

**EL PAPEL DE LA MODELACIÓN COMPUTACIONAL EN EL APRENDIZAJE
SIGNIFICATIVO CRÍTICO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN
ESTUDIANTES DEL GRADO UNDÉCIMO**

VERÓNICA ANDREA GIRALDO URREA

MARÍA CRISTINA HENAO CAÑAVERAL



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MEDELLÍN

**EL PAPEL DE LA MODELACIÓN COMPUTACIONAL EN EL APRENDIZAJE
SIGNIFICATIVO CRÍTICO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN ESTUDIANTES
DEL GRADO UNDÉCIMO**

VERÓNICA ANDREA GIRALDO URREA

MARÍA CRISTINA HENAO CAÑAVERAL



ASESORA: SONIA LÓPEZ RÍOS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MEDELLÍN

2014

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestros más sinceros agradecimientos a:

Nuestras familias por su acompañamiento, comprensión y preocupación durante nuestro proceso de formación como Licenciadas en Matemáticas y Física.

Nuestra asesora: Sonia López, quien con su apoyo incondicional, aportó con sus conocimientos, paciencia, humildad, comprensión y dedicación para que el desarrollo de esta investigación se diera de manera exitosa, ayudándonos no sólo a nuestro crecimiento personal sino también profesional.

Nuestra docente cooperadora: Diana Lucía Londoño, persona que su experiencia y liderazgo, contribuyó en este proceso y nos brindó los espacios necesarios para llevar a cabo el trabajo de investigación.

Al rector: Hernán Díaz por recibirnos en su institución educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, proporcionándonos los espacios, herramientas y observaciones pertinentes para el buen desarrollo de las actividades propuestas.

A los estudiantes: Grado 11 A promoción 2013, quienes con su buena disposición, aportes y reflexiones, fueron quienes nos motivaron día a día para el fortalecimiento del trabajo de investigación.

RESUMEN

Diferentes temáticas abordadas en la escuela, como el límite, las razones de cambio, varianza, entre otras, fortalecen la comprensión del concepto de derivada, fundamental en aspectos no sólo relacionados con el campo de la matemática, sino de otras áreas como la física, la biología y la química; y que juega un papel importante en situaciones del diario vivir. Es decir, se ha evidenciado su aplicabilidad en procesos biológicos como crecimiento de bacterias, decaimiento radiactivo, problemas de enfriamiento, etc.; además, en la ingeniería, para la construcción de puentes, edificios, carreteras, entre otros; lo que permite identificar la posibilidad de aplicabilidad de dicho concepto.

Es por esto, que el campo variacional se convierte en un tema de suma importancia en la enseñanza escolar, debido a su utilidad en diferentes contextos, donde se refleja su aplicación; sin embargo, el desconocimiento de este concepto dificulta su utilización, ya que el estudiante no logra tener un acercamiento a la noción de derivada; situación que se presenta debido a que ésta normalmente no es abordada en la enseñanza media, pese a estar incluida dentro del plan de estudios del grado undécimo; y en caso de ser enseñada se limita a la aplicación de fórmulas y no a un análisis geométrico o variacional del concepto.

Con base en estas consideraciones, se diseñó una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada a partir del uso de herramientas computacionales, con el fin de que los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, logran un aprendizaje significativo crítico de dicha temática; es decir, un acercamiento al concepto de derivada por medio de actividades de modelación computacional de tipo

exploratorio, que posibilitaran el establecimiento de relaciones entre conceptos previos y nuevos conocimientos, donde los procesos de enseñanza y aprendizaje estuvieran orientados por el intercambio de preguntas por parte tanto del docente como del estudiante.

Se considera de gran importancia la implementación de esta propuesta de enseñanza del concepto de derivada, debido a que se muestra una forma diferente de ver la matemática, no fundamentada en la aplicación de fórmulas como es llevada al aula tradicionalmente, sino brindando a los estudiantes la oportunidad de hacer parte de su proceso de aprendizaje, participando activamente de manera reflexiva y propositiva, en el desarrollo de los conceptos; por medio del uso de herramientas computacionales como el *software Geogebra*, que facilita un proceso de construcción del concepto de derivada a través de la modelación computacional, que le da la oportunidad al educando de indagar, analizar y explorar múltiples instrumentos que posibilitan o facilitan la apropiación del concepto, permitiendo que se dé una reflexión constante sobre lo aprendido, construyendo nuevas hipótesis y planteando posibles respuestas a sus interrogantes, mostrando de esta manera una habilidad y destreza en la apropiación del lenguaje o significados propios de la temática abordada; lo que da cuenta de un aprendizaje no solo significativo sino también crítico.

ÍNDICE

Capítulo 1.	Panorama general sobre el problema de investigación	
	1.1 Introducción.....	11
	1.2 Planteamiento del problema.....	13
	1.3 Objetivos.....	17
Capítulo 2.	Revisión de literatura	
	2.1 Estrategias didácticas en la enseñanza de la derivada.....	19
	2.2 Modelación computacional en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.....	22
	2.3 Teoría del aprendizaje significativo crítico y modelación computacional.....	25
Capítulo 3.	Marco Teórico	
	3.1 Aprendizaje Significativo Crítico.....	28
	3.2 <i>Mindtools</i>	32
	3.3 Modelación Computacional.....	36
	3.4 Impacto de las TIC en la sociedad.....	38
	3.5 Desarrollo conceptual	
	3.5.1 Definición de la derivada.....	40
	3.5.1.1 Definición formal.....	41
	3.5.1.2 Definición de la derivada como una pendiente de la recta tangente a una curva.....	41

	3.5.1.3 Propiedades de la derivada.....	42
	3.5.1.4 Tendencias que marcan la enseñanza de la derivada.....	43
Capítulo 4.	Fundamentación metodológica	
	4.1 Metodología de investigación.....	45
	4.1.1 Instrumentos y técnicas de recolección de Información.....	48
	4.2 Metodología de enseñanza.....	50
	4.3 Herramientas computacionales <i>Geogebra</i>	59
Capítulo 5.	Análisis de resultados	
	5.1. CATEGORÍA 1: Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la derivada haciendo uso de la modelación computacional.....	62
	5.1.1. SUBCATEGORÍA 1.1: Actitudes hacia el aprendizaje del concepto de derivada.....	62
	5.1.2. SUBCATEGORÍA 1.2: Actitudes hacia el uso de la modelación computacional.....	66
	5.2. CATEGORÍA 2: Contribución de la modelación computacional a la formulación de preguntas.....	70
	5.2.1. SUBCATEGORÍA 2.1: Evolución de las preguntas formuladas por los estudiantes.....	70

5.2.2. SUBCATEGORÍA 2.2: Papel de la modelación computacional en el proceso de formulación de preguntas.....	72
5.3. CATEGORÍA 3: Aporte de la modelación a la apropiación del lenguaje matemático.....	73
5.3.1. SUBCATEGORÍA 3.1: Comprensión, interpretación e intercambio de nuevos significados relacionados con el concepto de derivada.....	74
5.3.2. SUBCATEGORÍA 3.2: Elementos que aporta la modelación computacional a la comprensión gráfica del concepto de derivada.....	79
5.4. CATEGORÍA 4: Valoración de la diversidad de materiales educativos y estrategias de enseñanza.....	81
Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones	
6.1 Conclusiones.....	83
6.2 Recomendaciones.....	84
6.2.2. Para el aula de clase.....	85
6.2.2. Para futuras investigaciones.....	86
Referencias bibliográficas.....	95
Anexos.....	95
ANEXO 1: Diagnóstico.....	95
ANEXO 2: Cuento.....	95

ANEXO 3: Videos.....	100
ANEXO 4: Línea del tiempo.....	101
ANEXO 5: Fundamentos teóricos.....	102
ANEXO 6: Actividad con <i>Geogebra</i>	104
ANEXO 7: V de Gowin.....	106
ANEXO 8: Consentimiento informado (institución).....	112
ANEXO 9: Consentimiento informado (estudiantes).....	113
ANEXO 10: Certificados.....	114

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

TABLAS

TABLA 1: <i>Investigaciones consultadas del área de las Ciencias y las Matemáticas</i>	18
TABLA 2: <i>Estrategias didácticas en la enseñanza de la derivada</i>	19
TABLA 3: <i>Modelación computacional en la enseñanza y aprendizaje de la derivada</i>	22
TABLA 4: <i>Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico y modelación computacional</i>	26
TABLA 5: <i>Categorías y subcategorías</i>	51

FIGURAS

FIGURA 1: <i>Esquema para la captación de significados en un episodio de enseñanza</i>	30
FIGURA 2: <i>La V Epistemológica de Gowin simplificada</i>	31
FIGURA 3: <i>Recta tangente</i>	42
FIGURA 4: <i>Blog Lo divertido del cálculo</i>	67
FIGURA 5: <i>Modelación exploratoria en Geogebra</i>	68
FIGURA 6: <i>Modelación computacional con Geogebra (actividad final)</i> ...	71
FIGURA 7: <i>Pregunta 1 Diagnóstico</i>	75
FIGURA 8: <i>Pregunta 5 diagnóstico</i>	75
FIGURA 9: <i>V de Gowin</i>	77

Capítulo 1.

Panorama general sobre el problema de investigación

1.1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo corresponde a una investigación a nivel de pregrado que centra su interés en la enseñanza de la matemática y se encuentra enmarcado en la línea de investigación de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para la enseñanza de las ciencias y la matemática. Con esta investigación se pretende identificar el papel que desempeña la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en estudiantes del grado undécimo. Justamente, nuestro interés estuvo centrado en el empleo de herramientas tecnológicas, que permitieran al estudiante de grado once de la Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, adquirir un aprendizaje significativo crítico en el concepto de derivada; es decir, que logran un acercamiento a dicho tema por medio de actividades de modelación computacional de tipo exploratorio, así como el establecimiento de relaciones entre conceptos previos y nuevos conocimientos, donde los procesos de enseñanza y aprendizaje estuvieran orientados por el intercambio de preguntas por parte tanto del profesor como del estudiante.

La intención de ocuparnos de la enseñanza del concepto de derivada surge a partir de una problemática presente en este proceso y que de igual forma dificulta el aprendizaje de la matemática, debido al predominio del trabajo algorítmico para dicha área del conocimiento; además, que el estudiante difícilmente logra tener un acercamiento al concepto de derivada; situación que se presenta debido a que éste normalmente no es abordado en la enseñanza media, a pesar de estar incluido dentro del plan de estudios del grado undécimo. Y en caso de ser

enseñado, normalmente según experiencias docentes, se limita a la aplicación de fórmulas y no a un análisis geométrico o variacional del concepto. Es así como los alumnos no perciben la importancia de dicho contenido y mucho menos su aplicación en situaciones del diario vivir.

En función a dicha problemática, en esta investigación se considera necesario la construcción y posterior implementación de una propuesta de enseñanza del concepto de derivada, para la que se realizan aplicaciones del concepto por medio de recursos computacionales como *Geogebra*, de modo que proporcionara condiciones favorables para el aprendizaje significativo de este contenido.

Con aprendizaje significativo nos referimos a la teoría constructivista de Ausubel, que tiene como elemento central la interacción del nuevo conocimiento con el conocimiento previo. En este trabajo nos remitimos fundamentalmente a las propuestas realizadas por Postman & Weingartner (1969) y Moreira (2005), a partir de las cuales se formula la Teoría de Aprendizaje Significativo Crítico, con el propósito de que el aprendizaje sea no sólo significativo, sino subversivo o crítico, en coherencia con “aquella perspectiva que permite al sujeto formar parte de su cultura y, al mismo tiempo, estar fuera de ella” (Moreira, 2000, p. 5). A partir de este planteamiento, toman relevancia para nuestra investigación dos de los principios considerados por este autor como facilitadores del Aprendizaje Significativo Crítico, ellos son: el principio del conocimiento como lenguaje y, el principio de la interacción social y del cuestionamiento. Principios que a partir de la modelación computacional se evidencian respectivamente así: en la comprensión del concepto de derivada a partir de la apropiación del lenguaje matemático por parte de los estudiantes y en la habilidad adquirida por los estudiantes para formular preguntas relevantes, claras y pertinentes relativas a la temática abordada.

El presente proyecto se encuentra estructurado en seis capítulos, en los cuales se resaltan los aspectos más significativos que aquí se desarrollan. Por esta razón, mostramos una visión global de éstos, presentando aspectos generales del contenido. En el capítulo 1; se muestra los orígenes del estudio y los antecedentes que permitieron identificar el problema y formular los objetivos concretos a esta investigación, el capítulo 2; recoge las diferentes investigaciones que se han realizado alrededor de los componentes de la presente investigación, organizado por ejes temáticos, en el capítulo 3; se definen los referentes teóricos que proporcionan el marco conceptual de la investigación, en el capítulo 4; se describen los instrumentos diseñados para la recolección de información, además, plantea el diseño de la investigación, posteriormente, el capítulo 5, suministra un estado de resultados que emergen del análisis de la información recolectada, finalmente, el capítulo 6, relata las conclusiones que surgen a partir del análisis de resultados.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para la real academia española de la lengua, la matemática es una ciencia deductiva, que se encarga de estudiar las propiedades de entes abstractos, como los números, las figuras geométricas, los símbolos y sus relaciones. Desde esta perspectiva, se concibe dicha área como poco clara y de acceso limitado al conocimiento de cualquier individuo. Roa (2012), plantea otra definición, donde establece que “La matemática estimula la capacidad de pensar. Tiene un valor formativo que ayuda a estructurar todo el pensamiento y a agilizar el razonamiento deductivo pero es también una herramienta que sirve para la vida cotidiana y para muchas tareas específicas de las actividades laborales”.

Sería ideal que la enseñanza de la matemática fuera llevada al aula desde lo propuesto por Roa (2012), sin embargo, en la actualidad predomina “la forma clásica de presentar la Matemática, donde la enseñanza consiste esencialmente en la transmisión de conocimientos por el profesor con o sin apoyo de algún tipo de material. Claramente, el alumno tiene una participación pasiva en su personal proceso de aprendizaje. La sala de clases entusiasma cada vez menos, desmotiva al alumno alejándolo de la asignatura y por tanto de los objetivos que se quieren lograr” (Vega, 2011, p.8). En otras palabras, la matemática sigue siendo tratada en el aula por procesos netamente operativos, es decir, el predominio del trabajo algorítmico en esta área es evidente, lo que genera un enfoque abstracto en el proceso de aprendizaje del estudiante (Dolores, 2000). Esta aversión, fracaso y deserción académica en Matemáticas, según estudios y pruebas realizadas a estudiantes, se presenta en un porcentaje muy alto (Vega, 2011; PISA, 2009).

Tomando como referencia las experiencias en el aula de algunos docentes, se puede determinar que la falta de tiempo afecta el proceso de enseñanza de las matemáticas, pues no son abordados a cabalidad todos los temas, especialmente en el grado once, donde las actividades institucionales no académicas impiden el normal desarrollo de las temáticas propuestas dentro del plan de estudios. Particularmente el tema de la derivada es opcional, además, es considerado por los docentes como una temática de cumplimiento pretencioso.

Sin embargo, cuando se ha llevado a cabo la enseñanza de este concepto en la escuela, algunas investigaciones sobre la enseñanza del lenguaje variacional han permitido detectar la dificultad de este proceso (Azcárate, 1990; Clark, Cordero, Cotrill, Czarnocha, Devries, St. John, Tolia & Vidakovik, 1997; Dolores, 1998; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, 2004; Camacho & Depool, 2002-2003); especialmente, en el dominio del significado de la noción de la

derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente (Sánchez, 2008). Es decir, son evidentes los enfoques algebraicos presentes en la enseñanza de la derivada que priorizan en el trabajo algorítmico; no obstante, a enfoques como el geométrico y el variacional no se les dan la importancia que requieren para establecer el concepto de derivada (Dolores, 2000). Esto hace que los alumnos no logren dotar de significado el concepto; pues si centramos la tarea a la solución de ejercicios de calculadora no se encuentra dificultad alguna, pero si el objetivo es que ellos logren una mayor comprensión de los conceptos y métodos que conforman el centro de análisis de la derivada, el camino es árido y denso.

Analizando un poco más los factores que afectan el aprendizaje de la derivada en los estudiantes, se puede hacer referencia a Matamoros (2008), quien considera necesario comprender los procesos a través de los cuales ellos dotan de significado el concepto de derivada, puesto que sus conocimientos previos pueden entorpecer el logro de los objetivos que el profesor ha propuesto; es por esto, que se hace necesario que los alumnos expresen en su propio lenguaje las nociones que se han generado a partir de temáticas anteriores.

El método “tradicional” empleado para la enseñanza de la Matemática, no ha dado solución a la problemática presentada en el aula, que corresponde al bajo rendimiento y la poca motivación por la asignatura. Por lo que se hace necesario el uso de otros recursos pedagógicos que motiven al estudiante, permitiendo así un aprendizaje significativo (Vega, 2011).

Es por esto que se hace necesario que el docente procure implementar y desarrollar herramientas educativas como las tecnológicas que propicien el gusto entre los alumnos por el

estudio y comprensión de las Matemáticas, además, un ambiente que favorezca el proceso de enseñanza y así un aprendizaje significativo crítico, por medio de herramientas computacionales como *Geogebra*, ya que la interactividad y la visualización a través de elementos computacionales, permite desarrollar el factor esencial en el proceso de enseñanza, que es sin duda el aprendizaje (Macías, 2007). Además, la influencia de los medios electrónicos, especialmente el computacional, permite una visualización dinámica del comportamiento gráfico de las funciones, por medio de simulaciones interactivas, racionalizando de una forma amplia los métodos numéricos (Dolores, 2000).

El sostenido avance tecnológico de los últimos tiempos y la incorporación de la computación, ha provocado modificaciones en la sociedad, haciendo inminente introducir estos medios informáticos al proceso de formación en la escuela. Pues gracias a esta evolución en la comunicación, cada representación del mundo se puede visualizar, ya sea por medio de gráficos, esquemas o diagramas que complementan el aprendizaje de niños, jóvenes y adultos (Macías, 2007).

A partir de lo mencionado anteriormente se genera el siguiente interrogante: ¿Qué papel desempeña la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en los estudiantes del grado once?

Para dar solución a este interrogante se implementó una propuesta de enseñanza basada en herramientas computacionales de fácil acceso como el *Geogebra*, a partir de la modelación computacional de tipo exploratorio que facilitara las representaciones geométricas como la pendiente de la recta tangente y las relaciones de tipo variacional como el límite del cociente

incremental por medio de la tasa de variación instantánea, lo que permite otorgar significado al concepto de derivada.

1.3. OBJETIVOS

General:

- Identificar el papel que desempeña la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada, en los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Antonio José Bernal Londoño.

Específicos:

- Describir las actitudes que genera en los estudiantes el uso de la modelación computacional en el proceso de aprendizaje de la derivada.

- Identificar la contribución de la modelación computacional en la habilidad adquirida por los estudiantes para formular preguntas relativas al concepto de derivada.

- Identificar el aporte de la modelación computacional a la apropiación del lenguaje matemático, por medio de argumentos que evidencien en los estudiantes la comprensión del concepto de derivada.

Capítulo 2.

REVISIÓN DE LITERATURA

En este apartado se presenta una revisión bibliográfica que contiene diferentes estudios desde propuestas de enseñanza, hasta tesis doctorales sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada, de las cuales se retoman las investigaciones más significativas para cada eje temático. En la Tabla 1. se muestran algunas investigaciones que se han realizado con respecto al objeto de estudio, durante el período 2003-2013.

Tabla 1

Investigaciones consultadas del área de las Ciencias y las Matemáticas

<i>EJE TEMÁTICO</i>	<i>AUTOR</i>
<i>Estrategias didácticas en la enseñanza de la derivada</i>	Dolores (2000), Contreras (2000), Badillo (2003), Font (2003), Andreu & Riestra (2003), Engler, Vrancken & Müller (2003), Sánchez (2004), Alarcón & Suescún (2005), Sánchez & otros (2006), Bedoya & otros (2007), Tellechea & Robles (2008), Sánchez (2008), Ariza & Llinares (2009), Villa & Ruiz (2010), Sánchez & otros (2011), Lozano (2011), Villa (2011), Villa & Borba (2011), García & Dolores (2011), Pino & otros (2011), Garzón & otros (2011), Lozano (2011), Cardona (2012), García & Gavilán (2012)
<i>Modelación computacional en la enseñanza y aprendizaje de la derivada</i>	Borbón (2002), Cortés & otros (2003), Caballero & Bernal (2010), Vega (2011), Vega & Merchan (2011), Games & Navarro (2013), Jiménez (2013), Villagrana (2013)
<i>Teoría de aprendizaje significativo crítico y la modelación computacional</i>	Tenreiro & Márquez (2006), Corica (2009), López, Veit & Araujo (2012).

2.1. Estrategias didácticas en la enseñanza de la derivada

En la Tabla 2, se relacionan investigaciones que hacen referencia a diferentes estrategias para la enseñanza de la derivada, algunas han sido desarrolladas en escuelas o universidades, mientras que otras son propuestas que no han sido implementadas, sin embargo, han sido diseñadas haciendo un análisis a partir del conocimiento que se tiene sobre las estrategias de enseñanza para abordar conceptos matemáticos, específicamente del concepto de derivada.

Tabla 2

Estrategias didácticas en la enseñanza de la derivada

AUTOR - AÑO	OBJETIVO	TEMÁTICA Y CONCEPTOS	NIVEL	ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS
Dolores (2000)	Responder a la problemática presente en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial en el preuniversitario, donde cantidades significativas de estudiantes no logran comprender sus conceptos básicos, especialmente el concepto de derivada.	Enfoque variacional - Derivada - Rapidez de la variación	Estudiantes de preuniversitario	Propuesta con un enfoque en la estructura variacional.
Engler, A; Vrancken, S; & Müller, D. (2003)	Desarrollar habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación, con el fin de facilitar la construcción del concepto de derivada	Concepto de derivada desde la variación. - Derivada - Funciones - Variables - Variación	Universitario	Actividades en clase.
Alarcón &	Evidenciar en los	Concepción euclídea de	Bachillerato	Cuestionarios.

Suescún (2005)	alumnos la presencia de la concepción euclídea de tangente a una curva plana en un punto.	tangente a una curva plana en un punto. - Euclídeo - Tangente		
Sánchez & García (2008)	Revisar los diferentes aportes que se han hecho en las investigaciones en educación matemática, específicamente en la comprensión del concepto de derivada, orientado en dos ejes: las características de los significados del concepto de derivada que elaboran los estudiantes y el desarrollo de dichos significados.	Representaciones gráficas y analíticas del concepto de la derivada. - Razón - Límites - Funciones	Estudiantes universitarios	Hacer conexiones con otros conceptos (límites o funciones), a través de los diversos modos de representación (el gráfico y el analítico de la derivada) y conociendo sus diferentes propiedades y procesos.
García & Dolores (2011)	Diseñar y poner en práctica una propuesta para mejorar la comprensión del concepto de la derivada en dos grupos de estudiantes del curso de Cálculo I, de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, en los que en estudios anteriores se detectó tal deficiencia.	Comprensión del concepto de derivada. - Pendiente de la recta tangente. - Límite - Razón de cambio.	Estudiantes de primer año de la licenciatura en matemáticas	Cuestionarios.
Villa Ochoa Jhony (2011)	Indagar por el proceso de comprensión de un concepto matemático.	Variación, tasa de variación media, tasa de variación instantánea, razón, función.	Universitario.	Cálculo.

Cardona (2012)	Diseñar una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio desde un punto de vista histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico.	El concepto de derivada como razón de cambio. - Razón - Proporción	Estudiantes de grado undécimo de educación media.	Actividades de laboratorio.
Sánchez – Matamoros & otros (2012)	Caracterizar grados de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto.	Derivada de una función en un punto. - Derivada - Función - Pensamiento matemático de los estudiantes.	Estudiantes universitarios	Cuestionario formado por tres tareas que dan cuenta de los modos de representación de los estudiantes.
García y Gavilán (2012)	Describir y explicar la práctica del profesor y su introducción del concepto de derivada.	La derivada de una función en un punto función derivada y operador derivada. - Rectas secantes - Funciones - Límite.	Bachillerato	

En las investigaciones mencionadas en el cuadro anterior, se destaca que corresponden al área de matemáticas, donde su principal interés es diseñar estrategias para la enseñanza de la derivada; con el fin de corresponder a la problemática presente en los estudiantes, ya que poseen gran dificultad en la comprensión del concepto, es por esta razón que estudios como los realizados por Dolores (2000), Sánchez & García (2008), García & Dolores (2011) y Sánchez Matamoros & otros, presentan propuestas para contribuir a dicha dificultad; desde enfoques gráficos como lo menciona Alarcón & Suescún (2005), García & Gavilán (2012), quienes emplean como conceptos fundamentales la recta secante y pendiente de la recta tangente a una curva, además se encuentran los enfoques variacionales; a partir de razones de cambio empleados en

investigaciones como las realizadas por Cardona (2012), Engler, A; Vrancken, S; & Müller, D. (2003) y Dolores (2000). Igualmente la perspectiva histórica y epistemológica planteada por Cardona (2012) que se considera primordial para un desarrollo adecuado de la práctica en el aula y la comprensión de los conceptos de la derivada como lo es la razón de cambio y sus preconceptos. De esta manera, este trabajo de investigación permite promover los diferentes enfoques desde el histórico y epistemológico, variacional, gráfico y geométrico.

2.2. Modelación computacional en la enseñanza y aprendizaje de la derivada

Para este eje temático se presentan investigaciones que se encuentran relacionadas específicamente con la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada por medio de la modelación computacional, aspecto de gran interés en el presente trabajo de investigación. Como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

Modelación computacional en la enseñanza y aprendizaje de la derivada

AUTOR - AÑO	OBJETIVO	TEMÁTICA Y CONCEPTOS	NIVEL	SOFTWARE
Cortés & otros (2003)	Diseñar una propuesta de enseñanza de la derivada a través del manejo de tablas y gráficas que permiten trabajar con la función derivada, por medio de un software educativo tomando teoría de	Tratamiento numérico y gráfico del concepto de razón de cambio, para abordar el concepto de derivada. - Razón de cambio. - Derivada. - Funciones. - Representación gráfica y numérica. - Recta secante. - Recta tangente.	Estudiantes	Desarrollaron un Software educativo.

	Registros Semióticos de Representación propuesta por Duval y con base en ella proponer una serie de actividades didácticas.			
Ian Lawrence (2006)	Explorar cómo se puede ir sobre la mejora de la experiencia - la exploración de algunos desarrollos didácticos que puedan soportar el modelado en las aulas, sobre todo en la elaboración de trabajos recientes con niños más jóvenes (11 - 16 años)	Interacción, experimentación.	Bachillerato	Física
Caballero & Bernal (2010)	Hacer una introducción al concepto de derivada, por medio de una unidad interactiva diseñada en <i>Geogebra</i> en la cual los estudiantes aprenderán por experimentación.	Derivada de tipo geométrico - Enfoque geométrico - Límites - Derivada	Estudiantes de bachillerato.	
Vega & Merchan (2011)	Reflexionar en torno a conclusiones y aprendizajes importantes sobre los aspectos que se deben tener en cuenta para garantizar una implementación efectiva del modelo 1 a 1 en el aula.	Modelo 1 a 1	Fundación	
Vega (2011)	Indagar sobre la influencia de recursos didácticos en el aprendizaje	Construcción del concepto de derivada, por medio de un <i>software</i> . - Cálculo diferencial	Estudiantes universitarios.	MAPLE V

	del estudiante tales como módulos de clases y laboratorios computacionales usando el <i>software</i> MAPLE V.	- Derivada - Graficación		
Games y Navarro (2013)	Analizar las tesis de grado y postgrado publicados en un periodo de 9 años, para evidenciar el estado de conocimiento que tiene la educación medida por ambientes virtuales de aprendizaje.	Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA). Computador por niño	Bachillerato.	

Los trabajos de investigación hallados, apuntan a destacar las potencialidades que tienen las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), en la enseñanza de conceptos matemáticos, más específicamente con el uso de *software* que permiten visualizar e interactuar con un modelo que simula lo que el concepto nos quiere decir. En cuanto al concepto de derivada encontramos trabajos como los de Cortés y otros (2003) quienes diseñan una propuesta de enseñanza de la derivada a través del manejo de tablas y gráficas que permiten trabajar con la función derivada, Caballero & Bernal que realizan una introducción al concepto de derivada, por medio de una unidad interactiva diseñada en *Geogebra*. Otros autores centran su investigación en mostrar algunos modelos que facilitan el aprendizaje como Vega & Merchan (2011) quienes reflexionan en torno a conclusiones y aprendizajes importantes sobre los aspectos que se deben tener en cuenta para garantizar una implementación efectiva del modelo 1 a 1 en el aula, Vega (2011) indaga sobre la influencia de recursos didácticos en el aprendizaje del estudiante tales como módulos de clases y laboratorios computacionales usando el *software* MAPLE V, finalmente

Games y Navarro (2013) que analizan las tesis de grado y postgrado publicados en un periodo de 2001 y 2010 (9 años), para evidenciar el estado de conocimiento que tiene la educación medida por ambientes virtuales de aprendizaje, en el cual encuentran esta metodología en la enseñanza ha tenido un crecimiento significativo en América latina, pero, no se encuentra sistematizada, además existen una cantidad de material que está impreso y no tiene presencia en medios electrónicos, por ende proponen una alternativa para facilitar el registro y acceso al contenido de las fuentes de consulta identificadas en la última década.

2.3. Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico y modelación computacional

Dado que la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico es relativamente nueva, difícilmente se encuentran investigaciones que incluyan dicha teoría en el estudio de la derivada como concepto matemático; por lo que referenciamos solo un trabajo relacionado con el objeto de estudio de la presente investigación (Carioca, 2009). Además, se encuentran algunos estudios en el campo de la enseñanza de la física, que brindan un referente de cómo se está abordando la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico en la enseñanza de las ciencias. Estos trabajos de investigación están relacionados en la Tabla 4.

Tabla 4

Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico y modelación computacional

AUTOR – AÑO	OBJETIVO	TEMÁTICA Y CONCEPTOS	NIVEL	ÁREA
Tenreiro y Márquez (2006)	Defender la importancia de la implementación de actividades de laboratorio en la clase de ciencias, ya que, promueve el pensamiento crítico en los estudiantes.	Pensamiento crítico Actividades de laboratorio	Bachillerato (Básica)	Ciencias Naturales
Carioca (2009)	Realizar un análisis descriptivo del aprendizaje significativo crítico que adquieren los estudiantes del curso Análisis Matemático 1 de la facultad de ciencias exactas de la Universidad Nacional del centro de la provincia de Buenos Aires (Argentina), a través de un cuestionario.	Aprendizaje significativo crítico en el Cálculo.	Universitario	Cálculo
López, Veit & Araujo (2012)	Promover estudiantes más críticos y reflexivos, en torno al conocimiento científico y al uso de las herramientas computacionales.	Aprendizaje Significativo Crítico en el conocimiento científico. - ASC - Modelación computacional.	Universitario	Ciencias naturales (Física)

Se concluye a partir de los trabajos encontrados sobre la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico, que es una teoría empleada recientemente como un referente para la comprensión de conceptos físicos principalmente, como lo son los estudios realizados por López, Veit & Araujo (2012, 2014), quienes promueven el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo en estudiantes

a través de herramientas computacionales, a diferencia de Tenreiro y Márquez (2006) quienes pretenden promover un pensamiento crítico por medio de actividades de laboratorio, aunque tienen un punto de convergencia que es la realización de preguntas por parte de los estudiantes, para lograr un pensamiento crítico en ellos. Sin embargo, la investigación de Carioca (2009), proporciona gran información para este trabajo de investigación, pues en él se analizó la posibilidad de obtener un aprendizaje significativo y además crítico en conceptos del cálculo en el curso Matemáticas I, a través de un cuestionario; éste permitió concluir finalmente que los estudiantes en Argentina asisten al curso con el único fin de aprobarlo, hecho que dificulta puedan aprender crítica y significativamente, ya que poner el énfasis únicamente en la adquisición de información da lugar a un trabajo memorístico, repetitivo, no significativo; además se sienten poco comprometidos y responsables de su aprendizaje, puesto que atribuyen las dificultades de su aprendizaje al docente y a la exigencia del nivel universitario.

Capítulo 3.

MARCO TEÓRICO

El propósito de este capítulo es mostrar los elementos teóricos bajo los cuales se enmarca este trabajo de investigación, por lo que se empieza describiendo la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico de Marco Antonio Moreira y las *Mindtools* de Jonassen que están enfocadas al uso de recursos computacionales que posibilitan el proceso de aprendizaje.

3.1. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CRÍTICO

Este referente teórico se fundamenta la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel, el cual corresponde a un aprendizaje con significado, donde la interacción de los conocimientos previos con los nuevos es la característica principal de dicha teoría, además, de los aportes de Postman y Weingartner quienes proponen la enseñanza como actividad subversiva; es decir, que permite al individuo participar en actividades de su grupo social y al mismo tiempo tener una postura crítica sobre los acontecimientos que se generan dentro dichas actividades. Desde estas ideas Moreira plantea una teoría donde el aprendizaje no debe ser sólo significativo sino también subversivo, por lo que establece el término de aprendizaje significativo crítico, que consiste en la perspectiva que permite al sujeto formar parte de su cultura y al mismo tiempo estar fuera de ella; en otras palabras, por medio de este aprendizaje el estudiante podrá trabajar con la “incertidumbre, la relatividad, la no causalidad, la probabilidad, la no dicotomización de las diferencias, con la idea de que el conocimiento es construcción (o invención) nuestra, que apenas representamos el mundo y nunca lo captamos directamente”(Moreira, 2000, p. 6).

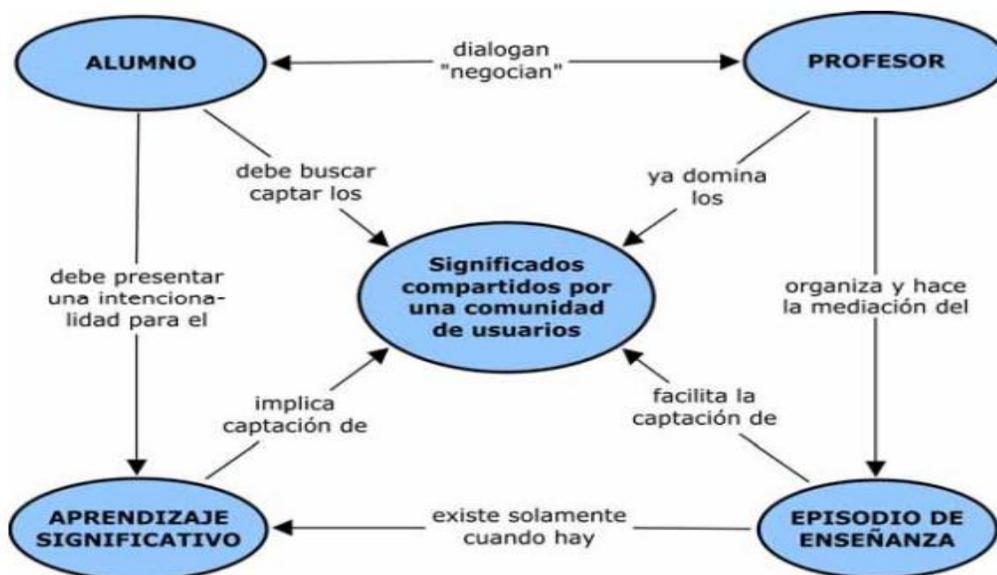
Moreira afirma que previa a la formalización de conceptos, los estudiantes poseen concepciones, ideas, intuiciones, imágenes que dan cuenta de conocimientos adquiridos con la experiencia diaria, los cuales usan con facilidad. En ocasiones, cuando se está en la adquisición del concepto, estas ideas no desaparecen, sino que interactúan con nuevos conocimientos, modificando y adaptando las concepciones personales del alumno.

Moreira (2010), plantea igualmente que el aprendizaje significativo está en contraposición al aprendizaje mecánico, ya que éste último, es aquel en el que la nueva información es interiorizada de manera puntual, sin la interacción cognitiva con los conocimientos previos, a diferencia del aprendizaje significativo donde los nuevos conocimientos son interiorizados de manera sustantiva (no literal) y no arbitraria.

El autor mencionado el párrafo anterior, propone una enseñanza centrada en el alumno, con la participación activa del estudiante en actividades colaborativas, esto a la luz de sus principios que serán formulados más adelante. Es así, como se hace necesario tener en cuenta la captación de significados por parte de los estudiantes, Gowin (citado por Moreira, 2010) propone un modelo donde el profesor ya domina los significados aceptados en el contexto de la materia de enseñanza, le presenta esos significados a los alumnos usando materiales educativos del currículo, de igual forma, el estudiante debe devolverle al docente los significados captados a partir de los conocimientos que se le están llevando al aula de clase a través de los materiales educativos del currículo; como se muestra en la Figura 1.

Figura 1.

Esquema para la captación de significados en un episodio de enseñanza.



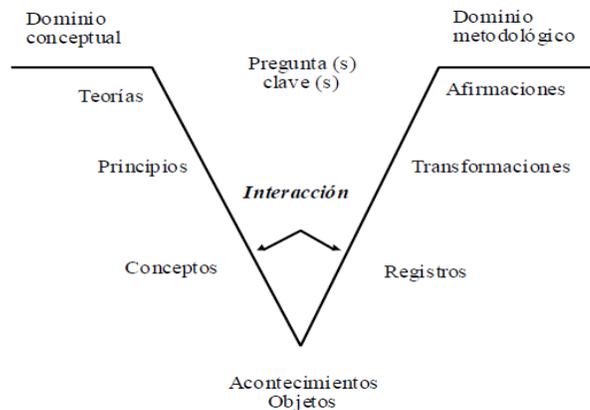
El comportamiento que presente el discente depende de la predisposición e intencionalidad que éste tenga para aprender. Igualmente, esta predisposición depende de la relevancia de los nuevos conocimientos. Para una captación eficiente de significados es necesaria el dialogo o la interacción social entre profesor, alumno y materiales educativos. “Sólo hay enseñanza cuando hay captación de significados” (Moreira, 2010, p. 7) Este tipo de enseñanza basada en el alumno, también implica la interacción entre alumnos, es así como el proceso de enseñanza debe estar diseñado con situaciones donde los estudiantes deben resolverlas de forma colaborativa.

El diagrama V es una herramienta en la que los estudiantes pueden participar como actividad colaborativa, es un instrumento heurístico para el análisis de la estructura del proceso de producción del conocimiento (entendido como las partes de dicho proceso y la manera como se relacionan), su construcción, discusión, presentación y reconstrucción son procesos muy

favorecedores del aprendizaje significativo (Moreira, 2000). Además, como indican Escudero & Moreira (1999) la llamada *V* de Gowin ha mostrado ser un instrumento valioso para el análisis del currículo, la evaluación y como estrategia para el proceso de enseñanza y aprendizaje, también para el análisis del currículo de experimentos de laboratorio y del enunciado de un problema. Esta herramienta, permite que el estudiante relacione la teoría con la práctica y así explicar el acontecimiento de interés. (Ver Figura 2) Sin embargo, es importante que el Aprendizaje Significativo sea también crítico, subversivo, antropológico; en la sociedad contemporánea no basta adquirir nuevos conocimientos de manera significativa como se mencionaba anteriormente, es preciso adquirirlos críticamente. Al mismo tiempo, que se vive en cierta sociedad, se está integrado a ella, es necesario también ser crítico de ésta, distanciarse de ella y de sus conocimientos cuando ella está perdiendo el rumbo (Moreira, 2000).

Figura 2.

La V Epistemológica de Gowin simplificada



En el año 2005, Moreira basado en la teoría propuesta por Ausubel en la cual consigna unos principios pragmáticos que facilitan el aprendizaje significativo; sugiere nueve principios, ideas o

estrategias facilitadoras del aprendizaje significativo crítico; sin embargo, en esta investigación tomaremos como referencia dos de ellos: principio del conocimiento como lenguaje y, principio de la interacción social y del cuestionamiento, los cuales consisten respectivamente en que cada lenguaje, tanto en términos de su léxico como de su estructura, representan una manera singular de percibir la realidad; prácticamente todo lo que llamamos conocimiento es lenguaje, es decir, con este principio se busca que el estudiante se apropie del lenguaje específico del área según la temática a tratar; y enseñar/aprender preguntas en lugar de respuestas, consiste en la formulación de preguntas relevantes por parte del alumno, haciendo uso de su conocimiento previo de forma no arbitraria y no literal, lo que evidencia un aprendizaje significativo crítico.

3.2. LAS MINDTOOLS

Si la enseñanza es asistida por computadoras, es necesario propiciar ambientes de aprendizaje que favorezcan el pensamiento crítico, es decir, las computadoras están programadas para dirigir las actividades del aprendiz hacia la adquisición de nuevos conocimientos y/o habilidades.

Las *mindtools* son herramientas basadas en computadoras los cuales han sido desarrollados para funcionar como socios intelectuales con el aprendiz, ya que, favorecen el pensamiento crítico y el aprendizaje de nivel superior. Estas herramientas incluyen bases de datos, planillas de cálculo, redes semánticas, sistemas expertos, conferencias por computadora y micromundos de aprendizaje (aunque no necesariamente están limitadas a esta lista) (Jonassen, 1996). Las *mindtools* ayudan a extender el funcionamiento cognitivo durante el aprendizaje, además, comprometen a los estudiantes en operaciones cognitivas mientras construyen el conocimiento.

“Las herramientas cognitivas son dispositivos mentales y computacionales que apoyan, guían y extienden los procesos de pensamiento de los usuarios” (Jonassen, 1996, p. 7). En otras palabras las *mindtools* hacen referencia al uso reflexivo de la tecnología que busca en el estudiante favorecer el pensamiento reflexivo y significativo ejecutando operaciones simples que permitan que el estudiante examine y genere hipótesis en la solución de situaciones problema. Además, son herramientas que permiten que el estudiante pueda organizar y representar lo que ellos saben. También, apoyan el aprendizaje constructivo, que según Simmons (1993) citado por Jonassen, es el aprendizaje mediante el cual los estudiantes procesan información de forma significativa, relacionan el nuevo conocimiento con el conocimiento previo, reflexionan sobre lo que saben y necesitan aprender, además lo evalúan, finalmente los estudiantes se plantean metas de aprendizaje.

Es importante aclarar que las *mindtools* no serían efectivas si los estudiantes no son responsables cuando reconocen y juzgan las regularidades de la información allí presentada, además, de organizarla e interpretarla. Cuando se usan herramientas cognitivas el desempeño de los estudiantes mejora, pues éstas logran dejar “algún residuo cognitivo”, proveyendo de conceptualizaciones alternativas sobre el contenido que posibiliten mejorar, extender, amplificar y reestructurar la forma en que los alumnos piensan sobre lo que están estudiando.

Jonassen en su libro *Aprender de, aprender sobre, aprender con las computadoras* plantea unos criterios para evaluar si una herramienta es una *mindtools*, los cuales son:

Basadas en computadoras: Sin duda hay muchas aplicaciones que no están basadas en computadoras que pueden funcionar como *mindtools*, pero aquí nos interesa usar las computadoras como *mindtools* más efectivas.

Disponibilidad de las aplicaciones: Las aplicaciones de *software* que son utilizadas como *mindtools* están disponibles. Por ejemplo, las buenas *mindtools* pueden funcionar en formas que apoyen otras necesidades de la computación. Por ejemplo: las bases de datos tienen un rango de aplicaciones, aparte de servir como *mindtools*, posibilitan llevar registros, armar calendarios y acceso a la información.

Accesibilidad: En forma adicional, las *mindtools* deben ser accesibles. Muchas de las aplicaciones de *mindtools* están disponibles para dominio público, como *shareware*, o por consorcios educativos como Minnesota Educational Computing Consortium, que distribuye *software* sin cargo. Si no, deberían ser accesibles a costos razonables.

Los seis criterios siguientes son pedagógicos y están relacionados con los resultados del aprendizaje apoyado por *mindtools*:

Representación del conocimiento: La aplicación puede ser utilizada para representar conocimiento, lo que alguien sabe o cómo alguien sabe representar contenido o conocimiento personal.

Generalizable: La aplicación puede ser usada para representar conocimiento o contenido en diferentes áreas o asignaturas. La mayoría de las *mindtools* puede ser usada en ciencia pura

(química, física, biología) o ciencia aplicada (ingeniería), en cursos de matemática, literatura, ciencias sociales (psicología, sociología, ciencia política), cursos de filosofía, de economía doméstica y salud, y hasta en cursos de educación física y recreación.

Pensamiento crítico: Al utilizar *mindtools* los estudiantes se involucran en pensamiento crítico sobre su materia. El pensamiento es profundo, de nivel superior o más significativo que memorizar o parafrasear algo que alguien (el docente o el libro de texto) dijo sobre el contenido.

Transferencia de lo aprendido: Utilizar *mindtools* resulta en la adquisición de habilidades generalizables, transferibles y pueden facilitar la reflexión en varios campos.

Formalismo simple y poderoso: El formalismo de las *mindtools* es una forma de pensar simple pero poderosa. El pensamiento requerido para construir bases de conocimiento o producir multimedia es profundo. Los sistemas expertos requieren que los estudiantes piensen en forma causal. Si las conexiones de causa-efecto no son siempre obvias, pero no son tan difíciles de encontrar cuando uno las busca en forma apropiada.

Aprendizaje fácil: El esfuerzo mental requerido para aprender a usar el *software* no puede exceder los beneficios de reflexión que resultan. El *software* debe poder ser aprendido en dos horas o menos. La sintaxis y el método de utilización del mismo no debería ser tan formal ni tan difícil que enmascare la meta mental del sistema. Usted puede querer que los estudiantes piensen en forma causal sobre la información en un dominio de conocimiento, pero si el sistema requiere semanas de esfuerzo agónico para ser aprendido, el esfuerzo de aprender el sistema será más pesado que los beneficios de la reflexión.

3.3. MODELACIÓN COMPUTACIONAL

El presente trabajo centra su interés en incorporar el uso del computador y *software* educativo como una herramienta tecnológica valiosa que puede ser incluida en los currículos escolares, ya que permite que el estudiante interactúe con los objetos y descriptores que posee el modelo planteado para propiciar una mayor comprensión y a su vez un aprendizaje significativo crítico. Para esto tomamos diferentes apartados de algunos autores que han argumentado las potencialidades que tiene la modelación computacional en el campo educativo.

La modelación es considerada un “proceso cognitivo para la construcción y empleo del conocimiento” (Halloun, 2004), de esta manera los siguientes autores (López, Veit, & Solano, 2011) definen la modelación computacional como un proceso de construcción, donde el estudiante tiene acceso al modelo inicial, de tal forma que lo puede construir o reconstruir conforme lo desee; además, permite construir una idea o una representación a partir de imágenes externas.

Según López et al. (2011), existen dos tipos de modelación

Exploratoria: los estudiantes pueden observar, analizar e interaccionar con el modelo computacional ya construido, con el fin de que el alumno pueda percibir y comprender la relación entre la matemática comprendida en el modelo y el fenómeno en cuestión; además, al interactuar con el modelo, el alumno intentará dar respuesta a preguntas preliminares o “desafíos” a través de diferentes parámetros como “barra de desplazamiento” y “botones” que permiten hacer la

modificación de dicho modelo. De esta manera, cuando el estudiante explora, puede modificar la estructura del modelo inicial si así lo desea.

Expresiva: se caracteriza por el proceso de construcción del modelo desde su estructura matemática hasta el análisis de los resultados generados por él. El alumno puede interactuar con su modelo, y así mismo puede reconstruirlo tantas veces como desee y considere necesario para la obtención de resultados que sean favorables.

Por otro lado, Lawrence (2006, p. 93), expresa que la modelación es una actividad que permite cambiar las reglas y la entrada de valores para observar las posibles variaciones en los resultados, permitiendo hacer una lectura de los pensamientos de otros y al mismo tiempo hacer modificaciones para expresar su propio pensamiento. Este autor, considera también que es precisamente la habilidad para alterar las reglas lo que se entiende como modelación.

Argumenta igualmente, que al llevar actividades con un *software* de modelación al aula de clase se puede utilizar de tres maneras: de forma exploratoria, ya que cuando el maestro le muestra un modelo ya construido permite que el estudiante interactúe con él, he intente comprender como se comporta; de forma metafórica, puesto que las experiencias basadas con la herramienta son el pretexto para la construcción de una explicación del fenómeno a tratar; y por último de forma expresiva, pues aquí los individuos construyen un modelo que les permita expresar sus propias ideas sobre el tema tratado.

Lawrence (2006), afirma que un modelador competente tiene el objetivo de simplificar el fenómeno, pero sin dejar a un lado la esencia de las cosas, es decir, el modelo representa un

fenómeno real, por lo tanto contiene los patrones que lo caracterizan; además, describe unos retos al desarrollar una pedagogía con modelos así:

- Tareas: Aprender a desarrollar adecuadamente tareas desafiantes.
- Transporte: Tener en cuenta el punto de partida para que los estudiantes finalicen con éxito la tarea.
- Rutas: Es lo que encamina a los participantes para que puedan encontrar los mecanismos o el transporte disponible.
- Hitos: Depositar marcadores reconocibles a lo largo de los caminos para guiar, restringir y fomentar.
- Evaluación: Preguntarse ¿cómo se podría reconocer y valorar lo que los aprendices están haciendo en la construcción de sus modelos?

Este mismo autor, concluye diciendo que la modelación percibe nuevas oportunidades, así como los desafíos. Particularmente en la apropiación de prototipos, con el fin de pensar en un lenguaje más amigable para aquellos usuarios de baja densidad. Además, que las computadoras deben considerarse principalmente como una herramienta de representación, y un medio de expresión.

3.4. IMPACTO DE LAS TIC EN LA SOCIEDAD

Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) están reglamentadas a nivel internacional por la Organización de las naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) y a nivel nacional por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y el

Ministerio de las TIC (MIN TIC); donde se ven las TIC como recursos que tienen un alto potencial para favorecer el aprendizaje y para implementar propuestas innovadoras de enseñanza.

Según estas entidades el mundo de las TIC en la sociedad excede al mundo de la educación y que en varias ocasiones ocurre paralelamente a la vida escolar. Por lo tanto, la incorporación de estas tecnologías en la escuela como herramientas educativas, es con el fin de motivar a los estudiantes a que sean ciudadanos que trabajen en pro de la creación de conocimientos, la creatividad cultural y la productividad económica.

Es por esto, que el estado toma un papel importante en la incorporación de las TIC en el ámbito social, puesto que son ellos, acompañados de diferentes entidades educativas y culturales los encargados de involucrar a la ciudadanía en la exploración pertinente de dichas herramientas que posibilitan llevar a cabo los procesos de enseñanza y de aprendizaje de un tema determinado.

Es decir, también son un apoyo para el docente que promueve la implementación de propuestas innovadoras de enseñanza, la producción de material didáctico, la planificación y presentación de la información. Esto requiere que los docentes estén inmersos en procesos de constante formación, que garanticen un desarrollo profesional coherente, escalonado y lógico, para lograr la integración de las TIC en el aula generando ambientes de aprendizaje no tradicionales, estimulando la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo.

El Ministerio de Educación Nacional definió tres ejes políticos en cuanto a la incorporación de las TIC en el contexto educativo, con el fin de promover su uso y apropiación, al mejoramiento

de la calidad y equidad de la educación, y la competitividad de las personas del país. También, propone unos procesos dinámicos de preparación subjetiva como la inclusión y la sensibilización, que ayudan a fortalecer las debilidades en el manejo de la herramienta.

La inclusión, es una estrategia que motiva al participante a convivir con las diferentes herramientas de información y comunicación, pues le brinda la posibilidad de explorarlas tanto de forma presencial como virtual, de esta manera el estudiante puede contrastar sus ideas con sus compañeros sin la necesidad de estar juntos en un lugar específico. “La Sensibilización, consiste en el acercamiento de los participantes a los objetivos y contenidos propios de cada momento de formación. Esta se lleva a cabo a través de encuentros presenciales y acciones de comunicación permanentes. La asistencia a eventos, seminarios, ferias, concursos, conferencias, talleres, etc., permiten mostrar el grado de conocimiento previo no sistemático que puede adquirir un docente” (MEN, 2008, p.7).

3.5. DESARROLLO CONCEPTUAL

3.5.1. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA¹

A continuación se hace referencia a las distintas definiciones del concepto de derivada desde una perspectiva clásica formal y didáctica.

¹ Reglas o propiedades de la derivada, consultado el 10 de mayo de 2013 en:
<http://www.biol.unlp.edu.ar/alimentos/MTHA-10-deriv.pdf> 13-06 y
<http://derivadas.wikispaces.com/Reglas+o+Propiedades+de+las+Derivadas>

3.5.1.1. Definición formal

Si f está definida sobre un intervalo abierto (a, b) , entonces para cada dos puntos distintos x y c de (a, b) podemos considerar el cociente de diferencias llamado cociente incremental.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b) , y supongamos que $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite existe. El límite, designado por $f'(c)$ se llama derivada de f en c .

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

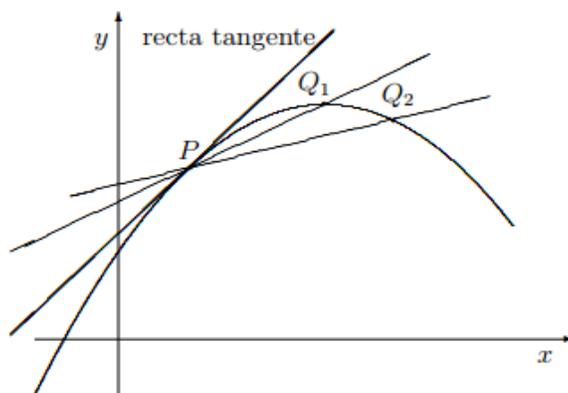
Este método de calcular límites define una nueva función f' , cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que se llama primera derivada de f . La n -ésima derivada de f designada por f^n .

3.5.1.2. Definición de la derivada como una pendiente de la recta tangente a una curva

Dada una curva que es la gráfica de una función $y = f(x)$ y sea P un punto sobre la curva. La pendiente de la recta tangente a la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q se acerca a P .

Figura 3.

Recta tangente



3.5.1.3. Propiedades de la derivada (reglas de derivación)

1. La derivada de una constante (c) es cero.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. La derivada de una función identidad es igual a la unidad.

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

3. La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

$$f(x) = u \pm v \quad f'(x) = u' \pm v'$$

4. La derivada del producto de dos funciones es igual al primer factor por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero.

$$f(x) = u \cdot v \quad f'(x) = u \cdot v' + v \cdot u'$$

5. La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, divididas por el cuadrado del denominador.

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad f'(x) = \frac{v \cdot u' - uv'}{v^2}$$

6. La derivada de una potencia o función potencial, es igual al exponente por la base elevada al exponente menos uno y por la derivada de la base.

$$f(x) = u^k \quad f'(x) = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

3.5.1.4. Tendencias que marcan la enseñanza de la derivada

Teniendo como referencia a Dolores (2000), quien afirma que la enseñanza de la derivada ha sido enmarcada por dos tendencias, la primera es el enfoque clásico formal bajo la estructura del análisis matemático para buscar finalmente sus aplicaciones y la segunda busca el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas de modo que los conceptos básicos se forman a partir de su resolución, como el problema de la tangente, razón de cambio y significados físicos. Las tendencias mencionadas se manifiestan mediante ciertos enfoques. En la primera tendencia son visibles el enfoque *algebraico*, el *numérico*, el *formal*, el *infinitesimal* y el de la *aproximación afín local*, en la segunda tendencia se distinguen básicamente los enfoques *geométrico* y el *variacional*. En este caso es de interés para este proyecto de investigación tener en cuenta la segunda tendencia.

- Enfoque geométrico:

Este se encuentra basado en el desarrollo histórico del concepto de derivada, prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, para esto que desde este punto de representaciones geométricas es fundamental la pendiente de la recta tangente a la gráfica f de un valor x . Puede aproximarse encontrando la pendiente de la secante.

- Enfoque variacional:

Propone remover el discurso matemático escolar, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física, de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes. De igual forma, este enfoque considera como núcleo organizador del discurso la idea de predicción para conocer las cantidades por medio de las variaciones. Se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite. Esto quiere decir, que este enfoque hace relación al límite de cociente incremental y las razones de cambio.

Capítulo 4

FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA

4.1. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En esta investigación se abordó una metodología de carácter cualitativo, puesto que de acuerdo a los análisis interpretativos de los datos que en esta investigación se realizan, se pueden hacer afirmaciones sobre un conocimiento alcanzado que finalmente el investigador puede hacer público bajo la forma de un informe o artículo de investigación (Stake, 1998). Además, por medio de un estudio de caso de carácter instrumental quien presta interés particularmente a un espacio conceptual o empírico que el caso puede iluminar (Vasilachis, 2006), también, es una herramienta que permite tener diferentes alternativas, posturas y variables, sobre lo que se desea conocer, “una forma del estudio de caso instrumental es el estudio de caso colectivo, en el cual se estudian varios casos para fundamentar la generalidad de un fenómeno o teoría, los casos que se seleccionan en este tipo de estudios pueden ser similares o diferentes, ya sea para entender las concordancias o las variantes entre los casos” (Stake, 1998, p. 17).

Teniendo en cuenta lo anterior, se tomaron como casos seis estudiantes entre los 16 y 18 años de edad del grupo 11°A de la Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, tomando como referente la edad de los participantes, se tuvieron en cuenta unas consideraciones éticas como lo son los consentimientos informados tanto para los estudiantes como para los directivos docentes, con la intención de respetar la intimidad de los estudiantes objeto de estudio e igualmente de la institución (Ver anexos 8 y 9). Este plantel educativo, se encuentra ubicado en

el barrio Héctor Abad Gómez Toscana al lado izquierdo de la estación Acevedo del metro, es una institución de carácter público, perteneciente a las escuelas de calidad y acoge a poblaciones de los niveles socioeconómicos 1, 2 y 3. A partir de una observación participante en los grupos de undécimo grado de la Institución, en el primer semestre del año 2013, se decide realizar el proyecto de investigación con el grupo 11°A, debido al interés que estos estudiantes muestran por las actividades que se proponen en clase, la participación activa en las mismas, su buen desempeño académico en todas las áreas, además, de la disponibilidad de sus horarios debido a que la docente cooperadora es la directora de grupo, lo que facilita los procesos de intervención. De esta forma, el interés que tiene este tipo de investigación en el ámbito educativo, es estudiar fenómenos de enseñanza que tienen que ver con el aprendizaje, el contexto, el curriculum y la evaluación.

Se considera que el enfoque de estudio de esta investigación, corresponde a un estudio de carácter cualitativo, pues este fenómeno se asume bajo una visión de una realidad que está en constante cambio, que es subjetiva y está compuesta de experiencias únicas, construidas por los estudiantes. Además, se constituye como no medible, puesto que fue una construcción de los mismos estudiantes, quienes a través de las diversas actividades sobre modelación computacional, dieron a conocer sus diferentes puntos de vista sobre la solución de una situación problema; es por esto que se considera este tipo de investigación de carácter abierto y flexible

La investigación con un enfoque cualitativo es abordado desde diferentes teorías, una de ellas es el interpretativismo, el cual es el acto de otorgar sentido a determinadas acciones de la realidad

de un grupo de personas, involucradas en un estudio específico; es decir, que están siendo observadas con una intencionalidad, para esto, el investigador debe involucrarse con el grupo, estudiarlo desde adentro, hacerse parte de él, para que de esta manera pueda comprenderlo. Otra teoría es la fenomenología, que tiene como objetivo comprender las habilidades, prácticas y experiencias de los seres humanos, además, articular las similitudes y diferencias en los significados de dichas prácticas; en otras palabras la fenomenología busca “determinar el sentido dado a los fenómenos por la descripción e interpretación de quien los vivió”(Bautista, 2011, p 55).

En coherencia con las anteriores posturas, se analizaron cada uno de los momentos de trabajo abordados por los estudiantes, teniendo en cuenta que sus aportes fueron únicos. Esto se dio a partir de las experiencias obtenidas desde su contexto y por las herramientas matemáticas otorgadas por las docentes investigadoras.

Este análisis de datos cualitativo, permite acceder a resultados y conclusiones, profundizando en el conocimiento de la realidad objeto de estudio; además, se define como:

Un conjunto de manipulaciones, transformaciones, operaciones, reflexiones, comprobaciones que realizamos sobre los datos con el fin de extraer significado relevante en relación a un problema de investigación. (Rodríguez, Gil y García, 1996, p. 200)

Para esto se construyeron unas categorías y subcategorías apriorísticas que surgen de la necesidad de dar cumplimiento a los objetivos planteados, a través de una categorización y codificación de la información que permite reducir los datos hallados, a partir de unos instrumentos de recolección que posibilitaron dar cuenta del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

4.1.1. Instrumentos y técnicas de recolección de información

Los instrumentos y técnicas permiten hacer un resumen de toda la labor previa de una investigación, además, reflejan las directrices dominicales del marco teórico (variables, indicadores e hipótesis), también, permiten identificar las condiciones académicas, metodológicas y didácticas del área en la Institución Educativa, de esta manera se definen unos elementos que permiten la construcción de la propuesta pedagógica.

Observación participante:

Teniendo en cuenta la naturaleza y las características que posee este tipo de investigación es importante disponer de varios instrumentos y fuentes de información que posibiliten dar una validez a los resultados obtenidos. De esta manera optamos por la observación participante, puesto que permite identificar las diferentes situaciones o acontecimientos que ocurren dentro del aula de clase, tiene como objetivo principal la descripción auténtica de un grupo social, en este caso se refiere a la descripción e interpretación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes (Cerdeña, 1991). Además, consiste en percibir de forma directa hechos de la realidad,

los cuales tienen un interés particular dentro de la investigación, dicha herramienta se apoya para registrar los impactos generados en el aula en el diario de campo.

Diario de Campo del profesor y el de los alumnos:

Estas fuentes de información permiten disponer de una variedad de datos, con los cuales se puede asumir una postura investigativa y pedagógica constante (Alzate & Sierra, 1996). Con este método, se pretende corresponder al proceso de investigación educativa, por medio de la descripción detallada de lo que acontece en el aula, se basa en la observación directa de la realidad, donde se debe tener en cuenta la relación docente-alumno y en general los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente la metodología empleada en el aula de clase.

Al tener la apreciación de los estudiantes del desarrollo de cada una de las actividades, permite al investigador conocer cómo avanza el aprendizaje del concepto en cada uno de los estudiantes y las actitudes obtenidas a partir del trabajo con herramientas computacionales, para favorecer su aprendizaje.

Entrevista semiestructurada:

Cerda (1991), establece que por medio de la entrevista se obtiene toda la información que no obtenemos por medio de la observación, ya que este instrumento es una conversación o diálogo, que permite adentrarnos en el mundo interior del ser humano, en este caso del estudiante, y así, conocer sus sentimientos, ideas, creencias y conocimientos.

Con esta herramienta se pretende recolectar una información específica sobre el tema que se está investigando, a través de unas preguntas que se programan inicialmente, pero que a medida que avanza el diálogo el entrevistador puede cambiar, aumentar o evadir algunas de ellas.

4.2. METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

La modelación computacional (López, Veit & Araujo 2012; Vega, M. 2012; Agudelo, W. 2004) es un proceso de construcción que le permite al estudiante realizar modificaciones al modelo que inicialmente se le ha asignado, de tal forma que lo pueda construir o reconstruir conforme lo desee. En el caso de esta investigación la modelación fue de tipo exploratorio, es decir, los estudiantes pudieron observar, analizar e interaccionar con modelos computacionales ya contruidos por quienes estuvimos a cargo de este trabajo desempeñando el papel de docentes investigadoras; sin embargo, podrá modificar la estructura del modelo matemático si éste lo desea. De esta manera, se contribuye a la representación por medio de imágenes del conocimiento adquirido.

Para dar un debido cumplimiento a la visión programada dentro del PEI la cual establece que “para el año 2011, la Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, S.J será reconocida como generadora de desarrollo en procesos de calidad, mediante la integración de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y la Información, a través de la participación activa de todos los miembros de la comunidad, formando ciudadanos de capacidad crítica y sentido social como de proyección académica y laboral”, se diseñan diferentes actividades en las que se utiliza

el programa *Geogebra*, ya que permite analizar, observar y modificar el modelo que inicialmente desarrolla el docente, y además otras actividades que permiten fomentar la capacidad crítica de los estudiantes; las cuales desarrollaron con los estudiantes del grado 11^oA a través de seis sesiones de clase y con el propósito de implementar la modelación computacional para la enseñanza del concepto de derivada, se diseña una propuesta de enseñanza, basada en la implementación de un blog (<http://lodivertidodelcalculo.blogspot.com/>) como instrumento computacional, donde se encuentran los contenidos de las clases a desarrollar, las cuales se describen a continuación.

Tabla 5

Categorías y subcategorías

TIPO DE CATEGORÍA	OBJETIVOS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	ACTIVIDADES E INSTRUMENTOS
CATEGORÍAS PRIORITARIAS	- Describir las actitudes que genera en los estudiantes el uso de la modelación computacional en el proceso de aprendizaje de la derivada.	1. Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la derivada haciendo uso de la modelación computacional.	1.1 Actitudes hacia el aprendizaje del concepto de derivada.	- Entrevista semiestructurada - Observación participante - Diario de campo estudiantes e investigadoras. - Diagnóstico.
			1.2 Actitudes hacia el uso de la modelación computacional.	- Entrevista semiestructurada. - Diario de campo estudiantes e investigadoras. - Foro virtual - Observación participante. - Modelación en <i>Geogebra</i> .
	- Identificar la contribución de la modelación computacional en la habilidad adquirida por los estudiantes para formular preguntas relativas al concepto de derivada.	2. Contribución de la modelación computacional a la formulación de preguntas.	2.1 Evolución de las preguntas formuladas por los estudiantes.	- Debate 1 - Debate 2 - Diario de campo estudiantes e investigadoras. - Observación participante.
			2.2 Papel de la modelación computacional en el proceso de formulación de preguntas.	- Blog - Diario de campo de estudiantes e investigadoras. - Observación participante.
	- Identificar el aporte de la modelación computacional a la apropiación del lenguaje matemático, por medio de argumentos que evidencien la comprensión del concepto de derivada.	3. Aporte de la modelación en la apropiación del lenguaje matemático.	3.1 Comprensión, interpretación e intercambio de nuevos significados relacionados con el concepto de derivada.	- Debate 2 - Resolución de problemas. - V de Gowin. - Diario de campo de estudiantes e investigadores.
			3.2 Elementos que aporta la modelación computacional a la comprensión gráfica del concepto de derivada.	- Actividad en <i>Geogebra</i> . - Observación participante. - Diario de campo de estudiantes e investigadoras.
CATEGORÍA EMERGENTE		4. Valoración de la diversidad de materiales educativos y estrategias de enseñanza.		

ACTIVIDAD N°1

DIAGNÓSTICO

Descripción:

Esta actividad se desarrolla con el fin de conocer los conocimientos previos de los estudiantes en relación con el concepto de derivada, tales como funciones y límites. Cabe aclarar que dicha actividad es desarrollada en un periodo de 120 minutos, de forma individual y sin la ayuda de algún instrumento externo, ya que toda ayuda externa sesga la posibilidad de encontrar los resultados reales de las condiciones académicas de los estudiantes.

Se explica que este diagnóstico permite a las practicantes diseñar la propuesta de investigación cumpliendo con las necesidades y dificultades presentes en sus procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Etapas:

El desarrollo de esta actividad se da a partir de 3 fases que son: conceptos previos, conocimiento sobre la derivada y debate 1.

Para identificar los conocimientos previos de los discentes se establecen ejercicios de comprensión gráfica y algebraica; donde deben identificar el dominio y rango de la función, encontrar límites laterales, además, definir con sus propias palabras el concepto de función y

límite. Para finalizar esta primera etapa, se establece una situación donde deben aplicar sus conocimientos sobre ecuaciones.

Con la intención de saber qué conocen los estudiantes sobre el concepto de derivada se les plantea una pregunta donde deben escribir lo que entienden sobre dicho término.

Para finalizar, se realiza una discusión alrededor de la última pregunta sobre derivada, posteriormente, con el propósito de incentivar la participación y la realización de preguntas, ellos se motivan a formularlas, ya que este aspecto es de gran relevancia dentro del proyecto, por pertenecer a un principio que facilita el pensamiento crítico del alumnado y que además hace parte de una de las teorías que fundamentan dicho trabajo.

ACTIVIDAD N°2

HISTORIA DE LA DERIVADA

Descripción:

El aula de clases, tiene una extensa lista de conceptos que aprender, pero muy pocas veces se incluye en ésta los personajes que le dieron sentido y forma a las teorías que hoy estudiamos. El interés principal que posee esta clase es que cada uno de los estudiantes conozca la parte histórica y epistemológica del concepto de derivada.

Para esto, ellos tendrán como herramientas un cuento y dos videos que muestran los precursores más importantes del concepto, además, se plantea desarrollar una línea de tiempo donde mostrarán su comprensión, teniendo en cuenta las actividades mencionadas. Finalmente, se abre una discusión en torno a las líneas de tiempo, y de este modo llegar a un acuerdo particular con respecto a quienes han aportado al perfeccionamiento de la derivada.

Etapas:

Esta actividad tiene cuatro etapas específicas: primero la lectura conjunta del cuento de la derivada “Loca noche” que está en una página del blog “Lo divertido del cálculo”; segundo, escuchar y observar los videos universo mecánico 1 y 2; tercero, realizar la línea de tiempo según sus consideraciones y cuarto, puesta en común de las líneas de tiempo realizadas. Cabe anotar que para esto los estudiantes tienen un tiempo aproximado de 120 minutos.

ACTIVIDAD N°3

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA DERIVADA

Descripción:

Con la intención de introducir a los estudiantes a la derivada e identificar la definición del concepto de derivada a partir del límite y la pendiente de la recta tangente a una función; se realiza una clase por medio de un modelo narrativo o magistral, dando a conocer los diferentes términos que ellos deben tener en cuenta para identificar el concepto.

De igual forma, se realizan ejercicios de aplicación para deducir la derivada a partir del límite y la pendiente de la recta tangente a una curva.

Etapas:

Esta actividad se estructura en tres etapas que impulsan la comprensión del concepto de derivada: definiciones iniciales, ejercicios sobre pendiente de la recta tangente y opiniones sobre la actividad.

Las definiciones iniciales consisten en explicar conceptos tales como: intervalo, límites laterales, recta secante, recta tangente, pendiente, recta tangente a una curva, derivada y aquellos que se dan a partir de aplicaciones como lo son la velocidad, tasa de variación media e instantánea. Así mismo, sus diferentes representaciones por medio de una gráfica que da a conocer las diferencias entre la recta tangente y la secante, además, su relación con el concepto de derivada.

Los ejercicios sobre la pendiente de la recta tangente se explican por medio de cuatro pasos² que son:

1. A la función x se le incrementa en Δx : $f(x + \Delta x)$

² Matemáticas VI... un paseo sencillo e introductorio al cálculo, consultado el 23 de octubre de 2013, en: <http://books.google.es/books?id=kbW5ocuv0AoC&pg=PA115&dq=matem%C3%A1ticas%20tangente&hl=es&sa=X&ei=YO9mUozHHobLkQfTo4DIBA&ved=0CFYQ6AEwBw#v=onepage&q=matem%C3%A1ticas%20tangente&f=false>

2. A lo obtenido se le resta la función original: $f(x + \Delta x) - f(x)$

3. Se divide todo por Δx : $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4. Se toma el límite cuando Δx tiende a cero: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Finalmente, los estudiantes escriben sobre las experiencias de clase, respondiendo a tres interrogantes, como lo son: ¿Cómo se sintió?, ¿qué aprendió?, ¿cómo le pareció?

ACTIVIDAD N°4

LA DERIVADA

Descripción:

Teniendo en cuenta la importancia que comprende para este proyecto la asimilación del concepto de derivada, se inicia la clase con la interpretación geométrica de la derivada, por medio de un ejercicio ya planteado en la actividad anterior, para el cual se calcula la pendiente de las rectas que limitan con la recta tangente, de igual forma se hace uso de del aplicativo *Geogebra* para aproximar al estudiante a la comprensión gráfica del concepto.

Etapas:

Esta actividad posee las siguientes etapas: descripción del concepto de derivada por medio de la interpretación geométrica, resolución de problemas y definición gráfica del concepto.

La primera parte consiste en calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, para obtener esto es necesario hallar la pendiente de rectas que se aproximan a la recta tangente en el punto, para lo que se realiza una gráfica con las siguientes casillas: coordenadas de Q_i y pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q_i . Para completar la tabla se explica el procedimiento que tiene en cuenta el diferencial que determina los cambios en la variable independiente y que usualmente representa una cantidad pequeña sea negativa o positiva (Δx), por lo cual se indica que para reemplazar los datos en la pendiente se emplea la fórmula $\frac{y_i - y}{x_i - x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, se explica y se hace la aclaración; que se puede emplear cualquiera de las dos ya que corresponden a datos iguales.

La segunda parte concerniente a la resolución de problemas, los estudiantes emplean el método operativo para resolver lo que se les propone en el blog.

Luego de efectuar las operaciones, corroboran sus resultados con el aplicativo en *Geogebra*, donde se les da una gráfica que tiene la función que ellos necesitan para completar la solución del problema, en esta etapa ellos pueden modificar los datos que aparecen en los deslizadores y mover las rectas al punto que deseen, pero el modelo ya está realizado por las docentes en formación. A partir de esta actividad de modelación computacional de tipo exploratorio, el estudiante se apoya para darle solución a los problemas planteados.

ACTIVIDAD N°5

LA DERIVADA Y FORO VIRTUAL

Descripción:

Con el fin de darle continuidad a las actividades propuestas la clase anterior, durante estas dos horas de clase los estudiantes analizarán los problemas tanto algebraicamente como intuitivamente, hallando la pendiente de la recta tangente y haciendo los análisis conceptuales, respectivamente. A medida que ellos intentan darle solución a los problemas las profesoras pasan por cada uno de los puestos indagando por las posibles respuestas y el procedimiento para realizarlas, finalmente, cada uno de los subgrupos comparte con el grupo los análisis realizados.

Etapas:

La actividad se desarrolla en dos etapas fundamentalmente, las cuales son: trabajo en equipos de 3 o 4 personas en la solución de los dos problemas propuestos y la exposición de los análisis realizados por cada uno de los equipos a sus compañeros.

Los estudiantes tendrán el espacio suficiente para resolver los problemas, interactuar con la aplicación que simula las situaciones problema en *Geogebra* y confrontar las ideas que les surge al hacer el análisis de cada uno de ellos, para finalmente llegar a un acuerdo como equipo; durante este tiempo las profesoras recorrerán por los equipos formados orientando la solución de las posibles dudas que resulten e indagarán por los análisis ya concretados.

En la segunda parte los equipos elegirán un representante que dé a conocer las ideas a las que llegaron, de esta manera, las docentes podrán conocer cómo están comprendiendo el concepto y así llegar a un acuerdo en común. Antes de finalizar la sesión, los estudiantes comentarán las experiencias suscitadas en esta clase por medio del blog construido por las docentes. De igual forma, se establece como acuerdo que cada estudiante se debe registrar en la página www.edmodo.com, donde encontrarán un cuento que se relaciona con el concepto de derivada, dicha actividad corresponde a un foro, en el cual pueden consignar los interrogantes que surgen a partir del cuento y así se genere una discusión alrededor de éste.

ACTIVIDAD N°6

ACTIVIDAD FINAL LA DERIVADA

Descripción:

Después de haber realizado diferentes actividades que conducen al aprendizaje de la derivada, se propone realizar el análisis del aplicativo *Geogebra* por medio de la “V” heurística de *Gowin* en grupos; puesto que ésta permite hacer una descripción teórica y práctica del concepto de derivada, además, los estudiantes podrán confrontar su aprendizaje con los de los compañeros y de esta manera poder generar juicios de valor y conclusiones, finalmente los grupos formados compartirán sus análisis y las conclusiones realizadas.

Etapas:

La actividad se desarrollará en tres etapas: la primera que es la explicación de las docentes de lo que es la V heurística de Gowin y como debe ser diligenciada; la segunda etapa consiste en la interacción por grupos de 3 o 4 estudiantes con un modelo computacional construido en el aplicativo *Geogebra* para hacer el análisis y darle solución a las preguntas centrales de dicha uve. Mientras esto ocurre, las profesoras recorren por cada grupo formado atendiendo cada una de las preguntas y orientando a la solución de dichos interrogantes; la tercera etapa es la exposición de las soluciones de cada grupo, para esto los grupos deben elegir un representante que dé a conocer los análisis y las conclusiones realizadas para dichos interrogantes, a partir de esto generar el debate 2, que dé cuenta de la evolución en las preguntas formuladas por los estudiantes y su lenguaje matemático.

Dificultades y apoyos presentes a lo largo del estudio:

Cada una de las actividades se pudieron llevar a cabo, aunque no de una forma continua, ya que al ser estudiantes de último grado de bachillerato en los 3 últimos meses se suspenden continuamente las clases por las múltiples programaciones culturales propuestas por la institución y de las cuales ellos son responsables, además, los estudiantes no alcanzaron a abordar algunos de los conocimientos previos para la comprensión del concepto de derivada, como son la continuidad y algunas particularidades de los límites, a pesar de que la aplicación de la estrategia se pospuso en diferentes ocasiones; otra de las dificultades fue que los alumnos cuando tenían planeada una actividad extraclase programada por la institución, ingresaban al aula de clases con muy poca disposición y por ende, muy bajos de ánimo, lo que entorpecía el desarrollo de la

propuesta. Pese a estos inconvenientes, se logró recolectar diferentes materiales que evidencian el posible aprendizaje adquirido.

De igual forma, gracias a la disponibilidad de los miembros de la Institución Educativa como los directivos, estudiantes y docentes, en la creación de mejores ambientes de aprendizaje, de investigación, de sana convivencia, con la intención de formar ciudadanos capaces de asumir retos y transformaciones sociales (PEI), nos brindaron el material necesario para la realización del proyecto de investigación, como lo fue el aula de matemáticas dotado de computadores con internet para cada uno de los estudiantes; situación que facilitaba el proceso de intervención.

4.3. Herramientas computacionales *Geogebra*

Geogebra es un *software* libre de matemática para educación en todos sus niveles disponible en múltiples plataformas. Se puede integrar de forma dinámica representaciones diversas de los objetos integrando áreas como la aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística. Ha recibido numerosas distinciones y ha sido galardonado en Europa y USA en organizaciones y foros de *software* educativo³.

Ambos recursos son de fácil acceso, poseen multiplicidad y variedad de representaciones a partir de las cuales los estudiantes pueden hacer referencia a diferentes tipos de situaciones presentes en el aprendizaje de la matemática.

³ ¿Qué es *Geogebra*?, consultado el 31 de mayo de 2003 en: <http://www.geogebra.org/cms/es/info/13-what-is-geogebra>.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el proceso de análisis e interpretación de datos cualitativos, se construyeron tres categorías conceptuales apriorísticas relacionadas con los referentes teóricos y metodológicos de esta investigación. Para cada categoría se definen unas subcategorías que responden a la información obtenida durante el proceso de investigación; y con base en ellas se presentan los resultados en función de los objetivos específicos planteados para la investigación.

5.1. CATEGORÍA 1: Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la derivada haciendo uso de la modelación computacional.

Esta categoría apriorística hace referencia a las actitudes de los estudiantes frente al aprendizaje del concepto de derivada, teniendo en cuenta las diferentes posturas de ellos en las actividades desarrolladas; para esto se construyeron dos subcategorías que permiten evidenciarlas, tanto en el uso de la modelación computacional como en el aprendizaje del concepto. Dichas subcategorías son: actitudes hacia el aprendizaje del concepto de derivada y actitudes hacia el uso de la modelación computacional.

5.1.1. SUBCATEGORÍA 1.1: Actitudes hacia el aprendizaje del concepto de derivada

En el proceso se logra identificar que los estudiantes en su mayoría tienen una buena actitud en cuanto al aprendizaje del concepto de derivada, se muestran interesados, participativos y con

muchas expectativas sobre las actividades a realizar; como se puede observar en los comentarios de algunos estudiantes, quienes sobre la metodología empleada para el aprendizaje del concepto de derivada, refieren lo siguiente: *“hemos tenido la oportunidad de fomentar nuestro aprendizaje teniendo siempre en cuenta que todo lo podremos poner en práctica y no solo por enseñarnos y ya, han sabido cómo llegar a nuestras mentes, con clases que siempre tienen un objetivo específico y además con el fin de que nosotros aprendamos”* (Estudiante 2), *“utilizaron una rutina muy diferente a la que siempre se ha utilizado en los años académicos que he venido trabajando en la institución, utilizaron ese factor de la creatividad, porque no utilizaron siempre el tablero y la simple tiza, utilizaron como juegos, como técnicas para darnos a los estudiantes las motivaciones para seguir aprendiendo”* (Estudiante 3), *“fue un método muy creativo, ya que nos sacaron de la rutina diaria de lo que es el aprendizaje de la matemática, además nos mostraron la funcionalidad que tiene el computador para aprender temas como la derivada”* (Estudiante 4).

Teniendo en cuenta uno de los instrumentos de recolección de información como es el caso de la observación participante, se puede concluir de la primera actividad, donde se analizaron los conocimientos previos de los estudiantes, que algunos se mostraban intimidados con el cuestionario propuesto; además, pretendían que las docentes dieran respuesta a dichas preguntas. Sin embargo, al realizar un debate donde inicialmente se cuestionaba acerca de las concepciones que ellos tenían sobre el concepto de derivada, se muestran bastante interesados, manifestándose tal interés en una participación masiva.

En la segunda actividad que consistía en la historia de la derivada, se observan actitudes de impotencia debido a las problemáticas de conexión a internet, puesto que no les permitía observar

los videos propuestos para desarrollar satisfactoriamente las actividades; pese a esto, muestran interés para realizar la actividad, lo que de alguna manera puede evidenciarse en la entrega oportuna del trabajo.

Para la actividad donde se trabajaron los fundamentos teóricos del concepto de derivada a partir de la definición del límite y la pendiente de la recta tangente, destacamos que a pesar de ser una clase magistral donde los estudiantes se sentían confusos con la temática abordada, el grupo mantuvo una muy buena disposición en cuanto a la disciplina y la atención, participando activamente.

Para dar continuidad a la actividad anterior, en relación con la asimilación del concepto de derivada a partir del haz de secantes, la mayoría de los estudiantes se notaron animados y dispuestos a realizar la actividad propuesta. Se percibió una actitud muy positiva, debido a la utilización un *software* nuevo para algunos estudiantes y no tan nuevo para otros; sin embargo, una minoría de éstos asumió una actitud pasiva, mientras que otros estudiantes se dispersaron en algunos momentos, realizando actividades diferentes a las propuestas (como el ingreso a las redes sociales).

En una sesión posterior, se continúa con la actividad de la derivada y foro virtual, aquí la mayoría de estudiantes se mostraron desinteresados, dispersos y desanimados, debido a que enfocaron su atención en una actividad extraclase propuesta por la institución, que les impedía un buen desempeño en las tareas propias de la intervención. Solo unos pocos estudiantes presentaron una buena disposición para terminar el trabajo propuesto. Pese al poco interés de algunos, lograron entregar una parte de la tarea, mostrando que de alguna manera habían participado en la

clase. En este mismo espacio se hace la invitación a entrar al foro virtual, actividad en la que participaron sólo dos de los estudiantes.

En la última actividad propuesta para la intervención donde se propuso la realización de un análisis de algunos modelos computacionales con el aplicativo *Geogebra*, por medio de la “V” heurística de Gowin, la totalidad de los estudiantes se concentró en la realización del trabajo, mostrándose ansiosos y preocupados porque el instrumento presentado para la evaluación era nuevo para ellos; sin embargo, al tener claridad acerca de lo que debían realizar, la expresión de desagrado desapareció de sus rostros, y estaban analizando, calculando, conversando; se sentían motivados al considerar que tenían herramientas para dar respuesta a las preguntas planteadas, logrando además realizar preguntas de manera frecuente, facilitando así su buen desempeño en la actividad.

Tomando en consideración las opiniones de los estudiantes y las percepciones de las investigadoras durante el desarrollo de las diferentes actividades de la propuesta didáctica, se puede concluir que las actitudes de los estudiantes fueron positivas, lograron terminar las tareas propuestas y se mostraron interesados y comprometidos con su propio aprendizaje; sin embargo, en algunas ocasiones, las diferentes actividades extraclase que debían desarrollar los estudiantes en la institución se convirtieron en un obstáculo para el buen desarrollo del proyecto, ya que los estudiantes en ese momento, mostraban poco interés en la realización de las actividades.

5.1.2. SUBCATEGORÍA 1.2: Actitudes hacia el uso de la modelación computacional.

A partir de los instrumentos que dan cuenta de las actitudes de los estudiantes hacia el uso de la modelación computacional, se hace referencia al cómo se siente cada estudiante manejando herramientas computacionales para su proceso de aprendizaje; de donde se resaltan algunos comentarios por parte de ellos haciendo énfasis en la tecnología como un medio en el cual se encuentran inmersos por las necesidades actuales, como se puede evidenciar en el aporte de uno de los estudiantes, quien en la entrevista relata lo siguiente; *"en este tiempo actual la tecnología está avanzando cada vez más y es muy favorable que nosotros los estudiantes la utilicemos tanto para aprender como para divertirnos, y sí fue muy bien utilizada por parte de ustedes, porque dando así las ventajas o lo que nosotros hacemos bien; utilizando la tecnología, nos dimos cuenta que usando esas ventajas favorables aprendimos más de lo que pensábamos en un momento que podíamos aprender"* (Estudiante 3). De igual forma, en la misma entrevista otros hacen referencia a: *"hoy en día, los jóvenes nos encontramos muy familiarizados en los medios tecnológicos y estas herramientas, nos mueven más"* (Estudiante 4). *"El uso de herramientas computacionales, la verdad nos ha parecido bastante interesante, porque nos permite ver las matemáticas desde otro punto de vista, más divertidas. Yo creo que el uso de la herramienta computacional facilita el aprendizaje de las matemáticas, pero eso depende de cada estudiante, de cómo aproveche los espacios brindados para comprender los conceptos"* (Estudiante 6). Así mismo, se logró identificar una buena actitud en general por parte de los estudiantes, valorando el manejo de herramientas computacionales como elementos que motivan al estudiante en la participación de su proceso de aprendizaje; sin embargo, consideramos que aunque la herramienta computacional juega un papel importante en la motivación del estudiante para tener una buena disposición, también es necesario que se encuentren dispuestos a abrirse a nuevas

posibilidades de aprendizaje, a asumir retos, a aprovechar satisfactoriamente el uso del computador y a generar preguntas de tal manera que sus respuestas les posibiliten construir conocimientos.

Figura 4

Blog Lo divertido del cálculo

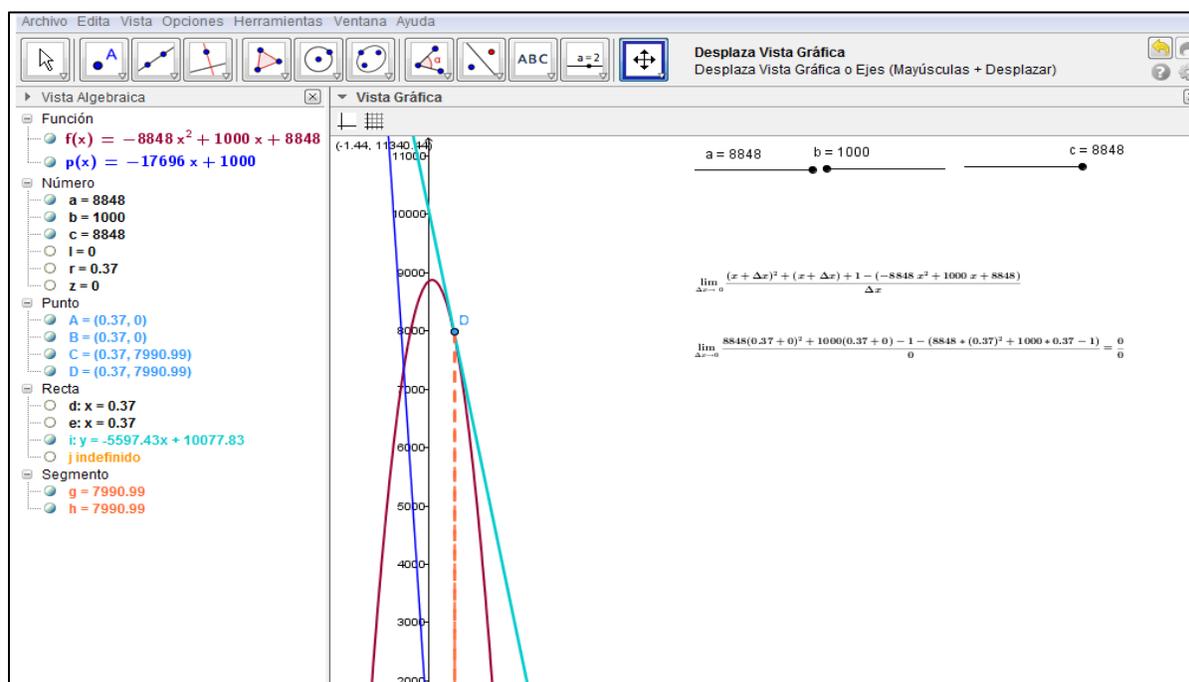


En cuanto a la utilización del *software Geogebra* en actividades de modelación computacional de tipo exploratorio, los estudiantes hacen comentarios como: *"la herramienta Geogebra fue una buena aplicación para generar representaciones de tipo gráfico, variacional desde la tasa de variación media, instantánea; esto permitió que tuviéramos un acercamiento al concepto de derivada, ya que además de que nosotros mismos poníamos los valores, nos permitía también ver cómo podíamos desplazar y en el momento de cambiar los valores, se podía ver cómo cambiaba la derivada, lo que buscábamos era cómo solucionar los problemas desde diferentes puntos de vista"* (Estudiante 1); *"las ventajas que tiene el software que no tiene una clase magistral, es la*

ventaja de aprender jugando, porque uno así sea manejando un puntero, puede experimentar mucha imaginación, en cambio con las gráficas en el tablero no. No solo ventajas tiene el programa, porque es muy maluco también uno solo estar experimentando un programa muy amplio sin un acompañante, entonces yo creo que las clases y el programa se llevan muy bien de la mano, porque por parte del software solo, no sería nada sin las clases" (Estudiante 3). Sin embargo, este mismo estudiante identifica una dificultad; "el programa Geogebra para no decirnos mentiras es un poco complicado de manejar, pero con conocimientos básicos y con los conocimientos que adquirimos por ustedes, se pudo llegar a la ventaja de poder aprender por parte de este programa, conceptos tan claros como la derivada y sus funciones, pero la dificultad que tuvimos algunos, y lo digo personalmente, es como el manejo del programa, por ser muy amplio en todo lo que tiene matemáticas o funciones" (Estudiante 3).

Figura 5.

Modelación exploratoria en Geogebra



Teniendo en cuenta la parte actitudinal frente a las clases, se deduce que inicialmente la interacción con el modelo computacional ya construido se dificulta para unos pocos; aunque se motivan cuando encuentran que sus respuestas operativas coinciden con el modelo computacional propuesto; y al operar con los elementos interactivos del modelo, podían observar las variaciones generadas y sus implicaciones. Sin embargo, se considera que hubiese sido pertinente dedicar una clase exclusivamente para familiarizar a los estudiantes con el manejo del programa *Geogebra*.

Definitivamente el uso de otras herramientas para la enseñanza de un tema específico motiva a los estudiantes, pues se muestran a la expectativa, curiosos de lo que pueda pasar, dispuestos a realizar las actividades; lo que proporciona un buen ambiente para la apropiación de conceptos de una manera significativa; sin embargo, estas actitudes varían dependiendo de la predisposición del estudiante para desarrollar las diferentes actividades, condición fundamental para que se logre un aprendizaje significativo, y en ocasiones ausente en muchos estudiantes. En cuanto al aprendizaje del concepto, por ser la derivada una temática que explica ciertas situaciones de la vida cotidiana, los estudiantes se muestran interesados y motivados hacia el aprendizaje de dicho contenido, ya que lo encuentran útil. En lo que se refiere al uso de la herramienta computacional, pudo percibirse que ésta propició en la totalidad de los estudiantes una actitud positiva, participativa y activa en el desarrollo de las diferentes actividades propuestas en el transcurso de la investigación.

5.2. CATEGORÍA 2: Contribución de la modelación computacional a la formulación de preguntas.

En esta categoría se tiene en cuenta uno de los principios en que se encuentra fundamentado el presente trabajo de investigación, que corresponde al principio de la interacción social y del cuestionamiento, categoría a partir de la cual se construyen dos subcategorías relacionadas con la evolución de las preguntas formuladas por parte de los estudiantes y el aporte de la modelación computacional en dicho proceso.

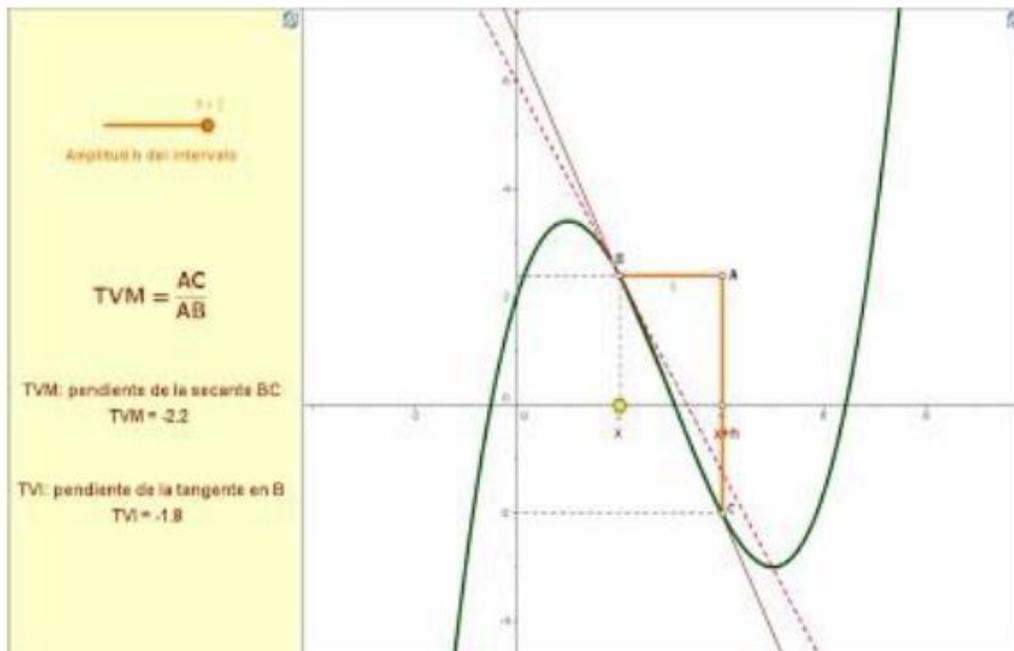
5.2.1. SUBCATEGORÍA 2.1: Evolución de las preguntas formuladas por los estudiantes.

Haciendo una comparación entre los dos debates que se propiciaron dentro del aula de clase, alrededor de la temática de derivada, se puede concluir que los estudiantes alcanzan a tener poco avance en la formulación de preguntas, puesto que en el diálogo con sus pares la mayoría de veces se limitan a indagar por la definición de conceptos, tales como: ¿qué es la derivada?, ¿qué es la recta tangente? y no proponen preguntas que permitan realizar un análisis de la aplicabilidad del concepto en su contexto; además, en el intercambio de preguntas con las docentes investigadoras se perciben ciertas barreras que impedían la construcción de preguntas relevantes, puesto que los estudiantes buscaban obtener respuestas rápidas y concretas que facilitaran la solución a los problemas propuestos. Sin embargo, pudo notarse que dos de los estudiantes al final de la intervención, consiguieron formular algunas preguntas que indagaban por la relación entre conceptos y la posibilidad de aplicar el concepto de derivada en otros contextos. Inclusive sus cuestionamientos implicaron por parte de las docentes investigadoras la ampliación de otros conceptos no contemplados inicialmente en las actividades propuestas, como

es el caso de puntos máximos y mínimos, un ejemplo de esto es la siguiente pregunta realizada por los estudiantes anteriormente mencionados: ¿por qué la derivada o tasa de variación instantánea en los puntos más altos y más bajos de la curva es cero?

Figura 6

Modelación computacional con Geogebra (actividad final)



Una variable que interviene en esta incipiente evolución de la formulación de preguntas, pudo ser la no participación en actividades propuestas como fue el foro virtual y el desconocimiento de algunos conceptos previos al concepto de derivada, así como la falta de tiempo para desarrollar otras actividades que aportarían más información para esta subcategoría.

Se puede decir que en esta subcategoría se presentó una evolución de las preguntas formuladas por parte de dos de los estudiantes, pese a la poca participación de algunos en las actividades

programadas para lograr evidenciar dicho proceso, además, en la interacción con las docentes se limitaban a realizar cuestionamientos sobre el manejo del aplicativo y no había una profundidad en la parte conceptual, caso contrario a los dos estudiantes mencionados, quienes lograron un avance en el proceso de formulación de preguntas tanto de estudiante – estudiante, como de estudiante – docente.

5.2.2. SUBCATEGORÍA 2.2: Papel de la modelación computacional en el proceso de formulación de preguntas

Por razones como las descritas al final de la subcategoría anterior, las evidencias que se lograron obtener en relación con esta subcategoría, son pocas; sin embargo, para dos de los estudiantes participantes en el estudio, las gráficas correspondientes a la actividad final de modelación computacional y V de Gowin, les permitió formular preguntas en torno al comportamiento de las funciones matemáticas que describían la situación estudiada, tales como: ¿por qué la derivada o tasa de variación instantánea en los puntos más altos y más bajos de la curva es cero?, ¿cuál es la relación del límite con la derivada?, ¿cuál es la relación entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea?. No obstante, la mayoría de estudiantes tenían que ser inducidos por las profesoras para que se atrevieran a realizar preguntas. Durante las actividades, los cuestionamientos planteados por ellos se referían más a la utilización de la herramienta con la que estaban interactuando, notándose una gran ausencia de preguntas problematizadoras, intuitivas y analíticas en relación con la temática estudiada.

En términos generales, se considera que la herramienta empleada para el aprendizaje del concepto de derivada, favoreció la construcción de preguntas significativas que permiten la

apropiación de algunos conceptos relevantes como el límite, la tasa de variación media, la tasa de variación instantánea, la pendiente de la recta tangente y la recta secante a una curva.

En relación con la contribución de la modelación computacional a la formulación de preguntas, se puede concluir que el aplicativo diseñado en *Geogebra* permitió un avance significativo por parte de los estudiantes en la apropiación del concepto de derivada desde la construcción de preguntas, pese a que la cantidad de estudiantes que logran una evolución en dicho aspecto, no correspondía siquiera a la mitad de la población objeto de estudio. Por otra parte, se considera que la poca participación de los estudiantes en las actividades que implicaban la formulación de preguntas, es un factor que obstaculiza el total cumplimiento del objetivo específico propuesto para esta categoría.

5.3. CATEGORÍA 3: Aporte de la modelación a la apropiación del lenguaje matemático.

Es importante resaltar que en esta categoría se tuvo en cuenta la apropiación del lenguaje matemático que se logró a partir del intercambio de significados desde la interacción estudiantes-estudiantes y estudiantes -docentes, lo que permite relacionar este hecho con el principio facilitador del Aprendizaje Significativo Crítico, denominado conocimiento como lenguaje. Al interior de esta categoría apriorística, se construyen dos subcategorías denominadas: comprensión, interpretación e intercambio de nuevos significados relacionados con el concepto de derivada, y el aporte de la modelación computacional a la comprensión gráfica del concepto.

5.3.1. SUBCATEGORÍA 3.1: Comprensión, interpretación e intercambio de nuevos significados relacionados con el concepto de derivada.

En el transcurso de cada una de las actividades se pudo evidenciar una evolución en los seis estudiantes, en cuanto a la apropiación del lenguaje matemático. Con la primera actividad que consistía en identificar los saberes previos de los estudiantes, se observa que reconocen con facilidad el dominio y rango de una función desde las gráficas; sin embargo, cuando la tarea consiste en hallar estos elementos desde una perspectiva algebraica, la totalidad de los estudiantes manifiestan su temor para enfrentar los procesos algorítmicos necesarios; lo que permite percibir que los estudiantes presentan cierta aversión por las representaciones algebraicas. Además, todos presentan dificultades para encontrar los límites laterales de las funciones cuando se les presenta una situación problema, hallándolos de manera intuitiva, sin emplear expresiones matemáticas que den cuenta de la solución. Cuando se les indaga sobre conceptos previos como funciones y límites a manera personal, los seis estudiantes se limitan a responder de forma textual, sólo unos pocos hacen el intento de plasmar lo que comprendieron, mostrando claridad en sus definiciones. Cuando se les pregunta por un concepto desconocido para ellos como la derivada, dos estudiantes lo relacionan con términos matemáticos ya conocidos por ellos como las funciones, mientras tres lo relacionan con derivados de productos gastronómicos, sólo uno de los estudiantes responde que la derivada para él era algo que estaba cambiando, como una función que dependía de una función inicial.

Figura 7

Pregunta 1. Diagnóstico

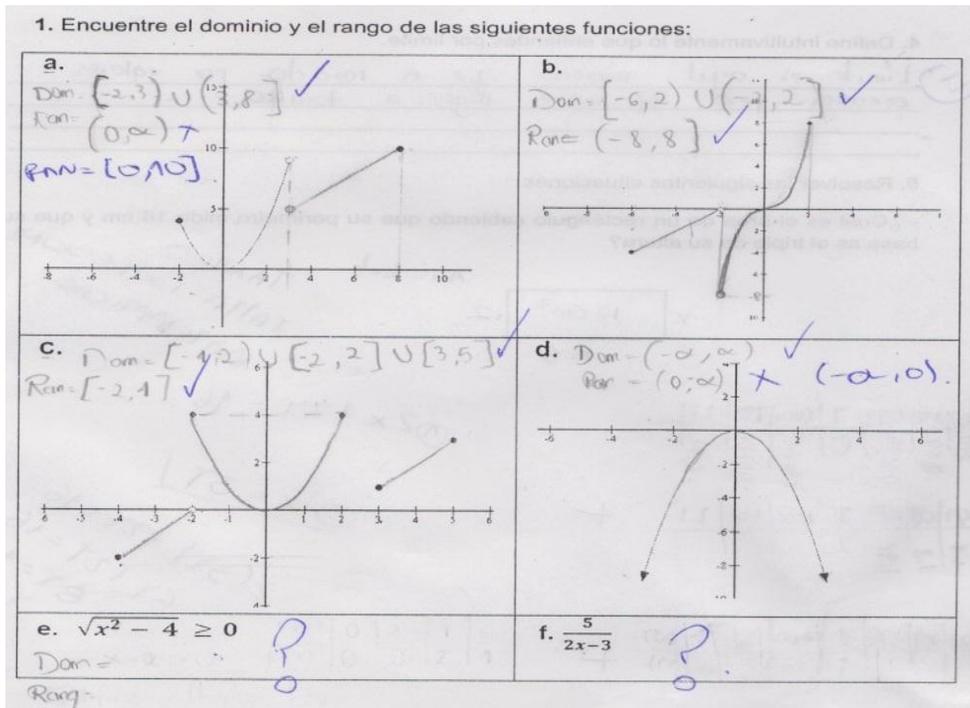
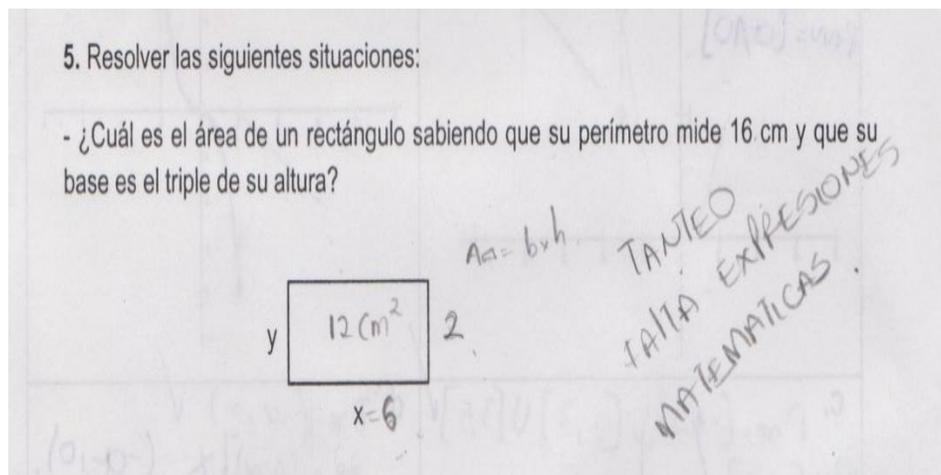


Figura 8

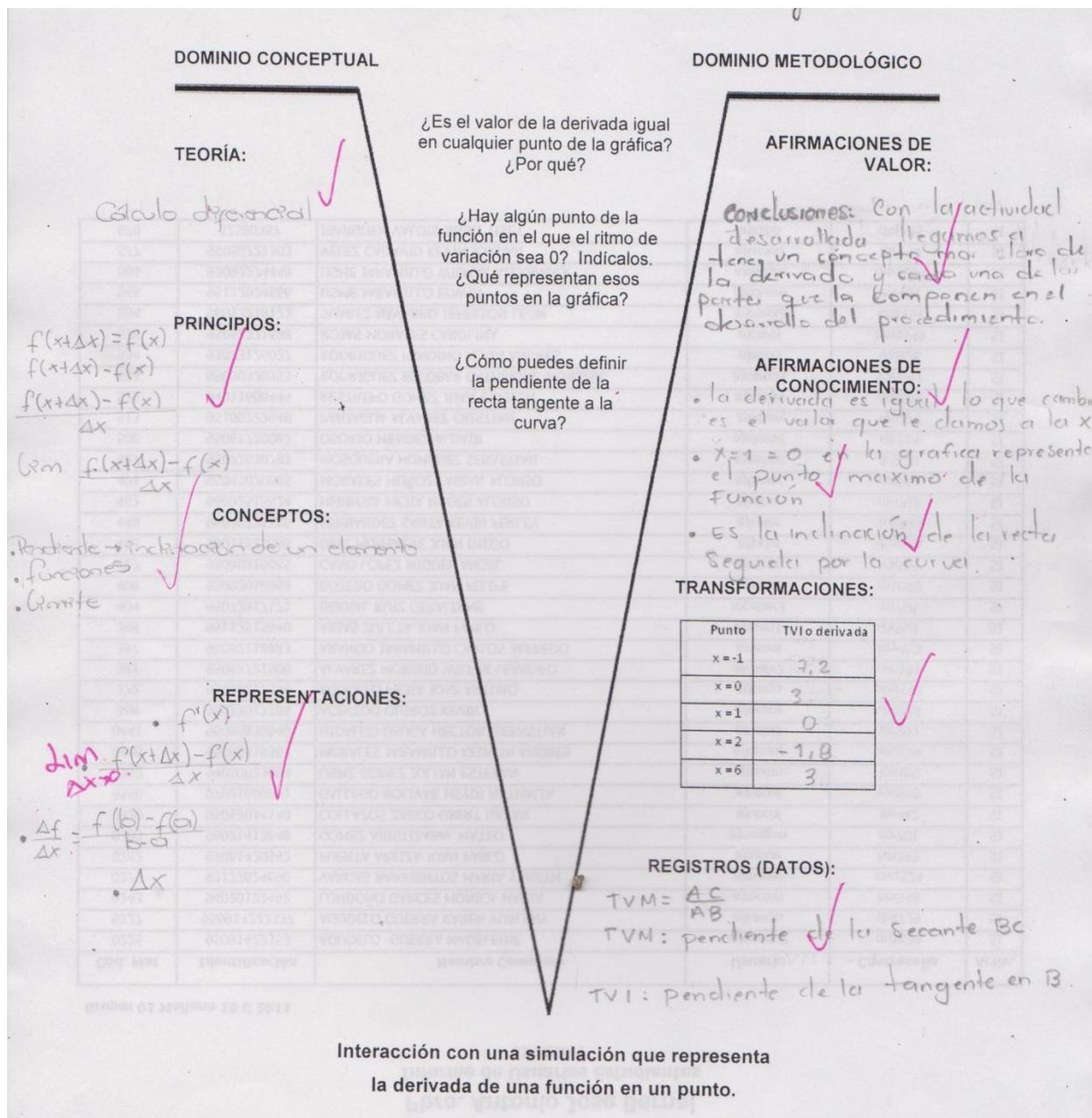
Pregunta 5 diagnóstico



En la segunda actividad, después de que los estudiantes conocieran la historia y evolución del concepto de derivada, tres de ellos responden a la pregunta ¿Qué es la derivada?, afirmando que es un cociente que incrementa (Estudiante 1), es una tendencia a... (Estudiante 5), es con respecto a algo que cambia (Estudiante 4). Con el desarrollo de las dos siguientes actividades que se titularon fundamentos teóricos de la derivada, la totalidad de la población objeto de estudio, logra reconocer algunas características importantes del concepto, como el delta y su funcionalidad; además, se familiarizan con la fórmula. En la actividad final con el modelo computacional construido en el aplicativo *Geogebra* y la V de Gowin, todos los estudiantes logran establecer una relación entre el dominio conceptual y el metodológico, ya que los seis formulan conclusiones que permiten identificar un lenguaje matemático acorde con la temática abordada, cuatro de ellos hicieron referencia a la definición del concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva y los otros dos mencionan que cuando el ritmo de variación de una función es cero, se encuentra la pendiente de la recta tangente, por lo cual definen el concepto como tasa de variación instantánea.

Figura 9

V de Gowin



El trabajo en grupo aportó en gran medida en el intercambio e interpretación de conceptos, lo que facilita la apropiación de los mismos; algunos estudiantes comentan sobre el aporte del trabajo: "se pueden conceptualizar las ideas, cada uno tiene un punto de vista diferente, cuando

se trabaja en equipo se busca un bien común de que todos concluyamos, sacar una conclusión que sea correcta, concreta, que sea verdadera y que esté más cerca de lo que en realidad se busque" (Estudiante 1). Este comentario llama la atención porque se percibe una visión que muestra una concepción dogmática en relación con el conocimiento; es decir, se observa una posición que considera el conocimiento como verdadero y absoluto; sin embargo, no se hará una profundización a este aspecto, ya que escapa a los propósitos de este trabajo. Otro comentario al respecto es: *"El aprendizaje por medio de grupo, favorece el aprendizaje de conceptos matemáticos, porque el trabajo grupal es más importante que el individual, porque en un trabajo en grupo se hacen muchas cosas y se llevan a mejores metas y sueños, que trabajando solos"* (Estudiante 3).

Tomando en cuenta el proceso de los estudiantes en la comprensión del concepto e interpretación de significados, se puede deducir que el desarrollo de las diferentes actividades y el trabajo en grupo, propiciaron un aprendizaje progresivo, pues, se partió del desconocimiento de los estudiantes con el propósito de lograr que al final de cada actividad éstos obtuvieran un nuevo aprendizaje que favoreciera su propia construcción del concepto; dicha construcción se logra evidenciar en la actividad final donde todos los estudiantes logran establecer una relación entre el dominio teórico y práctico del concepto de derivada, describiendo de manera adecuada las características conceptuales (fórmulas, conceptos bases, representaciones, etc.) y realizando conclusiones a partir de una aplicación modelada en *Geogebra*.

5.3.2. SUBCATEGORÍA 3.2: Elementos que aporta la modelación computacional a la comprensión gráfica del concepto de derivada.

Durante todas las actividades se evidenció en la totalidad de los estudiantes cómo para los ellos era más sencillo aprender desde el modelo diseñado en el *software*, a diferencia de cuando se dibujaba una curva en el tablero; algunos de los comentarios de los estudiantes lo reafirman: *“el uso de la herramienta computacional facilita el aprendizaje de la derivada, porque de alguna manera escrito es menos gráfico, mientras que la herramienta computacional permite visualizar la representación del concepto, aplicada en aspectos de la vida real”* (Estudiante 5); *“las clases regidas por el uso de herramientas computacionales ha ayudado en el aprendizaje de la derivada, porque podemos visualizar lo que realmente sucede con el concepto”* (Estudiante 2); *“las ventajas que tiene el software que no tiene una clase magistral, es la ventaja de aprender jugando, porque uno así sea manejando un puntero, puede experimentar mucha imaginación, en cambio con las gráficas por ejemplo, también no solo ventajas tiene el programa, porque es muy maluco también uno solo estar experimentando un programa muy amplio sin un acompañante, entonces yo creo que las clases y el programa se llevan muy bien de la mano, porque por parte del software solo no sería nada sin las clases* (Estudiante 3); *“las herramientas computacionales facilitan el aprendizaje significativo de un concepto, porque al tener el computador posibilita visualizarlo y se hace más fácil”* (Estudiante 3).

A partir de los comentarios anteriores, se considera que el uso de la modelación computacional ayudó a los estudiantes en la comprensión del concepto, debido que al transcurrir las clases se evidenciaba una evolución en la apropiación del concepto de derivada, ya que al inicio de las actividades, los estudiantes no tenían nociones sobre dicho concepto, lo que se puede

observar al realizar la pregunta ¿Qué es la derivada?, en respuesta a la cual un estudiante afirma que es lo que deriva de otra cosa, como los derivados de la leche (estudiante 4), otros dos estudiantes hacen referencia a que es un valor que ha sido extraído de otro, una transformación; posteriormente cuando se avanzaba en las clases, se encontró un progreso al indagar por la comprensión del concepto, donde cuatro de los seis estudiantes objeto de estudio daban respuestas que dejaban ver claramente la manera como estaban entendiendo la temática y las ventajas que les proporcionaba la herramienta, dichas declaraciones indican que la derivada es un cociente que incrementa (Estudiante 1), es una tendencia a... (Estudiante 5), es con respecto a algo que cambia (Estudiante 4), comentarios que muestran una evolución significativa de la comprensión del concepto, además, a partir de las actividades finales se puede evidenciar en sus definiciones una relación gráfica de la derivada, puesto que en la clase que tuvo un enfoque magistral los estudiantes no lograron comprender la variación de la distancia entre dos puntos de la recta secante a la curva mostrada en el tablero, mientras que cuando fue presentada posteriormente en la aplicación en *Geogebra*, para los estudiantes se hizo más clara la representación geométrica del concepto de derivada, a partir del cambio de la recta secante a la recta tangente, lo que permitió identificar el aporte de la modelación computacional a la comprensión gráfica del concepto, al considerar que el total de los estudiantes establecen una correspondencia entre la definición de derivada y la pendiente de la recta tangente a la curva y las tasas de variación.

Se puede deducir en términos generales que los seis estudiantes que fueron objeto de estudio en la investigación lograron identificar los aspectos más importantes que están involucrados en la derivada, tres de ellos definen con sus palabras y sin dejar a un lado el principio del concepto, que la derivada es la pendiente o inclinación de la recta tangente a la gráfica (curva) de una

función, los otros tres estudiantes definen la derivada como una tasa de variación instantánea. Por otro lado, un ejemplo del avance en la apropiación del lenguaje matemático, fue que inicialmente la totalidad de los estudiantes, identificaban el diferencial como “un triangulito” que cambiaba según el valor de la variable independiente; y finalmente, logran reconocer dicho símbolo como “delta de x” o el diferencial, lo que se observó en la socialización de los problemas resueltos y en el intercambio de significados entre los estudiantes y de ellos con las docentes investigadoras. Estas afirmaciones dejan ver que los estudiantes comprenden que la derivada, es precisamente un cambio, una variación en un punto determinado.

5.4. CATEGORÍA 4: Valoración de la diversidad de materiales educativos y estrategias de enseñanza.

A partir de los datos recolectados surgió una categoría emergente, que se hace visible al llevar a cabo una triangulación entre fuentes de información como diarios de campo y entrevistas realizadas a los estudiantes, aportes que dan cuenta de dos de los principios facilitadores de la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico que no fueron tenidos en cuenta para el desarrollo de la investigación; sin embargo, los comentarios de los estudiantes apuntan a estos aspectos, permitiendo así formular una nueva categoría de análisis de los resultados en la que se incluyen los principios relativos a la diversidad de materiales educativos y estrategias de enseñanza. Algunos comentarios de los estudiantes que dan sustento a esta categoría son: *“utilizaron una rutina muy diferente a la que siempre se ha utilizado en los años académicos que he venido trabajando en la institución, utilizaron ese factor de la creatividad, porque no utilizaron siempre el tablero y la simple tiza, utilizaron como juegos, como técnicas para darnos a los estudiantes las motivaciones para seguir aprendiendo”* (Estudiante 3), *“fue un método muy creativo, ya que*

nos sacaron de la rutina diaria de lo que es el aprendizaje de la matemática, además nos mostraron la funcionalidad que tiene el computador para aprender temas como la derivada” (Estudiante 4), *“las clases me parecieron muy interesantes, además facilita el dinamismo de la clase, puesto que estamos acostumbrados que la clase de matemáticas es el cuaderno, el tablero y fórmulas escritas”* (Estudiante 5).

Es importante resaltar que la dinámica de la comprensión de conceptos matemáticos a la que han estado acostumbrados los estudiantes es al método tradicional, donde prevalece el empleo de la pizarra y el libro de texto, donde normalmente se presentan ejemplos para posteriormente aplicar fórmulas y resolver problemas; por lo cual se considera que las herramientas computacionales favorecen la motivación de los estudiantes, que genera en ellos una buena disposición, propiciando así la comprensión del concepto de derivada.

Teniendo en cuenta los comentarios realizados por los estudiantes, se deduce que el uso de diferentes herramientas para la enseñanza de conceptos matemáticos es valorado satisfactoriamente por ellos, ya que normalmente la enseñanza de la matemática se aborda de manera tradicional, empleando únicamente la tiza, el tablero y el libro de texto.

Mientras que estrategias como la modelación computacional que hace uso de herramientas tecnológicas con las cuales los jóvenes de hoy se encuentran ampliamente familiarizados y su uso los predispone positivamente para su proceso de aprendizaje.

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

Teniendo en cuenta el análisis de resultados presentado en el capítulo anterior; se establecen las siguientes conclusiones que dan cuenta del cumplimiento de los objetivos planteados inicialmente.

Las actitudes que tuvieron los estudiantes en el aprendizaje del concepto de derivada fueron positivas, dado a que se mostraban participativos e interesados en la realización de las actividades propuestas, además, la modelación computacional motivó a los estudiantes, por ser un recurso que en la actualidad no es ajeno a ellos, herramienta que facilitando una buena actitud frente al aprendizaje de conceptos matemáticos.

El uso del software para modelar situaciones problemas que implicaban el uso del concepto de la derivada para su solución, ayudó a la formulación de preguntas por parte de los estudiantes, proporcionándoles herramientas para la comprensión del concepto de derivada, esto a través del dialogo que se generaba entre ellos y las docente investigadoras, lo que permitió un aprendizaje reflexivo, además, las gráficas presentadas en los modelos computacionales contribuyó a generar cuestionamientos que implicaron la ampliación de otros conceptos que no se encontraban contemplados inicialmente en las actividades propuestas, como fue el caso de máximos y mínimos.

.....La V de Gowin, como herramienta facilitadora del conocimiento, permitió que el estudiante hiciera un intercambio conceptual y metodológico, con la ayuda de la modelación computacional, donde se evidenció una apropiación del lenguaje matemático, dado que los estudiantes hicieron un reconocimiento de cada una de las variables que intervenían en el concepto de derivada, además, generaron representaciones no sólo variacionales sino gráficas del concepto, que les permitía identificar su aporte a las diferentes situaciones de su vida cotidiana.

A partir de los aportes brindados por los estudiantes, quienes hacen un paralelo entre los materiales tradicionales como la pizarra y libros de texto, con el manejo de otras herramientas como las computacionales, se considera la modelación computacional como un recurso no convencional y además didáctico para la enseñanza del concepto de derivada. Las estrategias empleadas en cada una de las actividades llevadas al aula de clase, fueron diferentes a las que comúnmente se usan para la enseñanza de conceptos matemáticos.

A partir de esta investigación no es pertinente afirmar que los estudiantes obtuvieron un aprendizaje significativo y además crítico, pues consideramos que para evidenciar esto, es necesario contar con un tiempo mayor a 3 semanas (6 clases); por ende lo que presentamos fueron los resultados obtenidos de un proceso no acabado para una comprensión del concepto de derivada.

6.2. Recomendaciones

En este apartado se presentan algunas consideraciones para tener en cuenta en la implementación de la estrategia didáctica desarrollada en esta investigación y en para próximas

investigaciones, donde se emplee la modelación computacional y la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico de conceptos matemáticos.

6.2.1. Para el aula de clase:

Es necesario tener acceso a salas de informática con internet para garantizar que los estudiantes puedan interactuar con la totalidad de las herramientas facilitadas por el docente investigador, de modo que no se limite su proceso de aprendizaje. De igual forma, el docente debe estar siempre alerta a las múltiples distracciones que ofrece el uso de internet, con el fin de que todos los estudiantes estén realizando la actividad propuesta para el aprendizaje del concepto.

Es pertinente realizar una clase exclusiva para el manejo del *software Geogebra* de tal forma que no haya inconvenientes con uso de esta herramienta en los modelos presentados por parte de los docentes investigadores.

Para el desarrollo de la estrategia didáctica, se recomienda emplear aproximadamente de diez a doce clases, para poder garantizar un aprendizaje significativo y además crítico del concepto.

Es importante implementar otras actividades que posibiliten una evidencia más clara en el desarrollo y avance en la formulación de preguntas, que den cuenta de una apropiación del concepto.

6.2.2. Para futuras investigaciones:

Para próximas investigaciones, se puede ampliar esta investigación, con una propuesta estructurada no sólo en la modelación de carácter exploratorio, sino también que el estudiante pueda construir su propio modelo matemático a través de una situación problema.

BIBLIOGRAFÍA

- Alzate, T. & Sierra, J. (1996). *El diario de campo: instrumento en el trabajo educativo*. Universidad de Antioquia. La Gaceta Didáctica.
- Andreu, M. & Riestra, J. (2003). *Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo*.
- Azcárate, 1990; Clark, Cordero, Cotrill, Czarnocha, Devries, St. John, Tolias & Vidakovik, 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Camacho & Depool, 2002-2003, citado por Matamoros, G; García, M; Linares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Universidad Autónoma del Estado de México.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Bautista, N. P. (2011). *Perspectivas teóricas de la investigación cualitativa: interpretativismo, hermenéutica, fenomenología e interaccionismo simbólico Doc 8: Proceso de la investigación cualitativa*, 43 - 59.

- Borbón, A. (2002). *El uso de la computadora para la introducción del concepto de recta tangente y la resolución de problemas no rutinarios de cálculo*. CINVESTAV del IPN, México.
- Caballero, J. (2010). *Nuevas tecnologías y enseñanza: Introducción constructiva, geométrica y dinámica del concepto de derivada*. Portada Alta, Málaga, España.
- Cardona, R. (2012) *Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo*. Trabajo de investigación para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de Colombia.
- Cerda, H. (1991). *Los elementos de la investigación*. Editorial El Buho LTDA.
- Contreras, L. (2000). *Interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función: un estudio realizado con estudiantes de bachillerato*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Corica, A. (2009), *Aprender Matemática en la Universidad: la perspectiva de estudiantes de primer año*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias REIEC.
- Cortés, J; García, J. & Núñez, G. (2003). *Software para la enseñanza de la derivada*. Matemática Educativa UMSNH.

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Engler, A; Vrancken, S. & Müller, D. (2003). *Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados*. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Prov. de Santa Fe (Argentina)

Front, V. *Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada*. Universidad de Barcelona.

Gámes, I. & Navarro, R. (2013). *El estado del conocimiento sobre la educación mediada por ambientes virtuales de aprendizaje*. Revista RMIE, nº 56 volumen 18.

García, M. & Dolores, C. (2011). *Derivada: una propuesta para su comprensión*. Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García, M; Llinares S. & Sánchez-Matamoros G. (2011). *Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures*. International Journal of Science and Mathematics Education, 9(5), 1023-10451.

García, M. & Gavilán, J. (2012), *Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor*. Revista Enseñanza de las Ciencias nº 30.3

Halloun, I. (2004). *Schematic Modelling for meaning learning of Physics*. Journal of research in science Teaching, New York: v. 33, n 9, 1996; P. 1019 – 1041.

Jiménez, J. (2013). *Por una visión dinámica y global de los conceptos del cálculo y su enseñanza: el caso de la derivada*. Universidad de Sonora; CONACYT 35522-S

Jonassen, D. (1996). *Learning from, learning about, and learning with computing: a rationale for mindtools*. *Computer in the classroom: mindtools for critical thinking*. (pp.3-22)
Englewood Cliffs, New Jersey: Merrill Prentice- Hall.

Lawrence, I. (2006). *Challenges and Opportunities in computational modeling*. Memorias congreso; *Modeling in Physics and Physics Education*, realizado en agosto 20-25, Amsterdam, Netherlands.

López, S.; Veit, E. & Araujo, I. (2012). *El uso del diagrama avm como instrumento para la implementación de los principios de la teoría del aprendizaje significativo crítico en actividades de Modelación computacional para la enseñanza de la física*. Universidad de Antioquia, Colombia; Instituto de Física de UFRGS. Brasil.

López, S.; Veit, E. & Araujo, I. (2011). *Modelación computacional apoyada en el uso del diagrama V de Gowin para el aprendizaje de conceptos de dinámica Newtoniana*. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, v. 10, n. 1, p.202-226.

López, S.; Veit, E. & Araujo, I. (2014). *La formulación de preguntas en el aula de clase: Una evidencia de Aprendizaje Significativo Crítico*.

Lozano, Y. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite*. Trabajo de grado. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Bogotá.

Macias, D. (2007). *Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación n° 42/4 – 10 de abril.

MEN (2004). *Una llave maestra Las TIC en el aula*. Recuperado de: <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87408.html>

MINISTERIO DE TIC. *Normatividad*. Recuperado de: <http://www.mintic.gov.co/index.php/docs-normatividad?sid=57:Resoluciones>

Moreira, M. (2000). *Aprendizaje significativo crítico*. Instituto de Física de UFRGS. Brasil.

Moreira, Marco A. (1999). *Aprendizagem significativa*. Instituto de Física de UFRGS. Brasil.

Moreira, M. (2010). *Abandono de la narrativa, enseñanza centrada en el alumno y aprender a aprender críticamente*. Instituto de Física de UFRGS. Brasil.

Moreno, L. *Instrumentos matemáticos computacionales*. CINVESTAV – IPN, México.

Matamoros, G; García, M; Linares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Universidad Autónoma del Estado de México.

Ortega, T & Sierra, M. (1998). *El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza*.

PEI (2007). *Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño*. Comité de calidad.

Pino, L.; Diaz, J.& Front, V. (2011). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada*. Universidad de Granada; Universidad de Barcelona, España. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.1, pp.141-178.

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1996). *Aspectos básicos sobre el análisis de datos cualitativos Metodología de la investigación cualitativa*. Ed. Aljibe, 197 - 218.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada. (Desarrollo del concepto)*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Sánchez–Matamoros G; García M. & Llinares S. (2006). «El desarrollo del esquema de la derivada». *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (1), pp. 85-98.

- Sánchez–Matamoros G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S. (2012). *Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto.*
- Stoke, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones MORATA S.L. Madrid.
- Tenreiro, V.& Márquez, V. (2006).*Diseño y validación de actividades de laboratorio para promover el pensamiento crítico de los alumnos.* Revista EUREKA, nº 3.
- UNESCO (2006). *La integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los Sistemas Educativos.* International Institute for Educational Planning. Buenos Aires, Argentina.
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Editorial Gedisa, S.A. Barcelona, España.
- Vega, M. (2011). *Análisis de la construcción del concepto de la derivada en un primer ciclo de enseñanza superior asistida por ordenador.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva.
- Vega, P. & Merchán, A. (2011). *La revolución educativa del modelo 1 a 1: condiciones de posibilidad.* Revista Iberoamericana de Educación, nº 56.

Villa-Ochoa, J; Borba, M. (2011). *Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra*. En García, Gloria (Ed.), *Memorias del 12º encuentro colombiano de Matemática Educativa* (pp. 667-673). Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín.

Villa-Ochoa, J. & Ruiz, M. (2010). *Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de noción variacional*. *Educação matemática pesquisa*, 514 - 528.

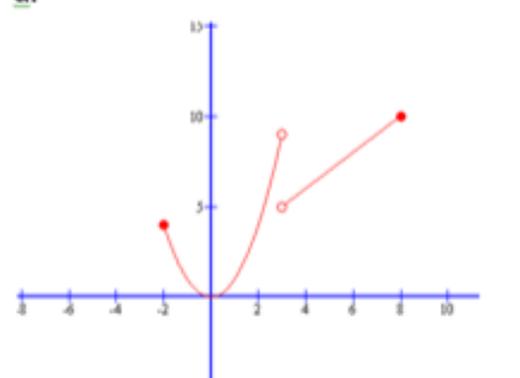
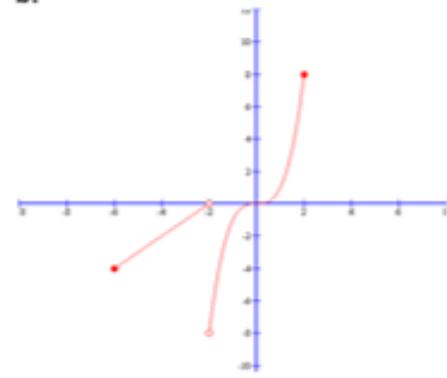
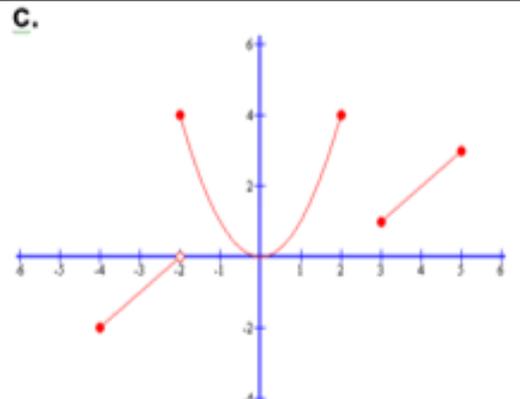
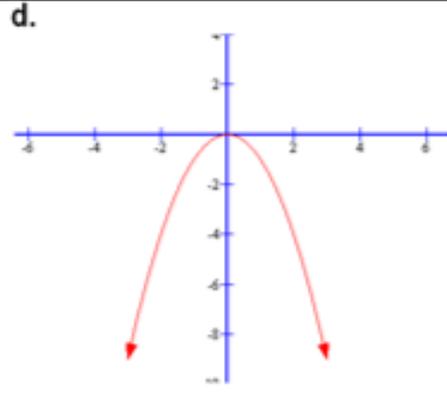
ANEXOS

ANEXO 1: DIAGNÓSTICO

DIAGNOSTICO

<h1 style="margin: 0;">ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA</h1>		 <p style="margin: 0; font-size: small;">UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1957</p>
ELABORADO POR:	Verónica Andrea Giraldo Urrea María Cristina Henao Cañaverál	
GRADO:	11°	
DURACIÓN:	120 minutos	
OBJETIVO:	Identificar los conocimientos previos de los estudiantes con relación al concepto de derivada.	

1. Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones:

<p>a.</p> 	<p>b.</p> 
<p>c.</p> 	<p>d.</p> 
<p>e. $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$</p>	<p>f. $\frac{5}{2x-3}$</p>

2. Según lo visto en clase, para ti ¿qué es una función?

3. Encontrar los límites laterales de las siguientes funciones.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 5x + 6)$

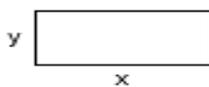
b. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x})$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2}$

4. Define intuitivamente lo que entiendes por límite.

5. Resolver:

- ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?



6. Cuando escuchas la palabra derivada en clase de matemáticas ¿a qué crees que se refieren con este término?

“El objetivo principal de la educación es crear personas capaces de hacer cosas nuevas, y no simplemente repetir lo que otras generaciones hicieron” Jean Piaget

BIBLIOGRAFÍA Y CIBERGRAFÍA	Ejercicios de continuidad, consultado el 5 de Septiembre de 2013, en: http://148.216.10.84/diferencial/ejercicios_de_continuidad.htm Ministerio de Educación. “Temas y actividades matemáticas”
---------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ANEXO 2: CUENTO

LOCA NOCHE

Nicolás era un joven de primer semestre de ingeniería, desde niño había soñado con construir grandes edificaciones, hacer planos y divertirse mucho en su profesión, él sabía que el componente básico de su carrera era la matemática, más específicamente una rama de ella llamada cálculo y aunque de antemano sabía que su potencial no eran las matemáticas, estaba dispuesto a estudiar duro para lograr la meta que se había impuesto; a pesar de sus esfuerzos, a Nicolás no le estaba yendo muy bien en sus exámenes, el cálculo diferencial se había convertido en una pesadilla para él, no terminaba de comprender un concepto cuando en clases ya estaban estudiando otro. Hasta el momento ya sabía qué eran las funciones, sus clases y sus características, qué eran los límites y sus propiedades y cuándo una función era continua o discontinua, pero tenía graves problemas para comprender lo que era una derivada, sentía que no era suficiente con lo que el profesor les había dado a conocer y ahora sólo tenía 8 días para preparar su examen; inquietado buscó en la web y en libros, pero ninguno de estos medios logró darle respuesta a lo que él buscaba; agobiado se fue a la cama, quería encontrar pronto una respuesta a sus inquietudes; esta noche fue muy particular, pues no se soñó en una gran constructora teniendo éxito como ingeniero, ahora se veía en un cuarto oscuro donde constantemente pasaban imágenes de gráficas de funciones, de límites y de personajes históricos como Newton que habían contribuido al desarrollo de la matemática, al fondo logra distinguir la figura de un personaje que jamás había visto y ahora se acercaba a él, era un anciano muy bajo calvo y con una larga barba, ¿quién eres?, pregunta Nicolás asustado, soy Mus y sólo tengo esta noche para ayudarte, contestó el anciano, ¡ayudarme! ¿Con qué?, creo que tienes inconvenientes

con el aprendizaje del cálculo, específicamente con la derivada y yo tengo algunas herramientas que te pueden ayudar a comprenderlo; ¡ah sí! ¿Cómo? pregunta sorprendido Nicolás, ¡ya lo verás! y para esto debes estar muy atento. Dicho esto empezaron a descender por un túnel misterioso hasta llegar a un lugar de película, con estructuras de piedra impresionantes y sus personajes deambulaban con una especie de vestido, tanto hombres como mujeres, ¿Dónde estamos? preguntó Nicolás desconcertado, en Tiana respondió Mus, lugar de origen de Apolonio 200 años antes de Cristo (A.C), él fue quien dio inicio al problema de la tangente a una curva y si revisas bien tus conocimientos sabes a que me estoy refiriendo. Como puedes notar la derivada ha sido un asunto que ha sido motivo de inquietud desde hace millones de años, a pesar de ello sólo después de más de 200 años Pierre Fermat en 1629 continuó con las investigaciones hallando la recta tangente en un punto arbitrario de una curva y en 1638 decidió compartir su método con René Descartes quien tenía su propio método para hallar las tangentes a curvas algebraicas. 27 años después, Newton en 1665 tras analizar cada una de las propuestas anteriores desarrolló un algoritmo para derivar funciones algebraicas que coincidían con lo descubierto por Fermat años atrás; 10 años después Gottfried Leibniz (1675) publicó los mismos resultados encontrados por Newton, en su investigación conservó un carácter geométrico y trató a la derivada como un cociente incremental y no como una velocidad. Estos fueron los comienzos de este concepto tan importante en el estudio del cálculo, pues tiene diferentes aplicaciones según el interés de su uso; en tu profesión por ejemplo les interesa analizar razones de cambio, optimización y un sinnúmero de variaciones que podemos analizar en nuestro alrededor.

Ahora no olvides el recorrido que hemos hecho esta noche, es importante conocer de dónde viene lo que estamos estudiando y no intentes dar respuestas a la realidad por medio de las matemáticas; pues bien lo dijo Einstein (1879-1955) “cuando las leyes de la matemática se

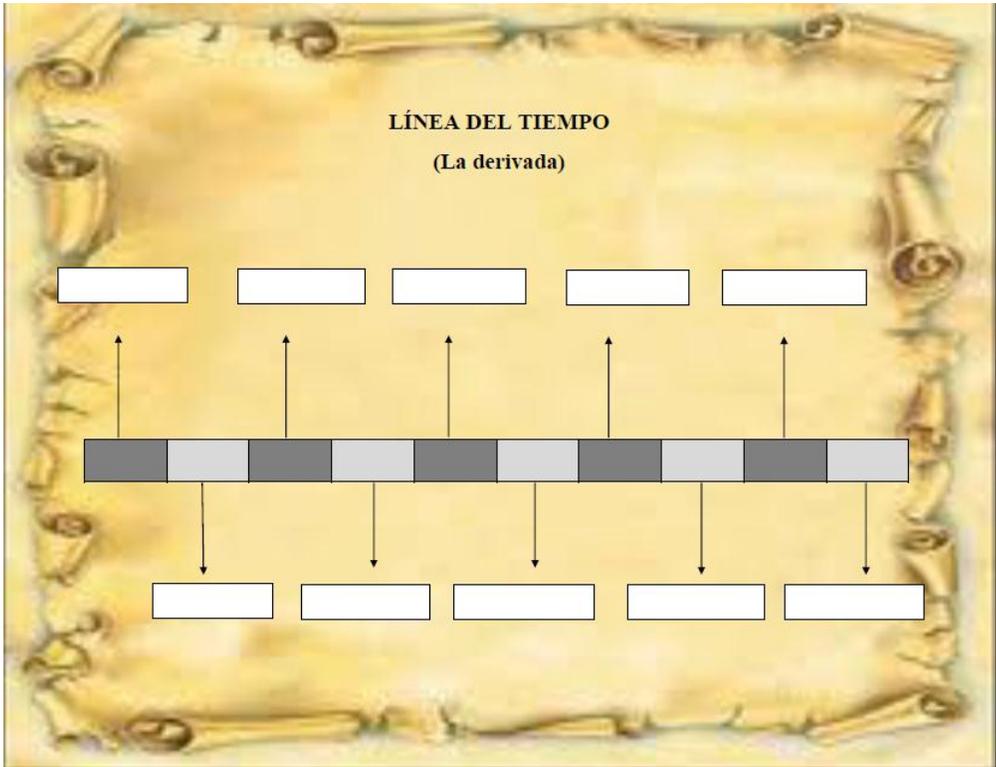
refieren a la realidad no son ciertas, cuando son ciertas no se refieren a la realidad”, así que estudia y conquista tu sueño, espero haberte ayudado; dicho esto Nicolás se despertó estudió y pudo comprender de una forma más clara algunos conceptos.

FIN

ANEXO 3: VIDEOS



ANEXO 4: LÍNEA DEL TIEMPO



ANEXO 5: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

ACTIVIDAD

Objetivo:

-Identificar la definición del concepto de derivada a partir del límite y la pendiente de la recta tangente a una función.

1. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en cada uno de los siguientes puntos:

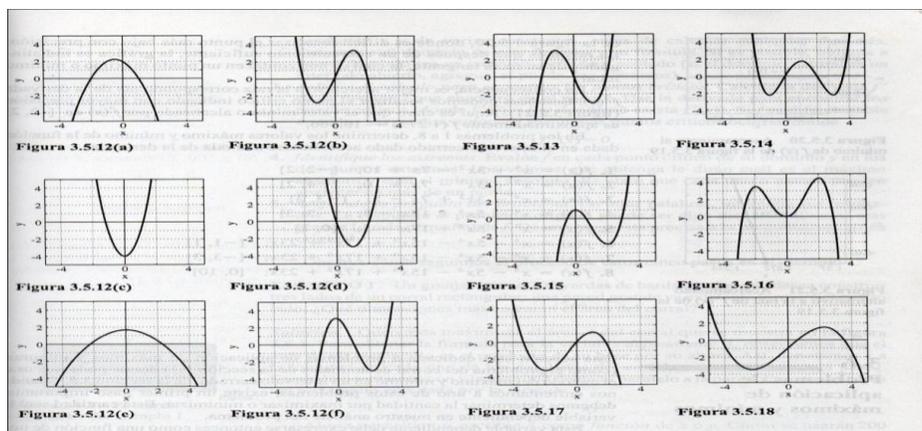
a) P(0,0) b) Q(1,1) c) R(2,4) d) S(3,9)

- Ordena de menor a mayor las pendientes halladas anteriormente.

- En un mismo sistema coordenado traza la gráfica de la función $y = x^2$ junto con las rectas tangentes a esta curva en los puntos P, Q, R y S.

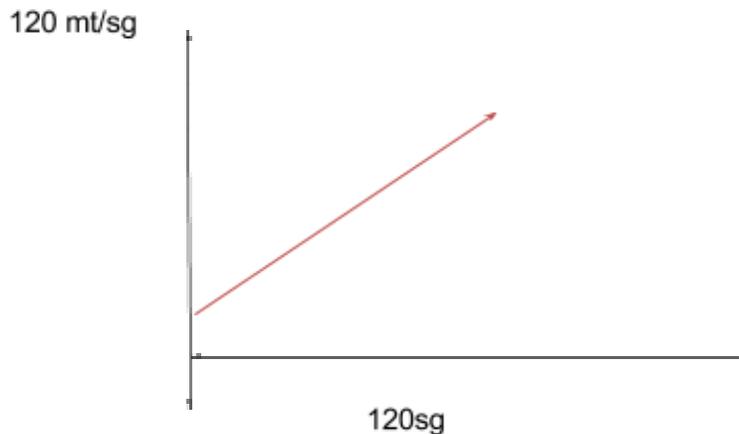
- ¿Qué relación existe entre el orden dado a las pendientes halladas y la posición de las rectas tangentes correspondientes?

2. Una la gráfica de la lista a-f con la gráfica correspondiente de la lista A-F



3. Sebastián es un ciclista de la liga Antioqueña y el próximo mes estará en Francia en uno de los tour más importantes de las competencias a nivel mundial. La semana pasada, preparándose para su competencia analizó junto con su entrenador la ruta que recorrería y en ella detectaron una pendiente (falda, subida) con una alta inclinación, de tal manera que habría un punto crítico al ascender por ella; ellos consultaron algunos datos de aquella pendiente y analizando llegaron a la conclusión que el recorrido respondía a la función $f(t) = t^2 + 4t$. Ayúdales a encontrar la velocidad que debe imponer en sus pedales para ascender a tiempo y continuar con la ruta.

1. ¿Cuál sería la velocidad si Sebastián debe ascender en 120sg?
2. ¿Qué longitud tiene esta pendiente (falda, subida)?
3. ¿Cuál es el espacio recorrido en 120 sg?



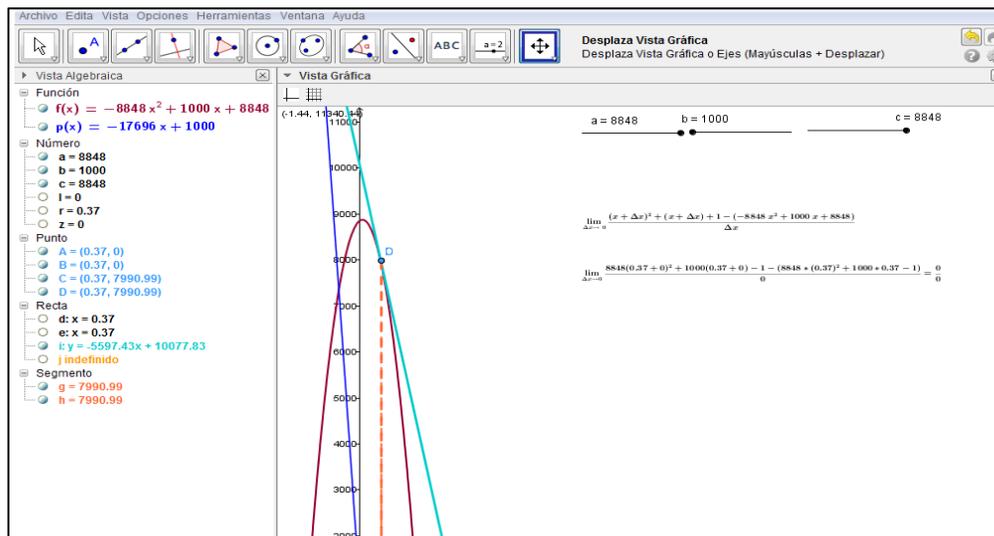
4. ¿Qué relación hay entre el espacio recorrido en la gráfica y en la función $f'(t)$?

ANEXO 6: ACTIVIDAD CON GEOGEBRA

<h1>LA DERIVADA</h1>	 <p>UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803</p>
OBJETIVO:	Describir el concepto de derivada a través de la gráfica de recta tangente presentada en el aplicativo <i>Geogebra</i> .
ELABORADO POR:	Verónica Andrea Giraldo Urrea María Cristina Henao Cañaveral
GRADO:	11° A
DURACIÓN:	120 minutos

Analiza cada uno de los siguientes problemas teniendo en cuenta la definición del concepto de derivada y la simulación en *Geogebra* que encontrarás a continuación.

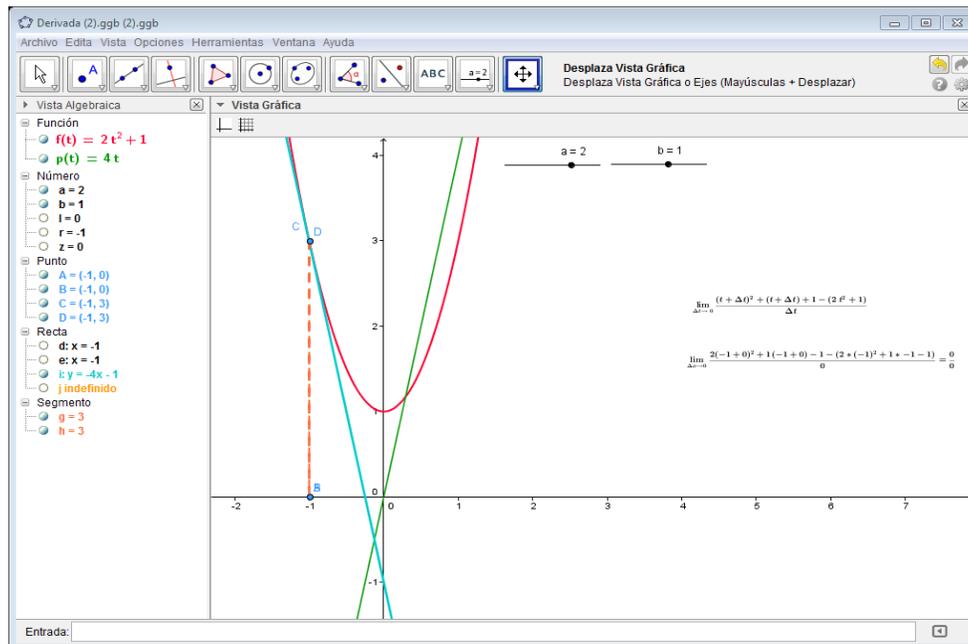
1. Un montañista profesional está pensando en emprender uno de sus retos más importantes, escalar el monte Everest, para esto debe analizar cada una de las adversidades por las que podría pasar. El Everest tiene una altura aproximada de 8848 mt, una altura muy elevada, lo que la hace ser la montaña más alta del mundo, el montañista teniendo en cuenta que es una montaña rústica con varios niveles de dificultad decide hacer 3 paradas para lograr dicha hazaña, él sabe que el paso de la parada 2 a la 3 es la etapa más difícil del ascenso, ya que, es allí donde empieza a tener la máxima inclinación dicha montaña, lo que podría dificultar su llegada a la cima. Encuentra la inclinación de la montaña cuando el montañista este a 8000 mt, si ésta corresponde a la función $f(x) = -8848x^2 + 1000x + 8848$
¿Qué sucede cuando el punto C es igual al D? ¿Por qué?



2. Cristian es un joven apasionado por los deportes, él se ha decidido por el lanzamiento de disco; después de muchos años de estar entrenando, su más anhelado sueño es llegar a competir en los juegos olímpicos, pero no es tan fácil, ésta es la función que describe el movimiento del disco lanzado por Cristian $f(x) = 2x^2 + 1$, él debe superar los 18 metros en 5 segundos. Si tu fueras el entrenador de éste deportista, ¿estarías satisfecho por los resultados obtenidos?, ¿por qué?

¿Por qué la recta j al hacerse $C=D$ es indefinida?

¿Qué significa en la gráfica la función $p(t)$ y por qué es una función lineal?



Actividad del concepto de derivada

TEMA:	La derivada
ELABORADO POR:	Verónica Andrea Giraldo Urrea María Cristina Henao Cañaveral
GRADO:	11ºA

OBJETIVO: Verificar por medio de simulaciones computacionales las propiedades de la derivada de una función en un punto y su relación con la pendiente de la recta tangente en estudiantes de grado once.

INTRODUCCIÓN

La presente actividad integra la enseñanza de las matemáticas, con las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Con ésta se pretende identificar el papel de los recursos computacionales en el aprendizaje del concepto de derivada en estudiantes del grado once. Justamente, el interés radica en emplear herramientas tecnológicas, que le permitan al estudiante, adquirir un aprendizaje significativo del concepto de derivada; es decir, que logren un acercamiento a dicho tema por medio de actividades de simulación computacional, que posibiliten el establecimiento de relaciones entre conceptos previos y nuevos conocimientos, donde los procesos de enseñanza y aprendizaje estén orientados por el intercambio de preguntas por parte tanto del docente como del estudiante, así mismo con la interacción con applets.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Llamamos tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ al cociente entre la variación de la función y la amplitud del intervalo:

$$TVM_{[a,b]} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

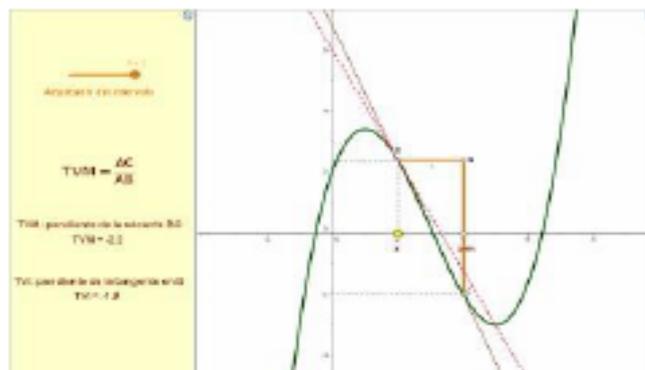
En la vida cotidiana es muy frecuente el uso de tasas de variación media, cuando se maneja información económica, demográfica, científica... A menudo nos da una idea bastante aproximada del ritmo de variación del fenómeno considerado en el intervalo al que se refiere.

Sin embargo, a veces resulta insuficiente la información que proporciona la tasa de variación media de una función en un intervalo, porque necesitamos conocer el ritmo de variación de un modo más preciso. De nada nos sirve conocer que la velocidad media a la que ha circulado un coche en un tramo de autopista ha sido de 110 km/h para poder determinar con certeza si en algún punto de ese trayecto ha sobrepasado la velocidad máxima permitida, que es de 120 km/h. Por ello, es muy habitual encontrar situaciones en las que lo que necesitamos es la variación instantánea de la función, es decir, el ritmo de variación de la función para un valor determinado: la velocidad en un instante determinado, la aceleración en un momento concreto, etc.

Desde un punto de vista geométrico, la tasa de variación media de una función en un intervalo es la pendiente de la recta secante a la función en los extremos del intervalo. En esta aplicación partiremos de esa consideración y analizaremos qué ocurre con la tasa de variación media cuando vamos reduciendo la amplitud del intervalo. Encontraremos así una forma de medir el ritmo de cambio de la función en un punto: obtendremos la tasa de variación instantánea de la función o, lo que es lo mismo, la derivada de la función en un punto de la misma.

INSTRUCCIONES

Para llevar a cabo la actividad debes dar clic [AQUI](#) donde encontrarás la gráfica de una función en el software Geogebra sobre la derivada de una función en un punto, como se muestra en la siguiente figura y así deberás mover el punto amarillo a medida que lo vayan exigiendo las preguntas problematizadoras. (Recuerda tener en cuenta la teoría que se enuncia más arriba sobre la derivada de una función en un punto).



De la TVM a la TVI

Vamos a ver qué ocurre al reducir el tamaño del intervalo, es decir, al hacer tender h a cero. Observa cómo varía la TVM a medida que cambia la posición de la recta secante con respecto a la recta tangente.

1. Coloca el punto amarillo en $x=0$ y el deslizador en $h=2$. Mueve el deslizador lentamente desde $h=2$ hasta $h=0$. Completa la tabla con los valores que vas obteniendo. ¿Hacia qué valor se va acercando la TVM cuando h se acerca a 0? ¿Qué ocurre con la recta secante cuando h se acerca a 0?

x	h	TVM [$x, x+h$]
0	2	
0	1	
0	0,5	
0	0,2	
0	0,1	
0	0,05	
0	0,02	
0	0,01	

2. Ahora mueve el deslizador lentamente desde $h=-2$ hasta $h=0$. Completa la tabla con los valores que vas obteniendo. ¿Hacia qué valor se va acercando la TVM? ¿Qué ocurre con la recta secante cuando h se acerca a 0?

x	H	TVM $[x,x+h]$
0	- 2	
0	- 1	
0	- 0,5	
0	- 0,2	
0	- 0,1	
0	- 0,05	
0	- 0,02	
0	- 0,01	

Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea en un punto indica el ritmo de cambio de la función en dicho punto. También la llamamos derivada de la función en ese punto.

3. Utilizando el mismo procedimiento que has empleado en los ejercicios 5 y 6, calcula ahora la derivada de la función en los siguientes puntos:

Punto	TVI derivada
$x = -1$	
$x = 0$	
$x = 1$	
$x = 2$	
$x = 6$	

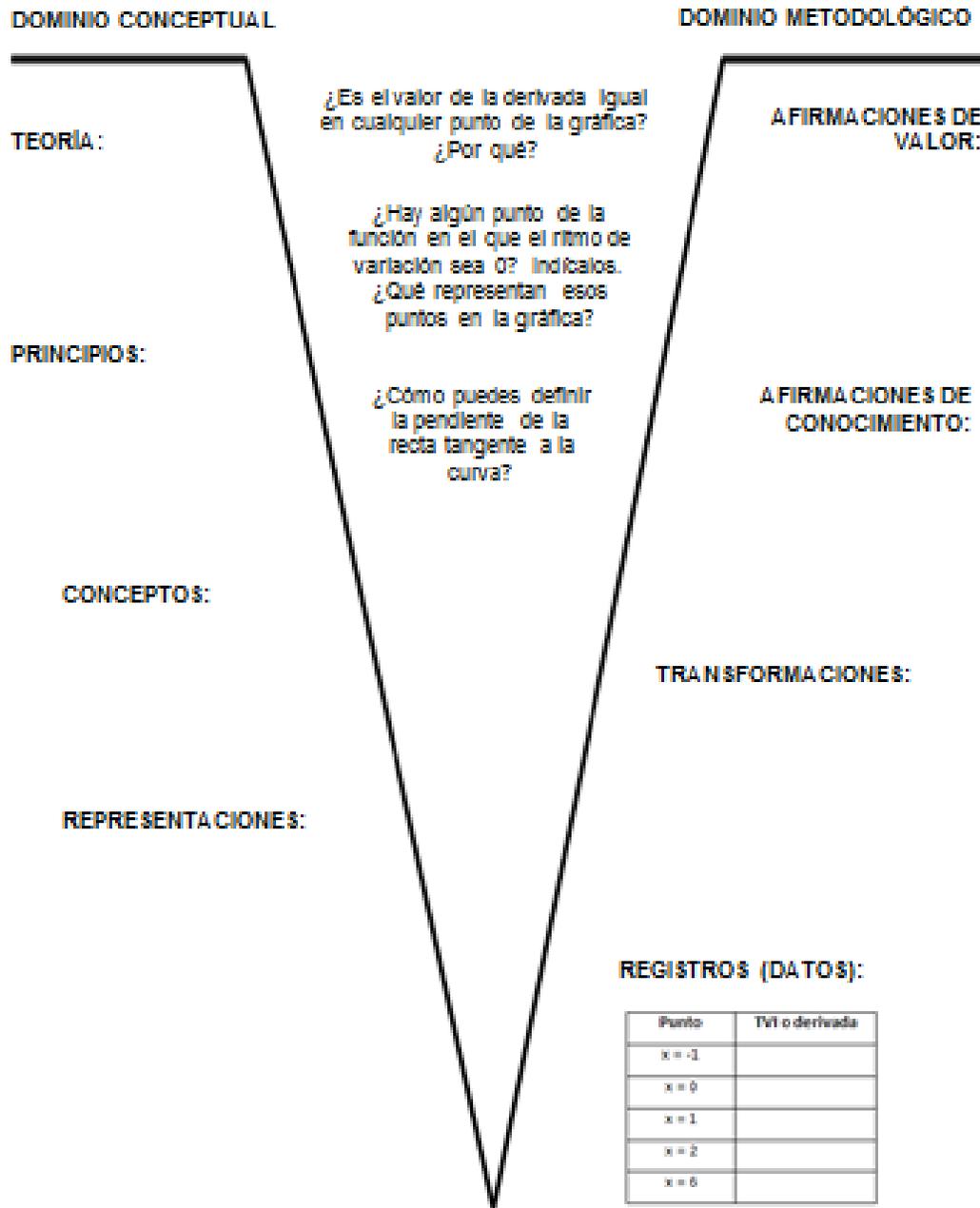
4. Encuentra el punto o puntos de la función en los que la derivada toma el valor que en cada caso se indica:

TVI o derivada	$x=$
2,5	
-2	
1	

5. ¿Hay algún punto de la función en el que el ritmo de variación sea 0? Indícalos. ¿Qué representan esos puntos en la gráfica?

6. ¿Cómo puedes definir la pendiente de la recta tangente a la curva?

**ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA LA ENSEÑANZA
DEL CONCEPTO DE DERIVADA: SIMULACIONES
COMPUTACIONALES Y V DE GOWIN**



Interacción con una simulación que representa
la derivada de una función en un punto.

ANEXO 8: CONSENTIMIENTO INFORMADO (Institución)

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS REPRESENTANTES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PRESBITERO ANTONIO JOSÉ BERNAL LONDOÑO

Nombre de la Investigación:

El papel de la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en estudiantes de grado undécimo

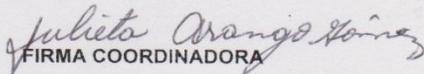
Investigadoras: Verónica Andrea Giraldo Urrea
María Cristina Henao Cañaveral

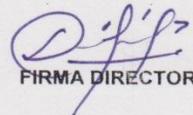
Grupo investigado: 11ºA

Presento ante ustedes nuestro compromiso ético. Entiendo como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en matemáticas del grado 11º A, los cuales han sido elegidos para este estudio, así como contribuir con cuestiones teóricas y metodológicas a la línea de investigación sobre las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes y a la institución.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, fotos, videos, etc.; se constituyan en bases de datos para dicha investigación.


FIRMA COORDINADORA


FIRMA DIRECTORA DE GRUPO

FIRMA DEL RECTOR

ANEXO 9: CONSENTIMIENTO INFORMADO (Estudiantes)

PROTOCOLO DE COMPROMISO ÉTICO Y ACEPTACIÓN DE LOS Y LAS PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN

Nombre de la Investigación:

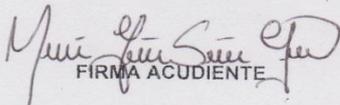
El papel de la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en estudiantes de grado undécimo.

Investigadoras: Verónica Andrea Giraldo Urrea
María Cristina Henao Cañaveral

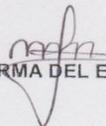
Presento ante ustedes nuestro compromiso ético. Entiendo como imperativo y deber, hacer uso adecuado y discrecional de la información recolectada en el marco de este trabajo, con el único fin de lograr los objetivos del estudio en cuestión y en la perspectiva de contribuir con aportes para el mejoramiento de la educación en matemáticas del grado 11º A, los cuales han sido elegidos para este estudio, así como contribuir con cuestiones teóricas y metodológicas a la línea de investigación sobre las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

El uso discrecional y adecuado de la información recogida y de su análisis, implica que la misma sólo será utilizada para los propósitos enunciados en el marco de este trabajo investigativo, que se evitará la alusión a nombres propios y se valorará con respeto y responsabilidad los aportes de cada uno de los participantes. Los análisis y resultados serán dados a conocer en primera instancia a los participantes y la institución.

Desde esta perspectiva, las personas que firman este documento autorizan al investigador para que las fuentes de información como escritos, entrevistas, foros de discusión, observaciones, fotos, videos, etc., se constituyan en bases de datos para dicha investigación.


FIRMA ACUDIENTE

FIRMA DEL DOCENTE


FIRMA DEL ESTUDIANTE

ANEXO 10: CERTIFICADOS





Maestría en Educación

79 años
Facultad de
Ciencias de la
Educación



Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad de Ciencias de la Educación
Maestría en Educación



Certifican que

MARIA CRISTINA HENAO CAÑAVERAL

Participó en el

c.c. 1128414102

**Congreso de
Investigación y Pedagogía**
Nacional Internacional

La educación en el siglo XXI: ser, saber y producir en la incertidumbre y el caos

Maestría en Educación. Uptc / Octubre 9, 10 y 11 de 2013

en calidad de

PONENTE

7 259

Dado a los 11 días del mes de octubre de 2013

OLGA NAJAS SANCHEZ

Decana Facultad de Ciencias de la Educación

LEONOR GÓMEZ GÓMEZ

Coordinadora General Congreso Ip

ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN 6963 DE 2010 MEN





Maestría en Educación

79 años
Facultad de
Ciencias de la
Educación



Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad de Ciencias de la Educación
Maestría en Educación



Certifican que

VERONICA ANDREA GIRALDO URREA

Participó en el

c.c. 1037236826

**Congreso de
Investigación y Pedagogía**
Nacional Internacional

La educación en el siglo XXI: ser, saber y producir en la incertidumbre y el caos

Maestría en Educación. Uptc / Octubre 9, 10 y 11 de 2013

en calidad de

PONENTE

7 260

Dado a los 11 días del mes de octubre de 2013

OLGA MARÍA SÁNCHEZ

Decana Facultad de Ciencias de la Educación

LEONOR GÓMEZ GÓMEZ

Coordinadora General Congreso Ip