La comprensión intuitiva del concepto de límite en un grupo estudiantes de cálculo diferencial

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

JOAN GONZALO ZAPATA AGUDELO

JUAN FERNANDO ESCOBAR JIMÉNEZ

DARLINTON YEFREY BERNAL RODRÍGUEZ

Asesor

Magister RODRIGO ANTONIO RENDÓN RAMÍREZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MEDELLÍN

2014

LA COMPRENSIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE CÁLCUO DIFERENCIAL

AUTORES

Joan Gonzalo Zapata Agudelo,

joan.gonzalo17@hotmail.com

Juan Fernando Escobar Jiménez ,

juanfergreek@hotmail.com

Darlinton Yefrey Bernal Rodríguez,

yefry2839@hotmail.com

ASESOR

Rodrigo Antonio Rendón Ramírez,

ro.rendon@gmail.com

Centro de Práctica: INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MEDELLÍN

RESUMEN

El presente trabajo de grado está enfocado hacia la descripción de la comprensión del concepto intuitivo de límite, en estudiantes que toman cursos regulares de cálculo diferencial, a la luz de los planteamientos de la Teoría de Pirie y Kieren para la comprensión de conceptos matemáticos. Este trabajo utiliza los niveles de crecimiennto de la comprensión, propios del modelo de Pirie y Kieren para clasificar un grupo de estudiantes en cuánto a su comprensión del concepto, a la vez que muestra la efectividad de las entrevistas semiestructuradas para conseguir este propósito y permitir el crecimiento de la comprensión inicial hacia niveles superiores.

El trabajo se compone de cinco capítulos dónde se inicia por contextualizar el estudio, hacer un recorrido por la evolución del concepto, definir un problema de investigación y el consecuente camino metodológico para lograrlo; al final se muestra el proceso de análisis de resultados y se generan conclusiones finales.

PALABRAS CLAVE:

Pirie y Kieren, comprensión, límites, Entrevista socrática, niveles, infinito

TABLA DE CONTENIDO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

CAPITULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

Partiendo de los postulados de Pirie y Kieren para quienes el crecimiento de la comprensión en Matemáticas está fundamentada en un modelo por niveles a partir del cual se explica la manera como crece la comprensión de un concepto matemático, partiendo del nivel de Conocimiento Primitivo y finalizando en el nivel de Invención (propio de un manejo con nivel de experto sobre el concepto en cuestión); esta investigación pretende determinar el nivel de comprensión del concepto intuitivo de límite en estudiantes entre la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial.

Haciendo uso del paradigma de investigación cualitativo y mediante un estudio de casos nos propusimos identificar aquellas percepciones erróneas que generan inconvenientes en la comprensión del estudiante, lo que nos da pie para sugerir algunas estrategias que fortalezcan y mejoren los actos de comprensión.

En este punto es importante destacar como una serie de investigaciones hacen referencia a las rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato; como la de

Blázquez y Rincón (1998), por ejemplo. Sin embargo, existen otras que han abordado el concepto de límite finito de una función en un punto, de manera estructural; esto permite finalmente elaborar una investigación con la rigurosidad científica del caso, pero ante todo lacónica, es decir, muy concreta. Es bajo esa lógica que optamos por seleccionar una población que cumpliera con la condición de transición bachillerato-universidad, puesto que cumplían ciertas características previamente determinadas, a partir de las cuales fue posible determinar claramente las rupturas en la comprensión y fuese posible aportar estrategias que beneficien la comprensión del concepto intuitivo de límite en dicha etapa.

1.2 JUSTIFICACIÓN

La concepción de límite se ve atravesada por diversos factores que intervienen en la comprensión del concepto. Estos factores influyen en la forma cómo los y las estudiantes lo comprenden, generando o no, un adecuado aprendizaje. Dicha situación reviste de vital importancia una investigación de este tipo, la cual no sólo se limita a mencionar y enumerar los factores que influyen en la comprensión de un concepto matemático, como lo es el límite, sino que también procura aportar herramientas y estrategias que permitan avanzar en la asimilación, comprensión y aplicación del concepto intuitivo de límite.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La comprensión por parte de los estudiantes de un tema específico se ve permeada por diversos factores destacando, entre otros, la labor del maestro. Estos factores pueden ocasionar falsas percepciones del concepto de límite por parte de los educandos, concibiéndolo como un valor que no es alcanzable y no como un proceso infinito de control de errores. Lo anterior nos lleva a trazarnos el siguiente objetivo principal y la pregunta de investigación que orienta el trabajo.

1.4 PREGUNTA

¿Cuáles son las concepciones que se generan en estudiantes entre la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial sobre el concepto de límite?

1.5 OBJETIVO

Identificar el nivel de comprensión del concepto de límite en el que se encuentran los estudiantes de la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial.

1.6 MARCO TEÓRICO

La base teórica que sustenta esta investigación es aquella propuesta por los profesores norteamericanos Susan Pirie y Thomas Kieren, quienes postulan una teoría de la comprensión matemática en la cual, inicialmente, aprueban el concepto de comprensión propuesto por Glasersfeld (1987), a saber: *"La comprensión es un proceso continuo para organizar estructuras del conocimiento de una persona".*

A posteriori, Pirie y Kieren proponen una teoría en la cual optan por analizar la gradación de la comprensión de conceptos matemáticos mediante un modelo compuesto de ocho niveles. Dicho modelo fue usado para trabajar, inicialmente, en el campo de la aritmética y se compone de los siguientes ocho niveles estructurantes:

Nivel 1. Primitive knowing (conocimiento primitivo)

Nivel 2. Image making (creación de imagen)

Nivel 3. Image having (comprensión de la imagen)

Nivel 4. Property noticing (observación de la propiedad)

Nivel 5. Formalizing (formalización)

Nivel 6. Observing (observación)

Nivel 7. Structuring (estructuración)

Nivel 8. Inventising (invención)

A continuación, se hará una breve descripción de cada uno de estos niveles.

1. CONOCIMIENTO PRIMITIVO (Primitive knowing)

Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje

2. CREACIÓN DE LA IMAGEN (Image making)

En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes no sólo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental

3. COMPRENSIÓN DE LA IMAGEN (Image having)

Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992).

4. OBSERVACIÓN DE LA PROPIEDAD (Property noticing)

El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales.

5. FORMALIZACIÓN (Formalizing)

El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas.

6. OBSERVACIÓN (Observing)

Este nivel muestra la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. En este estrato, el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado.

7. ESTRUCTURACIÓN (Structuring)

En este estrato la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor.

8. INVENCIÓN (Inventising)

En este nivel el estudiante tiene la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

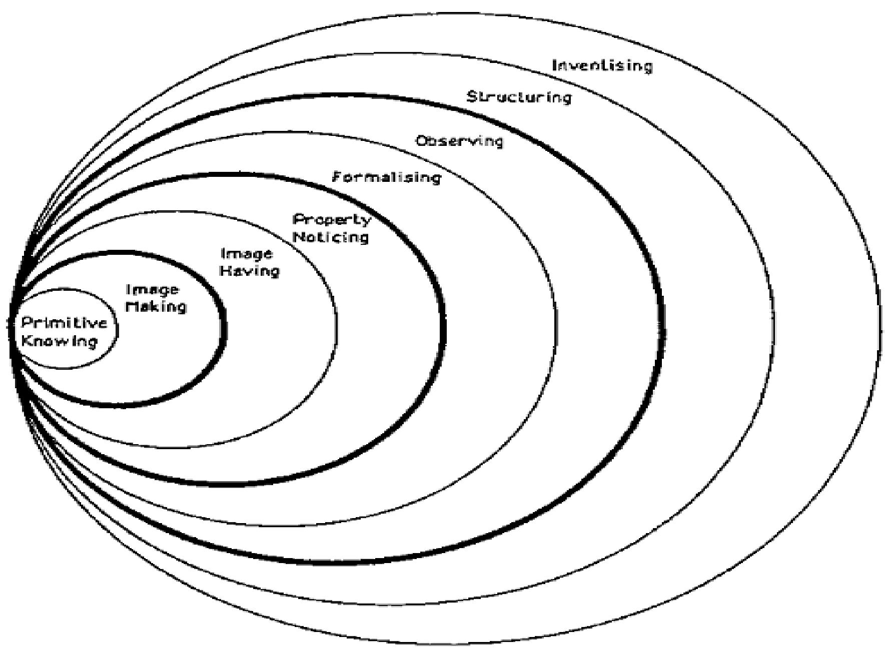


Figura 1. Representación diagramática del modelo de la evolución de la comprensión matemática.

Características principales del modelo

La *fractalidad* se refiere al hecho de que culminado el proceso de comprensión de cualquier concepto, este se convierte en el conocimiento primitivo (nivel 1) para la comprensión de un nuevo concepto. Dado que este comportamiento escalonado y fragmentado se repite de manera sucesiva e indefinida, hace que se convierta en un modelo fractal.

Figura 2. Representación del modelo para la evolución de la comprensión matemática que ilustra la naturaleza similar a sí misma del centro interno llamado conocimiento primitivo.

Parafraseando a Rendón Ramírez (2013), el *folding back* es una de las características más importantes ya que permite redoblar o retornar a niveles inferiores para así poder afianzar o superar deficiencias en la comprensión en otros niveles.

Los *límites de falta de necesidad* hacen referencia al paso del estudiante hacia una comprensión más elaborada del concepto, haciendo innecesario el requerimiento de elementos de niveles inferiores.

Cabe resaltar y aclarar que esta investigación estará enfocada en identificar el comportamiento en los 4 primeros niveles del modelo, a saber: conocimiento primitivo, creación de la imagen, comprensión de la imagen, observación de la propiedad; ya que estos poseen una aplicabilidad visual lo cual es algo esencial para nuestro trabajo.

Además es ineludible precisar que en la investigación el concepto de comprensión es asumido y entendido como un: "*Proceso de crecimiento interminable, complejo, dinámico y estratificado pero no lineal. Proceso dinámico de organización y reorganización" (Piere y Kieren, 1991).*

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

1.7 LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Al estar enfocado nuestro interés en la identificación de la comprensión del concepto intuitivo de límite, la entrevista constituye uno de los instrumentos claves para la recolección de la información y el procedimiento más frecuente en investigaciones de corte cualitativo como es nuestro caso. Es por ello, que en esta parte del trabajo nos centraremos en dicho aspecto metodológico mediante el cual fue posible identificar percepciones, aportar resultados y sugerir estrategias pedagógicas que mejoren los procesos de comprensión en estudiantes entre la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial.

Es importante empezar por comprender la entrevista como un proceso comunicativo que se da -normalmente- entre dos personas, donde el entrevistador obtiene de forma directa e intencionada información del entrevistado respecto unos objetivos enmarcados en un estudio o investigación.

La entrevista se ha utilizado desde épocas remotas y se ha consolidado como una herramienta infaltable en miles de investigaciones de diferentes campos de estudio. Como nuestra investigación es de corte cualitativo es válido referenciar a Fernández (s.f.) para quién una entrevista

> "(…) es un modelo que propicia la integración dialéctica sujeto-objeto considerando las diversas interacciones entre la persona que investiga y lo investigado. Se busca comprender, mediante el análisis exhaustivo y profundo, el objeto de investigación dentro

de un contexto único sin pretender generalizar los resultados. La entrevista, desde la perspectiva del paradigma citado, constituye el fluir natural, espontáneo y profundo de las vivencias y recuerdos de una persona mediante la presencia y estímulo de otra que investiga, quien logra, a través de esa descripción, captar toda la riqueza de sus diversos significados" (Fernández, s.f. citado por Vargas, 2012:124).

A diferencia de los otros tipos de entrevista (estructurada, no estructurada, grupal) la presente investigación se guío bajo los parámetros que plantea la entrevista semiestructurada, puesto que dicha modalidad brinda al investigador la posibilidad de disponer de un "guión" sobre los temas de interés a tratar pero direccionando las preguntas de manera abierta conforme los matices de respuesta por parte del entrevistado. Lo anterior y parafraseando a Díaz Martínez (2004) citada por Ozonas y Pérez (2004), las entrevistas semiestructuradas y desde su interaccionismo simbólico se proponen a fin de no oprimir a las personas participantes, generando así un ámbito comunicacional mediado por la participación mutua que supera las barreras del mero cambio formal de pregunta/ respuesta.

Ahora bien, nuestro interés al momento de incluir la entrevista semiestructurada como parte de la metodología de trabajo radicó en su carácter conversacional libre, mediante el cual fue posible relevar los diversos factores que intervienen en la comprensión del concepto de límite en la población intervenida. Igualmente, con cada una de las entrevistas se buscaba que en el encuentro dialógico los estudiantes dieran a conocer sus nociones sobre el concepto intuitivo de limite y, además, concebir el límite como un concepto local y no global.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

CAPITULO 2: EL CONCEPTO MATEMÁTICO

2.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO

En esta parte del capítulo nos centramos en señalar los principales aportes dados por diferentes autores que a luz de sus investigaciones han abonado terreno en la comprensión del concepto de límite y, a su vez, nos han orientado en la tarea de sentar las bases conceptuales sobre las cuales se cimienta el presente análisis investigativo.

SITUACIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE INFINITO

(AGUIRRE, Mónica y CAMACHO, Alberto)

Este trabajo consistió en diseñar una situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en el curso de Matemáticas I del nivel de enseñanza superior en las carreras de ingeniería del sistema tecnológico. Los estudiantes de estos niveles de enseñanza manifiestan, continuamente, concepciones poco confiables en la determinación algorítmica de expresiones en las que subyace la división por cero. En este escrito se plantea el análisis preliminar para el diseño de una situación didáctica usando la ingeniería didáctica como metodología.

ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS Y DIDÁCTICAS EN TORNO AL OBJETO DE «LÍMITE DE FUNCIÓN»: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS

(AZCÁRATE, Lorena)

Esta investigación se inscribe en el ámbito general del análisis de la actividad del profesor y se centra en el caso concreto de la enseñanza del concepto de «límite de la función» en el sistema de enseñanza secundaria española.

Usando el enfoque antropológico de la didáctica (Chevallard, 1998) como marco teórico general, se propone una metodología de investigación para el análisis de las organizaciones matemáticas recreadas por el profesor en el aula, en colaboración con sus alumnos y las organizaciones didácticas respectivas que permiten su reconstrucción.

RUPTURAS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ALUMNOS DE BACHILLERATO.

(BLÁZQUEZ, Sonsoles y ORTEGA, Tomás)

Se presenta una investigación sobre la comprensión del concepto de límite funcional por alumnos de 2° curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS), analizando los datos recogidos en dos entrevistas semiestructuradas a ciertas parejas de estudiantes. Las entrevistas versan sobre las tareas realizadas por los alumnos en la última fase de la Investigación-Acción (I-

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

A) y son analizadas a la luz del modelo de comprensión conceptual de Sierpinska. Se transcriben algunas de las respuestas que corroboran las aserciones. Se concluye enunciando los actos de comprensión, cuya observación en el aula mejorará la didáctica del concepto de límite.

LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL LÍMITE.

(Blázquez, Sonsoles y Ortega, Tomás)

En este artículo se reporta una investigación, que forma parte de otro mucho más amplia en la que se investiga la noción de “límite” en alumnos de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales (MACS), de 17 – 18 años, en el sistema educativo español (LOGSE). En el trabajo general se hace una revisión de publicaciones afines al tema, se examina el currículo de MACS y se analizan todos los libros de texto que existían en España, para lo que se diseñó un sistema de categorías apropiado.

FENÓMENOS QUE ORGANIZAN EL LÍMITE.

(CLAROS, Francisco J.; SÁNCHEZ, María Teresa; CORIAT, Moisés)

En este artículo se pone de manifiesto la presencia de los fenómenos de aproximación organizados por una definición de límite en el caso de las sucesiones de números reales y de las funciones reales de una variable real. La exposición incluye la caracterización de tales fenómenos, una descripción del análisis comparativo desarrollado en base a ellos entre dos definiciones formales de límite de sucesión y función, y una síntesis del estudio llevado a cabo sobre una muestra intencional de libros de texto de matemáticas.

ANÁLISIS DE UNA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA EN TORNO AL LÍMITE DE FUNCIONES Y LA PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN EL MOMENTO DE LA EVALUACIÓN.

(CORICA, Ana Rosa; OTERO, María Rita)

Este artículo presenta los resultados parciales de una investigación cuyo propósito es describir y comprender las organizaciones matemáticas en torno al límite defunciones que se estudian en una institución universitaria, así como la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación.

Se adopta como sustento teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Dicho estudio se realizó en un curso de Cálculo, al que asistían 283 estudiantes, y correspondía al primer año del ciclo básico que llevaban todas las carreras de Ciencias Básicas y Aplicadas en una Facultad de Ciencias Exactas.

Las conclusiones parciales indicarían que en esta universidad se estudian organizaciones matemáticas puntuales y rígidas que sólo conducen a la revisión de algoritmos algebraicos.

DEFINICIONES PERSONALES Y ASPECTOS ESTRUCTURALES DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

(FERNÁNDEZ PLAZA, José Antonio; RUIZ HIDALGO, Juan Francisco; RICO, Luis; CASTRO, Enrique)

Los autores pretenden describir e interpretar las definiciones aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados de investigaciones previas. Los aspectos estructurales son la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de ello, se analizan las definiciones recogidas. Entre los resultados, se destaca la riqueza de significado de estas definiciones por razón del carácter no alcanzable y no superable atribuido al límite y por su consideración dual como objeto o proceso.

2.2 ANTECEDENTES DEL CONCEPTO

Para conceptualizar el antecedente del concepto de límite es necesario remitirse a los antiguos griegos, quienes utilizaban procedimientos basados en límites para calcular áreas, como el área del círculo, de forma tan completa como fuera posible utilizando triángulos. Durante esta época la idea de *límite*, como concepto, es aún muy intuitiva puesto que no existe un concepto como tal, ni siquiera de otros, tales como el de función. Empero, aparecían procedimientos y métodos empíricos e implícitos mediante los cuales podían resolver problemas, tales como:

• Obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente a partir de una fórmula que las relacione.

• Encontrar la tangente a una curva -situación útil en el campo de la óptica-.

• Estudiar los máximos y mínimos de una función, lo cual lo relacionaban con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, entre otros.

• Calcular áreas y volúmenes acotadas ya sea por curvas o por superficies.

Ahora bien, en lo que sigue intentaremos presentar un breve resumen de algunos de los métodos infinitesimales a partir de los cuales se pueden resolver las situaciones mencionadas con antelación y, por ende, contextualizar el desarrollo histórico y las etapas de consolidación de lo que hoy entendemos y aplicamos como límite.

Método de exhaución.

Este método se atribuye a Eudoxo, aunque su utilización más conocida la hizo Arquímedes en sus escritos: “Sobre la esfera y el cilindro” y en “La cuadratura de la Parábola”. El método se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc., y consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada. Por ejemplo, para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de *n* lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de *n* triángulos isósceles), luego se duplica el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos hasta que la diferencia queda exhausta. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Método de los infinitésimos de Kepler (1571-1630)

Este método era utilizado para resolver problemas de medidas de volúmenes o áreas como los que aparecen en el escrito “Nova stereometria doliolum vinatorum”. La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos. Galileo utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

Método de los indivisibles de Cavalieri .

Dicho método fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri (1598-1647) representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar.

Es necesario añadir algo más respecto a este autor puesto que, sin necesidad de un antecesor del cálculo, fue el que impregnó a muchos analíticos de su época que un infinitésimo es un “cero pequeño”. El mismo logró que se dijese que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, dado que es como un collar de cuentas muy pequeñas, una al lado de otra. También argumentó que una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen, un montón de superficies sin espesor[1].

Método de Fermat para buscar extremos de curvas.

Lo aplicó a las “parábolas e hipérbolas de Fermat” y consiste en considerar que en una “cumbre” o en un “valle” de la curva, cuando E es pequeño, los valores de la función f(x) y f(x+E) están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer f(x+E)=f(x), dividirlo por E y tomar E=0. Si bien no habla de límite, está bastante cerca.

Método de las tangentes.

Fermat envía a Mersenne en 1637 una memoria que se titula: “Sobre las tangentes a las líneas curvas” donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, si bien sólo lo utiliza con la parábola. En un intento de clarificar dicho método, Descartes crea el suyo propio según reza en la carta que envía a Mersenne en Mayo de 1638 y, así, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende es dibujar la recta tangente en el punto P=(x, f(x)) y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se consideraba f(x+E)-f(x), se dividía por E y se tomaba E=0, lo que equivale a hallar el límite funcional en la abscisa del punto P.

Método de Barrow (1630-1677).

Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos *e* y *a*, que equivalen a los Δx y Δy actuales.

Todos los anteriores métodos fueron el germen del análisis infinitesimal y surgieron motivados por las exigencias de la mecánica, de la astronomía y de la física. El álgebra aportó las herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; faltaba algo que les armonizara y además les diera ese carácter de universalidad. Eso algo que faltaba era el concepto de límite.

En ese orden de ideas, aparecen en escena los creadores del análisis: Newton (1648-1727) y Leibniz (1646-1716). El primero de ellos, es el creador de la teoría de las fluxiones, un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Dicho estudioso propone el método de las fluxiones, el cual se publica en 1736 en su obra: *"Methodus fluxionum et serierum infinitorum*" (Método de las fluxiones y series infinitas), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones conocida la relación entre fluentes y el recíproco y encontrar las fluentes dada la relación entre fluxiones. Para resolver estos problemas aplicó sus respectivos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas; pero, para el propio Newton en estos métodos resolutivos no había una explicación satisfactoria. Es por ello que en 1704 en su obra: "Tractatus quadratura curvarum", explicita el método de las "razones primeras y últimas" en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica.

Y, por si fuese necesario, en su obra: *"Principia Mathematica*" hace la siguiente "aclaración" sobre el concepto de límite: *"Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales".*

Leibnitz, por su parte, preocupado por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales. Se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Usa una notación que perdura actualmente, pero no aclara lo que, para él significa “infinitamente pequeño” y, más complejo aún, a veces habla de "infinitamente, infinitamente pequeño".

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus, pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita como útil al ser, con los infinitésimos y las razones primeras y últimas de Newton, una herramienta para resolver problemas.

Ahora bien, esta idea de límite como aproximación sin más no basta porque la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta para Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar “más que cualquier diferencia dada”, lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

Segunda mitad del siglo XVIII. Transformación

Utilizando infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto de límite.

Euler (1707-1743) toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas que, desde entonces, se llama Análisis y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales.

D'Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de la “Encyclopédie,D´Alembert” escribe la siguiente definición de límite:

> *“Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se le puede suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable”.*

En esta definición las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar y, aunque la aproximación es objetiva, no se puede tener un control completo de la misma.

Lagrange (1736-1813) trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias. Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

Siglo XIX y principios del siglo XX. Aritmetización del análisis.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de las matemáticas -que tras la Revolución Francesa pasa de ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica-.

Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas. Entre estos matemáticos se destacan: Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Cauchy (1789-1857) retoma el concepto de límite de D'Alembert (rechazando el planteamiento de Lagrange) y prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente: *"... cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".* Si bien la noción de límite dada por D'alembert es más objetiva que la de Cauchy, ya que en ésta aparece el término "tanto como queramos" que la subjetiviza; es precisamente la definición presentada la que se tomó como referencia para definir el objeto matemático a trabajar en esta investigación ya que Cauchy basa todo su análisis en el concepto de límite.

Bolzano (1781-1848) da una definición de continuidad basada en la de límite; de hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Weierstrass (1815-1897) contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria de número real y otra del concepto de límite, luego Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, la cual aparece en la obra de su discípulo Heine Elemente, es la siguiente: *"Si, dado cualquier ε, existe un no, tal que para 0<n<no, la diferencia* $f(x_0 \pm n)-L$ *es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para* $x=x_0$*".*

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma. Sin embargo, esta definición que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye una cuarta etapa en el desarrollo del concepto.

2.3 MECANISMO

El mecanismo utilizado , para generar esa relación entre el marco teórico y la metodología, para obtener información y para vislumbrar lo que el mismo marco teórico nos ofrece, es a partir de la entrevista semiestructurada de carácter socrático a medida que se avanza en ella, se interactúa con el programa Geogebra, el cual posee una amplia gama de aplicativos matemáticos y en especial geométricos muy útiles, lo que nos permite construir gráficos, funciones, tablas y verificar resultados a partir de los comandos que este programa nos ofrece.

Para este caso, el estudiante tendrá este programa para poder responder diferentes preguntas, donde él podrá visualizar lo que sucede en diferentes casos, que serán presentados por el entrevistador. En gran parte de esta entrevista se debe hacer un acercamiento a la aplicación, ya que esta es de carácter visual, dándole a la investigación una herramienta muy útil, ya que la investigación, esta soportada a partir de la construcción visual geométrica del concepto, donde la representación gráfica y la concepción del concepto de límite, desde lo abstracto, hacen que el desarrollo de la investigación, se haga desde una visión gráfica y ayude al estudiante a ver cosas que la mente en algunos momentos no puede volver un objeto visible mentalmente.

Nuestro mecanismo consta de una aplicación, que le permite al estudiante visualizar una función, para luego generarle valores por la derecha y por la izquierda de un punto en particular, el cual determinará la existencia o no del límite y con la ayuda de una opción del programa, que consta en hacer zoom en cierta región, permitirá que el estudiante observe y pueda hacer un acercamiento infinitesimalmente pequeño, lo cual lleve a este a reflexionar sobre lo que sucede cada vez que se realiza un zoom, se mueve hacia el punto a analizar o lo que sucede con la gráfica, cada vez que se ingresa más en ella. Se tiene la posibilidad de que el estudiante, con la ayuda de esta herramienta pueda comprender lo abstracto y genera una significación de lo que va viendo y lo convierta en concepto a partir de su interacción con el programa computacional.

2.4 OBSTÁCULOS EN LA COMPRENSIÓN

El concepto de límite, por estar relacionado con el cálculo y la matemática, en algunos estudiantes presenta un grado de complejidad, lo cual hace que la labor docente se vea retada a encontrar diversas estrategias que ayuden a la comprensión del estudiante.

La desarticulación de los elementos básicos para la comprensión del concepto de límite, se convierte en un obstáculo que puede generar tanto para el estudiante como para el docente un problema, en cuanto a que no se relacionan elementos fundamentales, los cuales construyen el concepto de límite desde la constitución de imágenes mentales, imágenes que no permiten identificar diversas características, ya que están separadas, impidiendo caracterizar el límite desde una idea intuitiva. (Blásquez y Ortega. 1998)

En el momento en que los estudiantes se enfrentan al límite, se trabaja a partir del contenido algorítmico que el cálculo ofrece para encontrar una respuesta concreta a lo que se quiera llegar con el límite (Radillo E., D., Ulloa A., & Pantoja R., 2005), dejando a un lado la interpretación y la concepción intuitiva del concepto. Ese trabajo se convierte en un desarrollo continuo de algoritmos, lo cual lleva a que el estudiante se aleje de la idea de acercamiento lateral hacia un punto específico, y asuma todo lo relacionado con límites como una consecuencia mecánica de un simbolismo y un resultado final, el cual podría darle un valor numérico, pero generar dificultades en la construcción de la idea del límite como proceso infinito. Esta metodología algorítmica, muestra una idea de generalización del límite, lo que da pie para que el estudiante vea el límite de manera global y no desde una perspectiva local.

CAPITULO 3: LA ENTREVISTA

Como ya lo mencionamos anteriormente, la entrevista constituye uno de los instrumentos claves para la recolección de la información y el procedimiento más frecuente en investigaciones de corte cualitativo como es nuestro caso. En ese sentido, hemos querido adoptar como instrumento esencial para nuestra investigación la entrevista semiestructurada de carácter Socrático, puesto que este tipo de entrevista constituye un instrumento de recolección de información apropiado en todas aquellas investigaciones que se tracen determinar niveles de razonamiento y comprensión, precisamente, como la que nosotros nos proponemos.

Es así como a lo largo de este capítulo, el lector podrá acercarse y comprender diferentes características acerca de la entrevista de carácter socrático y la manera en cómo se entrelaza con nuestra propuesta investigativa.

3.1 ENTREVISTA DE CARÁCTER SOCRÁTICO

Recordemos que con esta investigación nos proponemos determinar los procesos de comprensión que tienen los estudiantes de la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario en lo referente al concepto intuitivo de límite. Para tal fin la entrevista de carácter socrático es propicia para determinar tales niveles de razonamiento, tal y como lo plantean Jurado & Londoño (2005) en sus investigaciones.

Dicha entrevista se caracteriza "porque, además de detectar el nivel de razonamiento que un estudiante tiene, convierte este proceso en una experiencia de aprendizaje, pues permite que el estudiante progrese a través de ella en el nivel de comprensión" (Ibarra, Sucerquía y Jaramillo. 2012:300). Justamente lo que se logró con los estudiantes quienes ya admiten el limite como local.

Siguiendo los planteamientos de Ibarra, Sucerquía y Jaramillo (2012) la entrevista semiestructurada de carácter socrático se estructura en torno a un guión abierto que posibilita el diálogo libre y permite apoyarse en componentes visuales que constituyen “aportes de información” sobre el concepto. Es bajo esa lógica que el software de geometría dinámica GeoGebra constituyo un mecanismo de recolección de información el cual, al permitir el trazo dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.; permitió hacer efectivo en los entrevistados el carácter local del límite.

En suma, con la implementación de la entrevista semiestructurada de carácter socrática se logró lo expuesto por Rendón y Londoño (2013) en su artículo “La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren”, que los estudiantes transitarán de las “creencias y concepciones iniciales hacia un conocimiento elaborado y profundo mediante sus propias reflexiones” (Rendón y Londoño. 2013: 113)

Es importante resaltar finalmente, el hecho de que este tipo de entrevista ha sido utilizada en varias investigaciones donde los marcos teóricos utilizados proponen la detección de niveles de razonamiento en estudiantes, por ello la vemos pertinente para nuestra investigación ya que nuestro marco teórico y conceptual supone una comprensión por niveles en la lógica planteada por Pirie y Kieren. Además lo que hace diferente la entrevista semiestructurada de carácter socrático a una entrevista semiestructurada cualquiera es que permite no solo detectar los niveles de razonamiento de un estudiante con base a un marco teórico, sino que también que el estudiante progrese en la comprensión del concepto de un determinado estudio. Para lograr esto último fue indispensable diseñar e implementar una entrevista semiestructurada de carácter socrático (ver anexo 1).

Dicha entrevista se desarrolló por bloques de preguntas de nivel creciente ligadas a descriptores basados en la comprensión tomada desde los presupuestos teóricos de Pirie y Kieren, donde a medida que se va desarrollando la entrevista podemos realizar un reconocimiento y comparación de las respuestas obtenidas con los descriptores, para luego ubicar al estudiante en un nivel y a medida que se van obteniendo respuestas, se va recolectando información sobre el estadio de comprensión en el modelo diagramático, en el cual podríamos identificar falencias o todo lo contrario, situarlo en el siguiente nivel.

Para tal fin, se utilizaron unos descriptores que dan cuenta del proceso de comprensión del concepto intuitivo de límite a partir de la teoría de Pirie y Kieren y su modelo de niveles de aprendizaje. Recordemos que sólo se trabajó hasta el nivel de "observación de la propiedad" y que aparecen de modo implícito en la entrevista.

3.2 NIVELES Y DESCRIPTORES

Nivel I: CONOCIMIENTO PRIMITIVO

Este nivel da cuenta sobre los conocimientos básicos o primitivos, necesarios para una adecuada comprensión, sus descriptores son:

1. Comprende el concepto de función desde una expresión gráfica en un plano cartesiano

2. Aproxima valores de x o y en una función, a partir de una representación gráfica

3. Identifica la definición lingüística de la palabra límite

Descriptores de separación:

4. no identifica visualmente las características de la gráfica de una función

5. no diferencia el tipo de función a partir de su gráfica

Nivel II: CREACIÓN DE LA IMAGEN

En este nivel, el estudiante comienza a construir imágenes mentales con respecto a conceptos que conoce, sin ser estas ideas representables en la realidad, sus descriptores son:

1. Reconoce a partir de la representación gráfica, cuando es posible hallar el valor de una función, en un punto o en sus alrededores

2. Identifica gráficamente los tipos de cambios que se presentan en una función alrededor de un punto

3. Infiere valores de una función gráficamente y genera una comparación entre estos valores de la función y su expresión algebraica

Descriptores de separación:

4. No identifica los tipos de cambios que se presentan en los valores de funciones por tramos, racionales y asintóticas

Nivel III: COMPRENSIÓN DE LA IMAGEN

En este nivel, el estudiante relaciona las imágenes con una concepción común a partir de la relación con otras imágenes o conceptos, sus descriptores son:

1. Compara los tipos de cambios (pequeños o grandes) en los ejes coordenados alrededor de un punto, a partir de la gráfica de una función o su tabla de valores

2. Relaciona e interpreta las condiciones gráficas y algebraicas necesarias para representar la existencia de una función evaluada en un punto

Descriptores de separación

3. Comprende qué son cambios infinitesimalmente grandes y pequeños alrededor de un valor en una función.

Nivel IV: OBSERVACIÓN DE LA PROPIEDAD

En este nivel el estudiante estará en capacidad de utilizar elementos extraídos de las propiedades que el estudiante encuentra a partir de las relaciones mentales y conceptuales que el estudiante realiza con el concepto, para así tratar de formalizar un concepto, sus descriptores son:

1. Reconoce el valor de un límite, a partir de cambios infinitesimalmente pequeños
2. Comprende el límite como un proceso infinito de control de errores

3.3 DISCURRIR DE LA ENTREVISTA

Para que la entrevista se convierta en una conversación amena y fluida, esta se trabajará desde tres bloques que ayudan a clasificar y a caracterizar como primero las preguntas y respuestas desde el punto de vista del paradigma cualitativo, y como segundo, ubicar al entrevistado en un nivel de comprensión, según el marco teórico. Las entrevistas de este tipo son usadas en las investigaciones cualitativa donde Hernández et al.,(2010) traen a Grinnell, Williams y Unrau (2009) con sus sugerencias de las preguntas a realizar en la entrevista.

Primero se tienen preguntas que ayuden al entrevistador a generar un ambiente de concordia con el estudiante y se empiece a reconocer los conocimientos iniciales o conocimientos primitivos que el estudiante debe tener, los cuales son claves para que el concepto de límite se pueda generar. Estas preguntas generan un ambiente inicialmente de retroalimentación y le brinda seguridad al estudiante y le ayuda al entrevistador a ir bosquejando una idea sobre cómo pueden ser los siguientes pasos del estudiante. Estas preguntas aparecen a lo largo de la entrevista, para hacer énfasis en estos conocimientos iniciales que ayudan a encontrar falencias en conceptos y en la comprensión de los mismos.

Se realizan luego un bloque de preguntas donde los estudiantes empiezan a enfrentarse con conceptos que surgen como particularidades y relaciones entre los conocimientos primitivos, los cuales ayudan a formar ideas e imágenes mentales, para así poder ir construyendo el concepto a partir de la interacción con el mecanismo, esto hace que este bloque ayude a la contextualización del estudiante con respecto al concepto de límite. Estas preguntas se encuentran a lo largo de la entrevista, dándole herramientas al entrevistado para que organice ideas y encuentre similitudes entre imágenes, tanto mentales como reales de la expresión del concepto tratado en la entrevista; entre la expresión algebraica y la representación gráfica y entre lo intuitivo y lo gráficamente real.

Luego se aplica un bloque de preguntas que tiene un carácter conclusivo, dándole forma a la recolección de datos y tratando de encontrar resultados, donde se busca evidenciar aspectos de un nivel superior al simple hecho de crear las imágenes mentales, donde el estudiante trata de identificar propiedades y características de los elementos que se ha generado en su mente y empieza a dar cuenta sobre su comprensión y ayuda a ubicar a dicho estudiante en un nivel de comprensión, que a partir del marco teórico, podemos triangular con otras herramientas de recolección de información y concluir la investigación.

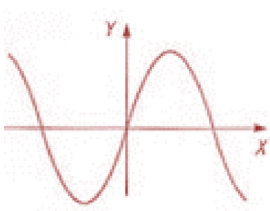
Estas últimas preguntas ayudan también a la investigación, como punto de enlace entre la comprensión del conocimiento inicial sobre límites y sus definiciones y elementos y la comprensión intuitiva, donde ya el estudiante en el momento de la entrevista en donde se realicen este último bloque de preguntas, ya evidenciará un lenguaje acorde al nivel en el que se va posicionando.

3.4 EL GUIÓN ENTREVISTA

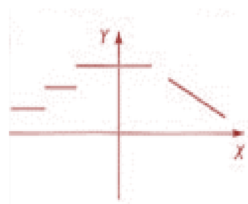
Es claro que aunque la entrevista semiestructurada de carácter Socrático es un diálogo inquisitivo que se hace al entrevistado, es preciso establecer un guión previo con unas intencionalidades específicas que apunten a dar respuesta a la pregunta de investigación, además de ayudar a cumplir el objetivo de investigación. A continuación, se dará a conocer el guión creado intencionadamente y aplicado al momento de la entrevista, en el cual se hacen explícitas no sólo cada una de las preguntas que se le hicieron al entrevistado sino también la intencionalidad que persigue cada pregunta. De igual modo, el lector podrá encontrar unas tablas, las cuales hemos denominado: “Aportes de información”, las cuales contienen información conceptual que consideramos necesaria aportarla a los entrevistados:

1. ¿Cuáles de las siguientes representaciones corresponden a funciones y cuáles a relaciones?

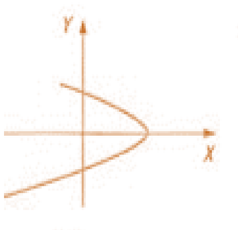
CURVA 1



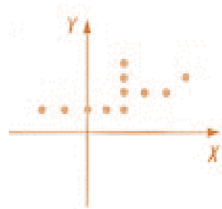
CURVA 2



CURVA 3



CURVA 4

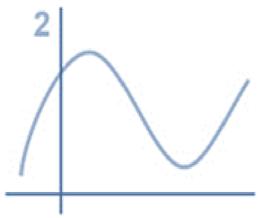


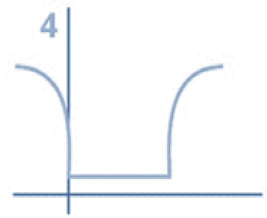
CURVA 5

CURVA 6

CURVA 7

CURVA 8





¿Cuáles son las razones de tu elección en cada caso?

Se busca indagar sobre el conocimiento primitivo que posee el estudiante a partir de la diferenciación entre los conceptos de función y relación a partir de una representación gráfica

2. En general, ¿qué características debe tener una relación para ser función?

Se busca indagar sobre el concepto de función y relación

3. Dada una función, ¿cómo determinas los valores de x que ella puede tomar?

Se busca que el estudiante evidencie el concepto de dominio de una función, de manera implícita. Concepto que hace parte del conocimiento primitivo

4. ¿Qué entiendes por dominio y por rango de una función?

APORTE DE INFORMACIÓN 1

Una relación es una correspondencia entre dos conjuntos de números, uno inicial o de partida y otro final o de llegada, dicha correspondencia se define por una regla de asociación que generalmente es una expresión algebraica. Al conjunto de partida, se le llama dominio y al conjunto de llegada, se le llama rango. Una función es una relación especial en la que, a cada elemento del dominio, le corresponde sólo un elemento en el conjunto de llegada.

Se busca que el estudiante evidencie el concepto de dominio de una función, de manera explícita. Concepto que hace parte del conocimiento primitivo.

5. ¿Qué tipo de funciones conoces?

Busca generar un ambiente donde el estudiante recuerde tipos de funciones vistos en sus clases de cálculo o matemática escolar, lo cual permita la representación mental

6. ¿Cómo puedes identificar los tipos de funciones de la pregunta 5 a partir de su representación gráfica?

Busca identificar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones, lo cual es un conocimiento primitivo de la investigación.

APORTE DE INFORMACIÓN 2
Regla de la recta vertical:

Una forma sencilla para identificar si una curva corresponde a una función, consiste en trazar sobre la curva una recta vertical y verificar que esta corte a la curva en uno y sólo un punto.

7. Observa las siguientes tablas de valores, ¿cuáles de ellas corresponden a relaciones y cuáles a funciones?

TABLA 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0.01	0.02	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09	54.60	148.41

TABLA 2

x	0	1	4	9	16	25
y	0	±1	±2	±3	±4	±5

TABLA 3

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

y	1.61	1.80	1.95	2.08	2.20	2.30	2.40	2.48	2.56	2.64	2.71

TABLA 4

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-74.20	-27.28	-10.01	-3.63	-1.18	0	1.18	3.63	10.01	27.28	74.20

TABLA 5

x	20736	14641	10000	6561	4096	2401	1296	625	256	81	16
y	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

TABLA 6

x	5	5.83	6.40	6.78	7	7.07
y	±5	±4	±3	±2	±1	0

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

TABLA 7

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1.31	1.76	2.06	2.29	2.47	2.63	2.77	2.89	2.99	3.09

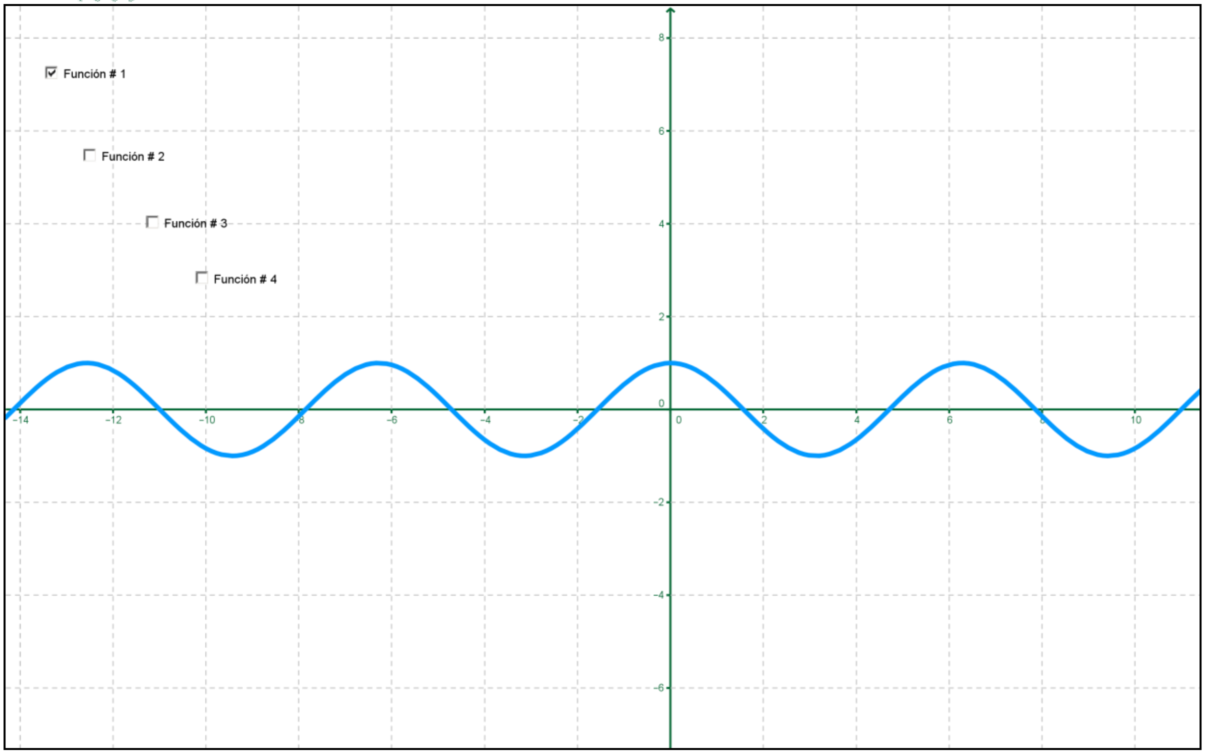
TABLA 8

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	4	2	0	0	-1	1	1	3/2	2	5/2

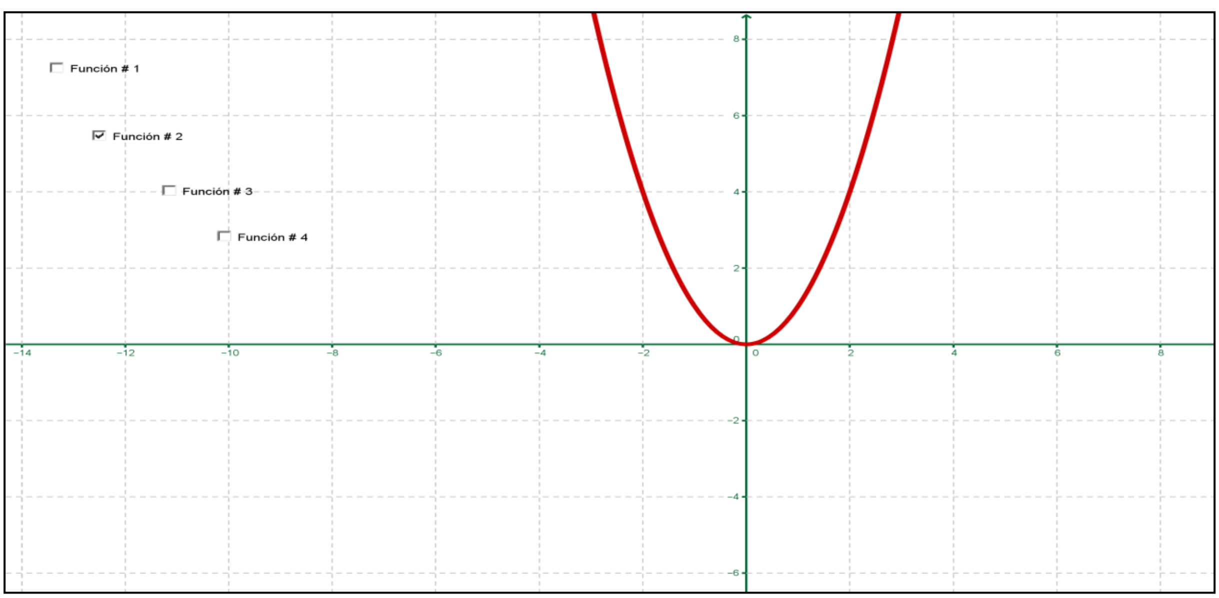
Busca identificar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones, lo cual es un conocimiento primitivo de la investigación.

8. Asígnale un nombre especifico a las siguientes representaciones gráficas de funciones

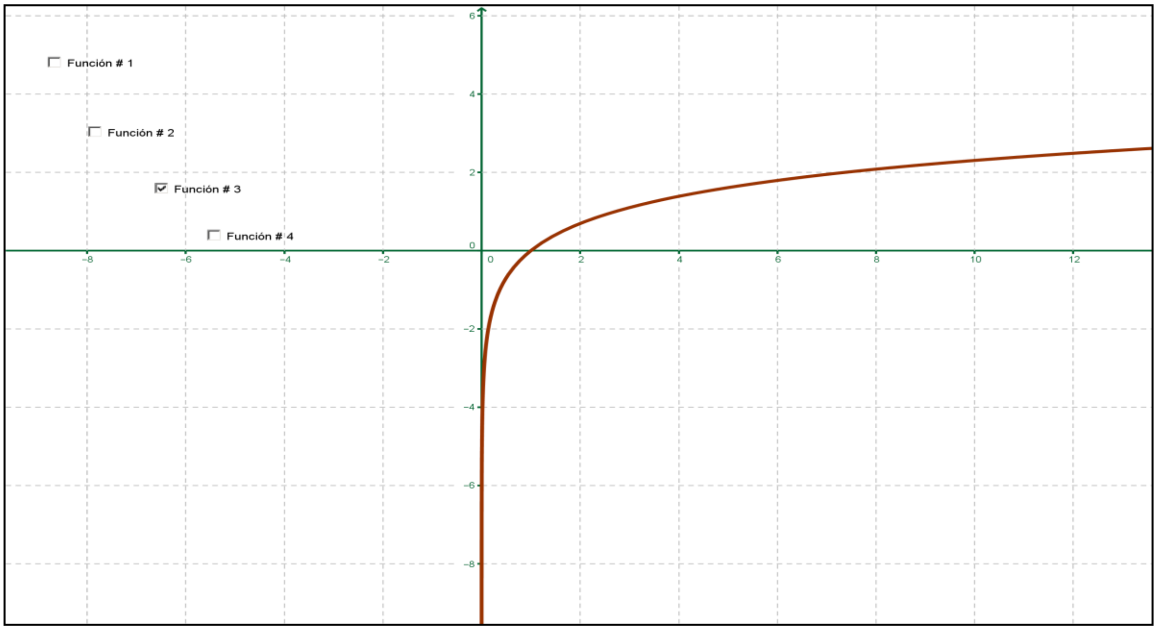
GRAFICA 1


Función # 1
Función # 2
Función # 3
Función # 4

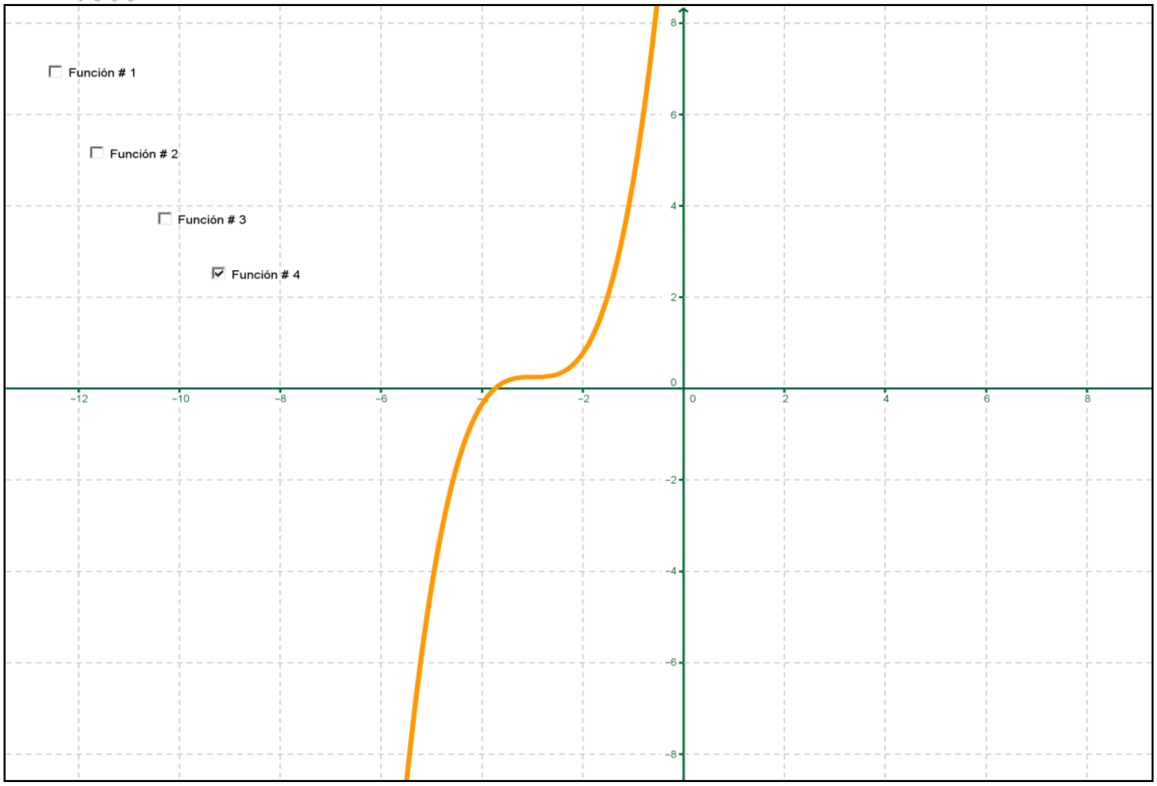
GRAFICA 2


Función # 1
Función # 2
Función # 3
Función # 4

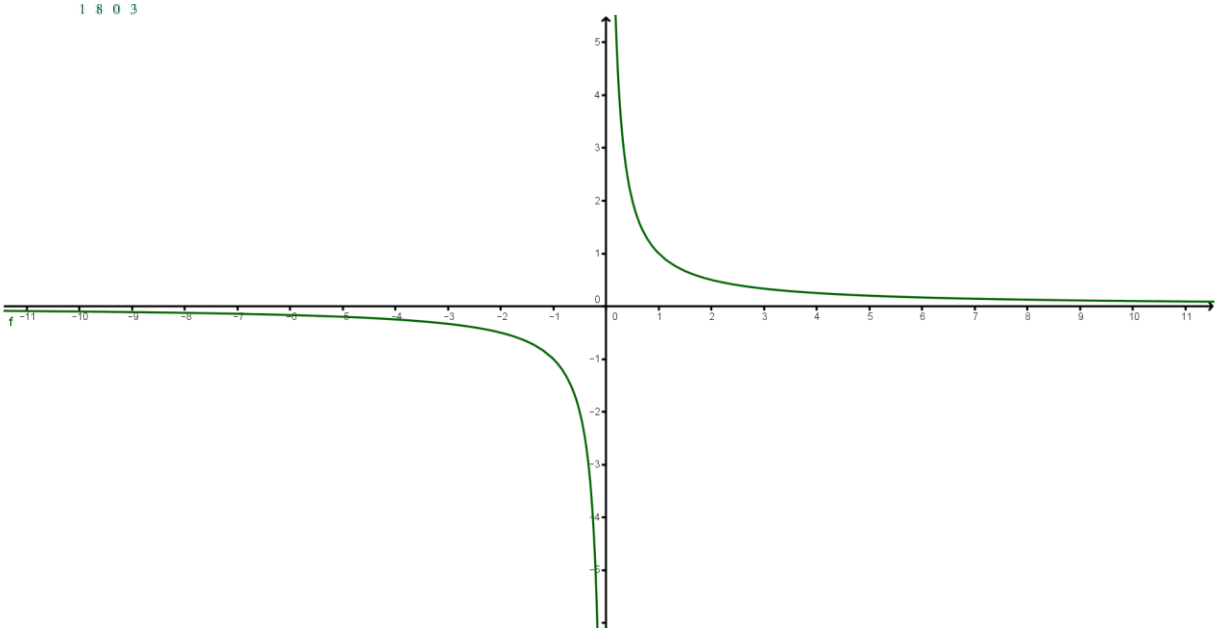
GRAFICA 3



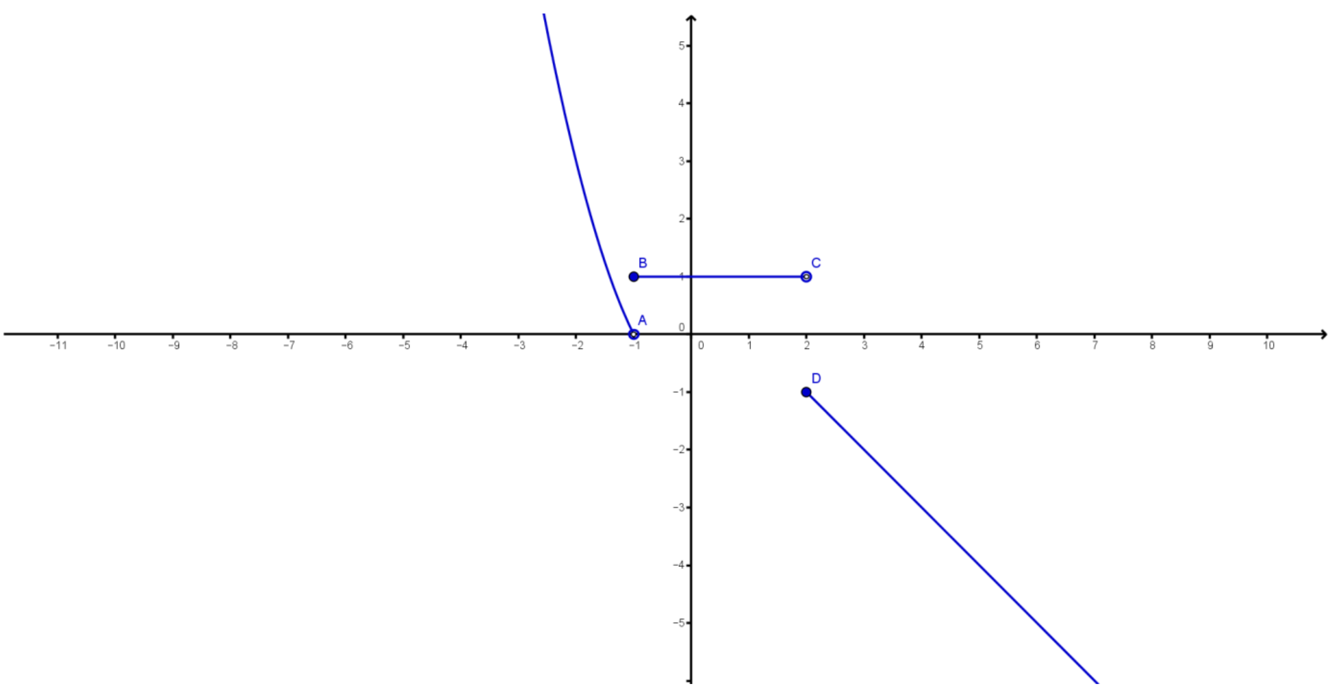
GRAFICA 4



GRAFICA 5



GRAFICA 6



Busca que el estudiante identifique las características de una función desde una representación visual, lo cual es primordial para saber si el estudiante posee el conocimiento primitivo.

9. ¿Qué criterio o característica en particular tuviste en cuenta para asignar el nombre a cada una de las funciones anteriores?

Obtener información acerca de la relación grafica de las funciones, con algunas características teóricas de estas.

10. De acuerdo con las gráficas de la pregunta 8, ¿cuáles son los dominios y los rangos de cada una de ellas?

Se busca que el estudiante evidencie el concepto de dominio de una función, de manera explícita. Concepto que hace parte del conocimiento primitivo.

11. A partir de la gráfica de las funciones en la pregunta 8, relaciona cada una de estas con la expresión algebraica que crees que corresponden a dicha función.

A. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ \ x < -1 \\ 1 & si\ -1 \leq x < 2 \\ 1 - x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

B. $f(x) = x^2$

C. $f(x) = \frac{1}{x}$

D. $f(x) = \ln x$

E. $f(x) = \frac{5(x+2{,}98)^3}{9} + 0{,}25$

F. $f(x) = \cos x$

Buscar identificar la idea que tenga el estudiante sobre los valores de una función representada gráficamente y generar una comparación entre estos valores de la función y su expresión algebraica

12. Teniendo en cuenta las siguientes tablas, ¿qué puedes decir de los valores que va tomando la variable independiente x?

TABLA 1

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-1.99999	-1.9999	-1.999	-1.99	-1.9
y	0.2	0.02	0.002	0.0002	0.00002	0	2.99996	2.99960	2.99600	2.96010	2.61000

TABLA 2

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1

y	5.9	5.99	5.999	5.9999	6	6.0001	6.001	6.01	6.1

TABLA 3

x	10	100	1000	10,000
y	0.461929	0.495124	0.499501	0.49995

TABLA 4

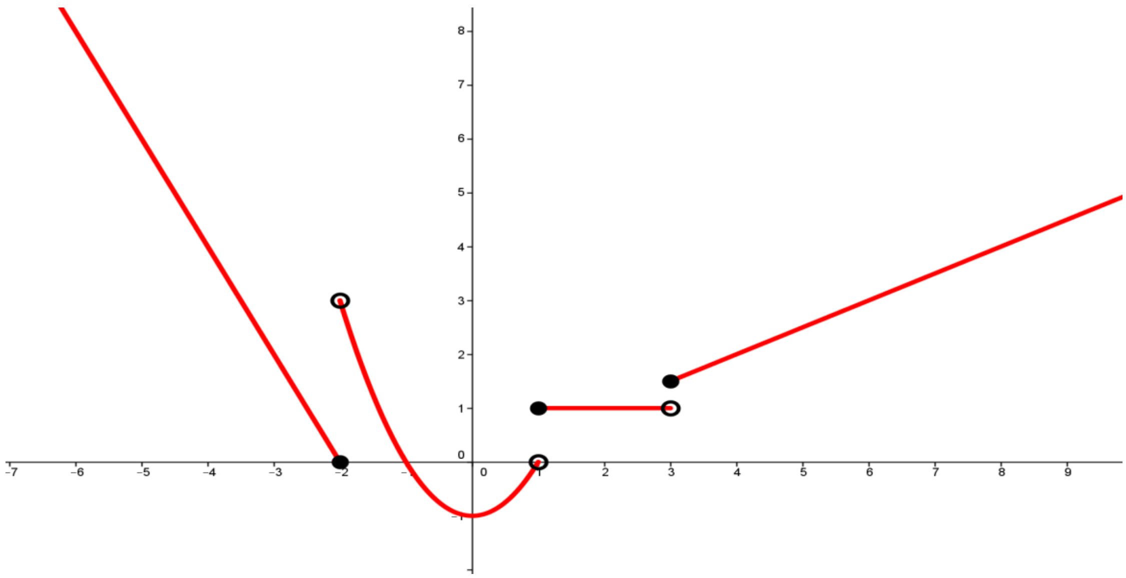
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
y	- 0.1	-0.01	-0.001	- 0.0001	- 0.00001	1	1	1	1	1	1

Se busca evidenciar la relación entre diversos puntos de una función y su representación gráfica, aproximándose a un valor en particular

13. En las tablas de la pregunta anterior, ¿Qué comportamiento asume la variable dependiente y ?

Busca identificar que el estudiante evidencie los cambios que ocurren alrededor de un punto en una función

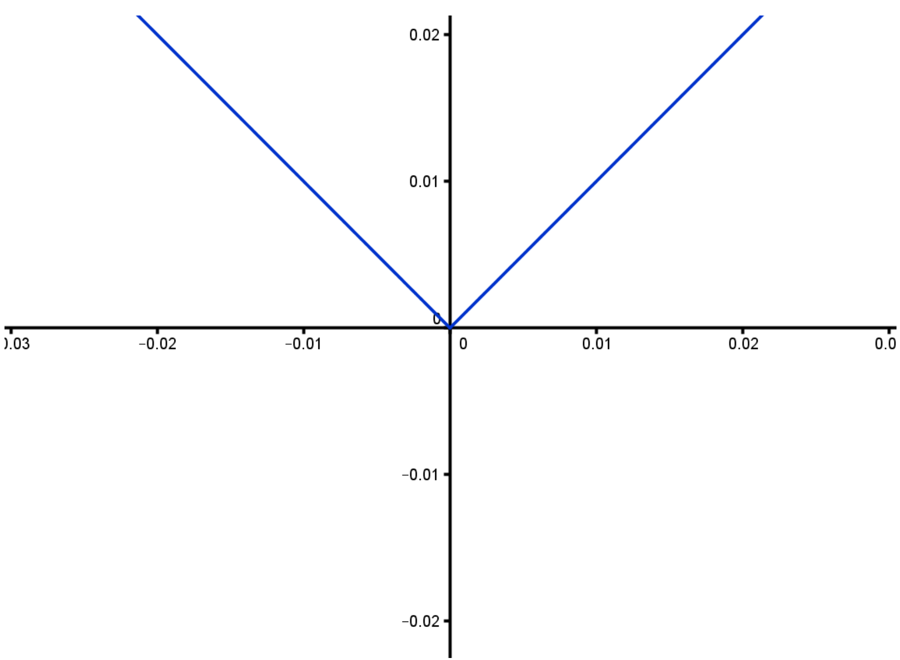
14. Completa la fila que corresponde a la variable y en cada tabla, usando la gráfica para obtenerla.



A.

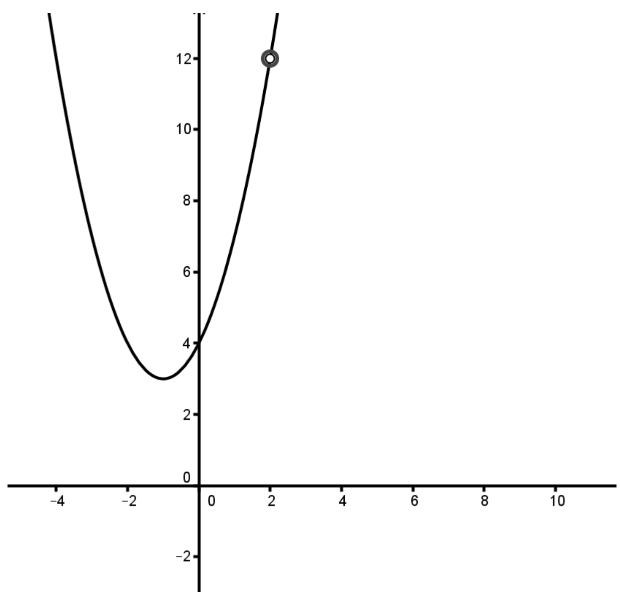
x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
y											

B.



x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01
y									

C.



x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1

y											

¿Qué comportamientos toman los valores de y ?

Aquí pretendemos que el estudiante llenando cada tabla a partir de la gráfica dada, considere la existencia o no del límite, en la medida que se da cuenta del posible valor o los posibles valores que toma la función en los alrededores (por la derecha y por la izquierda) de un valor de x determinado.

15. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, evalúa los valores de y usando una calculadora. ¿qué comportamiento tienen dichos valores a medida que x se acerca cada vez más a la coordenada a señalada?

A. $f\ \ x\ = \frac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad\qquad$ $a = -1$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1	-0.99999	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
y											

B. $f\ \ x\ = \frac{2x^2}{3x^3}$ $\qquad\qquad$ $a = 0$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
y											

C. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\qquad$ $a = -1$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1	-0.99999	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
y											

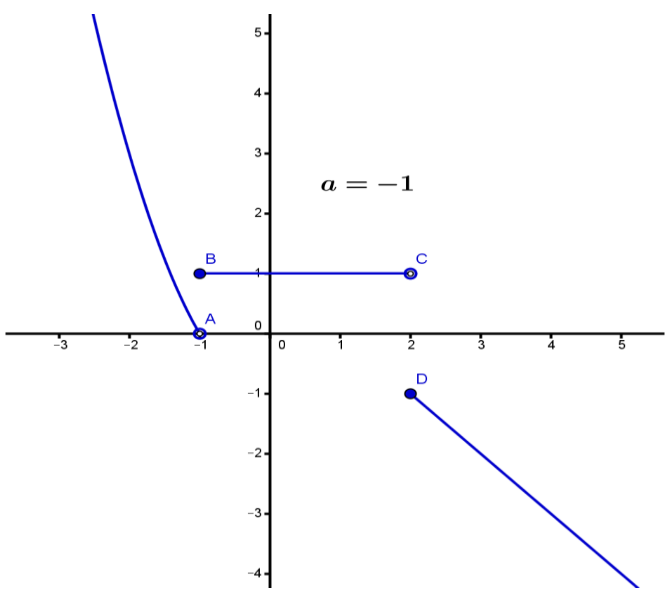
D. $f(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$ $\qquad$ $a = -2$

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-1.99999	-1.9999	-1.999	-1.99	-1.9
y											

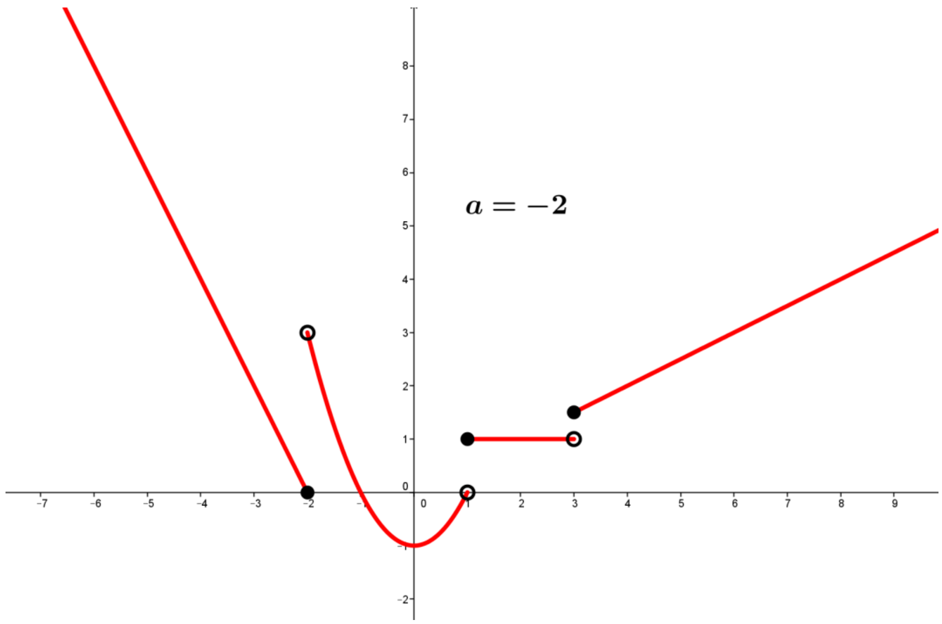
Aquí pretendemos que el estudiante llenando cada tabla a partir de la expresión algebraica dada, considere la existencia o no del límite, en la medida que se da cuenta del posible valor o los posibles valores que toma la función en los alrededores (por la derecha y por la izquierda) de un valor de x determinado.

16. Suponiendo que una función f cualquiera es una camino que debes recorrer, ¿en cuál de las siguientes funciones crees que tendrías problemas al pasar por el punto $x = a$ y por qué?

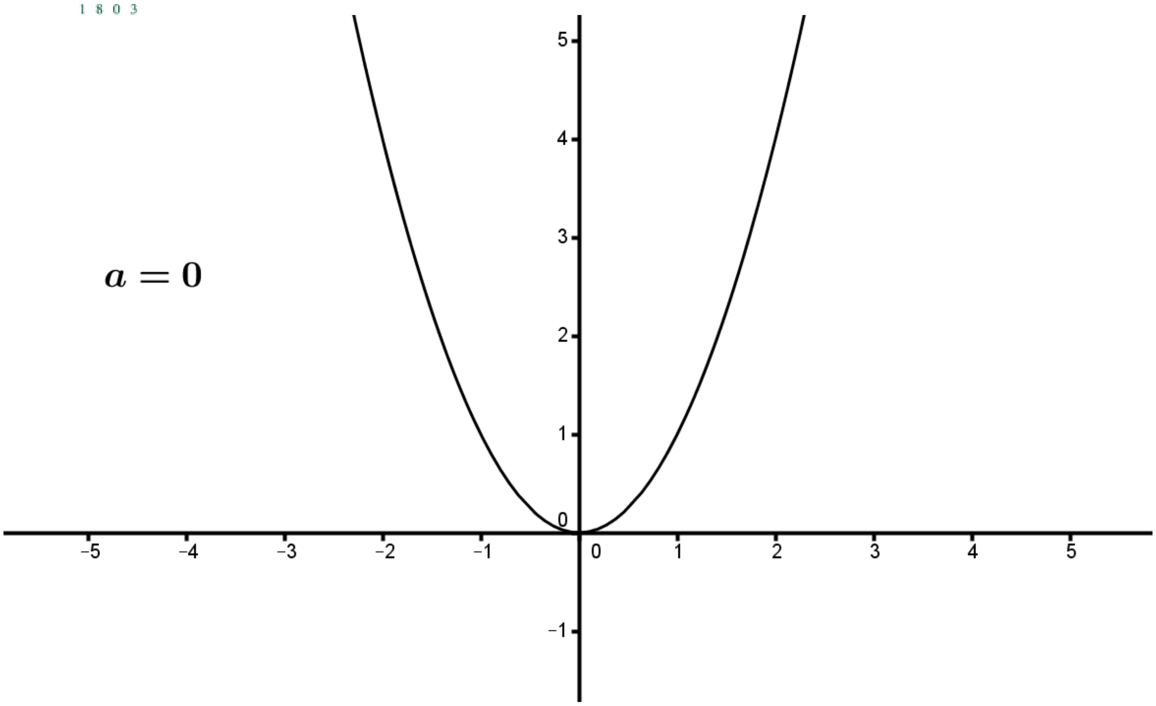
GRAFICA 1



GRAFICA 2



GRAFICA 3



En esta pregunta tratamos de adentrar al estudiante en el concepto de limite por medio de una situación cotidiana como lo es atravesar un camino, ejemplificado en el trazo de una curva y pidiéndole que especifique en cuales de ellas tendría problemas para cruzar por un punto en específico, con el fin de irle mostrando el limite como caso particular y no como un caso general.

En la aplicación de geogebra que se te mostrará a continuación, introduce cada una de las siguientes funciones ($y = x + 4, y = x^2, y = e^x, y = \ln x\,, y = sen\ x$) desplaza el punto a mostrado a lo largo del eje x, y con base en esto responde las preguntas 17 a la 20.

17. Enuncia algunas características de las funciones que ves

Busca generar un ambiente donde el estudiante analice tipos de funciones y sus características.

18. ¿Qué ocurre con la ordenada del punto P, cuando varías $x = a$, lo largo del dominio de las funciones dadas?

Se quiere que el estudiante analice la existencia o no de la función a lo largo de los diferentes valores del eje x y relacione este ejercicio con el concepto de dominio y rango de una función.

19. Si mueves $x = a$ hacia la derecha y hacia la izquierda una cantidad muy pequeña (casi igual a cero), ¿en cuáles de las funciones la ordenada del punto P se acerca a un valor en particular?

Aquí pretendemos que el estudiante moviendo la coordenada $x = a$ cantidades muy pequeñas (casi igual a cero), considere la existencia o no del límite, en la medida que se da cuenta del posible valor o los posibles valores que toma la ordenada del punto P cuando se realiza este movimiento.

20. ¿Qué ocurre con la ordenada del punto P en los casos donde este no se acerca a un valor fijo?

En esta pregunta se quiere que el estudiante identifique la no existencia del límite debido a que los valores que toma P en sus alrededores no tienden a un mismo valor cuando se mueve la coordenada $x = a$ una cantidad muy pequeña.

En la aplicación de geogebra que se te mostrará a continuación, introduce cada una de las siguientes funciones

A. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\quad a = 1$

B. $y = \frac{1}{x}$ $\quad a = 0$

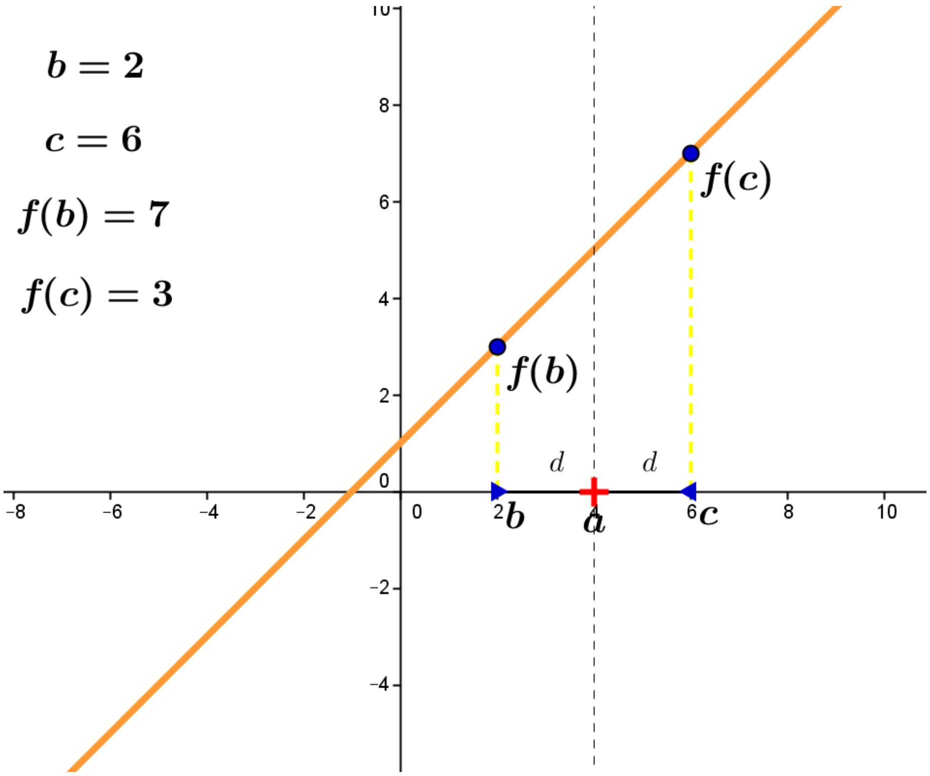
C. $y = \frac{x^3-8}{x-2}$ $\quad a = 2$

D. $y = \frac{sen\, x}{x}$ $\quad a = 0$

E. $sen^2 \quad \frac{1}{x}$ $\quad a = 0$

F. $y = \frac{1-\cos x}{x}$ $\quad a = 0$

Siguiendo las instrucciones dadas, responde las preguntas (21 a la 25), para cada función



21. Sabiendo que d es la distancia entre b y a, y entre a y c. Asígnale valores aleatorios a $x = a$ y disminuye la distancia d, de tal manera que su valor se acerque a cero tanto como sea posible. Observe y describa que sucede con los valores $f(b)$, $f(c)$ y los valores que están en medio de ellos.

Aquí pretendemos que el estudiante moviendo la coordenada $x = a$ aleatoriamente y haciendo que el valor de la distancia d se acerque a cero tanto como sea posible, analice si los valores de $f(b)$ y $f(c)$ y los valores que hay en medio de ellos, existen y si tienden a un valor particular.

22. Realice el procedimiento anterior usando el valor de a que se muestra al frente de cada función. ¿El valor de a pertenece al dominio de la función? Observe y describa lo que sucede con $f(b)$ y $f(c)$ y los valores que están en medio de ellos.

Aquí pretendemos que el estudiante ubicando la coordenada $x = a$ pedida y haciendo que el valor de la distancia d se acerque a cero tanto como sea posible, analice si los valores de $f(b)$ y $f(c)$ y los valores que hay en medio de ellos, existen y si tienden a un valor particular.

23. Realice zoom alrededor de la región de intersección entre la línea punteada perpendicular al eje x que pasa por a, y la función. Realice este proceso hasta que se le indique. Observa y describa lo que ocurre con $f(a)$

Se busca que el estudiante se acerque de una manera infinitesimal hacia el punto en el que posiblemente la función no posee un límite y crea que existe un error en la gráfica.

24. ¿Crees que existe un error en la gráfica?, utiliza argumentos matemáticos que justifiquen tu respuesta

Se busca que el estudiante luego de hacer zoom, realice un discernimiento acerca de su posición actual sobre el comportamiento de la gráfica en este punto, argumentando matemáticamente la existencia o no del error.

25. ¿Por qué crees que esta situación solo se evidencia al hacer zoom sobre la gráfica?

Busca que el estudiante caracterice el límite como un proceso infinitesimal.

26. En los casos en que no existe $f(a)$, esto influirá en el comportamiento de la función en todos los puntos pertenecientes al intervalo que va desde b hasta c.

Se quiere que el estudiante comience a establecer las condiciones necesarias y no necesarias para le existencia del límite de una función en un punto.

27. ¿Qué sucede con los valores de la función en el intervalo que va desde b hasta c, para las funciones (con límite)?

Se quiere que el estudiante establezca características de la existencia del límite en una función.

28. ¿Qué sucede con los valores de la función en el intervalo que va desde b hasta c, para las funciones (sin límite)?

Se quiere que el estudiante establezca características de la inexistencia del límite en una función.

APORTE DE INFORMACIÓN 3
Decimos que una función $f(x)$ tiene un límite alrededor de $x = a$, si los valores de f en el intervalo que va desde b hasta c, varían tan poco que sus diferencias son casi iguales a cero; sin que la función deba existir en $x = a$.

Si una función tiene límite en $x = a$, decimos que su error es controlable.

29. ¿Podrías definir algunas condiciones para que una función tenga límite en un valor $x = a$ cualquiera?

Se quiere que el estudiante mencione las características recopiladas en preguntas anteriores para determinar la existencia del límite.

30. ¿Una misma función puede tener límite alrededor de $x = a$ y no tenerlo alrededor otro valor cualquiera?

Se busca que el estudiante concluya, que el límite es un proceso infinito que se da a nivel local.

31. De acuerdo con el trabajo anterior, ¿será correcto preguntar si una función tiene límite en general?

Se pretende que el estudiante mencione las conclusiones a las que se llegó y que como consecuencia de la pregunta anterior, concluya que el limite no es un concepto que se trabaja de manera general, sino local.

CAPITULO 4: ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA INFORMACIÓN

Este capítulo está enfocado en todo aquello que respecta al paradigma y método de investigación, aportando información al lector sobre el diseño, selección y estudio de los casos que hicieron posible estructurar la presente investigación.

4.1 PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación se basó en el uso de un paradigma cualitativo, ya que este estudia la realidad en su contexto natural tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas; permitiéndonos así, resaltar la importancia de los casos particulares y describir con detenimiento la importancia de una comprensión adecuada de conceptos matemáticos por parte de los y las estudiantes. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales (entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos, imágenes, sonidos, etc.) que describen la rutina, las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas.

Además siguiendo los planteamientos de Hernández, Fernández & Baptista (1991) quienes afirman que: *"Toda cultura o sistema social tiene un modo único para entender situaciones y eventos, permitiendo observar los procesos sin irrumpir, alterar o imponer un punto de vista externo, sino tal como los perciben los actores del sistema social".* Este paradigma nos ayuda a contemplar la diversidad de la comprensión y da pie para generar resultados que poseen particularidades que muestre que tan variada es la adquisición del conocimiento.

Es en ese sentido que las entrevistas y las observaciones fungen como instrumentos e insumos valiosos los cuales ayudan en el proceso de caracterización del nivel de comprensión de cada estudiante y a situarnos en un contexto particular, que genera diversas contemplaciones desde la experiencia educativa con el docente y otras formas de aprendizaje.

4.2 CAMINO METODOLÓGICO

Esta investigación se trabajó mediante un estudio de casos como camino metodológico, donde retomamos lo definido Eisenhardt (1989) para quien este tipo de estudio es una *"Estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares".* Se vuelve entonces importante, a partir de la lógica de investigación trazada, recolectar información de diversos estudiantes los cuales, desde nuestro paradigma cualitativo, aportarán con sus particularidades hacia la identificación de la comprensión que poseen. El estudio de casos se plantea con la finalidad de llegar a generar hipótesis, a partir del establecimiento sólido de relaciones descubiertas, aventurándose a alcanzar niveles explicativos de supuestas relaciones causales que aparecen en un contexto naturalístico completo y dentro de un proceso dado.

De acuerdo con *Patricia A. Hays "Los investigadores del estudio de casos examinan cada caso que esperan destapar nuevos e inusuales interacciones, acontecimientos, explicaciones,* *interpretaciones, y conexiones de la causa-efecto".* Es así como mediante dicho método y de la mano de entrevistas semiestructuradas, de observaciones y del análisis de material escrito producido por los estudiantes como instrumentos de recolección de información, que nos fue posible no sólo estudiar caso a profundidad con sus variables y particularidades, sino también llevar a cabo un análisis minucioso y obtener los resultados que nos permiten cumplir con el objetivo de investigación trazado.

En ese orden de ideas, es preciso añadir que para llevar a cabo el estudio de casos se contó con un grupo de tres estudiantes quienes cumplen con el criterio de estar entre la interface de undécimo grado escolar y primer año universitario que toman cursos regulares de cálculo diferencial en entidades oficiales de la ciudad de Medellín.

4.3 RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Entre las herramientas de recolección de información como se dijo en un principio, se usó la entrevista semiestructurada de carácter socrático, anteriormente mencionada y explicada, lo cual ayudó a ubicar a los estudiantes en un respectivo nivel, identificando los casos a analizar. También se implementó como herramienta escritos realizados por los estudiantes, donde se obtuvo información acerca del manejo algebraico, el entorno gráfico y la interpretación del concepto de límite desde la relación entre lo operativo y lo que el estudiante puede graficar (VER ANEXO). Además, se realizó una observación, donde se pudo vislumbrar elementos del entorno del estudiante, donde pudimos identificar particularidades y actitudes en el estudiante, que permitieron clasificar estas características y por medio de ellas, ubicarlos en un nivel específico, para así poder determinar los casos a analizar; cabe aclarar que esta observación se llevó a cabo en el momento en el que los estudiantes solucionaban el documento escrito.

4.4 DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS CASOS

Al analizar la información obtenida mediante de las entrevistas, las observaciones y los productos escritos se hicieron visibles dos casos entre los tres estudiantes de primer semestre de universidad que se encuentran cursando cálculo diferencial, quienes conformaron la muestra poblacional y ya han tenido un acercamiento con el concepto de límite (análisis que se mostrará más adelante).

Durante dicha etapa se analizaron similitudes y/o características entre las respuestas y comportamientos de los estudiantes que nos permiten ubicarlos en un nivel específico del modelo propuesto en el marco teórico teniendo como marco referencial los descriptores.

Es así como, luego de un análisis exhaustivo y con base en las características similares -en cuanto a comprensión del concepto se trata-, se opta por ubicar a dos de los estudiantes en el nivel número tres del modelo propuesto por Pirie y Kieren; constituyendo así un primer caso de estudio. El otro caso corresponde a un único estudiante quien se ubica en el nivel dos de dicho modelo.

De acuerdo a principios éticos que guían la investigación preferimos ocultar la identidad de los participantes. Razón por la cual hemos decidido catalogar el primero de los casos como: Caso Dylan, y al segundo: Caso Michael. En lo que sigue utilizaremos dichas catalogaciones para desarrollar la parte de análisis de la información.

4.5 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A la hora de analizar los datos proporcionados por las tres fuentes se optó por utilizar una codificación abierta, en tanto dicho mecanismo de análisis concuerda con las características de nuestra investigación –en lo que tiene que ver con el paradigma, el camino metodológico, el tipo de muestra, entre otros- y se acopla con el tipo de entrevista semiestructurada de carácter socrático la cual constituyó una fuente de información valiosa puesto que, siguiendo los planteamientos de Strauss y Corbin (1998), permite formular preguntas directas a los estudiantes, hacer observaciones, obtener documentos y grabar los audios de ellas mismas.

Ahora bien, una vez realizadas las entrevistas se procedió a analizarlas una por una. Dicha estrategia nos permitió identificar algunas categorías que daban cuenta de los conceptos más relevantes mencionados en cada una de las respuestas obtenidas y, a su vez, ubicar a cada estudiante en uno de los niveles del modelo propuesto por Pirie y Kieren con base en los descriptores ya establecidos para cada uno de ellos.

Es de resaltar como, igualmente, las actividades realizadas por los estudiantes constituyeron un insumo que aportó información relevante a la investigación puesto que se analizó, detalladamente, el desarrollo de cada uno de los ejercicios propuestos y las respuestas consignadas cuando indagaba por las preguntas de tipo conceptual. Con dicho producto se logró analizar, por una parte, lo concerniente a los procedimientos algorítmicos y algebraicos que realizaba cada estudiante al momento de graficar una función o resolver un límite; mientras que, por otra parte, se analizó la posible coherencia entre lo que respondía y lo que hacía algebraicamente.

Por último, la observación no participante –la cual tuvo cabida en el momento en que los estudiantes resolvían los ejercicios matemáticos- y aquellas observaciones que lograron obtenerse al momento de aplicar la entrevista (aunque no de manera tan rigurosa); nos suministraron información que, de cierta manera, soportan los hallazgos encontrados durante el desarrollo de esta investigación. Los comportamientos, gestos, preguntas que se hacían entre ellos, liderazgos y dependencias, todas aquellas acciones que asumían los estudiantes al momento de enfrentarse con la prueba escrita, conforman los aspectos claves a analizar[1].

[1] Vale la pena señalar que la prueba escrita y las entrevistas se realizaron en la Universidad de Antioquia en aulas de clase amplias, salubres y limpias. Cada estudiante dispuso de los elementos necesarios para llevar a cabo el ejercicio: hoja de prueba, hojas en cuadricula para procedimientos, calculadora, lápiz, borrador, regla. Cabe además indicar que los estudiantes estuvieron acompañados por los investigadores y que, tanto las entrevista como la prueba escrita, duraron aproximadamente dos horas. Tiempo en el que, igualmente, no hubo interrupciones, ruido ni distractores externos que interfirieran con el proceso.

En lo que sigue daremos a conocer, de manera detallada, el seguimiento hecho a cada caso a partir de las fuentes de información descritas con antelación y el análisis hecho a la luz de nuestros referentes teóricos y conceptuales.

4.5.1 CASO DYLAN

4.5.1.1 OBSERVACIÓN NO PARTICIPANTE

En lo que compete al caso Dylan, es importante precisar que, debido a las claras semejanzas entre dos de los estudiantes y a sus rasgos homogéneos en su manera de pensar y proceder respecto al tema y concepto matemático aquí abordado, se optó por unificar el análisis de ambos en uno sólo

Ambos estudiantes se destacan por su notable agilidad al momento de resolver los ejercicios. Si bien, aunque uno de ellos poseía un mejor manejo de la calculadora e introducía rápidamente los datos para graficar logrando terminar de primero, siempre esperaba los resultados de su compañero para compararlos y recibir el aval por parte de él. Aun así es importante señalar como el segundo estudiante -quién no poseía un manejo avanzado de la calculadora- increpó al primero indagándole si había factorizado o no para empezar a introducir los valores a la calculadora y proceder a graficar.

Cabe aclarar que la anterior situación se evidenció en los ejercicios de tipo algorítmico y algebraico, puesto que en las preguntas que indagaban por una construcción de tipo más conceptual no hubo ningún tipo de comparación en sus respuestas.

En general, cada estudiante resolvió de manera juiciosa el documento aportado sin ningún inconveniente de tipo personal y, aunque uno se mostraba más ágil que el otro, no hubo una diferencia considerable en el tiempo empleado para resolverlo.

4.5.1.2 DOCUMENTACIÓN ESCRITA

Al analizar los datos se percibe una correcta identificación de las funciones, gracias a la cual logran definir la mayoría de los elementos necesarios para plasmar la representación gráfica de estas y, por ende, realizarlas adecuadamente y aportando la información suficiente donde se pueden verificar valores, relacionando lo algebraico de la función con lo descrito en el plano.

De igual modo, se evidencia una relación adecuada entre la idea de límite y los límites laterales como condición fundamental para la existencia del límite, mostrando que si nos acercamos por la derecha o por la izquierda a un valor específico de “x”, la función tiende a un mismo valor, lo cual muestra que existen imágenes mentales del concepto.

Con relación al aspecto algebraico en cuanto al límite, se evidencia una buena construcción y un desarrollo adecuado en ambos estudiantes en tanto que, los procesos operativos -como factorizar y racionalizar- los realizan en función de encontrar el valor del límite, pero no evalúan dicho límite previamente, asumiendo que existe una indeterminación sin mostrarlo; tal y como se muestra en la siguiente imagen:

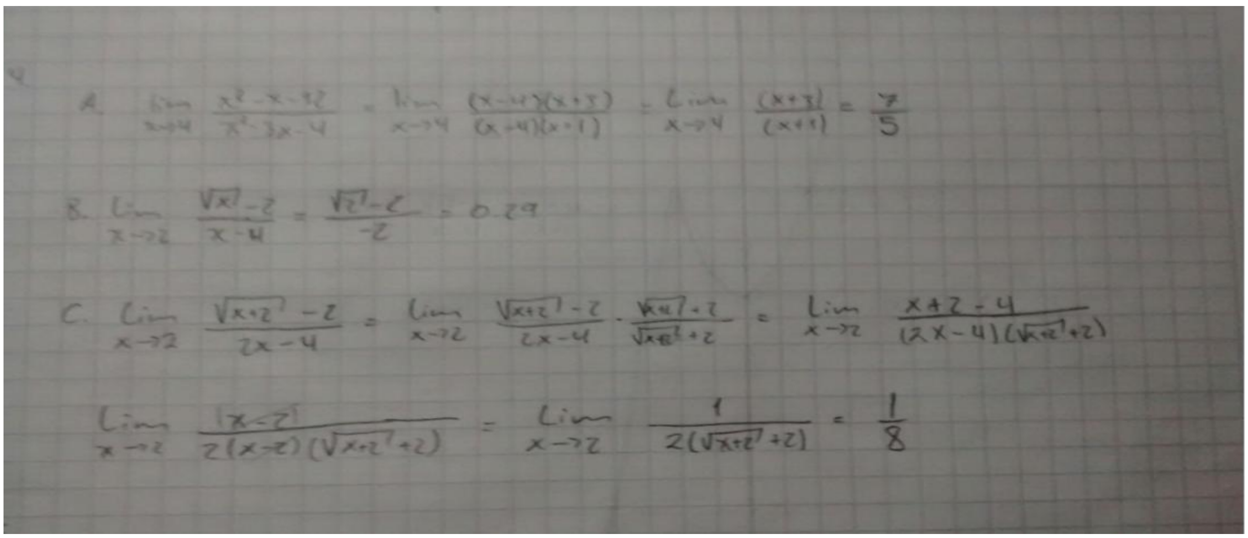


Figura 1. Resolución del punto 4 del documento escrito

Lo anterior pone de manifiesto uno de los obstáculos que conducen a una inadecuada comprensión del concepto ya que, si bien es importante el buen manejo algebraico al momento de resolver y de analizar el límite de una función, se hace necesario realizar una adecuada interpretación de esa parte algebraica para articularla correctamente en una interpretación gráfica y, en ese sentido, robustecer la comprensión intuitiva del concepto.

Es interesante anotar que, en este caso, se logra una separación del aspecto gráfico con el algebraico manejando bien ambos aspectos, a pesar de que ello no les ayude analizar el concepto de una manera más amplia.

Lo dicho con antelación se puede evidenciar en las respuestas dadas a las preguntas de tipo conceptual puesto que, aun sabiendo que las respuestas eran correctas, ellos no evidenciaban lo que escribían allí en el momento de resolver un límite. Ésta situación nos conduce a afirmar que todas las respuestas las hacen más desde lo memorístico sin concientizarse verdaderamente de lo que escriben.

4.5.1.3 ENTREVISTA

Este caso muestra un claro entendimiento del concepto de función, diferencia adecuadamente, ya sea desde una gráfica o desde una tabla, una relación de una función, utiliza términos como imagen y preimagen. Enuncia algunas funciones polinómicas y otras trascendentes, cuando se le pide que mencione características de ellas, le cuesta expresar, pero caracteriza adecuadamente cada función. Determina correctamente el dominio y el rango, y aunque presenta algunas dificultades al momento de verbalizarlo, lo escribe correctamente. Al momento de hacerlo con las funciones trascendentes, tales como y algunas por tramos, presenta algunas dificultades, pero al final establece los dominios y rangos de manera correcta. Relaciona de manera ágil y correcta las funciones polinómicas con sus respectivas expresiones algebraicas. Se muestra dudoso cuando se le enseñan funciones racionales tales como y por tramos, cuando se le muestra primero la gráfica y luego se le pide la expresión algebraica, trata de llegar a la respuesta más desde la memoria que desde el análisis de la función, esto se evidencia en el momento en el momento en que se le pide que identifique una gráfica de una función (Asígnale un nombre especifico a las siguientes representaciones gráficas de funciones) dice lo siguiente: *"es que no se, es tangente, es que no me acuerdo cuando es seno",* luego en la respuesta a la pregunta siguiente (¿Qué criterio o característica en particular tuviste en cuenta para asignar el nombre a cada una de las funciones anteriores?) afirma *" dos ya eso la conozco y uno la deduce por eso de la simetría que tiene respecto a y por la forma, pues eso creo y más que todo porque uno las conoce, por eso las que te dije que no es por qué no me acuerdo bien de ellas, si cuando las he graficado"*. En el transcurrir de la entrevista este caso evidencia mejoría en este aspecto. Estos aspectos identificados en este caso, dan cuenta de una intencionalidad en las preguntas y una relación con el marco teórico mediante los descriptores, lo cual muestra que el estudiante posee los elementos básicos que hacen parte del conocimiento primitivo, esto es característico del primer nivel del modelo de comprensión de Pirie y Kieren. En este caso se visualiza que maneja adecuadamente el concepto de función, dominio, rango y la representación gráfica, esencial para superar este primer nivel.

En general establece de buena manera la existencia o inexistencia de la función en un punto, ya sea a partir de la expresión gráfica o algebraica, pero presenta dificultades al momento de argumentar dicha existencia o inexistencia, si bien lo hace de manera correcta, duda al momento de realizar el análisis. Lo anterior, a pesar de algunas dudas que posee, le permiten establecerse al siguiente nivel, ya que según los descriptores en este punto, el caso, define correctamente la existencia de una función en un punto, desde un entorno gráfico y una relación algebraica, lo cual muestra que este realiza imágenes o concepciones mentales relacionadas con el conocimiento primitivo y elementos conceptuales emergentes, que son necesarios para llegar a la comprensión del concepto de limite, sin ser estas concepciones mentales representables en la realidad.

En cuanto al concepto de límite como tal se puede evidenciar que existe una vaga idea acerca del mismo, pero que gracias a la entrevista que como ya se había dicho, además de aportar información interesante para la investigación, permite al entrevistado mejorar la comprensión acerca de un concepto, se logró mejorar la comprensión de Dylan, esto se evidencia en las respuestas dadas por el estudiante cuando se nota que tuvo un cambio favorable en la concepción del infinito. El lenguaje manejado por parte del estudiante, deja ver claramente su concepción de infinito, de manera inicial cuando se refiere a la cantidad de números que hay entre dos puntos diferentes de la recta, esto se deja ver cuando afirma que *"sí se ve una distancia considerable, sí eso tiene que ver como con el infinito… entonces digamos entre dos y uno, y dos y tres, hay tantos números, eso es infinito…"*. Más adelante también se puede notar cuando en el manejo de las aplicaciones, al expandir (mediante la opción "zoom") la ventana que le muestra la función, el mismo concluye que *"…entonces toca hacerlo varias veces, por eso yo veía ahorita que le hacías un poco de veces."*

Lo anterior le permite a Dylan superar el segundo nivel, según lo establecido en los descriptores, más específicamente en el descriptor de separación.

En este mismo sentido, se le dificulta comprender el concepto como un control de errores, pero a medida que hace uso de la aplicación, identifica algunas características que le ayudan a analizar la posible forma para controlar un error en la gráfica, debido a que en los casos donde la función no existe en el punto, se pregunta por un posible error, sea en la gráfica o en el programa, este utiliza términos como saltos, brincos y demás. Establece, como condición fundamental la existencia y la igualdad de los valores de los limites laterales, además aclara que no es necesaria la existencia de la función en el punto, para establecer si la función tiene límite en dicho punto, esto se evidencia cuando él mismo aclara diciendo *"Si está definida ahí (refiriéndose al punto) pues ya el límite se conoce y si no pues podemos tomar valores muy cercanos a ella tanto por derecha como por izquierda, y el limite ya existe sin necesidad de que este definida ."* Dylan está superando con estas evidencias de comprensión, el segundo nivel, pero no alcanza a superar el tercer nivel, ya que como se entiende de su respuesta, no logra tomar conciencia de lo que dice cuando se refiere a que si la función existe en , el límite es . Lo que nos permite pensar que simplemente relata condiciones de forma memorística y como consecuencia no le permite hacer una adecuada observación de las propiedades presentes en las imágenes mentales recién elaboradas.

4.5.1.4 RESULTADOS

A partir del análisis juicioso y crítico podemos señalar respecto al caso Dylan, que éste cumple con unas características particulares que permiten ubicarlo, según el modelo de Pirie y Kieren, en el tercer nivel de comprensión "*Image having*". Los datos obtenidos en la entrevista aportan información que al contrastarla con los descriptores, dan cuenta de que el estudiante cumple con el mínimo de características de comprensión con respecto al límite, lo que nos lleva a ver que este puede comprender la imagen mental que acaba de construir, indicando a su vez que ha pasado por unos niveles iniciales en donde se puede ver que ha realizado un proceso de aprendizaje y que constituye una relación conceptual entre lo visual geométrico y las concepciones algebraicas, desde unas ideas principales con respecto al límite como lo son: el concepto de infinito y el control de errores.

Estos resultados de la entrevista tienen relación con lo observado debido a que, a pesar de las inseguridades detectadas, se pueden encontrar actitudes al momento de acercarse al límite, con intención de relacionar lo visual con lo algebraico. En el material escrito se pudo vislumbrar, igualmente, una correcta apropiación de los conocimientos primitivos y las elaboraciones mentales para llegar a conclusiones relacionadas con la concepción de límite lateral y su relación alrededor de un punto.

4.5.2 CASO MICHAEL

4.5.2.1 OBSERVACIÓN NO PARTICIPANTE

En el caso Michael se pudo observar que desde el momento en que recibió el documento escrito no realizó muchas interacciones con sus demás compañeros, sus intervenciones se daban a modo de cerciorarse si el trabajo que estaba llevando a cabo y las respuestas que obtenía eran correctas.

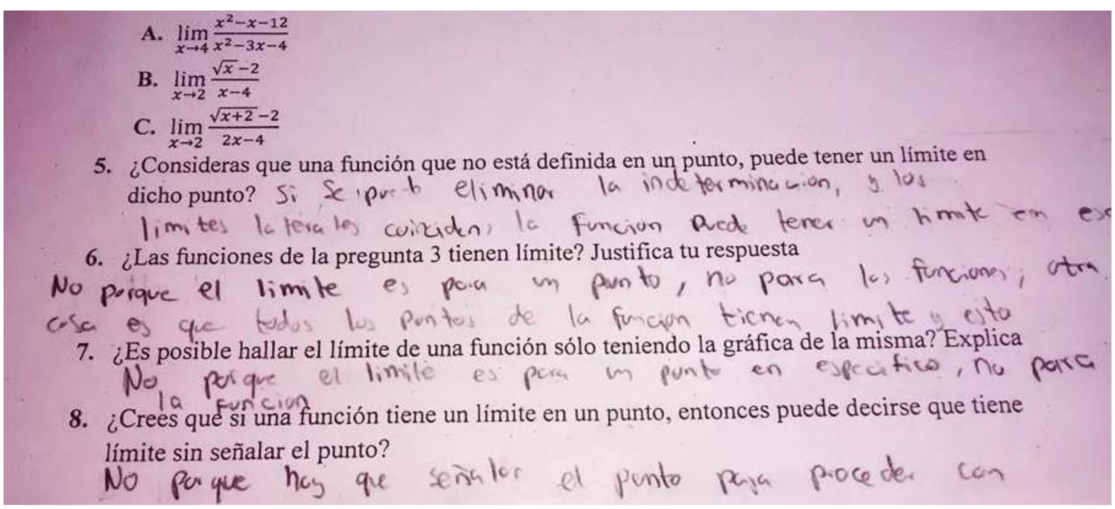
De los ejercicios propuestos pidió ayuda a uno de sus compañeros para solucionar uno de los puntos de Límites admitiendo que no sabía cómo proceder. Fue ante la siguiente respuesta dada por su compañero que pudo culminar el punto: *"Debes racionalizar y fíjate bien en el numerador que de ahí el resultado sale fácil, y después procesa bien el denominador y así te da el resultado".*

En general tuvo un buen desempeño en el desarrollo de la actividad y se mostró un poco más seguro que los demás, a pesar de que fue en el que se evidenciaron más fallas conceptuales en lo que respecta a las preguntas de tipo teórico. Si bien Michael fue el último en finalizar el taller, su tiempo no distó mucho del de los demás.

4.5.2.2 DOCUMENTACIÓN ESCRITA

A partir del insumo gráfico obtenido, es factible evidenciar como el estudiante no numera los ejes y que dibuja líneas punteadas como si fueran asíntotas. Sin embargo, la gráfica de la función como tal, la dibuja de manera correcta permitiendo entrever un buen manejo algebraico al momento de resolver los límites, en tanto lo evalúa antes de realizar procedimientos como factorización o racionalización, por ejemplo.

Aun así cabe precisar como en un ejercicio, en el cual el límite se solucionaba de manera inmediata sin necesidad de realizar estos procedimientos, por equivocaciones aritméticas trata de racionalizar y lo hace de manera incorrecta, conduciéndolo a una solución errónea. Esto en cuanto la parte algebraica y procedimental, si evaluamos el manejo del concepto como tal y hacemos referencia a las preguntas que indagan por el concepto, este caso presenta algunas contradicciones en sus respuestas en tanto que, de manera memorística, reza que para analizar el límite de una función se necesita un valor o punto específico para hacerlo y, cuando en el punto 6 se le indaga si las funciones de la pregunta 3 tienen límite responde: *"no porque el límite es para un punto, no para las funciones, otra cosa es que todos los puntos de la función tienen límite y está".*



A. $\lim_{x\to4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$

B. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

C. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}$

5. ¿Consideras que una función que no está definida en un punto, puede tener un límite en dicho punto? Si se puede eliminar la indeterminación, y los límites laterales coinciden, la función puede tener un límite en ese

6. ¿Las funciones de la pregunta 3 tienen límite? Justifica tu respuesta
No porque el limite es para un punto, no para las funciones, otra cosa es que todos los puntos de la función tienen limite y esto

7. ¿Es posible hallar el límite de una función sólo teniendo la gráfica de la misma? Explica
No porque el limite es para un punto en especifico, no para la funcion

8. ¿Crees que si una función tiene un límite en un punto, entonces puede decirse que tiene límite sin señalar el punto?
No porque hay que señalar el punto para proceder con

Figura 2. Respuestas aportadas por Michael en el documento escrito.

Si analizamos la anterior situación, la respuesta dada por el estudiante presenta una confusión. En primer lugar, porque dice que el limite se analiza para un punto y no para una función, lo que da cuenta que todavía no articula lo que hace algebraicamente con el significado del concepto como tal. En segundo lugar se puede decir que, de una u otra manera, el estudiante hace una generalización del concepto cuando dice que todos los puntos de una función tienen límite. En ese sentido, es válido concluir que, aunque el estudiante realiza muy bien los procesos procedimentales y establece definiciones y condiciones del concepto, todavía no lo maneja con propiedad.

4.5.2.3 ENTREVISTA

Durante la entrevista realizada encontramos como hallazgos relevantes en este caso que el estudiante establece de manera adecuada la diferenciación entre relación y función, aunque tarde un poco en hacerlo. En cuanto a los tipos de funciones, identifica las polinómicas pero nomina como especiales a las funciones trascendentes. Por otro lado, cuando se le pide que enuncie características de las funciones le cuesta mencionarlas aunque las caracteriza adecuadamente.

De igual manera, el estudiante determina correctamente el dominio y el rango y, aunque presenta algunas dificultades al momento de verbalizarlo, lo escribe correctamente. Si bien en una ocasión no hizo una correcta distinción sobre el tipo de función, fue posible evidenciar que hace una correcta expresión de su dominio y su rango.

Es de resaltar, igualmente, como éste establece una buena relación entre la representación gráfica y algebraica de una función a pesar de que, cuando se le muestra primero la gráfica y se le pide la expresión algebraica, él trata de llegar a la respuesta haciendo uso de su memoria y no desde el análisis de la función. Lo anterior se ve reflejado en el momento en que afirma: *"es que no se, es tangente, es que no me acuerdo cuando es seno*". Posteriormente, dice lo siguiente*: ""X" dos ya eso la conozco y una la deduce por eso de la simetría que tiene respecto a "Y" y por la forma pues eso creo y más que todo porque uno las conoce, por eso las que te dije que no es por qué no me acuerdo bien de ellas, si cuando las he graficado".*

Ahora bien, a partir de las gráficas y la expresión algebraica el estudiante completa las tablas de manera correcta utilizando las mismas para realizar un buen análisis, logrando así, identificar el comportamiento de cada una de las variables. En el momento en que se le muestran las tablas con todos los datos, él es capaz de clasificar si la correspondencia entre las variables pertenece a una relación o a una función. Esto nos permite corroborar, según el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, que cumple con los descriptores pertenecientes al nivel del conocimiento primitivo debido a que, el concepto de función y la representación gráfica de funciones, hacen viable el hecho de superar este nivel.

Por otra parte, en este caso se hace evidente la capacidad para identificar la existencia o no de la función en un punto. Sin embargo, se hallaron dificultades al momento de argumentar dicha existencia o inexistencia ya que, si bien lo hace de manera correcta, duda al momento de realizar el análisis.

En este punto cabe señalar como, en un principio, el estudiante muestra dificultad para comprender el concepto de límite como un control de errores pero, a medida que hace uso de la aplicación GeoGebra, logra identificar algunas características que le ayudan a analizar la posible forma para controlar un error en la gráfica, debido a que en los casos donde la función no existe en el punto se pregunta por un posible error, sea en la gráfica o en el programa.

Cabe subrayar como el estudiante logra dar cuenta del proceso infinito gracias a la manipulación de la aplicación ya mencionada y lo hace evidente al momento de hacer casi cero las distancias laterales a una coordenada y al expandir (mediante la opción "zoom") la ventana que le muestra la función, específicamente, en el punto señalado. En el momento de analizar las variables "X" y "Y" en las tablas que se le fueron mostrando, él logro identificar correctamente aquellas donde las variables se acercan minuciosamente a un valor.

Finalmente, en este caso encontramos que es capaz de establecer, como única condición, la existencia e igualdad de los límites laterales expresando que ésta es suficiente para la existencia del límite. Lo anterior se hace evidente cuando él mismo expresa que: *"por los dos lados tiendan al límite o al mismo valor "a""* y, cuando se le pregunta si es suficiente con eso, responde con seguridad que sí.

A partir de lo anterior podemos precisar que en este caso, Michael no relaciona ni identifica los cambios presentes en funciones que posean grandes alteraciones en su rango con respecto a los cambios en las abscisas lo cual, en relación con los descriptores, podemos deducir que no supera el segundo nivel de comprensión en tanto que, el descriptor de separación, le impide realizar esta acción con relación a la comprensión del concepto.

4.5.2.4 RESULTADOS

Después de finalizado el trabajo de campo y luego de este proceso de análisis, donde se realizó una triangulación entre información arrojada por las tres fuentes de información (observación, documentación escrita y entrevista semiestructurada), se puede afirmar que el caso Michael muestra algunas evidencias de comprensión que lo ubican en el segundo nivel (Image making) del modelo de la teoría de Pirie y Kieren. Dichas evidencias nos muestran que, comprende de manera adecuada conceptos como el de relación, función, dominio y rango.

Aunque relaciona correctamente expresiones gráficas con expresiones algebraicas, sí y sólo si se le proporciona primero la expresión algebraica porque, de lo contrario, presenta grandes dificultades para hacerlo.

Otro resultado apunta al hecho de que completa las tablas de manera precisa ya sea desde una expresión gráfica o algebraica, pero no hace un uso adecuado de ellas al momento de analizar comportamientos de las variables, ya que aunque define cambios grandes o pequeños entre un valor y otro, las analiza de manera desarticulada y no relaciona los valores y cambios que va tomando la variable dependiente con respecto a la variable independiente, esto especialmente en las funciones racionales y por tramos que tienen la posibilidad de tener asíntotas.

Según lo anterior, Michael no cumple el descriptor de separación del segundo y tercer nivel del modelo propuesto por Pirie y Kieren, es por ello que este caso no alcanza a cumplir las características para clasificar su nivel de comprensión en uno superior.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

5.1 ALCANCE DEL OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Una vez finalizado el proceso de investigación conviene afirmar que se logró cumplir el objetivo de investigación trazado. Esto gracias a la triangulación de las entrevistas, las observaciones y las producciones escritas de los estudiantes que se logró, sin perder de vista el modelo de Pirie y Kieren, obtener resultados susceptibles de ser interpretados, descritos y presentados.

Todo lo anterior nos permitió determinar casos de estudio y ubicarlos en un nivel específico del modelo de comprensión. Dicho posicionamiento se dio desde su interacción con los métodos de recolección de información en el segundo nivel (Image making), mientras que el otro caso -conformado por dos estudiantes- se ubicó en el tercer nivel (Image having).

Bajo esa dirección, fue posible encontrar dificultades en la comprensión y visualizar posibles líneas de acción que fungen como aportes al campo investigativo de la educación matemática a partir de los cuales se puedan generar estrategias educativas que aporten a superar dichos obstáculos.

5.2 RESPUESTA DE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A la luz de la investigación se hace posible afirmar que los estudiantes poseen una concepción de límite de forma acertada con respecto a la definición que aprendieron en su clase de cálculo. Tienen idea sobre la representación gráfica y el acercamiento lateral con respecto a un punto (lo cual ayuda a extraer elementos de comprensión fundamentales, que ayudan a ubicar al estudiante en un nivel respectivo según el marco teórico utilizado) y en algunos casos conciben el proceso limite como un valor alcanzable de carácter local que se puede acercar a dicho valor puntual lateralmente.

También se logró visualizar el límite desde una perspectiva que lo generaliza sin tomar como elemento fundamental el cambio que ocurre entre las abscisas y las ordenadas. Dicha idea es errónea debido a que esto es indispensable para interpretar el límite como un control de errores.

Por otra parte, el límite aparece concebido como un proceso mecánico, algorítmico y desligado del aspecto intuitivo. Sobre esta noción y gracias al modelador gráfico Geogebra, fue posible vincular estos dos aspectos del concepto de límite y ayudar en la relación entre elementos fundamentales de dicho concepto.

5.3 SOBRE LA ENTREVISTA

Luego de un exhaustivo proceso de investigación se pudo corroborar la veracidad de la teoría en cuanto a la entrevista, ya que al igual que como ocurrió en las investigaciones de Campillo & Pérez (1998) y Jurado & Londoño (2005), en este trabajo se pudo evidenciar que la entrevista semiestructurada de carácter socrático es un instrumento efectivo para la recolección de información, a fin de estratificar los niveles de razonamiento matemático en estudiantes; además se perfila como un instrumento valioso en el aula en tanto ayuda a la optimización del proceso de comprensión de conceptos específicos por parte de los y las estudiantes.

5.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Un trabajo enfocado en la perspectiva que nosotros proponemos abona un campo importante en los estudios de corte matemático que abogan por la resignificación de dicho campo de estudio.

A partir del análisis realizado es importante hacer énfasis en que la finalidad de trabajar desde un marco teórico enfocado en la comprensión matemática, no sólo radica en ubicar a un estudiante en un nivel de comprensión sino también reflexionar y profundizar en torno a la asimilación que sobre un contenido tenga un colectivo de educandos. Es en ese sentido que este trabajo sirve como punto de partida para trazar nuevos objetivos y horizontes de investigación.

Cabe mencionar y resaltar que aún en campos de estudio objetivos -como las matemáticas-, trabajar desde un paradigma cualitativo permite realizar una investigación particularizante, donde la muestra no se condicione a un contenido respectivo sino que, por el contrario se pueda identificar características peculiares que convierta a la muestra de estudio en algo mucho más humano y no omita datos interesantes que hagan única a la investigación.

Al ser la observación una herramienta de recolección de información, permite la visualización e identificación de una cadena de sucesos a partir de la cual se identifican particularidades y tendencias en los estudiantes, lo cual da pie para que, a raíz de dichos aspectos, se genere una idea investigativa, se sustente un marco teórico y logren hallazgos relevantes a favor del pensamiento racional y lógico-matemático en estudiantes de cualquier nivel de educación.

Por otro lado, y partiendo del análisis de los casos de estudio, se hacen evidentes comportamientos, acciones, interacciones y motivaciones que de ser enfocados en la dirección correcta, aportan insumos e ideas útiles al momento de generar investigaciones futuras.

Bajo la anterior lógica y a partir del material escrito, se desligan elementos del marco teórico que permiten detectar tendencias en las respuestas de los estudiantes las cuales, partiendo de un análisis juicioso de dicho material, contando con un marco teórico bien sustentado y con la metodología adecuada; conllevará a aportar hallazgos que apunten a evidenciar problemas de comprensión, soluciones a dichos problemas e incluso crear metodologías que impulsen al estudiante a mejorar sus estrategias de solución a problemas.

Un aporte de esta investigación a futuras líneas de investigación tiene que ver con la entrevista de carácter socrático, la cual puede llegar a incidir considerablemente en el aprendizaje en matemáticas. Con el trabajo realizado se pudo detectar que hay diversas líneas investigativas que se pueden seguir partiendo de lo encontrado en la entrevista, donde se pudo identificar que el diálogo inquisitivo permite construir conocimiento basándose en lo que el entrevistado da a conocer y lo que el entrevistador tiene como objetivo.

Un aporte relevante para futuras líneas de investigación pueden dirigirse desde el contexto de aprendizaje intuitivo, la relación memorística o la expresión lingüística de algún concepto matemático y, es a partir de los datos de la entrevista y de una adecuada metodología, que se puede llegar a identificar y generar una investigación que arroje resultados útiles al campo de las matemáticas...

Otras líneas de investigación que se pueden desligar de la presente investigación tiene que ver con el uso del software interactivo GeoGebra. Dicha herramienta le permite al estudiante visualizar lo que en su mente existe y que, difícilmente, se puede plasmar en el ámbito real. Conceptos abstractos relacionados con el análisis matemático, tales como: el límite, la derivada, la continuidad, entre otros; son aplicables en dicho programa permitiendo que la comprensión sea más intuitiva.

En ese sentido, son innumerables las ideas investigativas enfocadas en el uso de GeoGebra que permiten no sólo identificar la comprensión de otros conceptos matemáticos sino también favorecer los aprendizajes de los estudiantes. Todo ello permite construir conocimientos y enfocar investigaciones representativas en cuanto a la forma de comprensión de los estudiantes.

5.5 APORTES A LA EDUCACIÓN

Esta investigación pretende contribuir al campo de la educación en un asunto de vital importancia: la comprensión de conceptos matemáticos, sobretodo en un aspecto en el cual poco se ha profundizado: el concepto intuitivo de límite. Un aspecto en el cual vale la pena afianzar en tanto la apuesta de la enseñanza matemática no radica únicamente en generar algoritmos, sino también darle una clarificación y aplicación en el mundo real.

De forma complementaria se puede añadir que esta investigación aporta al campo de la educación en lo que tiene que ver al uso de las TIC, tecnologías que vienen incursionando fuertemente en el ámbito educativo transformando las prácticas y métodos académicos. Lo anterior debido a las aplicaciones y las modelaciones virtuales que ayudan al estudiante a comprender de una forma más visual lo que, intuitivamente, le genera dificultad en la comprensión.

Es a partir del uso del programa Geogebra y del análisis de la información que resaltamos la utilidad de este tipo de tecnologías al momento de evidenciar la comprensión del estudiante. Cabe agregar finalmente que un aporte a la educación, a partir de los resultados obtenidos en esta investigación, apunta a la transformación del trabajo matemático frente al concepto de limite el cual suele abordarse desde lo algorítmico y mecanicista, dándole al límite un carácter de construcción de símbolos y métodos, de relaciones algebraicas que se dirigen a un valor sin tratar el concepto como una articulación de interpretaciones entre lo algebraico y lo geométrico. Dicha situación no sólo fragmenta el aprendizaje del estudiante sino que también pone en tela de juicio la comprensión misma del docente, quien reflejara dicha ideas al estudiante.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

CAPÍTULO 6. ANEXOS

6.1 DOCUMENTACIÓN ESCRITA

1. ¿Qué es para ti, el límite de una función?

____

____

____

____

2. ¿Qué condiciones debe cumplir una función para tener límite en una coordenada $x = a$?

____

____

____

____

3. Grafica las siguientes funciones en el intervalo $[-5, 5]$
(Usa el papel y materiales que se te facilitarán)

A. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

B. $f(x) = \frac{3x^2+7x-6}{x+3}$

C. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si \;\; x < 2 \\ 4 & si \;\; x = 2 \\ 4 - x^2 & si \; x > 2 \end{cases}$

D. $f(x) = \frac{4x-3}{2x+5}$

4. Halla los siguientes límites de funciones:

A. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$

B. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

C. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}$

5. **¿Consideras** que una función que no está definida en un punto, puede tener un límite en dicho punto?

6. ¿Las funciones de la pregunta 3 tienen límite? Justifica tu respuesta

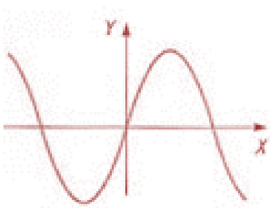
7. ¿Es posible hallar el límite de una función sólo teniendo la gráfica de la misma? Explica

8. ¿Crees que si una función tiene un límite en un punto, entonces puede decirse que tiene límite sin señalar el punto?

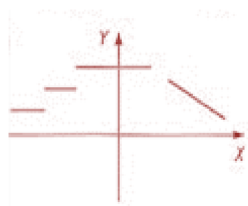
6.2 ENTREVISTA

1. ¿Cuáles de las siguientes representaciones corresponden a funciones y cuáles a relaciones?

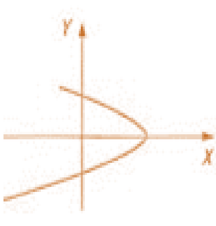
CURVA 1



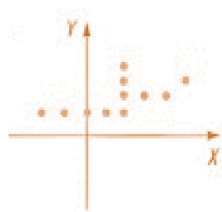
CURVA 2



CURVA 3

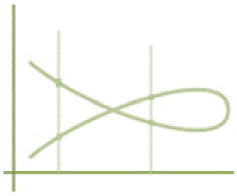


CURVA 4

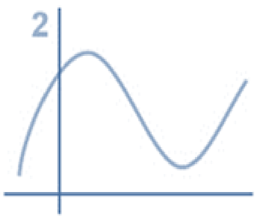


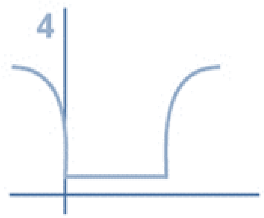
CURVA 5

CURVA 6



CURVA 7 **CURVA 8**





¿Cuáles son las razones de tu elección en cada caso?

2. En general, ¿qué características debe tener una relación para ser función?
3. Dada una función, ¿cómo determinas los valores de x que ella puede tomar?
4. ¿qué entiendes por dominio y por rango de una función?

APORTE DE INFORMACIÓN 1

Una relación es una correspondencia entre dos conjuntos de números, uno inicial o de partida y otro final o de llegada, dicha correspondencia se define por una regla de asociación que generalmente es una expresión algebraica.

Al conjunto de partida, se le llama dominio y al conjunto de llegada, se le llama rango.

Una función es una relación especial en la que, a cada elemento del dominio, le corresponde sólo un elemento en el conjunto de llegada.

5. ¿Qué tipo de funciones conoces?
6. ¿Cómo puedes identificar los tipos de funciones de la pregunta 5 a partir de su representación gráfica?

APORTE DE INFORMACIÓN 2

Regla de la recta vertical:

Una forma sencilla para identificar si una curva corresponde a una función, consiste en trazar sobre la curva una recta vertical y verificar que esta corte a la curva en uno y sólo un punto.

7. Observa las siguientes tablas de valores, ¿cuáles de ellas corresponden a relaciones y cuáles a funciones?

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

TABLA 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0.01	0.02	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09	54.60	148.41

TABLA 2

x	0	1	4	9	16	25
y	0	±1	±2	±3	±4	±5

TABLA 3

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	1.61	1.80	1.95	2.08	2.20	2.30	2.40	2.48	2.56	2.64	2.71

TABLA 4

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-74.20	-27.28	-10.01	-3.63	-1.18	0	1.18	3.63	10.01	27.28	74.20

TABLA 5

x	20736	14641	10000	6561	4096	2401	1296	625	256	81	16
y	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

TABLA 6

x	5	5.83	6.40	6.78	7	7.07
y	±5	±4	±3	±2	±1	0

TABLA 7

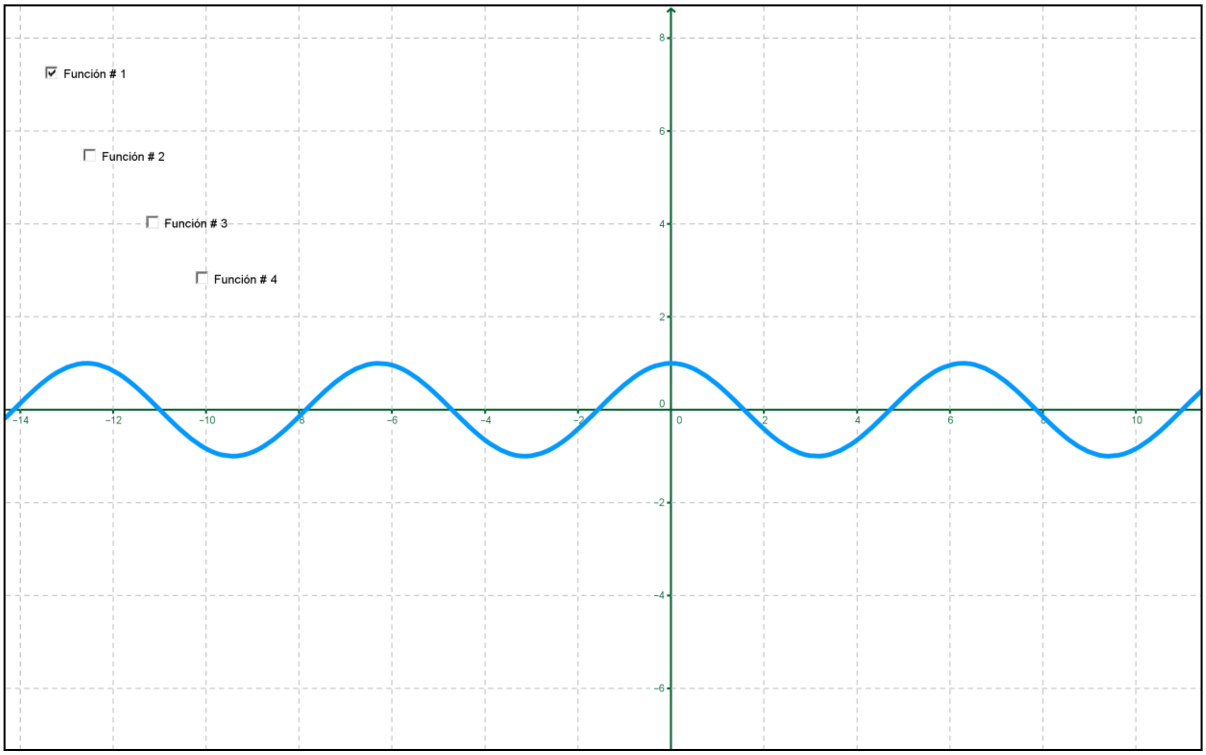
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1.31	1.76	2.06	2.29	2.47	2.63	2.77	2.89	2.99	3.09

TABLA 8

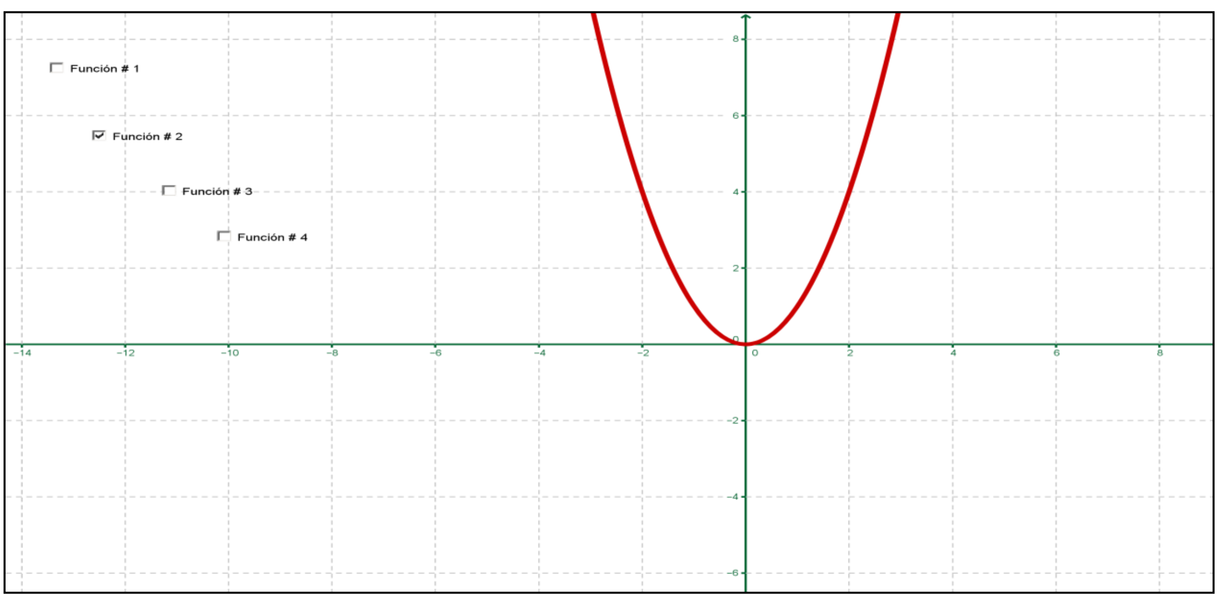
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	4	2	0	0	-1	1	1	3/2	2	5/2

8. Asígnale un nombre especifico a las siguientes representaciones gráficas de funciones

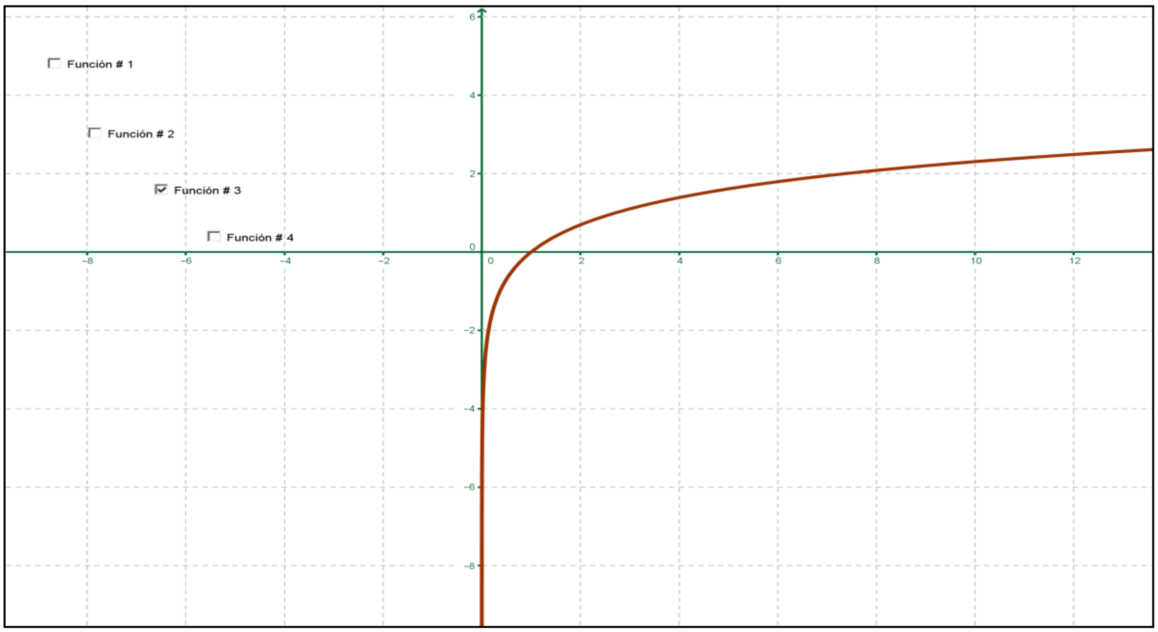
GRAFICA 1



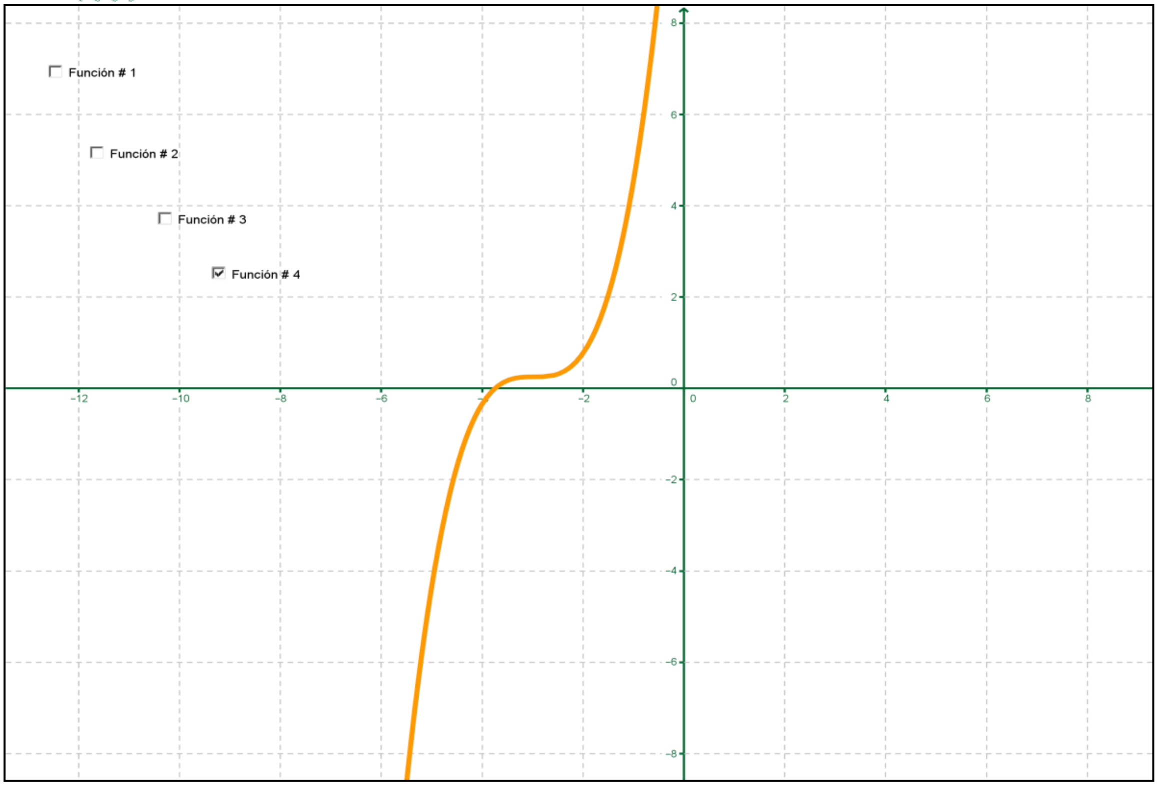
GRAFICA 2



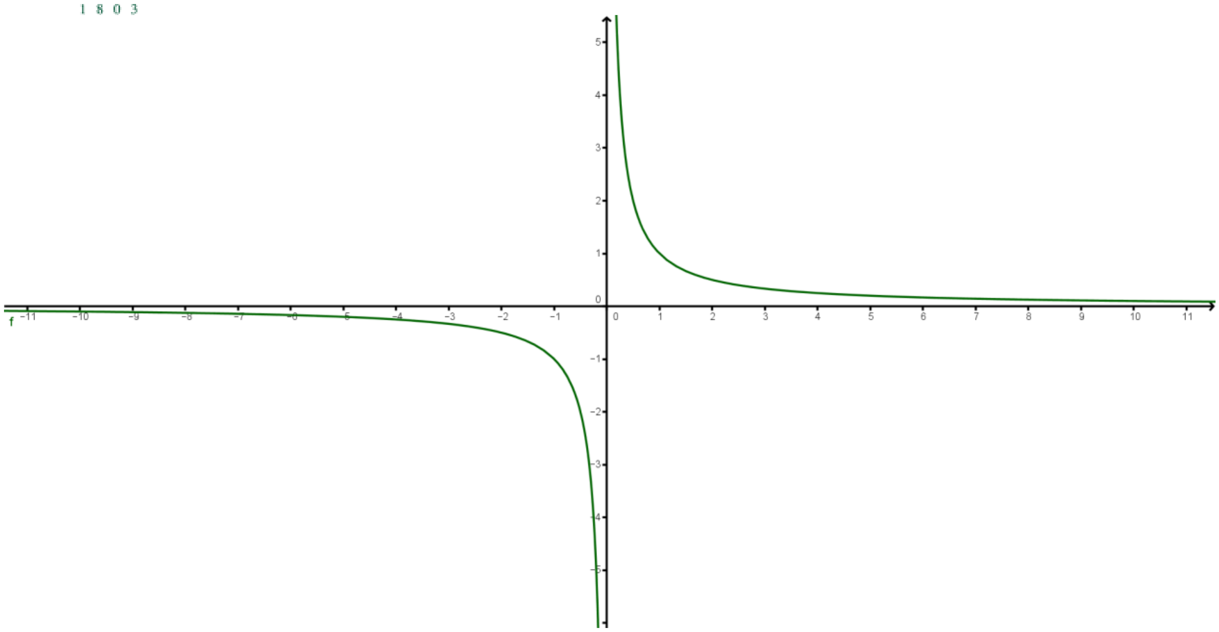
GRAFICA 3



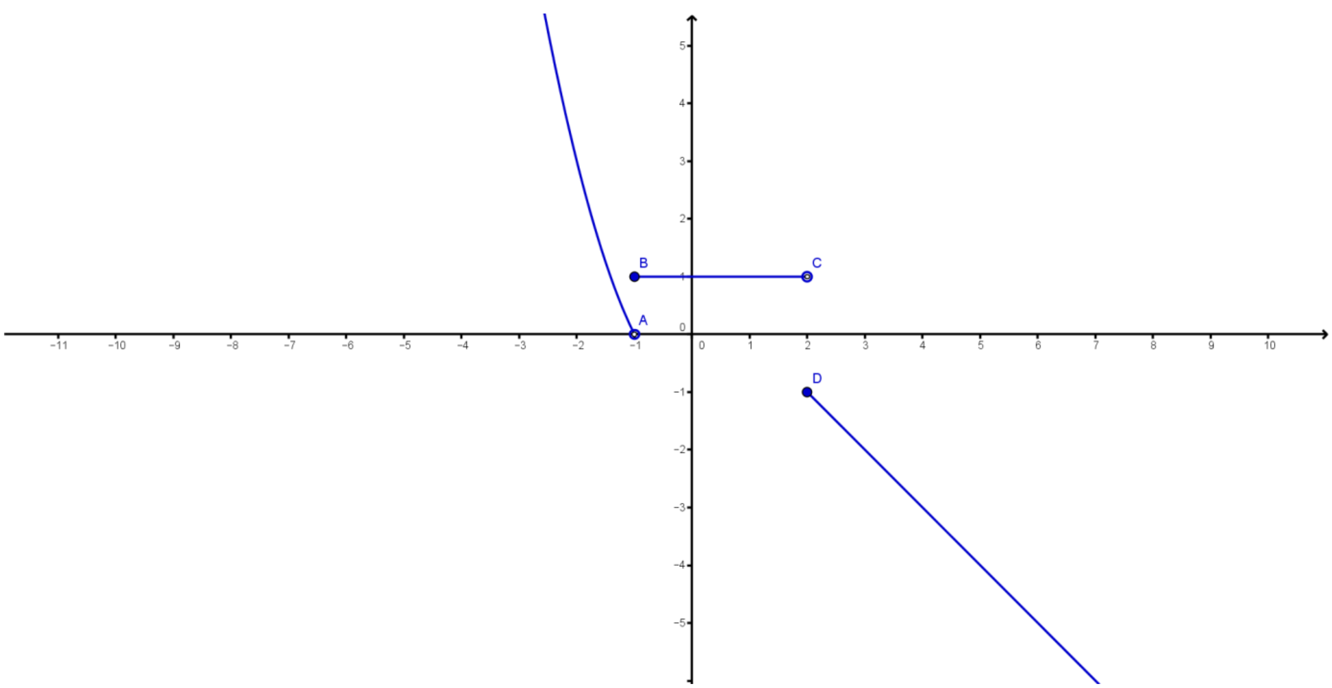
GRAFICA 4



GRAFICA 5



GRAFICA 6



9. ¿qué criterio o característica en particular tuviste en cuenta para asignar el nombre a cada una de las funciones anteriores?

10. De acuerdo con las gráficas de la pregunta 8, ¿cuáles son los dominios y los rangos de cada una de ellas?

11. A partir de la gráfica de las funciones en la pregunta 8, relaciona cada una de estas con la expresión algebraica que crees que corresponden a dicha función.

A. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < -1 \\ 1 & si\ -1 \leq x < 2 \\ 1 - x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

B. $f(x) = x^2$

C. $f(x) = \frac{1}{x}$

D. $f(x) = \ln x$

E. $f(x) = \frac{5(x+2{,}98)^3}{9} + 0{,}25$

F. $f(x) = \cos x$

12. Teniendo en cuenta las siguientes tablas, ¿qué puedes decir de los valores que va tomando la variable independiente x?

TABLA 1

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-1.99999	-1.9999	-1.999	-1.99	-1.9
y	0.2	0.02	0.002	0.0002	0.00002	0	2.99996	2.99960	2.99600	2.96010	2.61000

TABLA 2

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1
y	5.9	5.99	5.999	5.9999	6	6.0001	6.001	6.01	6.1

TABLA 3

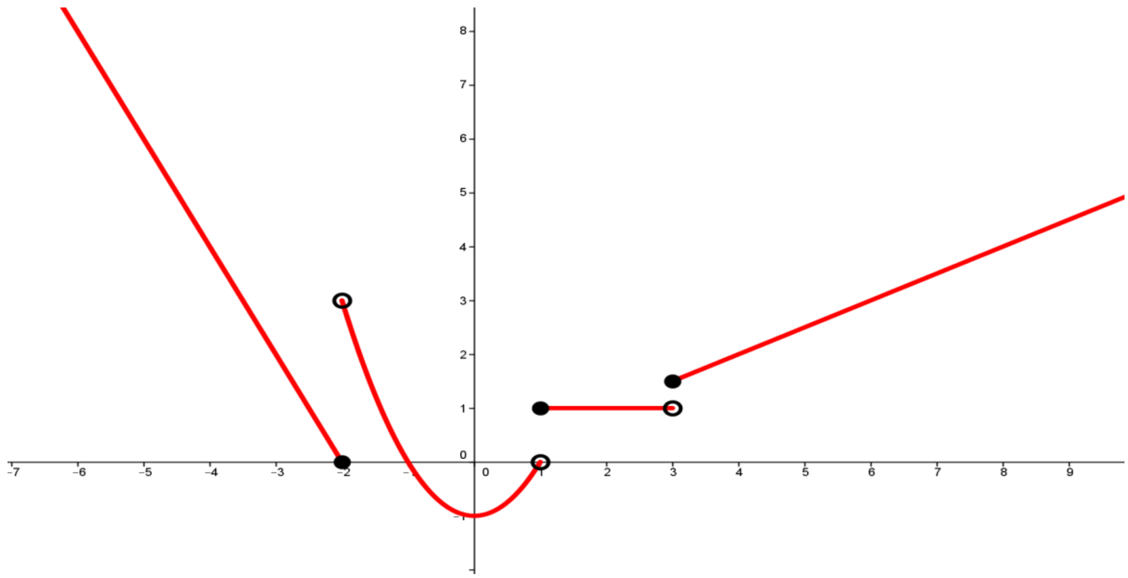
x	10	100	1000	10,000
y	0.461929	0.495124	0.499501	0.49995

TABLA 4

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
y	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	1	1	1	1	1	1

13. En las tablas de la pregunta anterior, ¿Qué comportamiento asume la variable dependiente y ?

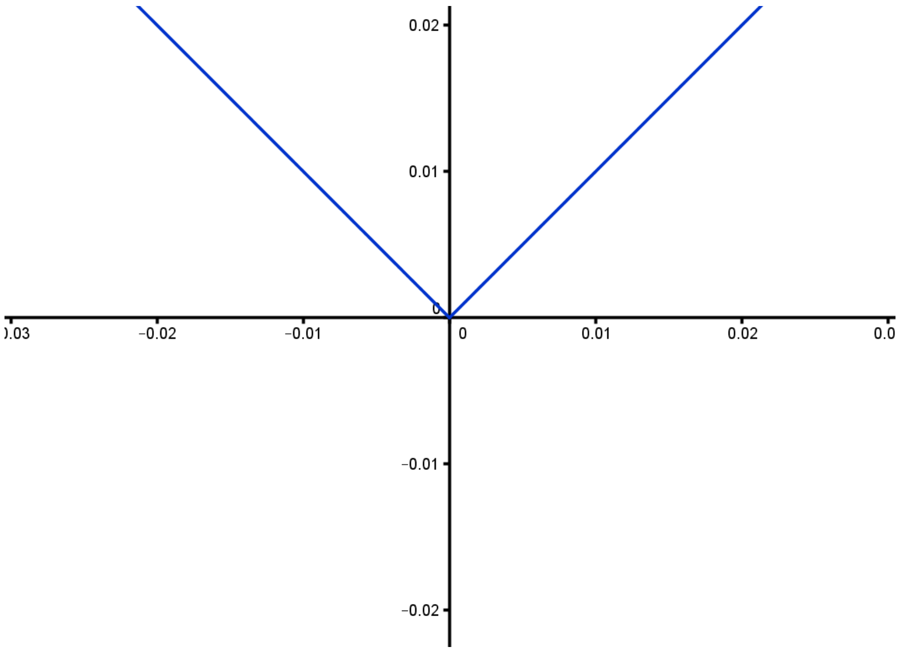
14. Completa la fila que corresponde a la variable y en cada tabla, usando la gráfica para obtenerla.



A.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
y											

B.



x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01
y									

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
y											

¿Qué comportamientos toman los valores de y ?

15. Dadas las siguientes expresiones algebraicas, evalúa los valores de y usando una calculadora. ¿qué comportamiento tienen dichos valores a medida que x se acerca cada vez más a la coordenada a señalada?

A. $f\ x\ = \frac{x^2-1}{x+1}$ $a = -1$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1	-0.99999	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
y											

B. $f\ x\ = \frac{2x^2}{3x^3}$ $a = 0$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
y											

C. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\qquad a = -1$

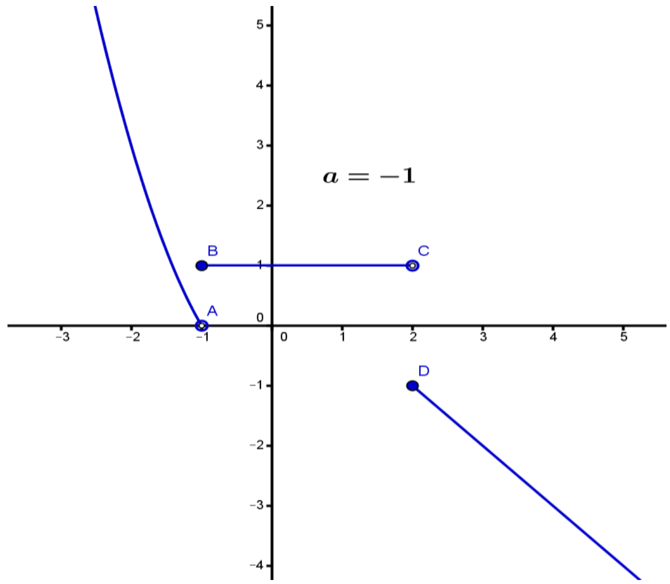
x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1	-0.99999	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
y											

D. $f(x) = \frac{x^3+8}{x+2}$ $\qquad a = -2$

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-1.99999	-1.9999	-1.999	-1.99	-1.9
y											

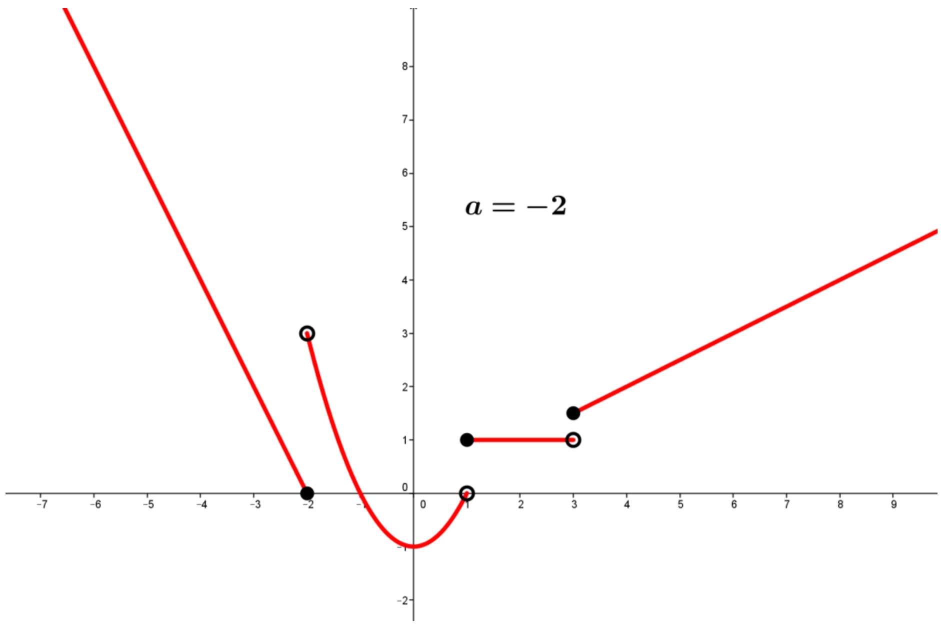
16. Suponiendo que una función f cualquiera es una camino que debes recorrer, ¿en cuál de las siguientes funciones crees que tendrías problemas al pasar por el punto $x = a$ y por qué?

GRAFICA 1

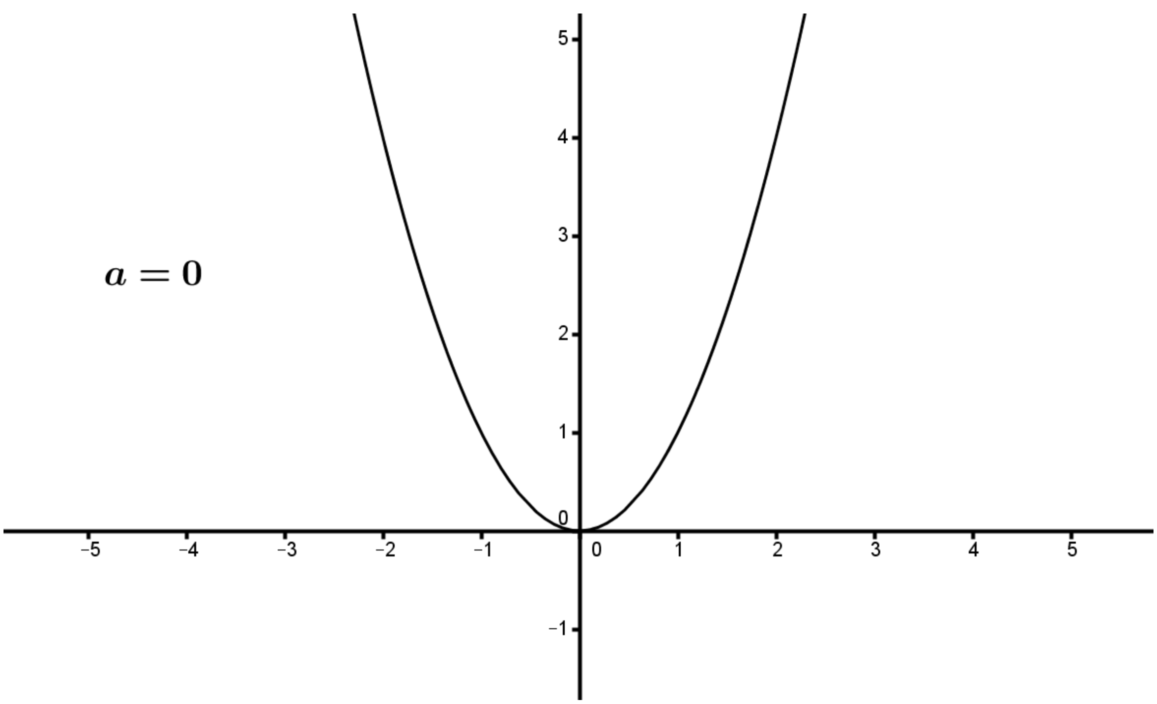


$a = -1$
A
B
C
D

GRAFICA 2



GRAFICA 3



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

En la aplicación de geogebra que se te mostrará a continuación, introduce cada una de las siguientes funciones ($y = x + 4, y = x^2, y = e^x, y = \ln x, y = sen\, x$) desplaza el punto a mostrado a lo largo del eje x, y con base en esto responde las preguntas 17 a la 20.

17. Enuncia algunas características de las funciones que ves
18. ¿Qué ocurre con la ordenada del punto P, cuando varías $x = a$, lo largo del dominio de las funciones dadas?
19. Si mueves $x = a$ hacia la derecha y hacia la izquierda una cantidad muy pequeña (casi igual a cero), ¿en cuáles de las funciones la ordenada del punto P se acerca a un valor en particular?
20. ¿qué ocurre con la ordenada del punto P en los casos donde este no se acerca a un valor fijo?

En la aplicación de geogebra que se te mostrará a continuación, introduce cada una de las siguientes funciones

A. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ — $a = 1$

B. $y = \frac{1}{x}$ — $a = 0$

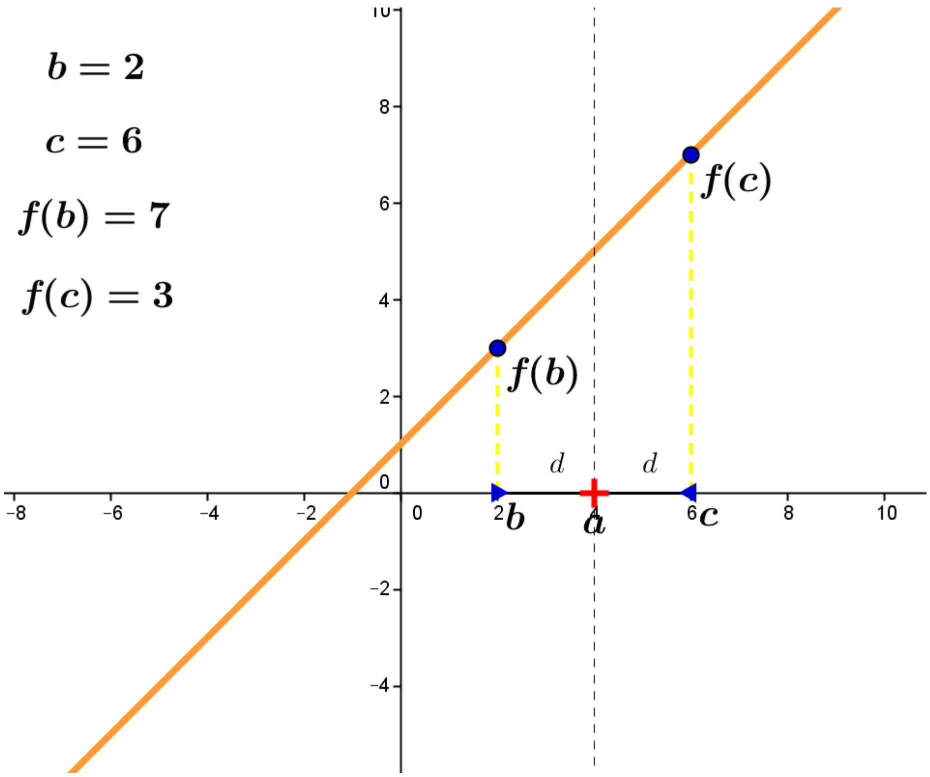
C. $y = \frac{x^3-8}{x-2}$ — $a = 2$

D. $y = \frac{sen\, x}{x}$ — $a = 0$

E. $sen^2 \quad \frac{1}{x}$ — $a = 0$

F. $y = \frac{1-\cos x}{x}$ $a = 0$

Siguiendo las instrucciones dadas, responde las preguntas (21 a la 25), para cada función



21. Sabiendo que d es la distancia entre b y a, y entre a y c. Asígnale valores aleatorios a $x = a$ y disminuye la distancia d, de tal manera que su valor se acerque a cero tanto como sea posible. Observe y describa que sucede con los valores $f(b)$, $f(c)$ y los valores que están en medio de ellos.

22. Realice el procedimiento anterior usando el valor de a que se muestra al frente de cada función. ¿El valor de a pertenece al dominio de la función? Observe y describa lo que sucede con $f(b)$ y $f(c)$ y los valores que están en medio de ellos.

23. Realice zoom alrededor de la región de intersección entre la línea punteada perpendicular al eje x que pasa por a, y la función. Realice este proceso hasta que se le indique. Observa y describa lo que ocurre con $f(a)$

24. ¿Crees que existe un error en la gráfica?, utiliza argumentos matemáticos que justifiquen tu respuesta

25. ¿Por qué crees que esta situación solo se evidencia al hacer zoom sobre la gráfica?

26. En los casos en que no existe $f(a)$, esto influirá en el comportamiento de la función en todos los puntos pertenecientes al intervalo que va desde b hasta c.

27. ¿Qué sucede con los valores de la función en el intervalo que va desde b hasta c, para las funciones (con límite)?

28. ¿Qué sucede con los valores de la función en el intervalo que va desde b hasta c, para las funciones (sin límite)?

APORTE DE INFORMACIÓN 3
Decimos que una función $f(x)$ tiene un límite alrededor de $x = a$, si los valores de f en el intervalo que va desde b hasta c, varían tan poco que sus diferencias son casi iguales a cero; sin que la función deba existir en $x = a$. Si una función tiene límite en $x = a$, decimos que su error es controlable.

29. ¿podrías definir algunas condiciones para que una función tenga límite en un valor $x = a$ cualquiera?

30. ¿una misma función puede tener límite alrededor de x=a y no tenerlo alrededor otro valor cualquiera?

31. De acuerdo con el trabajo anterior, ¿será correcto preguntar si una función tiene límite en general?

6.3 EVIDENCIAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

BIBLIOGRAFÍA

- AGUIRRE, M., & CAMACHO, A. (2001): "*Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar"*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, p.p. 237-265.

- BLÁZQUEZ, S. (1999): *"Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales"*. Actas del III SEIEM, p.p. 167-184.

- BLÁZQUEZ, S, & ORTEGA, T. (2001): "*Los sistemas de representación en la enseñanza del límite"*. España: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, p.p. 219-236.

- BLÁZQUEZ, S., & RINCÓN, T. (1998): *"Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato".* Salamanca: Aula, p.p. 119–135.

- CORICA, A., & OTERO, M. (2009): *"Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación".* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, p.p. 305–331.

- ESPINOZA, L., AZCARATE, C. (2000): "*Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis"*.

España: Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, p.p. 355-368.

- FUNDACIÓN WIKIMEDIA, INC. (s.f.). *Wikipedia*. Recuperado el 2014, de http://www.wikipedia.org

- HERNÁNDEZ, R. FERNÁNDEZ, C. y BAPTISTA, P. (2008): "*Metodología de La investigación"*. México: McGraw Hill.

- IBARRA MUÑOZ, T. C, SUCERQUÍA VEGA, E. Y JARAMILLO LÓPEZ C. M. (2012): "*La comprensión del teorema de Thales y la entrevista de carácter socrático*" En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 296-301). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

- JURADO, F. M. y LONDOÑO, R. A. (2005): "*Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas"*. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

- MARTINEZ, P. (2006): "*El método de estudio de casos: Estrategia metodológica de la investigación científica*". Revista pensamiento y gestión N° 20.

- MEEL, D. E. (2003): *"Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la*

Teoría APOE". En: *RELIME*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 6, N° 3, p.p. 221-278.

- OZONAS, L. Y PÉREZ, A. (2004): *"La entrevista semiestructurada. Notas sobre una práctica metodológica desde una perspectiva de género".* Revista La Aljaba. Vol. IX p.p. 198-203. Universidad Nacional Comahue

- PIRIE, S. y KIEREN, T. (1994): "*Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?"* En: Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, N° 2-3, p.p. 165-190. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

- RENDÓN RAMÍREZ, R. A. Y LONDOÑO CANO, R. A. (2013): *"La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren".* Revista Unipluriversidad Vol. 13 No. 3 p.p. 109-118. Universidad de Antioquia. Colombia

- RODRÍGUEZ, G., GIL FLORES, J. & GARCÍA JIMÉNEZ, E. (1996): *"Investigación cualitativa".* Granada (España). Ediciones Aljibe.

- SÁNCHEZ, M., & CORIAT, M. (2007): "*Fenómenos que organizan el límite". PNA. I,* p.p. 125–137.

- VARGAS JIMÉNEZ, I. (2012): *"Entrevista en la investigación cualitativa: nuevas tendencias y retos".* Revista CAES Vol. 3 No. 1 p.p. 119-139. Universidad Nacional. Costa Rica
- CAMPILLO HERRERO, PEDRO Y PÉREZ CARRERA, PEDRO (1998). *«La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van-Hiele».* En: Divulgaciones Matemáticas, Vol. 6, N.o 1, pp. 69-80. Maracaibo: Universidad de Zulia.
- JURADO, FLOR MARÍA Y LONDOÑO CARO, RENÉ ALEJANDRO (2005). *Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.
- STRAUSS, ANSELM Y CORBIN, JULIET (1998). *"Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada"*. p.p 226
- Ibarra Muñoz, T. C, Sucerquía Vega, E. y Jaramillo López C. M. (2012): "La comprensión del teorema de Thales y la entrevista de carácter socrático" En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 296-301). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Ozonas, L. y Pérez, A. (2004): "*La entrevista semiestructurada. Notas sobre una práctica metodológica desde una perspectiva de género".* Revista La Aljaba. Vol. IX p.p. 198-203. Universidad Nacional Comahue
- Rendón Ramírez, R. A. y Londoño Cano, R. A. (2013): *"La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren".* Revista Unipluriversidad Vol. 13 No. 3 p.p. 109-118. Universidad de Antioquia. Colombia

- Vargas Jiménez, I. (2012): *"Entrevista en la investigación cualitativa: nuevas tendencias y retos".* Revista CAES Vol. 3 No. 1 p.p. 119-139. Universidad Nacional. Costa Rica.