, el mismo estudiante descubra los conceptos, resuelva situaciones problemáticas y plantee nuevas alternativas, formule nuevas generalizaciones y luego formalice con rigor matemático.

Esto es posible si se entiende el pensamiento matemático como vivo, dinámico y funcional, ocupándose de generalizar solamente después de intuir; establecer analogías y extraer conceptos a partir de una situación concreta (entendida ésta por lo conocido y aceptado por el estudiante), ya que no solo interesa el rigor sino el pensamiento cambiante y dinámico, lo que Polya*(1966) llamó "el arte de la conjetura".

[1] POLYA Jcorge. Matemáticas y Razonamiento plausible tecnos. Madrid, 1996 p. 76

Por esto el profesor de matemática debe hacer de las actividades pedagógicas un aprendizaje activo; porque esto deja una perdurable huella más placentera e interesante.

Si se inicia al estudiante con elementos de su cotidianidad, encontrará sentido a su estudio y estará motivado para aventurarse al descubrimiento del mundo matemático. La geometría es tal vez el punto de contacto más cercano entre esa cotidianidad y la observación matemática, pero lo será siempre que se aborde desde situaciones concretas y no desde definiciones y postulados que difícilmente serán comprensibles.

El manipular, construir, elaborar situaciones problemáticas, mediante materiales multivalentes permite al estudiante ir lentamente, pero movilizando su pensamiento de manera que en un momento determinado esté en capacidad de aventurarse en el apasionante mundo matemático.

1.3 ANTECEDENTES.

1.4.1 Antecedentes del Trabajo: En la actualidad existen varias propuestas que permiten a los estudiantes de Educación Básica facilitar el aprendizaje de la geometría y despertar su interés por el descubrimiento de los conceptos geométricos.

El trabajo dirigido a profesores de matemáticas de Educación Básica realizado por los profesores Miguel Monsalve de la Universidad Nacional Seccional Medellín y Orlando Mesa Betancur de la Universidad de Antioquia, es la base sobre la cual se construye la presente propuesta para ser aplicada y desarrollada por los alumnos, orientada por el profesor.

1.4.2 Antecedentes Contextúales. Ficha técnica del Municipio: El Carmen de Viboral, 1752 - 1997 (244 años).

En el extremo sur del valle de Rionegro, en una planicie se encuentra el municipio de El Carmen de Viboral, al que inicialmente denominaron “Sitio de Nuestra Señora del Carmen de Cimarronas”.

El Carmen de Viboral, llamado Cuna Artesanal de Colombia, tiene como toda Antioquia las huellas de sus ancestros. Se acostumbra celebrar las fiestas decembrinas, las religiosas y las populares. Predomina una cultura artesanal dado que su influencia en el desarrollo económico y cultural es básico.

Se establece con claridad la diferencia de clases sociales, destacándose la media y la media baja. Predomina la clase trabajadora minifundista que ejerce labor agrícola o artesanal como medio de sustento o subsistencia de la familia que a veces es externa o conformada por lazos de consanguinidad.

La base de la economía es la agricultura, que actualmente es rechazada por los jóvenes que prefieren vivir en la zona urbana.

La artesanía aunque en vía de extinción, aún sobrevive dando empleo a personas adultas.

El comercio es una fuente mínima de empleo en el municipio, ya que ocupa muy poca cantidad de jóvenes.
Actualmente el municipio cuenta con cinco establecimientos educativos de enseñanza secundaria oficial. (Instituto Fray Julio Tobón Betancur, Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán, Bachillerato Nocturno, Concentración Educativa la Chapa y el IDEM Aguas Claras.) Y uno particular (Monseñor Ramón Arcila). En educación primaria posee en el área urbana dos escuelas integradas, varias en los corregimientos y en la zona rural.

En bienestar social posee entidades o instituciones que brindan ayuda o presentan servicios de carácter comunitario. Entre estas instituciones se destaca La Casa de la Cultura con sus múltiples actividades recreativas, culturales y cívicas, que no llenan las expectativas de los jóvenes por desarrollarse paralelamente al horario de clases y beneficiar especialmente niños y padres de familia.

A pesar de que existen diferentes escenarios deportivos, éstos no son suficientes y se hace necesario la construcción de otros.

1.4.3 Características de la Institución; El Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán fue fundado por el Doctor Jorge Eliecer Gaitán (Ministro de Educación) en el año de 1945 con el nombre de Escuela Nacional de Cerámica.

Ofrece una educación técnica industrial en las modalidades de mecánica, electricidad, fundición, metalistería, ebanistería, dibujo técnico y cerámica. Actualmente cuenta con una Rectora, 48 profesores, personal administrativo y de servicios generales.

Los 850 alumnos están distribuidos en 20 grupos que estudian en jomada continua (mañana y tarde).

La población estudiantil es muy heterogénea en cuanto a situación económica, social y cultural; la mayoría de ellos provienen de hogares en conflicto por irresponsabilidad de los padres

Un alto número de alumnos son de la zona rural y diariamente se desplazan a pie, en bicicleta o en carro, para asistir a las clases.

Los padres de familia tienen poco estudio y se dedican a labores agrícolas y artesanales; muy pocos son empleados y tienen estudio de bachillerato (información extractada de Secretaria del plantel).

1.4.4 Marco legal.

1.4.4.1 Ley General de Educación No. 115. El Ministerio de Educación Nacional dentro de los lineamientos de la Ley General 115 determinó como uno de los objetivos de la Educación Básica razonamiento lógico mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana".^

1.4.4.2 Objetivos Generales del Área de Matemáticas: El estudiante debe:

- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.
- Adquirir independencia en la actividad intelectual.
- Adquirir profundidad y perseverancia en la búsqueda del conocimiento.
- Ampliar su capacidad para realizar generalizaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos.
- Familiarizarse con conceptos básicos de la Matemática.
- Adquirir precisión en l expresión verba y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos.
- Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, de la tecnología y de la ciencia.
- Ejercitar la agilidad mental para encontrar soluciones a problemas de cualquier tipo.
- Reconocer el valor y la función de la Matemática en el desarrollo de la ciencia, en el mejoramiento de las condiciones de vida y en el énfasis de las relaciones interpersonales y sociales.

1.4.4.3 Objetivos Generales del Área de Matemáticas en la Educación Básica: Dentro de los objetivos generales para el área de Matemáticas en la Educación Básica figuran:

"Construir y manejar modelos simbólicos del espacio en dos y tres dimensiones. Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio".

[2] LEY GENERAL DE EDUCACIÓN No. 115 del 8 de febrero de 1994.
[3] MARCOS GENERALES de los progamas curriculares. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá. 1894

1.4.4.4 Estructura del Área: La estructura del área debe señalar como mínimo algunos aspectos legales como: organización de los contenidos, grandes temas, secuencia y grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque.

Los títulos se han organizado para la Educación Básica bajo «1 enfoque de sistemas, como organización de contenidos de la siguiente manera: Sistemas numéricos, geométricos, métricos, de datos, lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones y análisis real.

En los sistemas geométricos se incorpora toda la parte de la Geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencias y semejanzas y, transformaciones como rotaciones, traslaciones reflexiones y homotecias.

1.5 FORMULACION DE OBJETIVOS

1.5.1 Objetivos Generales: - Desarrollar una estrategia que motive a los alumnos de educación básica secundaria, el estudio de la geometría mediante la utilización de recursos didácticos multivalentes.

- Movilizar el pensamiento espacial del estudiante mediante estrategias que lo conduzcan paulatinamente de lo concreto a lo hipotético deductivo.

[4] Ibid.

Facilitar el aprendizaje de la geometría mediante el estudio de las transformaciones en el plano con materiales mediadores, como el geoplano, movilizando el pensamiento lógico - matemático hacia la futura formalización.

Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos geométricos.

Adquirir precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.

Para docentes;

Proporcionar a los docentes de matemáticas una herramienta eficaz que les permita acompañar a los estudiantes de la educación básica en el descubrimiento de los conceptos necesarios para los futuros cursos de geometría, permitiendo el enriquecimiento de la cultura geométrica de manera activa y agradable.

1.5.2 Objetivos Específicos:

- Clasificar y caracterizar los cuerpos geométricos y analizar sus elementos.
- Clasificar y caracterizar las figuras en el plano.
- Dibujar con el uso de la regla y el compás figuras geométricas diversas.
- Construir en materiales diversos algunos poliedros y reconocer sus características.
- Realizar la ubicación relativa de puntos en el plano.
- Ubicar puntos en el plano respecto a uno de referencia.
- Identificar un punto -en -el plano dadas sus coordenadas con respecto -a uno de referencia.
- Ubicar un punto con respecto a un primer punto y otro de referencia para los dos primeros.
- Obtener el concepto intuitivo de vector a partir de la ubicación relativa de puntos.
- Construir el segmento que une dos puntos ubicados en el plano.
- Construir segmentos paralelos según las coordenadas en el plano, de diferentes longitudes.

A partir de la construcción de segmentos paralelos y el análisis de las coordenadas, construir intuitivamente el concepto de pendiente.

De acuerdo al concepto de pendiente, desarrollar el concepto de paralelismo y sus propiedades.

Construir segmentos perpendiculares en el plano y analizar la relación existente entre sus pendientes y sus propiedades.

Construir paralelogramos en el plano aplicando los conceptos de perpendicularidad y paralelismo.

Analizar las características de los paralelogramos.

Calcular intuitivamente en el geoplano el área del rectángulo.

Trazar la diagonal del paralelogramo e identificar los triángulos obtenidos y calcular su área a partir de la del paralelogramo.

Construir cuadriláteros diversos, caracterizarlos y calcular sus -áreas.

Construir triángulos diversos y calcular sus áreas y perímetros.

Construir polígonos diversos, caracterizarlos y calcular sus áreas.

Dibujar con regla y compás polígonos, regulares y encontrar una expresión que permita calcular sus áreas.

Construir un triángulo rectángulo y deducir la relación entre sus lados.

Deducir intuitivamente el teorema de Pitágoras.

Construir un vector de translación y realizar translaciones en el plano de segmentos y figuras geométricas diversas.

Trazar un eje de simetría y realizar la simetría con respecto a el de segmentos y figuras.

Realizar simetrías simultáneas respecto a ejes paralelos y no paralelos, analizando los resultados.

Realizar simetrías centrales (respecto a un punto).

Realizar rotación de figuras respecto a un punto.

Realizar homotecias de ampliación y reducción de figuras geométricas y analizar la proporcionalidad.

Realizar composición de las diversas transformaciones, analizar los resultados e intuir el concepto de grupo.

Obtener expresiones que permitan generalizar de forma intuitiva los diferentes conceptos encontrados mediante las prácticas.

Obtener conclusiones de las diferentes prácticas, realizando procesos lógicos y debidamente justificados y apoyados en los conocimientos anteriores.

Formalizar los procedimientos de demostraciones de manera coherente, ordenada, sencilla y justificando cada paso.

1.6 REFERENTE TEÓRICO.

1.6.1 Geometría.

Concepto de la Geometría; es el resultado de la exploración del espacio es el estudio de los cuerpos en el espacio, sus relaciones y transformaciones. No hay una sino varias geometrías, puesto que hay múltiples espacios y cada uno es descrito por una Geometría. Esto se explica porque hay propiedades que se conservan cuando en una figura se realizan transformaciones determinadas y éstas forman un grupo determinado. Las geometrías se estudian a partir del grupo de transformaciones, construyendo una Geometría para cada grupo.

Al respecto, Alberto Campos (1981) cita a Russell Bertrand: "... La Geometría es todo un conjunto de ciencias deductivas, basadas en un conjunto correspondiente de axiomas.

Una serie de axiomas es la de Euclides, pero otras series de axiomas igualmente buenos llevan a resultados distintos"^

1.6.1.1 Los Espacios. Los objetos se perciben según a su posición relativa respecto a otros, a la relación de distancia que mantienen. Es necesario que se tengan en cuenta los siguientes criterios;

- El término objeto empleado tiene y hace referencia al sujeto que percibe y a cualquiera que se perciba aisladamente.
- Existen múltiples espacios, entre los cuales hay que distinguir los matemáticos de los físicos y los perceptivos. Los espacios matemáticos se construyen a partir de axiomas y se describen por las geometrías. Algunas geometrías se pueden aplicar al espacio físico o algún espacio perceptual.
- Los seres vivos se comunican con el mundo físico por medio de los órganos sensoriales. El espacio perceptual depende de sus sistemas de percepción y de las características del mundo en que vive.
- Poseer un sistema coherente de relaciones espaciales implica el establecimiento de correspondencias, las relaciones físicas que hay entre los diferentes puntos del espacio físico y los estímulos sensoriales que ellos producen y el establecimiento de correspondencias entre los datos que se obtienen a partir del mismo conjunto de objetos. Esto es frutto del aprendizaje.
- Cada órgano sensorial proporciona cierta información de las relaciones espaciales entre los objetos, como lo visual, auditivo, etc.
- No solamente existen espacios de tres dimensiones, sino de n dimensiones.

1.6.1.1.1 Los espacios de los matemáticos: Un espacio está definido por una Geometría, es decir, "el conjunto de todos los conceptos y todas las propiedades que

[5] CAMPOS, Alberto.Educación Geométrica. Imprenta Nacional Bogotá, 1981. P. 43.

se conservan cuando en una figura se realizan todas las transformaciones que pertenecen a un grupo dado" (Klein, 1872, citado en Eliane Vurpillot 1972). Y continúa Vurpillot: "a cada grupo de transformaciones le corresponde una Geometría distinta".

1.6.1.1.1.1 Espacio y Geometría Euclidianos: Está definido respecto a tres ejes de referencia perpendiculares entre sí, que definen las tres dimensiones. Un punto queda definido por las coordenadas respecto a cada uno de los tres ejes.

Las rectas, ángulos, paralelos y distancias se conservan durante los desplazamientos (Ver Anexo C). Las coordenadas posibilitan la medición.

La Geometría euclidiana estudia las propiedades de las figuras que permanecen invariantes al aplicarles desplazamientos.

1.6.1.1.1.2 Espacio y Geometría Topológicos; La Geometría Topológica define el conjunto de propiedades de las figuras que permanecen invariantes al aplicarles transformaciones continuas.

Transformación continua es por ejemplo lo que sufre un alambre al doblarlo sin romperlo. Todos los puntos del alambre que estaban próximos, continúan estándolo después de realizada la transformación.

En un espacio topológico, las relaciones son de vecindad, separación, orden, envolvimiento, continuidad; estas son las que se conservan durante los desplazamientos, lo que no sucede con los puntos, rectas, paralelos, etc.

No hay sistemas de referencia general, por lo que no hay medición; un objeto se sitúa respecto a otro cercano (Ver Anexo C).

1.6.1.1.1.3 Espacio y Geometría Proyectivos: La Geometría Proyectiva define las relaciones perspectivas en relación con un punto de vista. Durante los desplazamientos únicamente se conservan las rectas y algunas relaciones cuantitativas, pero no las distancias, ángulos y paralelos.

1.6.1.1.1.4 Espacio y Geometrías Afines: Si se añade a las leyes de la Geometría Proyectiva la conservación de las paralelas, se obtiene una Geometría afín, es decir, la Geometría afin es un caso particular de la Geometría Proyectiva, Si se añade además la conservación de los ángulos, se obtienen las similitudes.

1.6.1.2 Las Geometrías no Euclidianas: Si se reemplaza el axioma de la Geometría de Euclides: "Por un punto dado solo puede trazarse una paralela a una recta dada" por "En un plano que contiene una recta y un punto, pueden trazarse por este punto varias rectas que no se encuentren con la recta", se obtiene la Geometría Hiperbólica o de Lobatchefsky, a la que corresponde un espacio de curvatura negativa.

Si se reemplaza el axioma por "Dos rectas situadas en un mismo plano tienen siempre un punto en común" se obtiene la Geometría Elíptica o Riemaniana, a lo que corresponde un espacio de curvatura positiva.

Parece ser que estas geometrías describen mejor el espacio físico astronómico que la Geometría Euclidiana, pero el espacio físico próximo a nosotros lo podemos considerar como euclidiano.

1.6.1.3 La Geometría de las transformaciones: Esta Geometría se ha ido implantando sobre la presentación formal basada en teoremas y demostraciones. Esto unido a la convicción de poder presentar una imagen unificada de las matemáticas por su conexión con vectores y el álgebra matrícial (Ver Anexo C).

Una figura puede ser transformada para probar enunciados hechos a cerca de ella.

La enseñanza de la Geometría euclidiana tiende a realizarse por medio de las transformaciones; quienes la recomiendan sostienen que tiene las siguientes ventajas:

- Si el material se presenta adecuadamente, resulta el aprendizaje más accesible a los estudiantes. La prueba de teoremas resulta difícil para la mayoría de ellos, pero en la Geometría transformacional, se reflejan figuras, se giran y cambian su medida, lo que es menos difícil que la prueba de teoremas.
- La idea de transformación sirve como lazo de unión para los teoremas de Geometría presentados. Mediante las transformaciones se observan los teoremas como resultados de un pequeño número de ellas.
- Todos los temas normales de la Geometría euclidiana pueden presentarse desde el punto de vista trasformacional.

1.6.2 El desarrollo del pensamiento según Piaget: El crecimiento mental del niño tiene lugar según Piaget, de acuerdo a unos estadios en los que se está preparando y madurando para una interiorización de las acciones en operaciones. La constitución del esquema del objeto permanente y la del grupo práctico de los desplazamientos,

preceden la reversibilidad y las convenciones operativas, y parecen anunciar la próxima formalización.

Existe en él, un largo período de preparación y luego de la constitución de las operaciones concretas, es la unidad funcional que enlaza en un todo las reacciones cognitivas, lúdicas, afectivas, sociales y morales.

Para Piaget el desarrollo del pensamiento es comparable al crecimiento orgánico y consiste esencialmente en una marcha hacia el equilibrio. El conocimiento no se adquiere intempestivamente, el sujeto lo construye por medio de la actividad que lo tiene en contacto con lo que lo rodea, es decir, que conocemos el mundo en la interacción sobre él, en forma progresiva, compleja y coordinada, pero para lograr progresivamente una mayor complejidad, se debe tener estructuras que lo permitan, dándose una adecuación entre las estructuras cognitivas del sujeto y su actividad para poder encontrar un punto de equilibrio adecuado.

En el razonamiento concreto el pensamiento se centra en los objetos mismos y en las estructuras de clases y relaciones que lo organizan en lo lógico y lo infralógico, las dos formas de reversibilidad (por inversión y reciprocidad) no se encuentran fusionadas en una sola estructura, pero cada una expresa un sistema de equilibrio; no se tiene una visión clara de todas las combinaciones posibles entre un número determinado de elementos;, es centrado en lo real;, hay clasificación y seriación de objetos.

1.6.2.1 Razonamiento Formal: Este pensamiento se caracteriza por:

- Razonamiento combinatorio que es la principal característica y consiste en que la persona sistemáticamente considera todas las posibles relaciones experimentales o teorías, aunque algunas no sean posibles en la realidad
- Control de variables: Dado un cierto fenómeno es capaz de identificar todas las posibles variables que interviene en él y puede estudiar cada una por separado para ver su incidencia. Razona sobre una hipótesis y puede encontrar las consecuencias necesarias de

verdades simultáneamente posibles, constituyéndose el pensamiento hipotético deductivo o formal. Es una separación del pensamiento con relación a los objetos, liberando las relaciones y clasificaciones de sus vínculos concretos o intuitivos.

1.6.2.2 Principales diferencias entre el Razonamiento Concreto y el Razonamiento Formal:

En la etapa concreta una persona:

- Necesita referencias a acciones familiares, objetos y propiedades observables.
- Usa clasificaciones, conservación, ordenamiento seriado y correspondencia uno a uno en relación con valores concretos.
- Necesita instrucciones detalladas etapa por etapa en largos procedimientos.
- No es capaz de un razonamiento propio, muestra inconsistencia entre varios juicios o contradicciones notables, en una línea de razonamientos con hechos conocidos.

En la etapa formal una persona:

- Puede razonar con conceptos, relaciones, propiedades abstractas, axiomas, teorías.
- Usa símbolos para expresar ideas.
- Aplica razonamiento: combinatorio de clasificación, ordenamiento seriado y proporcionalidad en sus modos abstractos de pensamiento.
- Puede planear largos procedimientos para alcanzar un objeto dado.
- Es capaz de criticar su propio razonamiento y chequear la validez de sus conclusiones apelando a otra información.

1.6.3 El Pensamiento Espacial.

1.6.3.1 Evaluación Genética de la percepción espacial según Piaget: Durante los 18 primeros meses de vida, según Piaget (Piaget 1950. Citado en : Eliane Vurpillot 1973) se constituye un espacio sensorio motor próximo, coherente, distinguiéndose tres grandes etapas en esta evolución:

Entre los O y 4 meses se perciben solo espacios heterogéneos parciales, como el espacio bucal (el más primitivo) y coexisten espacios táctil, visual, postural, auditivo. Cada uno se limita a su sistema sensorial y no se efectúa interrelación entre ellos. Las relaciones percibidas son únicamente de orden topológico.

Hacia los 4 meses aparece la coordinación entre la prensión y la visión, y luego entre los demás espacios sensoriales. Aún no tienen los objetos permanencia y no se distingue entre los cambios de estado (físico) y de posición (espacial). Para el niño los objetos dejan de existir cuando abandonan su campo de visión. No reconoce los objetos si se les cambia de posición, es decir, bajo otro aspecto de los 9 meses en adelante reconoce un objeto, si se le realizan transformaciones como acercamiento o desplazamiento, rotaciones, etc. Cuando un objeto se encuentra oculto, lo busca, esto indica la adquisición de una permanencia.

A los 18 meses existe un espacio coherente con los objetos permanentes, presentan relaciones espaciales y se localizan con relación al sujeto.

Se ha logrado la distinción entre los cambios de estado y los cambios de posición. Cuando un objeto se desplaza en sentido inverso al realizado por el objeto, se producen los mismos datos sensoriales anteriores; esto no sucede cuando hay cambio de estado.

Durante estos 18 meses las relaciones espaciales que en un principio -son -solo topológicas, poco a poco van pasando a se proyectivas y métricas.

En los años siguientes se desarrolla el espacio representativo, se construyen sistemas de referencias exteriores al sujeto y objetos. Se evoluciona en este espacio, lo mismo que en el sensoriomotor: desde relaciones topológicas hasta las proyectivas y métricas, constituyéndose definitivamente hacia los 10 u 11 años, gracias a que el pensamiento operativo le facilita la flexibilización y reversibilidad del espacio.

Durante el período de las operaciones formales, comenzando alrededor de los 10 a los 12 años, las operaciones espaciales se pueden separar totalmente de la acción real. Son capaces de considerar diversidad de posibilidades espaciales y comprender conceptos más abstractos.

1.6.3.2 Percepción y Representación: De acuerdo a Piaget (Piaget, Inhelder Szeminska, 1960; citado en : Linda Dickson 1991), la percepción se define como "el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos" y representación "comporta la evasión de objetos en ausencia de ellos".

La capacidad de percepción se desarrolla hasta la edad de los dos años; la capacidad para reconstrucción de imágenes comienza hacia los dos años y es perfeccionada de los siete años en adelante.

1.6.4 Los niveles de Razonamiento de Van Hiele: Los profesores e investigadores holandeses Fierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele - Geldof, elaboraron un modelo de razonamiento y aprendizaje de las matemáticas, preocupados por las dificultades presentadas por los alumnos para la comprensión de conceptos nuevos; usarlos en ejemplos diferentes a los planteados por el profesor; resolver problemas planteados en contexto diferente, etc. Especialmente en Geometría se presentaban grandes dificultades para las demostraciones, pareciendo la materia demasiado complicada. Plantean los Van Hiele, que existen diferentes niveles de pensamiento: "puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior del pensamiento, cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance de un nuevo nivel no se puede lograr por la enseñanza pero, aun así mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crea una situación favorable para que el alumno alcance nivel superior de pensamiento" (Van Hiele 1995, citado en : Llinares 1991). Las ideas del modelo de Van Hiele pueden enunciarse de la siguiente manera:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Solo se comprenden los conceptos que sean presentados de acuerdo a su nivel de razonamiento.
- Es necesario esperar el nivel de razonamiento para presentar unas relaciones matemáticas determinadas.
- No se puede enseñar a razonar de determinada forma, pero es posible ayudar, mediante una enseñanza adecuada de matemáticas a que llegue a hacerlo lo más rápido posible.

1.6.4.1 Los Niveles de Van Hiele: La teoría de Van Hiele comprende cuatro niveles de razonamiento.

Las siguientes son las principales características por las cuales se reconoce cada uno de los niveles de razonamiento matemático y en especial geométrico, de acuerdo a las actividades realizadas por los estudiantes.

1.6.4.1.1 Nivel 1. (De Reconocimiento); Las figuras geométricas se perciben totalmente de manera global, como unidades, los sujetos que se encuentran en este nivel dan atributos irrelevantes a las descripciones.

Las figuras son percibidas como formas individuales, no generalizan las características.

- Se limitan a su aspecto físico.
- En ocasiones se describen como base en su semejanza con otros objetos.
- No reconocen las partes de las figuras ni sus propiedades.

Es el nivel más elemental típico de "preescolar y los primeros cursos de Geometría. Se pueden reproducir figuras geométricas en el geoplano, con bandas elásticas, recuerdan sus nombres. Pero no ven por ejemplo el cuadrado como un rectángulo para él son formas aisladas y distintas.

1.6.4.1.2 Nivel 2. (De Análisis):

- Se observa que las figuras geométricas están constituidas por partes, con propiedades matemáticas, las describen y enuncian sus propiedades.
- Los estudiantes reconocen las propiedades por observación de las figuras o sus elementos.
- No relacionan unas propiedades con otras.

1.6.4.1.3 Nivel 3. (De Clasificación):

- Comienza la capacidad de razonamiento formal. Unas propiedades se deducen de otras.
- Pueden dar definiciones matemáticamente correctas.
- Comprenden el razonamiento lógico formal, pero ven los pasos de forma aislada, sin comprender la necesidad de la secuencia.
- Como no realizan razonamiento lógicos formales, no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

1.6.41.4 Nivel 4. (De Deducción Formal):

- Se realizan razonamientos lógicos formales comprendiéndose la estructura axiomática.
- Se acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado por diferentes métodos (diferentes demostraciones para los mimos teoremas).

Para alcanzar un nivel es necesario plantear actividades que requieran la utilización de las diferentes actividades propias de cada uno, con la práctica repetida de ellas. Se desarrolla el razonamiento para alcanzar un nivel determinado, es necesario superar los anteriores. Es posible aparentar un nivel superior al realmente poseído, porque se ha aprendido rutinariamente procedimientos característicos del superior pero sin comprenderlos. Ejemplo de esto es cuando realizan "demostraciones" aprendidas de forma memorística, sin comprender, es decir, sin alcanzar el nivel 4.

1.6.5. Didáctica de las Matemáticas. Principios de la Escuela Activa: Las estrategias empleadas para abordar la enseñanza de las Matemáticas, deben ser planeadas cuidadosamente, de tal manera que estén en correspondencia con nivel del desarrollo del pensamiento de los alumnos.

Los conceptos matemáticos deben presentarse con la profundidad con que se realicen, deben apuntar a reforzar lo aprendido anteriormente y preparar el camino para futuros aprendizajes, es decir, de forma cíclica.

Los estudiantes tienen una instrucción cuando, tienen la oportunidad a través de su actividad, construir los conceptos, realizando una comprensión de la realidad matemática: si se les permite construir, trazar o dibujar, equivocarse, corregir, dándoles la oportunidad de intuir, se les conduce al conocimiento de todo lo que incorpora a su experiencia.

La instrucción no se considera de forma estática, sino proveniente del trabajo realizado como una operación, es una construcción.

El conocimiento debe empezar por los sentidos, pues primero debe percibirse para luego comprenderse; no se debe enseñar con exposiciones verbales si no se ha observado antes.

Las definiciones se presentan únicamente cuando haya existido una descripción comprendida por medio de la experiencia.

La "didáctica catedrática" pone al alumno en condiciones pasivas e inferiores. Mediante la experiencia directa, la actividad, la concepción por medio de los sentidos, de las cosas y las operaciones sobre las cosas, nace el concepto primero difuso y luego más preciso y consistente.

1.6.6 Las Definiciones: El que no se pueda explicar con palabras un concepto, no quiere decir que no se tenga claridad sobre él. El que se recite una definición no implica que se tenga claro conocimiento del concepto. Una definición de algo que no se ha comprendido con anterioridad, lo único que hace es confundir y crear desinterés por lo no comprendido. "No debe hablarse de un concepto si no se conocen primero las ideas que el alumno tiene sobre él"*. (Castelnuovo 1970), y no se debe pretende borrar de un tajo dichas ideas, sino que él mismo, lentamente vaya descubriendo la verdad, mediante experiencias en las que apoyará su pensamiento.

[6] CASTELNUO Emna. Didactica de la Matemática Moderna. Editorial Trillas. Mexico, 1970. P. 28

Recurrir a la base concreta, material dinámico para poderle dar movimiento, es más ventajoso que un dibujo estático, porque permite al estudiante su manipulación y mejor conocimiento.

Antes de intentar una definición se debe dejar que las nociones se consoliden, mediante las actividades realizadas.

1.6.7 La Situación Problema como Estrategia para la Enseñanza; Una situación problema en la enseñanza de las matemáticas, según el profesor Orlando Mesa B. (1994) consiste en: "crear espacios de interrogantes que deben incluir las preguntas temáticas planteadas en la red conceptual que el maestro ha diseñado". El profesor elabora de acuerdo a lo que se propone alcanzar, una serie de actividades alrededor de cierto planteamiento que permita la conceptualización y simbolización a partir de la resolución de las preguntas planteadas.

El estudiante es en ella participativo, planteando soluciones, inquietudes y nuevos problemas, acompañado cuidadosamente por el profesor, permitiendo "la movilización del pensamiento lógico matemático"' (Mesa 1994), es decir, lo estimula activando su inteligencia y le da acceso al conocimiento de acuerdo a la competencia "lógico matemática" concordante a su nivel de desarrollo.

1.6.8 Enseñanza de la Geometría Intuitiva: Es necesario realizar un curso de Geometría intuitiva antes de iniciar la formalización hipotética deductiva.

[7] MESA B. Orlando. Criterios y Estrategias para la enseñanza de las matemáticas. 1994.p.25

A través de la intuición se dan las bases sobre las cuales se construirá la Geometría racional. Con la base de la formación del ente geométrico por abstracción, a partir de la observación de objetos reales y experiencias sobre éstas, se realizan construcciones con regla y compás, se manipulan figuras y se construye, se está facilitando la comprensión ulterior del curso de Geometría intuitiva, se debe fundamentar, naturalmente los axioma, es decir, a partir de lo concreto se desarrollan los conceptos y propiedades geométricas.
El dar una definición luego de realizar ciertas construcciones exige la capacidad de la abstracción, capaz de recoger la propiedad característica de la comparación de varias figuras. El niño de 11 años no está en capacidad de hacer esa abstracción de manera directa por sí solo, por lo que hay que recurrir al material concreto, en donde construye figuras y descubre propiedades y características, llegando a la definición sin la imposición de conceptos.

No se puede quedar en el simple dibujo, pues: limita las cosas restringiendo la libertad de pensamiento, no conduce a la observación; no permite la intuición por ser estático; no suministra una imagen real de una situación espacial. Por lo tanto, el dibujo es insuficiente para el curso de Geometría intuitiva. Por esto se debe recurrir a bases concretas, lo que ejercita las facultades sintéticas y analíticas, las que permiten llegar al complejo a través del elemento (construir) y a analizar, o sea discernir un objeto en una globalización, por medio de sus elementos.

Si el material es movible, atrae la atención por su transformación. El material debe ser manejable par poder construir con el, y permitir el análisis y la relación con los conceptos que intervienen. Cuando se construye se da cuenta de la relación de las partes con el todo. Los conceptos de área y perímetro se pueden aclarar confrontándolos entre sí.

El material es muy variado, como tiras escualizables para formar figuras y descubrir sus propiedades; el geoplano sirve para la noción de la invarianza estática del área, se construyen figuras, se comparan entre sí, se llega al concepto más dinámico de área confrontándolo con perímetro, de modo que una varíe mientras en otro sea fija. etc. Pasar de un área igual a cero con valores crecientes hasta llegar al cuadrado para luego volver a descender, lleva a intuir los conceptos de máximo y mínimo. (Ver concepto de área; Anexo B).

1.6.9 El Material Didáctico en la enseñanza de la Matemática; El material utilizado para el aprendizaje de las matemáticas tiene por objeto no solo traducir ideas matemáticas sino originarlas y sugerirlas.

Los modelos deben ser capaces de provocar la percepción y la acción fundamentales para el aprendizaje matemático, creando situaciones activas que conduzcan hacia él.

Son modelos multivalentes (que pueden ser utilizados en diversa situaciones) manipulados por el alumno y determinantes de una actividad sugerida del conocimiento que se trató de inculcar. Si es creado por el alumno, no solo ejercita la concreción sino que deberá explicar la abstracción de donde partió, siendo eso una eficiente práctica de esta actividad educativa.

1.6.10 El Lenguaje en la enseñanza de la Matemática; El objetivo de la enseñanza es la transmisión del significados a los alumnos. Esto se logra utilizando el lenguaje apropiado y no distorsionado, pero no necesariamente simbólico desde un principio. Se espera que los alumnos interpreten el mensaje que se pretende dar, con términos claros y accesibles a ellos, que poco a poco serán refinados hasta introducirlos en la contextualización matemática.

Para el inicio del lenguaje matemático es importante el apareamiento de figuras recortadas con una lista de nombres, así el alumno asocia la figura al término.

Para iniciar la simbolización es mejor no hacerlo directamente sino utilizando palabras en un principio que luego serán reemplazadas por símbolos así:

Es igual a =

Es menor que <

Es mayor que >

Cuatro veces cinco 4x5

Esto no solo va ayudando a la utilización de los símbolos sino a su comprensión, como lenguaje matemático.

Esto facilita el aprendizaje, pues para comprender hay que "hablar el mismo idioma" e implica la comprensión del lenguaje utilizado.

1.6.11 Geometría de las transformaciones. La geometría es el estudio de las propiedades del espacio, y en él cambiamos de posición los objetos, los modificamos de tamaño, o forma. La geometría euclidiana estudia las propiedades que permanecen constantes (invariantes) cuando las figuras son sometidas a cierto tipo de transformación. Mediante el estudio de las transformaciones se alcanza una apreciación informal e intuitiva de la geometría y permite la predicción e inferencia en los niños.

El estudio de las transformaciones se inicia con algunas actividades preparatorias que dan los elementos necesarios para construir los conceptos fundamentales como el de vector, ángulo, pendiente, etc. Lentamente se va planteando la estructura geométrica, pero sin llegar a ser organización global aún.

Se plantean proposiciones no evidentes que se deducen razonadamente a partir de otras evidentes, pero teniendo cuidado de no formular éstas como axiomas. Los alumnos deben reconocer las propiedades de las figuras geométricas y sus transformaciones hasta llegar a intuir la estructura de grupo en algunas de ellas, sin mencionar en momento alguno esta idea. Debe evitarse al máximo dar definiciones, es mejor orientar al estudiante hacia el redescubrimiento de las propiedades y los conceptos.

1.6.12 Los Mediadores. Los materiales usados para la enseñanza son objetos que facilitan el aprendizaje cuando se adaptan a una situación determinada; son los medios a través de los cuales se llega a la comprensión de los conceptos.

Si el profesor propone a sus estudiantes el uso de estos elementos con la adecuada orientación y con fines específicos y muy bien definidos, estos se convierten en lo que el profesor Orlando Mesa* (1994) -Profesor Investigador de la Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia- llamó mediadores. Según él, pueden llegar a convertirse en un obstáculo cuando se miran como simples instrumentos de información cultural. Por eso en el diseño de estos mediadores hay que tener mucho cuidado de no distraer la atención del estudiante en aspectos poco relevantes para el objeto de estudio.

Agrega el profesor Mesa: ". .. Las propiedades de los objetos (color, forma, tamaño) son muy importantes para la construcción del pensamiento infralógico y consecuentemente para la iniciación de las geometrías...". Por esto se recurre a estos materiales para realizar las actividades de aprendizaje.

Ibid.p.25

Los materiales multivalentes son los diseñados para servir en diferentes actividades; los bloques lógicos, las regletas, el geoplano, son algunos de ellos.

Por ser muy versátil y práctico para la enseñanza geométrica y adaptarse plenamente a las actividades propuestas, se elige al geoplano como el mediador principal que ayude a movilizar el pensamiento espacial del estudiante.

1.6.12.1 El Geoplano.

1.6.12.1.1 Utilidad: Es un material propuesto por Caleb Cattegno (1956). Les denomina así porque son láminas que sirven para la toma de conciencia de las relaciones geométricas.
El objeto principal de su uso es el de descubrir propiedades geométricas mediante la manipulación directa y construyendo sobre él, figuras geométricas con bandas elásticas de colores. Sirve para que el estudiante ensaye sus prácticas como experiencias de laboratorio que le permitan comprobar, conjeturar y sacar sus propias conclusiones, iniciándose en el razonamiento deductivo de manera lógica, como comienzo a las demostraciones formales posteriores.

El geoplano permite construir, observar, analizar y corregir errores. Cuando se está seguro de lo realizado se pasan los resultados a un papel punteado o cuadriculado. Si se trabaja sobre el papel directamente, no es posible introducir las modificaciones con la misma facilidad que lo permite el geoplano. Además su movilidad da la oportunidad a los alumnos de ver las figuras en varias posiciones sin que modifique sus características y mostrando qué propiedades son invariantes respecto a un grupo de desplazamientos.

1.6.12.1.2 Descripción: El geoplano es una lámina de madera que se aconseja de un espesor no inferior a 6 mm. para que permita la ubicación de clavos sin que pasen a su anverso.

El tamaño de la lámina puede variar, pero una medida muy práctica es un cuadrado de 40 X 40 cm.

En la lámina se dibuja una red o malla que puede ser cuadrada (cuadrícula) triangular, circular, etc. En los nudos de la red se adosan clavos.

En el equipo se incluye un juego de bandas elásticas de colores con las que hay que tener cuidado de dar buen uso. Si éstas causan dificultades es necesario sustituirlas por pequeñas y delgadas cuerdas de lana, algodón o material sintético de diferentes colores.

El geoplano más utilizado es el que tiene una red cuadrada (cuadrícula) de 2 x 2 cm. o de 3 X 3 cm., pero es bueno complementarlo con uno circular y/o uno triangular.

Debe complementarse el material con hojas punteadas o cuadriculadas (con cuadrícula grande de uno a dos centímetros). Si se usan los cuadernos llamados de regletas, que se consiguen fácilmente en el comercio, se garantiza tener los datos de cada actividad en forma ordenada y comprensible.

En este trabajo se adoptan los geoplanos con las variantes realizadas por el profesor Miguel Monsalve (1993)^ - Profesor e Investigador de la Universidad Nacional de Colombia. Seccional Medellín. Colombia quien propone una geotabla de 40 x 40 cm. con una cuadrícula de 2 x 2 cm., sin los clavos adosados permanentemente, sino que en los nudos de la cuadrícula se colocan chinches, pero únicamente donde sea necesario para cada práctica. Esto hace que el geoplano sea más versátil y permite visualizar mejor las construcciones realizadas, evitando la difusión de las figuras que pueden crear los clavos adosados permanentemente.
Los chinches recomendadas son de cabeza plástica y de variados colores, que en unión de las bandas elásticas de colores ayudan a la mejor visualización y análisis de los temas tratados. Estos permiten la mejor manipulación en su colocación en el geoplano. Al colocar los chinches debe tenerse cuidado que queden muy bien adheridos, para que al tensionar las bandas no salgan desprendidos, pudiendo ocasionar accidentes.

La tabla que propone el profesor Monsalve es posible utilizarla por sus dos caras; en una de ellas la red es una cuadrícula formada por “dos familias de rectas paralelas que son mutuamente perpendiculares e igualmente espaciadas”, formándose cuadrados todos de igual área.

Por la otra cara; la red está conformada por circunferencias concéntricas con una diferencia en la medida de su radio de 2 cm. y unas rectas que pasan por el centro de las circunferencias (radios) que las dividen en 24 partes iguales, es decir, dos líneas contiguas forman un ángulo de 15° con vértice en el centro de las circunferencias. El geoplano así construido es el que el profesor Monsalve denomina “Polar”.

[9] MESA B. Orlando, MONSALVE Miguel. Criterios y Estrategias para la enseñanza de las matemáticas. p.4.

1.7 HIPOTESIS DE TRABAJO

1.7.1 Hipótesis 1: Una estrategia para la enseñanza de la Geometría desarrollada mediante la manipulación de materiales, en actividades orientadas, facilita el aprendizaje intuitivo de conceptos, de los estudiantes del Grado 7° del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral.

1.7.2 Hipótesis 2: Es posible despertar el interés para el aprendizaje geométrico de los estudiantes del Grado 7° del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán por medio de una estrategia que permita el descubrimiento de los conceptos.

Con la modificación de las estrategias empleadas hasta el momento para la enseñanza de la Geometría en la Educación Básica Secundaria, se pretende obtener mejores resultados académicos, en los conocimientos geométricos de los estudiantes.

2. MARCO METODOLOGICO

2.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación realizada es de tipo experimental con diseño pre-test - post-test. Aplicada a un grupo del grado 7° de Educación Básica.

2.2 POBLACION OBJETO DE ESTUDIO

La comunidad involucrada en la investigación está conformada por 40 alumnos integrantes del grado 7°B del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral, distribuidos en 10 mujeres y 30 hombres, con edades entre los 11 y los 14 años.

La condición económica es media baja. Su lugar de residencia es el área urbana del municipio. Sus estudios primarios los hicieron en las escuelas urbanas de niños y niñas. El grado anterior (6°) lo cursaron en el Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán.

2.3 TECNICA E INSTRUMENTOS.

La técnica fundamental utilizada es la observación.

2.3.1 El Cuestionario: Para indagar el nivel de conocimientos geométricos que poseen los estudiantes se diseña un cuestionario distribuido en cinco fichas. (Ver Anexo A.) Se aplican a los 40 estudiantes del grupo experimental.

Luego de realizada la experiencia de la aplicación de la estrategia propuesta; un año después, se aplica el mismo cuestionario con el objeto de observar los progresos logrados.

2.3.2 Observación Directa: La estrategia propuesta se realiza por medio de actividades planteadas en talleres (Ver Anexo B) que desarrollan los estudiantes del grupo experimental y presentan un informe escrito individual, el cual es analizado para observar los logros.

Mientras se ejecutan las prácticas hay una observación permanente de la actitud y los logros de los estudiantes del grupo experimental, registrándose en un diario de ‘campo.

2.4 ANALISIS DE RESULTADOS.

2.4.1 Prueba Inicial: Para proceder al diseño de la estrategia que permita enriquecer la cultura geométrica de los estudiantes, es importante definir desde dónde se debe comenzar, en otras palabras, cuáles son los primeros conceptos y temas que se deben tratar; pero esto no es posible si no se conoce con anterioridad qué conocimientos poseen los alumnos antes de iniciar el curso, lo mismo que la competencia para el aprendizaje geométrico

Indagar sobre estos aspectos, si se hace adecuadamente, proporciona una serie de datos valiosos, dando una visión clara del punto de partida y ayuda a elegir el camino más adecuado por el cual se facilitará al estudiante el acceso al conocimiento geométrico.

La elaboración de los materiales que ayuden a realizar el diagnóstico debe hacerse con mucho cuidado, sin correr el riesgo de darle al alumno la impresión de estar siendo examinado con fines de calificación. Se realizan cuestionarios que deben ser desarrollados por los estudiantes en varias sesiones, en un clima de confianza y seguridad lo que garantiza la honestidad en las respuestas y por lo tanto la validez de los resultados.

La prueba inicial se realizó por medio de actividades propuestas en cinco fichas que contemplan los diversos aspectos que normalmente los alumnos deben dominar a este nivel.

El reconocimiento de figuras geométricas, su caracterización y su representación, son factores que indican que hay una conceptualización de las figuras y sus propiedades matemáticas. Los conceptos de ángulo, medida de ángulo, paralelismo.

perpendicularidad, la diferenciación del área y el perímetro, el reconocimiento de los movimientos en el plano y la identificación y caracterización de los cuerpos, constituyen el bagaje geométrico básico que se considera necesario para iniciar el curso propuesto.

La fichas serán desarrolladas en forma individual por un grupo del grado séptimo de enseñanza básica, de 40 alumnos del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral (Ant), escogido como grupo experimental. En estas fichas de trabajo se plantean diversas actividades con objetivos concretos a saber;

- Ficha No. 1. Representaciones con regla y compás y caracterización de ks figuras geométricas más relevantes en los cursos de enseñanza básica.

- Ficha No. 2. Indaga por el reconocimiento de figuras dentro de una serie de ellas, mediante la identificación de sus características.

- Ficha No. 3. En ella se plantean preguntas y actividades que den claridad sobre los conceptos que se poseen de ángulo, sus medidas y algunas relaciones entre ellos, como medida de ángulos suplementarios, opuestos por el vértice y suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. También se dedica a analizar la competencia que se posee para el aprendizaje de las transformaciones geométricas, pues el tema hasta el momento es totalmente desconocido por los estudiantes.

- Ficha No. 4. Está dedicada-al-análisis de los conceptos que se tienen de-área y perímetro, su clara diferenciación y su cálculo en figuras geométricas sencillas.

- Ficha No. 5. Se trata del reconocimiento de cuerpos geométricos, identificándolos con un lenguaje apropiado y su completa caracterización.

2.4.1.1 Ficha No. 1. Representación y Caracterización de Figuras Geométricas: El conocimiento de las figuras geométricas que tienen los alumnos al comenzar el curso es un factor que debe tenerse en cuenta para analizar y decidir el punto de partida.

Se tiene conocimiento cuando se es capaz de representar correctamente dichas figuras, denotando así la claridad que se tiene en dicho concepto. La representación y caracterización se logra solo si se tiene una cultura geométrica adquirida con los cursos precedentes.

Si se logra detectar deficiencias en este aspecto, es necesario diseñar actividades tendientes a subsanarlas.

Para indagar el estado inicial de los estudiantes en este aspecto, se ha diseñado una ficha (ver anexo A) en la que se pide dibujar con ayuda de regla y compás algunas figuras y escribir sus características más importantes, en ella se obtienen los resultados que a continuación se analizan:

- Triángulo Equilátero. Este concepto fue acertado por el 60% de los estudiantes, lo que presume un cierto estudio anterior en cuanto a dibujo y características, pero hay dificultades en la representación, aunque se caracteriza correctamente. La mayoría de los que dibujan correctamente (89%) lo hacen colocando uno de los lados horizontalmente en la parte inferior de la figura (ver figura # 1.). Y solamente el 11% lo hace en otra posición, (figura # 2).

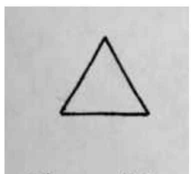


Figura # 1

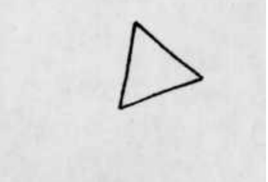


Figura # 2

Esto es explicable al observar los cursos anteriores en los que en la mayoría de las ocasiones se presenta el triángulo equilátero en la posición indicada en la figura #1.

Triángulo Isósceles. Aquí se encuentra un gran vacío conceptual, se observa gran dificultad en la presentación y también en la caracterización. En gran parte de los casos se confunde el triángulo isósceles con el escaleno, y en algunos casos con el equilátero, sólo el 10% acierta en la respuesta.

Además de atribuirse estos resultados a la poca importancia dada a este concepto en anteriores estudios, se pueden atribuir a un aspecto de tipo cultural, pues el término isósceles es muy poco común y no lo relacionan con alguna característica de la figura, como sucede, con el equilátero.

Triángulo Escaleno. A pesar de responder en lo que se acepta como correcto el 57.5% , se observa entre los que responden erróneamente absoluto desconocimiento del concepto, pues el 30% no responde y el 12.5% restante entregó respuestas totalmente desorientadas, como en algunos casos en los que dibujan un triángulo con una escalera en su interior y explican que triángulo escaleno es un triángulo con una escala.

Triángulo Rectángulo. Solamente el 27.5% logra acierto, confirmando las definiciones en el estudio anterior de estas figuras y sus características. Al observar el dibujo de las respuestas correctas, se encuentra que en su mayoría representan este triángulo con un cateto horizontal inferior y únicamente dos estudiantes lo hacen en otra posición, figura # 3.

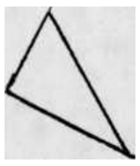


Figura #3

El Cuadrado. Cuando se piden las características del cuadrado la respuesta obtenida es; un cuadrilátero de lados iguales, pero no se hace referencia en ningún caso a los ángulos rectos; por lo que no se obtienen respuestas en lo aceptado como correctas, a pesar de que el 72.5% lo dibuja aceptablemente, pero siempre con los lados horizontales y verticales. Figura # 4.

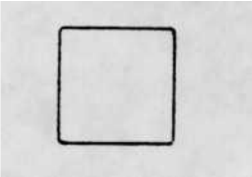


Figura ***# 4***

Cuando se cambia de posición como en la figura # 4 se obtiene la respuesta “eso no es un cuadrado es un rombo”.

El Rombo. No existe un concepto claro de rombo, simplemente se asocia con conceptos familiares que se les ha dicho tienen forma de Rombo, “un Rombo es un Diamante”, lo dibujan un cuadrado apoyado en un vértice, “eso ya no es un cuadrado es un rombo porque está apoyado en la punta” es decir que se deja de ser cuadrado al rota alrededor del vértice 45®.

Rectángulo. El 82.5% de los estudiantes lo dibuja correctamente, pero siempre se hace con dos lados de mayor longitud que los otros dos y no se acepta que puede tener sus cuatro lados de igual medida.

Por esto ninguno de los estudiantes acierta en la caracterización.

- Trapecio. En este caso también hay una falta conceptual pues solo el 35% hace una representación aceptada como correcta, pero en la caracterización se asocia a elementos que han observado en su experiencia, “un trapecio es un aparato para hacer malabarismo en los circos”, la ausencia del concepto se comprueba al encontrar un alto porcentaje que no responde: 65%.

- Paralelogramo. Solamente el 10% acierta aquí en el dibujo y ninguno logra escribir las características correctamente, dibujándose las más diversas formas de polígonos entre los que se observan algunos cuadriláteros pero no son paralelogramos.

- Polígonos de más de cuatro Lados. Fueron representados de las formas más diversas con gran iniciativa, entre regulares, irregulares, cóncavos convexos, siendo correcta la representación del 72% pero solo el 40% describe adecuadamente las características.

- Círculo; Se representa una circunferencia. Solamente el 10% hace referencia en el dibujo al espacio encerrado por la circunferencia y no más del 75% describe adecuadamente las características.

- Semicírculo. En general el 57.5% lo representa por medio de una línea semicircular abierta. El 42.5% lo hace cerrando la línea semicircular por medio de un diámetro y únicamente el 32.2% describe adecuadamente las características.

- - Circunferencia. Es bien dibujada por el 72% de los alumnos, pero no se acertó en la descripción de sus características.

Se puede apreciar en general que hay dificultades de representación de las figuras geométricas, en especial, del triángulo isósceles, triángulo rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio y círculo, pero el mayor desacierto está en la caracterización en general, pues en algunos casos se dibuja dentro lo aceptado como correcto. Simplemente se tiene la representación de la forma, más no del concepto en sí, con la descripción clara de sus características fundamentales.

2.4.1.2 Ficha No. 2. Identificación de Figuras Geométricas; En esta se suministra una lista de nombres de figuras, que aparecen dibujadas e identificadas con un número en una hoja anexa.

Se pide al estudiante escribir al fi-ente de cada nombre el número de la figura correspondiente.

Se pretende el reconocimiento de cada figura dentro de un conjunto de ellas, con variación de posición, tamaño y formas.

Si hay claridad conceptual, se reconocerá las figuras con relación a sus invariantes. Las figuras representadas y los resultados obtenidos en el grupo experimental son las siguientes;

- Cuadrilátero. Aparecen dibujados 10 cuadriláteros de diversos tamaños, posiciones y características, hay un acierto en promedio del 42,5%.

  Los más reconocidos como cuadriláteros son los rectángulos, en especial cuando sus lados son horizontales y verticales; en otra posición cuesta mayor dificultad su reconocimiento; los menos reconocidos son los irregulares, cóncavos, rombos y trapecios.

Se observa además, que en algunos casos (5 alumnos) se señala como cuadriláteros algunos triángulos, hexágonos y figuras curvilíneas.

- El Triángulo. Se presentaron 10 triángulos en diferentes tamaños, posiciones y de variadas características, según las diversas clasificaciones. El promedio de respuestas correctas es el 71.7%. Los triángulos menos identificados son los escalenos en posiciones diversas y sobre todo los que tienen marcadas diferencias en el tamaño de sus lados, ángulos muy agudos, o ángulos muy obtusos.

  Algunos casos en particular, señalan figuras que no son triángulos, como un cuadrilátero en forma de flecha, un rombo o un hexágono.

- Triángulo Isósceles. Hay dibujados 6 triángulos isósceles; las respuestas correctas son el 24% en promedio, ratificándose el déficit conceptual observado en esta figura mediante la ficha No. 1. También aquí se señala incorrectamente en algunos casos, triángulos escalenos como isósceles.

- Triángulo Equilátero. Son representados tres triángulos equiláteros en diferentes posiciones y tamaños. No hay dificultades en el reconocimiento del que se presenta con uno de los lados en posición horizontal inferior, el 72% lo reconoce; pero al cambiar la posición no se atina su reconocimiento, por lo que el promedio de aciertos en general es del 35.8%.

- Triángulo Escaleno. Se representan tres triángulos escalenos entre las figuras dibujadas. El éxito obtenido en esta ocasión es un promedio del 43.3%. Se obtienen también en las respuestas, señalamientos que no corresponden a la figura pedida, lo que confirma las deficiencias en la conceptualización de esta figura.

Comparando los resultados en los triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, se concluye que hay confusión entre estos conceptos, pues no se atina a identificarlos correctamente entre una gama de éstos.

- Triángulo Rectángulo. Se obtiene un 37% en promedio de respuestas acertadas, siendo los casos que mejor se identifican, aquellos en que se presentan los triángulos con uno de los catetos en posición horizontal en la parte inferior del mismo, pero se observan dificultades cuando se varía esta posición por medio de un giro.
  El total de triángulos rectángulos presentados en las flechas para ser identificados es de cinco.

- Cuadrado. Hay un éxito del 57.5% en promedio de identificación de los dos cuadrados que aparecen dibujados en la ficha, siendo identificados en la mayoría de los casos, el que se representa con dos de sus lados en posición horizontal, pero al girarlo 45” existen dificultades. Al preguntar a los alumnos por qué no lo identifican como cuadrado, responden que “no es un cuadrado, es un rombo”.

- Elipse. Es sorprendente encontrar un total desconocimiento en este concepto. Pero al solicitar que se identifiquen los óvalos, lo hacen rápidamente, lo que es atribuible a un factor cultural en el uso del lenguaje, pues la terminología usada en el medio para estas figuras es la de “óvalo” y no elipse.

- Trapecio. En este caso se reconoce la figura en un promedio del 16.30%, predominando los que tienen dos lados no paralelos.

- Figuras Curvilíneas. El sector circular y el semicircular no son reconocidos en la mayoría de los casos como figuras curvilíneas. Hay un acierto general en un promedio del 41.4%.

- Hexágono. Hay un reconocimiento de estos polígonos en un 54.32% en promedio, siendo los más reconocidos lo regulares y en general los convexos.

- Pentágono. Se acierta en un 33.7% y similarmente al caso anterior, no se reconoce el pentágono irregular y el cóncavo.

- Circunferencia. Aquí se obtiene mayor éxito que en los casos anteriores, un 80% da respuestas correctas. Dentro del 20% de desaciertos, se señalaron elipses, lo que supone que el concepto de circunferencia se asocia en estos casos al de figura curvilínea cerrada, en general.

- Rombo. Solo se reconocen los rombos cuando se presentan con una de sus diagonales horizontal (estas no se han dibujado), se obtiene el 19% de respuestas correctas.

- Polígono de más de cuatro Lados. Se presentan siete polígonos de más de cuatro lados, entre los que se reconocen únicamente los regulares y convexos en la mayoría de los casos. Se responde correctamente un promedio del 70% de las posibilidades.

- Polígonos Regulares. Al observar las respuestas, se percibe que en este tipo de polígonos no se han clasificado el cuadrado y el triángulo equilátero y solo se han tenido en cuenta algunos polígonos de más de cuatro lados. El promedio de respuestas acertadas es del 1.0%.

- Paralelogramo. El promedio de respuestas correctas es del 15.41%. Mediante el análisis de las respuestas, se observa que únicamente se señalan los rectángulos como paralelogramos.

El señalamiento de figuras entre una gama de ellas, exige tener una clara concepción de sus características y su adecuada comprensión.

Mediante esta prueba se observan grandes fallas conceptuales, originadas posiblemente en las estrategias de enseñanza empleadas y los contenidos temáticos tratados en los cursos anteriores de geometría.

2.4.1.3 Ficha No. 3. El Ángulo y las Transformaciones Geométricas; En esta ficha se pretende indagar por los conocimientos del concepto de ángulo, su medida y sus relaciones, lo mismo que el paralelismo y perpendicularidad. También se incluye una pregunta sobre transformaciones geométricas que ayuda a clarificar no solo el nivel de conocimientos en este tema, sino la competencia del estudiante para su aprendizaje.

- Para Ti qué es un Ángulo?
- El 27.5% de los estudiantes contesta a esta pregunta que es la unión de dos rectas en un punto.

. El 5% que es el espacio que hay entre las líneas que se unen.
. El 2.5% responde que es la abertura entre las líneas.
. El 12.5% contesta que es una figura o una parte de la figura geométrica.
. El 25% es agrupado según otras respuestas diversas y no contesta el 27.5%.
Se concluye que el concepto de ángulo no está claro en los estudiantes de este grupo

- Apareamiento: Medida del Ángulo. Se entregan dos columnas en las que aparecen dibujados ángulos. En la columna de la derecha hay ángulos que corresponden a la misma medida de cada uno de los representados en la columna de la izquierda.

Los ángulos de la columna de la derecha difieren de los de la columna de la izquierda en su posición, longitud de lados, radio de arco. Se identifican además cada uno con un número. Se pide escribir al frente de cada ángulo de la columna de la izquierda, el número que identifique el ángulo de la columna de la derecha que tenga la misma medida.

- Identifican los ángulos de igual medida con arcos de diferente radio. Aciertan cuando se presentan ángulos de la misma medida, pero uno de ellos con un lado más corto, el 40%.

. Con el mismo arco, en distinta posición y de distinta longitud de lados, el 15%.

. El ángulo recto en otra posición, el 28%.

- Identifican el ángulo obtuso en otra posición, el 62.5%.

Se concluye que el porcentaje de alumnos que tienen claro el concepto de medida de ángulo es deficiente, relacionan la longitud de los lados, el radio del arco y la posición a la medida del ángulo.

- Medida de Ángulos Suplementarios, Opuestos por el Vértice y Suma de los Ángulos Internos de un Triángulo.

. En la medida del ángulo suplementario, acierta el 22.5% en las dos preguntas.

- En los opuestos por el vértice, responde correctamente el 27.5%.

. La suma de los ángulos internos de un triángulo igual a 180° es respondida correctamente por el 25%.

De los resultados anteriores se deduce el poco conocimiento de la medida de ángulos suplementarios, opuestos por el vértice y la suma de los ángulos internos de un triángulo.

- Paralelismo.
- Se identifican líneas paralelas cuando una está al frente de la otra y tiene la misma longitud, pero solamente el 21% lo hacen cuando se modifican estos aspectos.

. El 83% identifica las líneas paralelas dispuestas una al fi-ente de la otra, en posición horizontal o vertical.

- En algunos casos (17%) se confunde con líneas perpendiculares.

Estas respuestas dejan entrever la confusión del concepto de paralelismo con las de Perpendicularidad, horizontalidad y verticalidad.

- Transformaciones Geométricas. Se presenta un triángulo con línea continua y otro con línea punteada al que se le ha aplicado una traslación, una simetría, una rotación, una homotecia o una composición de ellas, y se pregunta que debe hacerse con el triángulo para que ocupe la posición punteada.

. En ninguno de los casos se responde con el nombre correcto, lo que es razonable porque nunca han recibido instrucciones al respecto.

. Pero se observa gran competencia para su aprendizaje por el tipo de respuestas obtenido. Por ejemplo en la traslación: “debo moverlo en línea recta horizontalmente”. (78%)

. En la simetría: “voltear el triángulo”. (65%)

. En la homotecia: “agrandar o empequeñecer el triángulo”. (72%)

- En el giro se presenta mucha dificultad, lo mismo que en la composición de giro y homotecia, y traslación y homotecia.

2.4.1.4 Ficha No. 4. Áreas y Perímetros. En esta ficha se pretende encontrar si los alumnos tienen claridad en los conceptos de área y perímetro y si existe una confusión entre los mismos.

En una hoja cuadriculada se solicita el cálculo de áreas y perímetros de figuras como rectángulos, triángulos y figuras irregulares (Ver anexo A).

- Se solicita calcular el área y el perímetro de un rectángulo con la siguiente pregunta, teniendo en cuenta que cada cuadro es una unidad de medida. Si se siembra una libra de papa en cada cuadro (suponiendo que la figura representa un terreno), cuantas libras puedes sembrar?. Cuanto alambre necesitas para cercar el terreno con una sola vuelta?. Qué tan grande es el terreno?.

. A la primera pregunta responde correctamente el 27.5% de los alumnos.
. No contesta el 30% y da diversas respuestas incorrectas, el 42.5%.
. A la pregunta del perímetro responde correctamente el 22.5%; respuestas incorrectas son dadas por el 47.5% y no responde el 30%.
. A la pregunta: qué tan grande es el terreno, encaminada a observar si relaciona el tamaño “que tan grande” con perímetro o área.

• 5 Estudiantes (12.5%) responden: 5 cuadritos de ancho por 11 cuadritos de largo, relacionándose esto con el concepto de área. Los otros estudiantes no responden.

- En varios triángulos dibujados sobre cuadrícula, se solicita indicar cuáles tienen igual área, cuál tiene mayor área, cuál menor, y cuanto mide el área de cada uno.

• Los triángulos de igual área son identificados por el 12.5%
• El triángulo de menor área es señalado correctamente por el 42%.

. El triángulo de mayor área es señalado correctamente por el 35%.

• El cálculo correcto de todas las áreas es realizado por el 17% de los estudiantes.

Estos resultados ratifican las fallas detectadas en los conceptos de área y perímetro.

Las figuras dibujadas son irregulares pero con sus lados siempre horizontales o verticales, para facilitar el calculo del área mediante el conteo de cuadritos. Se presenta además un semicírculo. Solo 3 estudiantes (7.5%) calculan correctamente las áreas.
Se les pide calcular el perímetro de las mismas figuras y no responden en su totalidad.

Se pide dibujar rectángulos con perímetro igual a 20 y decir cuál es el que tiene mayor área.

En esta pregunta se dibujan rectángulos de diferente medida, pero ninguno con las características solicitadas.
Es de anotar que durante las pruebas los estudiantes preguntaban: Qué es un perímetro ?. Esto indica su total desconocimiento del tema

2.4.1.5 Ficha No. 5. Figuras Tridimensionales. Mediante este cuestionario se indaga por el nivel de conocimientos en la identificación y caracterización de los cuerpos fundamentales.

Se suministran dibujos de diferentes cuerpos y se pide escribir su nombre y características. (Ver anexo A)

Según las respuestas consideradas correctas, se obtienen los siguientes resultados:

CUERPO	NOMBRE	CARACIERÍSTICAS.
Cilindro.	12.5%	7.5%
Cilindro de altura pequeño.	5.%	0%
Cubo.	77.5%	0%
Cono.	0%	0%
Tetraedro.	0%	0%
Pirámide.	45%	0%
Prisma rectangular.	0%	0%
Cono oblicuo.	0%	0%
Esfera.	0%	0%
Tronco de cono.	0%	0%
Prisma oblicuo.	0%	0%
PROMEDIOS	12.7%	0.7%

Se observa que se dan nombres a los cuerpos, de objetos para los estudiantes conocidos con la misma forma. Al cilindro se le llama tronco, caneca, tarro, tubo, etc., y en este caso es en el único en donde hay un acercamiento de algunos estudiantes (75%) a la caracterización.

Al cilindro con altura pequeña se le llama moneda o tapa.

En el cubo es donde encontramos que se da el nombre correcto en la mayoría de los estudiantes, lo que es comprensible porque con él han trabajado en los cursos anteriores, donde han dibujado cubos y otros modelos sencillos en perspectiva isométrica. Pero no se acercan a su caracterización, lo que indica que se ha elaborado una construcción puramente mecánica.

En otro cuerpo que se obtiene una respuesta acertada considerable, es en la pirámide, atribuible esto al aspecto cultural comercial del momento.

En los otros cuerpos no se acierta en sus nombres y características, es el caso del prisma rectangular al que se llama caja, al cono gorro, a la esfera bola, pelota, al prisma oblicuo caja.

En el caso especial de 5 alumnos que dan nombres de figuras planas como triángulo al cono o pirámide, cuadrado al cubo, rectángulo al prisma; circunferencia a la esfera, hay una confusión entre lo plano y lo espacial.

Esta prueba nos permite observar la falta de conocimientos en lo que respecta a los cuerpos geométricos, que son los que tienen siempre a su alcance los jóvenes en su cotidianidad, pero desconociendo sus características.

La prueba inicial ha permitido obtener la información mediante la cual vemos que hay un gran déficit en los conocimientos geométricos que a este nivel deben poseerse, como son: la identificación, caracterización y construcciones de figuras geométricas., Identificación y caracterización de cuerpos geométricos. Conceptos de área y perímetro, ángulo y su medida y transformaciones en el plano.

La falta casi total de una cultura geométrica en los alumnos a este nivel detectada con esta prueba, debe ser superada, mediante un proceso que permita la rápida nivelación y adquisición de estos elementos básicos e indispensables para abordar el trabajo que movilice el pensamiento espacial y conduzca al enriquecimiento geométrico y la figura generalización y formalización.

e proceso debe llevar al alumno desde su interacción con su experiencia cotidiana con los objetos hasta su caracterización, clasificación y análisis de su elementos componentes, lo que permitirá el estudio de los cuerpos y figuras, sus relaciones, sus invariantes.

2.4.1.6 Conclusiones;

- Los estudiantes perciben las figuras geométricas en forma global, atribuyéndoles características irrelevantes.
- No reconocen las partes que componen las figuras ni sus propiedades geométricas.
- Las descripciones de los cuerpos y figuras se basan en la semejanza con otros objetos con los que tienen contacto en la vida diaria.
- No clasifican lógicamente las figuras y sus elementos basándose en sus invariantes.
- No utilizan un lenguaje adecuado cuando se refieren a figuras, cuerpos y sus propiedades y sus elementos.
- No hay conceptos claros de semejanza, congruencia, de acuerdo a propiedades comunes, ni de los conceptos de medidas de ángulos, áreas y perímetros, confundiéndose estos últimos muy frecuentemente.
- Hay una excelente competencia para el aprendizaje geométrico, lo que se observa cuando se solicita realizar actividades que impliquen análisis espacial, como en el caso de las transformaciones, que sin conocerlas atinan en gran medida a describir, así sea con lenguaje inadecuado, los movimientos realizados.

2.4.2 Prueba Final. El progreso obtenido por los estudiantes en la cultura geométrica mediante la ejecución de las prácticas propuestas en la estrategia pedagógica, es observable en la medida en que se obtengan mejores resultados en su evaluación que en la prueba inicial, por eso es conveniente utilizar el mismo cuestionario como prueba final, lo que permita una comparación muy objetiva y avalar la intervención, así como replantear en aquellos aspectos en que no se haya logrado plenamente los objetivos propuestos.

Claro está que es utópico pretender obtener resultados perfectos, pues éstos dependen de factores que varían con las condiciones específicas de cada grupo y de cada individuo, como también de la apropiación y conocimiento que haya realizado el educador de la estrategia que se le plantea, pues ello le permitirá realizar oportunamente cambios de forma y estructura, lo mismo que adicionar o suprimir elementos cuando lo cree conveniente.

Es posible creer que la prueba final no tenga la suficiente validez por ser ya conocida por los estudiantes, lo que se puede obviar teniendo en cuenta que fueron aplicadas con doce meses de diferencia, además no se permitió a los alumnos tener en su poder ningún cuestionario después de presentar la prueba exploratoria, y por último cuando se aplica la prueba final no están enterados de que se realizará con el mismo cuestionario y lo realizarán en una sesión en forma individual y supervisada por el investigador.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en esta prueba final. Se omiten las descripciones de las fichas por haberlo hecho en la presentación de la prueba inicial.

2.4.2.1 Ficha No. 1. Representación y Caracterización de Figuras Geométricas.

- Triángulo Equilátero. En este caso dibujan el triángulo dentro de lo aceptado como correcto y en las características escriben triángulo con sus tres lados iguales, el 92%. Además se obtienen características como: polígono regular, polígono convexo, con sus tres ángulos internos iguales y agudos.

Observamos el cambio positivo respecto a la prueba inicial cualificando las características aunque todavía se observan deficiencias en el lenguaje como “ángulos iguales” y no ángulos con igual medida.

- Triángulo Isósceles. Al representar el triángulo isósceles lo hacen correctamente y describen como característica principal “triángulo con dos lados iguales”, el 85%. Se nota ya un gran progreso en este concepto, el cual se descubrió como uno de los más deficientes en la prueba inicial.

- Triángulo Escaleno. La respuesta del 87% de los estudiantes es “triángulo con todos sus lados desiguales y también lo dibujan correctamente.

- Triángulo Rectángulo. Aquí el dibujo del triángulo presentado en diferentes posiciones y acompañado de sus características correctamente, es realizado por el 80% de los estudiantes. El 20% restante contesta; “es un triángulo con todos rectos”; “es un triángulo con los lados iguales”.

- Cuadrado. El dibujo del cuadrado se realiza adecuadamente y se escribe como característica; paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrilátero de lados iguales y ángulos rectos, por un 90% de los estudiantes. El 10% contesta; “el que tiene lados iguales”.

- Rombo. El 45% de los estudiantes realizan el dibujo dentro de lo aceptado como correcto y en las características colocan cuadrilátero de lados iguales el 55%. A la anterior característica agregan dos ángulos agudos y dos obtusos.

- Rectángulo. El 80% contesta en las características; “cuadrilátero con sus cuatro ángulos de 90 ’ y el dibujo lo realizan correctamente.

El 20% restante dibuja correctamente, pero en las características agregan: “cuadrilátero de dos lados más largos que los otros dos”.

- Trapecio. El 75% de los estudiantes realizan bien el dibujo y contesta en las características: “cuadrilátero de dos lados paralelos”.

- Paralelogramo. El 75% contesta que es un cuadrilátero de lados opuestos paralelos y el dibujo lo realizan correctamente. El 25% se agrupa en diferentes respuestas, entre las que se destacan: “el que tiene dos lados paralelos; el que tiene cuatro lados, el que tiene cuatro lados paralelos.

- Tres Polígonos de más de cuatro Lados. Se dibuja una gama de polígonos con sus respectivas características, entre las que se destacan: pentágono, heptágono, cóncavos, convexos, irregulares.

  Las características son descritas según al número de lados, su regularidad o irregularidad, concavidad o convexidad. Acierto 100%.

  Un alumno presenta una circunferencia como un polígono especial que es el de mayor número de lados, polígono al que no se le aprecian vértices y el número de lados.

- Círculos. Representan acertadamente y lo caracterizan como el espacio interior de la circunferencia, el 85%. El otro 15% responde: una línea curva cerrada regular.

- Semicírculo. Dibujan la mitad de un círculo y en las características contestan: “la mitad de un círculo”, el 70%. El otro 30% dibuja únicamente la circunferencia.

- Semicircunferencia. La dibujan correctamente y en las características escriben: la línea curva cerrada o polígono regular cuyas puntas están a igual distancia del centro, el 70%. El 30% no contesta en las características.

2.4.2.2 Ficha No. 2 Identificación-de Figuras-Geométricas. -Identificación de figuras geométricas dentro de una gama de ellas dibujadas en una hoja (Ver anexo A).

Se pide que escriban el número con el cual están identificadas, al frente del nombre correspondiente.

Se presentan aquí los resultados sin análisis exhaustivos de la ficha, pues ya se hizo en la prueba inicial.

- Cuadrilátero. Es reconocido en un promedio de 93%. El 7% de los señalamientos se hace a figuras que tienen más de cuatro lados.

- Triángulos. El 88% de las respuestas son correctas. El 12% señala como triángulos, polígonos cóncavos de más de tres lados, especialmente el que tiene figura de flecha.

- Triángulo Isósceles. El promedio de respuestas correctas es del 81%. En los casos de omisión, en gran parte es porque no se reconoce el triángulo equilátero como isósceles (19%).

- Cuadrado. Son reconocidos los cuadrados presentados en un 83%. Los que no son reconocidos, en la mayoría de los casos son los que se presentan con un vértice inferior y los lados en posición diferente a la vertical y horizontal.

- Elipse. En este caso hubo un reconocimiento del 90% de las elipses presentadas. El 10% de fallas se presentaron en la señalización de algunos polígonos irregulares como elipses.

- Trapecio. El promedio de aciertos en las señalizaciones es del 74%. El 26% de desaciertos se presentan por no señalar cuadrados rectangulares o rombos como trapecios.

- Figuras Curvilíneas. El 89% de las figuras presentadas con estas características fueron señaladas correctamente. El 11% de desaciertos se presentó en la señalización de algunos polígonos como figuras curvilíneas.

- Hexágono. Estos polígonos son señalados, con preferencia de los regulares en un promedio del 91%. Se dejó de señalar algunos irregulares en un promedio del 9%.

- Pentágono. El éxito obtenido en la señalización del pentágono fue del 97%. El 3% de no señalización se detectaron en aquellos casos en que el pentágono es irregular.

- Triángulo Rectángulo. El señalamiento correcto de triángulos rectángulos se hace en un 75%. El 25% de desacierto se debe a la no identificación de triángulos rectángulos en diferentes posiciones a las presentadas normalmente, es decir, se presentan con la hipotenusa en la parte inferior de la lámina o con alguno de sus catetos formando ángulo agudo con la horizontal.

- Triángulo Equilátero. El señalamiento correcto se hace en un 93% en promedio. El 7% de omisiones se observa en el caso de triángulos equiláteros en diversas posiciones y de pequeño tamaño.
- Circunferencias. El 88% en promedio de las circunferencias son señaladas correctamente. El 12% de señalamientos diversos se realizan en las figuras curvilíneas presentadas.

- Rombos. Se identifica el 91% de los rombos dibujados. El 9% no identificado corresponde a los presentados “apoyados” en uno de sus lados, no se identifica el cuadrado como un rombo.

- Polígonos de más de clatro Lados. Las respuestas correctas son en promedio del 79%. En un 21% se omite señalar algunos polígonos de más de cuatro lados, especialmente en el caso de los irregulares.

- Polígonos Regulares. En este caso son reconocidos en un promedio del 76%. Los casos en que se ha omitido el señalamiento (24%), son los triángulos equiláteros y los cuadrados.

- Triángulo Escaleno. Los presentados son identificados en promedio en un 83%. El 17% no reconocido es cuando la diferencia de la longitud de los lados es muy poca.

- Paralelogramo. En promedio el 80% de los paralelogramos dibujados son identificados, algunos de los no señalados (20%) son rombos y rectángulos en posiciones poco comunes, es decir, con algunos de sus lados formando ángulo agudo con la horizontal.

2.4.2.3 Ficha No. 3. Concepto De Ángulo, Paralelismo, Perpendicularidad y Transformación en el Plano

- A la pregunta: para ti qué es un ángulo? Se obtienen las siguientes respuestas:

. La abertura entre dos líneas que se cortan (80%).

. Espacio comprendido entre dos líneas (10%).

. No contesta (10%).

- Apareamiento. La identificación de los ángulos que aparecen en cada columna con la misma medida, se realiza de la siguiente manera:

- Aciertan cuando se presentan ángulos de la misma medida pero uno de ellos con un lado más corto, el 94%.

. Con el mismo arco en distinta posición y distinta longitud de los lados, el 87%.

. El ángulo recto en otra posición, el 83%.

. El ángulo obtuso en otra posición, el 78%.

- Medida de ángulos suplementarios, opuestos por el vértice y suma de ángulos internos de un triángulo.

. En la medida de los ángulos suplementarios, acierta el 85%.

. En los opuestos por el vértice, responde correctamente el 27.5%.

. La suma de los ángulos internos de un triángulo igual a 180” es respondida correctamente por el 95%

- Paralelismo y perpendicularidad.

. La identificación de las líneas paralelas se realiza en un 93%.

- Transformaciones geométricas. Al presentarse un triángulo con línea continua y otro con línea punteada al que se le han aplicado traslaciones,-simetrías, rotaciones, homotecias y composición de ellas y se pregunta qué debe hacerse con el triángulo para que ocupe la posición punteada, responden:

. En el primer dibujo: una translación, 100%.

. En el segundo dibujo: una simetría, 95%.

. En el tercer dibujo: una ampliación, 95%.

. En el cuarto dibujo: una reducción, 95%,

. En el quinto dibujo: un giro, 100%.

. En el sexto dibujo: translación y giro, 95%.

. En el séptimo dibujo: translación y ampliación, 90%.

BN Las anteriores respuestas corresponden a las transformaciones correctas a realizar en cada caso.

2.4.2.4 Ficha No. 4. Áreas y Perímetros

- Se solicita calcular el área y el perímetro de un rectángulo teniendo como unidad de medida un cuadro de papel, mediante la pregunta: si se siembra un libra de papa en cada cuadro (suponiendo que hay representado un terreno cultivable), cuantas libras de papa puedes sembrar?; cuanto alambre necesitas para cercar el terreno con una sola cuerda ?; qué tan grande es el terreno ?

• A la primera responde correctamente el 75%. El 10% no contesta.

. A la segunda pregunta responde correctamente el 85%.

. A la pregunta: qué tan grande es el terreno, responde asociando el tamaño al área en el número correcto de cuadros, el 90%.

- Cálculo de áreas de triángulos. En varios triángulos dibujados sobre cuadricula, se solicita indicar cuáles tienen igual área, cuál tiene mayor área, cuál menor y cuanto mide el área de cada uno. Los resultados son los siguientes:

. Triángulos de igual área, responde correctamente el 100%.

. Identifica correctamente el de menor área, el 95%. El 5% no responde.

• El de mayor área es identificado correctamente por el 94%. El 6% no responde.

. Calcula correctamente todas las áreas, el 89%.

2.4.2.5 Ficha No 5 Figuras tridimensionales

- Cálculo de áreas y perímetros de figuras irregulares, de lados horizontales y verticales, además aparece un semicírculo.

. Calcula dentro de lo aceptado como correcto todas las áreas, el 91%.
. Calcula dentro de lo aceptado como correcto todos los perímetros, el 74%.

- Dibujar todos los rectángulos con perímetro igual a 20 y decir cuál tiene mayor área.

. Dibuja todos los posibles correctamente, el 97%.

. Identifica correctamente el de mayor área, el 100%.

CUERPO.	NOMBRE	CARACTERÍSTICAS.
Cilindro.	95%	95%
Cilindro de baja altura.	95%	85%
Cubo.	100%	85%
Cono.	95%	80%
Tetraedro.	70%	75%
Pirámide.	100%	90%
Prisma rectangular.	90%	95%
Cono oblicuo.	60%	80%
Esfera.	85%	75%
Tronco de cono.	85%	85%
Prisma oblicuo.	90%	80%
PROMEDIOS	87.7%	84.1%

2.4.3. Análisis Comparativo de los Resultados de la Prueba Inicial y la Prueba Final; La efectividad de la estrategia propuesta se puede observar claramente al comparar los resultados obtenidos en las pruebas inicial y final, en las que se aplicaron las misma características.

Los resultados son analizados en porcentajes de respuestas consideradas como acertadas en cada ítem de las diferentes fichas. En los casos en que se hace necesario observar e tipo de respuestas, se describen cada una para ser comparadas en forma cualitativa.

2.4.3.1 Ficha No.1 Representación y Caracterización de Figuras Geométricas: Estos resultados son teniendo en cuenta tanto el dibujo como la caracterización correctas.

FIGURA	RESPUESTAS CORRECTAS EN %		EFECTIVIDAD
	PRUEBA INICIAL	PRUEBA FINAL	
Triángulo Equilátero.	60.0	92.0	+ 32.0
Triángulo Isósceles.	10.0	85.0	+ 75.0
Triángulo Escaleno.	57.5	87.0	+ 29.5
Triángulo Rectángulo.	27.5	80.0	+ 52.5
Cuadrado.	0.0	90.0	+ 90.0
Rombo.	0.0	45.0	+ 45.0
Rectángulo.	0.0	80.0	+ 80.0
Trapecio.	0.0	75.0	+ 75.0
Paralelogramo.	0.0	75.0	+ 75.0
3 Polígonos de 4 lados	40.0	100.0	+ 60.0
Círculo.	17.5	85.0	+ 77.5
Semicírculo.	32.2	70.0	+ 37.8
Circunferencia.	0.0	70.0	+ 70.0
PROMEDIOS	18.8	79.5	+ 61.5

Los valores tomados en la casilla: Efectividad, son la diferencia en porcentajes de respuestas correctas entre la prueba inicial y final. El signo + (más) significa que hubo aumento en porcentajes de aciertos. Si hubiera disminución se representaría con el signo - (menos).

Se puede observar que en todos los casos se obtuvo grandes progresos en la caracterización de figuras geométricas, lo que indica una buena conceptualización en este aspecto, lograda mediante la estrategia aplicada.

2.4.3.2 Ficha No. 2. Reconocimiento de Figuras Geométricas:

FIGURA	RESPUESTAS CORRECTAS EN %		EFECTIVIDAD
	PRUEBA INIC.	PRUEBA FINAL	
Cuadrilátero.	42.5	93.0	+ 50.5
Triángulos.	71.7	88.0	+16.3
Triángulo Isósceles.	24.0	81.0	+ 57.0
Cuadrados.	57.5	83.0	+ 25.5
Elipses.	0.0	90.0	+ 90.0
Trapecios.	16.3	74.0	+ 67.7
Figuras curvilíneas.	41.4	89.0	+ 47.6
Hexágonos.	54.3	91.0	+ 36.7
Pentágonos.	33.7	97.0	+ 63.3
Triángulos Rectángulos.	37.0	75.0	+ 38.0
Triángulos Equiláteros.	35.8	93.0	+ 57.2
Circunferencias.	80.0	88.0	+ 8.0
Rombos.	19.0	91.0	+72.0
Polígonos de + de 4 lados.	70.0	79.0	+ 9.0
Polígonos Regulares.	1.0	76.0	+ 75.0
Triángulos Escalenos.	43.3	83.0	+ 39.7
Paralelogramos.	15.4	80.0	+ 64.6
PROMEDIOS	37.8	85.3	+ 48.1

La identificación de las figuras geométricas implica un conocimiento plano de ellas y sus características. Por ejemplo, para identificar un triángulo isósceles dentro de un

La identificación de las figuras geométricas implica un conocimiento plano de ellas y sus características. Por ejemplo, para identificar un triángulo isósceles dentro de un grupo de figuras, es necesario saber que un triángulo es una figura geométrica con tres lados y que para ser isósceles de debe tener dos lados de igual medida.

El notorio aumento de respuestas correctas de la prueba final con respecto a la prueba inicial, es atribuible a la estrategia utilizada, pues en otros cursos los alumnos no habían tenido tan notorios avances.

2.4.3.3 Ficha No. 3. Conceptos de Ángulo, Medida de Ángulo, Paralelismo, Transformaciones Geométricas:

- En la primera pregunta se encuentran respuestas diversas en las dos pruebas. Esta pregunta pretende no que se de una definición de ángulo, sino que se exprese cuál es el concepto que se tiene del mismo.

PREGUNTA: PARA TI QUÉ ES UN ÁNGULO ?		
RESPUESTAS OBTENIDAS	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
– Unión de dos rectas en un punto.	27.5	0.0
– espacio que hay entre líneas que se unen.	5.0	10.0
– Abertura entre las líneas que se cortan en un punto.	2.5	80.0
– Figura o una parte de figura geométrica.	12.5	0.0
– Otras respuestas diversas.	25.0	0.0
– No contesta.	27.5	10.0

En la prueba inicial la diversidad de las respuestas, indica la poca claridad que hay en el concepto; la mayor agrupación está en el concepto de ángulo como la unión de dos rectas en un punto.

En la prueba final hay un consenso en la idea de que es la abertura comprendida entre dos líneas que se cortan en un punto, lo que se acerca más al concepto en estudio.

- Medida del ángulo. Se presentan dos columnas con ángulos que tienen igual medida. Se debe identificar los ángulos que corresponden a la misma medida, no importando las variantes de posición, longitud de los lados o radio de arco.

MEDIDA DE ÁNGULO.		
RESPUESTAS OBTENIDAS	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
– Identifican los ángulos de igual medida, sin tener en cuenta la medida del arco.	27.5	92.5
– De igual medida con lados de diferente longitud.	40.0	94.0
– Con el mismo arco y en distinta posición y distinta longitud de los lados.	28.0	87.0
– Ángulo recto en diferente posición.	62.5	83.0

Al realizar el apareamiento de ángulos con igual medida, pero introduciendo variantes en la longitud de los lados, posición de ángulo y radio del arco indicador del ángulo. Si se señalan los que tienen la misma medida independientemente de dichas variables, si lo que da a entender que hay claridad en el concepto de medida de los ángulos.

En la prueba inicial hubo marcadas fallas que se han superado notablemente, al observar los resultados de la prueba final.

- Medida de ángulos suplementarios, opuestos al vértice y ángulos internos de un triángulo.

MEDIDA DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS, OPUESTOS POR EL VÉRTICE Y ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO.		
RESPUESTAS OBTENIDAS	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
– Medida de ángulos suplementarios.	22.5	85.0
– Medida de ángulos opuestos por el vértice.	27.5	55.0
– Suma de ángulos internos de un triángulo.	25.0	95.0
– PROMEDIOS	25.0	78.3

En el anterior cuadro se observa el progreso en calcular medida de un ángulo suplementario a otro, de uno opuesto por el vértice a otro de medida conocida y la medida de un ángulo interno de un triángulo conocidos los otros dos.

- En el caso de las transformaciones geométricas no se realiza cuadro comparativo, pues en la prueba inicial se detectó ausencia total de conocimientos en este campo. Para observar los progresos nos remitimos a los resultados ya analizados.

2.4.3.4 Ficha No. 4. Áreas y Perímetros

- Áreas y Perímetros.

PREGUNTAS	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
- Medida del área de un terreno en términos de cantidad posible de siembra en él.	27.5	90.0
- Medida del perímetro en términos de cantidad de material para cercarlo.	22.5	75.0
- Qué tan grande es el terreno ?		
- PROMEDIOS	12.5	75.0
	20.8	80.0

- Cálculo de áreas de triángulos.

RESPUESTAS OBTENIDAS	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
- Identificación del triángulo de menor área.	42.0	95.0
- Identificación de triángulos de igual área.	12.5	100.0
- Identificación de triángulos de mayor área.	35.0	94.0
- Cálculo de las áreas de cada triángulo.	17.5	89.0
- PROMEDIOS	26.7	94.5

- Cálculo de áreas y perímetros de figuras diversas.

PREGUNTA	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
- Área.	7.5	91.0
- Perímetro.	0.0	74.0
- PROMEDIOS	3.8	82.5

- Dibujo de todos los rectángulos con perímetro igual a 20.

PREGUNTA	PRUEBA INICIAL %.	PRUEBA FINAL %.
- Dibuja correctamente todos los posibles.	0.0	97.0

2.4.3.5 Ficha No. 5. Figuras Tridimensionales: En esta ficha ya se han presentado cuadros para cada uno de los temas, los cuales se pueden comparar observando los notables progresos en la identificación y caracterización de los cuerpos.

2.4.3.6 Conclusiones: A través de la prueba final se puede observar los progresos en los diferentes aspectos tratados durante el curso de geometría utilizando la estrategia propuesta.

Las dificultades detectadas en la representación de figuras geométricas en la prueba inicial, se atribuyen a las estrategias empleadas en los cursos anteriores, en donde se ha enfatizado en las definiciones y su memorización y no en conocimiento, análisis y caracterización de cada figura, sus invariantes y su relación con los demás conceptos geométricos.

El tener claro la concepción de las características y su adecuada comprensión, es también factor fundamental para reconocer las figuras geométricas.

Además se ha hecho que el alumno reconozca figuras solamente en condiciones particulares, que siempre son empleadas para la enseñanza, por ejemplo un triángulo rectángulo o un cuadrado, son siempre presentados en la misma posición. Cuando se introducen estas variantes a lo observado comúnmente en clase, para el alumno ya no es la misma figura. En las estrategias comúnmente utilizadas no se ha tenido en cuenta las invariantes que caracterizan cada figura.

Por otra parte, comúnmente se enseñan conceptos errados que impiden por ejemplo, el reconocimiento de un rectángulo, un rombo y un trapecio en un cuadrado.

En los resultados de la prueba inicial, además se detecta despreocupación por la caracterización de las figuras, lo mismo que la construcción de los mismos con regla y compás.

Otros conceptos descuidados como se demuestra en la prueba inicial, son el ángulo y su medida, tratando de darse definiciones que resultan poco precisas y que confunden al estudiante, lo mismo que el paralelismo y la perpendicularidad no son tratados con suficiente claridad y diversidad de situaciones. Sucede lo mismo con el perímetro y área de superficies planas, confundiéndose los conceptos.

En cuanto a los cuerpos, no hay preocupación por la enseñanza de sus características y su clasificación.

Se ha ignorado por completo, en gran parte, de los programas las transformaciones geométricas.

Estas fallas en la enseñanza de la geometría se pueden subsanar mediante la aplicación de una estrategia como la presentada aquí, que ha demostrado estar acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba final.

Esta estrategia es una muestra de que los conceptos geométricos básicos son fácilmente asequibles a los estudiantes cuando se emplean los medios adecuados para ello. Las variaciones que se puedan introducir quedan sujetas a las condiciones particulares de cada grupo y la iniciativa y conocimiento del profesor.

2.5, LA INTERVENCION,

La estrategia propuesta tiene como finalidad lograr enriquecer la cultura geométrica de los estudiantes de la educación básica, en especial en básica secundaria, de los establecimientos educativos de nuestro medio.

El progreso de los conocimientos geométricos se ha de lograr mediante actividades que los estudiantes realizan mediante la manipulación de materiales que son los mediadores que facilitan el aprendizaje creativo, permiten redescubrir las propiedades geométricas, movilizan el pensamiento espacial y preparan al estudiante, dándole la competencia necesaria para demostrar teoremas y formular generalizaciones, en los cursos posteriores.

En la investigación se aplica la estrategia a un grupo de estudiantes del grado séptimo del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán de El Carmen de Viboral (Ant.) y se pretende obtener mejores resultados que con las estrategias tradicionalmente empleadas en la enseñanza geométrica.

De obtenerse los resultados esperados, se propone su aplicación en general en la educación básica secundaria, sugiriendo a los colegas que se interesen por ella, adaptarla a las condiciones especiales de cada grupo.

No se pretende obtener resultados perfectos, pues hay situaciones particulares inherentes a estudiantes o grupos en especial, o el momento en que se aplica, que no se pueden controlar. No se debe olvidar que se está trabajando con personas que tienen condiciones individuales, cambiantes e impredecibles.

La estrategia presenta tres momentos bien definidos, con fines muy concretos a saber;

- Actividades preliminares. En las que se prepara al alumno para que ejecute las actividades que lo conduzcan al estudio de las transformaciones geométricas.
- Geometría de las transformaciones. Es aquí donde se induce a la futura formalización y a la demostración intuitiva mediante la manipulación de materiales, en especial el geoplano.

- Evaluación y realimentación. Este no es un momento final sino que está embebido en todo el proceso, pues siempre ha de observarse, analizarse, evaluarse, corregirse errores en un continuo ir y venir, que permita retomar temas y profundizarlos, arraigando más los conocimientos obtenidos. Sin embargo, es aconsejable realizar no solo una evaluación permanente, sino además al final del curso, echar una mirada al camino recorrido y observar los cambios logrados por la estrategia.

2.5.1 Actividades Preliminares.

2.5.1.1 Exploración. (Anexo A) Al comenzar cada curso se debe detectar los conocimientos que poseen los estudiantes mediante una prueba-sencilla y muy cuidadosa sin el carácter de calificación.

Esto permite al profesor tener certeza de cuánto saben sus alumnos, para elegir los temas a tratar en el inicio y cuáles hay que reforzar, para así adaptar la propuesta a las necesidades de sus alumnos.

La prueba contiene los elementos básicos que se deben haber adquirido a ese nivel como caracterización, reconocimiento y representación de figuras planas; reconocimiento y clasificación de cuerpos geométricos; concepto de ángulo y su medida, paralelismo, perpendicularidad, horizontalidad, verticalidad; área y perímetro. Y los que el profesor según sus criterios crea necesarios.

Los resultados de este diagnóstico marcan la pauta de los temas a enfatizar durante las actividades planeadas.

Sin embargo, y de acuerdo a los resultados de rendimiento académico observados en estudiantes de básica secundaria, análisis realizado por las autoridades competentes como establecimientos educativos, pruebas de admisión en educación superior, pruebas del ICFES, etc. y comprobado mediante k prueba inicial realizada en el presente trabajo, los estudiantes en general, a pesar de tener buena competencia para el aprendizaje, poseen muy pocos conocimientos, por lo que se deben reforzar en su totalidad.

2.5.1.2 Nivelación.

2.5.1.2.1 Estudio de los cuerpos Geométricos. (Anexo B)

El niño observa los cuerpos que le rodean y percibe que algunos tienen la misma forma, por ejemplo: pelota, manzana y naranja tienen forma esférica, etc.

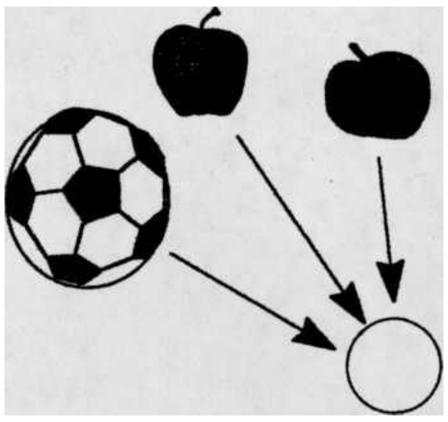


Figura # 5

El contacto del estudiante con su entorno a través de los sentidos de la vista y el tacto, mediante la observación y manipulación de objetos reales constituyen las primeras experiencias espaciales euclidianas y son el punto de contacto entre la cotidianidad y el inicio del pensamiento matemático.

La interacción con materiales propios del medio que permitan clasificar, caracterizar, construir y luego comprender y formalizar los conceptos mediante actividades bien dirigidas con objetivos concretos será básico para la movilización del pensamiento espacial, esto es compatible con las ideas de Piaget, Bruner (1967) y Dienes (1.959), quienes afirman que la manipulación de objetos "concretos" constituyen la base del conocimiento humano y en especial de las matemáticas. Entendido lo concreto no solo como lo palpable físicamente sino lo que con anterioridad ha sido incorporado al conocimiento; para ello primero se percibe estando en contacto directo con los objetos para luego representarlos en ausencia de ellos.

Por lo tanto el aprendizaje de la geometría debe comenzar con la manipulación de elementos familiares y el reconocimiento de sus formas geométricas, para su caracterización y su clasificación.

Así se reconocerán en los cuerpos con los que comúnmente se está en contacto la composición de formas geométricas, permitiéndose el inicio de la cultura espacial.

De acuerdo con lo anterior se propone iniciar el aprendizaje con la manipulación de objetos que permitan el reconocimiento de formas, la clasificación de los cuerpos según características observadas, en análisis de dicha características, el estudio de cada cuerpo teniendo en cuenta la clasificación y caracterización anterior.

2.5.1.2.1.1 Clasificación de los Cuerpos. Una primera clasificación de los cuerpos que se realiza en la actividad propuesta (ver anexo B) es en convexos y no convexos, observar sus características, diferencias y semejanzas, y sacar conclusiones; es muy importante. El joven estudiante realiza conjeturas y plantea sus inquietudes compartiéndolas con sus compañeros, para que entre todos mediante discusiones grupales saquen conclusiones y enriquezcan los conocimientos con los aportes y a la vez colabore con ellos en el descubrimiento de las características.

Centrándose en los cuerpos geométricos convexos, se realiza una clasificación de estos en cuerpos redondos y poliedros.

En los cuerpos redondos se analizan la esfera, el cilindro y el cono, en cuanto a sus características, diferencias y semejanzas.

Una experiencia muy interesante es encontrar mediante una actividad la relación existente entre el volumen del cilindro y el volumen de cono con igual base y altura; esto se logra construyendo en cartulina un cilindro y un cono de igual base y altura y luego llenar el cono con arena y comprobar cuantas veces hay que llenar el cono para poder llenar el cilindro.

Se observa que el volumen del cilindro equivale a tres veces el del cono.

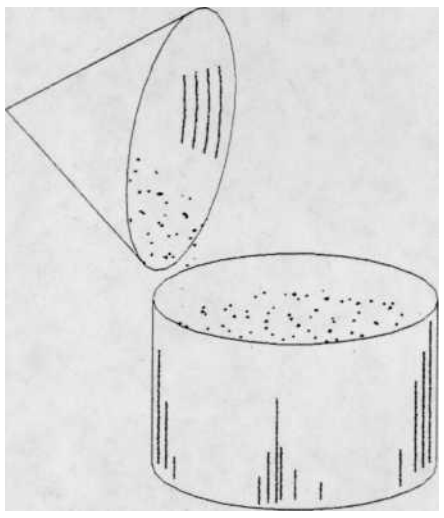


Figura # 6

El volumen del cilindro equivale 3 veces el del cono.

Los poliedros son objetos de un estudio más detallado. Su clasificación y características es la siguiente.

- Cuerpos
  - No Convexos
  - Convexos
    - Redondos
      - Cilindro
      - Cono
      - Esfera
        - Formas
        - Caracteristicas
        - Relaciones entre ellos
    - Poliedros
      - Regulares
        - Angulos poliedros iguales
        - Caras polígonos regulares iguales
          - Tetraedro
          - Octaedro
          - Hexaedro
          - Dodecaedro
          - Icosaedro
            - Caracteristicas
            - # de caras
            - # de aristas
            - # de vertices
            - Formas de las caras
            - Volumen
            - Diagonales
      - Irregulares
        - Prismas no regulares
          - Paralelepipedo
          - no regular
          - Recto
          - Oblicuao
        - Prismas Truncados
        - Piramides
        - Piramides Truncadas
          - Segun sus bases
        - Otros Poliedros no regulares
          - Arquimedianos

La clasificación de los objetos recolectados por los alumnos se hace de acuerdo con las características comunes que ellos observan, hasta obtener una primera gran clasificación en poliedros y cuerpos redondos.

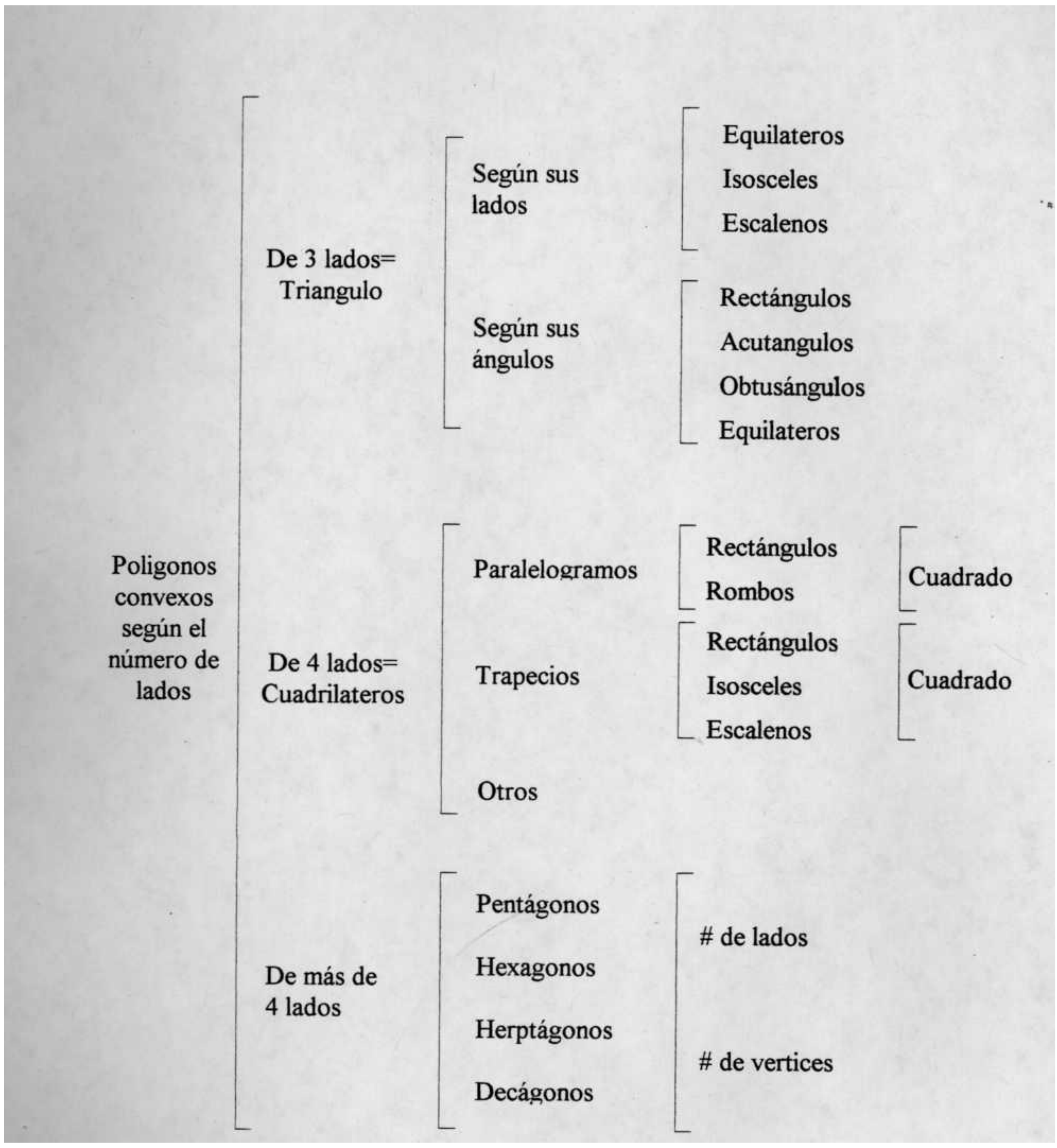
La clasificación presentada en el cuadro sinóptico no se ejecuta completa en este primer momento con los estudiantes y solo se hace después en los grupos superiores.

Luego de la clasificación y caracterización de los cuerpos se procede a "desarrollar" (colocar sobre una superficie todas las caras) los que sea posible de acuerdo al material del que están elaborados (por ejemplo cartón) teniendo cuidado de sellar con cinta adhesiva las tapas y demás aberturas. A continuación procedemos a cortar por las aristas, dejando unida cada cara a una adyacente por una de las aristas, obteniendo el desarrollo del cuerpo, allí se podrá observar las formas geométricas de cada cara y realizar un dibujo de la plantilla obtenida; esto con el fin de tener las memorias de todas las actividades realizadas y dar la oportunidad a los estudiantes que saquen conclusiones, escriban sus ideas al respecto.

Se separa cada cara y se analizan sus características. A partir de este momento se estudian las características de las figuras geométricas en el plano.

2.5.1.2.2 Estudio de las Figuras en el Plano. Se obtienen polígonos convexos y no convexos. Se realiza una primera clasificación de los convexos de acuerdo al número de lados.

2.5.1.2.2.1 Clasificación de los polígonos según el número de lados, (anexo B).



.Polígono Equiángulo : tiene todos sus ángulos internos iguales

Polígono Equilátero: tiene sus lados iguales.

Polígono regular ; es equiángulo y equilátero.

2.5.1.2.2.1.1 Clasificación de Triángulos (anexo B). Paralelamente a la actividad anterior, se construye sobre cartulina plana con ayuda de regla y compás, los diferentes tipos de triángulos clasificados según sus lados y según sus ángulos. Se obtiene una gama de triángulos de la combinación de estas clasificaciones. Las construcciones se hacen bajo la orientación del profesor quien indica los pasos a seguir para el dibujo de cada uno, para ello es necesario aprender primero unas construcciones básicas como: trazado de paralelas, perpendiculares, encuentro del punto medio de un segmento.

Luego de dibujados los triángulos se recortan y se dibujan en el cuaderno de notas en donde se hace un análisis de las características de cada uno, qué se conserva y qué cambia, es decir, a la luz de los invariantes cuando se modifica la posición, el tamaño o la longitud de los lados o los ángulos.

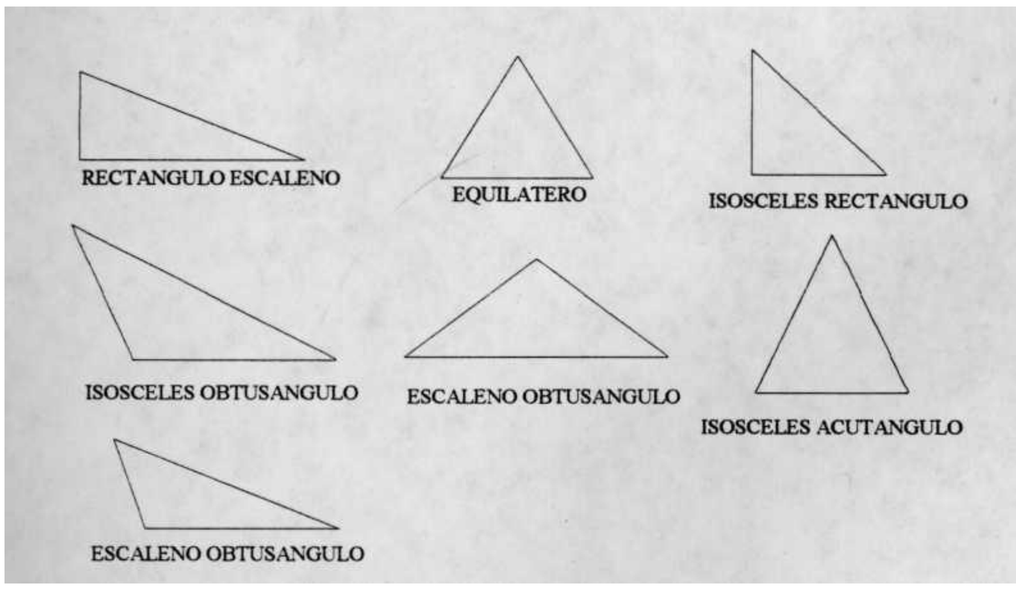


Figura # 7

2.5.1.2.2.1.2. Clasificación de los Cuadriláteros (Anexo B).

- El cuadrilátero: Es una figura cerrada de cuatro lados, lo podemos clasificar según las invariantes, así:
- Trapecio: Tiene dos lados paralelos.
- Paralelogramo: tiene sus lados opuestos paralelos, esto implica que todo paralelogramo es trapecio, pues al menos dos de sus lados son paralelos. Algunos paralelogramos son:

. El rectángulo: tiene sus cuatro ángulos internos rectos. (Algunas veces se enseña erróneamente que el rectángulo "siempre" tiene dos lados de mayor medida, lo que conduce a no reconocer en el cuadrado un rectángulo).

. Rombo: tiene sus lados de igual medida

• Cuadrado: posee sus cuatro ángulos internos rectos (por lo que es rectángulo), sus cuatro lados de igual medida (por lo que es rombo) y sus lados opuestos paralelos (por lo que es trapecio).

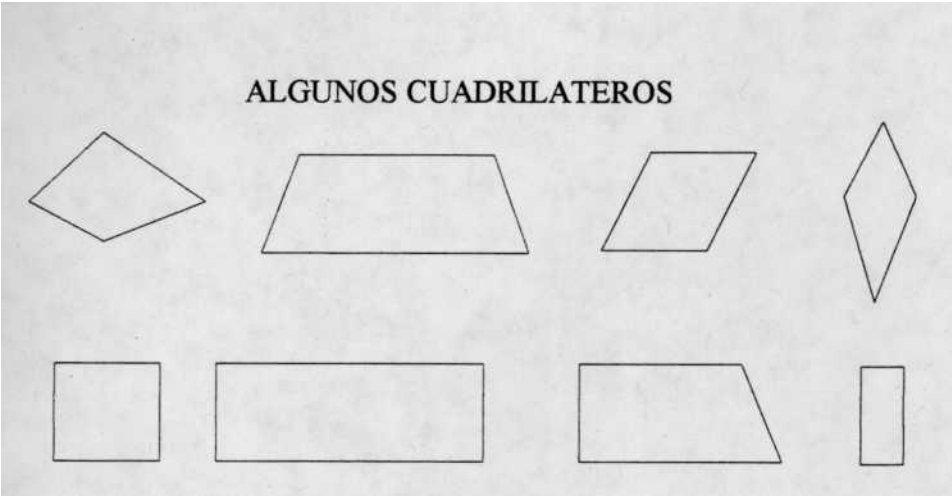


FIGURA #8

- Otros cuadriláteros; de lados desiguales y no paralelos se pueden analizar de acuerdo a sus características particulares. Existe gran variedad de ellos; por ejemplo, el que se ha denominado cometa que tiene los lados adyacentes de igual medida y los opuestos de diferente medida; sus ángulos opuestos son de igual medida.

  Otro es el cuadrilátero que tiene todos sus lados de diferente medida.

Se motiva al estudiante a que encuentre todos los que pueda, los analice según sus características y los construya. Es muy importante que consigne en su cuaderno sus experiencias y conclusiones.

El acompañamiento permanente del profesor permite al estudiante ir empleando el lenguaje adecuado, analizando las relaciones entre las diferentes figuras y sus elementos constitutivos.

Al igual que los triángulos, los cuadriláteros también se pueden recortar en cartulina u otro material que permita su análisis de acuerdo al cambio de posición y tamaño, por ejemplo, puede observarse el rombo en varias posiciones y no solamente con un vértice inferior; esta dinámica en las figuras posibilita su análisis de acuerdo a las invariantes; a la luz de éstas se realiza la clasificación y caracterización, permite la comparación de unas y otras. Qué cambia y qué se conserva en cada una con respecto a las otras.

Es un cuestionamiento que aporta muchos elementos en el esclarecimiento de las posibles dudas que todavía persistan en el pensamiento del estudiante.

Con el estudio comparativo, descubre por sí mismo las características que hacen que cada figura sea esa y no otra; que pertenezca a un determinado grupo, o que tenga semejanzas o diferencias con otras.

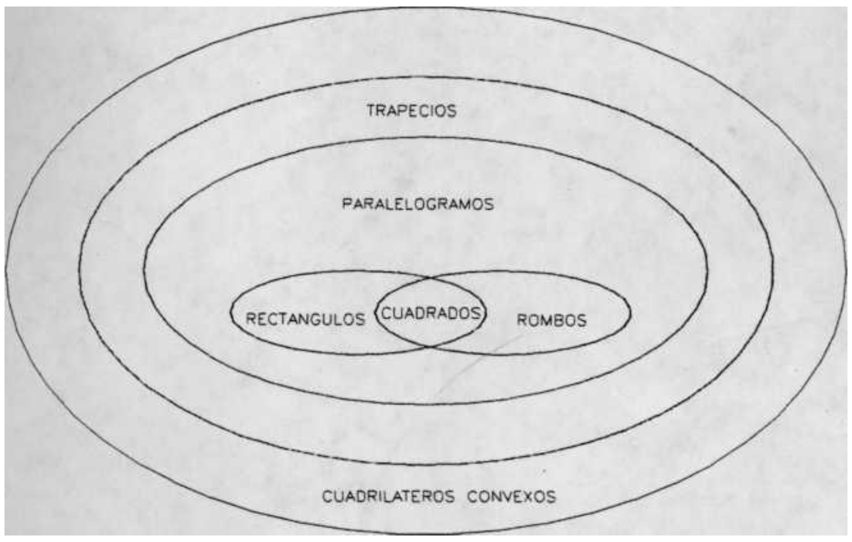


Figura # 9

2.5.1.2.2.1.3 Polígonos de más de cuatro lados. (Anexo B). El análisis de estos jjolígonos se hace siguiendo el mismo proceso de los anteriores, realizando su clasificación según el número de lados y citando los más importantes como;

Pentágono: 5 lados.

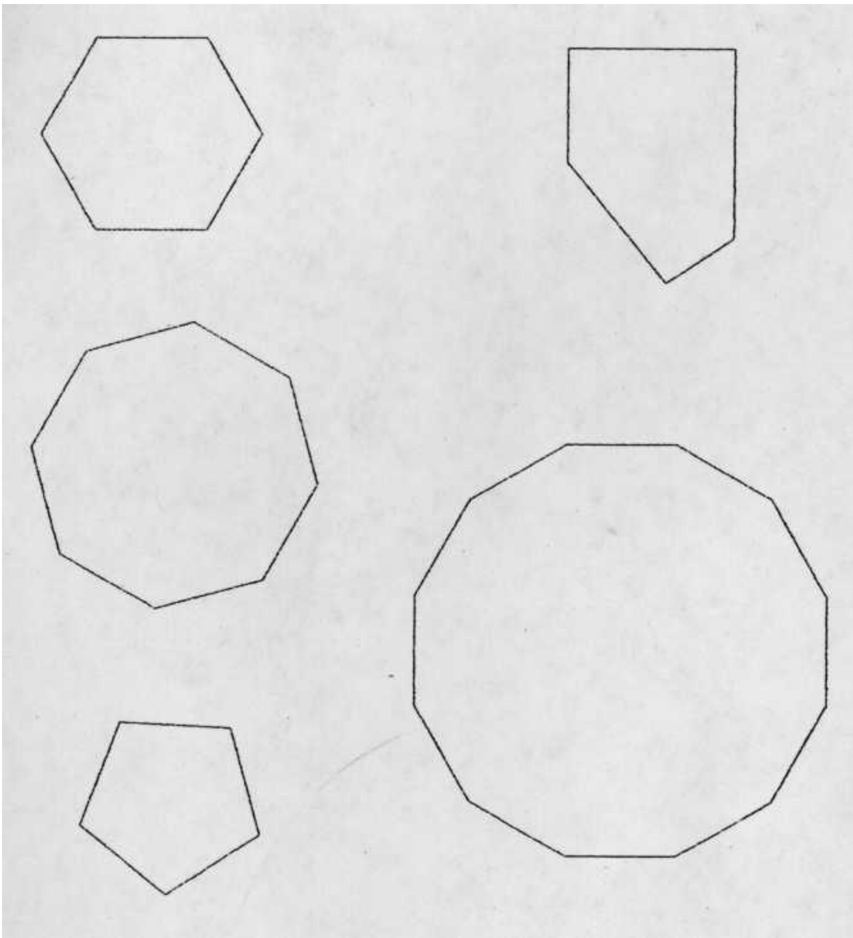
Hexágono: 6 lados.

Octágono: 8 lados.

Decágono: 10 lados.

Dodecágono: 12

lados Icoságono: 20



ALGUNOS POLIGONOS DE MAS DE 4 LADOS

Los polígonos según la medida de sus ángulos, se clasifican en:

Equiángulo: si tiene los ángulos internos de igual medida.

No equiángulo: si no todos sus ángulos internos tienen igual medida.

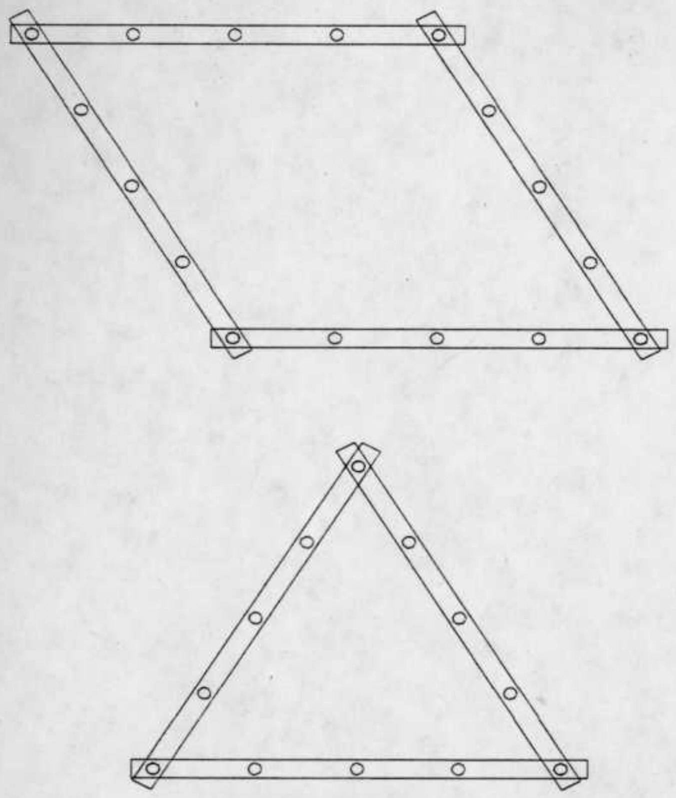
Según la medida de sus lados: equilátero si todos sus lados son de igual medida.

Si son equiángulos y equiláteros, son regulares.
Se plantean los siguientes interrogantes:

Todo polígono equilátero es regular?
Todo polígono regular es equilátero ?
Todo polígono equiángulo es regular ?
Todo polígono regular es equiángulo ?
Todo polígono equiángulo es equilátero ?
Todo polígono equilátero es equiángulo ?

Para resolverlos, el estudiante observa las características que debe cumplir cada uno y cuáles no son necesarias, cuáles son suficientes para que sea clasificado en un determinado grupo. Con la ayuda de las figuras recortadas se logra esta caracterización comparativa. Las apreciaciones y conclusiones son consignadas en el cuaderno.

2.5.1.2.2.2 Caracterización de los polígonos: Un material que es de gran ayuda es el propuesto por Emma Castelnuovo (1970) consistente en la construcción de polígonos con reglillas de madera u otro material, articulados mediante pernos o pasadores que permitan variar sus ángulos (Figura #10).



MATERIAL DE "MECANO"

FIGURA #10

Con estos polígonos así construidos se analiza las posibles variantes en la figura al modificar sus ángulos. Si es permisible por el modelo, continúa siendo regular ?, continúa siendo equiángulo ?, continúa siendo equilátero ?. Son preguntas que el estudiante responderá a la luz de lo que se conserva (invariantes) y lo que cambia.

Es posible intercambiar regletas para modificar otras condiciones, como la longitud de los lados. También es posible observar las diferencias entre las figuras comparándolas entre sí. El triángulo será escualizable ? o es una figura rígida ?.

Mediante la observación se sacan conclusiones y se hacen conjeturas dando el primer paso hacia la demostración, si cada conjetura se justifica dando una razón lógica y validada con anterioridad.

En el ejemplo anterior puede hacerse una pregunta: En un triángulo cualquiera es posible variar la medida de alguno de sus ángulos internos sin modificar la medida de sus lados ?

La respuesta se da mediante la observación en la experiencia realizada con los materiales propuestos, luego se justifica plenamente con razones lógicas, sustentadas ordenadamente.

Es importante escribir en el cuaderno de notas las conclusiones y discutirlas con los compañeros; de esta manera se comparan los resultados llegando luego a un consenso general. Se complementa la actividad con construcciones con regla y compás, logrando así la representación en ausencia de la figura que es el segundo aspecto del conocimiento según Piaget. (Piaget, Inhelder 1956).

La comparación de los polígonos construidos con regleta y cartulina, permite aclarar cualquier duda que se pueda presentar al observar el primer material, creyéndose peligrosamente que los polígonos son únicamente los lados, sin tener en cuenta su interior.

2.5.1.2.2.3 Construcción de los cuerpos Geométricos (Anexo B).

Ya se tiene un conocimiento claro de las figuras geométricas. Como son las constitutivas de las caras de los poliedros, se está en condiciones de construirlos a partir de ellas.

Los poliedros que se propone construir son: una gama de prismas que son distribuidos entre los alumnos para luego reunirlos y analizarlos; los prismas deben ser de diferente base, comenzando por el triangular, cuadrado, rectangular, pentagonal, hectagonal, etc.

La construcción de pirámides permite el análisis de sus características y sus diferencias con otros cuerpos.

La construcción de los cinco poliedros no regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, permite su caracterización y reconocimiento.

Se complementa con la construcción de otros poliedros regulares y algunos cuerpos redondos como el cono y el cilindro, para comparar sus características y analizar sus diferencias.

Las características a analizar en los poliedros son: la forma de sus caras, el número de vértices y número de aristas.

Aquí se puede analizar la posible relación existente entre el número de caras, el número de lados de cada cara, el número de aristas y el número de vértices. Es una nueva oportunidad para realizar conjeturas e inferir para nuevas situaciones.

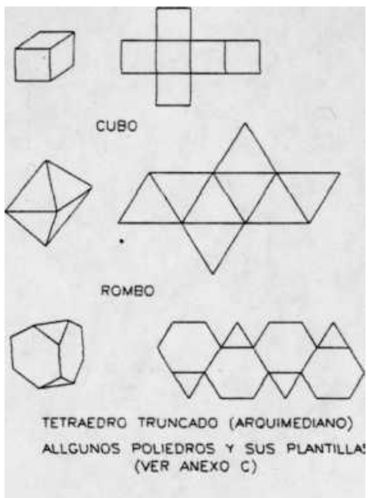


Figura # 11

2.5.1.2.2.4. Conclusiones. Las actividades anteriores han aportado los conocimientos necesarios para la iniciación de un estudio más profundo de la geometría en educación básica, éstas deben racionalizarse y adaptarse a las condiciones particulares de cada grupo y cada nivel. Pueden ser realizadas en los últimos grados de la básica primaria con las adaptaciones necesarias en cuanto a profundidad de los temas. Si esto se logra, se garantiza que cuando el niño llegue al grado sexto, posea las bases necesarias para iniciar el estudio de las transformaciones y otros temas como ubicación relativa de puntos, concepto de pendiente, traslaciones, simetrías, rotaciones y homotecias y composición entre ellas; concepto de ángulo, su medida, retomar el estudio de las figuras profundizando sus conceptos, pues siempre debe haber una realimentación de todos los temas, en un ir y venir, vinculándolos todos y encontrando una relación entre ellos.

También se pueden realizar estas actividades en los últimos grados de la básica (8° y 9°) orientándolas cada vez más a la formalización y demostración.

2.5.2 Geometría de las transformaciones. (Anexo B).

2.5.2.1 Metodología de las Actividades Propuestas. Las actividades se plantean por bloques de temáticas a tratar durante el curso. Cada bloque de actividades trata un tema específico.

Siguiendo los lineamientos de la propuesta curricular de Ministerio de Educación Nacional, los temas se tratan no solo en un curso, sino a lo largo de todo el ciclo básico; el nivel de profundidad de cada uno depende del grado y de las condiciones específicas del grupo. Es el profesor quien decide qué temas y con qué profundidad se tratan en un curso específico.

Sin embargo, se esboza la temática sugerida para un grado séptimo de enseñanza básica y se proponen los temas que puedan conformar el curso en los diferentes grados de la educación básica secundaria.

Las actividades tienen como propósito descubrir nuevos conceptos y analizar propiedades, prescindiéndose al máximo de las definiciones y la memorización y haciendo énfasis en la comprensión; esto permite el paso de nivel de razonamiento matemático a otro superior, (niveles de razonamiento de Van Hiele) con las actividades desarrolladas propias de cada uno, según lo expone Linda Dickson (1991).

Cada actividad debe planearse con un objetivo específico y proponerse los procedimientos a desarrollar en una guía que el profesor suministra ya sea en material impreso o fotocopiado, o bien, consignada por los alumnos en su cuaderno que lleva para tal fin.

El alumno analiza los objetivos, realiza los procedimientos en el geoplano (o en otro mediador según sea necesario en algunas actividades). Saca conclusiones a partir de sus experimentos y ejemplos que ha resuelto, pasando así de lo particular a lo general, formulando conjeturas que le permitan resolver el problema de forma general.

Posteriormente puede verificar su conjetura con ejemplos y tratará de demostrarla (dependiendo del grado de conocimientos del alumno). Consigna sus conclusiones y pasa los resultados del geoplano al cuaderno auxiliar.

Debe compartir experiencias con sus compañeros, pues esto es enriquecedor. El profesor acompaña permanentemente al estudiante, formulándole preguntas cuidadosas que no lo confundan o lo induzcan a pensar en una solución sugerida.. Se deben aclarar dudas, sin sugerir soluciones, empleando el lenguaje adecuado para que el estudiante se familiarice con él y lo emplee correctamente.

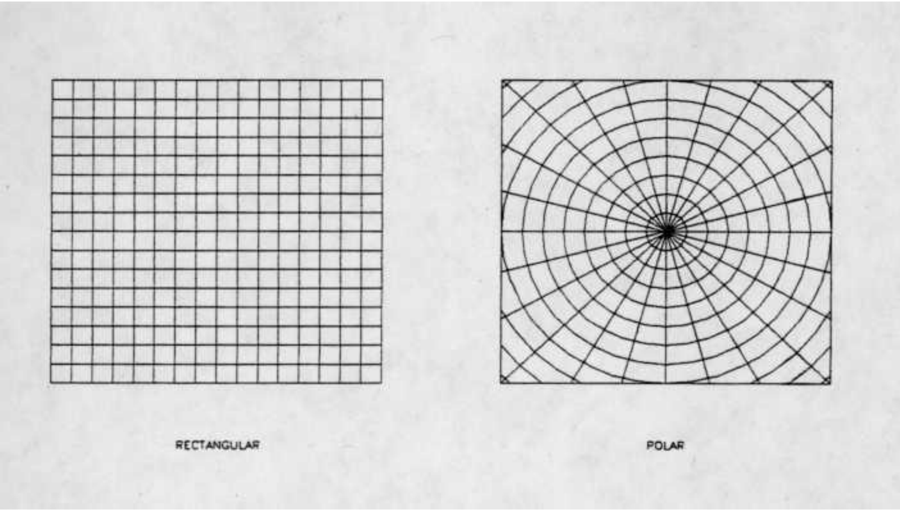
Aunque requiere un buen esfuerzo por parte del educador, en especial en los grupos numerosos, debe observar los progresos de cada alumno durante el trabajo y revisar sus conclusiones periódicamente, llevándole un seguimiento en su diario de campo.

2.5.2.2 Actividades de Aprendizaje.

2.5.2.2.1 Construcción del Geoplano. (Ver anexo B) Geoplano de malla cuadrada. En la construcción del geoplano el estudiante tiene la oportunidad de medir y trazar rectas paralelas y perpendiculares y familiarizarse con él y observar sus características.

2.5.2.2.1.1 Geoplano Rectangular: Se toma una lámina cuadrada de madera de no menos de 6 mm. de espesor y de 40 cm. de lado. Sobre una de sus superficies se traza una red cuadrada de 2 cm. de lado.

2.5.2.2.1.2. Geoplano Polar: Sobre la otra cara se trazan circunferencias concéntricas, cada una de 2 cm. y radios cada uno de 15^, obteniéndose los geoplanos cuadrado y polar



El Geoplano Figura #12 Cuando se utilizan geoplanos construidos se tiene en cuenta que los chinches se pueden colocar únicamente en los nudos y disponer de un juego completo de ellos de diversos colores, lo mismo que de bandas elásticas.

2.5.2.2.2. Ubicación relativa de puntos. (Anexo B) Para esta actividad se utiliza en geoplano rectangular en el que se colocan chinches que representa los puntos a analizar.

La ubicación relativa de puntos da los elementos necesarios para construir conceptos básicos como el de par ordenado, fundamental no solo para representaciones geométricas en el plano sino para el estudio de relaciones y funciones. La orientación según las direcciones horizontal y vertical se debe practicar hasta adquirir cierta -destreza, pues es un aspecto fundamental para todo el trabajo en el geoplano, como la construcción de segmentos, segmentos paralelos, perpendiculares, concepto de pendiente, construcción de polígonos; es el inicio del concepto intuitivo de vector y de otras transformaciones en el plano.

No se deben trazar ejes representativos de los cartesianos, esto permite la libre orientación en el plano con base en convenciones establecidas como arriba, abajo, derecha, izquierda; o norte, sur, este, oeste. También es posible girar el geoplano observando la ubicación de acuerdo a varias posiciones de él, con respecto al estudiante sin las restricciones que impondrían los ejes trazados.

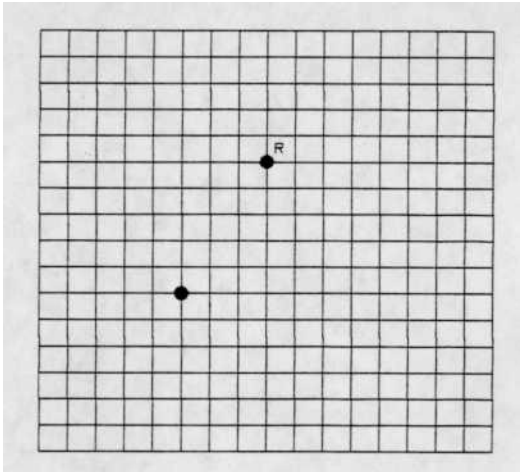
Como primer paso se ubica un punto de referencia en un sitio alejado de los extremos, para permitir desplazamientos hacia todas las direcciones. Antes de ubicar el segundo punto se debe elegir las convenciones con las que se va a trabajar, aquí elegimos arriba, abajo, para las direcciones verticales (que se alejan o acercan al estudiante, si el geoplano está en posición horizontal) y derecha e izquierda.

El punto de referencia es el punto de partida para "llegar" a otro nudo cualquiera, es necesario siempre "recorrer" siguiendo las líneas de la red y nunca diagonalmente. La longitud del lado de la cuadrícula (distancia ente dos nudos consecutivos) se adopta como unidad de medida.

Si se dice 3 a la derecha, se debe recorrer 3 unidades horizontales hacia la derecha; 5 hacia abajo, debe recorrerse 5 unidades verticales hacia abajo del punto de referencia.

Para "llegar" a un segundo punto ya ubicado, puede hacerse por diferentes caminos, como lo propone Zoltan P. Dienes (1978), pero para evitar confusiones se recomienda realizar los desplazamientos siempre en el siguiente orden: en primera instancia los horizontales y en segundo lugar los verticales, esto permite tener ya un par ordenado y se ha introducido a la vez el concepto de vector.

Al ubicar un punto con respecto al de referencia debe citarse primero el recorrido horizontal y luego el vertical así: 3 a la derecha 5 arriba (Figura #13).



R (3 derecha. 5 arriba)

Figura #13

Se realizan ejercicios que combinan todas las opciones posibles; derechas, arriba; izquierda, abajo; izquierda arriba; derecha, abajo.

El punto de referencia debe permanecer fijo durante toda la experiencia y el joven debe realizar variados ejercicios en el geoplano hasta que adquiera cierta agilidad y luego pasar los resultados al cuaderno auxiliar, representando los puntos ubicados con los mismo colores utilizados el geoplano, para identificarlos fácilmente. Cada uno, además, puede identificarse con una letra mayúscula, en el estricto orden convenido así: R(3 derecha, 5 arriba).

En matemáticas es conveniente usar símbolos que representen las palabras para simplificar el trabajo; aquí es necesario nuevamente adoptar unas convenciones unificadas para evitar futuras confusiones, así:

El signo + representa derecha y arriba. El
signo - representa izquierda y abajo.

Entonces la posición 3 derecha, 5 arriba, podrá ser representada así: (+3,+5).

Se representan varios puntos y se colocan en el cuaderno auxiliar sus respectivas posiciones, según esta convención. Ej. A(-2, +3); B(+5, -4) etc. Para mayor facilidad cuando sea + no es necesario escribirlo, así. 5 representa +5. Debe recordarse que siempre el primer número de la pareja representa el desplazamiento horizontal y el segundo el desplazamiento vertical. Al punto de referencia se le asigna la pareja (0,0) y se designa por la letra O.

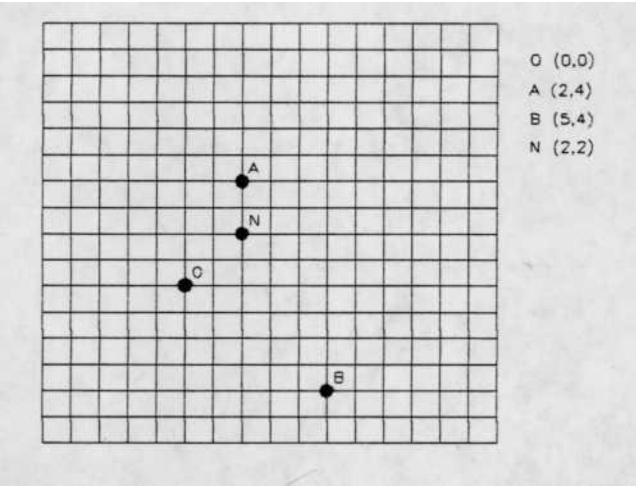


Figura # 14

A la ubicación así determinada de un punto con respecto al de referencia las llamamos coordenadas. Así, las coordenadas del punto N con respecto a O son (2, 2) etc. A continuación se dan las coordenadas de varios puntos para ser ubicados en el geoplano y luego representados en el cuaderno auxiliar. También se ubican algunos puntos y se .determinan sus coordenadas, completando así esta primera fase del proceso. (Figura #14)

La segunda fase consiste en ubicar un punto respecto al de referencia y un segundo punto con respecto al primero y determinar las coordenadas del primero respecto al de referencia y del segundo respecto al primero y respecto al de referencia, así:

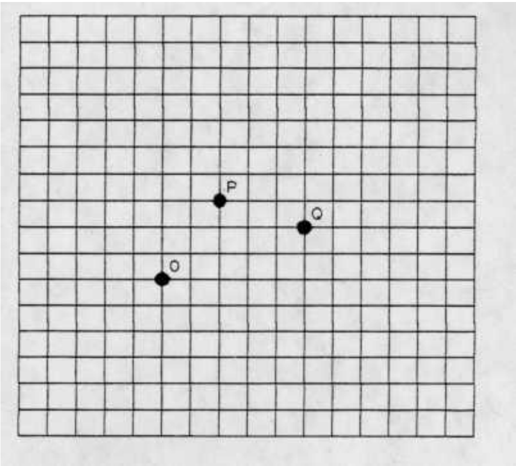


Figura # 15

- Po = Coordenadas del punto P respecto al punto de referencia O
- Qp = Coordenadas del punto Q respecto al punto P
- Qo = Coordenadas del punto Q respecto al punto O

En el ejemplo tenemos:

- Po = (2, 3)
- Qp = (3, -1)
- Qo = (5, 2)

Luego de realizar ejercicios en el geoplano, en los que se den los puntos para encontrar las coordenadas, anotando los resultados en el cuaderno, y dar las coordenadas para ubicar los puntos, sacar conclusiones. ¿Cómo se encontraría las coordenadas del segundo punto con respecto al punto 0(0,0) si se tienen las coordenadas de Po y Qp ?

Observando los resultados obtenidos, los estudiantes llegan a la conclusión que se obtienen realizando la adición de cada componente, esto es:

$Q_o = P_o + Q_p = (2, 3) + (3, -1) = [(2+ 3), (3+ (-1))] = (5, 2)$

En general; $(X_2 , Y_2) = C\hat{}o , Y_o) + (X_i, Y_i) = [(X_o + X,) + (Y_o + Y_i)]$

Si se considera el punto P como un primer desplazamiento desde O y Q, un segundo desplazamiento desde P, el desplazamiento total será desde O hasta Q, o sea, la diferencia que hay en la posición inicial y la posición final, esto es.

$A(X,Y) = (X_f - X_o , Y_f - Y_o)$

Esto no es más que el concepto de vector que se ha aprendido intuitivamente a través de prácticas con el geoplano.

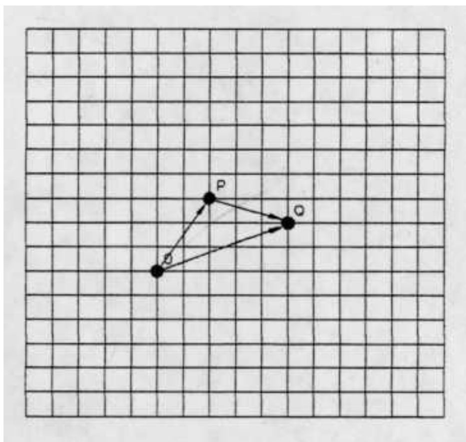


Figura # 16

En donde $V_r = V_i + V_2$ o bien $V_2 = V_r - V_i$

Esto no se debe realizar con los alumnos de grados inferiores, pero es posible hacerlo con los del séptimo en adelante, luego de muchas prácticas en las que ellos mismos descubran el concepto.

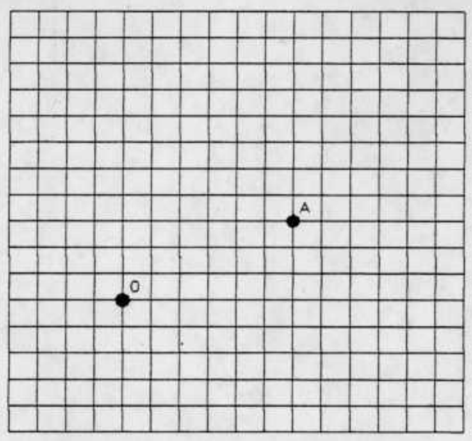
Una variante interesante es realizar la primera práctica (ubicación relativa de un punto), anotar las coordenadas y girar el geoplano 90° hacia la derecha, anotar las coordenadas del punto en esta nueva posición. Los alumnos responden la pregunta : Qué cambia ? Que se conserva ? Esta es una práctica importante que prepara al estudiante para las construcciones de líneas perpendiculares, que les cuesta alguna dificultad. Además se están estudiando las invariantes en un grupo de giros, construyendo los conceptos a través de las transformaciones.

Si se gira 90° a la izquierda, cómo son las nuevas coordenadas ? qué se conserva ?, qué cambia ?

Se plantan giros de 180°, 270° y 360° y se analizan los cambios en las coordenadas en cada caso. Se deben realizar ejercicios suficientes para ver con claridad las invariantes. Qué relación hay entre unos y otros ? Cuáles coinciden ?

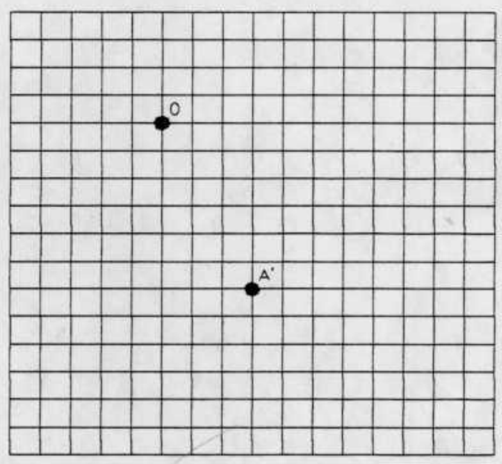
Se realizan ejercicios variados dibujando en el cuaderno auxiliar; se proponen variantes, se sacan conclusiones y se justifican las observaciones; son actividades que deben completar el trabajo y son la parte más importante, pues es aquí donde el estudiante tiene la oportunidad de crear e inferir resultados.

Posición inicial



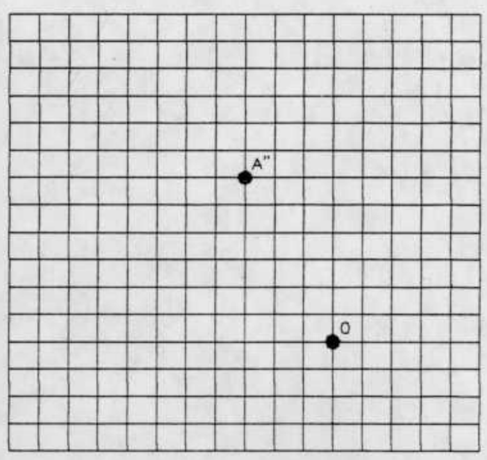
A (6,3)

Giro 90° a la
derecha



A' (3,6)

Giro 90° a la
izquierda



A'' (−3,6)

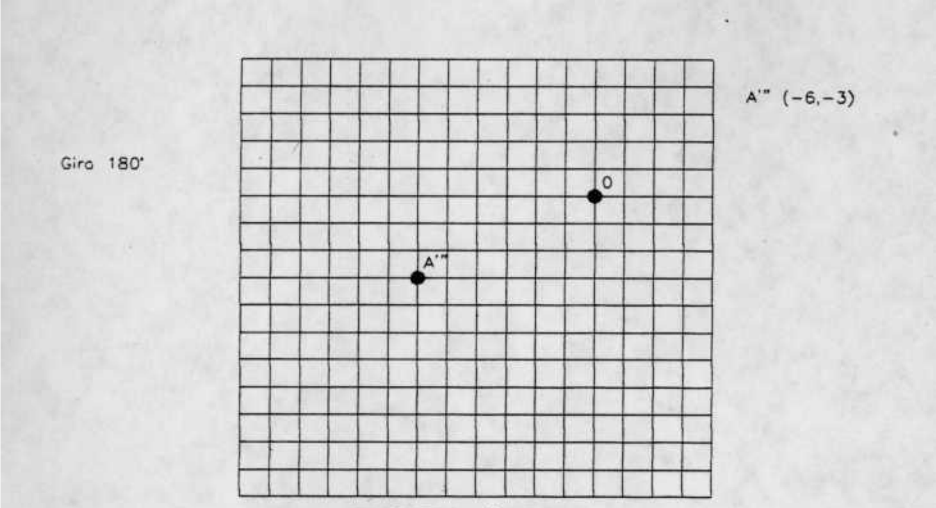


FIGURA # 17

2.5.2.2.3 Construcción de segmentos en el plano. Construir segmentos en el geoplano es otra actividad preparatoria de las transformaciones.

Ubicando un punto A y luego un punto B de coordenadas (m, n) respecto de A, unir con una banda elástica A con B, se obtiene el segmento AB de coordenadas (m, n) respecto de A.

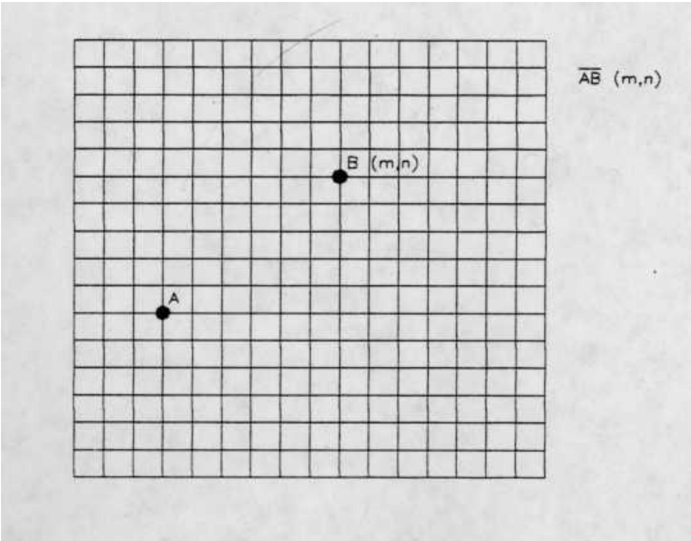


Figura # 18

Se repite el proceso con varias líneas, dibujándolas en el cuaderno auxiliar y anotando sus coordenadas. Se analiza el proceso y se sacan conclusiones.

Se gira el geoplano 90° (a derecha e izquierda), se anotan las coordenadas en la nueva posición, realizando los dibujos y sacando las conclusiones. Cuál es la diferencia de las nuevas coordenadas con las iniciales ? qué se conserva ? y qué cambia ?

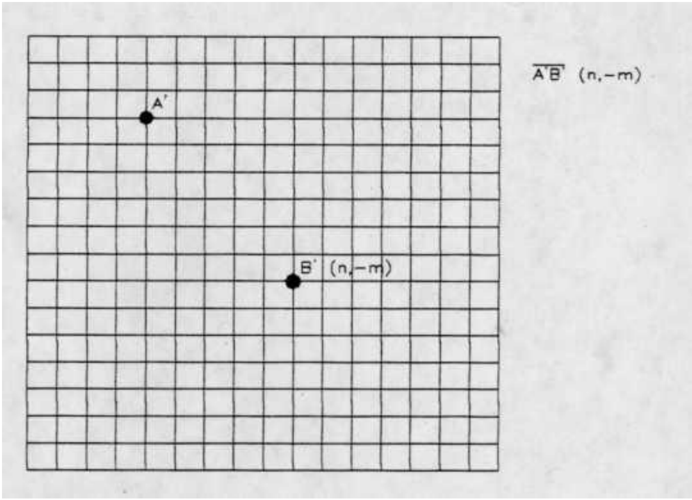


Figura #19

El proceso se repite construyendo un segmento AB de coordenadas A=(m,n), B=(r, s) respecto al punto O = (0,0) externo a él.

Se realizan varios ejercicios, dibujando en el cuaderno y anotando las observaciones.

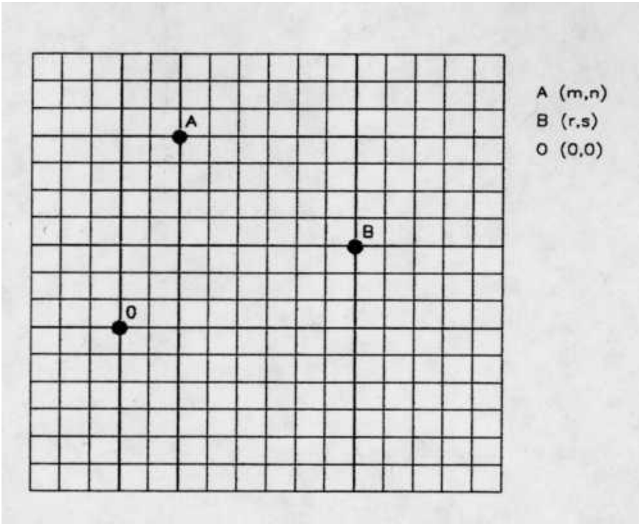
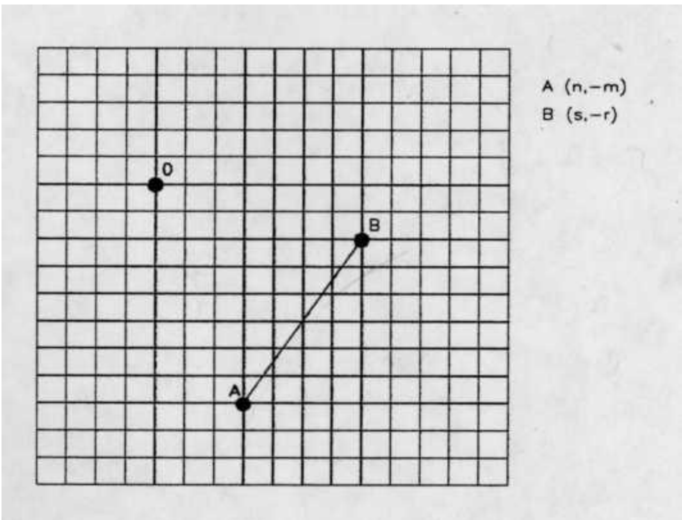


Figura #20

Se iota el geoplano 90° (a derecha e izquierda), anotando las coordenadas en la nueva posición y sacando conclusiones.



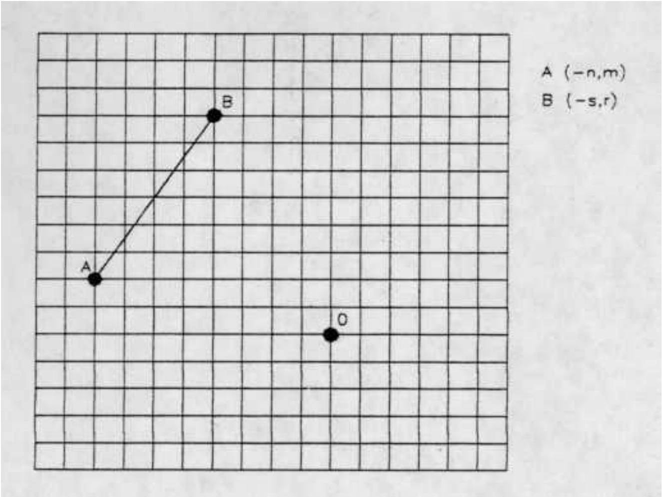


Figura #21

2.5.2.2.4 Paralelismo y Perpendicularidad. Concepto de pendiente.

2.S.2.2.4.1 Segmento Paralelos: La actividad se inicia construyendo un segmento AB de coordenadas BA=(m,n) con respecto a A.

Se ubica un punto C en un nudo cualquiera externo a AB. Se ubica un punto O de coordenadas (m, n) respecto a C (D tiene las mismas coordenadas respecto a C, que B respecto a A) al unir C con D se obtiene un segmento CD paralelo a AB. CD || AB. CD tiene la misma longitud que AB. (Figura 22)

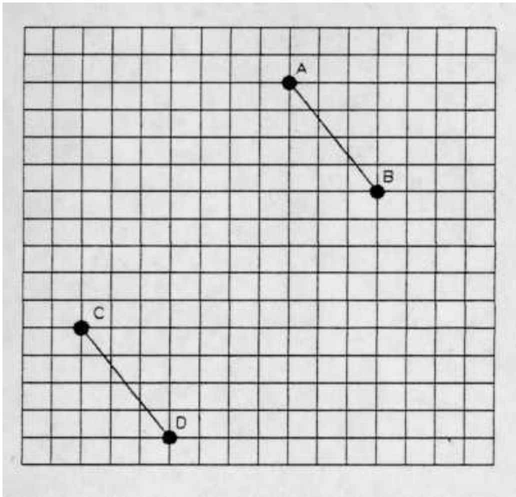


Figura # 22

Puede creerse erróneamente que segmentos paralelos son los que están uno al frente del otro y que tienen la misma longitud, por lo que se hace necesario construir segmentos que no estén situados exactamente al frente y que tengan diferente longitud, utilizando el procedimiento siguiente:

Dado un segmento AB de coordenadas (m, n) trazar uno que sea paralelo y de longitud igual al doble de AB.

Si AB = (m, n) entonces las coordenadas del segmento pedido serán; CD = 2(m, n) CD = (2m, 2n).

I.as coordenadas de un segmento el triple serán; PQ = (3m, 2n).

El segmento de la mitad de la longitud será RS =(m/2, n/2) con m/2 y n/2 G a los Z, de lo contrario no es posible encontrar las coordenadas de este vector u otro cualquiera de menor longitud, pues si sus coordenadas no son enteros no se puede construir en el geoplano por la restricción inicial impuesta.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

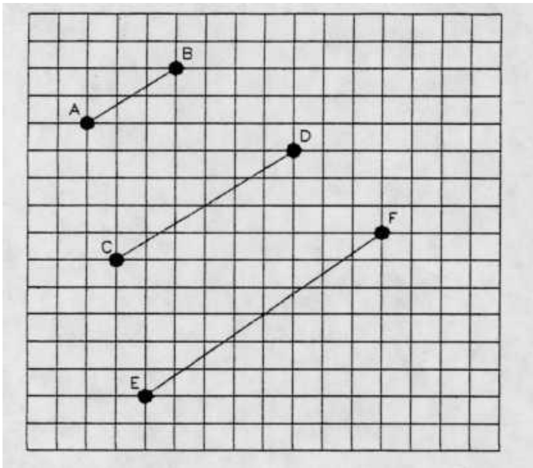


Figura # 23

2.5.2.2.4.2 Perpendicularidad y Concepto de Pendiente.

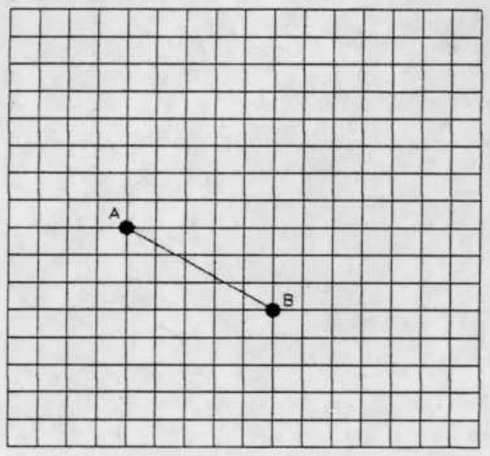
Para construir un segmento CD perpendicular a otro AB se procede como sigue:

Se construye un segmento AB de coordenadas (m, n) se anotan las coordenadas, se gira el geoplano 90° (a la izquierda o derecha), se anotan las coordenadas de AB en la nueva posición.

Se regresa a la posición inicial y se construye un segmento CD con las coordenadas anotadas en el giro de 90°, el segmento CD así construido es perpendicular a AB y tiene coordenadas (- n, m) o (n, -m)) según se haya girado el geoplano a la izquierda o 'derecha; en general si CD ± AB y AB =(m, n) entonces CD = (-n, m). (Figura 24)

$\overline{AB}$ Girado = (5,−3)

Geoplano girado 90°



$\overline{AB}$ = (3, 5)

$\overline{CD}$ = (−5,3)

$AB \perp CD$

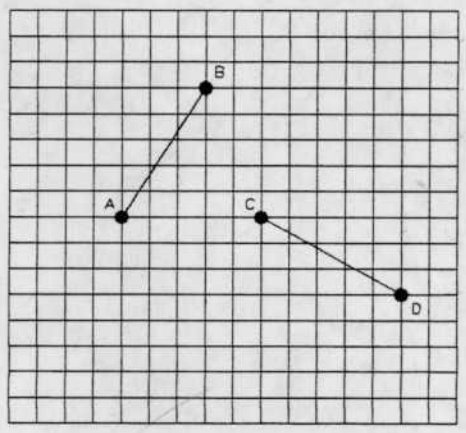


Figura # 24

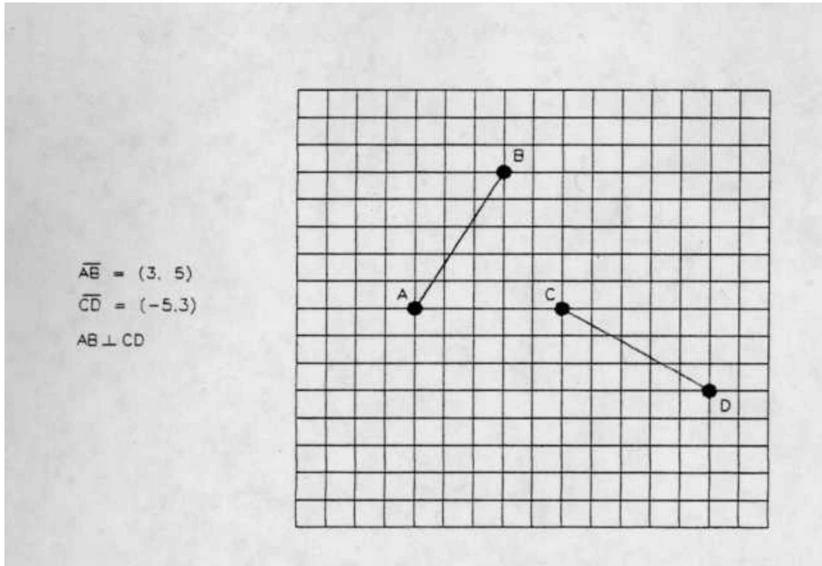


Figura # 24

Al igual que en los segmentos paralelos, es posible obtener segmentos perpendiculares de longitud diferente, con coordenadas proporcionadas a las iniciales.

La realización de ejercicios variados permite la compresión del concepto. En los ejercicios se debe tener en cuenta la construcción de segmentos perpendiculares sin puntos en común, con uno de los extremos común, segmentos que se corten, etc.

De las actividades anteriores se puede intuir el concepto de pendiente, relacionando las coordenadas de rectas perpendiculares. El profesor orienta para que se obtenga:

yi/xi . y_2¡X_2 = -1 siendo (xi, yi) y (x_2, *Jt)* las coordenadas de las rectas perpendiculares con segmentos paralelos se tiene la relación yi/xi = y_2ÍX_2 con (xi, yi) , (x_2, y_2) coordenadas de los segmentos AB y CD siendo AB || CD

Con ejercicios en los que se construye varios segmentos paralelos, el estudiante observa que el cociente de sus coordenadas es constante, es decir, lo que se conserva en los segmentos paralelos, se puede hablar de la pendiente, la relación de ésta con la inclinación del segmento y como los segmentos paralelos tienen la misma inclinación, tendrán la misma pendiente.

Los alumnos realizan ejercicios diversos, dibujan en el cuaderno cuadriculado rectas paralelas y perpendiculares, hacen conjeturas y las discuten con sus compañeros.

Estas actividades son complementadas con construcciones de paralelas y perpendiculares con regla y compás.

2.5.2.2.5 Concepto de Ángulo y su Medida. Mediante una serie de actividades con diferentes materiales se pretende construir el concepto de ángulo, algunas relaciones entre ellos y el concepto de su medida.

Un material muy útil es el construido con tirillas engoznadas mediante un pasador u otro elemento que permita su movilidad; las tirillas unidas por un punto, deben ser de diferente longitud con lo que se desliga el concepto de medida, de la longitud de los lados. (Figura 25)

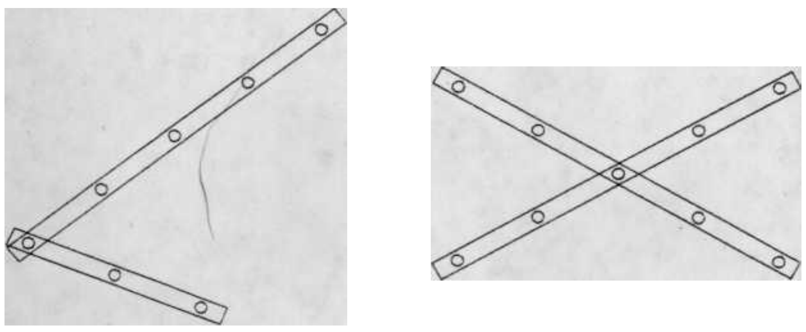


Figura # 25

Con este material es también posible analizar la medida de ángulos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios.

Las actividades de los alumnos luego del análisis realizado por el profesor, son la construcción de ángulos de igual medida con regla y compás, que permitan analizar las relaciones entre ellos.

El geoplano también ayuda a introducir los primeros conceptos relativos a los ángulos y a sus tipos. Se estudian los ángulos según su posición relativa. La construcción de ángulos rectos en diferentes posiciones permite su reconocimiento; para esto se realizan actividades aplicando la construcción de rectas perpendiculares estudiada en la actividad anterior.

El geoplano polar es de gran ayuda para la construcción de ángulos de diferente amplitud, comparando unos con otros y analizando sus diferencias, el vértice debe colocarse en el centro del geoplano para mayor facilidad, allí se analizan los ángulos agudos, rectos y obtusos.

En el geoplano rectangular se construyen ángulos diversos con vértice y lados no comunes, vértice común; vértice común y un lado en común; luego de construir varios ejercicios, anotar los resultados y dibujarlos en el papel. Si se construyen dos ángulos con un vértice y un lado común, se puede hacer de forma que uno esté "fuera" del otro o uno dentro del otro, cada uno con gomas de diferentes colores. (Figura # 26)

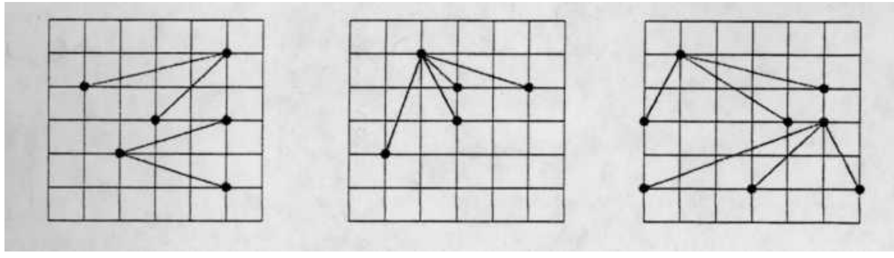


Figura #26

Se está realizando la “suma” y la “diferencia” de los ángulos, también los conceptos de ángulos adyacentes, complementarios y suplementarios. (Si se construyen de manera que sumen un recto o dos rectos).

La construcción de ángulos que tengan sus lados paralelos o perpendiculares, permiten el análisis de estas relaciones, en las que el estudiante luego de hacer prácticas en el geoplano, dibuja en el papel usando regla y compás comparando medidas y sacando conclusiones. (Figura 27)

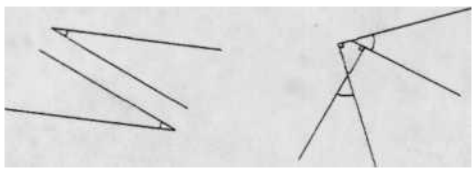


Figura # 27

Los ángulos opuestos por el vértice se estudian en el geoplano polar, construyendo segmentos que se corten en el centro del geoplano. Se forman ángulos opuestos por el vértice y se observa con facilidad que tienen la misma amplitud; luego de realizar el dibujo, los alumnos sacan conclusiones.

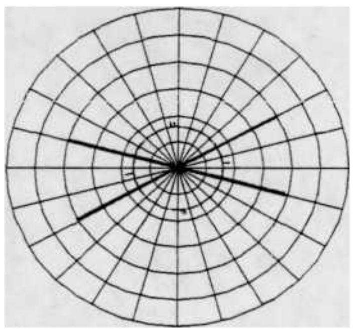


Figura # 28

En el Anexo B se plantean actividades que permiten el estudio de éstas y otras relaciones angulares.

2.5.2.2.6 Construcción de Polígonos. En el geoplano rectangular se construyen segmentos de tal manera que uno de sus extremos sea común con el anterior, el resultado serán líneas poligonales diversas.

Se denominan poligonales a los "caminos" formados por segmentos sucesivos, cada tramo (segmento) se llama lado de la poligonal. En las poligonales construidas se identifican los lados, se dibujan y se anota el número de lados que tiene cada una.

Los extremos de los lados se denominan vértices; el alumno debe identificarlos en cada caso, contarlos y anotar los resultados y encontrar la relación que pueda existir con el número de lados. (Figura # 29)

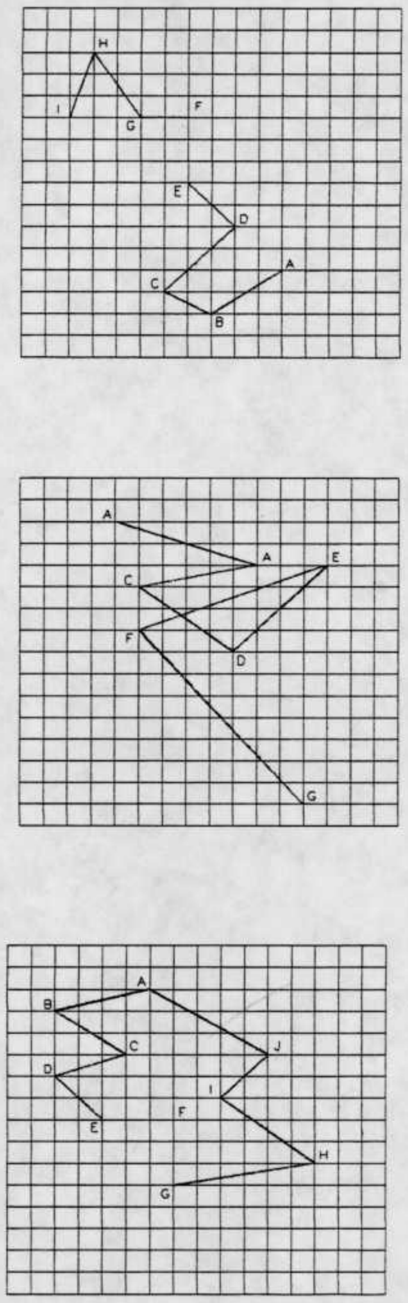
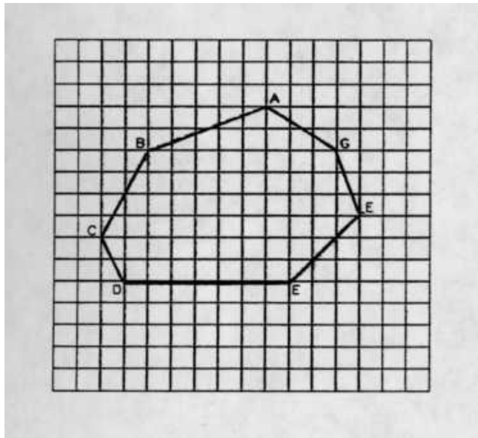


Figura # 29



Los alumnos empiezan a construir polígonos y a clasificarlos según su número de lados y número de vértices; pedir k construcción del polígono de menor número de lados posible, permite descubrir que este es el de tres lados.

Es el momento de darles nombres de acuerdo al número de lados, así;

- Tres lados: triangulo.
- Cuatro lados: cuadrilátero.
- Cinco lados: pentágono, etc.

Como los polígonos construidos se han introducido a partir de las poligonales, han resultado polígonos convexos y no convexos. Es necesario realizar esta clasificación de acuerdo a si todas las diagonales trazadas están o no ^ el interior del polígono, para lo que es necesario analizar el concepto de diagonal, trazarlas en todos los polígonos construidos, con gomas de color diferente al utilizado para los polígonos. Los “caminos” que conducen al miaño punto de partida se denominan poligonales cerradas. El espacio dentro de un poligonal carada se llama polígono.

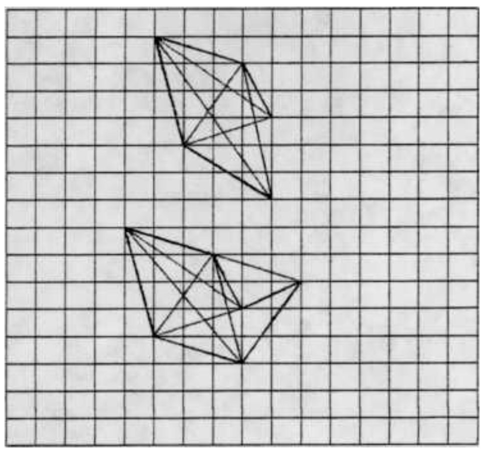


Figura #30

En el geoplano polar se construyen algunos polígonos regulares que no se pueden realizar en el rectangular como triángulo equilátero, hexágono, etc. Estas actividades de caracterización y clasificación de polígonos se deben apoyar en los polígonos en cartulina construidos en una actividad anterior. Aquí la clasificación se hace en forma detallada en; regulares, los que tienen todos los lados iguales y todos los ángulos iguales; e irregulares, los que no cumplen con estas condiciones.

Se presta especial atención a los triángulos y cuadriláteros, recordando las clasificaciones realizadas anteriormente.

La construcción de paralelogramos y en especial los rectángulos, se realizan utilizando el método para la construcción de segmentos paralelos y perpendiculares estudiados con anterioridad.

Los alumnos construyen libremente en el geoplano cuadriláteros en general y luego paralelogramos, seleccionando los rectángulos construidos en diferentes posiciones y proporciones, esto es necesario como preparatorio de las siguientes actividades que tienen que ver con la conceptualización y cálculo intuitivo de perímetro y área así como su diferenciación.

3 Concepto y Cálculo Intuitivo de Área y Perímetro.

2.5.2.2.7.1 Concepto de perímetro: para el estudio de este concepto y su diferenciación con el de área, se propone el siguiente procedimiento, dibujar polígonos diversos en el piso teniendo cuidado de que sus lados tengan siempre la longitud de un número entero de unidades de medida determinada con anterioridad.

Sobre la poligonal trazada se determina un punto que es el punto de partida. Un estudiante recorre la línea poligonal y sus compañeros anotan el recorrido realizado, en unidades de medida, al dar un giro completo hasta llegar al punto de partida.

Se repite el procedimiento con diferentes polígonos y en diferentes sentidos, anotando los resultados.

Se mide cada uno de los lados del polígono y se relaciona con los datos obtenidos en el recorrido, anotando resultados y sacando conclusiones.

Se construyen polígonos en el geoplano rectangular teniendo cuidado de que sus lados siempre estén sobre las líneas de la red, recorriendo la banda que representa la poligonal con el dedo y anotando las unidades recorridas en una vuelta completa. Se realiza el procedimiento con rectángulos, anotando los resultados e intuyendo una expresión que permita calcular el recorrido realizado, al cual podemos llamar perímetro.

Experimentalmente se ha determinado que el perímetro es igual a la suma de la medida de los lados de un polígono determinado.

En particular para un rectángulo se tiene que el perímetro P es P = 2X + 2Y siendo X, Y la medida de los lados adyacentes del rectángulo.

Luego del análisis del concepto es necesario plantear problemas prácticos para que los estudiantes los resuelvan aplicando lo aprendido.

2.5.2.2.7.2 Concepto de Área.

2.S.2.2.7.2.1 Área del Rectángulo: El geoplano rectangular permite calcular el área de polígonos construidos en él, comenzando por los rectángulos, cuyos lados coinciden con las líneas de la red, teniendo como unidad de área un cuadrado de la misma.

Se construyen rectángulos sobre el geoplano de manera que sus lados coincidan con las líneas de la red. El área se determina contando los cuadrados que quedan en el interior de la línea poligonal construida. (Figura 31)

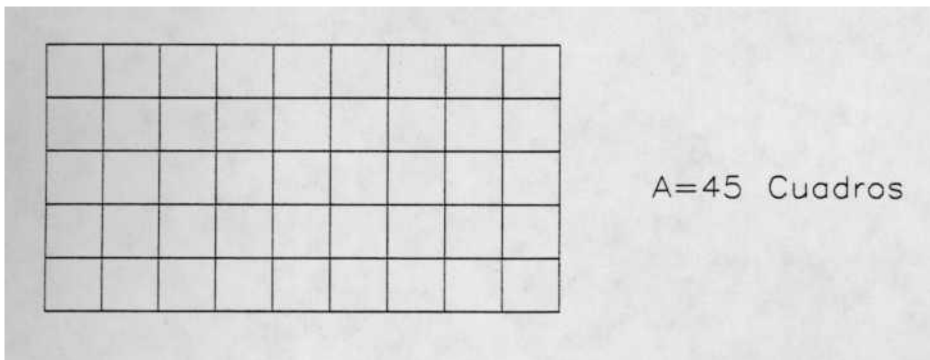
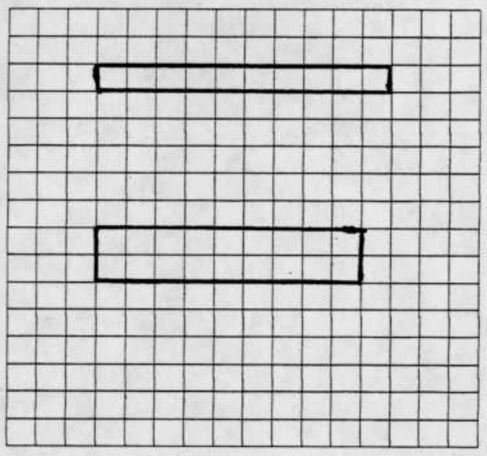


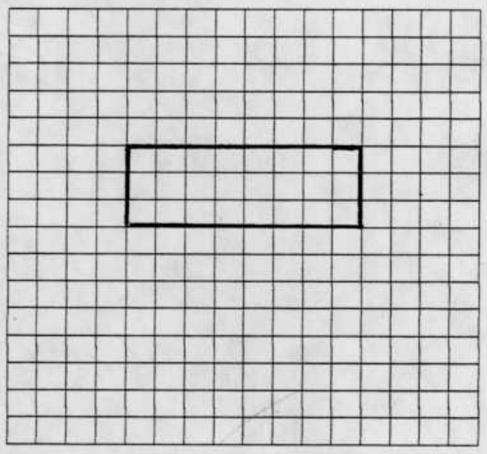
Figura #31

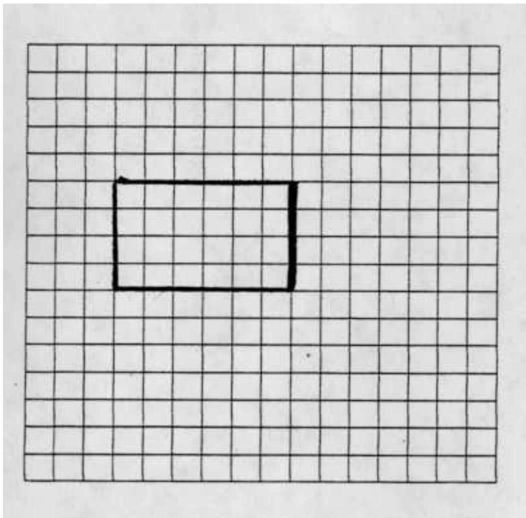
Luego de realizar varios ejercicios se anotan los resultados y se mide la longitud de sus lados. Intuyendo una expresión para determinar el área teniendo la longitud de los lados.

Para comparar y diferenciar los conceptos de área y perímetro y sus posibles relaciones, se realiza la siguiente actividad en el geoplano:

Construir todos los rectángulos posibles que tengan perímetro igual a 20, calcular el área de cada uno. Qué cambia ? qué se conserva ? cuál es el de mayor área ? cuál el de menor área ?. Se repite para otros valores, concluyendo y discutiendo resultados. (Figura 32)







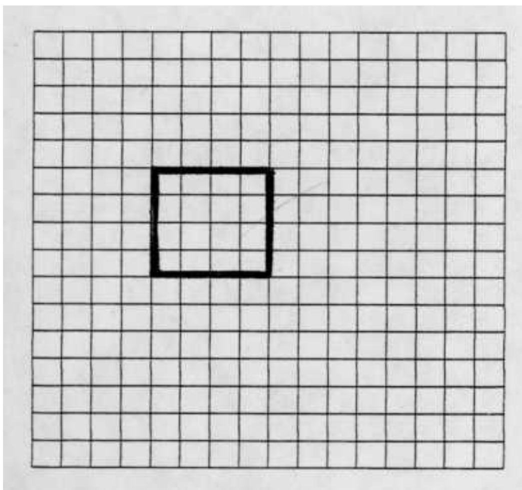


Figura #32

Se construyen rectángulos que tengan el mismo valor para el área y el perímetro (con diferencia de las unidades).

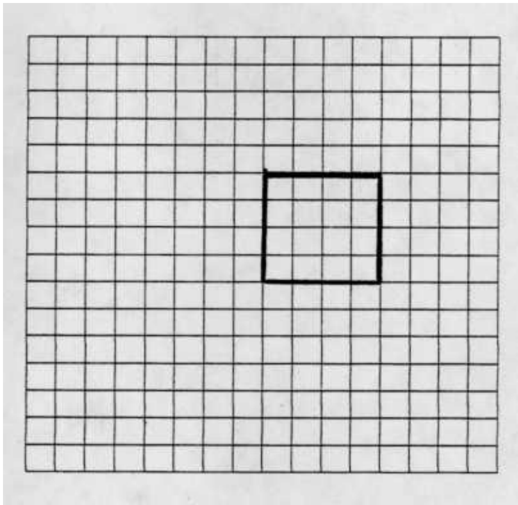


Figura #33

2.5.2.2.7.2.2 Área de triángulos: El cálculo del área del triángulo en el geoplano y la posterior deducción intuitiva de una expresión para su cálculo, se realiza a partir del área del rectángulo. Pero antes se tratará de calcular el área de diversos triángulos construidos en el geoplano por simple conteo de cuadrados.

Los alumnos proponen procedimientos para hacerlo lo más exactamente posible.

Los primeros ejercicios se realizan con triángulos rectángulos, para pasar a trapecios rectángulos, trapecios isósceles, triángulos diversos y polígonos diversos. (Figura # 34)

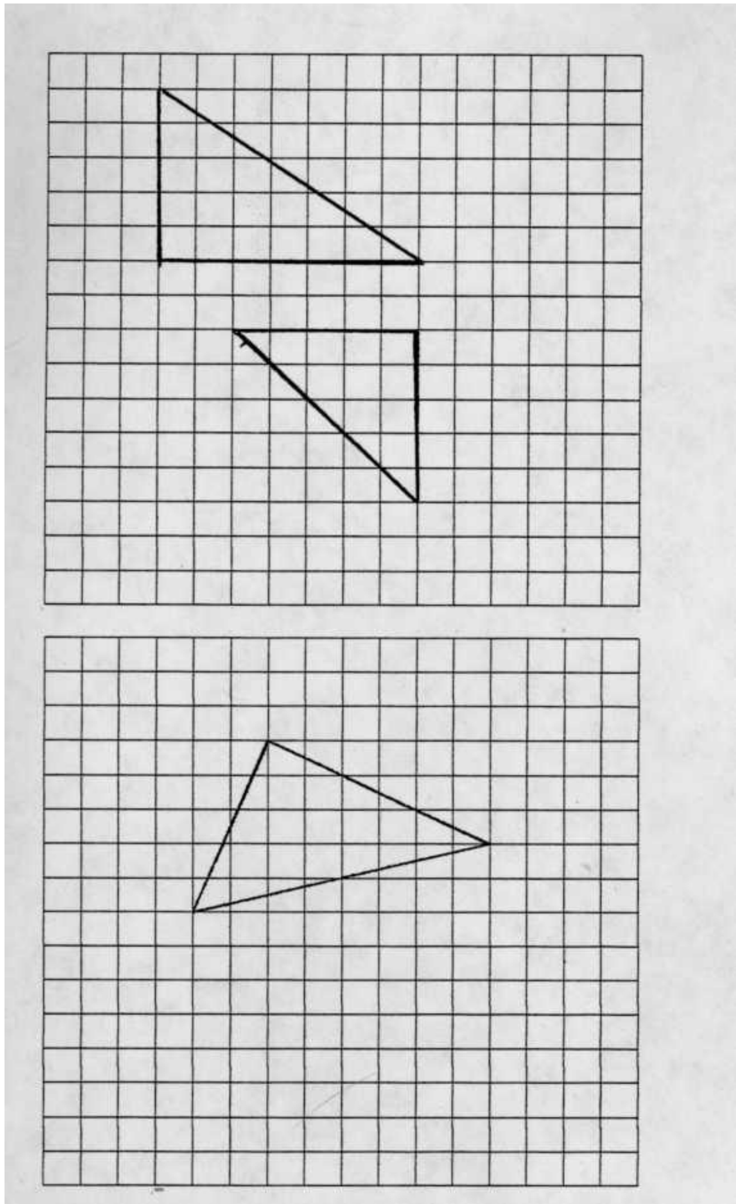
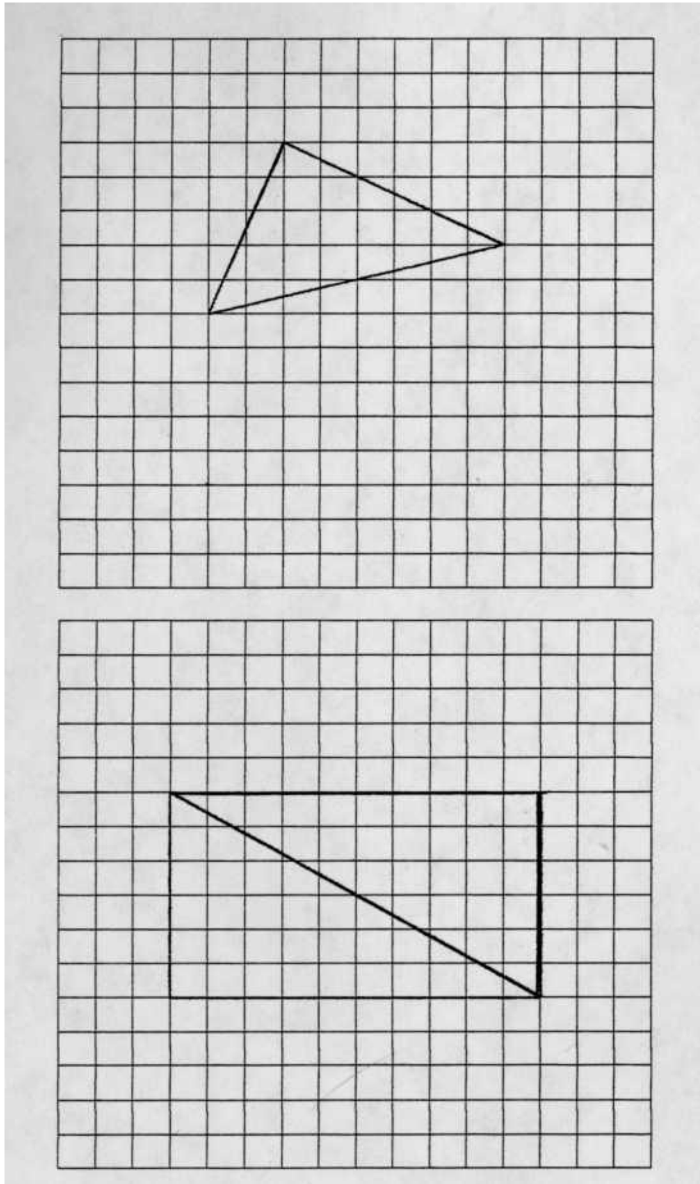


Figura # 34

Este proceso presenta dificultades de exactitud en el cálculo, por lo que se hace necesario utilizar otro que permita superarlas.

- Se construye un rectángulo, se le traza una de sus diagonales con una banda de otro color; el rectángulo queda dividido en dos triángulos congruentes. (Figura 35)



Figura# 35

Para observarlos mejor los podemos construir cada uno con bandas de diferentes colores.

-El área de cada triángulo será la mitad de la del rectángulo. Si el área del rectángulo es a X b, entonces a y b son medidas de lados adyacentes, entonces el área del triángulo será la mitad de ésta, esto es axb/2.

Esta expresión es deducida por los estudiantes luego de realizar varios ejercicios.

2.5.2.2.7.2.3 Áreas de Polígonos diversos: El área de un trapecio rectángulo se obtiene descomponiéndolo en un rectángulo y un triángulo rectángulo. (Figura 36)

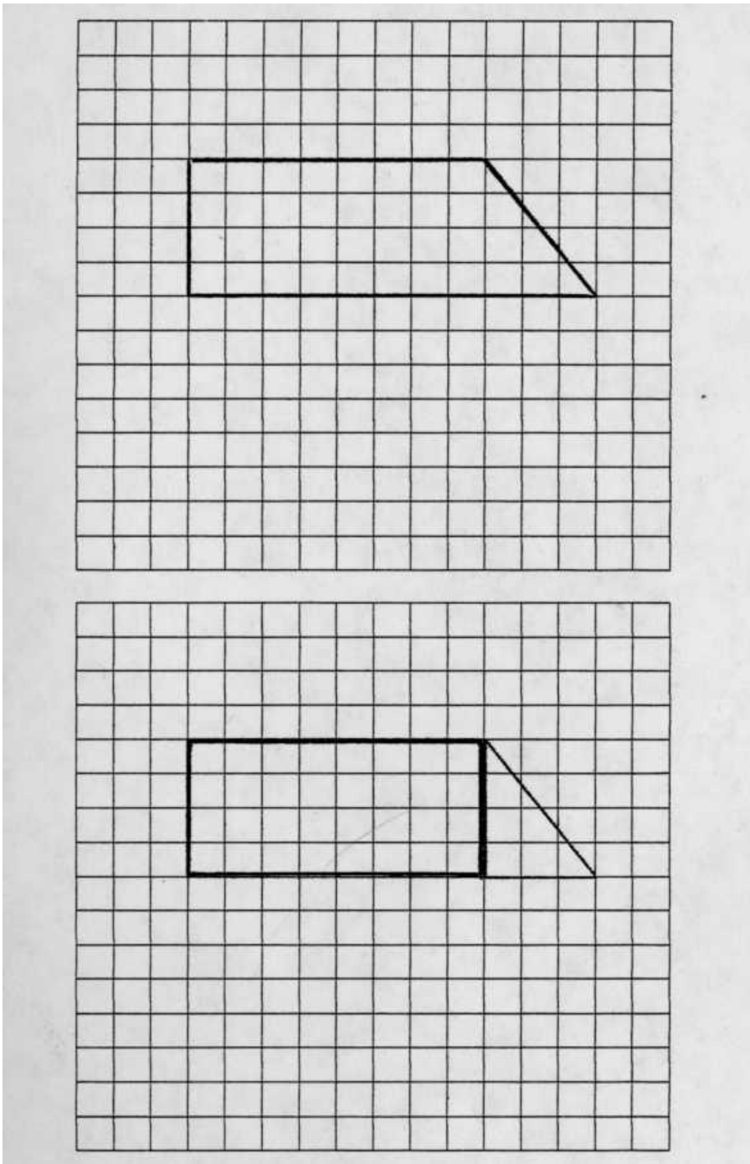


Figura #36

El área del trapecio es la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo.

El estudiante descubre el procedimiento para calcular el área de un trapecio isósceles. (Figura #37)

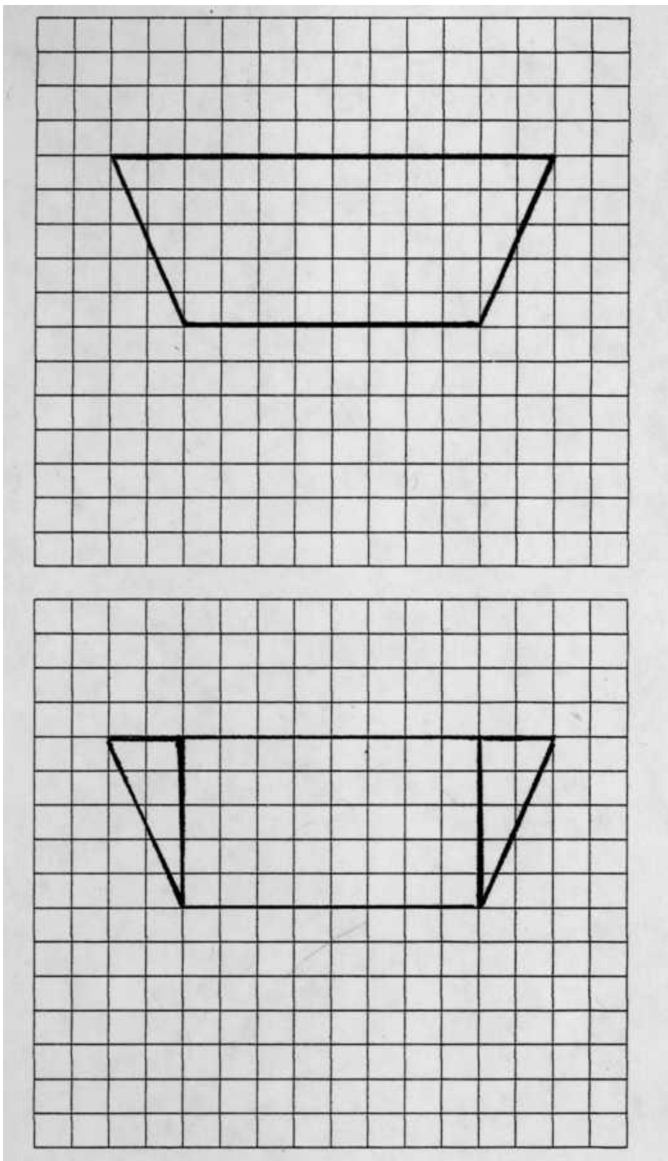


Figura #37

El trapecio se descompone en un rectángulo y dos triángulos rectángulos, esto se aplica para otros polígonos, como triángulos no rectángulos.

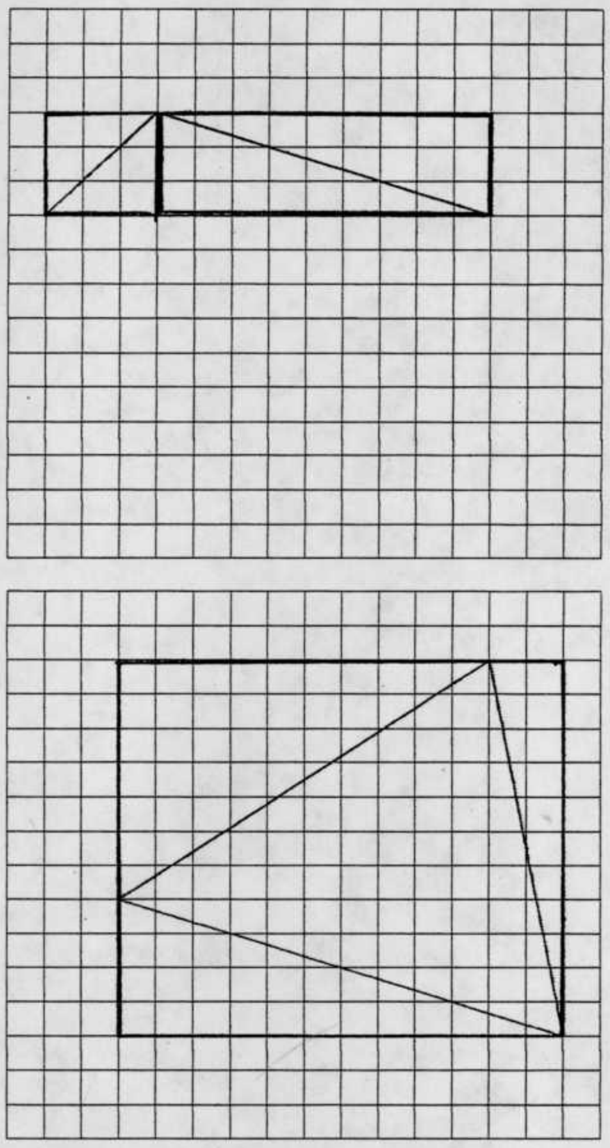


Figura # 38

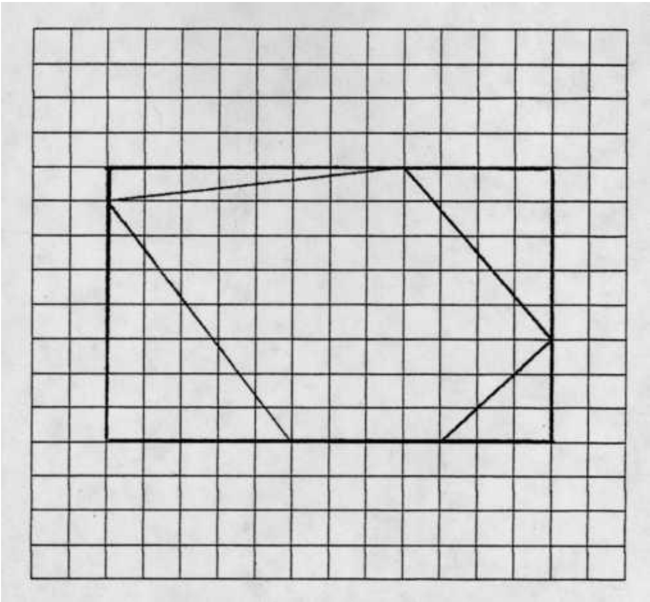


Figura #38

Un método práctico es construir un rectángulo “circunscrito” al triángulo (u otro polígono dado) se obtiene el área del rectángulo y se le resta las áreas de los triángulos rectángulos exteriores.

Este proceso se generaliza para cualquier polígono, colocándolo ‘Dentro” de un rectángulo, de tal manera que sus vértices queden en lo posible o coincidiendo con los vértices del rectángulo o sobre los lados de él. En algunos casos habrá vértices que no cumplen con lo anterior, quedando en el interior del rectángulo.

En este caso las superficies pertenecientes al rectángulo auxiliar y exteriores al polígono en cuestión, se subdividen en rectángulos y triángulos rectángulos, siendo así posible el cálculo del área aplicando los procesos ya sugeridos. (Figura #39)

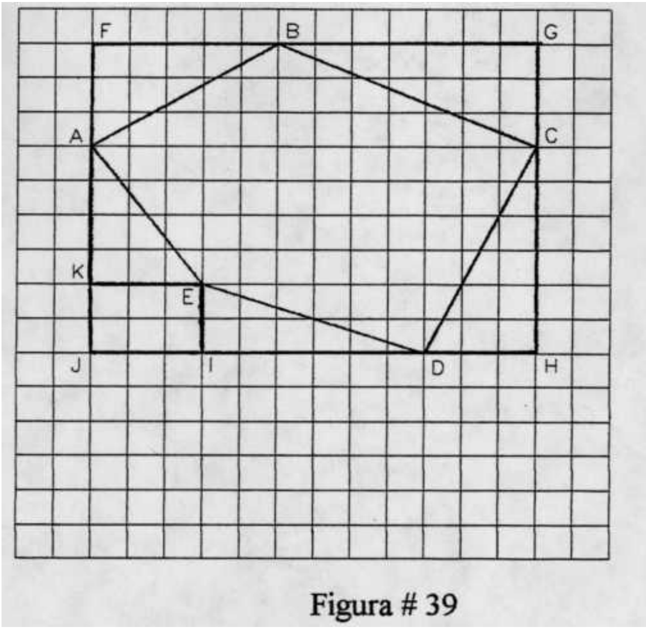


Figura # 39

El área del polígono A B C D E es igual al área del rectángulo F G H J menos las áreas de los triángulos A B F, C G B, D H C, K E A y el rectángulo J1E K.

Se realizan ejercicios diversos que incluyan polígonos convexos y no convexos como el de Ia figura # 40.

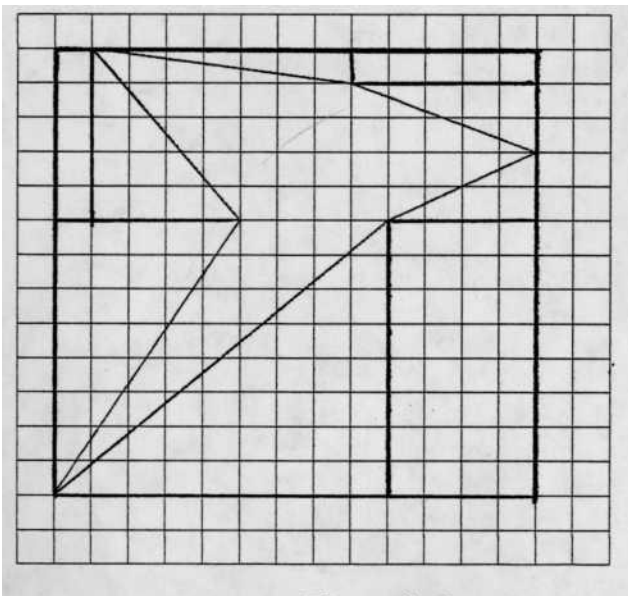


Figura # 40

Se le plantea a los estudiantes los siguientes ejercicios: calcular el área de triángulos que tengan la misma altura y la misma base; así el estudiante podrá comparar y deducir intuitivamente una expresión que permita calcular el área de cualquier triángulo. (Figura #41)

• Se construyen algunos en el geoplano, preguntando cuál tiene mayor área y luego de calcular la de cada uno, se sacan conclusiones. Se pregunta qué cambios hubo ? que se conserva ? cuántos triángulos hay con la misma área ? y qué se puede decir del perímetro ?

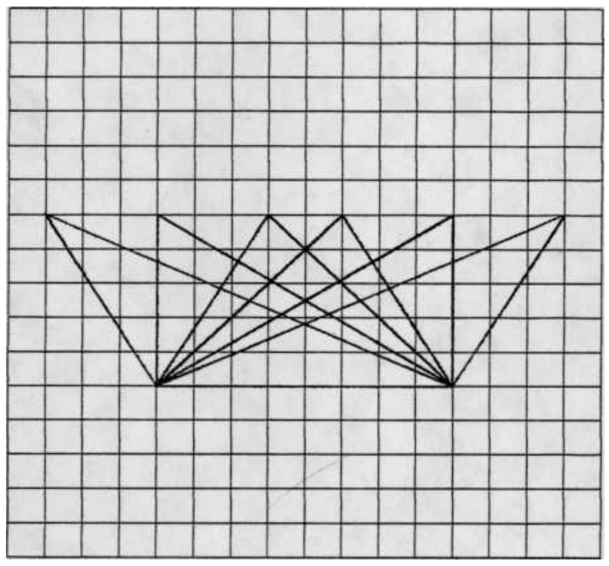


Figura #41

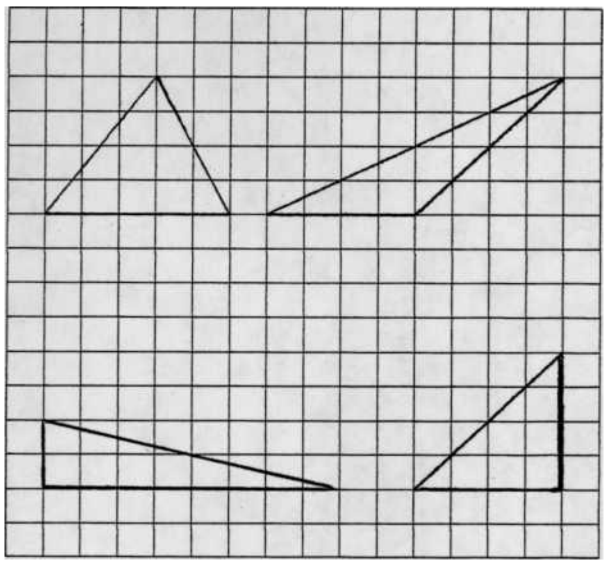
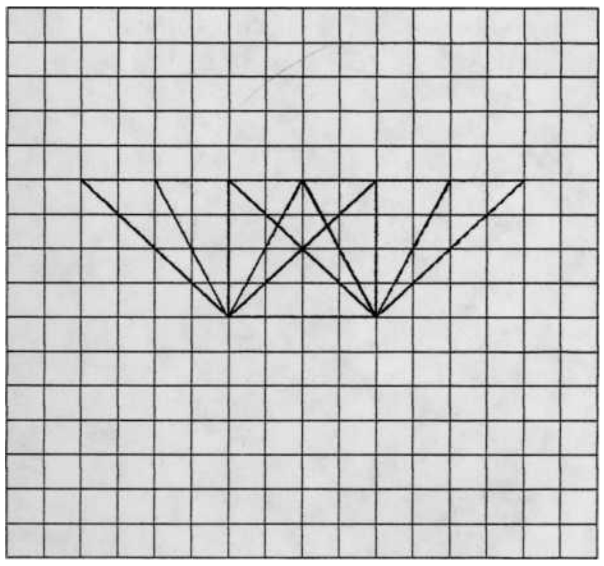
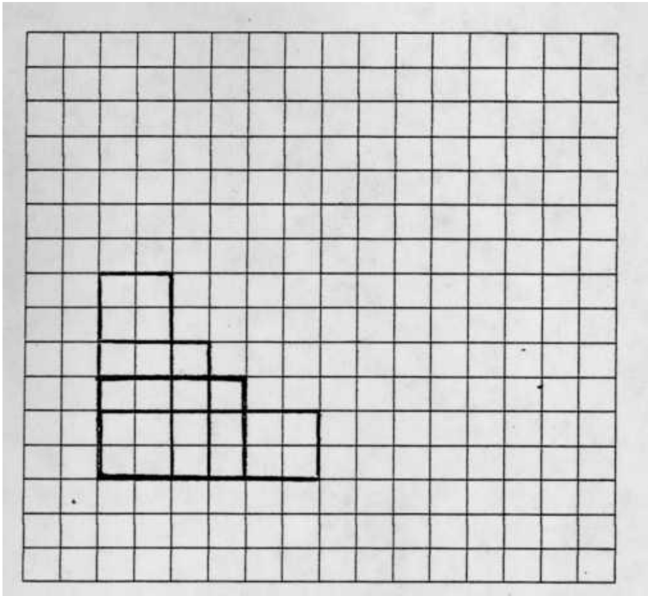


Figura # 42

El perímetro de los triángulos de la figura 42 no se puede calcular aún, pues es necesario el estudio del teorema de Pitágoras.

Otro ejercicio interesante es la construcción de triángulos de igual área, variando la base y la altura, así, si se duplica la altura se divide por dos la base, etc. Se puede repetir con paralelogramos? qué se conserva ? qué cambia ? (Figura 43,44)





Esta actividad permite no solo afianzar y diferenciar los conceptos de área y perímetro sino también abordar el tema de las transformaciones, con la pregunta qué cambia ? qué permanece invariante ? lo que da pie para una serie de discusiones, conjeturas y descubrimientos que los alumnos hacen mediante la realización de varias prácticas.

Cuando se estudia los triángulos de igual área duplicando la altura y reduciendo la base a la mitad, etc., se ve que mientras la altura va aumentando la base se va reduciendo cada vez más, tendiendo a cero, esta es la idea intuitiva de límite. (Figura 44)

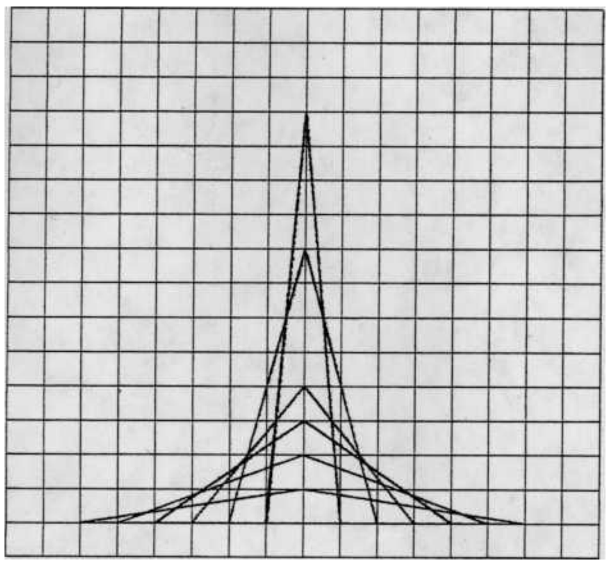


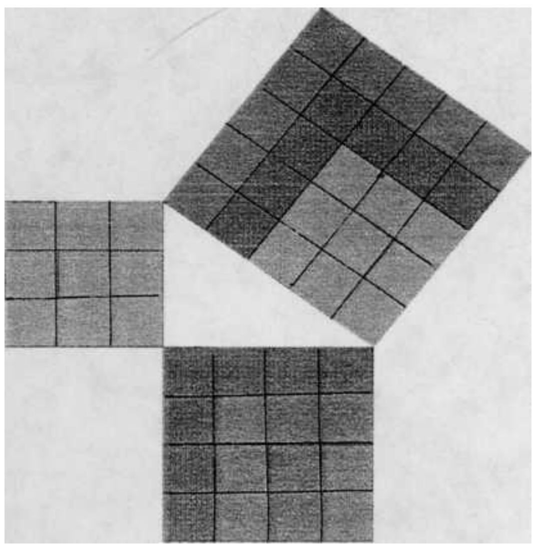
Figura # 44

2.5.2.2.8 Teorema de Pitágoras. En el geoplano se ha tenido la limitante de no poder medir los segmentos diagonales por no tener un número entero de unidades, lo que se soluciona con el análisis del teorema de Pitágoras. (Figura 45)

Para mayor facilidad se emplea cartulina en la que se recorta triángulos rectángulos y cuadrados de lado igual a los catetos y la hipotenusa, comprobándose experimentalmente que el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

También se puede realizar combinando los cuadrados por cualquier otro polígono regular de lado igual a los lados del triángulo rectángulo.

El alumno cubre (pavimenta) la superficie del cuadrado (o polígono regular) construido sobre la hipotenusa con piezas en las que se han dividido los cuadrados (o polígonos) construidos sobre los catetos, dando como resultado que se cubre totalmente la superficie con todas las piezas generadas por los catetos, es la idea intuitiva del teorema de Pitágoras. (Figura # 45)



2.5.2.2.9 Suma de Ángulos Internos de un Polígono. En este caso son de gran ayuda las actividades planteadas por Zoltan P. Dienes (1967). Por medio de recorridos sobre polígonos dibujados en el piso, los alumnos aprenden de forma dinámica y agradable. El proceso es el siguiente:

Se realizan ejercicios de orientación ubicando las direcciones relativas al estudiante: al

frente, atrás, izquierda, derecha, giros de ***V**** de vuelta a la izquierda y a la derecha; ***Vi*** vuelta, 1 vuelta y relacionarlos así:

Vi de vuelta = 90°

½ vuelta - 180°

1 vuelta = 360°

1+ V4 de vuelta = 360° + 90° = 450°

1+ ½ de vuelta = 360° + 180° = 540°

1+ 3/4 de vuelta = 360° + 270° = 630°, etc.

Luego de realizar ejercicios diversos en donde el estudiante gira su cuerpo ángulos variados, se dibujan polígonos (comenzando por triángulos). Cada equipo de tres estudiantes realiza el siguiente proceso:

Se marca sobre la línea poligonal un punto de partida; de allí un estudiante comienza a recorrerla; cuando llega a un vértice para continuar su recorrido pasando al lado .adyacente, “barre” el ángulo interno con el pie que tiene hacia el interior del polígono y lo ubica sobre el lados correspondiente. Continuando así su recorrido “de espaldas” hasta llegar al punto de partida. Analiza la posición de llegada respecto a la de partida.

cuánto fue el giro ? es el resultado de haber girado (barrido) todos los ángulo internos del polígono, es decir su suma, (figura 46)

Se repite el proceso con polígonos de diferente número de lados y se anotan los resultados; se debe tener precaución de anotar en el recorrido cada vez que “mira” en la misma dirección que cuando inició, esto será una vuelta completa (360°). Los compañeros toman datos y controlan los giros.

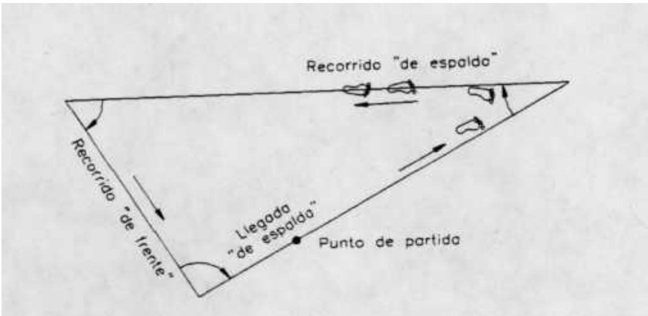


Figura # 46

Se confrontan los resultados con los otros grupos; se realizan conjeturas luego de compararlos en diferentes polígonos:

Polígono.	Número de lados.	Suma de ángulos internos
Triángulo.	3	180°
Cuadrilátero.	4	2(180°)
Pentágono.	5	3(180°)
Hexágono.	**6**	4(180°)

Se deduce que para encontrar la suma de los ángulos internos de un polígono se multiplica 180 por un número. Cuál número ? Qué relación tiene ese número con el número de lados ?

Se descubre que ese número se encuentra restándole dos al número de lados del polígono. Se ha llegado intuitivamente a la expresión que permite calcular la suma de los ángulos internos de un polígono, es decir, (n - 2) 180° = suma de ángulos internos del polígono.

2.5.2.2.10 Transformaciones Geométricas.

2.5.2.2.10.1 Traslación; Las traslaciones geométricas en el plano, se realizan según un vector traslación que determina las coordenadas del transformado.

Para realizar traslaciones es necesario definir el vector traslación.

En el geoplano se han construido segmentos y anotado sus coordenadas, lo que determina su longitud y dirección, por lo tanto son vectores. Aquí se utilizan para la determinación de las traslaciones.

- Traslación de un punto.

Teniendo un punto P, realizar su traslación según el vector AB (m, n), para lo cual se procede en el geoplano como sigue:

Se construye el vector AB(m, n) y se ubica el punto P. Con P como referencia, se ubica el punto P' de coordenadas (m, n).(Figura 47)

El punto P' es el transformado de P según el vector de traslación AB, como complemento se determinan las coordenadas de P y P' con respecto a AB

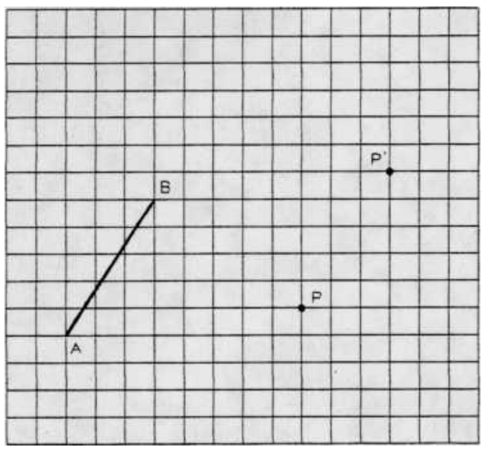


Figura # 47

Los alumnos luego de realizar ejercicios variados anotan resultados y sacan conclusiones.

- Traslación de un segmento CD (r, s) según un vector AB(m, n).

En el geoplano se construye el vector AB(m, n). y se ubica el segmento CD(r, s). Se traslada en punto C según el vector AB y siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior, se traslada el punto D según el vector AB, se obtienen los puntos C', D' que son los transformados de C y D. Uniendo C', D' mediante una banda elástica de obtiene el segmento C'D' que es el transformado de CD según el vector AB.

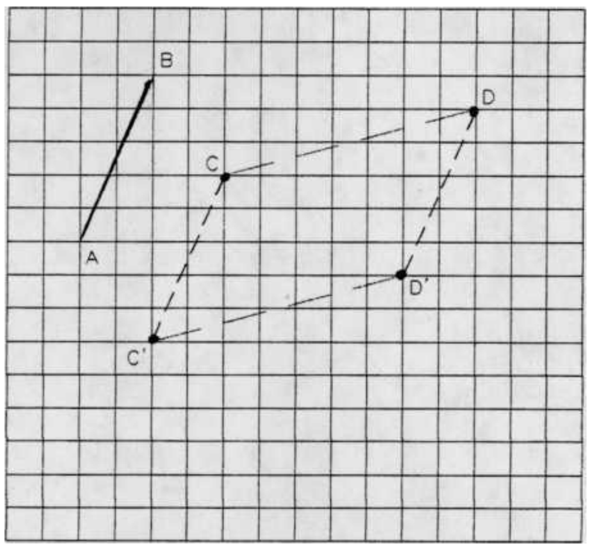


Figura # 48

Qué cambia ?, qué se conserva ? y si se realiza la traslación según el vector BA ?. Son preguntas que se hacen a los estudiantes para inquietarlos a analizar sus resultados y a realizar conclusiones.

Como siempre, en el geoplano se deben realizar ejercicios que contemplen variadas situaciones, se plasman sus resultados en el cuaderno auxiliar, escribiendo sus operaciones, conclusiones y sugerencias para posibles variantes de acuerdo a sus observaciones y análisis detallado.

- Traslación de un polígono según un vector AB (m, n).

Trasladar el polígono CDE según el vector AB.

Se construye el vector AB y se construye el polígono CDE y se traslada cada vértice según el vector AB obteniendo C'D'E'. Al unir C'D'E' por medio de bandas elásticas y de la misma manera como lo están CDE se obtiene el transformado pedido. (Figura 49)

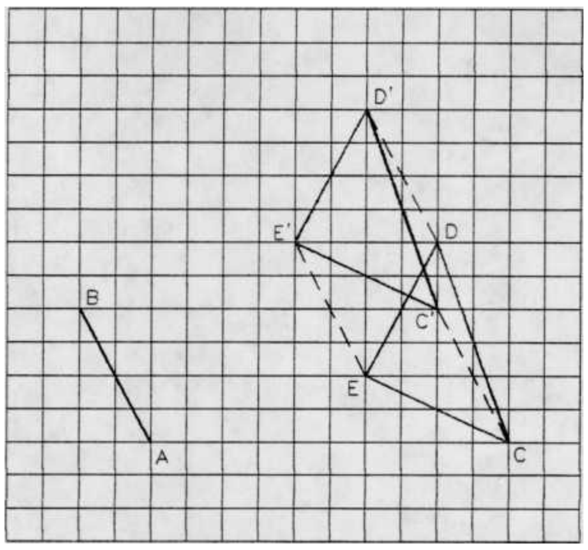


Figura # 49

Los ejercicios variados con diferentes polígonos convexos y no convexos propuesto por los estudiantes dan la oportunidad de analizar las invariantes mediante las obligadas preguntas: Qué cambia ? qué se conserva ? al comparar el polígono con su transformado.

2.5.2.2.10.2 Composición de Traslaciones. Teniendo los vectores AB y AC, realizar la traslación del punto P según AB y luego según AC, esta composición de traslaciones es el producto de las traslaciones Ti y T_2 según los vectores AB y AC y es igual a una traslación de vector AB + AC.

La construcción de esta composición en el geoplano permite su fácil análisis. Ya en una actividad anterior se había intuido este concepto (Figura 50)

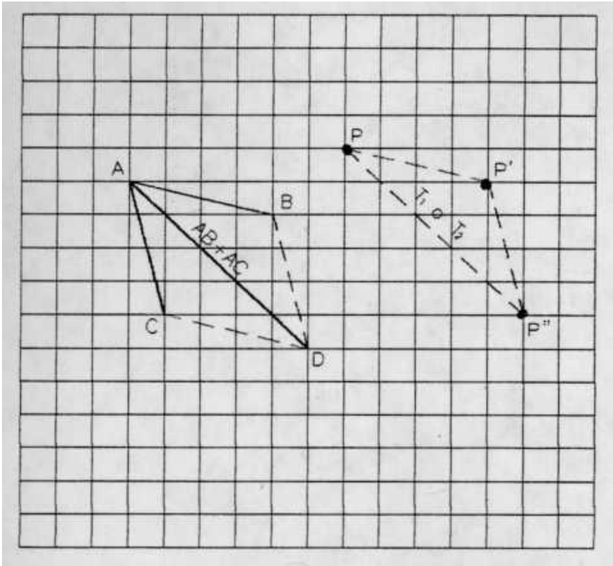


Figura # 50

El punto P’ es el transformado de P según el vector AB. y P” es el transformado de P’ según el vector AC. La traslación resultante es de P hasta P”, que equivale a realizar la traslación según el vector AB + AC.

La resultante se analiza de acuerdo a los resultados de ejercicios variados con vectores colocados en diferentes posiciones relativas, con puntos en común y sin ellos. Como aplicación y afianzamiento se propone realizar ejercicios de composición de traslaciones de segmentos, de polígonos; el análisis de los resultados según sus invariantes, se discuten resultados y se sacan conclusiones. (Figura #51)

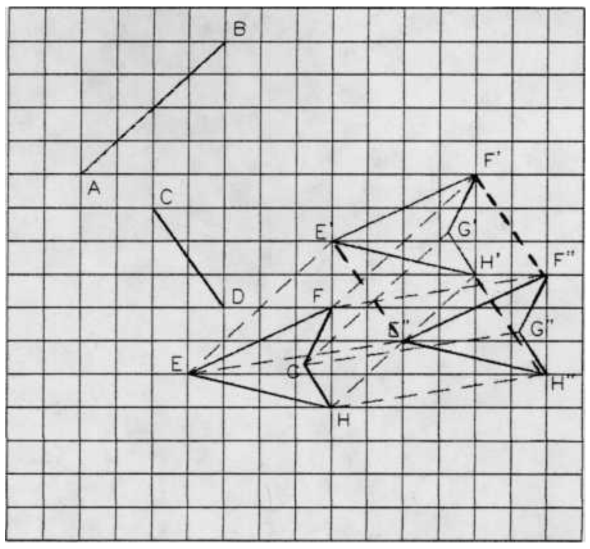


Figura # 51

También se pueden estudiar las propiedades de las traslaciones mediante prácticas en el geoplano y el planteamiento de preguntas como:

- Si se aplica una traslación según el vector AA (vector nulo) cuál es el resultado ?

- Si se aplica una traslación según el vector AB y luego otra con el vector BA cuál es el resultado ? qué se puede concluir ? (Figura # 52)

  Si se realiza la composición de traslaciones en diferente orden, cuáles son los resultados ? qué se puede concluir ? (Figura # 52)

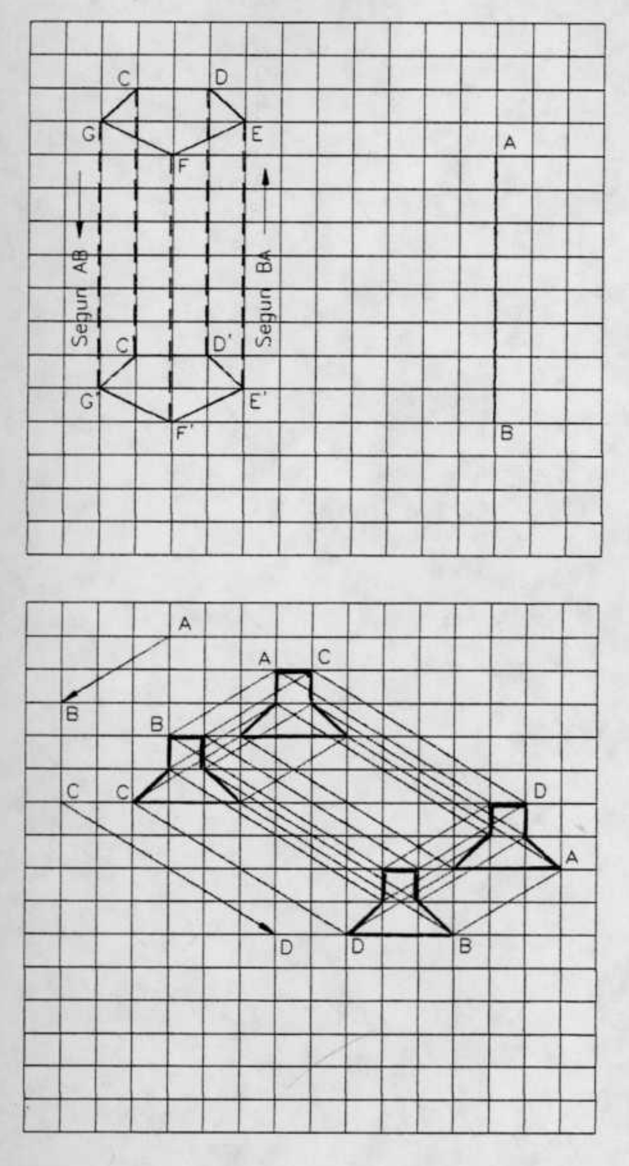


Figura # 52

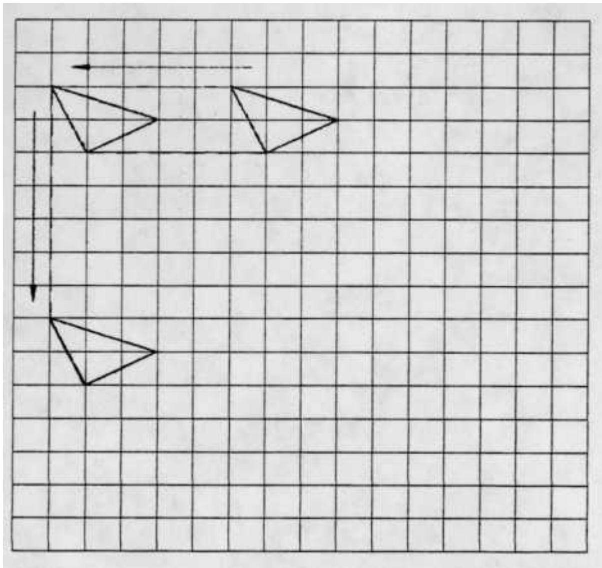


Figura # 52

2.5.2.2.10.3 Giros en el Plano. Giro es una transformación geométrica Biyectiva tal que fijado un punto O llamado centro de Giro y un ángulo (j) denominado amplitud del Giro, a un punto A de un plano determinado se le hace corresponder un punto A' tal que OA = OA' y AOA'= (|). Para el estudio de los giros se utiliza el geoplano polar; el centro de las circunferencias sirve como centro de giro y los radios trazados ayudan a encontrar -el transformado según una amplitud determinada.

Para realizar la práctica en el geoplano se procede como sigue:

- Se ubica un punto en el centro del geoplano representando el centro de giro.
- Se ubica el punto P en un nudo del geoplano polar.
- Se elige el ángulo (j) de giro teniendo en cuenta que los giros son positivos si se
- hacen en sentido antihorario y negativos en sentido horario.
- Se elige el radio sobre el cual quedará el transformado de P, según el ángulo de giro determinado en el ejercicio.

Tomar la distancia OP y ubicar el punto OP’ con 0P’= OP (longitud de OP’ igual a longitud de OP).

Se traza los rayos OP’y OP con gomas de un color, para visualizar mejor el ángulo de giro.

- El punto P’ es el transformado de P según el giro con centro en O y ángulo <|).

(Figura 53)

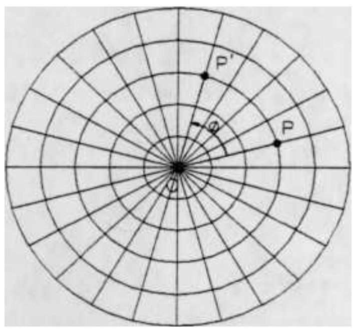


Figura # 53

Se realizan giros de segmentos ubicados en diferentes posiciones en el geoplano con uno sus extremos en el centro de giro, dado un segmento AB girarlo un ángulo <) con centro de giro entre A y B y sobre el segmento. Los giros realizados deben ser positivos y negativos.

Para girar un segmento AB según el ángulo ^ se gira el punto A según (j) y luego el punto B.

El segmento A’B’ será el transformado AB. (Figura 54)

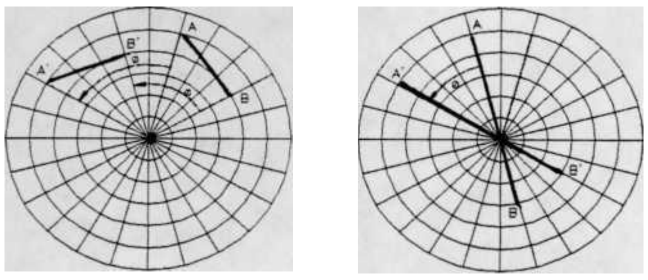


Figura # 54

El estudio de las invariantes en estas actividades es lo que permite realizar conjeturas y analizar las transformaciones realizadas.

Luego de comprender el concepto se realizan giros de polígonos diversos según un ángulo <|) al rededor de un punto O. (Figura 55)

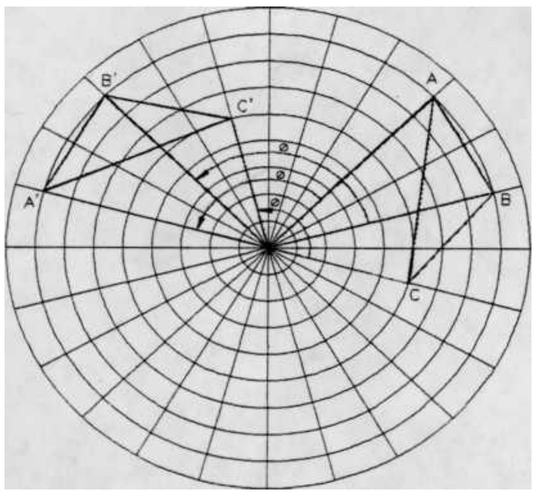


Figura # 55

Giro del triángulo ABC según el < ϕ y centro en O.

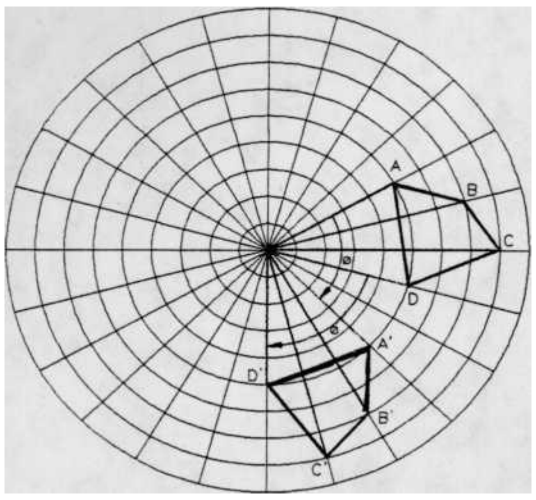


Figura #56

Giro del cuadrilátero ABCD según el ángulo negativo (|).

Se comparan resultados y se discuten en grupo analizando las invariantes del transformado.

Se dibuja sobre un papel sin rayas, con la ayuda de regla, compás y transportador con el proceso siguiente:

- Se dibuja el polígono dado y se ubica el centro de giro de acuerdo a las instrucciones de la guía suministrada por el profesor.
- Se une cada vértice del polígono con el centro de giro O.
- Con la ayuda del transportador se trazan los ángulo AOA', BOB' etc., de acuerdo a la medida ({) dada.

•- Sobre los lados finales de cada ángulo y con el compás, llevar las medidas OA, OB, etc., determinando OA', OB', etc.

- Al unir los puntos A', B', etc., como lo están A, B, etc., se obtiene el trasformado del polígono dado.

Se realizan giros de polígonos en los que uno de los vértices coincide con el centro de giro, estos se hacen inicialmente ayudándose con polígonos recortados en cartulina, fijando uno de sus vértices mediante un chinche y girando un ángulo determinado, luego del análisis de los resultados se construyen polígonos en el geoplano polar con uno de los vértices en el centro de giro y se hace el giro pedido.

Luego de analizar los resultados, se pasan al papel y anotan conclusiones.

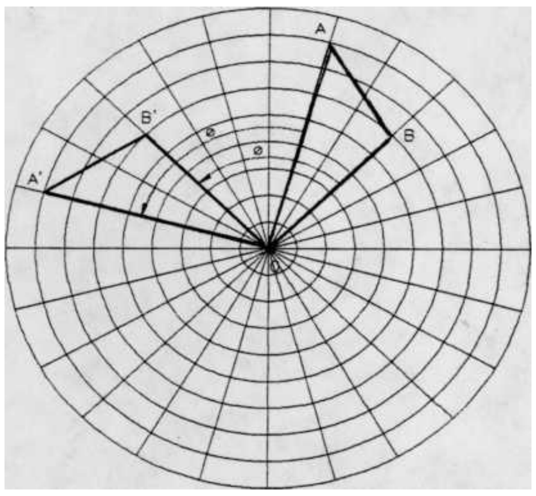


Figura #57 Giro de un segmento según el ángulo **0**

En el geoplano polar se construye un triángulo equilátero de tal manera que el eje de giro coincida con su baricentro realizando un giro de 120°, luego se dibuja sobre el papel, anotando las conclusiones de los resultados según las invariantes observadas.

Se repite el ejercicio con ángulos variados, analizando los resultados y comparándolos con los de cada ejercicio.

2.5.2.2.10.4 Composición de Giros. Se realizan giros consecutivos para analizar su composición y sus características.

En el geoplano se construye una figura y se le aplican giros sucesivos observando los resultados, discutiendo y sacando conclusiones.

Si se aplican varios giros con un mismo centro, cuál es el resultado ?, qué se conserva ?, qué cambia en el transformado final respecto a la figura inicial ? (Figura # 58)

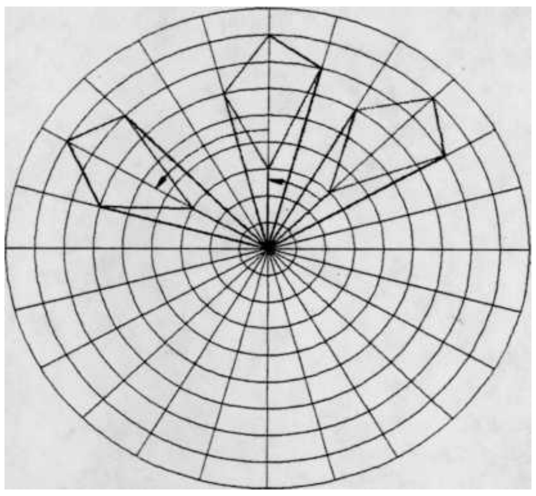


Figura #58

El resultado es un giro de igual centro y de amplitud igual a la suma de las amplitudes de los giros aplicados.

Si se cambia el orden de los giros realizados, el resultado es el mismo ?, qué se concluye ?

Si se realiza un giro y luego un segundo giro de igual amplitud y sentido contrario, cuál es resultado ?.

Si se aplica un giro con una amplitud igual a 0°, cuál es el resultado ?, qué cambia ?.

En el geoplano rectangular es posible realizar giros de 90°, 180°, 270°, 360°; este ejercicio se hace para analizar las invariantes en las coordenadas. Luego de aplicar estos giros, el procedimiento propuesto a los alumnos es el siguiente.

- Se construye un polígono cualquiera y se elige un centro de giro.
- Se anotan las coordenadas de cada vértice.
- Se gira el geoplano el ángulo cuadrantal propuesto, (por ejemplo 90°).
- Se anotan las coordenadas en la nueva posición y se regresa a la posición inicial.
- Se construye el polígono con vértices en las coordenadas encontradas en el giro del geoplano.(Figura # 59)

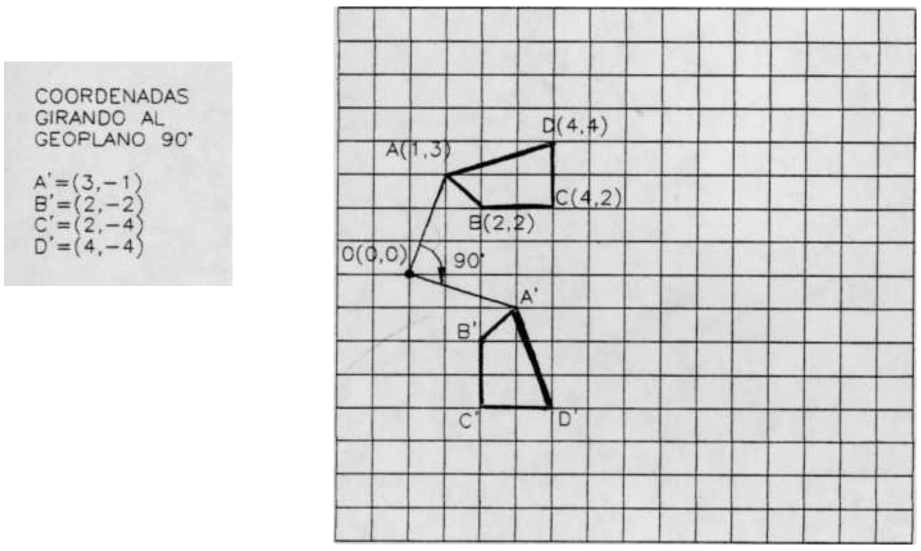


Figura # 59

El polígono A' B' C' D' es el transformado de ABCD según el giro con centro en O (O, 0) y amplitud 90°.

Se observa que: AB 1 A'B' ; BC 1 B'C'; CD 1 C'D' ; AD 1 A'D'.

Se analiza en el transformado las invariantes con respecto al polígono inicial como:

- Las coordenadas de cada vértice.
- La longitud de cada lado.
- Los ángulos del polígono.
- La rotación aplicada tiene sentido positivo ? , tiene sentido negativo ?.
- Si se aplica una rotación de 90° en sentido positivo y luego otra rotación de 180° en sentido positivo y si se denomina R1 a la primera rotación y R_2 a la segunda rotación el resultado final es una rotación R_3. Se denomina Ro a la rotación de una vuelta entera. La rotación compuesta de R1 y R_2 se denotada como R1 o $R_2 = R_3$

Para esta actividad se propone a los estudiantes construir un polígono en el geoplano y realizar un giro de 90° en sentido positivo. Cómo se encuentran las coordenadas?

Se anotan los resultados. Se aplica el segundo giro y se anotan los resultados. Se discute ampliamente sobre el procedimiento y las dificultades presentadas para su ejecución, se sacan conclusiones de las invariantes observadas y se completa la siguiente tabla de acuerdo a las inferencias realizadas en la discusión.

o	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

Ro= 360–
R1= 90“
R2= 180'
R3= 270"

Se analizan los resultados encontrados en la tabla. Se está llegando al concepto intuitivo de grupo mediante el análisis de las propiedades de la composición de giro (o rotaciones).

2.5.2.2.10.5 Simetrías. Respecto a un eje (Reflexiones). Para la comprensión de este concepto se realizan las siguientes actividades:

- En una hoja de papel se deja caer una gota de tinta, luego se dobla a la mitad y se observa las figura que se forman. Las dos manchas tienen exactamente la misma forma.

- En el centro de una hoja se traza un segmento que la divida en dos partes.
- Sobre el segmento y en posición perpendicular al plano de la hoja, se coloca un trozo rectangular de acrílico o vidrio traslucido, liso, coloreado, que es un espejo plano.

En uno de los semiplanos de la hoja se realiza el dibujo de una figura cualquiera; observando la imagen del dibujo en el espejo, se traza la figura en el otro semiplano de la hoja. (Figura 60)

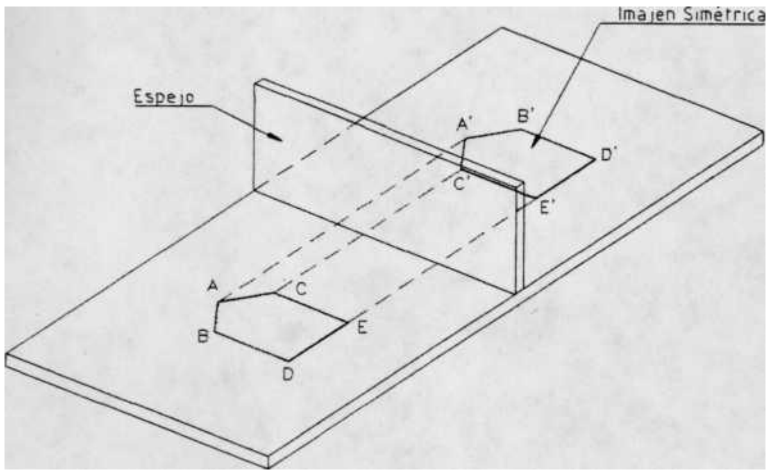


Figura # 60

Se retira el espejo y se observa las figuras realizadas. Se identifica cada punto de cada una y se observa su correspondencia. (Figura 61)

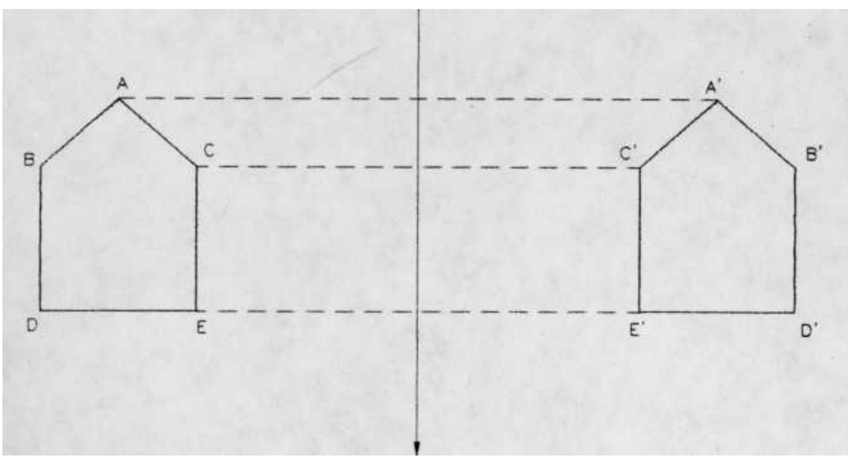


Figura # 61

Al unir por medio de segmentos los puntos correspondientes, se observa que son paralelos entre sí y perpendiculares al segmento sobre el que se colocó el espejo. Los segmentos trabado son divididos por el perpendicular, que se denomina eje de simetría “en dos partes iguales”.

Se dice que la segunda figura es la imagen reflejada de la primera. Se toma una hoja de papel, se traza un eje de simetría y se realiza una figura como la siguiente, identificando sus puntos. (Figura 62)

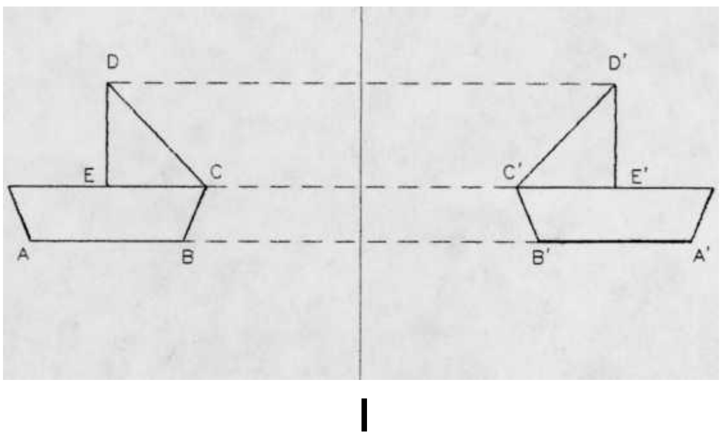


Figura # 62

Se dobla la hoja por el eje L y se perfora con un alfiler cada punto de la figura, observándose los puntos A’ B’ C’ D’ E’ F’ que al unirse forman la imagen de la figura dibujada.

Esta imagen es la simetría respecto al eje L. Esta es la transformación llamada simetría axial o reflexión con respecto al eje L. Se observa que AA’± L; BB’ J. L; CC’ J. L, DD’ 1 L; EE’ 1 L ; FF’ 1 L y AA’ | BB’ | CC’ 1| DD’ | EE’ |1 FF’. Un punto y su simétrico están a la misma distancia del eje de simetría.

Se construye en el geoplano un eje vertical que representa el eje de simetría OP y se construye un cuadrilátero en uno de sus lados y se anotan las coordenadas respecto a

O

Se construye el simétrico del cuadrilátero teniendo en cuenta las observaciones realizadas en las actividades anteriores. (Figura 63)

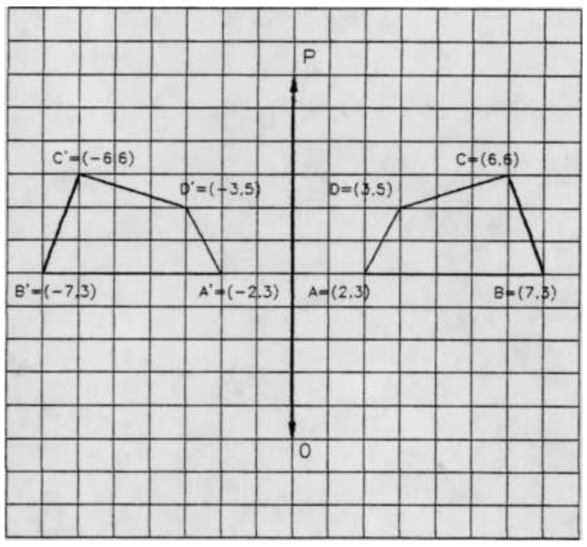


Figura # 63

Se anotan las coordenadas de los puntos A', B', C', D'. Cuáles son las diferencias y las similitudes respecto a las coordenadas A, B, C, D ? Observando la figura y su simetría qué cambia ?, qué se conserva ?

Los vértices en la figura se han identificado en orden alfabético en sentido antihorario. Qué se puede decir del orden en que quedan las vértices en el simétrico ?

Se repite la práctica construyendo un eje horizontal, se observa y se anotan los resultados y se realiza el dibujo en el cuaderno auxiliar.

En el geoplano rectangular se presenta la limitante de no poder construir ejes sino vértices horizontales y a 45° por las restricciones impuestas para su uso.

Se construyen ejes con una inclinación de 45°, se hace la transformación de figuras diversas propuestas por los alumnos, de las cuales resultan las siguientes inquietudes;

Si uno o varios puntos de la figura están sobre el eje, cómo queda el simétrico ?, cuáles son las coordenadas de esos puntos ? y cuáles son sus imágenes ?

Si el eje corta la figura en dos o más puntos, cómo queda el simétrico ?. Se realizan conjeturas y discusiones, para luego sacar conclusiones. (Figura 64)

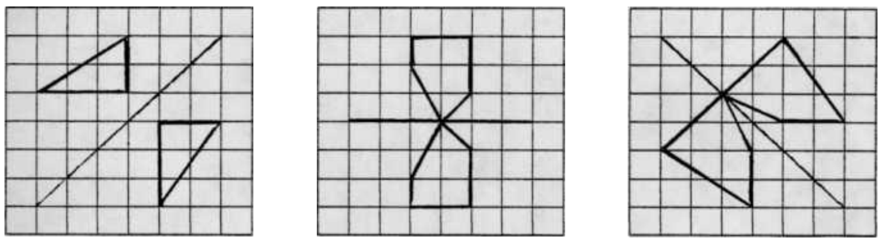


Figura # 64

El geoplano polar permite realizar simetrías axiales con ejes a varias inclinaciones. Se realizan prácticas en él, aplicando los principios descubiertos, lo que permite su afianzamiento. Todos los resultados, conjeturas y conclusiones se anotan en el cuaderno auxiliar y se realizan los dibujos con ayuda de la regla y el compás. (Figura 65)

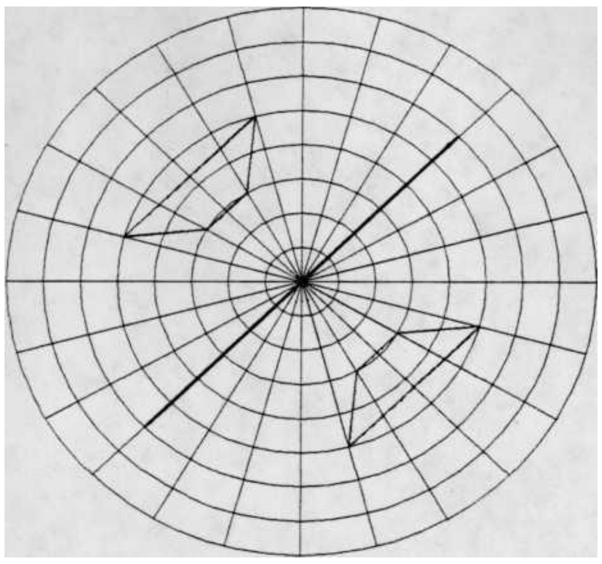


Figura # 65

2.5.2.2.10.6 Composiciones de Simetrías. Si se aplican dos simetrías de ejes paralelos, cuál es el resultado ?. Para esto se realizan prácticas con ejes verticales u horizontales en el geoplano rectangular y luego se comprueba por medio de dibujos con regla y compás. (Figura 66)

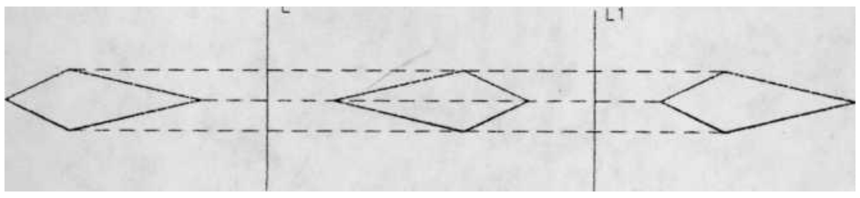


Figura # 66

El resultado es una traslación con vector perpendicular a los ejes de simetría, con sentido del primer eje al segundo y modulo el doble de la distancia entre ejes; estos son descubiertos luego de varias prácticas en las que se pregunta los resultados y las invariantes luego de realizados los movimientos. A continuación surgen las inquietudes; y si los ejes son paralelos ?

Si están formando ángulos de 90°, 180°, 270° 0°y 360° ?.

Para despejar estas dudas se realizan prácticas en el geoplano polar. En el caso de ejes perpendiculares en el geoplano rectangular, para observar las coordenadas. (Figura 67)

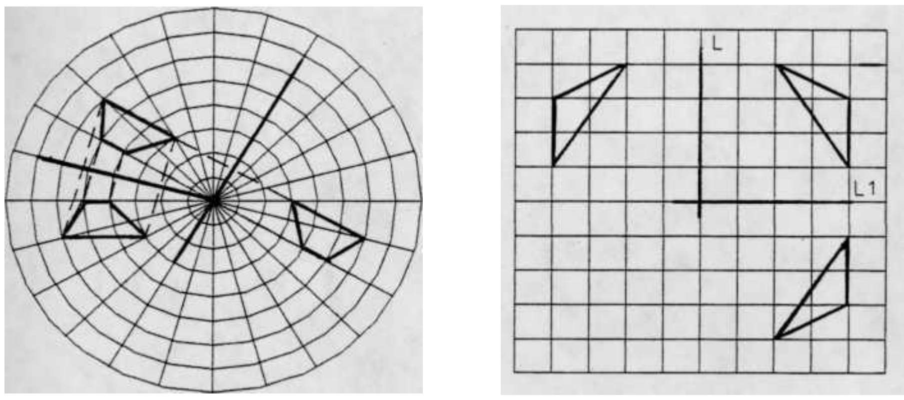


Figura # 67

Se llega a la conclusión que el resultado es un giro con centro en el punto donde se cortan los ejes y amplitud el doble del ángulo que forman los ejes entre sí. Se analizan algunas propiedades mediante las preguntas:

Si se aplica una simetría respecto a un eje L y luego se toma el transformado como "figura inicial" aplicando una segunda simetría respecto al mismo eje, cuál es el resultado ? (reflexión inversa).

Hay una simetría que no cambia la figura en el plano ?, cómo se llamaría ?. Esto se deja a manera de inquietud y no se profundiza por ser tema de cursos posteriores, lo mismo que las denominadas simetrías activas.

2.5.2.2.10.7 Homotecia y Semejanza. Brevemente se analiza el concepto de homotecia y semejanza, lo que permite también integrar con la proporcionalidad que es un tama tratado en el grado ***T*,** es decir, la proporcionalidad se aborda desde los conceptos geométricos de homotecia y semejanza, mediante prácticas fundamentalmente en el geoplano.

Para iniciar se recomienda observar fotos ampliadas, comparándolas con sus originales. Algunos alumnos entre sus colecciones poseen vehículos -a 'Escala". -Se observan y analizan son el modelo a escala natural y se discute sus diferencias y semejanzas (en cuanto a forma y tamaño). Hay una proporción entre el objeto real y su modelo, esto depende de la razón que existe entre los tamaños: doble, triple, cuádruple, etc. Se discute y se realizan las siguientes actividades:

- En el geoplano rectangular se construyen figuras pequeñas y se propone construir otras al doble o triple de las anteriores. (Figura 68)

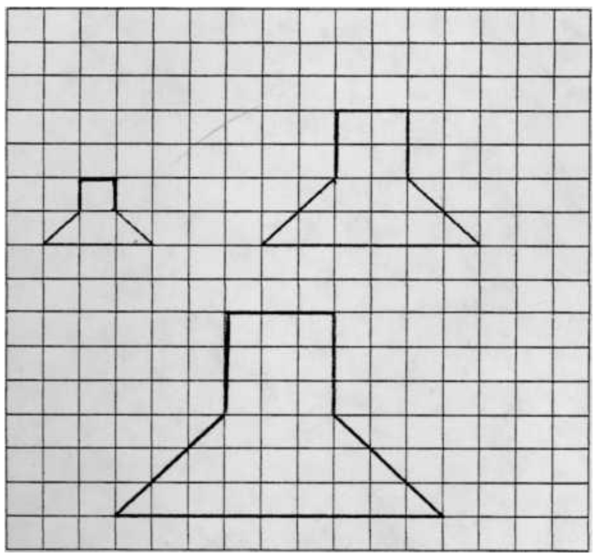


Figura #68

Se construyen figuras grandes y se propone realizarlas pequeñas, la mitad, la tercera parte. Algunos estudiantes para solucionar el problema del espacio en el geoplano, las construyen "dentro", así: (Figura 69)

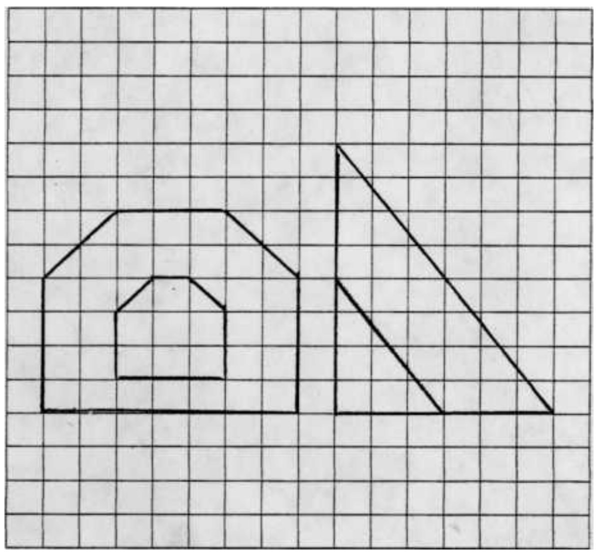


Figura # 69

- Se realizan los dibujos en el cuaderno y se analizan las invariantes y al proporciones de elementos correspondientes.
- Como actividad paralela se propone la construcción de un pantógrafo (ver anexo C) para realizar dibujos a escala.

Se plantea la posibilidad de realizar las construcciones sin la cuadrícula, utilizando el geoplano polar. Se analizan dibujos ya realizados para encontrar el centro de homotecia y la razón de homotecia, así: (Figura 70)

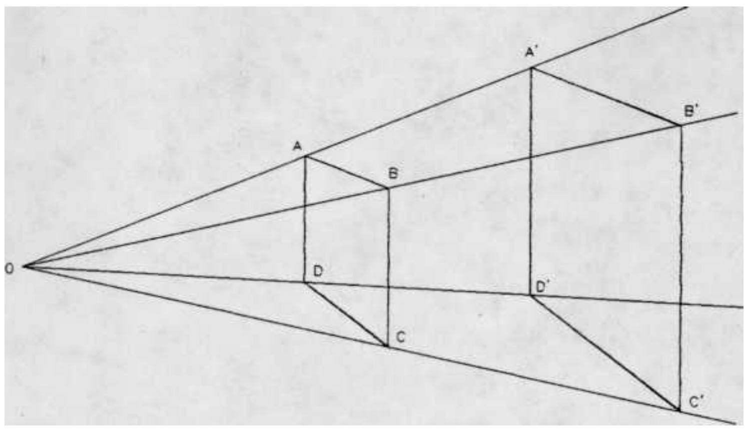


Figura # 70

Se unen los puntos correspondientes de las figuras proporcionales dibujadas, las rayas trazadas se unen en un punto O; lo llamamos centro de homotecia al comparar las distancias OA; OB con OB', etc. Se observa que OA' es el doble de OA si la figura es el doble, el triple si la figura es el triple, etc. Esta es la razón de homotecia.

Se procede a realizar homotecias en el geoplano polar con diferente razón homotecia.

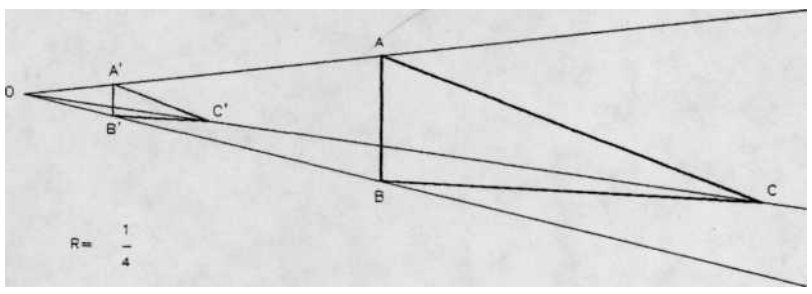


Figura # 71

Se analizan las invariantes en el transformado. Se observa que los ángulos de las figuras homotéticas son congruentes. Se observa los resultados, se discute en grupo, se realiza conjeturas y se realizan dibujos de ejercicios variados.

2.5.2.2.11 Actividades Complementarias. Aparte de la observación permanente de los progresos y dificultades presentadas a los estudiantes en cada una de las actividades, se realiza un acompañamiento, planteándoles preguntas que les permitan analizar, inducir a proponer soluciones y a plantear nuevos problemas.

Se pide a los estudiantes que sugieran variantes a las actividades realizadas en el geoplano, lo que permite ampliar y afianzar sus conocimientos, con lo cual se da cuenta de la movilización del pensamiento matemático. El estudiante trata de explicar los resultados y de expresar una ley para realizarlos en forma general, justificando debidamente cada paso de los procedimientos empleados, con lo que se está induciendo al razonamiento hipotético deductivo de una forma intuitiva, que en cursos posteriores será perfeccionada con sencillas demostraciones formales, luego de realizar sus prácticas en el geoplano.

2.5.3 Evaluación de las Actividades Realizadas. Durante el trabajo realizado por los estudiantes del grado 7° B del Instituto Técnico Jorge Eliecer Gaitán, en las actividades geométricas planteadas, se observa las siguientes actitudes y progresos:

Presentan un especial entusiasmo en la ejecución de los talleres planteados y gran satisfacción por los resultados obtenidos.

Se tiene gran inquietud para proponer situaciones nuevas luego de observar los resultados.

El aprendizaje se realiza sin la tensión de ser calificados, sino para realizar nuevos descubrimientos.

Es notorio el progreso en los conocimientos geométricos, lo que se comprueba por los resultados de las actividades y las propuestas por ellos realizadas.

Se presenta el inconveniente de ser muy lento en un principio el desarrollo de los talleres, por lo que se hace necesario plantear actividades extraclase, lo que se realiza con mucho agrado.

El tiempo disponible para el desarrollo del programa propuesto es muy corto, por lo que se recomienda seleccionar actividades relevantes en los temas que se crea necesario.

En un programa normal, se aconseja repartir las actividades en los diferentes grados, según la tabla que aparece a continuación;

2.5.4 Contenidos Temáticos propuestos a tratar en cada grado de la Educación Básica Secundaria.

BLOQUES TEMÁTICOS	Gr. 6º	Gr. 7º	Gr. 8º	Gr. 9º
Reconocimiento de formas de cuerpos geométricos.	x	x		
Clasificación de cuerpos geométricos y análisis de sus elementos.	x	x	x	x
Clasificación y caracterización de figuras geométricas.	x	x	x	x
Construcción de poliedros.	x	x	x	x
Ubicación relativa de puntos.	x	x	x	x

Concepto de vector.		x		
Construcción de segmentos.	x	x	x	x
Construcción de paralelas.	x	x	x	x
Construcción de perpendiculares.	x	x	x	x
Concepto de pendiente.		x		
Construcción de paralelogramos.	x	x	x	x
Caracterización de paralelogramos	x	x	x	x
Áreas y perímetros de paralelogramos	x	x	x	x
Construcción y caracterización de triángulos.	x	x	x	x
Áreas y perímetros de triángulos y polígonos diversos.			x	x
Teorema de Pitágoras.		x	x	x
Construcción y caracterización de polígonos.	x	x	x	x
Dibujos de polígonos con regla y compás.	x	x	x	x
Relación entre los elementos del triángulo.		x	x	x
Proporcionalidad y semejanza.		x	x	x
Teorema de Thales.			x	x
Transformación en el plano.				x
Simetrías en el plano.		x	x	x
Rotaciones en el plano.		x	x	x
Homotecias.		x	x	x

Composición de transformaciones.		x	x	x
Generalización intuitiva.		x	x	x
Generalización y formalización.		x	x	x
Demostración de teoremas.				x
Elementos de geometría proyectiva.				x

2.6 CONCLUSIONES.

Luego de analizar los resultados de la investigación mediante el análisis comparativo de las pruebas inicial y final, se concluye que;

- La estrategia para la enseñanza de la Geometría, desarrollada mediante la manipulación de materiales, en actividades orientadas, facilitó el aprendizaje intuitivo de los estudiantes del grado 7° del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán.

- Se despertó el interés por el aprendizaje geométrico de los estudiantes del grado 7° del Instituto Técnico Industrial Jorge Eliecer Gaitán, por medio de una estrategia que permitió el descubrimiento intuitivo de los conceptos.

- Se movilizó el pensamiento espacial de los estudiantes mediante la estrategia aplicada.

- Se adquirió precisión en la expresión verbal y familiarización con el lenguaje y expresiones simbólicas.

- La estrategia es una herramienta eficaz para los docentes, que permite acompañar a los estudiantes de Educación básica en el descubrimiento de los conceptos necesarios para los futuros cursos geométricos.

- El Geoplano es un mediador que faculta el estudio de los conceptos geométricos y en especial de las transformaciones geométricas, para los estudiantes de Educación Básica.

2.7 RECOMENDACIONES.

- El Educador debe planear cuidadosamente las actividades de aprendizaje con el fin de obtener óptimos resultados.

- La estrategia puede ser aplicada a los alumnos de cualquier grado de enseñanza básica secundaria, ajustando el nivel de profundidad de acuerdo al grupo específico.

- Debe realizarse el aprendizaje geométrico durante todo el año lectivo, asignándole como mínimo una hora de clase en la semana; a fin de garantizar la continuidad y efectividad en el aprendizaje.

. - Queda abierta la posibilidad de construir a partir de una situación particular, toda la conceptualización básica de un curso, dependiendo del inteligente aprovechamiento de los recursos tanto humanos como logísticos del medio, al iniciar el curso de geometria.

Para la divulgación de la estrategia se hace necesario emprender la capacitación de docentes del área de matemáticas, quienes se encargarán de aplicarla con sus alumnos y a la vez, servirán de multiplicadores dándola a conocer en sus sitios de trabajo, a los demás educadores del área.

Se hace necesario continuar investigando en esta linea de trabajo para lograr el mejoramiento de la enseñanza de la geometría en la educación básica secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEKSANDROV, A.N. et al. La Matemática su Método y Significado. V. 3. ed. 4ª. Ed. Alianza : Madrid. 1981.

CAMPOS. Alberto. La Educación Geométrica. Vol. 4. Imprenta Nacional : Bogotá. 1981.

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. Ed. Trillas : México. 1970.

CASTORINA, José Antonio y PALAU, Gladis Dora. Introducción a la Lógica Operatoria de Piaget. Ed. Paidos : Barcelona 1982.

DIENES, Zoltan P. Geometría Euclidiana. Ed. Taide : Barcelona. 1982 Traducción de Carmen Azcarte y Jaime Portilla.

-------- Grupos y Coordenadas. Ed. Teide : Barcelona. 1978. Traducción de Carmen Azcarte y Jaime Portilla.

-------- Topología y Geometría Afin. Ed. Teide : Barcelona. 1979. Traducción de Carmen Azcarte y Jaime Portilla.

DICKSON, Linda, et al. El Aprendizaje de las matemáticas. De. Labor : Barcelona. 1991.

DOLCIANI, Mary P. et al. Álgebra Moderna. Estructura y Método. Libro l. Publicación Cultural : México. 1977

EVES, Howard. Estudio de las Geometrías. Tomo l. . Unión Tipográfica

Hispano Americana : México. 1969. Traducción de Santiago Alonso.

FRAISSE, Paul. Tratado de Sicología Experimental, la Percepción. Ed Paidos : Buenos Aires. 1972.

LEY GENERAL DE EDUCACIÓN. No. 115 de Febrero 8 de 1994.

LOVELL, K. Didáctica de las Matemáticas. (Sus bases sicológicas). Ed. Morata : Madrid. 1962. Traducción Gonzalo Gonzalgo Maniar.

LLINARES, Salvador y SÁNCHEZ, Victoria María. Teoría y Práctica de la Educación Matemática. Ed. Sevilla : Sevilla (España).

MARCOS GENERALES, de los Programas Curriculares del Ministerio de Educación Nacional. Bogotá. 1984.

MESA BETANCUR, Orlando. Criterio y Estrategias para la Enseñanza de las Matemáticas.

MESA BETANCUR, Orlando, et al. Intervención Pedagógica en la construcción de los conceptos matemáticos. U.D.A : Medellín. 1993.

MARTÍNEZ RODRÍGUEZ, Emiliano, et al. Enciclopedia Técnica de Educación. Tomo 2. Ed. Santillana : Madrid. 1970.

MILLER, Charles y HERVEN, Verne. Introducción al pensamiento matemático. Ed. Trillas : México. 1979. Traductor Felipe Robledo.

NEGRO, Adolfo; Pérez C. Santiago y THIO DE POL, Santiago. Hacia la matemática -3. Ed. Alhambra : Madrid. 1977.

OCHAITA ALDERETE, Esperanza. La Teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. Revista Estudios de Sicología No. 14/15 1983. Universidad Autónoma de Madrid.

PIAGET, J. INHELDER, B. Psicologías del Niño. Ed. Morata : Madrid. 1982.

PIAGET, J. et al. La enseñanza de la Matemática Moderna. Ed. Aguilar : Madrid. 1960.

POLYA, Jeorge. Matemáticas y Razonamiento Plausible. Tecnos : Madrid. 1996.

REY, Pastor J. y PUIG, Adam. Elementos de Geometría Racional. Tomo l. Geometría Plana. Nuevas Grafías : Madrid. 1963.

VASCO, Carlos E. Un nuevo concepto de las matemáticas. Revista Ciencia y Tecnología. Vol. 6. No. 2. Abril - Junio 1988.

WILLIAMS, Robert. The Geome'trical Fundation of Natural Structure. Dover publications : New York. 1979.

ANEXOS

Anexo A. Fichas de las Pruebas Inicial y Final.

INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL JORGE E. GAITAN EL CARMEN DE V.

ESTUDIO DE GEOMETRIA

FICHA Nº 1

NOMBRE______________________________ GRUPO________ Nº________

Utilizando regla y compás dibuje las figuras geométricas indicadas y escriba la característica más importante de cada una de ellas.

FIGURAS	CARACTERISTICAS
1) Triángulo Equilatero	
2) Triángulo Isósceles	
3) Triángulo Escaleno	

FIGURAS	CARACTERISTICAS
4) Triángulo rectángulo	
5) Cuadrado	
6) Rombo	

FIGURAS	CARACTERISTICAS
7) Rectángulo	
8) Trapecio	
9) Paralelogramo	

FIGURAS	CARACTERISTICAS
10) Tres polígonos de más de cuatro lados	

FIGURAS	CARACTERITICAS
11) Círculo	
12) Semicírculo	
13) Circunferencia	

INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL JORGE E. GAITAN EL CARMEN DE V.

ESTUDIO DE GEOMETRIA

FICHA Nº 2

NOMBRE ______________________ GRUPO ________ Nº ________

En la hoja anexa encontrarás diversas figuras geométricas, identificadas con números. Clasifícalas escribiendo los números correspondientes a TODAS las pertenecientes a cada uno de los conjuntos relacionados a continuación.

Cuadriláteros: ______________________

Triángulos: ______________________

Triángulos Isosceles: ______________________

Cuadrados: ______________________

Elipses: ______________________

Trapecios: ______________________

Figuras curvilíneas: ______________________

Hexágonos: ______________________

Pentágonos: ______________________

Triángulos rectángulos: ______________________

Triángulos equiláteros: ______________________

Circunferencias: ______________________

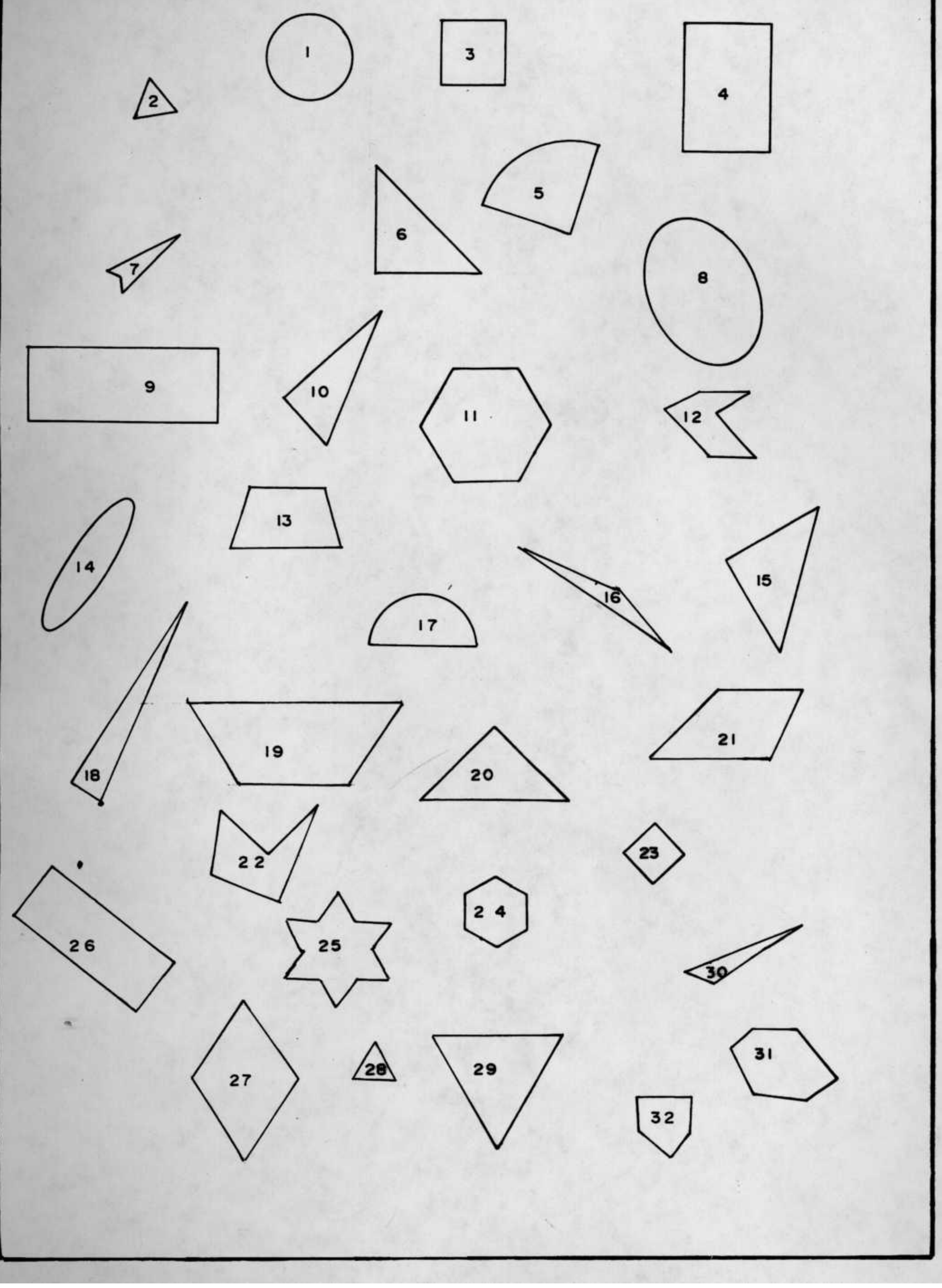
Rombos: ______________________

Polígonos de más de cuatro lados ______________________

Polígonos Regulares: ______________________

Triángulos escalenos: ______________________

Paralelogramos: ______________________


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL JORGE E. GAITAN EL CARMEN DE. V.

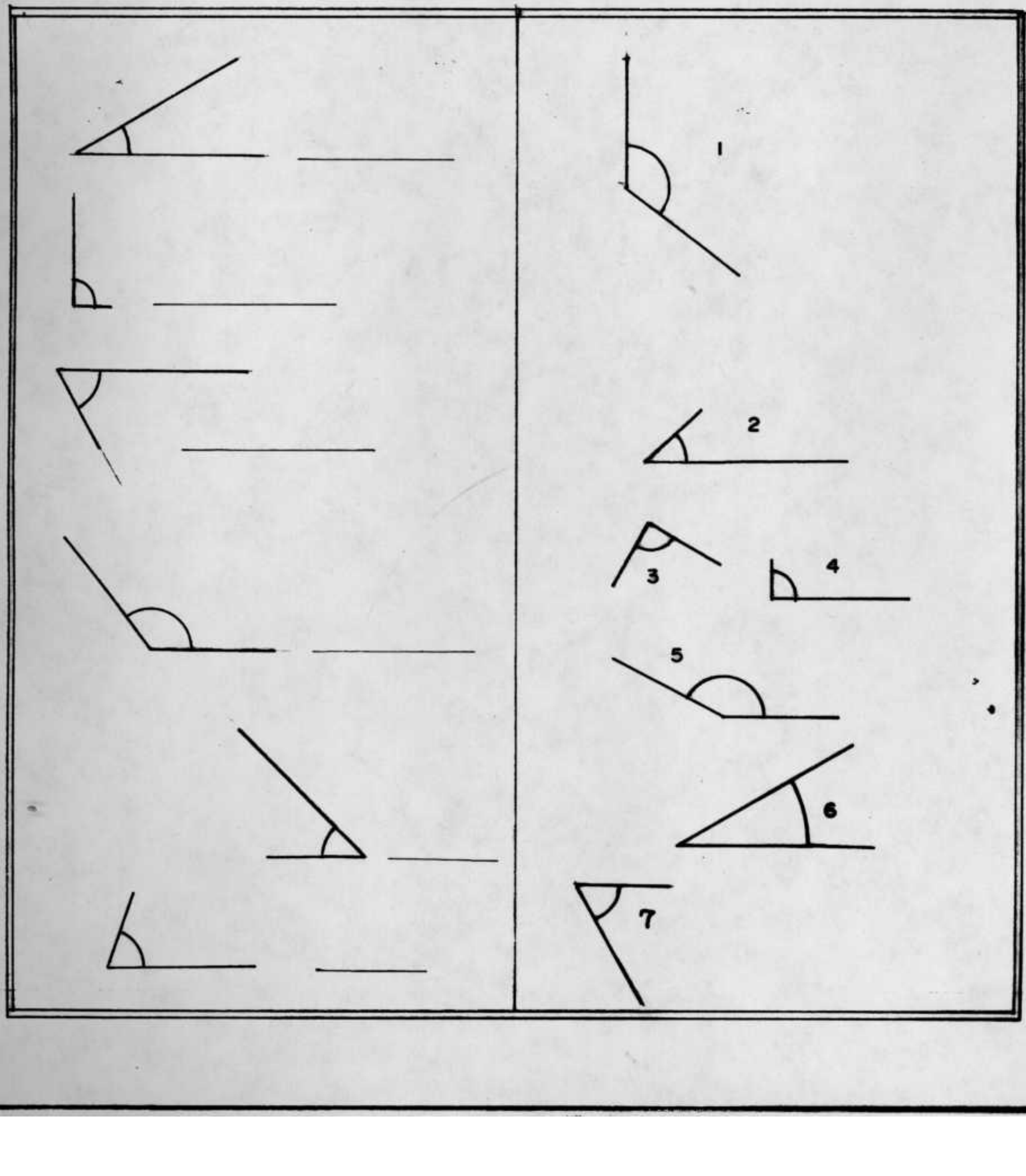
ESTUDIO DE GEOMETRIA

FICHA Nº 3

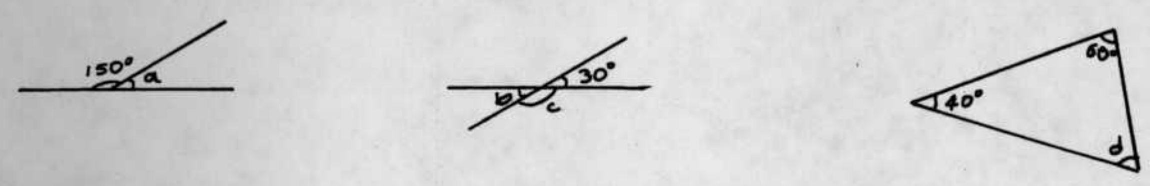
NOMBRE ______________________________ GRUPO ______ Nº _____ FECHA ______

1) Para tí, que es un ángulo ?

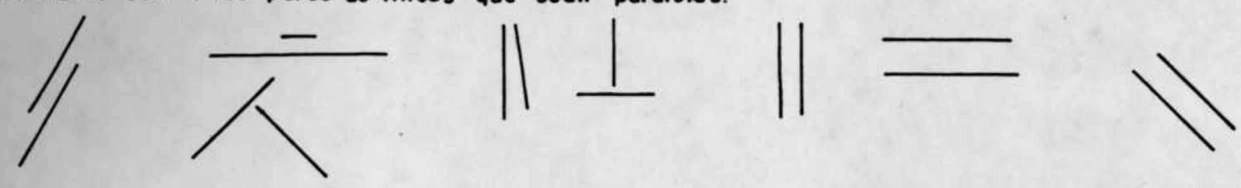
2) Al frente de cada ángulo de la columna de la izquierda, coloca los números de los ángulos de la columna de la derecha que tengan su misma medida.
(puedes usar tu transportador).



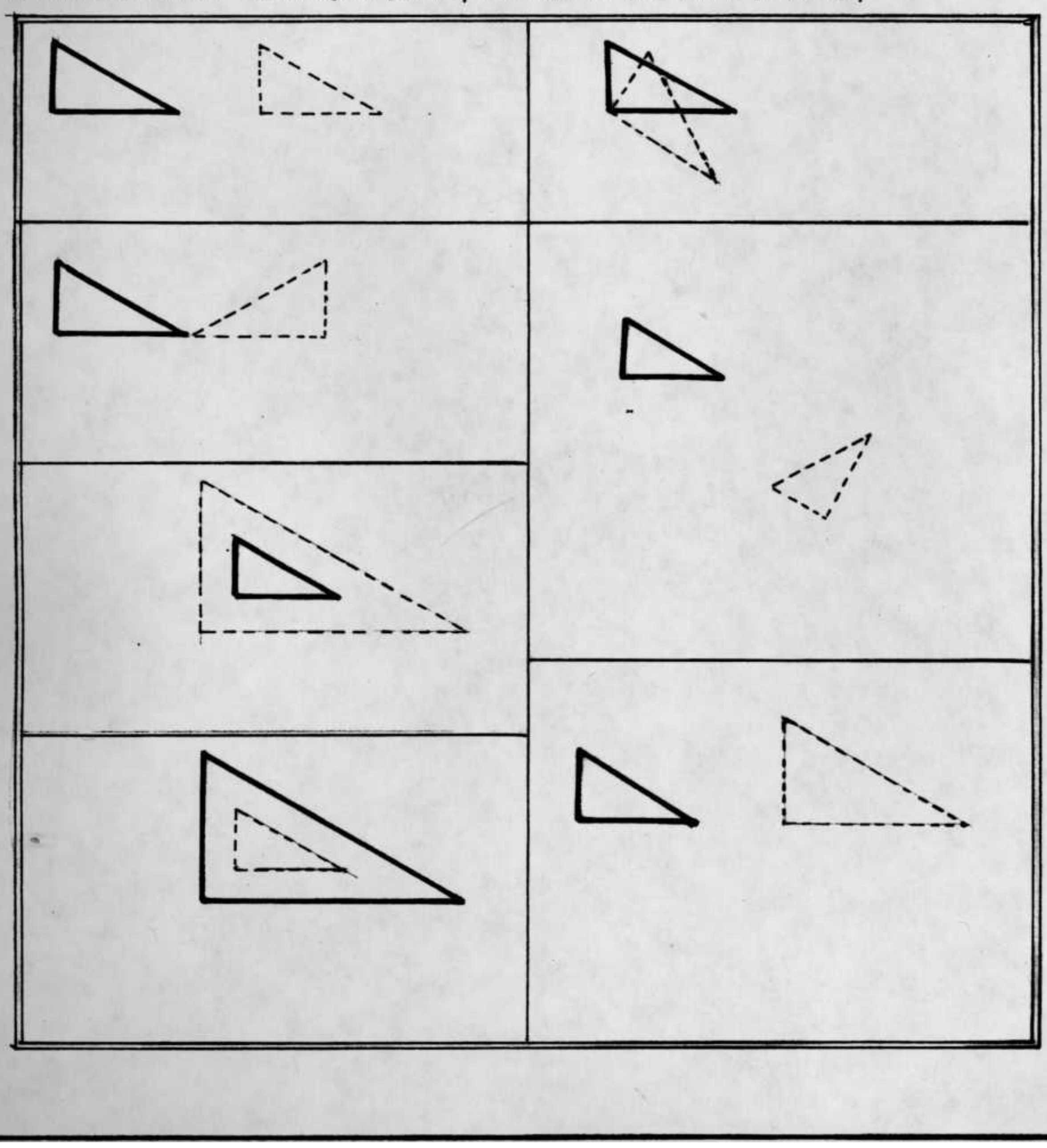
3) Cuanto miden los ángulos a, b, c, d ?



4) Marca con X los pares de lineas que sean paralelas.



5) Que debes hacer con el triángulo para que ocupe la posición punteada?



INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL JORGE E. GAITAN EL CARMEN DE V.

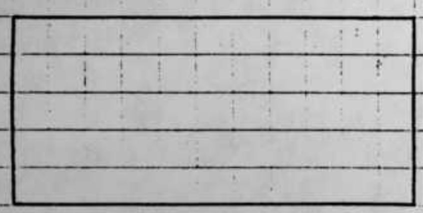
ESTUDIO DE GEOMETRIA

FICHA 4

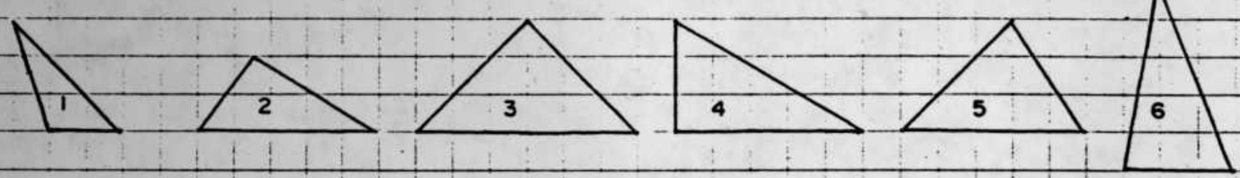
NOMBRE ______________________ GRUPO ________ Nº ________ FECHA ________

En los siguientes problemas, si necesitas medidas utiliza los cuadritos.

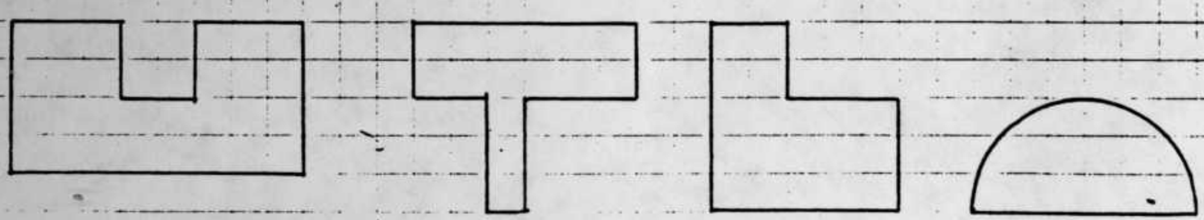
1) Si tienes un terreno para cultivar como aparece en el dibujo. Que tan grande es ?
Si se siembra un almud de papa en cada cuadro. Cuanta papa puedes sembrar ?
Cuanto alambre necesitas para cercarlo con una sola vuelta?



2) Cuales de los triángulos siguientes tienen igual área?. Cual tiene mayor area? Cuanto mide el area de cada uno ? Cual tiene menor area ?



3) Calcule el area y el perímetro de cada figura



4) Dibuje rectangulos con perimetro igual a 20 cual de ellos tiene mayor area ?

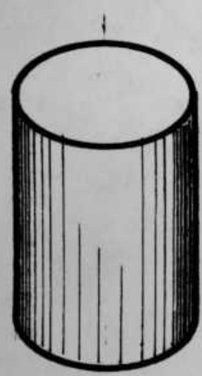
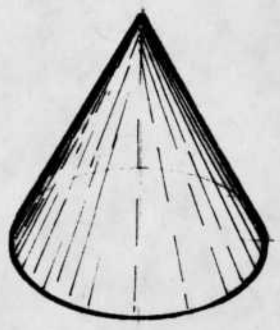
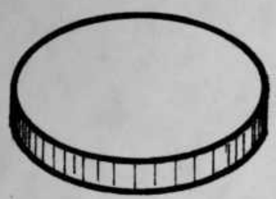
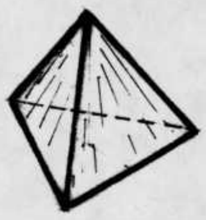
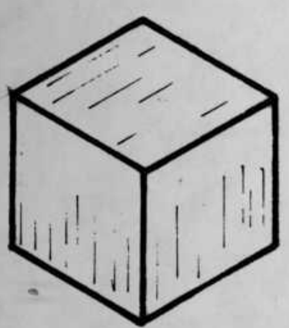
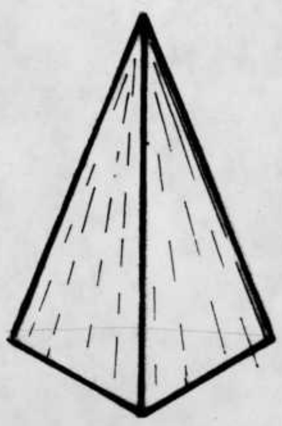
INSTITUTO TECNICO INDUSTRIAL JORGE E. GAITAN EL CARMEN DE V.

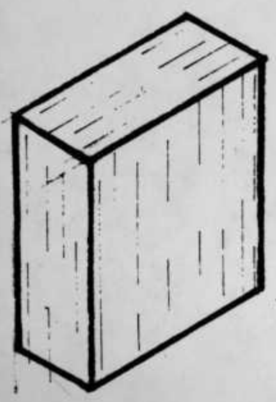
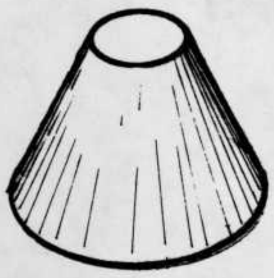
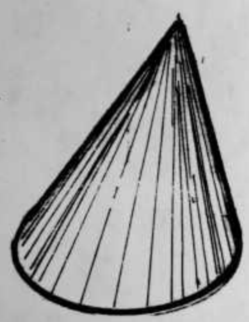
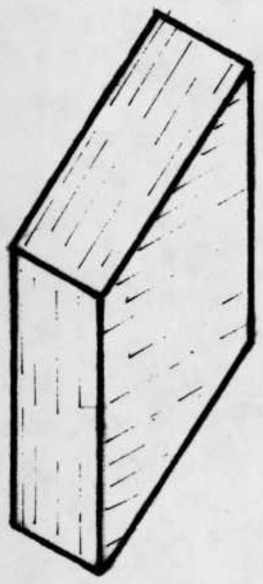
ESTUDIO DE GEOMETRIA

FICHA Nº 5

NOMBRE________________________ GRUPO______ Nº______ FECHA______

Colócale el nombre a cada objeto dibujado y escribe sus principales caracteristicas.

OBJETO	CARACTERISTICAS	OBJETO	CARACTERISTICAS
 Nombre______________		 Nombre______________	
 Nombre______________		 Nombre______________	
 Nombre______________		 Nombre______________	

OBJETO	CARACTERISTICAS	OBJETO	CARACTERISTICAS
 Nombre ________________		 Nombre ________________	
 Nombre ________________		 Nombre ________________	
 Nombre ________________			

Anexo B. Talleres de la Intervención.

Taller 1. Reconocimiento, caracterización y construcción de cuerpos geométricos.

- Objetivo: Reconocer, caracterizar y clasificar los cuerpos geométricos
- Materiales: Variados, recolectados por los alumnos.
- Actividades:

1 - Observar en el lugar de residencia las formas geométricas que tienen los objetos haciendo una lista de objetos y llenando la siguiente tabla, como el ejemplo:

OBJETO	FORMA GEOMÉTRICA	CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS.
Nevera	Prisma Rectangular	6 Caras rectangulares

1 - Recolectar objetos del medio que tengan formas geométricas diferentes (cajas, pirámides, pelotas, etc.).

2 - Reunir en clase los objetos con los aportados por los compañeros del grupo de trabajo.

3 - Analizar lo que caracteriza a cada objeto al tocarlo, manipularlo, observarlo (características de tipo geométrico).

4 - Clasificar los cuerpos en grupos de acuerdo a características comunes observadas.

5 - Dar un nombre a cada grupo de cuerpos obtenido.

6 - Hacer una lista de características de cada grupo.

7 - Nombrar un representante de cada grupo para exponer las conclusiones y discutir los resultados con los demás compañeros. Unificar criterios del profesor y consignar las conclusiones.

Taller 2. Desarrollo de cuerpos geométricos.

- Objetivo; Caracterizar y clasificar las figuras en el plano a partir de los cuerpos geométricos.

, - Materiales: Cuerpos recolectados por los alumnos, tijeras, cinta adhesiva, regla y compás.

- Actividades:

1 - Seleccionar los cuerpos construidos en materiales desarrollables, como cartón, cartulina, polietileno, etc.

2 - Sellar las aberturas o tapas con cinta adhesiva.

3 - Cortar por las aristas, teniendo cuidado de dejar cada cara unida a una contigua por una arista.

4 - Colocar la plantilla obtenida sobre una hoja, dibujarla en el cuaderno y analizar las características geométricas de cada cara.

5 - Dar un nombre geométrico a cada figura obtenida y analizar las características que las diferencian de otras.

6 - Realizar discusión en el grupo y sacar conclusiones.

7 - Construir diferentes figuras en cartulina y recortarlas.

8 - Clasificar las figuras obtenidas de acuerdo a las características como convexidad, número de lados, medida de los ángulos, etc.

9 - Formar conjuntos con los diferentes grupos obtenidos, delimitando cada conjunto por medio de tiras de colores.

10 - Analizar las relaciones entre los diferentes conjuntos obtenidos (de acuerdo a las características) como intersecciones y uniones entre ellos.

11 - Dibujar con regla y compás las diferentes figuras obtenidas.

Taller 3. Construcción de cuerpos geométricos.

- Objetivo: Construir algunos cuerpos geométricos y analizar sus características.
- Materiales: Cartulina, pegante, tijeras, regla y compás.
- Actividades:

1 - Sobre cartulina y con la ayuda de regla y compás, dibujar las plantillas de los diferentes cuerpos de acuerdo a los modelos suministrados por el profesor. Algunos de los cuerpos a construir son poliedros regulares, prismas, pirámides, prismas truncados, pirámides truncadas, paralelepípedos variados, conos, cilindros, poliedros arquimedianos, etc.

Luego de dibujarlos, recortarlos, doblarlos por las aristas y pegar utilizando las pestañas dejadas para tal fin.

3 - Analizar los diferentes cuerpos construidos de acuerdo a sus características como número de : caras, aristas, vértices; forma de las caras, etc.

4 - Realizar clasificaciones de acuerdo a las características observadas.

, 5 - Realizar una tabla de acuerdo a las características observadas en los poliedros regulares.

Nombre	No. Caras	No. Aristas	No. Vértices	No. Lados de cada cara

6 - Encontrar expresiones que permitan calcular a partir de los datos obtenidos, el número de aristas y el número de vértices de los poliedros estudiados.

Taller 4. Construcción del Geoplano.

- Objetivos; - Construir el geoplano sobre el que se realizarán las prácticas geométricas.

- Trazar líneas paralelas y perpendiculares, circunferencias concéntricas, ángulos con vértice común de una medida determinada.

- Materiales: Tabla de madera pulida de 40 x 40 cm. y no menor de 6 mm. de espesor, regla, compás de tablero, transportador.

- Actividades:

1 - En una de las caras de la tabla trazar una cuadricula de 2 x 2 cm. Para trazarla, por una de las aristas de la tabla realizar mediciones cada 2 cm. repitiendo el procedimiento por las cuatro aristas; uniendo luego los puntos correspondientes de las aristas opuestas se obtiene la cuadrícula.

2- En la otra cara de la tabla, trazar las diagonales, su intersección es el centro para trazar las circunferencias concéntricas cada 2 cm., marcando sobre una diagonal los puntos para trazarlas.

3- Con ayuda del transportador, trazar radios cada 15°, prolongándolos hasta los extremos de la tabla.

Taller 5. Ubicación relativa de puntos.

- Objetivo: - Identificar la posición de un punto respecto a otro en el plano. - Intuir los conceptos de par ordenado y de vector.
- Materiales: Geoplano, chinches, cuaderno cuadriculado.
- Actividades:

1 - Familiarizarse con el geoplano rectangular, reconociendo sus partes: arriba, abajo, izquierda, derecha respecto al estudiante y los nudos donde se colocarán los chiches.

2 - Colocar un chinche de referencia en un nudo cualquiera.

3 - Colocar un segundo chinche y analizar su posición respecto al primero de acuerdo a la cuadricula trazada.

4 - Cómo se llegaría desde el primer punto al segundo ? hay que tener en cuenta que debe seguirse las líneas de la cuadrícula como caminos para llegar y no se puede “atravesar” por las diagonales y otra parte diferente a las líneas trazadas (son las calles y las carreras para llegar de una esquina a otra en el pueblo).

5 - Cuántas cuadras por las “carreras” se tuvo que recorrer ? Cuántas por las calles ? Si se considera las líneas de izquierda a derecha (horizontales) como carreras y las de arriba, abajo (verticales) como calles.

6 - Escribir los resultados en el cuaderno.

7 - Se podría llegar a un punto determinado si le dicen que está a cinco “cuadras” del punto de donde se parte ? Si no es así, que información te falta ?

8 - Cuántos caminos, siguiendo las líneas, se podría elegir para llegar de un punto a otro, ubicados en el geoplano ?. Cuál se elegirá ?. Por qué ?. Qué indicaciones se darían a un compañero para llegar de un punto a otro ?. Escribir las respuestas en el cuaderno y dibujar en las hojas cuadriculadas los caminos a recorrer, utilizando colores.

9 - Ubicar un punto en el geoplano y luego colocar otro en cada uno de las siguientes posiciones respecto al primero:

P = 5 derecha, 4 arriba.

Q = 3 izquierda, 2 arriba.

M = 4 izquierda, 6 abajo.

N = 2 derecha, 4 abajo.

R = o horizontal, 5 abajo.

S = 3 derecha, O vertical.

10 - Dibujar en tu cuaderno cuadriculado los resultados.

11 - Para evitar confusiones en adelante, se citan primero los recorridos horizontales y luego los recorridos verticales, así: 4 derecha, 5 abajo, etc.

12 - Con la convención anterior no se necesita utilizar las palabras arriba, abajo, izquierda, derecha, si se tiene en cuenta que el primer número representa recorridos horizontales y el segundo recorridos verticales. Para saber el sentido se tiene en cuenta que se representa:

Arriba con +

Abajo con -

Derecha con +

Izquierda con -

Así, (+3, -2) significa 3 a la derecha y 2 abajo.

Realizar varios ejercicios y dibújalos en tu cuaderno.

13 - Colocar 3 puntos en el geoplano dándoles nombres, por ejemplo: A, B, C. Encontrar la posición de cada uno con respecto a los otros dos. Dibujar en el cuaderno colocando las posiciones así:

, AB es la posición de A respecto a B, etc.

Las “direcciones” dadas para llegar de un punto a otro se llaman Coordenadas.

Ubicar puntos respecto a un punto O, con las siguientes coordenadas:

A(-5,4);B(3,-2)yC(-2,-3)

14 - Anotar las conclusiones del taller realizado.

Taller 6. Construcción de Segmentos.

- Objetivo: preparar al estudiante para los conceptos de Vector, Paralelismo y Perpendicularidad.
- Materiales: Geoplano, chinches, gomas elásticas, cuaderno cuadriculado.
- Actividades:

1 - Ubicar un punto A en el geoplano.

2 - Ubicar un punto B y anotar las coordenadas respecto de A.

3 - Unir los puntos A, B con una banda elástica, obteniéndose el segmento AB.

4 - Repetir el proceso y dibujar en el cuaderno, anotando las coordenadas de cada segmento.

5 - Ubicar un punto extremo al segmento AB construido en el geoplano. Anotar las coordenadas de A y B respecto a O.

6 - Anotar resultados, sugerencias y conclusiones. Luego dibujar en el cuaderno cuadriculado

Taller 7. Paralelismo.

- Objetivo: Intuir el concepto de paralelismo.
- Materiales: Geoplano, chinches, bandas elásticas, cuaderno cuadriculado.
- Actividades:

1 - Construir un segmento AB de coordenadas (2, 6).

2 - En otro sitio del geoplano construir un vector CD de coordenadas (2, 6) respecto aC.

3 - Observar los dos segmentos, anotar las diferencias y semejanzas.

4 - Construir un segmento EF de coordenadas igual a la mitad de AB, esto es (1, 3). Observar las diferencias y semejanzas con AB. Sacar conclusiones.

5 - Construir un segmento GH de coordenadas el doble de AB. Qué cambia? , Qué se conserva ? . Dibujar y anotar los resultados.

Taller 8. Perpendicularidad.

- Objetivo: Intuir el concepto de perpendicularidad.
- Materiales: Geoplano, chinches, bandas elásticas, cuaderno cuadriculado.

- Actividades:

1 - Construir un segmento AB en el geoplano. Anotar las coordenadas respecto de A.

2 - Girar el geoplano 90° y anotar las coordenadas respecto de A en la nueva posición.

3 - Regresar el geoplano a su posición inicial y construir un segmento CD con las coordenadas anotadas en la posición girada del geoplano, utilizando una banda de color diferente al primer segmento. Cómo es el segundo segmento respecto al primero , ¿qué se conserva ?, ¿Qué cambia ?

Taller 9. Construcción de Polígonos.

- Objetivo; Intuir el concepto de poligonal y de polígono.
- Materiales: Geoplano, chinches, bandas elásticas.
- Actividades:

1 - Construir un segmento AB en el geoplano, a continuación y con el punto B en común, construir el segmento BC en cualquier dirección; continuar construyendo segmentos uno a continuación de otro. Se obtiene un camino para ir desde el primer punto al último. Se le denomina poligonal. Dibujar en el cuaderno.

2 - Construir poligonales variadas, en las que se regrese al punto de partida. Dibujar en el cuaderno cuadriculado, observar y comparar con los construidos por otros compañeros.

Son poligonales cerradas. Al espacio comprendido dentro de la poligonal de le llama polígono.

3 - Construir polígonos diversos y dibujarlos en el cuaderno, observar sus características y analizar sus semejanzas y diferencias. Cada segmento es un lado del polígono. Cuántos lados tiene cada polígono construido ?. Compararlos con los de los compañeros.

4 - Construir el polígono de menor número de lados posible. Cuál es ?

5 - Construir varios polígonos con bandas del mismo color. A los puntos de unión de los lados se les llama vértices.

6 - Con bandas de otro color, se unen los vértices de manera que no coincidan los lados del polígono, realizando todas las uniones posibles. Los segmentos obtenidos son las diagonales del polígono. Dibujar en el cuaderno los resultados, teniendo cuidado de dibujar la poligonal de un color y las diagonales de otro. Qué se observa ?, hay diagonales por fuera del polígono ?, en qué casos ?, cuántas diagonales se obtienen ?

7 - Dibujar y recortar los polígonos obtenidos sobre cartulina plana.

8 - Realizar clasificación, agrupándolos de acuerdo a lo observado en el punto 6, qué grupos se obtuvieron ? , de acuerdo a qué características ?

9 - A los grupos obtenidos con la característica de tener diagonales por fuera de polígono se les llama No Convexos y a los otros se les llama Convexos.

10 - Construir triángulos diversos y clasificarlos según sus invariantes.

11 - Construir cuadriláteros diversos y clasificarlos según sus invariantes.

Taller 10. Concepto de Área.

- Objetivo. Intuir el concepto de Área.
- Materiales: Geoplano, chinches, bandas elásticas.
- Actividades:

1 - Construir un rectángulo en el geoplano.

2 - Contar los cuadrados que quedan encerrados en la polígona. Ésta es el área del polígono. Anotar resultados, dibujar y sacar conclusiones.

3 - Construir un rectángulo y con una banda de otro color, trazar una de sus diagonales. Qué figura resultan ? , qué proporción tiene cada una con respecto al rectángulo original ?.

- Diferenciar cada uno de los triángulos con un color de banda diferente. Proporcionar un método para calcular el área de cada triángulo. Cómo es el área del triángulo con relación a del rectángulo ?
- Construir un trapecio rectángulo y con una banda dividirlo en un rectángulo y un
- Calcular el área del trapecio como la suma de la del rectángulo y el triángulo, dibujar y sacar conclusiones.

Cómo se calcula el área de un trapecio isósceles. Describir el método propuesto. Dibujar en el cuaderno.

Proponer un método para calcular el área de: un paralelogramo cualquiera, un triángulo no rectángulo, un cuadrilátero no paralelogramo, un polígono cualquiera. Anotar resultados. Dibujar en el cuaderno y sacar conclusiones.

Construir triángulos con base común, altura igual, calcular sus áreas.

Construir triángulos cuyas bases y alturas varíen en las siguientes proposiciones:

Altura el doble y base la mitad Altura el triple y base la mitad.

Altura la mitad y base el doble.

Cómo son sus áreas ?

Taller 11. Traslaciones en el plano.

Objetivo: Intuir el concepto de Traslaciones en el plano.

Materiales: Geoplano, chinches, bandas elásticas, cuaderno cuadriculado. Actividades:

Construir un segmento AB de coordenadas (m, n) respecto a A; AB es .el vector traslación.

1 - Construir un punto P' con coordenadas (m, n) respecto a P. El punto P' es el transformado de P. Según el vector traslación AB, Dibujar y sacar conclusiones.

2 - Construir un segmento CD y trasladarlo según un vector AB dado. Qué cambia ? , qué se conserva ?

3 - Construir un triángulo CDE y trasladarlo según el vector AB dado. Qué cambia ?, qué se conserva ?. Repetir el proceso con polígonos diversos y diferentes vectores.

4 - Construir dos vectores de traslación AB y CD. Construir un polígono determinado y trasladarlo según el vector AB y luego según el vector CD. Cuál es el resultado ?. qué cambia ? , qué se conserva ?

5 - Trasladar el polígono del punto anterior primero, según el vector CD y luego el vector AB. Cuál es el resultado ?, qué diferencia y que semejanza hay con los resultados del punto anterior ?. Anotar resultados, dibujar en el cuaderno y sacar conclusiones.

Taller 12. Giros en el plano.

- Objetivo; Realizar rotación de figuras respecto a un punto.

, - Materiales; Geoplano polar, chinches, bandas elásticas, cuaderno cuadriculado.

- Actividades;

1 - Colocar un punto un punto O en el centro del geoplano; O será el centro de giro.

2 - Ubicar un punto P sobre un nudo del geoplano y construir el segmento OP.

3 - Elegir un ángulo de giro y rotar el punto P sobre la circunferencia en que se encuentra ubicado el ángulo elegido.

4 - Construir un segmento AB y rotarlo según el ángulo de giro determinado. Dibujar y sacar conclusiones.

5 - Construir un polígono y girarlo un ángulo dado, trazando los rayos de giro de cada vértice para observar el ángulo. Qué se observa ?, qué cambia? , qué se conserva ?. Realizar varios giros al polígono, según ángulos determinados cuál es el resultado ?, qué se conserva ? qué cambia?

6 - Girar el polígono 180°. Qué observa ? qué cambia ? qué se conserva ?

Taller 13. Simetrías respecto a un eje. (Reflexiones).

- Objetivo: Realizar simetrías respecto a un eje.
- Materiales: Geoplano rectangular, chinches, cuaderno cuadriculado. ,
- Actividades:

1 - Construir un segmento vertical.

2 - A un lado de él construir una figura, preferiblemente irregular.

3 - Tomar las distancias horizontales de cada vértice y anotarlas. Construir puntos al otro lado del segmento (eje de simetría) a la misma distancia de cada vértice de la figura anotada. Unir los puntos de la misma forma como lo están en la figura construido. Qué figura resulta , cuáles son las diferencias y semejanzas con la figura inicial ? , qué se conserva ? qué cambia ?. Realizar ejercicios con ejes horizontales e inclinados a 45° (para otras inclinaciones utilizar el geoplano polar).

4 - Realizar la simetría de un polígono respecto a un eje L vertical; trazar un segundo eje vertical Li y realizar una segunda simetría del polígono obtenido en el paso anterior. Cuál es el resultado ? , cómo es el segundo simétrico respecto al polígono inicial ? , qué cambia ? , qué se conserva ?

5 - Realizar simetría de una figura respecto a ejes perpendiculares entre sí, y que formen ángulo de 45° (para otros ángulos utilizar el geoplano polar). Qué observa ?, qué cambia ? , qué se conserva ?

6 - Realizar dibujos en el cuaderno de todos los ejercicios y sacar conclusiones.

Taller 14. Homotecias.

- Objetivo: Realizar homotecias de ampliación y reducción de figuras geométricas y analizar sus proporciones.

- Materiates: Geoplano Rectangular y polar, chinches, bandas -elásticas, cuaderno cuadriculado.
- Actividades:

1 - En el geoplano rectangular construir una figura. Construir otra que sea el doble, la mitad de la primera. Realizar ejercicios variados y observar qué se conserva y qué cambia en las figuras respecto a la inicial.

2 - En el geoplano polar, construir una figura y unir cada vértice con el centro mediante bandas identificando la distancia que separa cada vértice con el centro.

3 - Construir sobre cada raya puntos al doble de la distancia de los vértices construidos y unir como la figura inicial. Cómo se la figura obtenida respecto a la inicial ?. Qué se observa ?, qué cambia ?

4 - Analizar la proporción que hay entre los lados correspondientes de cada una de las figuras. Los ángulos correspondientes de la figuras, cómo son ?

5 - Construir figuras con razón de homotecia 1/2, 1/3, 3, etc. Dibujar en el cuaderno, sacar conclusiones.

6 - Realizar homotecias: con centros en un vértice de la figura; con centro dentro de la figura (por ejemplo en el centroide de un triángulo equilátero).

Anexo C. Conceptos Geométricos.

Geometrías de los espacios afín y euclídeo.

Se llama transformación en un espacio geométrico a una aplicación biyectiva del espacio sobre sí mismo.

La geometría de las transformaciones se estudia a partir de los grupos de transformaciones. Siendo grupo; la estructura algebraica con relación a la ley de composición de transformaciones.

Objeto de la geometría afín: Es el estudio de las propiedades que son invariantes con relación al grupo de transformaciones llamadas afinidades.

La geometría de las semejanzas llamada también equiforme estudia las propiedades que son invariantes respecto al grupo de transformaciones conocidas como semejanzas.

El objeto de la geometría de la congruencia o de la igualdad es estudiar las propiedades invariantes en el grupo de transformaciones que recibe el nombre de movimientos o congruencias.

La geometría equiforme y la geometría de la congmencia implican nociones métrícas, por lo que son del espacio euclídeo.

El plano afín y el plano euclídeo, están formados por los mismos elementos, por los mismo puntos. Su diferencia está en que en el plano euclídeo existe una estructura métrica, permitiéndose hablar de distancias y ángulos, su estructura por tanto es más amplia que la del simplemente afín.

Transformación Geométrica.

Se analizó que una transformación en un espacio es una biyección sobre sí mismo. Del mismo modo en un plano si se tiene por P el conjunto de puntos del plano, una transformación geométríca es una aplicación de P en P. Haciéndole corresponder a cada punto A de P un punto A' llamado imagen de A en la transformación considerada.

1. Traslación.
Es la biyección del plano P sobre sí mismo tal que, fijado un vector v (llamado vector de traslación) a cada punto A se le hace corresponder otro A' de modo que AA' = v.

La traslación conserva las distancias de las figuras transformadas, también se conservan los ángulos y la colinealidad.

, Se llama producto de traslaciones a la aplicación sucesiva de traslaciones a un punto A del plano, esto es al aplicar una traslación a un punto A según el vector v se obtiene el transformado A' y al aplicar a A' una traslación según un vector vi se obtiene el transformado A". El resultado es otra traslación del vector v + vi.

El conjunto de traslaciones del plano 9, con la operación producto ya definida, tiene la estructura de grupo abeliano (cumple con asociatividad, elemento idéntico, elementos inversos y conmutatividad).

2. Giros en el plano.

Son las transformaciones geométricas biyectivas del plano sobre sí mismo, tal que fijados un punto O llamado centro de giro y un ángulo (j) denominado amplitud de giro, a cada punto A G P, le hace corresponder otro A’ de modo que OA = OA’ y AOA’ = <|).

Al punto A se le aplica un giro según un ángulo a se obtiene el punto A’. Si al punto A’ se le aplica un segundo giro según un ángulo)3 se obtiene el punto A”.

Si al punto A se le aplica un giro según el ángulo a + P se obtiene directamente el punto A”. Por tanto; el producto de dos giros concéntricos es otro giro de igual centro y amplitud igual a la suma de las amplitudes de los giros aplicados.

El conjunto de los giros concéntricos con el producto, es grupo abeliano.

3. Simetrías axiales del plano.

Son las correspondencias en la que, dada una recta fija (llamada eje de simetría) a cada punto P se le hace corresponder un punto P’ de manera que el eje de simetría sea la mediatriz del segmento PP’. El eje de simetría divide al plano en dos semiplanos que se transforman uno en el otro por la simetría. Los puntos del eje se transforman en ellos mismos.

El producto de simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector perpendicular a ambos, de sentido del eje de la primera al eje de la segunda y de módulo el doble de la distancia entre ejes.

El producto de simetrías de ejes que se cortan en el punto O es un giro de centro en O y amplitud doble del ángulo que forman el primero con el segundo eje de simetría.

Transformaciones y movimientos en el plano:
Las transformaciones como traslaciones, giros y las simetrías producen figuras - imagen iguales o congruentes a las figuras originales.

El conjunto de ellos y sus productos se denominan conjunto de los movimientos en el plano.

Además de las distancias también conservan los ángulos en las traslaciones y giros; en las simetrías axiales se invierte el sentido de ellos. Por esto se clasifican en movimientos directos (los que mantienen distancias y ángulos) e inversos (conservan distancias e invierten ángulos). También a éstas se les acostumbra llamar equiformes por conservar la forma.

4. Homotecias.

Homotecia es la transformación que hace corresponder a cada punto A e P, otro punto A' e al plano P, sobre la recta OA; según la razón K s R - { O } y centro O, tal que las razón es: (O A'A) = 0A7 O A = K.

El centro de homotecia se transforma en sí mismo. Las rectas que contienen el centro de homotecias O se transforman en sí mismas; y las que no pasan por O, en paralelas.

El producto de dos homotecias concéntricas es otra homotecia del mismo centro y de razón igual al producto de razones de las homotecias compuestas.

El conjunto de homotecias concéntricas forman un grupo multiplicativo abeliano.

El Pantógrafo:

Es un aparato que consta de cuatro reglillas articuladas como se ve en la figura, que permite dibujar homotecias de figuras según diversas razones.

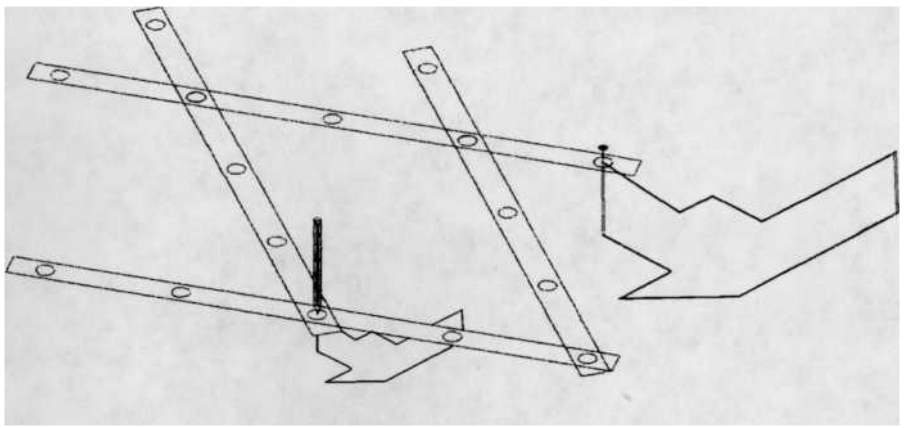


Figura # 1

Los poliedros.

Poliedro es el cuerpo limitado por superficies que son polígonos.

Los polígonos que limitan al poliedro se llaman caras del poliedro, los lados de las caras se llaman aristas y la intersecciones de aristas se llaman vértices.

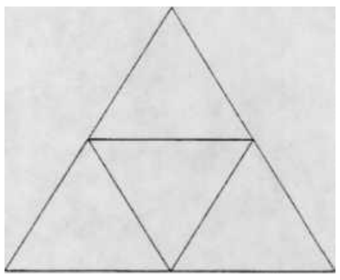
Angulo diedro de un sólido es el formado por dos caras concurrentes en una arista.

Angulo poliedro de un sólido es el formado por las caras que concurren a un mismo vértice.

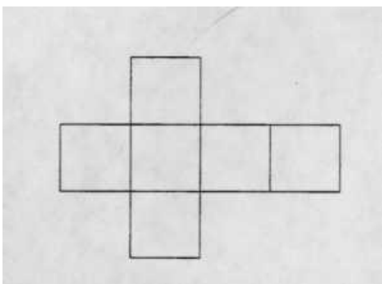
Un poliedro se llama convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está todo contenido en el poliedro.

Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales, todos sus ángulos diedros son iguales y todos sus ángulos poliedros son iguales. Los cinco poliedros regulares son:

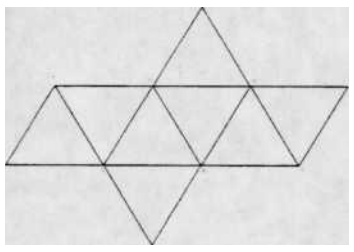
- Tetraedro: tiene 4 caras, 6 aristas y 4 vértices.



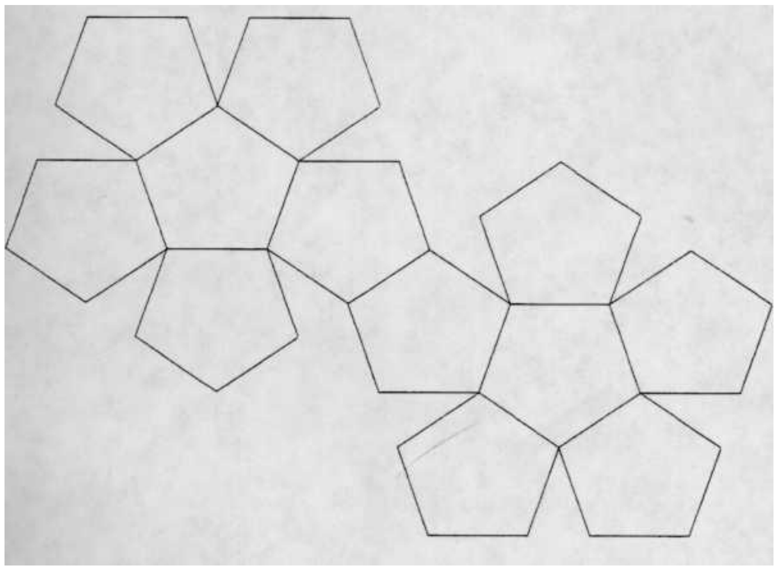
- Hexaedro: Tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.



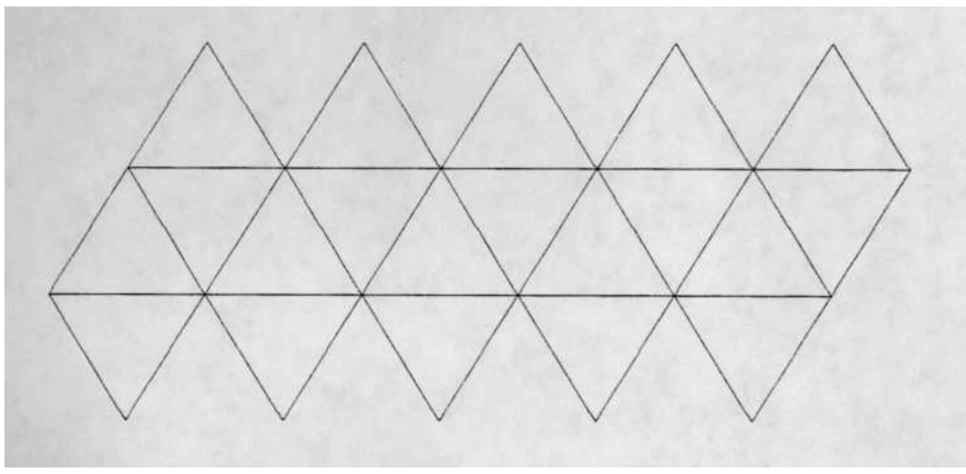
- Octaedro: Tiene 8 caras, 12 aristas y seis vértices.



- Dodecaedro: Tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.

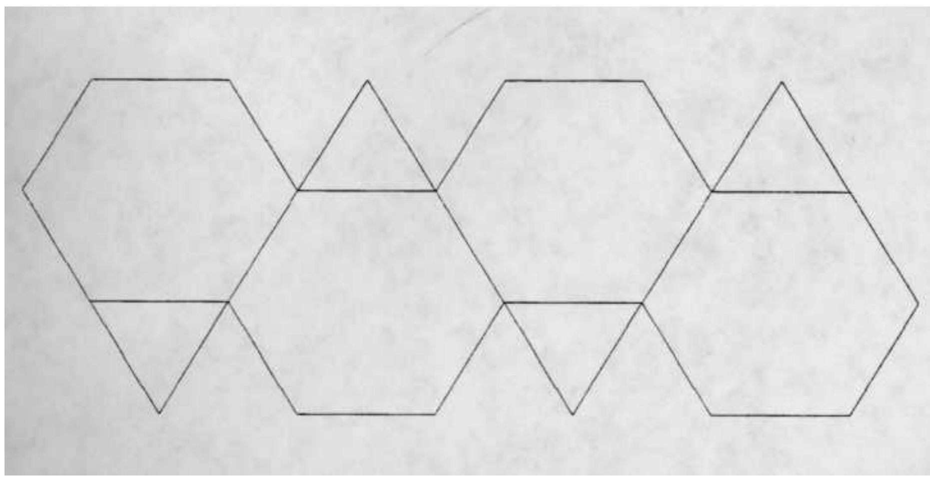


- Icosaedro. Tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices.

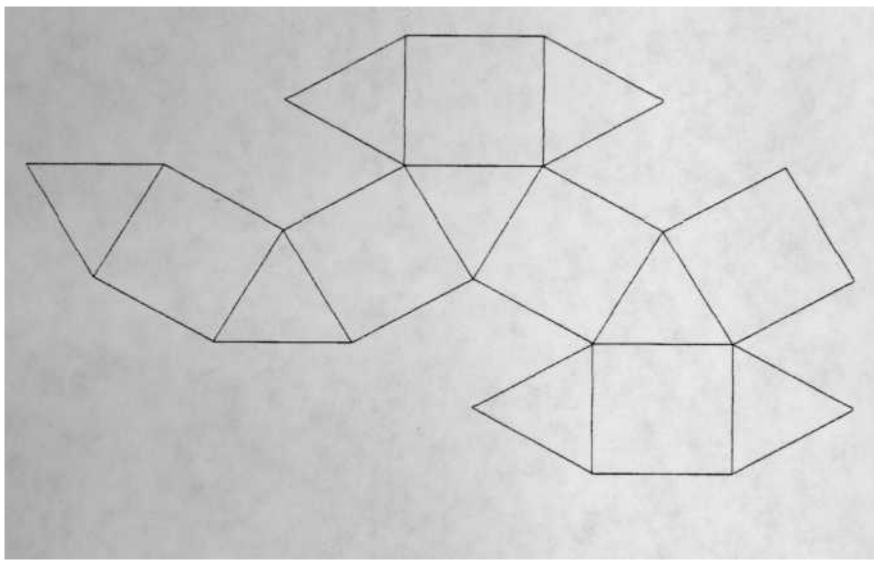


Poliedros Arquimedianos: Son los formados por polígonos regulares no iguales, sus ángulos poliedros son iguales. Los poliedros arquimedianos son 13, a saber:

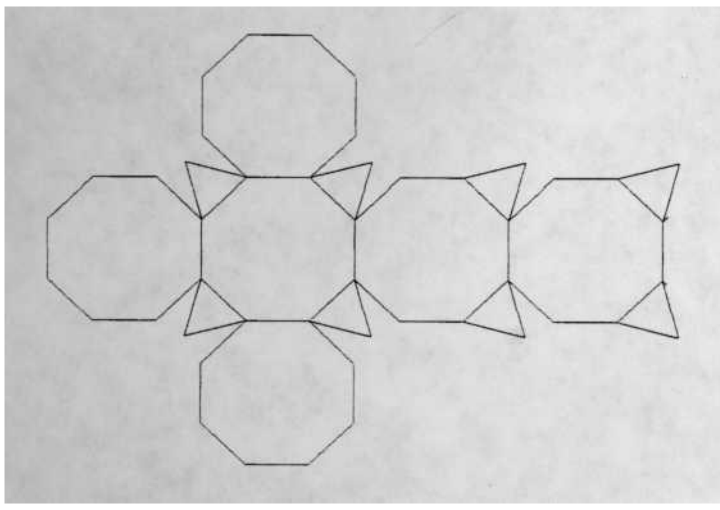
1. Tetraedro Truncado: tiene 4 triángulos y 4 hexágonos



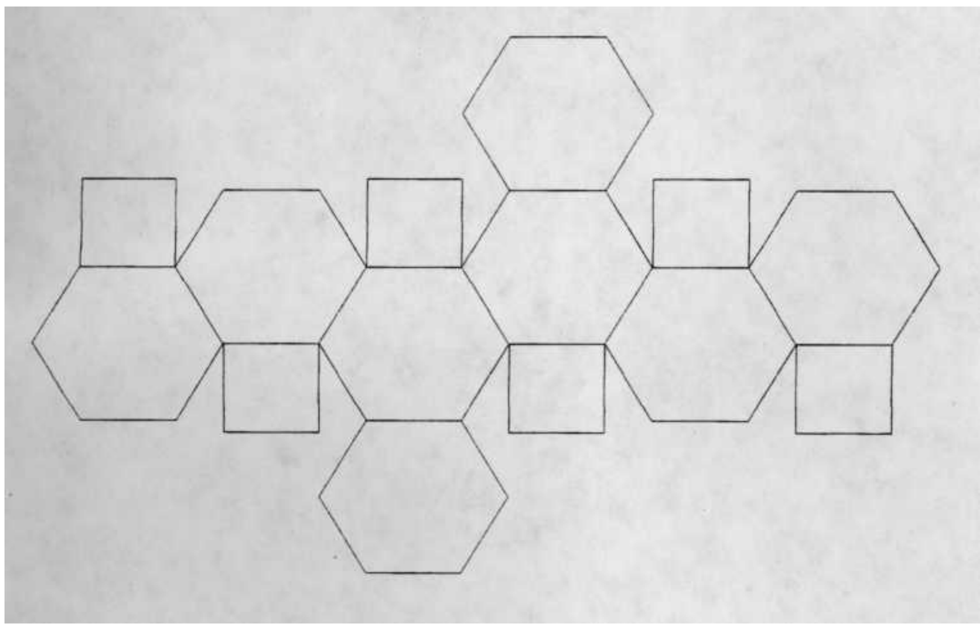
2. Cuboctaedro: tiene 8 triángulos y 6 cuadrados.



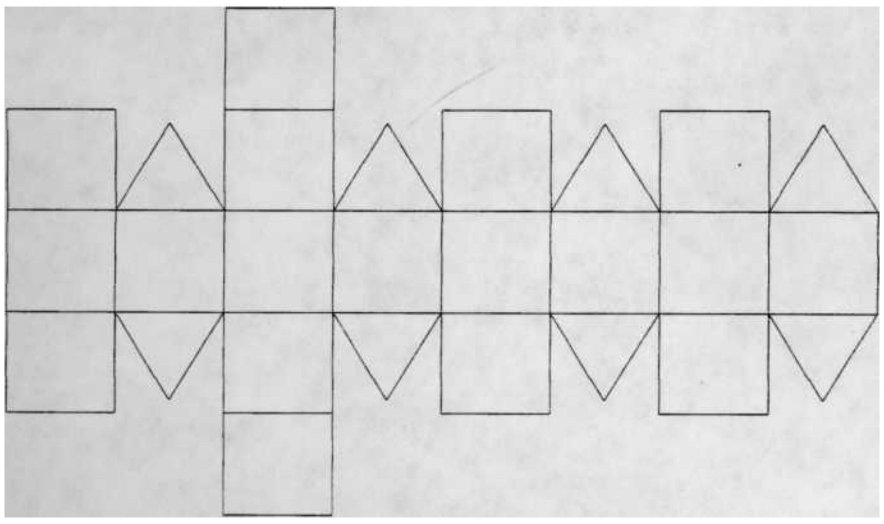
3. Cubo Truncado: tiene 8 triángulos y 6 octágonos.



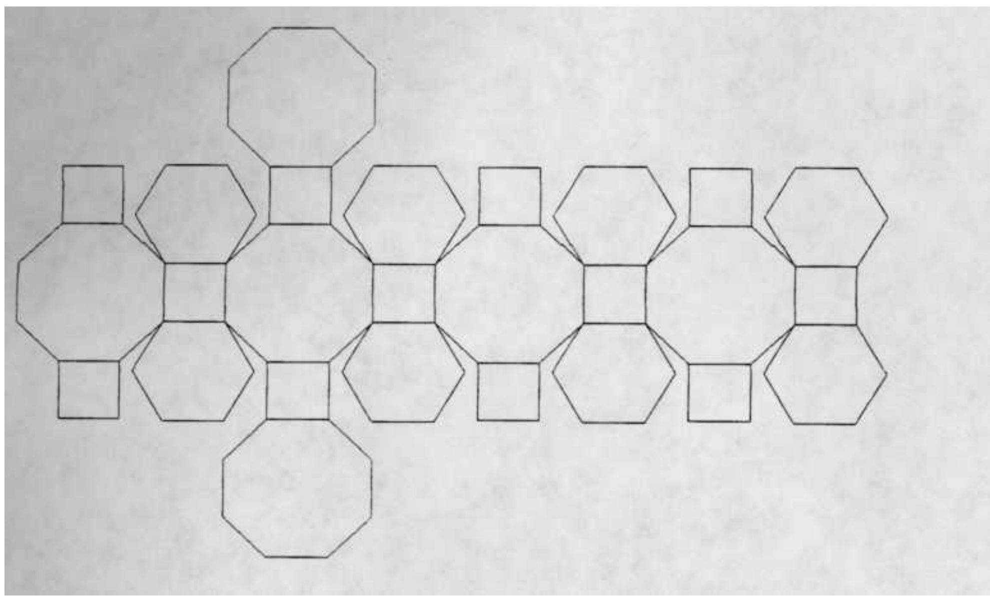
4. Octaedro Truncado: tiene 6 cuadrados y 8 hexágonos.



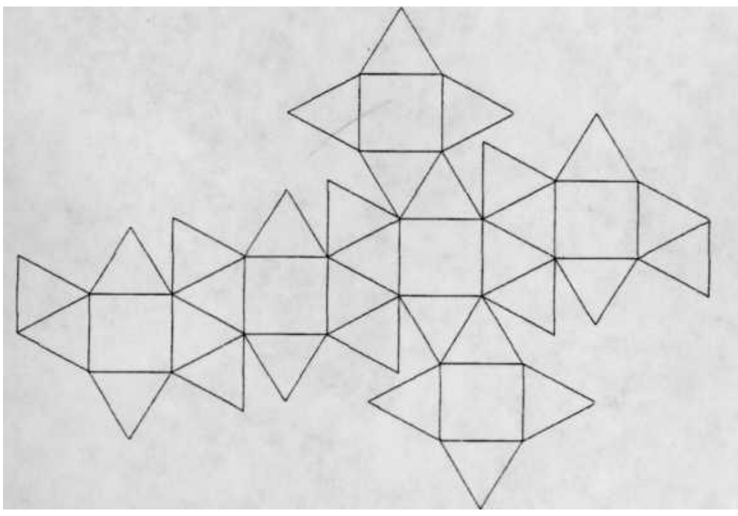
5. Pequeño Rombicuboctaedro: tiene 8 triángulos y 18 cuadrados.



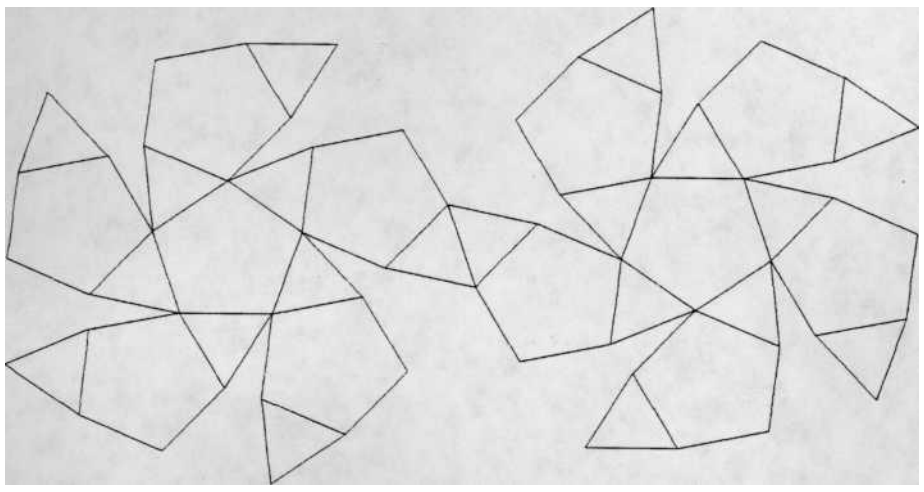
6. Gran Rombicuboctaedro: tiene 12 cuadrados, 8 hexágonos y 6 octágonos.



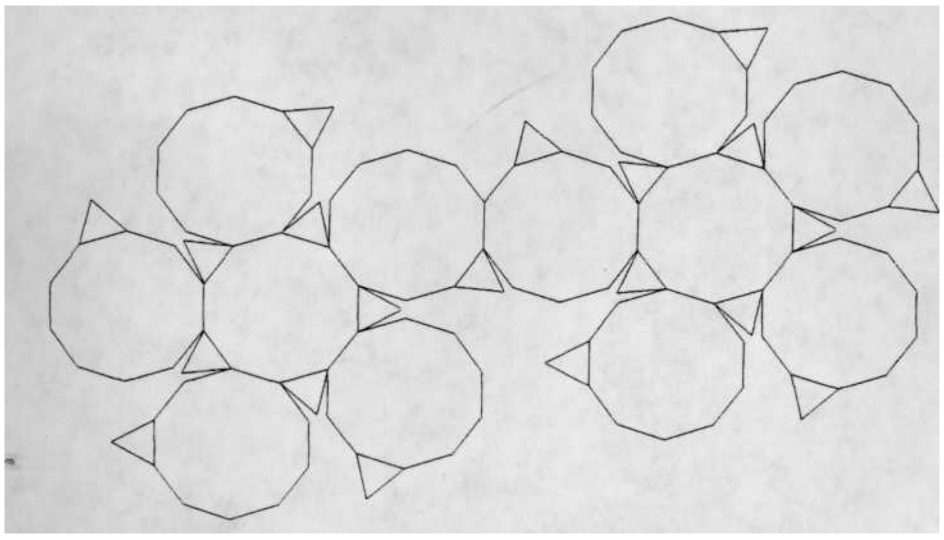
7. Cubo achatado: tiene 32 triángulos y 6 cuadrados.



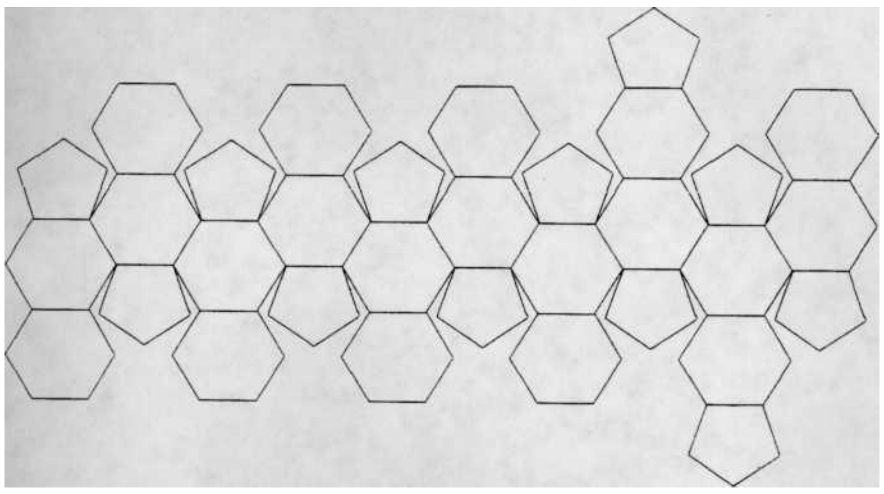
8. Icosidodecaedro: tiene 20 triángulos y 12 pentágonos.



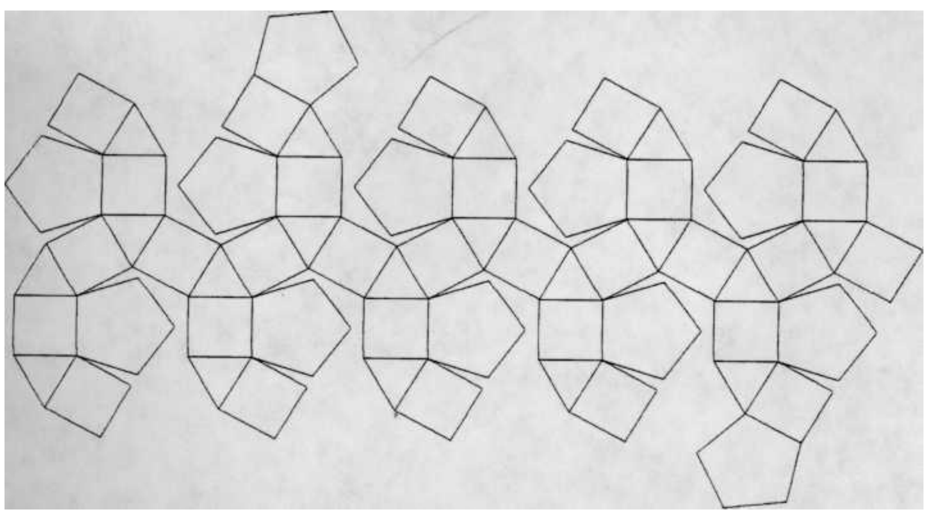
9. Dodecaedro Truncado: tiene 20 triángulos y 12 decágonos.



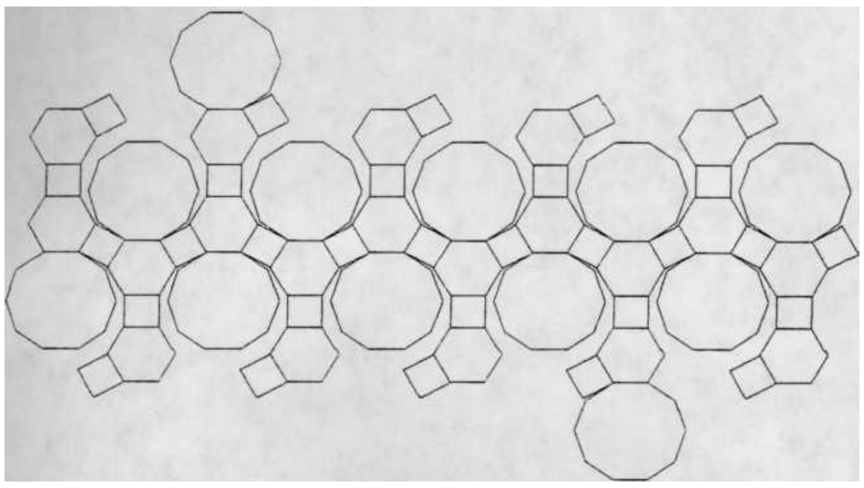
10. Icosaedro Truncado: tiene 12 pentágonos y 20 hexágonos.



11. Pequeño Rombicosidodecaedro: tiene 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos.



12. Gran Rombicosidodecaedro. tiene 30 cuadrados, 20 hexágonos y 12 pentágonos.



13. Dodecaedro achatado: tiene 80 triángulos y 12 pentágonos.