

# **El razonamiento desde la enseñanza de conceptos matemáticos utilizando las TIC**

Paula Andrea Barrientos Tascón

Mauricio Andrés Cano Vallejo

Jason Orozco Guzmán

Asesora: Luz América Fernández Zea

Magister en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES  
MEDELLÍN  
2010

## TABLA DE CONTENIDO

### INTRODUCCIÓN

1 DISEÑO TEÓRICO	3
1.1 Justificación	3
1.2 Problema de Investigación	4
1.2.1 Planteamiento del Problema	4
1.2.2 Formulación del Problema	5
1.3 Antecedentes	5
1.4 Objeto de Estudio	7
1.5 Campo de Acción	7
1.6 Objetivos	7
1.6.1 Objetivo General	7
1.6.2 Objetivos Específicos	7
1.7 Variables	8
1.8 Preguntas De Investigación	8
1.9 Tareas	8
2. REFERENTES	9
2.1 Referente Contextual	9
2.2 Referentes Legales	9
2.3 Referentes Teóricos	12
2.3.1 Razonamiento	13

2.3.1.1	Concepciones	13
2.3.1.2	Clasificaciones	15
2.3.1.3	Razonamiento Matemático	16
2.3.1.4	Momentos del Razonamiento	17
2.3.1.4.1	Momento Perceptivo	18
2.3.1.4.2	Momento de Enfoque	18
2.3.1.4.3	Momento Conceptual	18
2.3.1.4.4	Momento Crítico	19
2.3.1.4.5	Momento Meta	19
2.3.1.4.6	Momento Creativo	19
2.3.2	Conceptos	20
2.3.2.1	Concepciones Teóricas de los Conceptos	20
2.3.2.2	Funciones de los Conceptos	21
2.3.2.3	Formación de Conceptos	22
2.3.2.5	Conceptos Matemáticos	23
2.3.2.4	Clasificaciones de Conceptos Matemáticos	25
2.3.3	Enseñanza de Conceptos Matemáticos	26
2.3.4	Tecnologías de la Información y la Comunicación	28
2.3.4.1	Concepciones de Las TIC	28
2.3.4.2	Evolución de las TIC	29
2.3.4.3	Web 2.0	30

2.3.4.4 Desafíos de las TIC en la Enseñanza	31
3 DISEÑO METODOLÓGICO	33
3.1 Tipo de Investigación	33
3.2 Población	33
3.3 Muestra	33
3.4 Diseño	34
3.5 Instrumentos	34
4 INTERVENCIÓN	35
4.1 Descripción de Instrumentos	37
5 ANÁLISIS DE INSTRUMENTOS	39
5.1 Prueba Diagnóstica	39
5.2 Prueba Intermedia	42
5.3 Producto Final	45
5.2 Gráficas	49
5.2 Graficas por Porcentajes	49
5.3 Graficas Comparativas	52
5.4 Análisis de Factores	53
5.4.1 Complejidad	53
5.4.2 Correlación	53
5.4.3 Motivación	55
5.4.4 Aptitudes y Competencias	55

5.4.5 Errores	55
5.4.6 Factor Problema de Investigación	56
6 CONCLUSIONES	57
BIBLIOGRAFÍA	60
ANEXOS	62
Prueba Inicial	62
Prueba Intermedia	64
Evaluación Final	67
Preparación de Clases	68

## Introducción

Culturalmente se considera el aprendizaje de las matemáticas como un proceso difícil y poco asequible para quienes piensan que no cuentan con habilidades especiales y aptitudes mentales extraordinarias. Es común encontrar sentimientos de desasosiego, temor y angustia en los imaginarios sociales sobre las matemáticas y especialmente en los estudiantes que se ven obligados a aprender sus contenidos como requisito esencial en su plan de estudios sin encontrar las razones convincentes para motivar estos procesos.

No ocurre lo mismo para los estudiantes que de otro lado, la comprenden fácilmente y no tienen dificultades para motivarse, ni bloqueos mentales para acercarse a este saber; tampoco para quienes juiciosamente la han estudiado realizando esfuerzos adicionales, independiente de sus aptitudes y de la forma tradicional en que se les ha enseñado; para este pequeño grupo de estudiantes, el problema de la enseñanza está resuelto, es decir que, ellos aprenderán sin importar las metodologías, los ambientes, y los lenguajes que puedan diseñarse e implementarse desde la didáctica.

Realizando la reflexión en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas al ser nuestras razones de ser profesionales como docentes en formación; reconociendo los antecedentes sociales y culturales mencionados anteriormente, e inscritos dentro de la práctica pedagógica e investigativa del programa de licenciatura en Matemáticas y Física, que en su misión, busca la experimentación y la innovación en los campos de la pedagogía, las matemáticas y la didáctica, se da inicio a la presente monografía.

El proceso de investigación se desarrolló en tres etapas: en la primera se realizaron observaciones de clase durante un semestre, en los grados 11 de la Escuela Normal Superior de Medellín, orientados y apoyados desde el *Seminario de práctica*, espacio creado para la reflexión y la confrontación crítica de las experiencias de aula y cuya línea de investigación fue la enseñanza de conceptos

ligados al razonamiento, allí las consideraciones y análisis de las experiencias, permitieron encontrar los porqués de las dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En torno a este proceso, se encuentra una ruta de exploración en los campos pedagógico y didáctico en el cual la enseñanza de conceptos es un requisito fundamental para lograr un adecuado razonamiento matemático.

Por todo lo anterior, y teniendo en cuenta que, los significados de los procesos de enseñanza y aprendizaje, han sido influenciados directamente por los avances en ciencia, tecnología y comunicaciones del último medio siglo, se diseñó y desarrolló satisfactoriamente, en segunda instancia, una propuesta metodológica para enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivada, con el apoyo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, en adelante TIC, con miras a mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes.

Finalmente, como última etapa de esta investigación, se evaluaron los impactos que la propuesta generó en los estudiantes a través de los instrumentos diseñados para la recolección de información, encontrándose que, el Razonamiento puede ser influenciado y movilizado en sus *momentos* a través de la enseñanza de conceptos matemáticos con el apoyo de las TIC. Con este argumento, se da inicio a la presente monografía.

## **DISEÑO TEÓRICO**

### **Justificación**

El pensamiento y el razonamiento comparten habilidades cognitivas como la percepción, la atención, la clasificación, la interpretación y el análisis; ambos procesos se reflejan en los momentos de resolución de problemas y desarrollos de aprendizajes.

Integrar las concepciones que desde la lógica explican el razonamiento, con los tratamientos que la psicología cognitiva expone sobre el aprendizaje, es en primera instancia, una de las posibilidades de exploración y construcción teórica de la presente monografía.

Relacionando las concepciones sobre el pensamiento, el aprendizaje, y la inteligencia planteadas por sus teóricos, con las concepciones del razonamiento desde la lógica, se busca, mediante un filtro pedagógico, encontrar nuevos elementos teóricos que sean aportes acertados para la formación docente, académica e investigativa.

Estas asociaciones y combinaciones de saberes y teorías producen nuevos enfoques que revolucionan lo pedagógico, propiciando en los desequilibrios conceptuales y metodológicos del sistema tradicional, didácticas sensibles y coherentes con los movimientos y requerimientos de la cultura y la sociedad en términos de la enseñanza y el aprendizaje

En consecuencia, las actividades desarrolladas en este proceso, sobrepasaron los límites del aula, generando impactos sociales coherentes con los lenguajes del conocimiento en la era actual, y a su vez, con los principios de investigación de la universidad y de la práctica pedagógica, al adjuntar criterios de innovación tecnológica en la enseñanza de conceptos matemáticos.



## Problema de Investigación

El razonamiento es uno de los componentes básicos para la interacción social, por estar asociado con la organización y toma de decisiones lógicas, ante los problemas que se presentan en la cotidianidad. En este sentido, el razonamiento matemático fortalece, prepara y activa los procesos del pensamiento relacionados con la solución de estos problemas.

Por lo tanto, se considera apropiado realizar una investigación que dé cuenta de las estructuras y dinámicas del razonamiento y su función, no sólo en las aulas en las que se enseñan las matemáticas, sino en los demás procesos de la vida diaria relacionados con él.

En esta dirección, se observó que los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín tienen dificultades para: comunicar, justificar, encontrar patrones, realizar procedimientos y ordenar ideas relacionadas con conceptos matemáticos; las cuales afectan el proceso del razonamiento, en la mayoría de actividades propuestas en el currículo.

De otro lado, considerando los cambios de paradigmas y lenguajes culturales relacionados con la información y las comunicaciones, que exigen nuevas maneras de pensar la pedagogía; se nota que, existe toda la intención en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín, para implementar las TIC como elementos anexos a los procesos de enseñanza y aprendizaje; pero aún no se diseñan propuestas didácticas que las interrelacionen, estructuren y proyecten como mediadores directos, ordenados y continuos.

En síntesis, se considera que dinamizar e incrementar el desarrollo del Razonamiento en los estudiantes, les amplía sus competencias sociales ligadas al pensamiento, lo cual puede influenciarse creando ambientes mediados por las TIC para la enseñanza de conceptos matemáticos, propiciando la exploración, interacción y construcción de conocimientos. Por lo anterior, resulta ineludible la siguiente pregunta.

## Formulación del Problema

¿Cómo contribuir al desarrollo del razonamiento matemático utilizando las TIC en la enseñanza de conceptos matemáticos?

## Antecedentes

*“Buscamos de qué antecedentes se podría deducir el resultado deseado; después buscamos cuál podría ser el antecedente de este antecedente, y así sucesivamente, hasta que pasando de un antecedente a otro, encontremos finalmente alguna cosa conocida o admitida como cierta. Dicho proceso lo llamamos análisis, solución hacia atrás o razonamiento regresivo.*

*(Polya 1984)*

Orientando el problema de investigación, se realizó una búsqueda bibliográfica que permitió conocer los acercamientos que desde otras investigaciones se dirigen hacia el razonamiento, los procesos de enseñanza de conceptos matemáticos y las TIC como mediadores metodológicos; abordando los siguientes trabajos monográficos:

La tesis realizada por Hincapié Jaramillo Gloria Amparo, Suárez Ríos Adriana María y Urrea Galeano Gloria Luz (2008) titulada: *“El razonamiento matemático y la resolución de problemas”* que surge como un aporte a las necesidades de los estudiantes, que utilizan las habilidades del pensamiento y el razonamiento matemático contando con métodos y estrategias apropiadas del pensamiento y el razonamiento para resolver problemas. Investigación organizada en tres momentos: primero, el desarrollo de las habilidades del pensamiento, segundo, razonamiento matemático y por último la resolución de problemas.

La monografía realizada por los estudiantes Ramírez Natalia, Villarreal Jorge, Toro William y Olaya Anthony (2009) titulada: *“El desarrollo del razonamiento matemático a partir de la enseñanza de conceptos. Una perspectiva desde tres enfoques cognitivos”*; donde se plantea una propuesta de desarrollo del razonamiento matemático a partir de intervenciones en el aula desde tres enfoques: el cubano, la pedagogía conceptual y la enseñanza para la

comprensión. La pretensión de este trabajo fue determinar cómo se da el proceso de razonamiento teniendo como base estos tres enfoque cognitivos.

La tesis de maestría realizada por Vasco Agudelo Edison Darío y Bedoya Beltrán Jorge Alberto (2005) titulada "*Diseño de modelos de instrucción para el concepto de aproximación en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele*" donde se diseñan módulos de instrucción que el profesor debe seguir para propiciar el progreso de un estudiante en su nivel de razonamiento relativo al concepto de aproximación local y para llevarlo hasta las puertas de la formalización de las nociones fundamentales del análisis matemático.

Estas investigaciones señalan caminos recorridos en direcciones en las que se identifican patrones convergentes e intersección de enfoques; las cuales sugieren lecturas relacionadas con el razonamiento y los conceptos matemáticos.

Paralelamente, respecto a los procesos de enseñanza que tienen en cuenta las TIC, encontramos en el trabajo del doctor Garzón Gonzalo (2001) titulada "*Proyecto Descartes*" sobre el uso de las TIC en la docencia, inscrito dentro de la línea de formación de la pedagogía y la didáctica, un mediador para el desarrollo de competencias en los docentes, mientras contribuye al entendimiento de la tecnología, no como un instrumento para manejar información, sino como recurso metodológico en el aula para la aprehensión del conocimiento, el desarrollo de las inteligencias y el fomento de la investigación, creando ambientes de aprendizaje - enseñanza, acordes a las necesidades de quien aprende y de quien enseña.

En consecuencia con las reflexiones y propósitos iniciales, el problema de investigación y sus antecedentes; identificamos que, es en **el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas** donde se concentran los elementos susceptibles de conocer en esta monografía, es decir, *el objeto de estudio*.

De esta manera se delimita el *campo de acción* hacia los conceptos de **límite, continuidad y derivada**, sobre los cuales se planificará y ejecutará el proceso de enseñanza, con el fin de lograr los aprendizajes pertinentes en la línea del problema de investigación.

En esta dirección, se proponen los siguientes objetivos:

### **Objetivo General**

Diseñar e Implementar una propuesta didáctica orientada al desarrollo del razonamiento mediada por las TIC en la enseñanza de conceptos matemáticos.

### **Objetivos Específicos**

- Contribuir al desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes.
- Explorar las posibilidades para el aprendizaje que se alcanzan con la utilización de las TIC.
- Diseñar un ambiente virtual de enseñanza y aprendizaje en función del razonamiento.

Dando continuidad al proceso de investigación, se identifican las siguientes variables:

### **Variable Dependiente**

El Razonamiento matemático.

### **Variable Independiente**

Enseñanza de conceptos matemáticos mediada por las TIC.

Para el desarrollo de esta investigación se plantean las siguientes preguntas:

### **Preguntas de Investigación**

- ¿Qué incidencia tienen las TIC en la enseñanza de conceptos matemáticos?
- ¿Desarrollan los estudiantes razonamientos matemáticos cuando diseñan aplicaciones y comunican conceptos en ambientes virtuales?
- ¿Qué ventajas ofrecen los procesos de enseñanza de las matemáticas que se apoyan en las TIC?
- ¿Cuál relación existe entre el aprendizaje de conceptos matemáticos y los momentos de razonamiento?

Siguiendo el proceso que lleva hacia la consolidación de los objetivos y la búsqueda de respuestas a las preguntas de investigación, se proponen las siguientes tareas:

### **Tareas de Investigación**

- Revisión bibliográfica que orientará la construcción del marco teórico y los antecedentes relacionados con el problema de investigación.
- Elaboración de pruebas experimentales de acuerdo con las habilidades asociadas al razonamiento matemático.

- Diseño e implementación de una intervención didáctica en la que se enseñen conceptos matemáticos mediante las TIC.
- Análisis de resultados.
- Escritura y socialización de la monografía.

## REFERENTES

### Referente Contextual

La Escuela Normal Superior de Medellín está ubicada en el barrio Villa Hermosa, zona centro oriental de la ciudad. Fue fundada en enero de 1851.

Su propósito fundamental es la formación de maestros con un conocimiento de la pedagogía, de la enseñanza, del aprendizaje, y de la investigación en múltiples temas, principalmente la cultura y la ciencia.

En los últimos años la Escuela Normal Superior de Medellín ha venido avanzando en un proceso de mejoramiento y capacitación del recurso humano, y en la adecuación de la planta física, con miras a que toda la experiencia pedagógica que permea la institución, en sus 159 años de funcionamiento, sea aprovechada en beneficio de la calidad de educación.

Buscando la calidad y la formación integral de futuros docentes, la Institución en el marco del Plan de Desarrollo Municipal, fue dotada de aulas de informática y conexión a internet para que los estudiantes se apropiaran de las nuevas tecnologías.

### Referentes Legales

La presente investigación se desarrolla de acuerdo a los siguientes hitos legales, entendiéndolos como aquellos documentos entregados por entes legisladores de la educación e instituciones afines con la pedagogía, cuyo propósito es brindar orientaciones para dirigir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la investigación y la práctica pedagógica. Entre ellos se encuentran los siguientes:

- La Ley General de Educación, sugiere como objetivos de la educación: *“Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana”*
- El Plan Decenal de Educación de 1996, traza los lineamientos para la formación y actualización permanente de los docentes, la pertinencia de los programas educativos, y el estímulo del desarrollo científico y tecnológico apoyados en la investigación, y a ésta la concibe como un componente transversal de la formación del maestro que busca generar proyectos de práctica, y experimentar y aplicar propuestas de intervención pedagógica.
- El Acuerdo Superior 1 de 1994 (Estatuto General de la Universidad de Antioquia), que define la misión, identidad y filosofía de la Institución, orientadas a los principios de la investigación, docencia y extensión. Asimismo, plantea como uno de los objetivos de la Universidad desarrollar e implementar métodos pedagógicos que fomenten el razonamiento y el pensamiento crítico y creativo, propiciando hábitos de disciplina y trabajo productivo.
- Ley 1286 de 2009: que escribe los derechos ciudadanos y los deberes del Estado en materia del desarrollo del conocimiento científico, cuyos fines son fortalecer una cultura basada en la generación, apropiación y divulgación del conocimiento y la investigación científica, el desarrollo tecnológico, la innovación y el aprendizaje permanentes.
- Estándares básicos de calidad para matemáticas y lenguaje, que mencionan el razonamiento como aspecto que debe estar presente en cada actividad matemática, al lado del planteamiento y la resolución de problemas y la comunicación matemática que consolida una manera de pensar coherente, clara y precisa. Allí puede leerse que:

*Es indudable que las matemáticas se relacionan con el desarrollo del pensamiento racional (razonamiento lógico, abstracción, rigor y precisión) (MEN, 2003)*

Además, los estándares agrupan el pensamiento matemático en cinco tipos que corresponden al pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento variacional y pensamiento aleatorio. Esta clasificación ordena habilidades del pensamiento que bajo otra perspectiva corresponden a los componentes y procesos presentes en el razonamiento matemático.

- Lineamientos curriculares de matemáticas (2001). En ellos se encuentra que: *“Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes. Al respecto se está adelantando un trabajo en el Ministerio de Educación Nacional para construir unos lineamientos para la incorporación de las Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas”.*

En este sentido, los lineamientos curriculares abren un abanico de posibilidades de integración, al favorecer la reflexión en torno al uso de herramientas tecnológicas acordes con los estudiantes de este tiempo.

Asimismo, se afirma que el razonamiento es uno de los procesos generales que tienen que ver estrechamente con las matemáticas y que para favorecer su desarrollo se debe:

*“Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.*

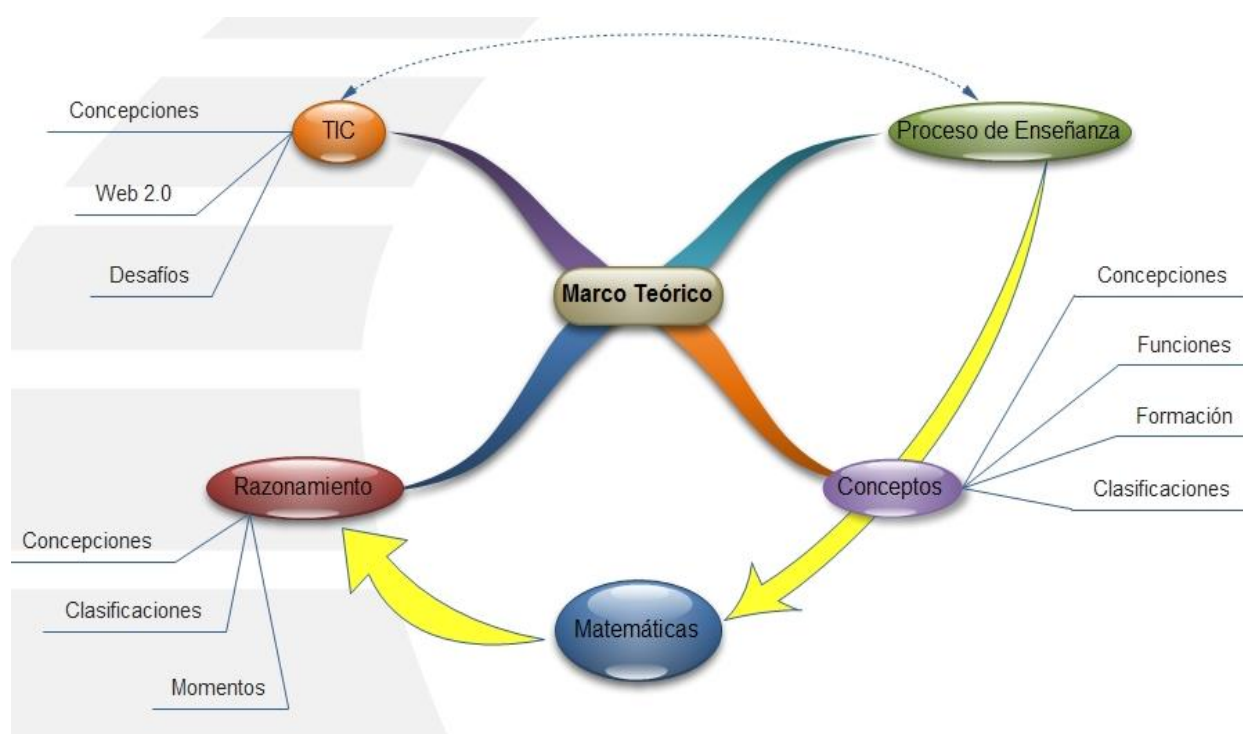


*Crear en el aula un ambiente que sitúe el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás”*

Exigencias que señalan la dirección para solucionar el problema de investigación de esta monografía y son coherentes con la construcción conjunta del conocimiento, en un proceso de enseñanza que tiene en la implementación ordenada y estructurada de las TIC, una posibilidad de acierto.

## Referentes Teóricos

El siguiente mapa mental permite ubicar cada uno de los componentes que conforman los referentes teóricos. Se abordarán: el razonamiento, los conceptos matemáticos, las TIC, y el proceso de enseñanza de las matemáticas, como pilares que interrelacionados que le darán el soporte a la presente investigación.



## Razonamiento

### Concepciones

Siguiendo la analogía de un sistema de procesamiento de información computacional, se entiende el razonamiento, desde una perspectiva lógica, como la actividad mental que permite llegar a conclusiones a partir de informaciones previas. Proceso para el cual se requieren unos datos de entrada que serían los juicios, antecedentes o premisas, los cuales se encadenarán a partir de relaciones lógicas, para obtener unas salidas que serán los juicios derivados o inferencias. El razonamiento sería el componente que se encarga de ordenar la información y estructurarla lógicamente. Como se puede observar en el siguiente mapa:



El razonamiento estudiado desde la psicología cognitiva es un conjunto de actividades mentales que se interrelacionan y coordinan mediante procesos complejos producidos cuando se organizan conjuntos de ideas para la solución de problemas o el desarrollo de un aprendizaje.

Un problema se concibe como la situación que se presenta cuando se necesita conseguir un objetivo que no puede lograrse inmediatamente porque se desconocen los procedimientos o existen obstáculos. En esta materia, George Polya, estudiando cómo es que se derivan los resultados matemáticos y cómo

son los procesos de acercamiento al conocimiento, desarrolló un método de solución de problemas que generalizó en los siguientes pasos:

1. *Entender el problema.*
2. *Configurar un plan*
3. *Ejecutar el plan*
4. *Mirar hacia atrás*

Pero este proceso, apoyado en la heurística, entendida como la búsqueda, exploración y evaluación de los progresos que llevan a un resultado, está íntimamente ligado con el desarrollo de un aprendizaje por la utilización de habilidades cognitivas.

En este sentido, Piaget introduce el término de equilibrio cognitivo, con el cual explica el desarrollo y la formación de los conocimientos en procesos secuenciales de asimilación y acomodación, con los que se busca establecer equilibrios temporales y reversibles en los que la armonía cognitiva será el resultado de alcanzar un aprendizaje o solucionar un problema.

Por lo tanto, teniendo en cuenta las categorías con las que opera el razonamiento, Bur (2003) sostiene que, es un campo de fronteras difusas por su relación con otros procesos psicológicos complejos como la percepción, el lenguaje y la memoria, en consecuencia afirma que: *“se lo ha llegado a considerar a veces como sinónimo de la propia cognición (Rips, 1990). El término suele ser utilizado en algunos trabajos de manera indistinta para referirse a otros procesos psicológicos superiores como el pensamiento o la inteligencia (González Marqués, 1991).”*

En consecuencia la psicología cognitiva reconoce el carácter múltiple e incierto de los componentes del razonamiento y se enfoca en los resultados que se logran a partir de la información previa, considerando que una de las características relevantes del proceso es el propósito inicial de quién efectúa un razonamiento, y esta posibilidad separa al razonamiento de modelos determinados, o automáticos.

## **Clasificaciones del Razonamiento**

Desde la lógica, al abordar el razonamiento como una trayectoria del pensamiento, se identifican esencialmente tres clasificaciones: el razonamiento inductivo, el deductivo y el analógico.

El razonamiento inductivo se caracteriza por establecer una conclusión o juicio general y superior partiendo de una premisa particular.

El razonamiento deductivo apunta a deducir de un panorama universal y general, una inferencia o consecuencia específica.

Y finalmente, el razonamiento analógico establece semejanzas esenciales entre contenidos para lograr nuevas inferencias sobre fenómenos aislados que conservan similitudes en propiedades conocidas.

De otro lado, Stemberg (1996) desde la psicopedagogía clasifica los razonamientos dependiendo de los propósitos que se tengan, los cuales agrupa en: analítico, creativo y práctico.

El razonamiento analítico estudia y analiza situaciones artificiales con el fin de abstraer información, comprenderla y memorizarla.

El razonamiento creativo se enfoca en las posibilidades que a través de la imaginación se proponen como alternativas innovadoras para solucionar problemas de la vida cotidiana.

El razonamiento práctico se relaciona con la utilización de los resultados del pensamiento, traducidos en formas de adaptación a nuevos ambientes a través del sentido común.

## Razonamiento Matemático

Siguiendo los lineamientos curriculares, razonar está relacionado con:

*“Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones. Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas. Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos. Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente. Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar”. (MEN, 1998)*

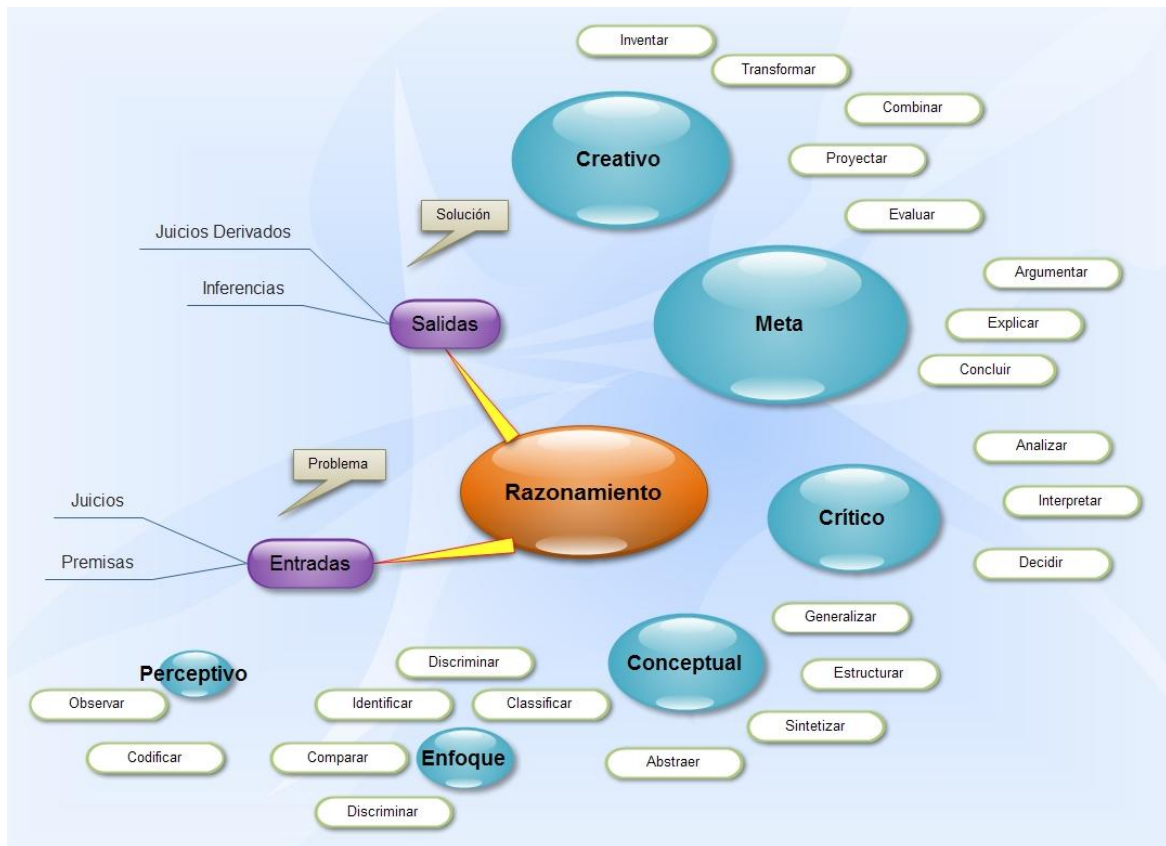
Pero este conjunto de expresiones de la cognición sugiere la sincronización y combinación de habilidades del pensamiento, como la atención, la abstracción y la percepción, que para efectos de su comprensión teórica es pertinente desagrupar, identificando sus funciones en los procesos del razonamiento.

Por lo tanto, al identificar las habilidades que componen el complejo sistema del razonamiento y sus relaciones, se facilita el recorrido a través de la ruta del proceso de un aprendizaje o de la solución de un problema, y de este modo, se conocen las fortalezas y debilidades del funcionamiento intelectual para organizar, planificar y regular los recursos cognitivos.

Esta actividad de reflexionar las acciones cognitivas y evaluar sus consecuencias es lo que se conoce como metacognición y hace referencia a la posibilidad de conocer conscientemente, saber qué se conoce, cómo se aprende y cómo volverlo a aprender.

En síntesis, es posible bajo un umbral cualitativo, encontrar las variables y las constantes de las ecuaciones cognitivas que describen el desarrollo de cualquier aprendizaje y la lógica para la resolución de cualquier problema, al vincular las exteriorizaciones del razonamiento con procesos internos del pensamiento.

## Momentos del Razonamiento



El razonamiento se apoya en habilidades del pensamiento, algunas se ejecutan en forma secuencial y otras simultáneamente. A mayor complejidad en los procesos, mayor número de habilidades involucradas, lo que sugiere que algunas habilidades acogen implícitamente la acción de otras subordinadas.

Para aproximarnos a una modelación y medición del razonamiento en esta investigación agruparemos en “momentos de razonamiento” los patrones observables de estas habilidades, para mostrar su accionar e inferir movimientos y desarrollos.

Estos momentos son: el momento perceptivo, de enfoque, conceptual, crítico, meta y creativo. Estas agrupaciones son dinámicas y sus líneas temporales y de separación son difusas porque su precisión y determinación se encuentran en intervalos que varían subjetivamente.

No se puede determinar con exactitud un nivel de razonamiento para un sujeto, pero es posible aproximarse conceptualmente con cierto grado de probabilidad al momento en el que se encuentra la trayectoria del razonamiento subjetivo estableciendo unos criterios asociados a la exposición de habilidades del pensamiento involucradas en procesos observables y objetivos, que podrán ser interpretados, según sean las convenciones, variables y umbrales establecidos por los investigadores. A continuación se describe cada momento.

### **Momento Perceptivo**

Quien percibe, realiza una lectura de la situación, la advierte, la observa, toma los datos que se le enuncian, reconoce cualidades, cantidades, formas, símbolos, posiciones y preguntas.

### **Momento de Enfoque**

Quien se enfoca comprende qué es lo que se busca. Identifica, clasifica, separa las partes del todo, establece diferencias y patrones; codifica la información nueva y la agrupa según sus características; selecciona, discrimina, formula, compara y ordena.

### **Momento Conceptual**

Conceptualiza quien encuentra las características esenciales para generalizar y estructurar los objetos nuevos con los existentes; de este modo, es posible recorrer reordenando recurrentemente la representación mental: sintetizando, categorizando y sistematizando los objetos en relación con sus funciones y los flujos de información.

### **Momento Crítico**

Este es el momento del análisis y la acción, quien se encuentra en esta fase operativa, utiliza su criterio para planificar su aprendizaje, el proceso de solución de un problema o la resolución de un ejercicio, eligiendo metodologías inductivas, deductivas, por analogías, o combinadas; tomando decisiones, siguiendo estrategias, utilizando la información que conoce, regulando los procesos, vinculando causas y efectos, entendiendo el porqué y desarrollando el cómo.

### **Momento Meta**

Es el momento de la retroalimentación y la comunicación de resultados. Quien llega a este nivel está en condiciones de explicar las metodologías involucradas en su proceso de equilibración cognitiva; utiliza la lógica y los argumentos para justificar sus avances y soluciones, evalúa su proceso, reconoce los espacios y tiempos de los errores, efectuando las correcciones necesarias hasta obtener resultados satisfactorios.

### **Momento Creativo**

Este momento ocurre simultáneamente en cualquier etapa del proceso y se evidencia cuando el individuo es sensible a detalles inconexos y realiza combinaciones no convencionales en su estructura conceptual que desestructuran el problema reordenándolo mediante asociaciones antes no relacionadas que dan origen a soluciones alternativas.

Ahora bien, dada la importante función de los conceptos en el proceso del razonamiento evidenciada en el momento conceptual y también por ser estos unos de los ejes centrales del proceso de enseñanza y aprendizaje; a continuación, se profundizará en los elementos que los categorizan.



## Conceptos

Los seres humanos necesitamos en todo momento interactuar con el ambiente, tomamos información de él, la utilizamos, la memorizamos y la aplicamos según sean nuestras necesidades. Abstraemos datos, los organizamos y clasificamos generalizando información. Nos relacionamos con objetos, personas, paradigmas y eventos, que poseen diferencias y similitudes; y dada la multiplicidad de características de los objetos escogemos asociarlas encontrando patrones, series, clases y rasgos comunes. Clasificamos las situaciones utilizando habilidades como la abstracción, la generalización y la discriminación; observando las distinciones y las características esenciales de los fenómenos y estímulos que percibimos.

En este proceso, se asume un nombre, palabra o señal para simbolizar, reconocer y representar lo desconocido, así, identificamos atributos y cualidades, y de esta manera, incluimos, excluimos, e insertamos en nuestra estructura cognitiva las propiedades y significados que encontramos en el entorno.

## Concepciones Teóricas de los Conceptos

Desde la semántica un término (nombre, palabra, símbolo) puede utilizarse para connotar, denotar e implicar.

Connotamos cuando señalamos las propiedades y características de un objeto nombrado por el término. Denotamos cuando identificamos situaciones en relación con el fenómeno señalado por este. Implicamos cuando ingresamos en el campo del metalenguaje discutiendo acerca del él y sus relaciones con el lenguaje.

En síntesis, desde la semántica *“el término concepto se usa para representar lingüísticamente una idea abstracta que capacita al que la posee para clasificar objetos o eventos y para decidir si dichos objetos son ejemplos o no ejemplos de la idea abstracta en cuestión. Así, por ejemplo, si una persona ha adquirido el concepto*

*de triángulo es capaz de clasificar conjuntos de figuras planas en dos subconjuntos, uno cuyos elementos son triángulos y otro integrado por figuras que no son triángulos. La capacidad de clasificar supone el conocimiento de los atributos críticos o esenciales de los objetos referidos por el concepto; así que puede decirse que dichos atributos constituyen criterios clasificatorios. (Gonzalez, 2005)”*

Existen dos aproximaciones teóricas desde la psicología, una conductista y la otra cognitiva; la primera identifica los conceptos como asociaciones de estímulos y respuestas y la segunda sostiene que, es un proceso de adquisición, retención y transformación de la información proveniente del entorno.

La teoría cognitiva se caracteriza porque la información que proviene de los estímulos es procesada y asimilada mediante interacciones entre la información almacenada y la nueva información del ambiente, generando nuevas estructuras del pensamiento que cambian las ya existentes.

En conclusión, resulta apropiada la definición planteada por Jungk cuando afirma que *“Por concepto se entiende el reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes”.* (Jungk, Werner. 1979)

### **Funciones de los Conceptos**

A través de los conceptos se simplifica el ambiente logrando que el observador preste atención a lo esencial de cada fenómeno, direccionando sus particularidades y complejidad. Identificando así las clases o categorías donde se agrupan atributos generales y sus significados. De esta manera, eliminamos la necesidad de aprender nuevamente ante situaciones que ya se encuentran estructuradas en la mente del sujeto, adecuando y direccionando la actividad en la que se emplea el concepto. Este proceso de significación, ordena e interrelaciona los patrones de los fenómenos de acuerdo a reglas, principios y

propiedades que se movilizan en función de las rutas que la situación problema recorra para su solución.

En resumen, se puede afirmar con Ausubel que *“mediante los conceptos el sujeto obtiene una representación simplificada y generalizada de la realidad, lo cual posibilita la comunicación interpersonal. Además, al simplificar y uniformar el ambiente, los conceptos facilitan el ambiente físico al pensamiento, al aprendizaje y a la comunicación haciendo posible la adquisición de ideas abstractas sin recurrir a experiencias empíricas concretas.”*

Esto implica que una vez interiorizada una experiencia concreta o simple, se puede recurrir a ella para explicar fenómenos más complejos o abstractos mediante relaciones y analogías que simplifican la comprensión de la realidad.

### **Formación de Conceptos**

Dos momentos inciden en esta formación, uno cuando el concepto ingresa, se ancla y estructura, al integrarse al sistema de conocimiento de un sujeto, que establece relaciones con la información previa, organizándola, realizando modificaciones y reformulando lo anterior. El otro momento es cuando el concepto se moviliza; siguiendo a Vigotsky, esta formación es creativa, y no un proceso mecánico y pasivo. Un concepto surge y toma forma en el curso de una operación dirigida hacia la solución de un problema. Lo cual muestra la relación de doble implicación que existe con el razonamiento.

De otro lado, en los sujetos, los conceptos evolucionan desde experiencias espontáneas hasta las científicas; los niños experimentan sin elaborar nuevos conceptos y los adolescentes forman colecciones más complejas las cuales se basan en sus criterios perceptivos con objetos inmediatos, pero tienden a ser inestables. A medida que el adolescente se involucra con la cultura y la sociedad los conceptos aparecen afectando los contenidos y los métodos del pensamiento. Estos se internalizan cuando el sujeto está en capacidad de reflexionar y reconstruye su experiencia.

## Clasificación de Conceptos

Gagné(1979) clasifica los conceptos en definidos y concretos, los primeros entregan sus características en definiciones y los segundos poseen atributos observables o medibles

Según Bruner,(1978) los conceptos se clasifican en: conjuntivos, disjuntivos y relacionales y se reconocen cuando es necesario ejemplificar un concepto. En un ejemplo de un concepto conjuntivo todas las características deben estar presentes, mientras que en un ejemplo de un concepto disjuntivo con algunas cualidades del concepto es suficiente, no son necesarias la totalidad de las características. Los relacionales, se definen por relaciones específicas entre cualidades de conceptos.

Henderson (1970) clasifica los conceptos en concretos y abstractos. Los primeros tienen cualidades observables en el tiempo y el espacio. Los segundos son aproximaciones teóricas. Como el concepto de límite en matemáticas.

## Conceptos Matemáticos

Un concepto matemático es una idealización de la realidad objetiva.


*“Los conceptos matemáticos surgen, según Kant, a partir de un proceso de construcción que lleva a cabo la propia razón humana”. (Campos, 2001)*

De acuerdo con Kant, consideramos que los conceptos matemáticos son abstracciones que existen sólo en el campo de las construcciones mentales humanas, lo que indica que se llega a ellos a través de la comprensión de sus propiedades, axiomas y definiciones relacionadas.

Toranzos, (1959) resalta que los conceptos matemáticos se caracterizan por extensión y comprensión: extensión cuando señalamos el grupo de objetos a

los cuales se aplica el concepto y comprensión cuando presentamos las propiedades que determinan el concepto.

La relación entre la extensión y el contenido de los conceptos es inversamente proporcional, lo cual se ejemplifica en el siguiente cuadro:

CONCEPTO	CONTENIDO	EXTENSIÓN
<b>Número par positivo</b>	Todo número positivo múltiplo de dos	{2,4,6,8,10,12 ... }
<b>Múltiplo de 6 positivo</b>	Todo número positivo múltiplo de 2 y de 3	{6, 12, 18, 24 ... }
<b>Triángulo equilátero</b>	Figura plana, conjunto de puntos formado por tres vértices y tres segmentos. Los vértices no están en línea recta y los tres lados tienen la misma medida.	Todas las figuras geométricas cerradas con tres lados todos congruentes
<b>Triángulo isósceles</b>	Figura plana... con al menos dos lados congruentes  $A = \{x / x \text{ es triángulo isósceles}\}$ $B = \{x / x \text{ es triángulo equilátero}\}$	

Fuente: Gutiérrez (1999)

Existen otros caminos que posibilitan la construcción de conceptos matemáticos y tienen que ver con la estructuración de modelos, relaciones y analogías.

En este sentido, Sánchez (2003) describe el concepto matemático como un aprendizaje esquivo a definiciones por su abstracción, pero asequible a construcciones jerárquicas, donde los conceptos de rango superior no son transmitibles.

Skemp (1980) en la misma dirección, indica que un concepto no es definible sino ejemplificable, y Orton (1990) sugiere que la utilización de ejemplos ayuda a la definición matemática de un concepto.

Del mismo modo, Cockcroft (1985) destaca que la enseñanza matemática debe dirigirse por medio del trabajo práctico o por medio de resolución de problemas.

En síntesis se resaltan cuatro caminos aparentes para la adquisición de un concepto matemático y son, la presentación de sus propiedades, la

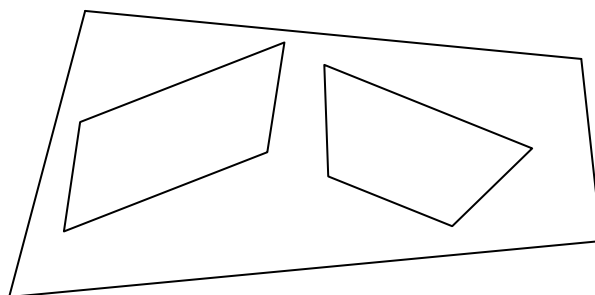
construcción de una estructura donde se aclaren las relaciones de orden pertenencia y jerarquías, la ejemplificación y la resolución de problemas.

### Clasificación de Conceptos Matemáticos

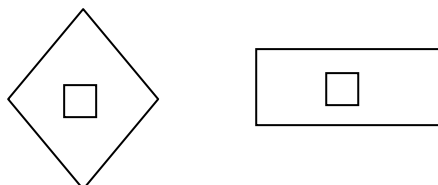
*“Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica..., saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material”. (Papus de Alejandría)*

Los conceptos matemáticos se clasifican de acuerdo a su naturaleza y a su dependencia. Según su naturaleza, están los tipo objeto que son los que designan clases reales o irreales que se pueden caracterizar por medio de representantes, por ejemplo: pentágono, variable, exponente, etc.; los de operación, que señalan las acciones que se efectúan, por ejemplo: derivada, integral, límite, etc. y los de relación, que muestran las relaciones existentes entre los objetos, por ejemplo: “menor que”; “función de”; “paralelo a”.

Según su dependencia, los conceptos se pueden clasificar en superiores, colaterales y subordinados; como se muestra en el siguiente ejemplo:



El concepto cuadrilátero es superior a los conceptos paralelogramo y trapecio.



El concepto cuadrado está subordinado a los conceptos rombo y rectángulo.

## Enseñanza de Conceptos Matemáticos

En general, cada situación problema en matemáticas precisa de una operación que lleva consigo un concepto, por lo tanto, pueden proyectarse limitados cálculos e insuficientes soluciones a problemas si el concepto que acompaña un procedimiento no se encuentra aún consolidado. El estudiante entonces deberá disponer del concepto relacionado para aproximarse con mayor asertividad al método de solución.

En este sentido Lovell (1969) escribe que para que el concepto *“llegue a ser eficaz y operativo tiene que llegar a existir en la mente como algo enteramente abstracto, independientemente del material y de la situación que condujo a su formación”*.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas, es función del maestro ordenar, orientar y enfocar la formación de los conceptos guiando a los estudiantes progresivamente en su proceso de construcción desde un acercamiento inicial o intuitivo hasta una estructuración mental más abstracta que posibilite ampliaciones, movimientos y aplicaciones.

Con estos propósitos, Gutiérrez (1999) propone las siguientes etapas presentes en la enseñanza:

La primera etapa de consideraciones y ejercicios matemáticos se da mucho antes de que se conozcan los conceptos. Esto sucede por ejemplo cuando en el dialecto cotidiano se mencionan expresiones como: *“en promedio, los límites, es función a, se deriva.”* Aquí los estudiantes tienen intuiciones y nociones parciales, ideas de las partes que conformaran la nueva estructura conceptual pero aún no las relacionan en un sistema ordenado.

La etapa siguiente es la formación del nivel de partida, que son las actividades de familiarización propuestas por el orientador, a través de preguntas aparentemente desconectadas y situaciones problemas concretos que guiarán progresivamente al estudiante a reconocer las características esenciales del nuevo concepto.

Finalmente, la etapa de asimilación sugiere la consolidación del concepto empleando procesos de ejercitación, profundización y sistematización. En esta etapa los estudiantes deberán estar en condiciones de identificar ejemplos, conocer y utilizar correctamente los símbolos asociados, identificar las propiedades asociadas, poder señalar casos especiales, límite y contraejemplos, y poder relacionar el concepto con otros ya conocidos. Para lograr este nivel el maestro deberá propiciar un espacio de conceptualización pertinente con estos propósitos.

Esta construcción y acomodación conceptual varía también de acuerdo a componentes biológicos, emocionales, psicológicos y culturales de los estudiantes y es esquiva a equilibrios estáticos y completos. Por lo que el maestro no cuenta con estrategias determinadas y totales que le garanticen la eficacia de un modelo metodológico infalible en la enseñanza de conceptos.

En consecuencia, mientras más riguroso sea el acercamiento del maestro a las variables de aprendizaje de los estudiantes, (que pasan por las múltiples posibilidades perceptivas, ritmos de aprendizaje, motivaciones, predisposiciones) en sus intervenciones didácticas; más coherente y asertivo será con sus propósitos en la formación de conceptos significativos.

*“Por tanto, es imprescindible organizar la clase de modo tal que constituya un medio estimulador para el descubrimiento del significado y aplicaciones de la Matemática y proporcione a los aprendices una gran variedad de experiencias matemáticas que les permitan construir, por sí mismos, los conceptos.”*  
(González, 2005)

En concordancia con la búsqueda anterior se presentará a continuación una herramienta que sin duda propiciará los descubrimientos y experiencias deseadas para la construcción de los conceptos matemáticos.



## **Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)**

En tiempos en los que la internet es una de las plataformas de acceso al conocimiento más estructurada y dinámica en la que se puede encontrar información, revisar el correo electrónico, escuchar música, observar un video, participar de foros de opinión y jugar, entre otras, son actividades que se realizan simultánea y cotidianamente, cada vez por más personas. Por lo tanto, entender lo que significan las TIC y su evolución en campos educativos es imprescindible para los que diseñan y orientan estos procesos.

Nuevos lenguajes y actitudes se hacen necesarios para interactuar con estudiantes nativos en un mundo digital, inmersos en realidades virtuales producto de ambientes tecnológicos donde las comunicaciones se reinventan constantemente y los conceptos sociales y culturales se reordenan.

Para acercarnos a la comprensión de esta herramienta de enseñanza y aprendizaje, mostraremos inicialmente las características esenciales de las TIC, seguidamente presentaremos algunos de sus avances en la educación a través del tiempo y finalmente presentaremos las que se eligieron utilizar en la intervención didáctica.

### **Concepciones de las TIC**

No existe una definición precisa y uniforme del término TIC, estas son algunas aproximaciones:

Según Wikipedia, son las tecnologías que se encargan del estudio, desarrollo, implementación, almacenamiento y distribución de la información mediante la utilización de hardware y software como medio de sistema informático.

Para la Asociación Americana de Tecnologías de Información, son el estudio, diseño, desarrollo, fomento, mantenimiento y administración de la información por medio de sistemas informáticos incluyendo: teléfonos celulares, TV, radio, periódicos digitales y por supuesto computadoras.

En la Universidad de Valencia, en España, se afirma que son las tecnologías que en torno a tres medios básicos: La informática, la microelectrónica y las telecomunicaciones, pero giran no sólo de manera aislada, sino lo que es más significativo, de manera interactiva e interconexiónada, lo que permite conseguir nuevas realidades comunicativas.

Dadas las anteriores definiciones y en resumen, se considerarán las TIC cómo la agrupación de diversas tecnologías que facilitan la creación y flujo de información, generando nuevas formas de comunicación social.

### **Evolución de las TIC**

Desde el último lustro del siglo pasado, la integración de los computadores con la internet, la posibilidad de conexión doméstica y el diseño de programas de fácil acceso catapultaron el desarrollo, la creación y la implementación masiva de nuevas TIC y sus aplicaciones.

La internet se consolidó como aglutinante de la mayoría de procesos multimedios, allí se conectaron principalmente el correo electrónico, los blogs, los hipertextos, la televisión, los videos, la música, las redes sociales y los programas especializados.

Desde la fascinación con el primer computador hasta la necesidad de conectarlo y sacarle provecho, las TIC evolucionan continuamente y progresivamente redefinen las formas como se percibe la realidad y se participa de ella. Cada día se realizan combinaciones más sofisticadas de servicios de audio, texto y video que amplían las fronteras para los negocios, el gobierno, la educación y la cultura.

Finalmente, presentamos el siguiente cuadro que muestra como se proyectan estas transformaciones sociales y culturales, debido a la evolución de las TIC y a su utilización masiva en periodos de tiempo cada vez menores:

## Años de penetración social de diferentes tecnologías

	TIC	Años para su uso masivo
1873	Electricidad	46
1876	Teléfono	35
1886	Automóvil	55
1906	Radio	22
1926	Televisión	26
1953	Microondas	30
1975	Computador personal	16
1983	Teléfono móvil	13
1991	Internet	7

Fuente: Núñez, 1999: 15.

## Web 2.0

*“Lo oí y lo olvidé, lo vi y lo entendí, lo hice y lo aprendí”*

*Confucio*

La internet también evoluciona y se reinventa enfocándose en los usuarios finales para pasar de aplicaciones estáticas hacia ambientes interactivos donde los usuarios puedan identificarse más, diseñar y publicar contenidos.

En este sentido la Web 2.0 es una plataforma de participación que se incorpora como una actitud y no como una tecnología, resultado de la funcionalidad y aplicaciones de los nuevos sitios de la red dándole posibilidad a desarrolladores independientes de crear e innovar con sus montajes. Así se pasa de ser lector pasivo y periférico a ser editor y director de contenidos.

Entre las características nuevas que dimensionan esta visión de la red, encontramos, las comunidades fotográficas, los portales para distribución de contenidos gratuitos, las descargas de música, las enciclopedias en línea, los sitios personales, la evolución de los motores de búsqueda, y las redes sociales.

En relación con la educación, la explosión de las redes sociales donde se comparten información y conocimientos promueve tendencias hacia la participación en la construcción social de los saberes colectivos creados por y para los usuarios.

La información ahora circula como nunca antes por la red desmitificando protagonismos y descentralizando los aprendizajes, poniendo a disposición de los estudiantes recursos para el desarrollo de competencias académicas fuera de las aulas de instituciones educativas. Esta movilización de los saberes propone los siguientes retos para la enseñanza:

### **Desafíos de las TIC en la enseñanza**

El cambio es una de las constantes en un sistema en movimiento, y en consecuencia los partícipes de estos desequilibrios pueden tomar actitudes de aceptación que favorezcan su asimilación o por el contrario, oponerse radicalmente a lo nuevo. Ambas reacciones son extremos que demuestran falta reflexión y velocidad en la intención de entregar una respuesta.

El aprendizaje no es una imposición determinada o exclusiva de un territorio y un tiempo determinado, y de otro lado, sus desarrollos son la misión de comunidades educativas. En este sentido, se considera que antes de negar o afirmar una herramienta es necesario conocer sus propuestas y alcances, y enseñar en consecuencia.

El uso de la herramienta es el que potencializa o mutila las posibilidades de conseguir los resultados que se proponen con ella. Hay herramientas que trabajan para el usuario sin necesidad de supervisión, como el reloj, y algunas TIC; y otras que sin la participación directa del usuario son de poca utilidad como un lápiz o un libro.

En el caso de las TIC, su crecimiento vertiginoso y su multidimensionalidad hacen que sus avances sean difíciles de controlar y que aparezcan variables que las expanden sin la participación exclusiva de un usuario y sin un control estipulado.

El desafío consiste en desarrollar una mentalidad reflexiva dispuesta al diálogo permanente que permita reconocer el cambio, pensarlo y redireccionarlo para lograr los propósitos adecuados, que en el caso de esta investigación, son la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

De otro lado, la implementación de las TIC en instituciones educativas está lejos de ser la panacea que resolverá los problemas educativos, la efectividad de sus alcances está dimensionada por la voluntad de estudiantes y maestros, estas herramientas exigen esfuerzos en materia de diseño conjunto, estudio y responsabilidades con el auto aprendizaje y con la enseñanza.

## **DISEÑO METODOLÓGICO**

### **Tipo De Investigación**

La investigación que se realiza es de carácter cuasi- experimental debido a que los grupos en los que se desarrolló no fueron seleccionados al azar sino que fueron conformados con anterioridad por la institución educativa.

Es longitudinal y de tendencia, porque se observan a través del tiempo, la relación y evolución de las variables.

Este tipo de investigación busca encontrar las relaciones de causa – efecto entre el grupo experimental y control.

Para posibilitar el análisis de los datos recolectados se tienen en cuenta elementos cuantitativos con carácter descriptivo. Descriptivos en la medida que se detallarán situaciones o acontecimientos; y cuantitativos porque que se asignan valores y porcentajes a estas situaciones o acontecimientos.

### **Población**

La población en donde dirigimos nuestra investigación son 134 estudiantes de grado 11 de la I.E Escuela Normal Superior de Medellín en 2009.

### **Muestra**

Es Dirigida, es decir no aleatoria, porque los estudiantes no podían ser cambiados al ser seleccionados con anterioridad. Está conformada por los estudiantes de los grupos 11B y 11C que corresponden a 66 estudiantes de la I.E Escuela Normal Superior de Medellín.

## **Diseño**

Para el diseño se elaboró, inmersos en un proceso de observación, un cronograma de actividades donde se planificaron, teniendo en cuenta los objetivos de investigación, el campo de acción y el objeto de estudio; el conjunto de clases que componen la propuesta didáctica que se implementó en el grupo experimental con los instrumentos metodológicos y de análisis asociados.

Se proyectaron de modo general las actividades necesarias para la formación de los conceptos en las etapas preparatorias, de ejercitación y profundización.

## **Instrumentos**

Como instrumentos de medición se realizaron pruebas escritas aplicadas al grupo control y al experimental. Además, en el grupo experimental, como instrumentos didácticos, se utilizaron las páginas web donde se subieron los contenidos siguiendo el esquema web 2.0, mapas mentales, videos y otras TIC que se definen en la intervención.

## INTERVENCIÓN

Siguiendo la línea elegida en el presente trabajo monográfico relacionada con la contribución al razonamiento por medio de la enseñanza de conceptos matemáticos, entendiendo el razonamiento cómo un proceso que se desarrolla a través de unas fases recurrentes que denominamos *momentos del razonamiento*, en las cuales se asociaron habilidades del pensamiento; se propuso y realizó la siguiente intervención didáctica para crear un espacio de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos de límite, continuidad y derivada. (Ver anexo 4)

Como se ha mencionado, el razonamiento no es estático y determinado; sus movimientos se evidencian básicamente bajo dos procesos de la cognición, la resolución de un problema y el desarrollo de un aprendizaje. Para contribuir a estos procesos, se proyectó la enseñanza de los conceptos de límite, continuidad y derivada, integrando herramientas TIC pensadas para cada momento del razonamiento.

Comenzando con el momento perceptivo, en el que los estudiantes se enfrentan a un desequilibrio conceptual originado desde la enseñanza con la introducción al concepto nuevo, el reconocimiento de sus características, los símbolos asociados, su contexto histórico y matemático, los datos, variables y operaciones relacionadas; se utilizaron algunas herramientas TIC en la enseñanza para proporcionar un lenguaje más cercano a los estudiantes debido a sus posibilidades audiovisuales e interactivas, de este modo, se utilizaron videos, presentaciones en power point y lecturas de hipertextos en la internet relacionados con los conceptos.

Para el momento de enfoque, se presentaron, además de los indicadores de logro pertenecientes al plan de estudios, actividades de contextualización y exploración de cada concepto, las cuales mostraban cómo surgía, de dónde se desprendía, en que otros conceptos se apoyaba, los desarrollos de su construcción a través de la historia y hacía donde se dirigían sus avances.

Utilizando la enseñanza de conceptos apoyada en el diálogo heurístico, la construcción de mapas mentales y las TIC a través de la construcción continua



de un blog 2.0 integrado a la página web, se dinamizó el momento de enfoque del razonamiento y el momento conceptual, logrando que los estudiantes estructuraran y sistematizaran los elementos claves, propiedades y procedimientos asociados.

Para el momento crítico, que para este caso estuvo relacionado con la resolución de problemas asociados al cálculo del límite de una función, la determinación de la continuidad o discontinuidad de una función y el cálculo de la derivada de una función, en los que se emplean procedimientos algorítmicos necesarios para encontrar una respuesta; se utilizaron videos como alternativa autodidáctica de descubrimiento.

Estos videos fueron determinantes como apoyo a la enseñanza de procedimientos en el aula, porque con ellos, cada estudiante controla su tiempo de aprendizaje de acuerdo a sus intereses, esfuerzos y avances.

Así, por ejemplo, un estudiante que no comprende una parte de la resolución de un ejercicio en video, puede hacer una pausa mientras entiende la propiedad que se utilizó y puede repetir la resolución del ejercicio tantas veces como quiera hasta interiorizar el algoritmo.

Para el momento meta, se utiliza nuevamente el video, pero esta vez los estudiantes son productores, directores y protagonistas. Al igual que en la construcción de sus blogs, ellos deben emplear con sus palabras, los elementos conceptuales que les permitirán comunicar sus aprendizajes. Este proceso de producción audiovisual impone un reto al proceso de aprendizaje y deja en evidencia sus alcances en el campo del razonamiento.

Paralelamente, estas actividades de enseñanza y aprendizaje se relacionan con el momento creativo, al consolidar nuevas asociaciones y combinaciones de las TIC con los conceptos matemáticos, en la creación de productos que confirman el movimiento de los procesos del cognitivos.

Finalmente, todos estos desarrollos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos están acompañados además, desde el correo electrónico, y la utilización de foros en internet integrados a las páginas web

diseñadas para la intervención y alojadas en las siguientes direcciones: [www.limites.weebly.com](http://www.limites.weebly.com) y [www.derivadas.weebly.com](http://www.derivadas.weebly.com)

### Descripción de Instrumentos

Para el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada, utilizamos los siguientes instrumentos:

1. **Página Web:** con ella se creó una ambiente virtual donde el estudiante pudo fortalecer sus aprendizajes acercándose a los conceptos atravesando los momentos perceptivo, conceptual, de enfoque y crítico del razonamiento.
2. **Blog de los estudiantes:** su propósito es acercar al estudiante a la creación y el diseño de un espacio propio y virtual, a sus conceptos, sus explicaciones y argumentaciones; recorriendo los momentos: creativo, perceptivo, conceptual y meta del razonamiento.
3. **Prueba inicial, intermedia y evaluación final:** con estas se miden los movimientos de los momentos del razonamiento, es decir, el desarrollo y evolución a través del tiempo, de las variables de investigación.
4. **Mapas mentales de los estudiantes:** esta herramienta les permitió a los estudiantes la asociación de sus conceptos previos y nuevos, dentro de su estructura conceptual.
5. **Comunicación por correo electrónico con los estudiantes:** Esta herramienta TIC ofrece posibilidades comunicativas a los estudiantes para clarificar sus ideas y ayuda en el proceso de aprendizaje por medio del diálogo continuo con su asesor.

6. **Foros en las páginas web:** Esta herramienta propone un espacio de conversación entre los estudiantes desde lo conceptual y procedimental, para generar aprendizajes sociales.
  
7. **Procedimientos resueltos en vídeo:** este instrumento pone los procedimientos algorítmicos derivados de la enseñanza de conceptos, en un espacio virtual más cercano a los estudiantes por la posibilidad de acceso en cualquier instante y la intensidad que ellos requieran.
  
8. **Videos de los estudiantes:** Esta posibilidad audiovisual en la enseñanza logra una retroalimentación en los ámbitos conceptual, procedimental y creativo, al exigirle al estudiante una autoevaluación previa a la demostración de sus fortalezas, que demuestran avances en su proceso de aprendizaje. Este instrumento verifica las posibilidades comunicativas mediadas por el video, al igual que los movimientos y desarrollos de sus procesos de razonamiento.

## ANÁLISIS DE INSTRUMENTOS

### Prueba Diagnóstica (Ver anexo 1)

#### *Descripción de la Prueba*

Cada una de las preguntas está pensada con el fin de indicar a los investigadores el momento de razonamiento en el que se encuentran los grupos control y experimental.

La primera pregunta está relacionada con el momento perceptivo porque allí los estudiantes deben realizar una lectura de la situación, reconociendo cualidades y posiciones, para ordenarla espacialmente y compararla con una información inicial.

La segunda y tercera pregunta se asocian al momento perceptivo y crítico porque aquí el estudiante debe observar y analizar si existe una regla de ordenación para que se dé la secuencia.

La cuarta pregunta está diseñada para que el estudiante interprete una información dada, la clasifique, analice y realice un proceso para encontrar el valor de la variable, esta pregunta se ubica totalmente en el momento crítico del razonamiento.

La quinta pregunta se desliza por el momento conceptual y crítico, allí los estudiantes que manejen el concepto de mínimo común múltiplo llegarán fácilmente a la respuesta y los que no, tendrán que desarrollar un procedimiento que les permita llegar a ella.

La sexta pregunta se diseña para indagar sobre el momento creativo apoyado en el conceptual, porque el estudiante debe manejar el concepto de línea, para proponer una solución alternativa a un problema que no acepta respuestas convencionales.

La séptima pregunta se relaciona con el momento conceptual y el momento meta del razonamiento, porque los estudiantes deben presentar su estructura conceptual sobre un tema específico.

La octava pregunta se asocia al momento creativo y crítico, porque las respuestas al problema son esquivas a paradigmas convencionales de ordenación espacial.

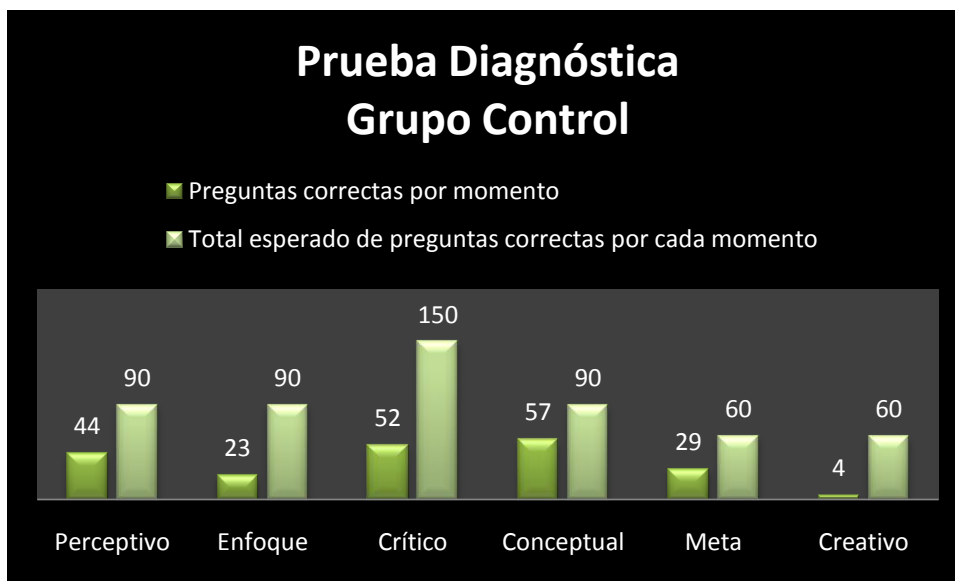
### *Resultados de la prueba diagnóstica*

Para realizar el estudio estadístico de los datos recolectados, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios. Cada momento de razonamiento involucrado se consideraba como una totalidad que se dividía entre el número de veces en que aparecía.

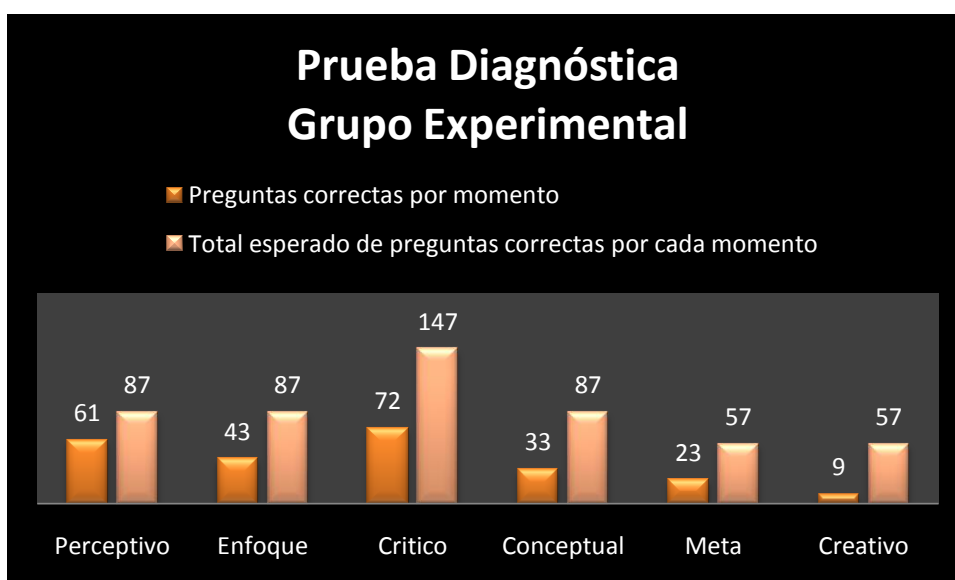
Después de sumar la cantidad de estudiantes que resolvieron correctamente una pregunta asociada a un momento del razonamiento, se comparaba el resultado con las respuestas correctas esperadas.

Los siguientes gráficos se muestran los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica.

<b>Grupo Control</b>		
<b>Momentos</b>	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	44	90
Enfoque	23	90
Crítico	52	150
Conceptual	57	90
Meta	29	60
Creativo	4	60



Grupo Experimental		
Momentos	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	61	87
Enfoque	43	87
Crítico	72	147
Conceptual	33	87
Meta	23	57
Creativo	9	57



Estos resultados en la prueba diagnóstica indican que existe un punto de partida individual y grupal para cada momento del razonamiento, es decir, que cada grupo cuenta con unas habilidades iniciales del pensamiento, relacionadas con el razonamiento.

### **Prueba Intermedia** (Ver anexo 2)

Las preguntas están orientadas a la comunicación y explicación del concepto de límite de una función y sus procedimientos asociados, dentro del momento crítico, conceptual y meta. Se realiza la creación de un mapa mental sobre las características relacionadas con el concepto y en la prueba escrita se desarrollan y justifican los métodos efectuados para encontrar las respuestas.

Esta prueba diseñada para el diagnóstico intermedio de la investigación, está pensada a su vez, como un aseguramiento del nivel de partida para introducir el concepto de continuidad y discontinuidad, permitiendo evaluar el desarrollo hasta ahora de los momentos del razonamiento.

#### *Descripción de la Prueba Intermedia*

La primera y segunda preguntas están dirigidas a los momentos de razonamiento perceptivo, conceptual y meta. Perceptivo porque deben observar y reconocer valores en la gráfica de una función y en su tabla de valores, Conceptual y Meta porque deben reconocer las características gráficas y operativas del límite, explicando y justificando.

La tercera pregunta se dirige al momento conceptual, crítico y meta, porque es necesario conocer las propiedades de los límites, realizar el cálculo para llegar a una respuesta y confrontarla con la información inicial explicando los procedimientos.

La cuarta y quinta pregunta se dirigen al momento crítico, porque el estudiante debe resolver los ejercicios presentados para poder tomar una decisión.

La sexta, séptima y octava pregunta se dirigen al momento perceptivo, de enfoque, conceptual y meta, porque a través de una gráfica, se deben reconocer los conceptos de límites laterales y aplicarlos en las funciones dadas seleccionando y justificando las respuestas.

Para la evaluación del momento creativo en esta fase intermedia de la intervención, se realizaron mapas mentales donde se mostraban aprendizajes alrededor del concepto de límite, luego de haber sido enseñado.

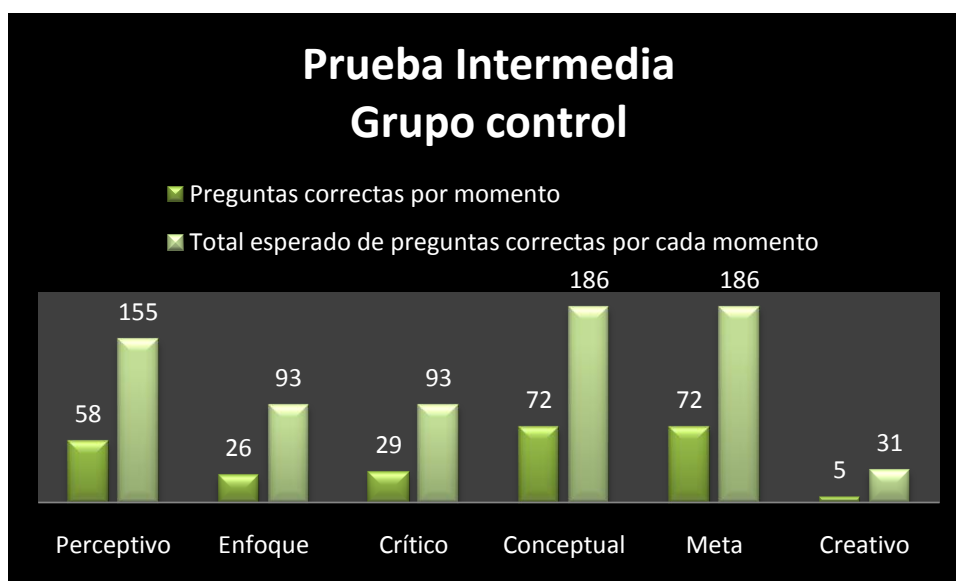
El criterio para considerar el mapa mental como una respuesta correcta asociada al momento creativo fue que este tuviera combinaciones coherentes y novedosas entre imágenes y conceptos, lo que precisó de los estudiantes una aproximación pertinente al concepto de límite asociado a una elaboración gráfica que representara con claridad su estructura conceptual. En este punto se sigue la afirmación de Csikszentmihalyi (1998): *La creatividad es el resultado de la interacción de un sistema compuesto por tres elementos: una cultura que contiene reglas simbólicas, una persona que aporta novedad al campo simbólico y un ámbito de expertos que reconocen y validan la innovación.*"

#### *Resultados de la prueba intermedia*

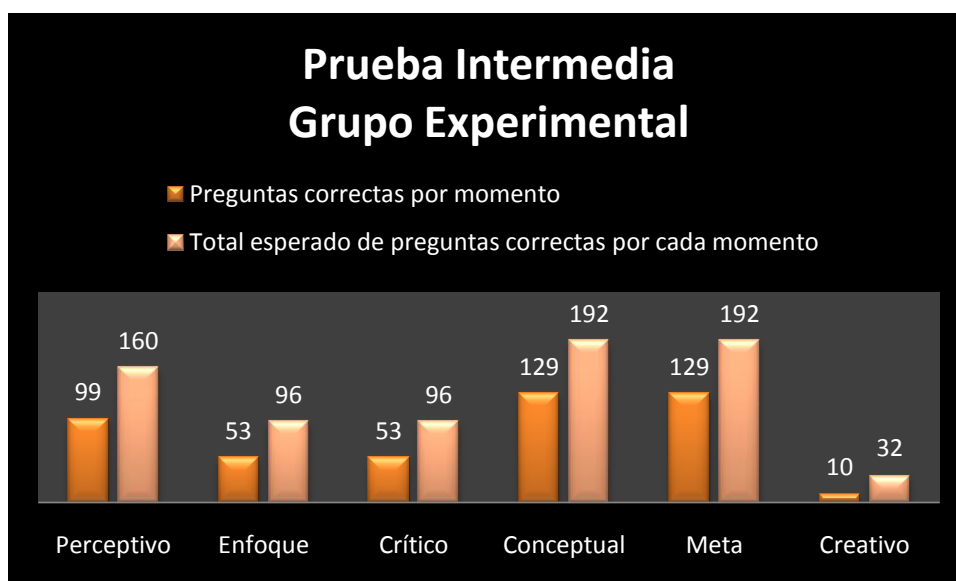
Para realizar el estudio estadístico de los datos recolectados, se tuvieron en cuenta los mismos criterios de la prueba diagnóstica. Los siguientes gráficos permiten visualizar los resultados obtenidos.

Grupo Control		
Momentos	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	58	155
Enfoque	26	93
Crítico	29	93
Conceptual	72	186
Meta	72	186
Creativo	5	31





Grupo Experimental		
Momentos	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	99	160
Enfoque	53	96
Crítico	53	96
Conceptual	129	192
Meta	129	192
Creativo	10	32



Estos gráficos permiten visualizar el movimiento del razonamiento en cada uno de sus momentos, luego de la enseñanza del concepto de límite.

### Producto Final

Este conjunto de actividades, integra los resultados de instrumentos como: el blog, los mapas mentales, los foros, los videos realizados por estudiantes y una evaluación final (ver anexo 3). Se analizaron los movimientos en los momentos del razonamiento en los grupos control y experimental, para la etapa final del proceso de intervención didáctica.

Todos los instrumentos que se describen a continuación se tuvieron en cuenta para tomar los datos en el grupo experimental. Para el control, los datos corresponden únicamente a la evaluación final y a los mapas mentales realizados por los estudiantes.

### *Descripción del Producto Final*

Los momentos conceptual y el creativo del razonamiento, se evaluaron utilizando mapas mentales en los que los estudiantes mostraron su aproximación al concepto aprendido de derivada. El criterio para considerar el mapa mental como un movimiento en estos momentos, estuvo vinculado a que las imágenes y conceptos de los mapas correspondieran entre sí, y sus asociaciones fueran pertinentes con la información construida en los espacios virtuales de aprendizaje y en las elaboraciones conjuntas en clase.

Los momentos perceptivo, de enfoque, conceptual y meta, se midieron con los blogs, foros y los videos de los estudiantes; los criterios para considerar que con estas TIC se sugería un movimiento en el razonamiento, se basaron en los contenidos presentados y en elementos como:

Para el blog, una exposición clara y organizada de las entradas asociada al momento perceptivo; la recopilación de las características esenciales de los conceptos trabajados en clase para el momento conceptual, su agrupación, selección y codificación en el momento de enfoque y la realización de las correcciones pertinentes en las entradas al blog luego, de las asesorías con los docentes, que muestran la retroalimentación propia del momento meta.

Para el video, una planeación adecuada de la presentación es asociada al momento de enfoque, una resolución del ejercicio, siguiendo una estrategia operativa que regule todos los procesos implicados, evidencia el momento crítico; y finalmente, la comunicación clara y precisa muestra el momento meta.

En los foros, los aportes y preguntas de los estudiantes asociados a los conceptos de límites, continuidad y derivada, se relacionan con la búsqueda de un equilibrio cognitivo y social, esto indica, un movimiento del razonamiento en el momento meta.

### *Descripción de la evaluación final*

La primera pregunta se dirige a los momentos conceptual, de enfoque, crítico y meta, porque los estudiantes deben explicar, utilizando sus habilidades argumentativas, los porqués de sus procedimientos asociados a los límites, mientras se aproximan al concepto de derivada.

La segunda pregunta se dirige a los momentos perceptivo, de enfoque, crítico y meta del razonamiento, porque es necesario reconocer e implementar un proceso de resolución aprendido, con el fin de llegar a una respuesta conocida a través de operaciones matemáticas.

La tercera pregunta se dirige al momento meta del razonamiento, porque se exige nuevamente que el estudiante utilice el lenguaje escrito para comunicar sus procedimientos aprendidos.

La cuarta pregunta está vinculada al momento crítico, porque es necesario ejecutar un conjunto de pasos ordenados en la resolución de un ejercicio para el cual han tenido un entrenamiento previo.

### *Resultados del producto Final*

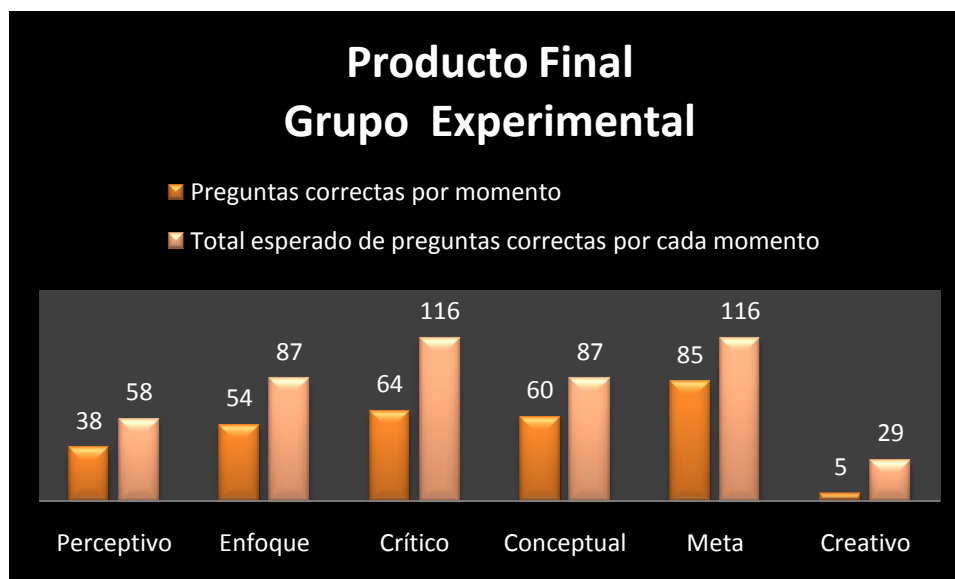
Para realizar el estudio estadístico de los datos recolectados en esta fase, se tuvieron en cuenta los mismos criterios de las pruebas intermedia y diagnóstica

Los siguientes gráficos permiten visualizar los resultados obtenidos.

Grupo Control		
Momentos	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	5	30
Enfoque	13	60
Crítico	20	90
Conceptual	16	60
Meta	19	90
Creativo	12	30



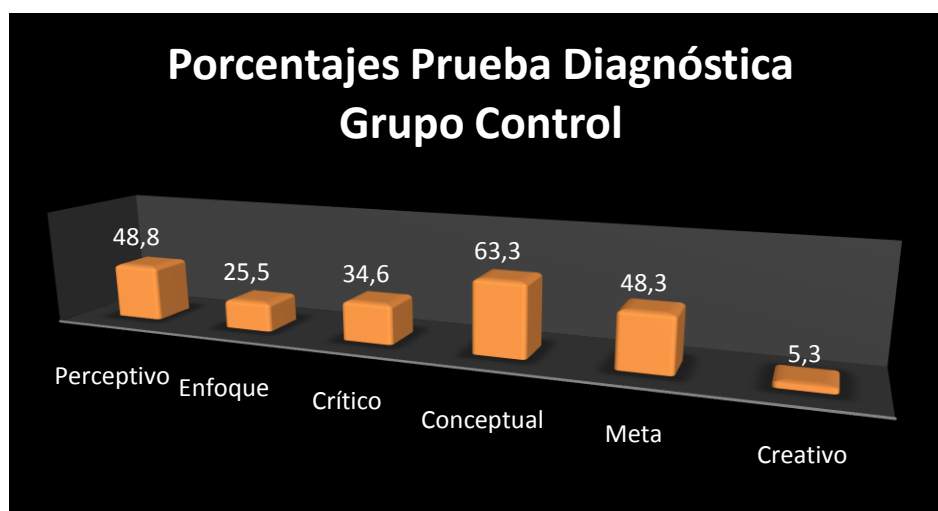
Grupo Experimental		
Momentos	Preguntas correctas por momento	Total esperado por momento
Perceptivo	38	58
Enfoque	54	87
Crítico	64	116
Conceptual	60	87
Meta	85	116
Creativo	5	29

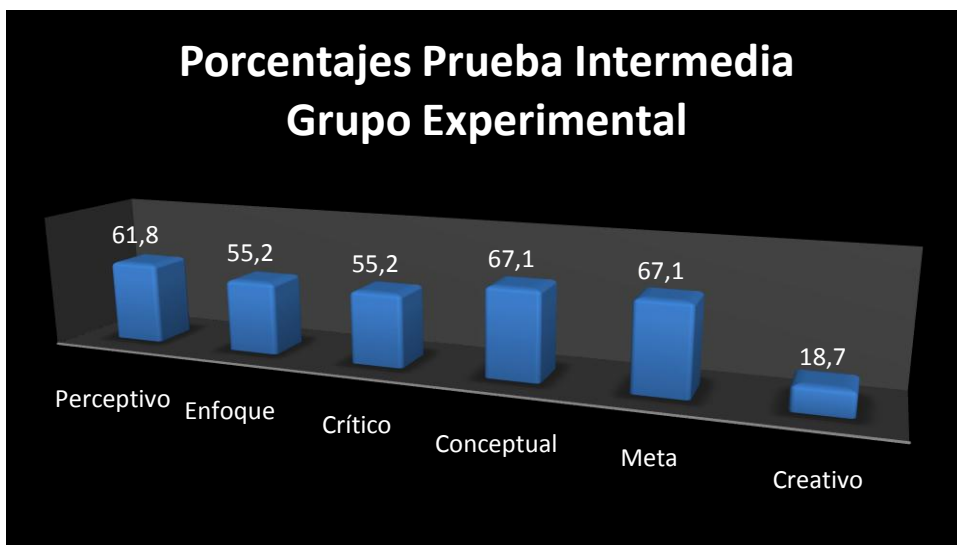
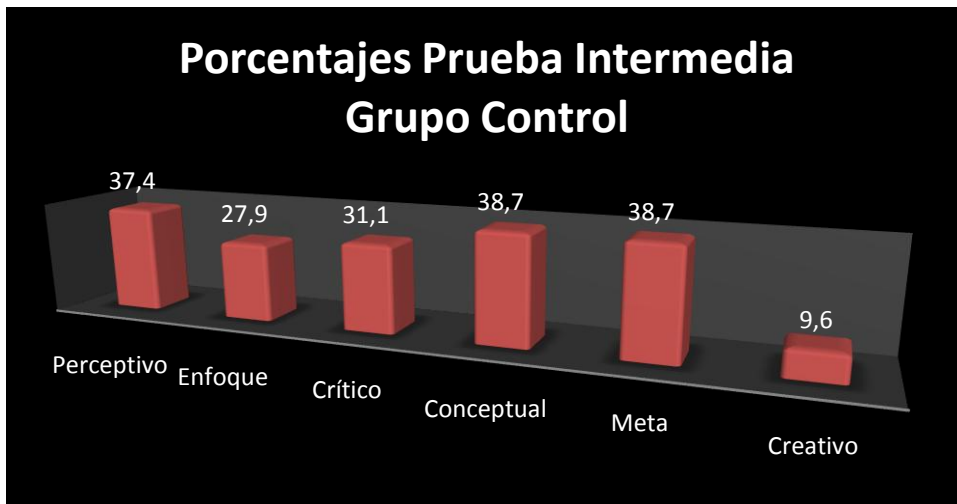
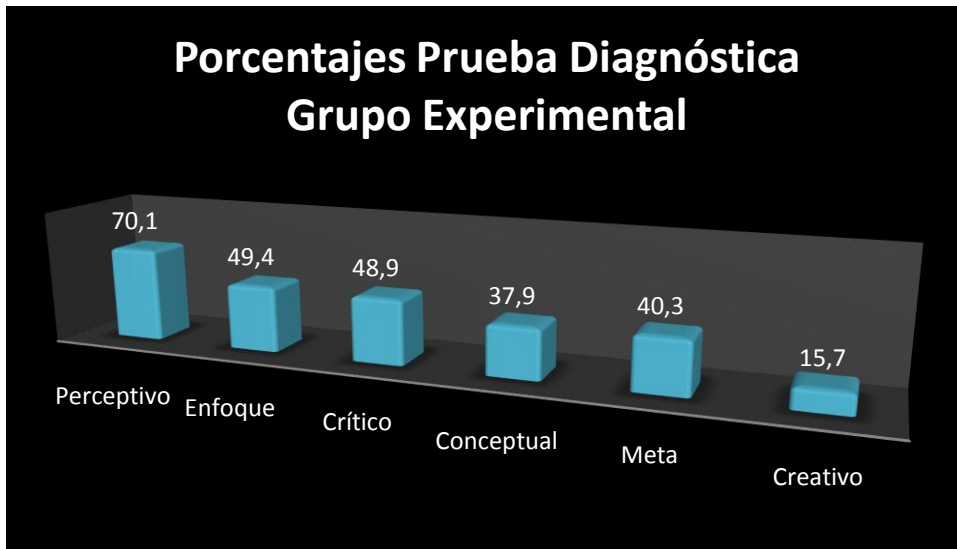


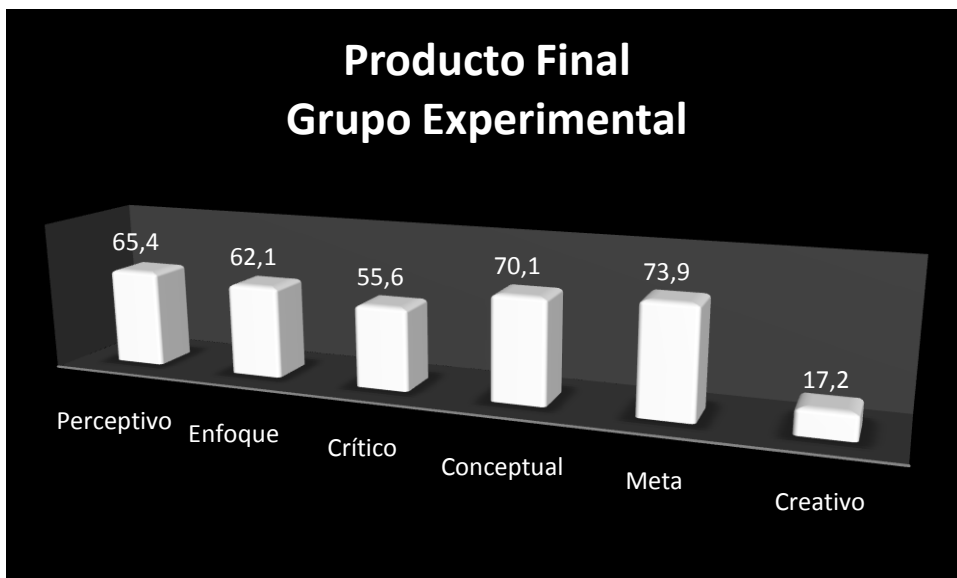
## Gráficas

### Gráficas Por Porcentajes

Los siguientes gráficos corresponden a los porcentajes de aciertos en las respuestas de cada prueba experimental, en relación con los momentos del razonamiento. Se puede observar de forma directa cuanto alcanzó cada grupo y comparar los avances entre los momentos.



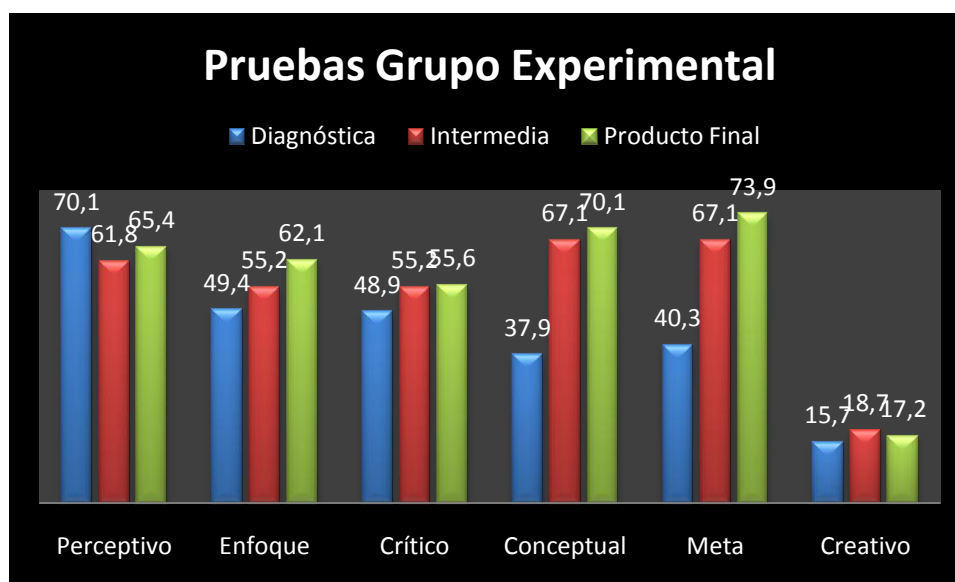
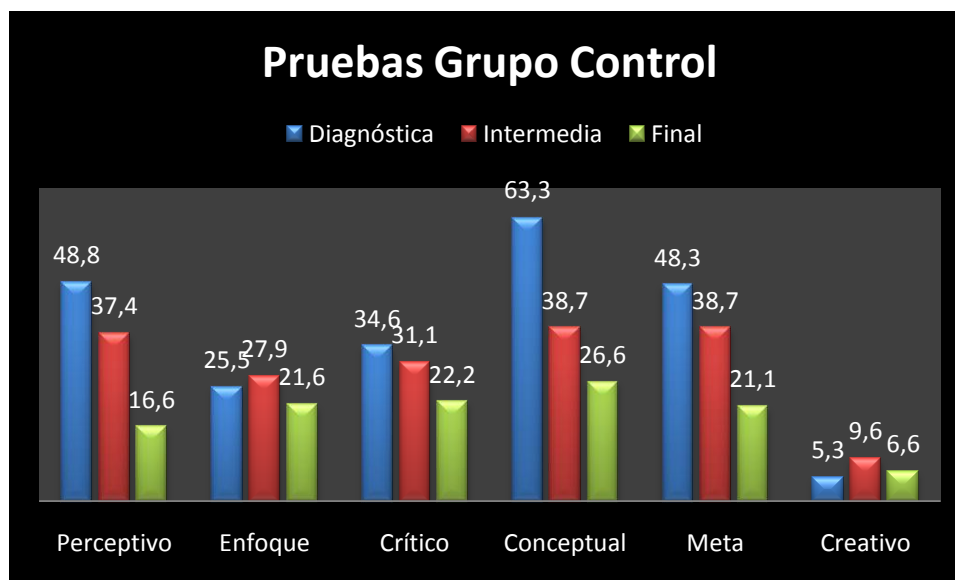






## Gráficas Comparativas

Estas gráficas corresponden a la agrupación de los resultados obtenidos en las pruebas diagnóstica, intermedia y final. Aquí emergen factores que indican los resultados de la intervención didáctica y naturalmente al problema de investigación.



## **Análisis De Factores**

Para la interpretación de los gráficos comparativos se tuvieron en cuenta factores de variabilidad que a juicio de los investigadores intervienen en la apreciación de la variable dependiente y sus movimientos. A continuación se explican.

### **Complejidad**

Cada prueba exigía progresivamente que los estudiantes construyeran una estructura conceptual más sistemática y precisa para llegar a una equilibración cognitiva. En efecto, el concepto de derivada así como el de continuidad, requieren de la comprensión del concepto de límite y de la correcta aplicación de los procedimientos asociados.

El concepto de límite en la prueba intermedia y el concepto de derivada en la evaluación final debían estar formados, es decir, anclados al sistema de conocimiento de los estudiantes y listos para operarse en un proceso dinámico experimental. De ahí que la disminución porcentual para el grupo control en sus porcentajes de aciertos, a través del tiempo, en el resultado de las pruebas, posiblemente esté relacionada con este factor.

### **Correlación**

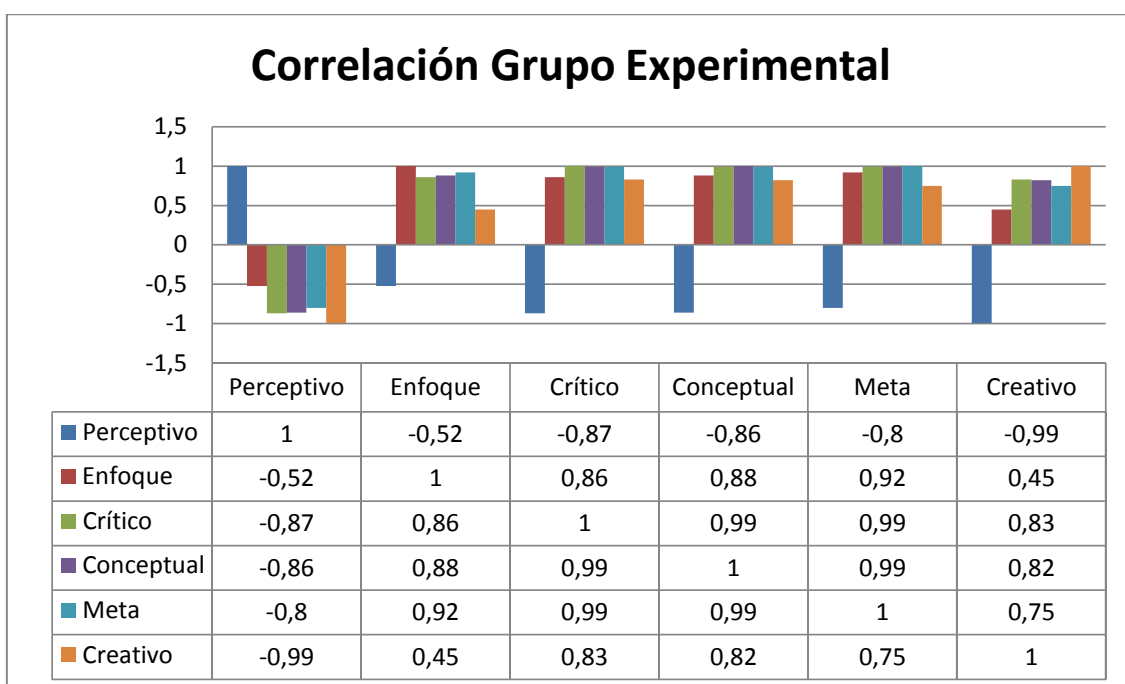
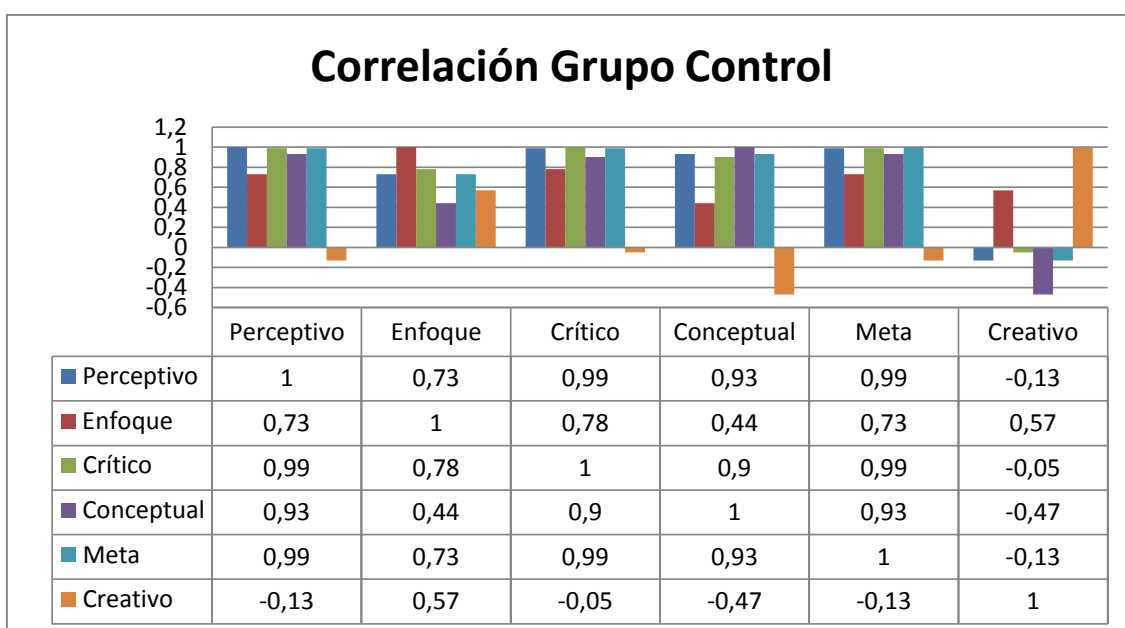
El segundo factor observable en las pruebas está asociado a las relaciones entre los momentos del razonamiento, por ejemplo, si un acierto en el momento meta puede implicar o no, un acierto en el momento crítico o en cualquier otro.

Como lo muestran Haber y Runyon (1984) *“La correlación es una condición necesaria pero no suficiente para establecer una relación de causalidad entre dos variables”*

En efecto, se observa en los gráficos, que cada uno de los momentos del razonamiento, durante las tres pruebas, tuvo fluctuaciones alrededor de un intervalo.

Para profundizar en este aspecto se calcularon los índices de correlación de Pearson entre parejas de momentos del razonamiento, que indican el grado en el que cada momento está asociado con otro.

Este estadístico fluctúa entre los valores de -1 y 1; y se interpreta como ausencia de relación para una correlación de 0, una relación proporcional directa para valores positivos y una correlación proporcional inversa para valores negativos.



En este sentido, se aprecian en los gráficos relaciones muy cercanas entre los momentos del razonamiento que demuestran que la mayoría de ellos tienen en juego un porcentaje muy alto de habilidades comunes, que podrían examinarse en futuras investigaciones en las que cada uno de ellos se intervenga y analice como variable independiente.

### **Motivación**

El proceso de realización de las pruebas coincidía con la finalización de un periodo escolar en la que los estudiantes mostraban actitudes de agotamiento, desinterés y afán de graduarse para concluir su ciclo de estudios. Esta indiferencia con su proceso de aprendizaje, falta de disposición metacognitiva y voluntad para realizar esfuerzos asociados al campo de la matemática, dada su estructura compleja y recurrente en conceptos y procedimientos, posiblemente sea otro factor que explique la disminución de los aciertos en el transcurso de las pruebas para el grupo control.

### **Aptitudes y Competencias**

Como puede observarse en los gráficos, el grupo experimental desde la prueba diagnóstica presenta mejores resultados que el grupo control, lo que lo sitúa en un lugar privilegiado en torno a sus competencias que podrían estar relacionadas con aptitudes adicionales en los miembros del grupo que los hicieron más eficientes e idóneos ante procesos experimentales de equilibración cognitiva.

### **Errores**

Existen diversas causas para tener en cuenta la posibilidad de errores, como son, la pertinencia de las pruebas asociada a su suficiencia en la indagación de los momentos del razonamiento. Errores derivados de la interacción de los estudiantes con la prueba, como las distracciones subjetivas por motivos

personales y emocionales, la atención afectada por el tiempo de duración y el grado de dificultad de las preguntas, las respuestas improvisadas en preguntas de selección múltiple o apareamientos, y demás incertidumbres pertenecientes a procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

### **Factor Problema de Investigación**

Los anteriores factores sugieren que con el tiempo es comprensible una declinación en los porcentajes de aciertos para el campo de acción de los conceptos de límite, continuidad y derivada. Sin embargo, el grupo experimental muestra que luego de la intervención didáctica, se logró mantener y sobrepasar un nivel, evidenciando un dinamismo en el razonamiento.

## CONCLUSIONES

- ◆ El razonamiento se moviliza con la propuesta.

A medida que se implementó la propuesta de intervención didáctica mediada por las TIC, se observó que el razonamiento dimensionado a través de los momentos, presentó desarrollos y avances relacionados con las habilidades del pensamiento asociadas; dinamismos que se evidenciaron en las actividades e instrumentos implementados.

- ◆ El aprendizaje de conceptos matemáticos dinamiza el razonamiento

La enseñanza de conceptos matemáticos articulada en las fases: preparatoria, de formación y de asimilación, facilitó en los estudiantes el aprendizaje, contribuyendo a su estructuración conceptual inscrita en el momento conceptual, e indicó efectivamente en la dinámica de los demás momentos del razonamiento.

- ◆ La herramienta de los mapas mentales permiten visualizar el momento conceptual.

Los mapas mentales utilizados como herramienta educativa ayudan a los estudiantes en su estructuración conceptual, brindándoles posibilidades de agrupación, jerarquización, subordinación y clasificación, propias del momento conceptual. De igual manera, los docentes tienen evidencias de la sistematización de los estudiantes en un momento determinado.

- ◆ El momento creativo del razonamiento requiere más tiempo para su desarrollo.

Según se observó en los instrumentos metodológicos y de recolección de información, el momento creativo del razonamiento, consecuente con su concepción en esta monografía, no registró movimientos notorios para ninguno de los grupos.

De igual manera, en las observaciones realizadas en los espacios de conceptualización por el grupo de investigadores, no se percibieron características que lo identificaran completamente, como: innovación, fluidez,

combinación, recursividad, ni persistencia al interior de los procesos de equilibración cognitiva por parte de los estudiantes, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada.

- ◆ Las TIC son herramientas que amplían las posibilidades de enseñanza.

Los videos, páginas web, correos electrónicos, presentaciones en power point, y foros, que acompañaron el proceso de enseñanza de conceptos en sus fases: preparatoria, de formación y asimilación fueron bien recibidas por los estudiantes e incorporadas fácilmente en sus aprendizaje, sin requerir mayores complicaciones para su utilización.

- ◆ La relación estudiante – docente se favorece con la propuesta didáctica.

El ámbito educativo propone el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, y en este sentido, el vínculo y la transferencia entre estudiantes y docentes se afianza al quitar las barreras de la educación tradicional, brindándole al estudiante la posibilidad de comunicarse continuamente con su docente, además de reunirlos en ambientes virtuales de enseñanza y aprendizaje mientras los inserta en los avances tecnológicos de una sociedad cambiante.

- ◆ Las TIC son medios prácticos y de fácil acceso para docentes.

Es común encontrar en grupos de docentes sentimientos de angustia frente a las nuevas tecnologías, debido al desconocimiento de sus ventajas a la hora de implementarlas en la enseñanza de conceptos. Sin embargo, la intervención didáctica mostró que es posible encontrarles beneficios metodológicos que contribuyen al desarrollo del razonamiento.

- ◆ La propuesta didáctica se puede implementar con cualquier temática.

En comienzo se diseñó para el concepto de límite; sin embargo, dadas las condiciones del cronograma y el plan de estudios de la institución educativa, fue necesario ampliar la propuesta a los conceptos de continuidad y derivada, mostrando su versatilidad y adaptabilidad en el desarrollo de cualquier concepto matemático.

- ◆ Fruto de esta investigación, surgen nuevas preguntas sobre los momentos del razonamiento.

La estructuración del razonamiento en grupos de habilidades del pensamiento, facilitó entenderlo y desarrollarlo, dejando nuevas posibilidades de investigación para comprender los procesos cognitivos, con preguntas en las que los momentos del razonamiento se articulan como variables independientes.



## BIBLIOGRAFÍA

ALMENARA, Julio. LLORENTE, M Carmen. ROMÁN Pedro. *Y la tecnología cambió los escenarios o el efecto Pigmalión se hizo realidad. Universidad de Sevilla*. En: HAOL N° 9. Invierno 2006. Pág. 17 – 31

BADILLA Eleonora. *Descentralizar el aprendizaje. Nuevos retos para la educación*. Vol 7 Num especial. 28 Nov 2007. Pág 1 - 27

BUR Ricardo. *Psicología del Razonamiento*. Proyecto Editorial. Buenos Aires. 2008.

BUZAN Tony. *El libro de los mapas mentales. Cómo utilizar al máximo las capacidades de la mente*. Ed Urano. 1996.

CAMPOS, Alberto. *Conceptos y epistemología de la matemática*. Universidad Nacional. Bogotá.

CSIKSZENTMIHALYI Mihaly. *Creatividad. El flujo y la psicología del descubrimiento y la invención*. Paidós. Barcelona. 1998.

CLARET Alfonso. *El constructivismo según Ausubel, Driver, Vigostsky*. En: Actualidad educativa. Vol. 3. No 12. Mar – Abr 1996. Pág. 20 – 31

CONGRESO DE LA REPÚBLICA DE COLOMBIA. *Ley General de Educación*. 1994.

FAINHOLC Beatriz. *Optimizando las posibilidades de las TIC en educación*. En: Edeutek. Revista electrónica de tecnología educativa. Num 22. Dic 2006.

FERNANDEZ Miguel. *Proyecto de Inteligencia Harvard. Fundamentos del razonamiento*. Cuarta Edición. Editorial CEPEL. Madrid. 2002.

GONZALEZ, Fredy. *Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos*. En: Fundamentos en Humanidades. Universidad de San Luis. Año VI Num 1 (11/ 2005) 37 – 80 pp.

GUTIERREZ Luis. *Didáctica de la matemática para la formación docente*. CECC. 1999

HABER, Audrey, RUNYON, Richard *Estadística para las ciencias sociales*. Medellín: Fondo Educativo Interamericano. 1984.

HINCAPIE Gloria. SUAREZ Adriana. URREA Gloria. ARENAS Jairo. *El razonamiento matemático y la resolución de problemas*. Trabajo de grado. 2008.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje*. 1 Ed. Santa fe de Bogotá. Cooperativa editorial Magisterio. 2006.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares de matemáticas y física*. 1 Ed. Santa fe de Bogotá. Cooperativa editorial Magisterio. 1998.

ORTIZ RODRIGUEZ, Francisca. *Matemáticas estrategias de enseñanza aprendizaje*. Editorial Paz. Mexico. 2001

VALVERDE. Lourdes. *El razonamiento matemático*. En: cuadernos pedagógicos. Udea. Fac Educación. N° 16 Ago 2001

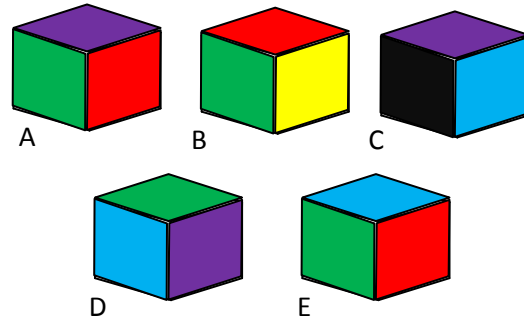
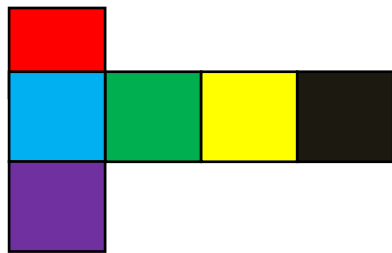
VIÑAS DE LA HOZ, María. NAVARRO, Patricia. ORTEGA, Eugenio. *La calculadora: una fuente de exploraciones conceptuales*. En: Revista del Instituto de estudios superiores en Educación. Universidad del Norte. N° 5 Dic/2004

## ANEXO 1

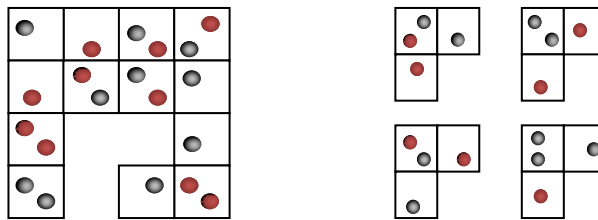
### PRUEBA DIAGNÓSTICA

Estimado estudiante como parte de nuestro trabajo de grado solicitamos que complete la siguiente prueba diagnóstica. La información suministrada se utilizará con fines académicos.

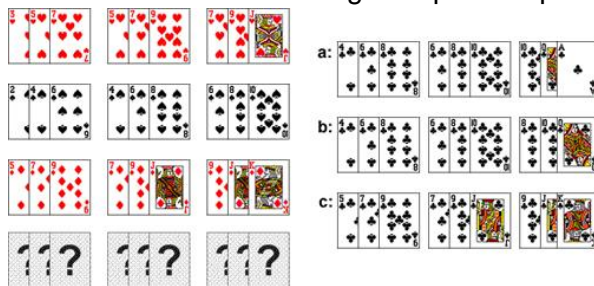
1. Cuando la figura de la izquierda se dobla para formar un cubo, ¿cuál es la única figura que no puede formarse?



2. Encuentra la pieza que debería encajar en la cuadrícula para completar la serie correctamente



3. Cambie las cartas las incógnitas por las que se encuentran a la derecha



4. En un campeonato participan tres equipos y cada uno juega un partido con los demás participantes del torneo. Se sabe que.

Partidos	Puntos
Ganados	2
Empatados	1
Perdidos	0

La siguiente tabla muestra los resultados parciales

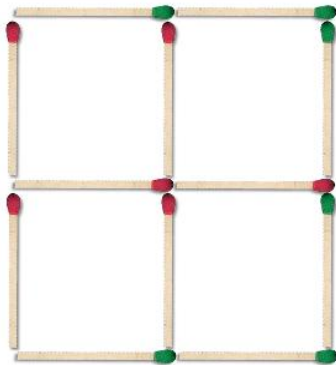
¿Qué valores toma X en el cuadro?

Equipos	Partidos Ganados	Partidos Perdidos	Partidos Empatados	Goles a favor	Goles en contra
A			1	0	
B	1			1	2
C				x	

- Se tienen cuatro trozos de diferentes medidas 2, 3, 5, y 10. ¿Cuál será la medida mínima que contenga a cada una de las medidas de los trozos sin que sobre ni falte?
- En el siguiente cuadro se deben trazar tres líneas para dividirlo en 8 partes, ¿cómo trazarías las líneas?



- Elabora un mapa conceptual en el que representes lo que conoces sobre funciones.
- Cambia de posición tres fósforos y construye 3 tres cuadrados.





## ANEXO 2

## Prueba Intermedia sobre el concepto de Límite de una función.

NOMBRE \_\_\_\_\_ GRUPO \_\_\_\_\_ FECHA \_\_\_\_\_

### 1. Grafique la función $f(x) = x^2 + 1$ y utilizando la gráfica responda:

- ¿Cuál es el valor de la función en la gráfica cuando  $x = -2$ ?
- ¿Cuál es el valor de la función en la gráfica cuando  $x = 3$ ?
- Encuentre el límite de la función en los puntos anteriores ( $x=2$  y  $x=3$ )
- ¿Cuál es la diferencia entre evaluar una función en un punto y hallar su límite en ese punto? Justifique.

### 2. Complete las siguientes tablas utilizando la función $f(x) = x^2$ para valores decimales cercanos a $x = 3$ .

x	f(x)
2.9	
2.99	
2.999	

- a) ¿A qué valor se acercan los valores de  $f(x)$  mientras  $x$  se aproxima a 3 por la izquierda?

x	f(x)
3.1	
3.01	
3.001	

- b) ¿A qué valor se acercan los valores de  $f(x)$  mientras  $x$  se aproxima a 3 por la derecha?

- c) ¿Qué se puede concluir respecto al valor real de la función cuando  $x$  se aproxima a 3 por derecha e izquierda?

- d) ¿Cómo podríamos encontrar de forma más rápida el valor de la función anterior cuando  $x$  tiende a 3? Realice la operación y explique la propiedad utilizada.

### 3. Compruebe que el valor de cada uno de los siguientes límites es correcto. Explique la propiedad y el proceso utilizado.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 5) = 7$$

**4. Determine cuales de los siguientes limites generan indeterminaciones de la forma 0/0 y cuáles de la forma  $\infty/\infty$**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^3 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{x^2 + 1}$$

**5. Realice (utilizando una línea) el siguiente apareamiento.**

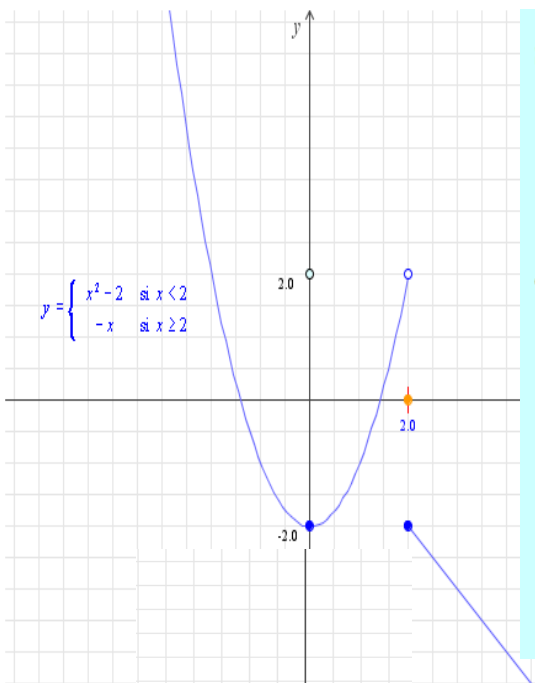
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 36}{x - 3} \qquad 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (2x^4 - 3x) \qquad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^5}{1 - x} \qquad 24$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 - 27}}{x + 3} \qquad 171$$

**6. Justifique su respuesta**



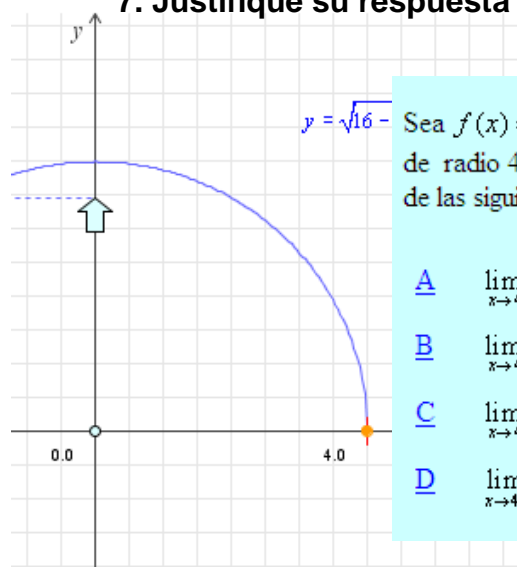
Sea  $y = f(x)$  la función definida por casos de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ -x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la única afirmación verdadera?

- A  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe pues la función no está definida en  $x = 2$ .
- B  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
- C No existe  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  y tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- D  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe pues  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

## 7. Justifique su respuesta

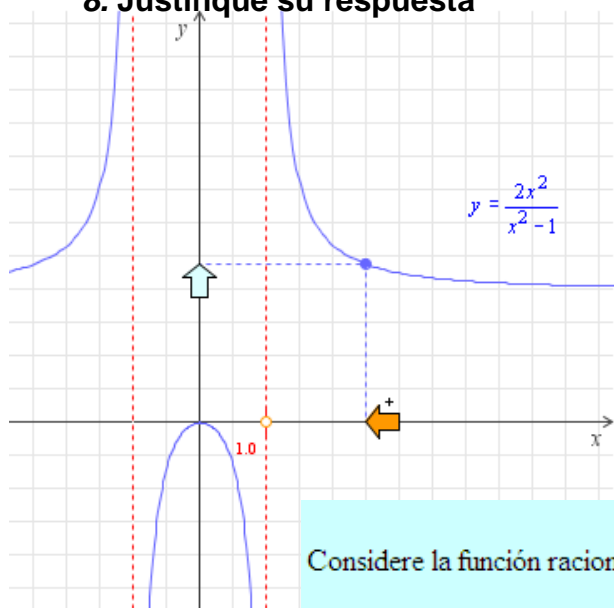


$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Sea  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$  cuya gráfica consiste en la parte superior de una circunferencia de radio 4 centrada en el origen, tal como aparece a la izquierda de este texto. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la única afirmación verdadera?

- A  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ .
- B  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  no existe pues  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  no existe.
- C  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  no existe pues  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  no existe.
- D  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ .

## 8. Justifique su respuesta



$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

Considere la función racional  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$  cuya gráfica aparece a la izquierda de este texto. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la única verdadera?

- A  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$  pues  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ .
- B  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe pues  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ .
- C  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$  porque la función no existe en  $x = 0$ .
- D  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe pues  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ .

<<Acercaos al borde>> No, nos caeremos. <<Acercaos al borde>> No, no podemos. <<Acercaos al borde>> No, nos da miedo... Y se acercaron. Y él los empujó. Y ellos volaron... GUILLAUME APOULLINAIRE.



## ANEXO 3

# Evaluación final sobre el concepto de Derivada.

GRADO 11º

NOMBRE \_\_\_\_\_ GRUPO \_\_\_\_\_ FECHA \_\_\_\_\_

1. Explique por qué es necesario calcular un límite para encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

2. Muestre utilizando la definición de derivada  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

que la derivada de  $f(x) = 2x$  es igual a 2.

3. Explique el procedimiento para realizar la derivada de un producto de funciones.

4. Derive los siguientes productos de funciones

a)  $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3x^3)$

b)  $h(x) = (4 + 2x)(x^4 - 2x^5)$

Recuerde que si  $f(x) = x^n$   $f'(x) = nx^{n-1}$

$$(f \cdot g)' = fg' + f'g$$



## ANEXO 4

### Preparación de Clases

#### Primera parte: Límites

#### **Clase N°1 Prueba Diagnóstica**

Luego de definir el problema de investigación se acordó diseñar e implementar la prueba diagnóstica con el fin de notar los movimientos del razonamiento, en cada uno de los momentos definidos anteriormente, con la intención de verificar si los resultados eran consecuentes con las observaciones realizadas en clase.

#### **Clase N°2 Aseguramiento Nivel de Partida y Orientación hacia el objetivo**

*Indicador de logro:* Grafica funciones segmentadas en el plano cartesiano utilizando tablas de valores.

En esta sesión se les presenta a los estudiantes una proyección de lo que será la intervención didáctica, los logros deseados, el proceso de evaluación, y los conocimientos previos requeridos.

#### Actividad N°1

Se realiza un taller sobre funciones segmentadas o por tramos, en las que se revisará que los estudiantes manejen el concepto de función, de operaciones básicas, de graficación en el plano cartesiano y, se acerquen a la noción de aproximación a un punto en las tablas de valores.

El estudiante deberá realizar una tabla de valores y graficar funciones de este tipo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

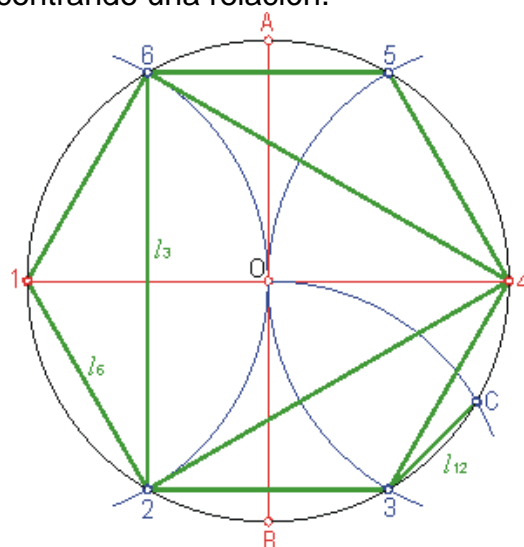
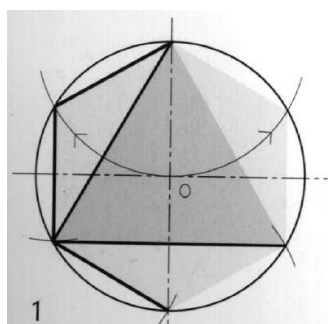
$$h(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El taller comienza recordando los conceptos básicos a través del diálogo heurístico y la presentación de algunos ejemplos, y se termina con el trabajo de ejercitación independiente de los estudiantes, vale la pena aclarar, que estarán orientados por el asesor en el aula.

### Clase N°3 Introducción al concepto de límite

*Indicador de logro:* inscribe un polígono regular en una circunferencia y compara ambos perímetros encontrando una relación.

Actividad N°2



A través de la construcción geométrica con regla y compás, en la que los estudiantes deben inscribir un polígono regular en una circunferencia y repetir el proceso de construcción duplicando los lados del polígono, se pretende que

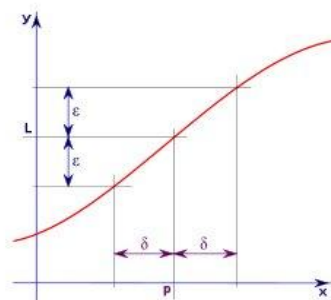
encuentren una relación entre el perímetro del polígono y el de la circunferencia. Esta relación tiene inmerso el concepto de aproximación necesario para comprender más adelante el concepto de límite.

En esta actividad se busca que los estudiantes aborden el momento crítico y conceptual del razonamiento porque deben buscar, por sus propios medios, un algoritmo que les permita realizar la construcción geométrica requerida, utilizando los conceptos de polígono regular, circunferencia y perímetro.

## Clase N°4 Concepto de Límite

*Indicador de logro:* realiza aproximaciones a un punto evaluado en una función, por medio de tablas de valores.

Utilizando la heurística con los estudiantes se introduce el concepto de límite desde su significado en la cotidianidad, y se muestran sus características en la matemática a través de gráficas en el tablero y la aproximación a un punto en una tabla de valores.



Ejemplo: observar el comportamiento de la función cuando nos acercamos al valor de 2 en la variable independiente.

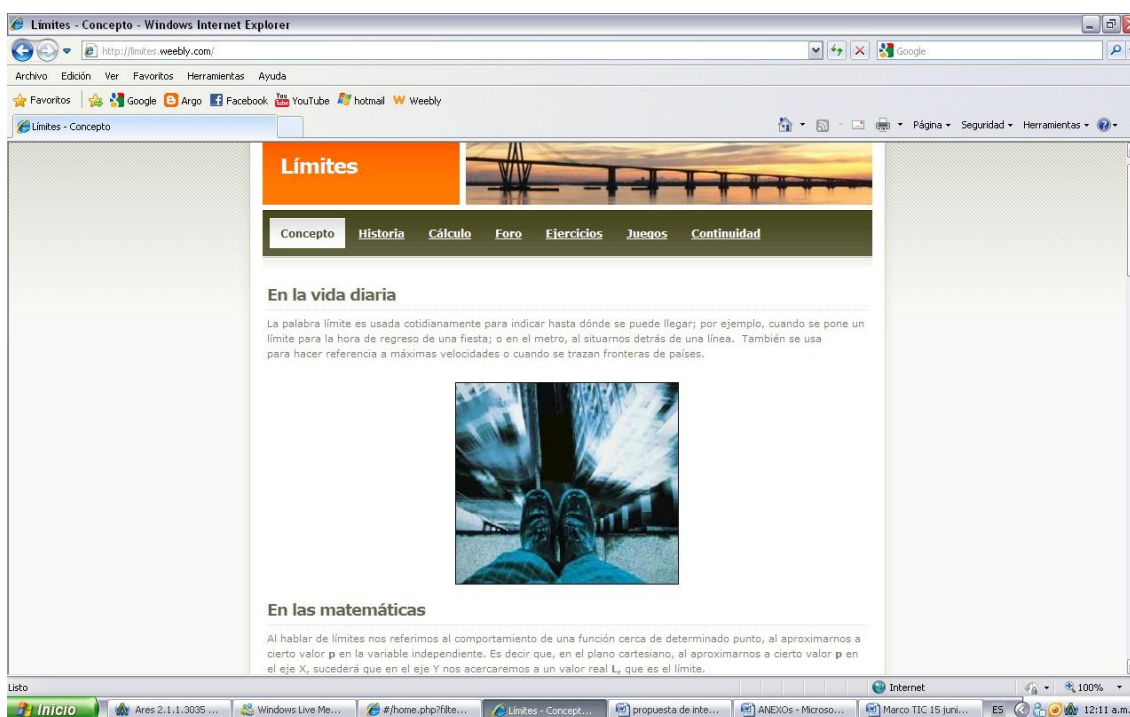
$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
y	3.9493	3.9748	3.9975	3.9997	?	4.0002	4.0025	4.0248	4.0493

Se presentan más ejemplos en los que se muestra el comportamiento de una función cuando nos aproximamos a un punto en la variable independiente y se termina presentando el concepto de límite y su notación. Se pretende que los estudiantes incorporen el concepto de límite inscrito dentro del momento conceptual del razonamiento.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Se sugiere visitar la página web del curso para ampliar la información sobre el concepto.



## Clase N°5 Cómo construir un blog

*Indicador de logro:* construye un blog

En esta reunión se muestra a través del video beam la forma en la que se construye un blog, también se presentan exposiciones de los estudiantes sobre personajes importantes en la historia del Cálculo, que les permitirán abordar el

momento de enfoque del razonamiento, relacionado con los límites, porque ubicarán el desarrollo del concepto históricamente.



El objetivo es que los estudiantes reconozcan los elementos necesarios para la elaboración del blog en el que construyan su propia bitácora sobre los temas del curso, al mismo tiempo que, desarrollan nuevas estrategias para movilizar sus momentos del razonamiento.

## Clase N° 6 Historia de los límites, el cálculo y Construcción del Blog

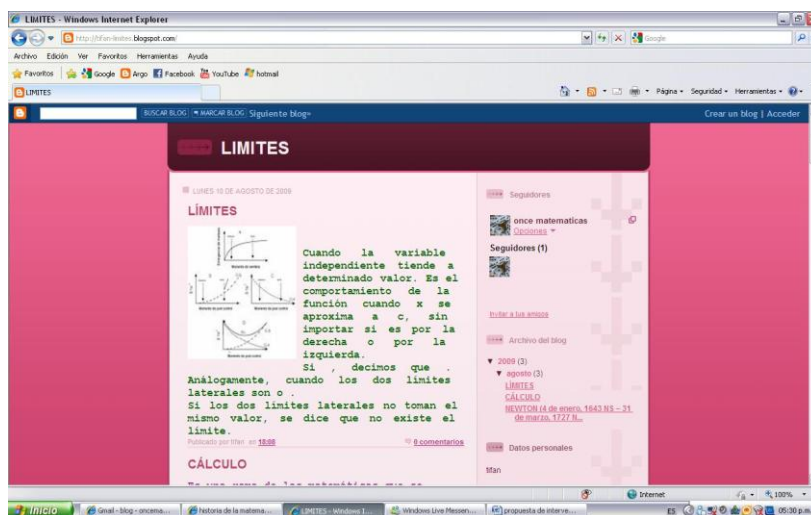
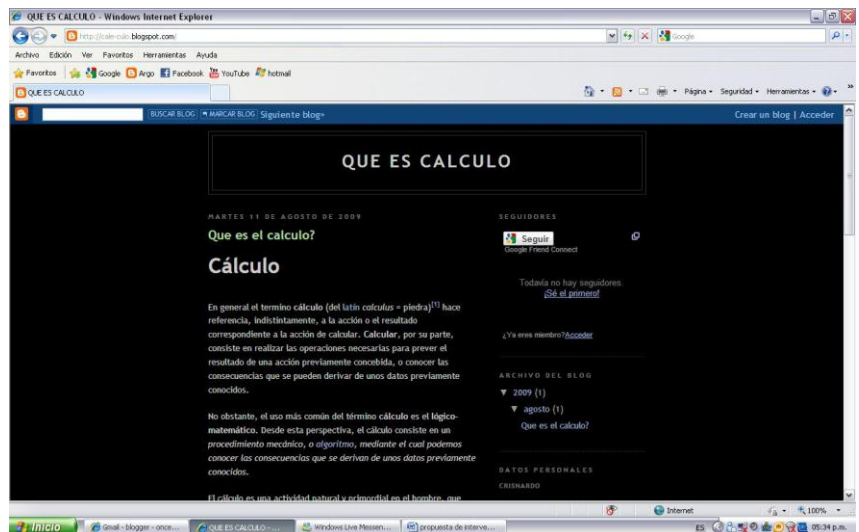
*Indicador de logro:* realiza publicaciones en el blog sobre el cálculo, sus personajes y el concepto de límite.

### Actividad N° 3

En parejas, deberán construir un blog, con unas publicaciones iniciales relacionadas con el cálculo, el concepto de límite y un personaje de la historia del cálculo relacionado con los límites.

Esta actividad está orientada a la construcción conjunta de los contenidos del blog, utilizando el desarrollo de un proceso que se ubica en el momento meta del razonamiento, porque los estudiantes deben seleccionar la información

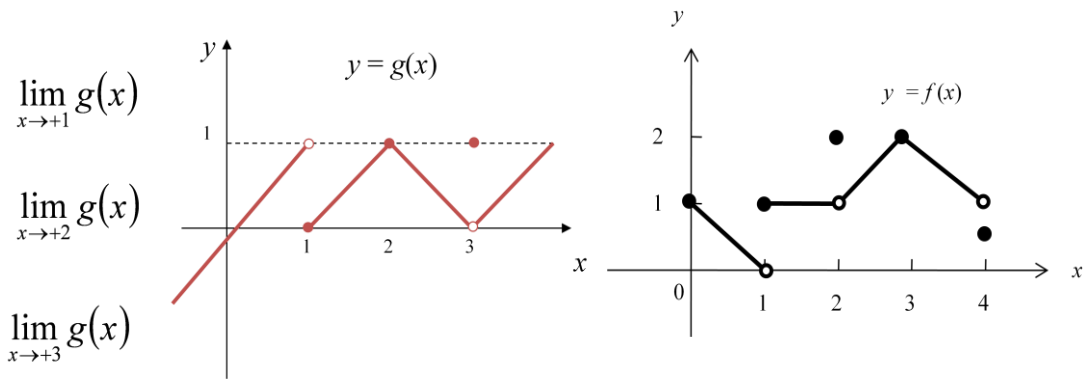
pertinente de la web que deseen comunicar y posteriormente abordarla con propiedad en su respectiva sustentación.



## Clase N° 7 Propiedades de los Límites

*Indicador de logro:* reconoce gráficamente el concepto de límite lateral

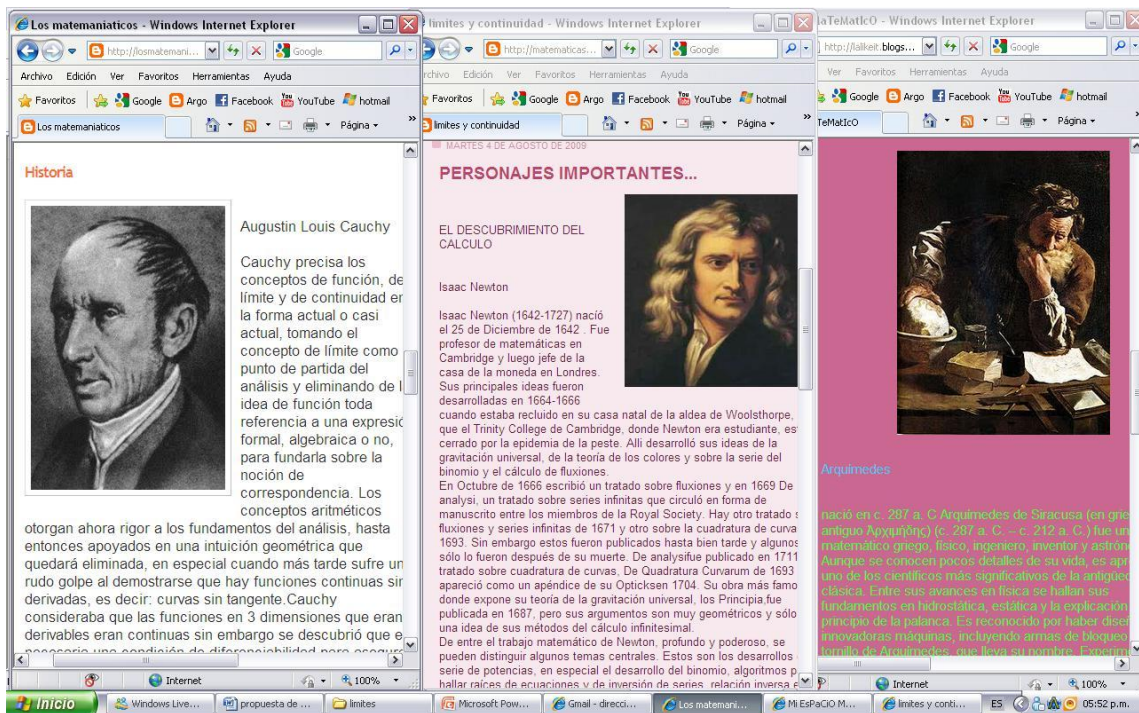
En el aula de clase a través del diálogo heurístico, se presentan los conceptos de límites laterales, algunos ejemplos operativos y la propiedad de unicidad. Se realizan además, ejemplos gráficos para que los estudiantes se aproximen al concepto. En esta sesión se trabaja en el momento perceptivo y conceptual al mostrar nuevas características y propiedades de los límites.



**Clase Nº 8 Sustentación del Blog**

*Indicador de logro:* justifica y argumenta los contenidos del blog

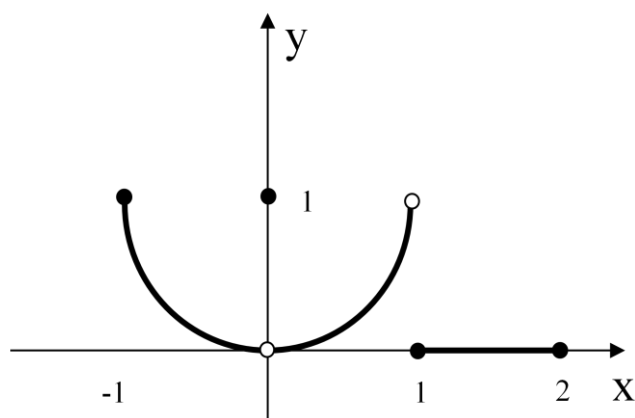
En esta reunión los estudiantes deben explicar las publicaciones en sus blogs. El razonamiento se desliza por el momento meta, porque se expresan los contenidos de su bitácora, además de evaluarse conjuntamente, para luego realizar las correcciones necesarias.



## Clase N° 9 Prueba evaluativa sobre límites laterales

*Indicador de logro:* Calcula el límite gráficamente utilizando el concepto de límite lateral.

Se realiza la siguiente prueba sobre límites laterales dirigida al momento perceptivo y conceptual.



- |   |  |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$                | g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$                             |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$                | h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{existe}$      | i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$                               |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$                  | j) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$                               |
| e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$                  | k) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$                             |
| f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \text{no existe}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$                             |

## Clase N° 10 Límites Indeterminados. (Factorización)

*Indicador de logro:* Calcula límites eliminando indeterminaciones de la forma  $0/0$ , utilizando factorización.

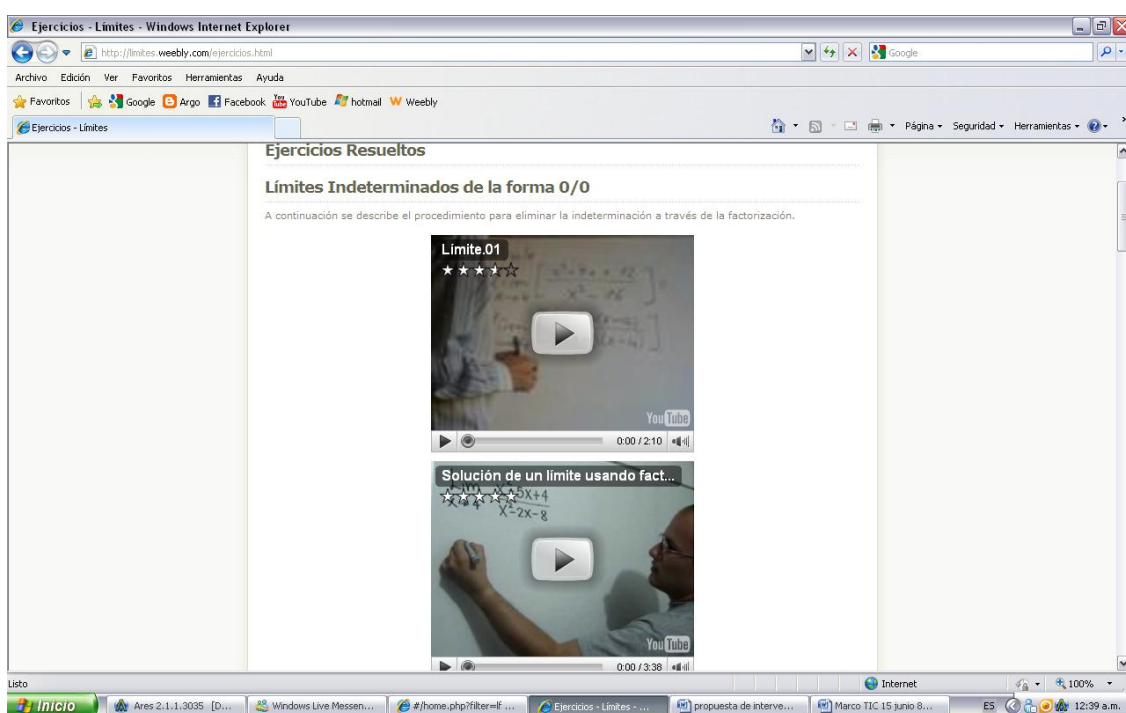
A través del diálogo heurístico, se introduce el concepto de indeterminación matemática y se dan algunos ejemplos. Se muestra el algoritmo de resolución



de un límite indeterminado para polinomios racionales en los que se llega a soluciones de la forma  $0/0$ .

Esta sesión recorre los momentos crítico y conceptual, porque el estudiante debe interiorizar un conjunto de pasos ordenados para eliminar una indeterminación, aplicando las factorizaciones pertinentes, realizando operaciones básicas, evaluando los límites y aplicando sus propiedades.

Se inicia con ejemplos en los que se evidencian las indeterminaciones, y tras la descripción del proceso de resolución por parte del asesor, se proponen ejercicios resueltos en video donde se refuerzan los conocimientos y los procedimientos.



The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying <http://limites.weebly.com/ejercicios.html>. The page content is as follows:

### Ejercicios Resueltos

#### Límites Indeterminados de la forma $0/0$

A continuación se describe el procedimiento para eliminar la indeterminación a través de la factorización.

**Límite.01**  
★ ★ ★ ★ ★

**Solución de un limite usando fact...**

The page features two video thumbnails. The first video, titled 'Límite.01', shows a person writing on a whiteboard. The second video, titled 'Solución de un limite usando fact...', shows a person writing the following algebraic expressions on a whiteboard:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 8}$$
$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x+2)}$$

The browser's taskbar at the bottom shows the system tray with the date 'Marco TIC 15 junio 8...' and the time '12:39 a.m.'.

## Clase N° 11 Límites Indeterminados. (Racionalización)

*Indicador de logro:* calcula límites eliminando indeterminaciones de la forma  $0/0$  utilizando la racionalización.

A través del diálogo heurístico y del repaso de la clase anterior se presenta el nuevo algoritmo que incluye la racionalización para la eliminación de la indeterminación.

En este nivel el estudiante transita por los momentos crítico y meta del razonamiento, porque emplea los algoritmos necesarios para eliminar las indeterminaciones y analiza los ejercicios propuestos de acuerdo con sus características, teniendo la posibilidad de evaluar su proceso y proponer nuevos ejercicios.

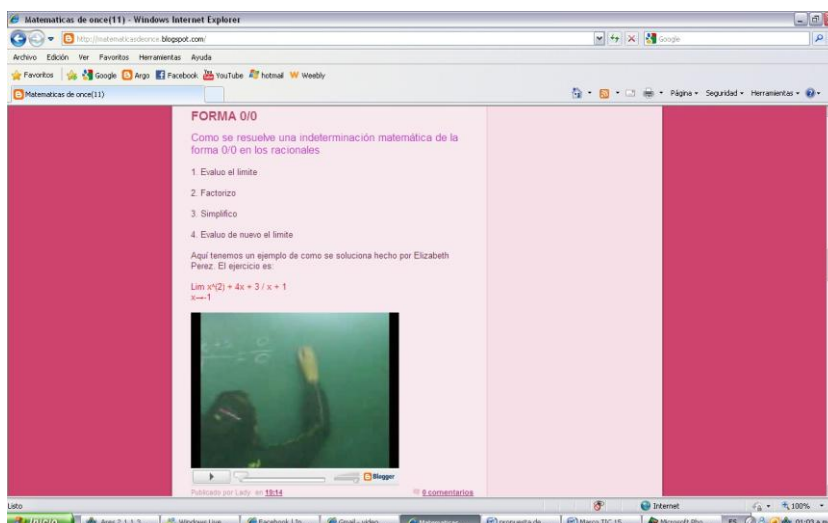
### **Clase Nº 12 Ejercicios resueltos en el blog: Momento Crítico y Meta**

#### Actividad Nº4

Los estudiantes deberán publicar dos nuevas entradas en su blog con videos en los que resuelvan límites indeterminados. En el primer ejercicio eliminarán una indeterminación factorizando y en el otro, racionalizando. Este proceso recorre los momentos crítico y meta del razonamiento porque, se sustentan procesos aprendidos para el cálculo de límites.

#### Actividad Nº5

Los estudiantes deberán filmarse resolviendo un ejercicio propuesto por ellos en los que se calcule un límite indeterminado. Esta actividad incentiva los momentos creativo y meta del razonamiento, porque es necesario inventar el ejercicio, resolverlo y comunicarlo a través de las TIC.



## Clase N° 13 Límites Infinitos

*Indicador de logro:* calcula límites infinitos.

Una vez más, con la ayuda del diálogo heurístico se introduce el concepto de límite cuando la variable independiente se acerca al infinito y se muestra a través de ejemplos el algoritmo para calcular estos límites.

Al finalizar la ejemplificación y el trabajo independiente en el aula, se propone un taller de ejercitación en la página web, donde los estudiantes encontrarán ejercicios resueltos y propuestos.

### Actividad N° 6

Cada estudiante deberá elaborar un mapa mental con dibujos y colores, y presentar los conceptos enseñados en el curso. El producto final se subirá al blog. Esta actividad se ubica en el momento conceptual y meta del razonamiento, porque aquí se estructura y sistematiza todo lo que el estudiante ha aprendido hasta el momento sobre límites identificando fortalezas y debilidades en los aprendizajes.

## Segunda Parte

### Continuidad

#### Clase N°14 Prueba Intermedia: concepto de Límite y ANP de Continuidad

Después de haber realizado la enseñanza del concepto de límite de una función utilizando las presentaciones en power point, la página web del concepto de límite, el correo electrónico y los foros, entre otras herramientas TIC; se implementa esta prueba con el fin de revisar el movimiento del razonamiento en el grupo control y experimental, evaluando cada momento del razonamiento. (Ver anexo 2)

#### Clase N° 15 Continuidad

*Indicador de logro:* reconoce y aplica el concepto de continuidad en un punto, en un intervalo y en una función.

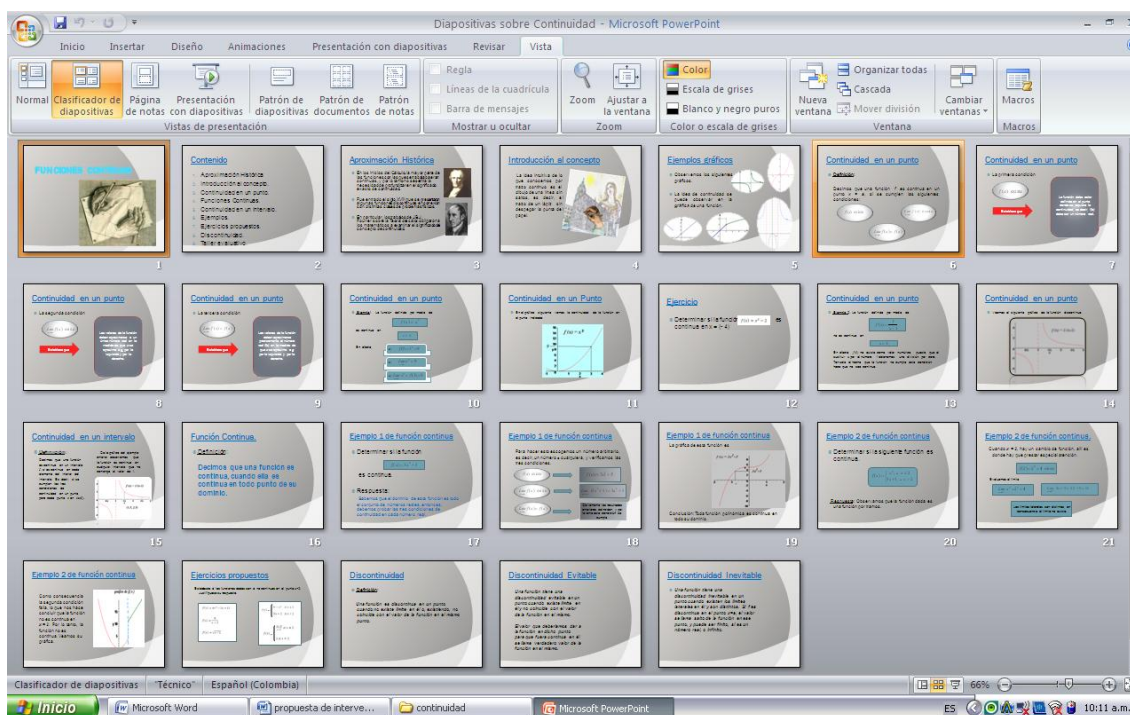
Utilizando el diálogo heurístico mediado por las TIC, para el momento perceptivo y conceptual, se enlazan los conocimientos de funciones y de límites para ejemplificar las características del concepto de continuidad.

#### Preguntas Orientadoras

¿Qué se entiende en el lenguaje cotidiano por continuidad? De un ejemplo.

¿Cómo considera que sería una función continua?

Utilizando la proyección con video Beam presentan diapositivas realizadas Power Point, con las que, paso a paso se elabora visual y heurísticamente los conceptos de, continuidad en un punto, continuidad en un intervalo y continuidad de una función, dejando ejercicios para su fijación.



Para la evaluación se realiza un taller con ejercicios donde los estudiantes expresarán su acercamiento al concepto de continuidad.

Para la siguiente sesión se deja como actividad, consultar la definición y clases de discontinuidad, cada una con un ejemplo correspondiente.

## Clase N° 16 Discontinuidad

*Indicador de logro:* identifica las diferentes clases de discontinuidad.

A través del diálogo heurístico en el aula de clase se abordará el concepto de discontinuidad removible, utilizando ejemplos con el fin de que los estudiantes se apropien del concepto.

Preguntas orientadoras

¿Qué características tiene una función continua?

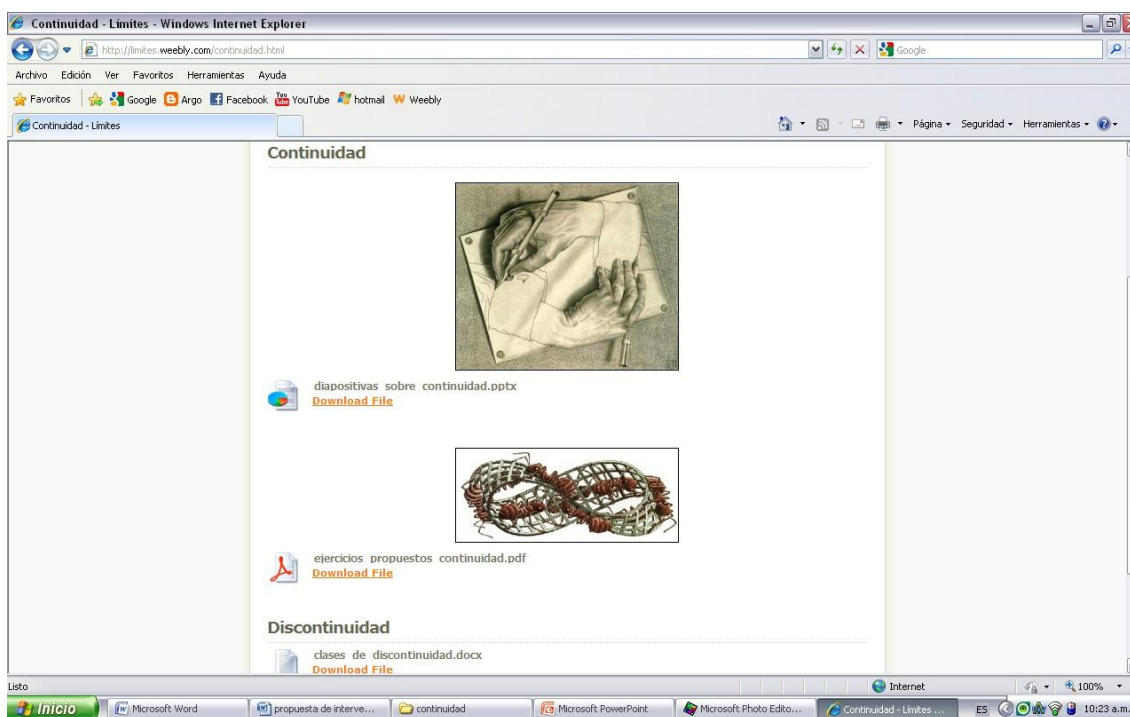
¿Cuáles son las características de una función discontinua, gráficamente?

Con base en la consulta previa que los estudiantes realizaron sobre conceptos y ejemplos de: discontinuidad, discontinuidad evitable y discontinuidad esencial; se retoman conjuntamente las definiciones y ejemplos en el tablero, para establecer un consenso general.

Por medio de un taller evaluativo en parejas, se sustentan los avances de los estudiantes en torno a los conceptos de continuidad y discontinuidad, al igual que los procedimientos necesarios para eliminar discontinuidades, en caso de ser posible.

Este proceso acompaña los momentos conceptual, crítico y meta del razonamiento, porque es necesario emplear los conceptos trabajados anteriormente y relacionarlos con los nuevos, mientras se aplican procedimientos de solución de ejercicios que se comunican posibilitando la retroalimentación en el aprendizaje.

Paralelamente apoyados en la página de internet, los estudiantes realizar un trabajo independiente para profundizar sus aproximaciones al concepto.



The screenshot shows a Windows Internet Explorer browser window displaying a website titled "Continuidad - Límites". The address bar shows the URL "http://limites.weebly.com/continuidad.html". The page content includes:

- A section titled "Continuidad" with an image of a hand holding a pen over a piece of paper.
- A download link for "diapositivas sobre continuidad.pptx" with a "Download File" button.
- A section titled "Discontinuidad" with an image of a complex, tangled structure.
- A download link for "ejercicios propuestos continuidad.pdf" with a "Download File" button.
- A download link for "clases de discontinuidad.docx" with a "Download File" button.

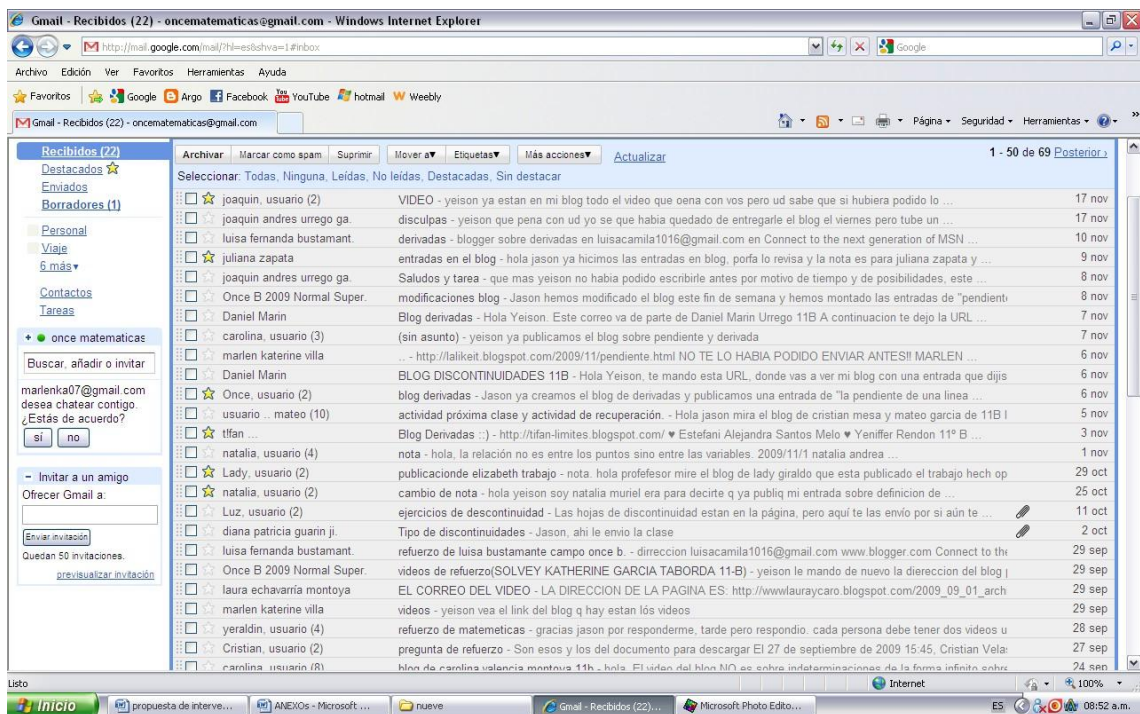
The taskbar at the bottom shows several open applications: Inicio, Microsoft Word, propuesta de interve..., continuidad, Microsoft PowerPoint, Microsoft Photo Edito..., and Continuidad - Límites. The system clock shows 10:23 a.m.

## Clase Nº 17 Socialización de los conceptos continuidad y discontinuidad.

*Indicador de logro:* el estudiante comunica los conceptos de continuidad y discontinuidad.

Actividad:

En parejas los estudiantes deberán subir a sus respectivos blogs, una publicación escrita con sus palabras con lo aprendido sobre el concepto de continuidad y otra para discontinuidad. Estos cambios en el blog, son comunicados por correo electrónico con el asesor, al igual que las dudas en el proceso.



## Tercera Parte

### Derivada

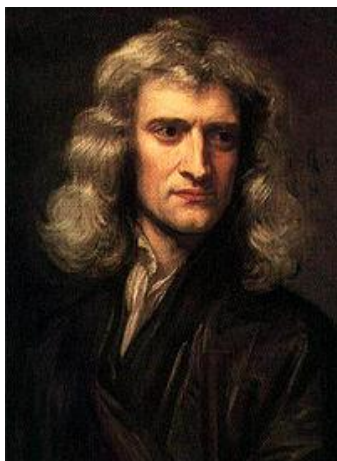
#### Clase N°18 Motivación y orientación hacia el objetivo

En esta sesión se realiza una conversación metacognitiva sobre la intervención didáctica en su primera fase, teniendo en cuenta los aprendizajes alcanzados hasta ahora, los logros deseados en las etapas siguientes, el proceso de evaluación realizado y propuesto, y los conocimientos previos requeridos.

El objetivo de la sesión es que los estudiantes en compañía del asesor, identifiquen aciertos en el proceso de aprendizaje y enseñanza que se sigue y realicen las correcciones pertinentes en materia de compromisos y exigencias, al igual que sugerencias y propuestas.

Dentro de la motivación, se realizará nuevamente un acercamiento a la Historia del Cálculo, esta vez, del cálculo diferencial, trabajando en el momento de enfoque.

La sesión se desarrolla a través de un conversatorio apoyado en la proyección de diapositivas y blogs de los estudiantes, donde se muestre la participación de algunos personajes históricos en la construcción del cálculo diferencial.





## Clase Nº19 Video introductorio sobre derivadas

Se proyecta un video donde se observa una introducción al concepto de derivada acompañado de preguntas orientadoras. Se busca que los estudiantes se motiven e identifiquen el concepto de derivada desde la cotidianidad, interiorizando la nueva información a través del momento perceptivo y estructurando el momento conceptual, recorriendo las características esenciales del concepto, ejemplos y conceptos subordinados.

Preguntas:

¿Para qué sirve el cálculo diferencial?

¿Cuál fue la frase que dijo Galileo relacionada con el mundo?

¿De dónde surgió la relación entre las matemáticas y la física?

¿Qué personajes de la historia del cálculo influyeron en el desarrollo de las derivadas?

En la vida diaria ¿qué es una derivada?

De cuatro ejemplos de razones de cambio

¿Qué nombre recibe la inclinación de un plano matemáticamente y qué significa?

¿Qué es una recta tangente?

¿Con que variables puede expresarse la velocidad en forma de razón de cambio?

¿Cuál es el símbolo para representar las derivadas?

¿Qué es una derivada para las matemáticas?

## Clase N°20 Socialización del cuestionario sobre el video de derivadas

Se pretende afianzar algunos de los contenidos mostrados en el video, principalmente los relacionados con las preguntas del cuestionario. A través del diálogo heurístico y de exposiciones por parte de los estudiantes se desarrolla la sesión, asegurando el nivel de partida en relación a los conceptos de pendiente, recta tangente, velocidad y razón de cambio. Esta actividad recorre los momentos conceptual, meta y de enfoque del razonamiento.

## Clase N°21 ANP Pendiente de una recta

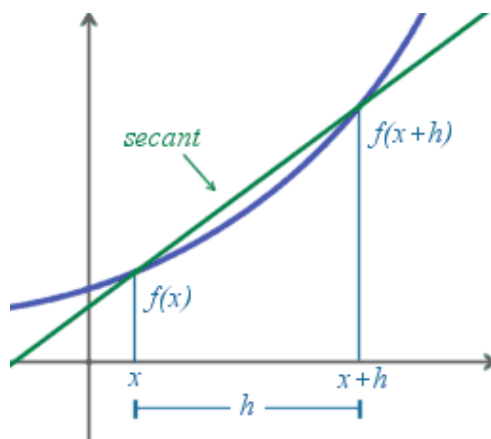
*Indicador de logro:* Calcula la pendiente de una recta.

En esta sesión se muestra el concepto de pendiente de una recta y se realizan algunos ejemplos y ejercicios a través del diálogo heurístico y el trabajo independiente por parte de los estudiantes.

## Clase N°22 El problema de la recta tangente

*Indicador de logro:* Calcula la pendiente de la recta tangente a una curva dada por una función.

Utilizando el procedimiento de aproximación de una recta tangente a una curva por medio del límite de una recta secante entre dos puntos de la misma, cuando estos puntos se aproximan infinitesimalmente, se muestra a los estudiantes, cómo gráficamente se llega al concepto de derivada a través del problema que la originó y, cómo el concepto de límite es quien permite esta construcción. Este proceso se enseña desde la heurística, mostrando finalmente la definición de derivada, y algunas de sus notaciones.



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo:  $f(x) = 2x - 3$

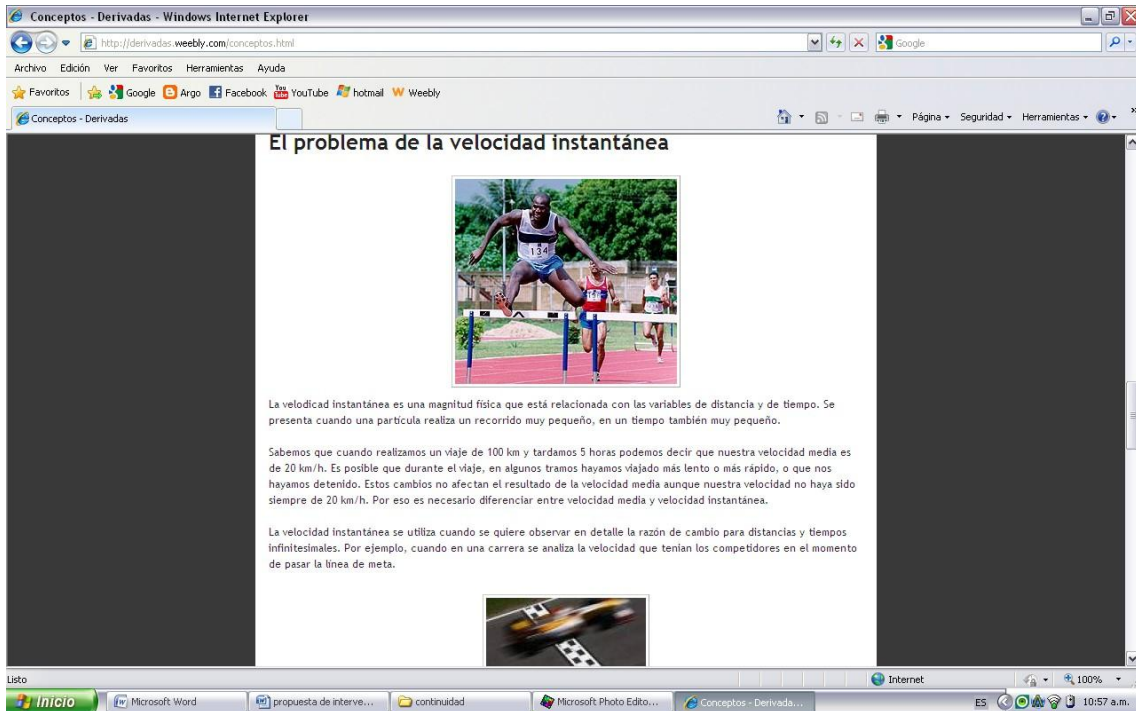
$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4+h) - 3 - (2 \cdot 4 - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 2h - 3 - 8 + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Se ofrece además la utilización de la página web para profundizar en el concepto y los procedimientos.

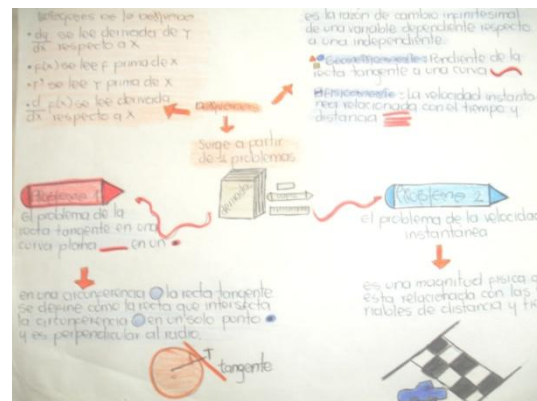
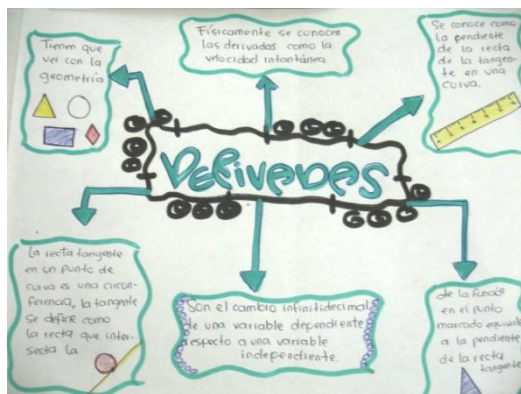
## Clase N°23 El problema de la velocidad instantánea

*Indicador de logro:* calcula la velocidad instantánea utilizando los conceptos de incremento y límite.



Al igual que en la sesión anterior, se muestra el otro problema que originó el proceso de derivación, los procedimientos asociados, algunos ejemplos y ejercicios, concluyéndose que tanto el problema de la recta tangente a una curva en un punto, como el de la velocidad instantánea de una partícula, se resuelven de igual manera y permitieron la construcción del concepto de derivada.

Actividad: Cada estudiante realiza un mapa mental con los conceptos de derivada enseñados hasta el momento y los que encuentran en la página web del curso, con el fin de afianzar su momento conceptual del razonamiento.



## Clase Nº24 Notación de la derivada y Reglas de derivación

*Indicador de logro:* Calcula derivadas utilizando las reglas de derivación.

A través del diálogo heurístico se profundizan las características esenciales de la derivada de una función, y sus apreciaciones como, la pendiente de una recta tangente a una curva y razón de cambio. Así mismo, se señalan algunas de sus diferentes notaciones.

$$\frac{df}{dx} \quad \frac{d}{dx}f(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad f'(x)$$

En simultaneidad con el momento conceptual del razonamiento, se presentan al estudiante las propiedades básicas de la derivación: para una constante, una potencia, un polinomio, una constante multiplicada por una función, un producto y un cociente.

Orientados al aprendizaje de procedimientos relacionados con el concepto de derivada, se describen inicialmente los algoritmos asociados a cada propiedad y se ejemplifica cada una de ellas, estos procedimientos pueden ser consultados luego en la web del curso.

The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying <http://derivadas.weebly.com/reglas.html>. The page content includes two video thumbnails:

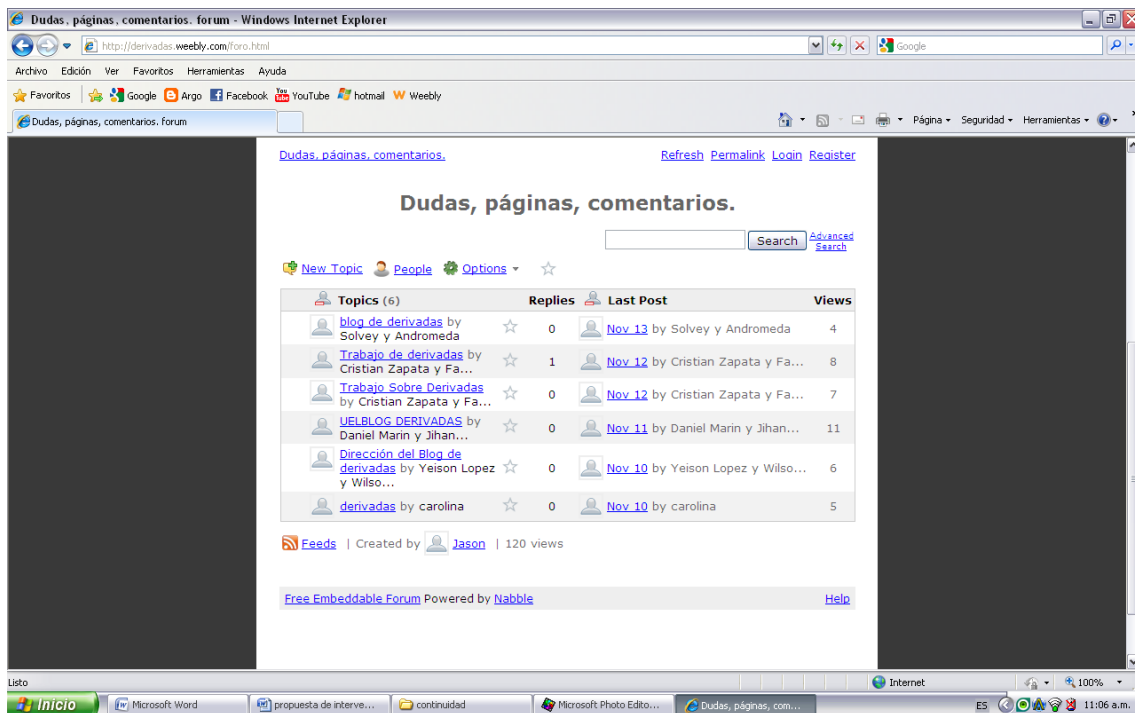
**Derivada de un producto**

Derivada de un producto  
 $y = (5x^2 - 3x) \cdot (2x^3 - 4)$   
 $y' = (10x - 3) \cdot (6x^2) + (5x^2 - 3x) \cdot (6x^2)$

**Derivada de un cociente**

Derivada de un cociente  
 $y = \frac{5x^2 - 1}{3x^2 - 2}$   
 $y' = \frac{(10x - 1) \cdot (3x^2 - 2) - (5x^2 - 1) \cdot (6x)}{(3x^2 - 2)^2}$

Cada estudiante cuenta además con la posibilidad de profundizar en sus conceptos y compartir con sus compañeros y asesor, sus adelantos e inquietudes a través de los foros en la página web, acercándose además a nuevos ejemplos y ejercicios resueltos en video, que le otorgan posibilidades propositivas y metacognitivas para la comunicación y explicación de sus aprendizajes, movilizándose en el momento meta del razonamiento.



## Clase N°25 Evaluación Final

Al concluir el proceso de enseñanza del concepto de derivada, se realizó la evaluación de los conceptos y procedimientos que se enseñaron utilizando las TIC