UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación

Los procesos de generalización que desarrollan los estudiantes de décimo grado desde un contexto geométrico

Trabajo presentado para optar al título de Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas

YUDY ANADREA ZAPATA MUÑETÓN

Asesores

CATALINA BERMÚDEZ GALEANO

CARLOS JULIO ECHAVARRÍA

Dedico este trabajo

A mis padres Marta y Gonzalo y mi hermanita Alejandra, quienes siempre me han brindado todo su amor, apoyo incondicional; y son mi fuerza e inspiración para seguir adelante y superar las adversidades.

A mi tía Liliam Zapata por ser incondicional, por sus buenos consejos, y su compañía.

A mi familia en general por todo su apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios que me a dado la fortaleza para continuar adelante cuando he estado a punto de desfallecer y que me ha permitido llegar hasta este momento tan importante en mi vida.

A mis asesores Carlos Julio Echavarría y Catalina Bermúdez. Por su paciencia, dedicación, motivación, conocimientos, orientaciones y experiencia que han sido fundamentales en el desarrollo de este trabajo, y en mi formación profesional.

Por guiarme en este camino, por su comprensión, por sus consejos y por siempre estar ahí cuando los necesité.

A ellos mi admiración y lealtad

CONTENIDO

Índice de figuras

Índice de anexos

¿Hacia dónde vamos?

La siguiente experiencia de aula surge en las prácticas pedagógicas, y de mi interés por estudiar e identificar procesos de generalización en estudiantes de décimo en situaciones que parten de un contexto geométrico y de las observaciones realizadas a estudiantes del grado décimo de la institución educativa Centro Formativo de Antioquia CEFA.

Esta experiencia plantea: "Desde la metodología de aula taller proponer situaciones que partan de un contexto geométrico, y permitan el desarrollo de procesos de generalización en estudiantes de décimo grado del CEFA"

La validación de esta propuesta se posibilitó gracias al trabajo desarrollado con estudiantes del grado décimo, de la institución ya mencionada, quienes por medio del desarrollo de actividades sugeridas, me permitieron confrontar sus procesos de aprendizaje, con los referentes teóricos, y mi objetivo.

Durante el desarrollo de esta propuesta y cuya metodología de intervención fue la metodología de aula taller, pude observar que los estudiantes desarrollan procesos de generalización en matemáticas, cuando se enfrentan a situaciones donde la observación, experimentación y descripción son ejes fundamentales. Así mismo pude evidenciar que la metodología de Aula Taller incide de madera positiva en los estudiantes y su aprendizaje.

Parte 1

La idea

Para el segundo semestre del 2013 me matricule en el primer semestre de la práctica pedagógica, en el grupo de siete estudiantes, asesorado por los profesores Carlos Julio Echavarría Hincapié y Catalina Bermúdez Galeano.

La Facultada de Educación de la Universidad de Antioquia propone para el primer semestre de práctica, el desarrollo de un trabajo de observación en alguna institución educativa, el estudio del proyecto educativo institucional PEI, de dicha institución y la elaboración de una posible pregunta orientadora y unos posibles objetivos para el desarrollo de un trabajo de investigación a lo largo de los siguientes tres semestre de práctica pedagógica

Sin embargo la propuesta de nuestros asesores nos invita a romper esquemas, y nos desafía a configurar una práctica, que no solo orientaría nuestro perfil docente, sino que también contaría con una metodología diferente de trabajo en el aula; y en miras al desarrollo y sistematización de una experiencia de aula. Entendiendo la sistematización de una experiencia de aula como un proceso crítico y reflexivo de la experiencia vivida que permite el mejoramiento y reorientación de la práctica y la creación de teoría.

En el seminario de práctica nos dedicaríamos al estudio y enseñanza de las matemáticas por medio de la metodología de Aula Taller de la cual son promotores nuestros asesores. Dicha metodología se caracteriza por el aprender haciendo, el desarrollo de actividades en ambiente de taller, el trabajo colectivo, además está mediada por las guías de trabajo y el material didáctico.

> Dicha metodología consiste básicamente en enseñar las matemáticas y ciencias naturales básicas (física, astronomía y meteorología) de una forma novedosa, la idea central es la realización de actividades en ambiente de taller, donde el conocimiento se adquiere por descubrimiento y asimilación propios, despertando curiosidad en torno al tema o problema planteado, es decir, aprender-haciendo; esta metodología permite el trabajo interdisciplinario y en grupo, además es concebida como un elemento dinámico de acercamiento a la ciencia y a las matemáticas, mediante la búsqueda y fomentación de ambientes de continua creación y aprendizaje. (Echavarría y Bermúdez 2014 S.P)

En el taller los estudiantes tienen la oportunidad de construir estrategias de pensamiento de forma colectiva y participativa, situándose en el papel de protagonistas de su propio aprendizaje.

Así mismo también, estudiaríamos, la teoría relacionada con la sistematización de una experiencia de aula, y llevaríamos a cabo actividades prácticas sobre dicho tema;

planearíamos las actividades para desarrollar en la intervención en la institución, y compartiríamos los sucesos y hallazgos ocurridos durante nuestra intervención en el aula.

En este orden de ideas, desde el primer semestre de práctica, realizamos intervención en el aula, en el Centro Formativo de Antioquia CEFA, en los grados décimo y undécimo. Dicha institución atiende población femenina entre los 14 y 17 años de edad, y ofrece educación media académica y media técnica. Las intervenciones realizadas se desarrollaron bajo la metodología de aula taller y la implementación de diferentes guías de trabajo. Fue durante este proceso que me interesé en los procesos de generalización que las estudiantes desarrollaban; por tal motivo me idee una propuesta de intervención en el aula, que apuntó, a proponer desde la metodología de aula taller situaciones que partieran de un contexto geométrico, y permitieran el desarrollo de procesos de generalización en estudiantes de décimo grado del CEFA. Y a su vez me llevo a preguntarme ¿Cuáles son los procesos de generalización que desarrollan las estudiantes de décimo grado del CEFA, en situaciones que parten de un contexto geométrico, y son trabajadas bajo la metodología de aula taller?

Para dar respuesta a este interrogante me plantee un objetivo el cual pretende Identificar, y describir los procesos de generalización que desarrollan las estudiantes de décimo grado del CEFA en situaciones que parten de un contexto geométrico, y son trabajadas bajo la metodología de aula taller.

La geometría es el contexto en el que inicialmente se desarrollaron las actividades, y en el cual se pretendía la movilización del pensamiento espacial de las estudiantes, mediante la manipulación de materiales que les permitiera el aprendizaje creativo, descubrir propiedades geométricas, y prepararlas para formular generalizaciones posteriores, las cuales permitieran una relación de la actividad con otros pensamientos tales como el numérico y el algebraico, ya que la generalización está presente en todos los pensamientos matemáticos, y los relaciona entre sí. Mason (1996) citado por Gallo et al (2006, p. 31) afirma que “la generalización es la esencia, el corazón de las matemáticas”

Por lo anterior me remito a lo que pretendo identificar en las estudiantes, en el desarrollo de situaciones que parten de un contexto geométrico, que son los procesos de generalización.

Para ello se hace necesario establecer que para el desarrollo de la generalización, la cual es uno de los procesos esenciales de la actividad matemática, es, necesario permitir, a los estudiantes, realizar procedimientos, tales como, identificar, caracterizar, describir, conjeturar, justificar, definir, demostrar y formalizar; ya sea desde la identificación de invariantes estructuras geométricas, o desde el reconocimiento de patrones de secuencias numéricas.

Por lo anterior es que se debe favorecer en los alumnos, el desarrollo de su pensamiento desde la actividad matemática.

La actividad matemática tiene como objetivo primordial hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, es decir, que pueda, ante una determinada situación, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través de casos generales de problemas. Pero dado que la construcción del conocimiento es contextualizado por naturaleza, entonces, el paso a la generalización no es fácil ni inmediato. (Posada et al, 2006, p 19-20)

Esto invita al profesor a proponer múltiples situaciones en variados contextos, con el fin de lograr que el alumno pueda identificar los invariantes comunes a todas las situaciones, los cuales son elementos constitutivos estructurales del conocimiento que se le desea enseñar, y entonces, pueda entrar a diferenciarlos de los elementos particulares de cada situación. La identificación de estos invariantes permite la construcción de esquemas generales de pensamiento.

Es importante acentuar que el sistema de generalización, no tiene una forma establecida de acceder a la sistematización, pues en una misma situación hay diferentes maneras de abordarla.

Para identificar procesos de generalización en las estudiantes, analizaré la relación que ellas establecen entre casos, particulares a particulares, entre casos particulares a generales, y entre casos generales a otros casos generales.

Ahora bien, como ya se había mencionado antes, esta es una experiencia de aula, y se caracteriza por tener una orientación cualitativa, además cuenta con el hecho de ser narrativa; lo que me ha permitido relatar desde las experiencias vividas, mostrar el camino recorrido, sus fuertes y sugerencias.

Esta experiencia no sólo se caracteriza por el desarrollo y análisis de guías, sino también por la intervención realizada que permitió generar nuevos conocimientos, tanto para los estudiantes como para mí como docente, por ser critica, propositiva reflexiva y analítica. y ha sido sistematizada con el fin de compartir la experiencia, y los conocimientos generados; con estudiantes, docentes y demás personas que se interesen por conocer sobre esta experiencia de aula.

La sistematización (de una experiencia de aula) es aquella interpretación critica de una o varias experiencias, que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica del proceso vivido, los factores que han intervenido en dicho proceso, cómo se han relacionado entre sí, y por qué lo han hecho de ese modo. (Jara, 2003, p. 6)

Se hace necesario reconocer que la sistematización de una experiencia de aula permite reflexionar, cuestionar, confrontar la propia práctica, superar la rutina de ciertos procedimientos. En esa perspectiva es un buen instrumento para mejorar la intervención. Al mismo es un proceso participativo de conocimiento teóricos prácticos, que permite la construcción de saber, donde el estudiante, y quien sistematiza son los protagonistas.

Para el análisis de esta experiencia de aula, confronté los referentes teóricos, con mi objetivo, y los procesos de aprendizaje de algunas estudiantes pertenecientes al grado décimo del CEFA. La selección de las estudiantes se dio al azar, tomando las actividades desarrolladas por ellas durante las clases; en los análisis de las actividades no se revelarán nombres y retratos de las estudiantes para proteger su privacidad.

Las actividades desarrolladas se llevaron a cabo, en el aula conocida como el aula taller de la institución, dicha aula cuenta con las condiciones necesarias para el desarrollo de una intervención propia de la metodología de aula taller, propicia el trabajo colectivo y participativo de las estudiantes, las cuales son características de la metodología.

En las intervenciones realizadas se aplicaron las dos guías que he seleccionado para el análisis, la cuales fueron: Números poligonales, y Cuerpos geométricos. Dichas guías me aportaron los elementos necesarios para dar respuesta a mi pregunta.

Toda la información para el análisis fue recopilada de las guías resueltas por las estudiantes como evidencia escrita de conceptos previos, procedimiento, gráficos e interpretaciones de las estudiantes a las preguntas intencionadas que propuse; y de los diarios de campo que allí se encuentran las descripciones, comentarios y reflexiones que hice por cada día transcurrido en mi práctica.

Dicha experiencia me permitió conocer las interpretaciones, recorridos y estrategias utilizadas por las estudiantes en el proceso de generalización; en situaciones que parten de un contexto geométrico, los aportes de la metodología aplicada; y me llevo a reflexionar sobre mí que hacer docente, y a proponer nuevos senderos.

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación

Parte 2

Contexto

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CENTRO FORMATIVO DE ANTIOQUIA CEFA

Figura 1 CEFA

La institución educativa CEFA fue fundada el 24 de julio de 1935 con la finalidad principal de formar a la mujer como bachiller de educación media académica y media técnica con competencias laborales y específicas, es de carácter oficial y se encuentra ubicada en el centro de Medellín en la Calle 50 N° 41-55 Córdoba con Colombia barrio la Candelaria en la comuna 10, cuenta con una infraestructura distribuida así: 31 aulas de clase, 11 aulas especializadas, 2 laboratorios de Física, 2 laboratorios de Química, 1 laboratorio de Biología, 1 laboratorio de salud, un observatorio astronómico, aula taller, espacios recreativos, un coliseo, una biblioteca, zona húmeda y dos patios, el personal laboral consta de 4 personas en la parte directiva, 105 docentes, 9 personas en la parte administrativa y 5 personas para el mantenimiento y aseo de la institución, todos contratados por una entidad externa pagada por la secretaria de Educación; a sus alrededores hay otras instituciones educativas de carácter militar y académico, instituciones universitarias, hospitales, teatros, viviendas, edificios, comercio en general y parques, entre otros, el transporte que por allí transita va y viene de las diferentes comunas Antioqueñas, cerca se encuentra el Metro además de taxis y medios de transporte particular, al igual que el resto de la ciudad presenta dificultades de seguridad, principalmente por los robos y atracos callejeros, además por un sin número de habitantes de la calle que ocupan sus alrededores.

La institución presta su servicio educativo a una población femenina entre los 14 y 17 años de edad, que hayan culminado la educación básica secundaria en Medellín y demás municipios del departamento de Antioquia o incluso de otros departamentos, con diversas situaciones familiares, algunas con familia completa otras sin familia, se encuentran en el nivel Sisbén 1, 2, y 3 y estratos 1, 2, 3, 4 y algunas del 5; El número de estudiantes que matricula por año el CEFA es aproximadamente de 2400, distribuidas en 62 grupos de 38 estudiantes con 105 docentes que realizan su labor académica dispuesta en dos jornadas de 7 horas cada una, en la media técnica se ofrecen las siguientes modalidades: Salud, Alimentos, Informática, Gestión cultural, Ciencias químicas y Comercio, en la media académica se ofrece profundización en matemáticas; su filosofía inicial que fue propuesta por el fundador Joaquín Vallejo Arbeláez, “sacar a las mujeres de las agujas a las aulas”, hoy día, es “sacar a las mujeres de las aulas a las universidades o al mundo laboral”.

El aspecto religioso de las estudiantes varia, siendo la religión católica la práctica religiosa más común, las estudiantes son provenientes de familias con una fuente de ingreso no muy clara, cada año tienen diferentes informaciones, pero de la misma manera son constantes las madres cabeza de familia con trabajos donde devengan el mínimo salarial, algunos padres son comerciantes, taxistas, empleados oficiales, educadores entre otros.

Las estudiantes se relacionan de forma positiva durante su permanencia por dos años, logran entenderse y asumir una buena convivencia, esto teniendo en cuenta que la institución realiza una inducción y motivación para alcanzar esta armonía, ya que éstas llegan de diferentes colegios y en un grupo pueden llegar hasta 30 estudiantes o más que nunca se han encontrado, inicialmente la primer relación que se da es de compañerismo de pares que no quieren sentirse solas, académicamente es una relación de competencia entre modalidades, donde las integrantes de cada modalidad expresa con orgullo el protagonismo de su modalidad dentro la institución pero la relación como mujeres es manifiesta desde la ternura femenina, la confianza y delicadeza, la disciplina generalmente es buena y también son de un alto nivel académico, la relación con el maestro se proyecta desde una postura de respeto mas no intimidación, los conflictos son mínimos, la institución cuenta con un servicio de orientación escolar con sicóloga y servicio médico y odontológico y a la mayoría de estas estudiantes les gusta ver televisión, dormir, bailar e ir a futbol, son jóvenes que exigen y demandan más de lo que se les ofrece, son emprendedoras y soñadoras, siempre están en una constante lucha por alcanzar sus logros, se visualizan como profesionales y están bien informadas de cómo y dónde pueden obtener lo que desean para su futuro profesional, cuando algo les gusta y les motiva ponen toda su atención e interés logrando grandes cosas, de lo contrario hacen notar su disgusto y desinterés.

La estrategia pedagógica parte de la comprensión para la construcción de la ciudadanía hasta el desarrollo de las competencias específicas, los criterios evaluativos responden a la pregunta ¿qué evaluar? Se trata de las expectativas intencionales del docente para con sus estudiantes, para ello debe definir las cualidades evaluativas, a partir de la concepción institucional, la valoración de cada proceso se hace semestral sobre el 100% siendo este distribuido en seguimiento y varios parciales, teniéndose en cuenta las dimensiones del desarrollo integral: cognitiva, personal y social, la práctica es considerada un área y su valoración está sujeta al manual de práctica, el porcentaje aprobatorio por grupo y por docente al final de cada semestre es mínimo del 90%, igualmente cumpliéndose este para la valoración final.

La rectoría anualmente realiza una convocatoria para la conformación del gobierno escolar, esto, con la finalidad de fomentar la participación activa, consciente, critica y asertiva en la construcción del orden social, no solo es fundamentado el saber científico, sino también el desarrollo de las competencias ciudadanas y la formación de sujetos políticos participantes de la democracia con capacidades para la construcción de una nación más pluralista con cultura de paz.

Para finalizar el centro formativo de Antioquia CEFA funciona como una organización abierta y autónoma, sigue los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional y del Municipio de Medellín a través de la secretaria de Educación, define su misión como “la promoción y formación de la mujer, en el nivel de Educación Media Académica y Media Técnica, fundamentada en una cultura ciudadana que la prepara para la iniciación básica laboral y el ingreso a la Educación superior”. La visión es proyectada así: “El Centro Formativo de Antioquia debe ser la mejor institución educativa de la ciudad de Medellín y el eje central de la Ciudad Educadora donde, se forme a la mujer con una cultura ciudadana, alta competitividad académica y sentido visionario para que explore horizontes para la iniciación básica a la vida laboral y el ingreso a la Educación Superior” y por ultimo su política de calidad dice: “El CEFA, un Colegio de Ciudad para la Ciudad; con un modelo de Gestión certificado, garantiza el servicio educativo en el nivel de Media para la formación de la mujer; con el enfoque común de competencias para el mejoramiento.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

PARTE 3

Actividades

Como el objetivo de este trabajo es identificar y describir los procesos de generalización que desarrollan las estudiantes de décimo grado del CEFA en situaciones que parten de un contexto geométrico y son trabajadas najo la metodología de aula taller, las actividades propuestas apuntan al desarrollo de dicho objetivo, y están enfocadas desde el pensamiento geométrico, pero durante su desarrollo también se podrá evidenciar el aporte de otros pensamientos matemáticos. A continuación se hará una descripción de cada actividad y su desarrollo en el aula.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

CUERPOS GEOMÉTRICOS

PIRÁMIDES Y PRISMAS

La intención con esta actividad era, a partir del material didáctico (pirámides y prismas en cartulina) las estudiantes reconocieran y describieran características generales de dichos cuerpos, además, desarrollar en las estudiantes procesos de generalización, es decir que identificaran, describieran y simbolizaran, desde el razonamiento numérico y geométrico, y con el apoyo del material concreto.

La actividad que se analizará a continuación corresponde a un estudio de los cuerpos geométricos., más específicamente las pirámides y los prismas

Un prisma es un cuerpo geométrico formado por dos caras planas poligonales, paralelas e congruentes entre sí que son sus bases; y tantas caras paralelogramo como lados tienen sus bases.

Una pirámide es un cuerpo geométrico, formado por una cara plana poligonal llamada base, y tantas caras triangulares como lados tiene su base, que convergen en un vértice en común, llamado cúspide.

El desarrollo de esta actividad se llevó a cabo en dos sesiones de clase. En la primera sesión abordó el trabajo con las pirámides.

Pirámides

La sesión se desarrolló en el aula taller de la institución, esta aula está organizada por mesas con capacidad para cuatro o cinco estudiante, lo que permite el desarrollo de un trabajo colectivo, donde las estudiantes pueden intercambiar ideas y opiniones.

La actividad se desarrolló en grupos de trabajo, y contó con el apoyo de material didáctico tal como pirámides en físico, como es propio de la metodología de aula taller, los grupos estaban conformados por un número de estudiante que variaba entre cuatro y seis estudiantes por grupo, las estudiantes escogieron sus grupos de trabajo de acuerdo a sus afinidades

En la etapa describir, la cual es la segunda etapa del proceso de generalización de las tres descritas (ver, describir y escribir) por el Grupo Azarquiel (1993). Se menciona:

> El trabajo en pequeños grupos en la etapa de descripción facilita el intercambio de ideas y de opiniones, porque la comunicación con otros propicia la comprobación conjunta de las conjeturas; la reformulación de la hipótesis, el acercamiento paulatino a soluciones cada vez más ajustadas. (p 38)

En cuanto a la comunicación en los lineamientos curriculares (MEN, 1998) menciona.

“la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.”

Para que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente necesitamos establecer ambiente en nuestras clases en el que la comunicación sea una práctica natural, que ocurre regularmente, y en el cual la discusión de ideas sea valorada por todos.

"La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica. El énfasis debería hacerse sobre todos los estudiantes y no justamente sobre los que se expresan mejor" (Ibem citado por MEN, 1998 ,P.75)

Para el trabajo con las pirámides facilité a las estudiantes pirámides de diferentes bases, con el fin que las observaran, y describieran de forma oral, características comunes entre las pirámides.

Las estudiantes las observaron cuidadosamente, y discutían en sus mesas de trabajo lo que observaban, y se escuchaban frases tales como: "todas tienen triángulos", "los triángulos se juntan en un mismo ángulo", "todas tienen bordes". Llevando a cabo un proceso de visualización global, que les permite ver aspectos generales, en este caso de las pirámides, y asociar el reconocimiento de esos aspectos con formas o figuras conocidas, tales como triángulos, ángulos y bordes.

Figura 2 Observando

Para Gutiérrez et al (2006)

El proceso de visualización está en estrecha relación con la manipulación, y/ o transformación de los objetos bidimensionales y tridimensionales…..

De acuerdo con el MEN de pueden identificar unos procesos de visualización.

Visualización global: Se considera el nivel más elemental de la visualización, y permite asociar figuras a objetos físicos o en el campo de las matemáticas tiene que ver con el reconocimiento de formas o figuras prototípicas

Nivel de la percepción de elementos constitutivos. La observación de los objetos se centra no ahora sobre los aspectos generales de las figuras geométricas sino sobre los elementos constitutivos e identificando en ellos aquellos que son de la misma dimensión o de dimensiones inferiores. Por ejemplo en una figura tridimensional se deben reconocer elementos bidimensionales como lo son sus caras, elementos de carácter unidimensional como lo son sus aristas y cero dimensiones como lo son los vértices. (p. 22-23)

Luego de que las estudiantes observaron, discutieron entre ellas y dieron algunas descripciones al interior de su equipo de trabajo; les pedí compartir sus hallazgos (descripciones) con todo el grupo de la clase; y algunas de las descripciones dadas referentes a las pirámides fueron:

"Están formadas por triángulos con un ángulo común"

"Tienen una base poligonal".

"Tienen vértices y bordes"

"depende del número de lados de la base es la cantidad de triángulos"

En este caso las estudiantes describen características de las pirámides, e identifican elementos que los constituyen tales como vértices, aristas (bordes), caras (base y triángulos), entrando así en un nivel de percepción de elementos constitutivos; ya descrito en párrafos anteriores; ello se logró en el trabajo colectivo donde las estudiantes tuvieron la oportunidad de discutir al interior se sus grupos y definir las características que consideraron más importantes y generales para compartir con toda la clase.

Una vez las estudiantes dieron sus apreciaciones, yo, en mi rol como docente, apoye sus definiciones desde un lenguaje más formal, (desde mi punto de vista) para definir algunas características de las pirámides; así:

Las pirámides tienen:

“Una cara plana poligonal llamada base”

“tantas caras triangulares como lados tiene la base”

“aristas, las cuales son las intersecciones entre las caras”

“vértices, que es el punto en el que coinciden las aristas”

“las caras triangulares coinciden en un mismo vértice, llamado cúspide”

También mencioné que las pirámides se nombran según sus bases.

Luego de ello facilité a cada estudiante tijera, regla, cartulina y compas para la construcción de una pirámide. Yo como docente, me encargue de explicar en el tablero, paso a paso una la construcción con regla y compas de una pirámide de base rectangular no cuadrada (ver anexo 1); dicha construcción se puede aplicar para la construcción de cualquier pirámide.

Para la explicación de la construcción de la pirámide se hace necesario trabajar sobre conceptos tales como: centro en, arco, abertura, intersección; para una mayor comprensión de dicho proceso.

Pedí a las estudiantes, que en base a la construcción que les había explicado, construyeran cada una, una pirámide cuya base fuera diferente a la que yo hice es decir de base no rectangular, y diferente a las de sus compañeras de mesa, con el fin de tener muchas y diferentes pirámides para un mejor desarrollo de la actividad. Allí las estudiantes debían observar el proceso de construcción que yo realice para una pirámide en particular, y acomodarlo para una pirámide diferente, para la que ellas querían construir; es decir las estudiantes debían generalizar el proceso de construcción que les presenté para poder construir su propia pirámide.

Se construyeron pirámides de una gran variedad de tamaños; y sus bases variaron desde la pirámide de base triangular hasta la pirámide de base octagonal, algunas de las estudiantes trazaron polígonos de hasta doce lados para construir su pirámide, pero pronto se dieron cuenta que según el número de lados de su base, sería la cantidad de repeticiones del proceso de construcción de las caras triangulares de la pirámide, y decidieron cambiar el polígono para las bases por uno de menor número de lados. Con esta actitud de las estudiantes pude evidenciar que las estudiantes lograron generalizar el proceso de construcción, puesto que notaron que la cantidad de repeticiones en el proceso de construcción de las caras triangulares de la pirámide variaba entre las pirámides según el número de lados de su base, y a mayor número de lados mayor cantidad de repeticiones en el proceso de construcción.

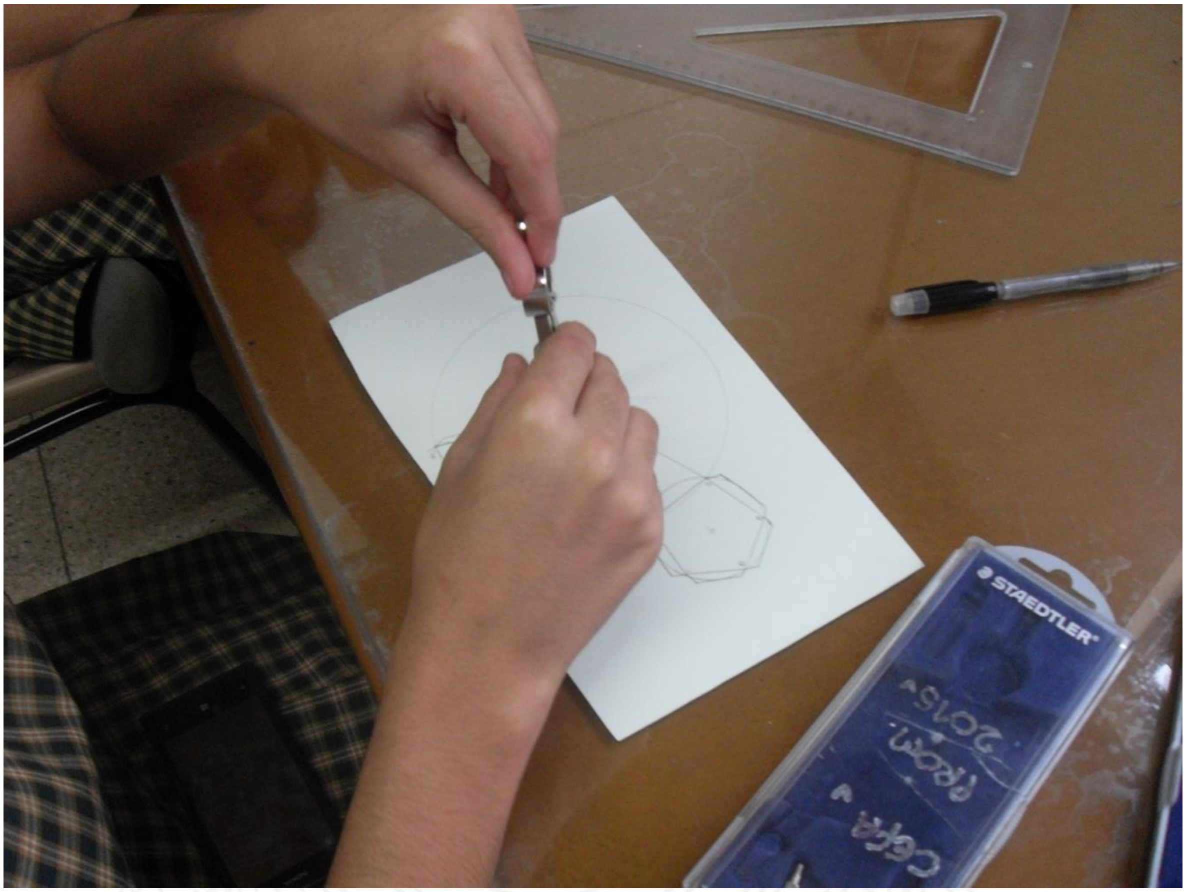


Figura 3 Construyendo pirámides

En vista que la pirámide que construí, era rectangular no cuadrada, algunas de las estudiantes construyeron pirámides de bases cuadradas, argumentado que estas no eran pirámides de base rectangular porque su base era un cuadrado. Ello muestra que las estudiantes no reconocen el cuadrado como un caso especial de rectángulo, para ellas hablar de cuadrado y rectángulo es hablar de dos figuras diferentes.

Para Gutiérrez et al (2006)

La construcción de figuras geométricas con regla y compás, permite la construcción significativa de los conceptos, teniendo en cuenta que para su elaboración se debe aplicar una serie de conocimientos previos inherentes a las características internas. (Las construcciones con regla y compas marcan el inicio de los procesos de demostración en los estudiantes de nivel básico)

Las figuras geométricas construidas con regla y compas mediante un proceso lógicamente ordenado y coherente en el que subyacen sus componentes no sólo intrínsecos si no sus similitudes con otras, permiten realizar conjeturas; formular hipótesis, a la exploración y reflexión y sobre todo la construcción intuitiva de conceptos como primer paso que ha de conducir a los procesos de razonamiento lógico. p 39

Una vez construidas las pirámides solicité a las estudiantes completar (ver figura 4) la tabla, con el fin de registrar la información proporcionada por las pirámides; y en base a ello escribir una expresión que represente algunas de las generalidades de las pirámides.

Escribir es la última etapa del proceso de generalización, y desde el punto de vista algebraico, esta expresión debe ser simbólica; por lo tanto el fin de esta parte de la actividad era hallar una expresión simbólica general que represente los hallazgos obtenidos en la tabla

Para completar la información de la tabla las estudiantes contaban con el apoyo de material concreto tales como las pirámides, y sus conocimientos previos.

Entiéndase como concreto, desde Gutiérrez et al "no solo como lo palpable físicamente sino lo que con anterioridad se ha incorporado al conocimiento" (2006, p. 38)

Número de triángulos	Base	Número de aristas	Número de vértices	Nombre
3				
4				
		10		
	Heptagonal			
			9	Pirámide de base octagonal

Figura 4 Tabla para datos 1

Hasta la cuarta fila de la tabla las estudiantes se valieron del material concreto, en este caso las pirámides para completar la información de la tabla; lo hicieron haciendo un conteo de las aristas, vértices, número de lados de la base, y número de caras triangulares de las pirámides que disponían; luego comenzaron a notar que había ciertas regularidades. Las cuales comenzaron a describir como: “el número de vértices es uno más que el número de caras triangulares”; “el número de aristas es dos veces el número de caras triangulares”.

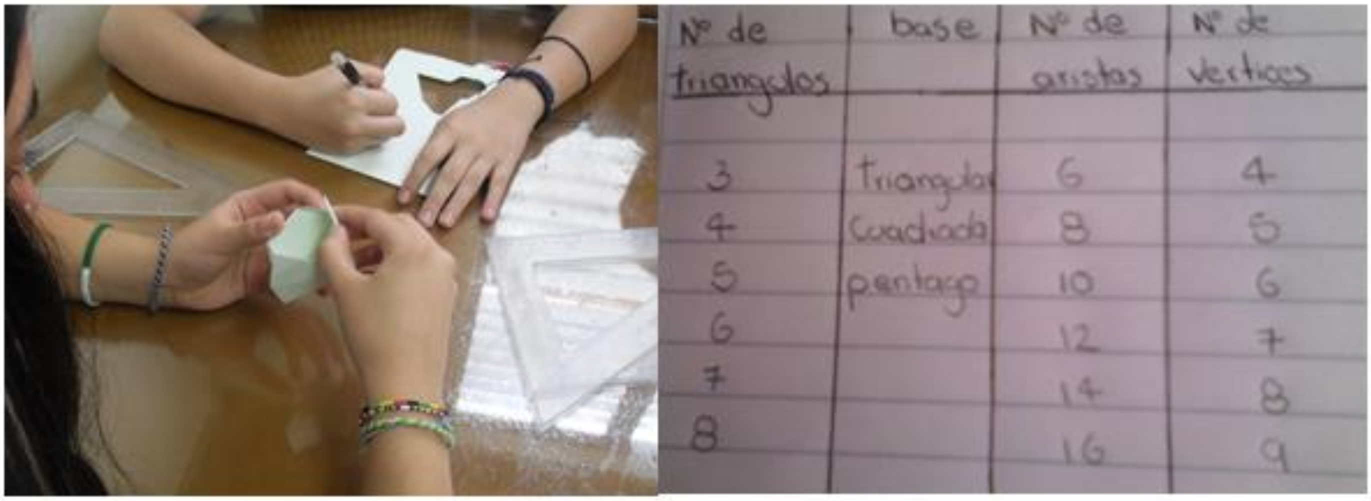


Figura 5 Descubriendo patrones

Aquí las estudiantes ya comienzan a ver y describir regularidades de tipo numérico, y han abandonado el material geométrico, el paso de lo geométrico a lo numérico, se dio cuanto las estudiantes recurrieron al conteo sobre el material geométrico para completar la información de la tabla, y empezaron a notar que se repetían ciertos patrones

En la imagen (ver figura 5) lado derecho se puede apreciar algunos datos que las estudiantes hallaron, y en los cuales se apoyaron para expresar de manera oral las descripciones, ya mencionadas: “el número de vértices es uno más que el número de caras triangulares”; “el número de aristas es dos veces el número de caras triangulares”.

Entrando así en la primera y segunda etapa de la generalización según la descripción dada por Azarquiel (1993), citando a Mason et al (1985)

.“Los procesos de generalización, y sobre todo aquellos que tienen relación con el álgebra, permiten una división en fases que conviene también dese el punto de vista didáctico”

…por lo tanto, se considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados:

a. La visión de la regularidad, la diferencia, la relación
b. Su exposición verbal.
c. Su expresión escrita.(2006, p. 30)

Según lo anterior las estudiantes se encuentran ya en una fase de descripción, puesto que desde su lenguaje natural, han descrito lo que en una primera fase ya habían observado mientras completaban la información de la tabla

Cuando vi que las estudiantes estaban llegando a ya mencionadas conclusiones les propuse hallar los mismos datos para pirámides de 20 y 35 número de caras triangulares, para las cuales no se disponía de material concreto (pirámides) en el cual las estudiantes pudieran hacer un conteo para completar la información. Ello con el fin de llevar a las estudiantes a apoyarse en las regularidades que habían notado, y las descripciones que hicieron, para en encontrar los datos para estas dos pirámides; y poco a poco irnos acercando a una expresión simbólica general.

Como lo pretendía, y como lo esperaba, las estudiantes, se apoyaron en los hallazgos que obtuvieron de la información recopilada en la tabla para encontrar los datos de las pirámides de 20 y 35 número de caras triangulares; se apoyaron en sus descripciones, de," el número de aristas es dos veces el número de caras triangulares", y "el número de vértices es uno más que el número de caras triangulares" para obtener que el aristas de las pirámides pedidas son 40 y 70 respectivamente; y el número de vértices es 21 y 36 respectivamente. (Ver figura 6)

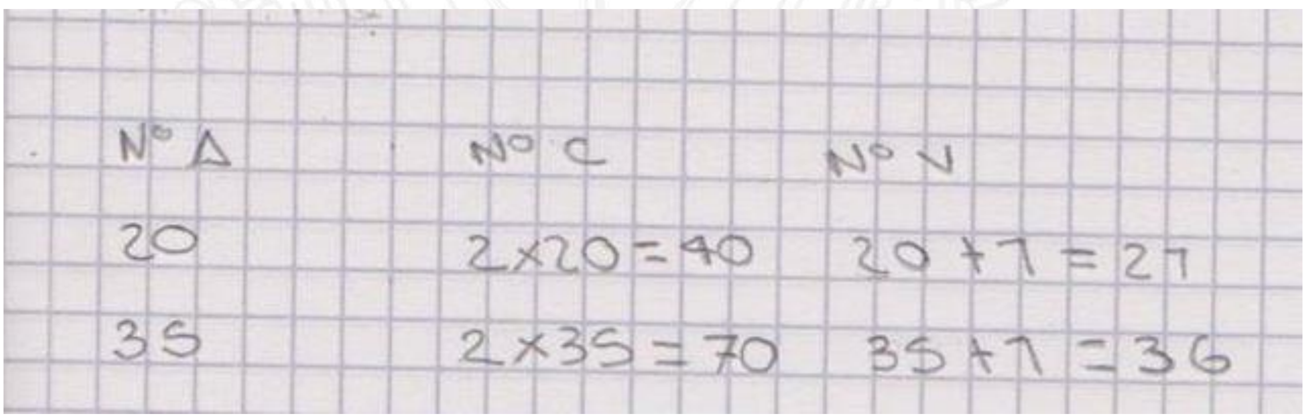


Figura 6 Pirámides de 20 y 30

En este caso las estudiantes relacionaron casos particulares con otros casos particulares, en la medida en que, las estudiantes se apoyan en sus hallazgos (regularidades) obtenidos a partir de los casos particulares que habían registrado en las tablas, para dar respuesta al número de vértices, y caras de una pirámides de 20 y 35 número de caras triangulares.

En cuanto a ver las regularidades, y dar descripciones, que es lo que han logrado las estudiantes hasta este momento de la descripción de la actividad, el grupo Azarquiel afirma

Ver la configuración es un proceso mental por el cual la estructura, el modelo (pirámides), aparece claramente, interrelacionando los diversos elementos, permitiendo por tanto observar la situación de una forma diferente, con una nueva perspectiva. Se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía. (1993, p. 31)

La expresión utilizada también proporciona información acerca de cuál ha sido la forma de ver el modelo (pirámide), y puede servir como diagnóstico de aquella primera fase. En todo caso, la forma de describir la regularidad llevará, con mayor o menor dificultad, a una expresión simbólica más o menos exacta.

Fueron, precisamente las observaciones de las estudiantes, y las descripciones que ellas mismas hicieron las que les permitió hallar los datos para las pirámides de 20 y 35 número de caras triangulares.

Luego que las estudiantes hallaron los datos de las pirámides ya mencionadas les propuse, ¿Cuántas aristas tendrá una pirámide con número de triángulos, cuántos vértices”, con el fin que las estudiantes con el fin que las estudiantes no pensaran ya en un caso particular de pirámide, sino en una generalidad, y construyeran una expresión simbólica que lo representase. Es decir que las estudiantes entraran en la última fase de la generalización según Azarquiel (1993, p 30), Escribir.

Según Azarquiel "El estudio de la generalización dentro del aprendizaje del álgebra tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan" (1993, p. 38)

En esta fase de escribir las estudiantes se apoyan en sus observaciones de la regularidad y descripciones, e intentan dar respuesta a la pregunta; retomando lo mencionado por Azarquiel, ya presentado en líneas anteriores. "En todo caso, la forma de describir la regularidad llevará, con mayor o menor dificultad, a una expresión simbólica más o menos exacta".se puede decir entonces que para las estudiantes resultó sencillo establecer una representación simbólica, puesto sus descripciones fueron claras, y fáciles de interpretar en un lenguaje simbólico., es decir, en la expresión "el número de aristas es dos veces el número de caras triangulares", para un estudiante que haya observado esta regularidad, y que a partir de la pregunta conozca que estamos llamando N al número de caras triangulares, no le resultará difícil representar esta expresión en un lenguaje simbólico como 2*N. (ver figura 7)

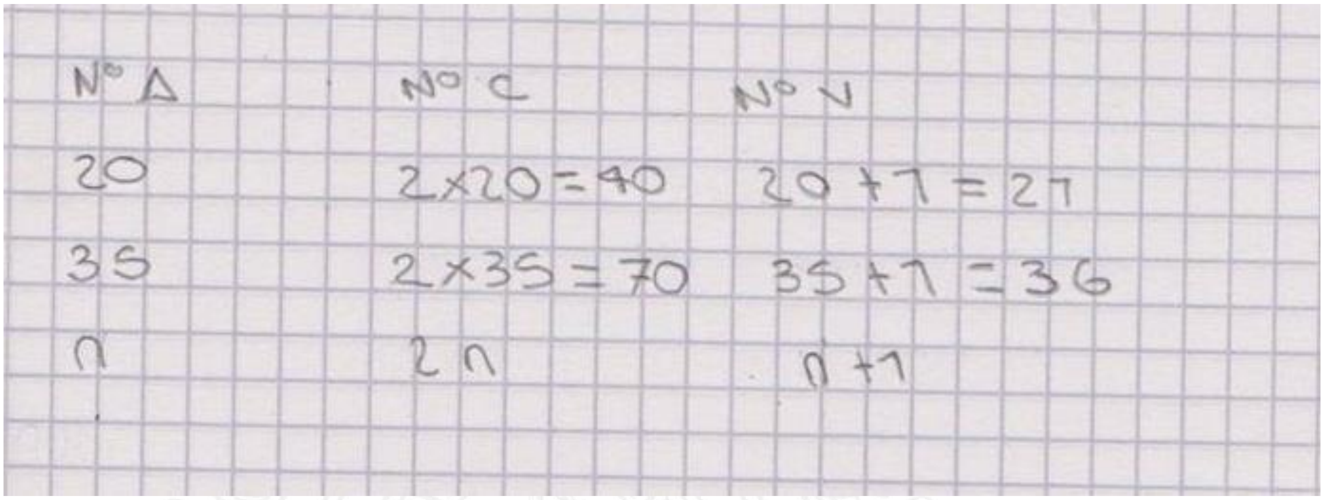
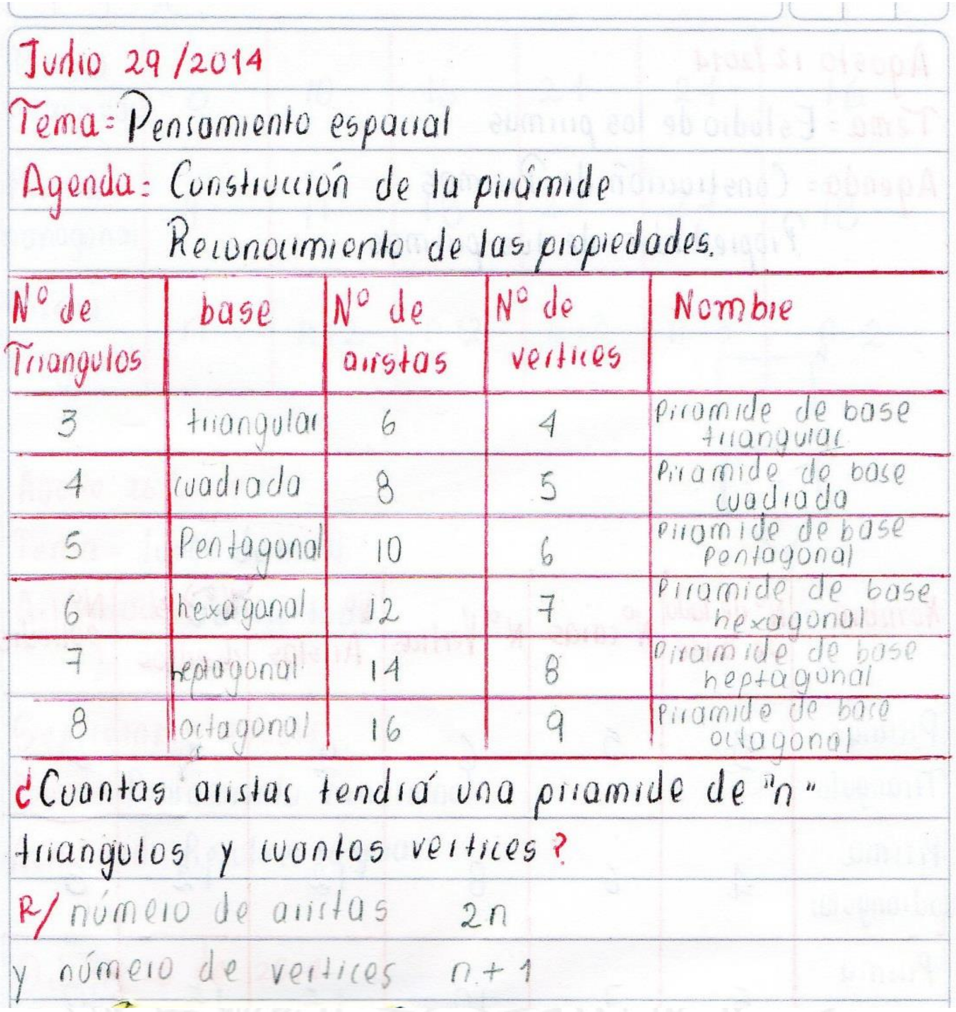


Figura 7 Simbolizando

Es aquí donde ya hay un paso de lo numérico a lo algebraico, donde ya se está dando una representación simbólica escrita que representa la situación.

A continuación se muestra la actividad resuelta por una estudiante. (ver figura 8)



Julio 29 /2014

Tema: Pensamiento espacial

Agenda: Construcción de la pirámide

Reconocimiento de las propiedades.

N° de Triangulos	base	N° de aristas	N° de vertices	Nombre
3	triangular	6	4	Piramide de base triangular
4	cuadrada	8	5	Piramide de base cuadrada
5	Pentagonal	10	6	Piramide de base pentagonal
6	hexagonal	12	7	Piramide de base hexagonal
7	heptagonal	14	8	Piramide de base heptagonal
8	octagonal	16	9	Piramide de base octagonal

¿Cuantas aristas tendrá una piramide de "n" triangulos y cuantos vertices?

R/ número de aristas $2n$

y número de vertices $n+1$

Figura 8 Datos 1

La figura corresponde a la tabla completada por una estudiante de décimo grado, allí se puede observar los datos que la estudiante obtuvo de las pirámides, y los nombres que le asignó a cada pirámide según sus bases, también se encuentra la expresión simbólica general con la que la estudiante represento el número aristas y vértices según el número de caras triangulares de una pirámide.

Esta estudiante en particular noto las regularidades desde la segunda fila, y en base a ello completó la tabla.

Para la simbolización se basó en sus conocimientos previos, uso generalizaciones para construir otras generalizaciones, es decir, esta estudiante ya conocía que la representación de un número anterior o posterior a un número dado se da como n-1 o n+1, según el caso siendo n el número dado; y en la multiplicación el producto de un número n por sí mismo se puede expresar como el doble producto de n (2n). Lo que le facilitó la construcción de la representación simbólica.

En palabras de Posada et al "Se trata de procesos en los cuales los alumnos se apoyan en relaciones ya establecidas para argumentar sobre procedimientos; justificar y construir nuevas relaciones; elabora y demostrar conjeturas sobre nuevas propiedades" (2006, p. 28)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Prismas

Hasta aquí he hablado solamente del desarrollo y análisis de la actividad con las pirámides, ahora pasare al desarrollo y análisis de la actividad con los prismas, la cual se dio en la segunda sesión de clase, y tuvo un tratamiento similar a la actividad de las pirámides.

En un primer momento facilité a las estudiantes diferentes prismas con el fin que los observaran y hallaran características comunes entre ellos. Gracias al tratamiento con la actividad anterior, no se hace necesario abordar conceptos tales como aristas, vértices y caras porque ya habían sido trabajados, y por lo tanto les resultaba familiares, incluso, las estudiantes mostraron más a la hora de expresar lo que veía, y usaron dichos conceptos para expresarlo.

Dentro de la conversación con las estudiantes sobre lo que observaron, las descripciones dadas por ellas acerca de los prismas, vale aclarar que los prismas facilitados a las estudiantes fueron rectangulares, de diferentes bases; fueron:

"Tienen dos caras planas poligonales"

"las caras laterales son rectángulos"

"tiene aristas y vértices"

"el número de rectángulos es igual al número de lados de las bases"

A lo anterior yo agregue que “sus bases son paralelas y congruentes”

En este momento de la actividad las estudiantes ya están en un proceso de visualización, en el nivel de percepción de elementos constitutivos ya descritos en el apartado de la actividad con las pirámides; ya que dan una descripción de características donde se puede ver que hay un reconocimiento de los elementos que los constituye tales como caras, aristas, vértices, y una asociación con figuras tales como polígonos y rectángulos.

Luego de la socialización sobre las características de los prismas mostré a las estudiantes una construcción con regla y compas de un prisma recto; dicha construcción es un procedimiento general para construir cualquier otro prisma recto; al igual que la construcción de las pirámides esta construcción permite construir cualquier otro prisma recto sin importar el número de lados de su base.(ver anexo 2)

Para la construcción de los prismas no se hizo necesario hacer un recorrido por los conceptos de arco, abertura, centro en, puesto que dichos conceptos ya habían sido abordados en la construcción de las pirámides de la actividad anterior. Ambas actividades se encuentran muy relacionadas en su red de conceptos; puesto que en ambas se trabaja con cuerpos geométricos poliedros, es decir tienen las caras planas, están delimitados por polígonos, por lo tanto comparten conceptos tales como: caras, aristas, vértices, polígonos, y los conceptos manejados para su construcción también es muy similar.

Pedí a las estudiantes en base a la construcción que les mostré construir prismas, cada una un prisma de bases diferentes a las de sus compañeras de mesa, con el fin que surgieran diferentes prismas para permitir un mejor desarrollo de la actividad.

Durante la construcción se hace necesario estar explicando, y repitiendo el proceso de construcción, esta vez no en el tablero, pero si por mesas de trabajo, ya que las estudiantes se olvidan de los pasos de construcción, o se les dificultaba distinguir los puntos donde debían hacer centro con el compás

El MEN (2004 P 16-17) citado por Gutiérrez (2006) menciona:

La construcción geométrica tiene por objeto entonces "asegurar el cumplimiento de propiedades buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductividad del dibujo, tomando en cuenta (únicamente) las propiedades fundamentales del mismo por medio de instrumentos técnicos como el compás y la regla" p.39

Una vez construidos los prismas explique a las estudiantes cuáles son los ángulos diedros y poliedros. Cada arista determina un ángulo diedro y cada vértice determina un ángulo poliedro. Los cuales necesitaríamos más adelante en el desarrollo de la actividad. Estos fueron conceptos nuevos en comparación con la actividad sobre las pirámides, aunque también permiten ser trabajados dentro de las pirámides.

Luego pedí a las estudiantes completar la tabla (ver figura 9), para registrar la información proporcionada por los prismas.

Para completar la información de la tabla estudiantes contaban con los prismas construidos, sus conocimientos previos, y la experiencia en la actividad con las pirámides.

Nombre	N° de lados de la base	N° de caras	N° de vértices	N° de aristas	N° de ángulos diedros	N° de ángulos poliedros
	3					
	4					
Prisma pentagonal	5					
	7					
	8					
	n					

Figura 9 Tabla para datos 2

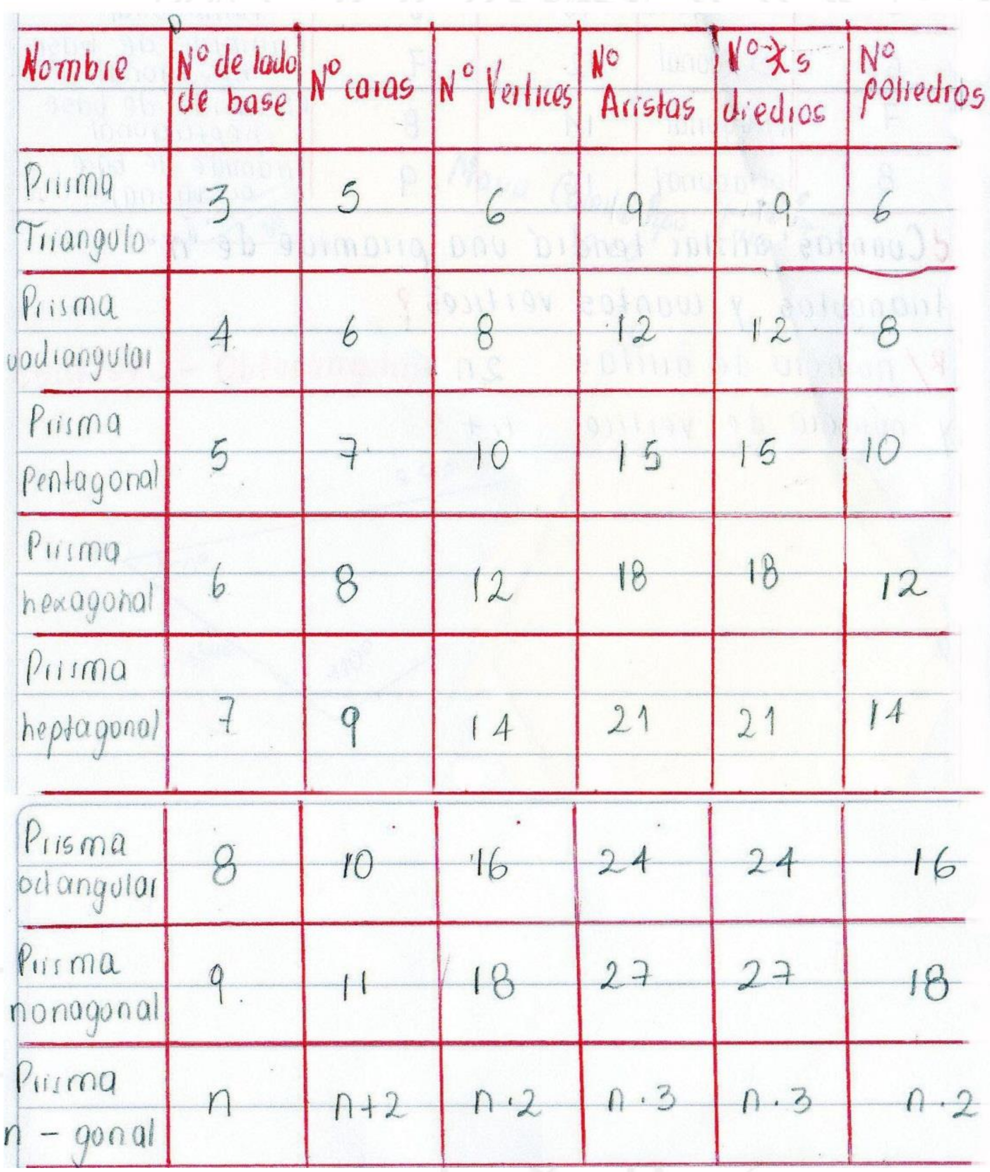
El fin de completar la información de la tabla era que las estudiantes tuvieran los suficientes datos para notar regularidades, hacer conjeturas, expresaran descripciones, y finalmente llegar a una representación simbólica.

Como en la actividad de las pirámides las estudiantes se apoyaron en el material concreto para completar la información de la tabla, haciendo conteos de los vértices, caras, aristas ángulos diedros y poliedros. Para la tercera o cuarta fila las estudiantes ya empezaron a ver regularidades, y las empiezan a describir en su lenguaje natural como "el número de ángulos poliedros es igual al número de vértices, y el número de ángulos diedros es igual al número de aristas", el número de caras es dos más que el número de lados de las bases", "el número de aristas es igual a la base multiplicada por tres"

Dejando así de lado el material geométrico y entrando en un razonamiento de tipo numérico, a medida que avanzan en las dos primeras fases del proceso de generalización descrito por Azarquiel (ver y describir)

Como ya lo había mencionado en la actividad anterior, la manera de describir la regularidad, llevará con mayor o menor dificultad a una representación simbólica, en este caso podremos decir que desde las descripciones dadas por las estudiantes, no resulto difícil la tarea de elaborar una representación simbólica, puesto que su lenguaje de estas expresiones, es claro, y no muy difícil de representar simbólicamente, tomemos como ejemplo la expresión "el número de aristas es igual a la base multiplicada por tres", si las estudiantes ya saben que el número de la base lo estamos nombrando como n, y desde los casos particulares han descubierto que si lo multiplicamos por tres nos arrojará el número de aristas, les resulta sencillo llegar a la expresión 3*n es como representante del número de aristas.

A continuación se muestra la actividad resuelta por una estudiante de grado décimo (ver figura 10).



Nombre	Nº de lado de base	Nº caras	Nº Vertices	Nº Aristas	Nº ∡s diedros	Nº poliedros
Prisma Triangulo	3	5	6	9	9	6
Prisma cuadrangular	4	6	8	12	12	8
Prisma Pentagonal	5	7	10	15	15	10
Prisma hexagonal	6	8	12	18	18	12
Prisma heptagonal	7	9	14	21	21	14
Prisma octangular	8	10	16	24	24	16
Prisma nonagonal	9	11	18	27	27	18
Prisma n - gonal	n	n+2	n·2	n·3	n·3	n·2

Figura 10 Datos

En la tabla se puede apreciar (ver figura 10) se puede apreciar los datos que obtuvo esta estudiante, a partir de la información proporcionada por los prismas, en la última fila se encuentran las expresiones simbólicas que la estudiante estableció, para representar de manera general los datos de cada columna, expresiones que elaboró a partir de la observación de regularidades por cada columna.

En este caso, y en el caso de las pirámides, esta estudiante utiliza sus conocimientos previos en aritmética para dar una representación simbólica de la situación, es lo que desde posada (2006 p 25) y otros llamaríamos aritmética generalizada, referente a la cual mencionan:

> Este eje involucra razonamientos sobre las propiedades de los números, sus operaciones y sus relaciones….
>
> Igualmente implica el tratamiento de procesos asociados a explorar y representar regularidades de los números que expresen formas regulares de crecimiento.

En ambas actividades las estudiantes realizaron procesos de razonamiento geométrico, numérico y algebraico. El razonamiento geométrico se llevó a cabo durante la búsqueda de características, y propiedades comunes entre las pirámides, y entre los prismas, donde desarrollaron procesos de visualización, descripción construcción tanto de conceptos (intento por describir y definir las características de los cuerpos geométricos trabajados) como construcciones con regla y compás; el razonamiento numérico se evidenció cuando las estudiantes dejaron de lado el material geométrico porque comenzaron a identificar regularidades en los datos que estaban obteniendo a partir del conteo, y comienzan a seguir esas regularidades para terminar de completar la información de la tabla, durante este razonamiento es donde se pueden identificar las fases ver y describir del proceso de generalización, y finalmente se puede ver que las estudiantes llegan a un razonamiento algebraico, cuando pasan de la observación y las descripciones de regularidades de tipo numérico, a una representación simbólica general de dichas regularidades.

Aún queda mucho por explorar en esta actividad de los cuerpos geométricos, como los procesos de generalización que desarrollan las estudiantes para obtener la relación de Euler.

Recomendable para una futura aplicación de la actividad, comenzar con una clasificación de polígonos, principalmente cuadriláteros, durante la aplicación de esta actividad me encontré con varias dificultades en cuanto a ello, las estudiantes no reconocen el cuadrado como un caso especial de rectángulo, igualmente cuando nombraron los prismas cuyas bases tenían cuatro lados los nombraron como prismas de base rectangular, ignorando los demás cuadriláteros no rectángulos.

Números poligonales.

El desarrollo de esta actividad se hizo en base a una guía del Grupo Ábaco titulada números poligonales (ver anexo 3)

La actividad comenzó presentando a las estudiantes una serie geométrica (ver figura 6) en el tablero, con el fin que las estudiantes la observaran y, y fuesen identificando su formación, dicha serie geométrica, corresponde a los números triangulares, esta primera parte de la actividad (números triangulares) con los números poligonales, fue dirigida todo el tiempo por mí, con el fin de mostrar a las estudiantes un camino de generalización, y que ellas fuesen capaz más delante de resolver otras actividades..

Dichas actividades fueron resueltas en hojas a parte de la guía, pero es importante resaltar que se trabajó en base a la guía de los números poligonales del Grupo Ábaco, las estudiantes tuvieron acceso a la guía, pero se pidió no escribir sobre ella puesto que con esas mismas guías se estaba trabajando en diferentes grupos, por lo tanto se necesitaría en clases posteriores.

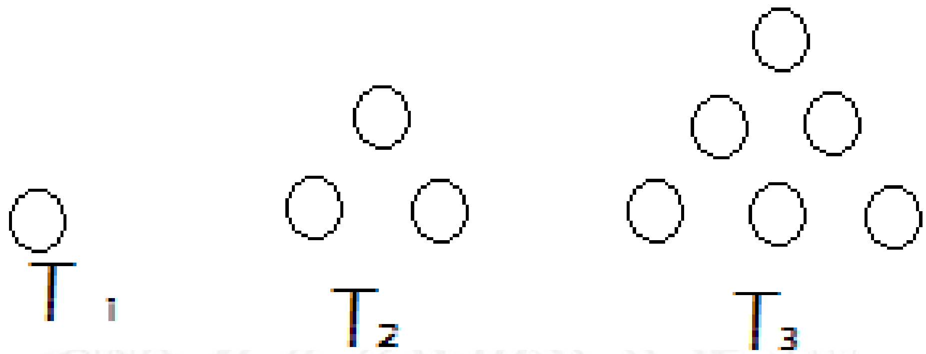


Figura 11 *Triangulares 1*

Cuando las estudiantes se enfrentaron a la serie geométrica, desde un primer momento perciben que tienen algo en común, expresando que se forman triángulos;

Según Azarquiel

“Las figuras geométricas permiten poner en práctica capacidades de visualización espacial que pueden facilitar la aparición de estructuras que conduce a la solución” (1993, p. 21)

Pedí a las estudiantes observar que pasaba en cada una de las figuras de la serie, y les pregunté qué pasaba de una a otra, con el fin de que ellas empezaran a notar regularidades tales como el número de puntos de cada lado del triángulo es el mismo y, dicho número corresponde a la posición, o que el número de puntos de cada triángulo es igual a la suma de los triangulares de las posiciones anteriores más la posición actual.

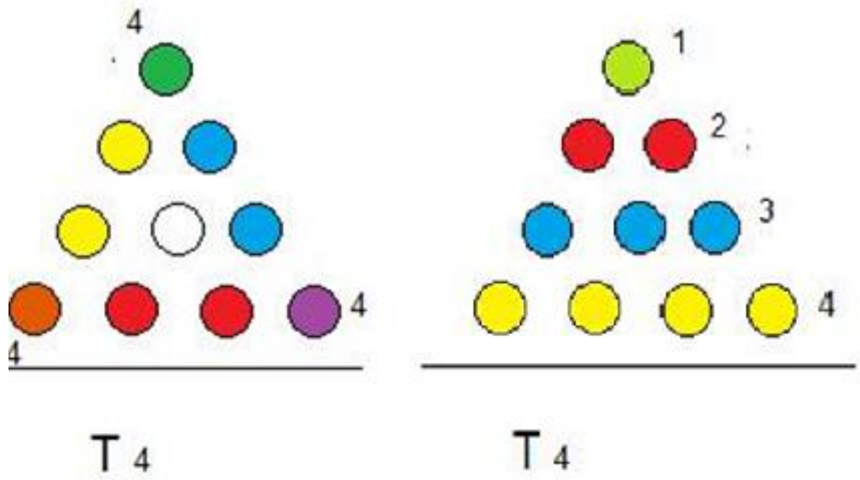


Figura 12 Triangulares 2

En la imagen (ver figura 12) se muestran las relaciones en los triángulo a las que se pretendía llegaran las estudiantes.

Las estudiantes pudieron notar que la base del triángulo tanto como los otros dos lados tenían el mismo número de puntos y corresponde a la posición, ya que era evidente en las figuras, pero no lo fue así con la suma de las posiciones, por lo que se hizo necesario mostrar a las estudiantes lo que allí estaba pasando, les mostré que el número de puntos en la base del triángulo corresponde a la posición actual, el número de puntos sobre la base, es igual al número de la posición anterior, y así sucesivamente, hasta llegar a la posición uno.

Luego de ello pedí a las estudiantes, hallar el número de puntos que tendrán los triangulares de las posiciones 5 y 6, ellas se basaron en lo que ya les había mostrado de la suma de posiciones para hallar la solución, luego de ello, les pedí la cantidad de puntos que tendrá el triangular de la posición 100, las estudiante empiezan a expresar que sería un triángulo muy grande, habría que hacer muchos puntos, y algunas de ellas dicen que debe existir alguna “fórmula” (ecuación), para hallar cualquier número de la serie.

Es allí donde yo doy paso a trabajar con la serie numérica de los números triangulares, para ello escribo en el tablero el número de puntos de cada triangular, y la posición a la que corresponde, y muestro a las estudiantes la suma de números naturales consecutivos, desde uno hasta la posición que va generando cada triangular, y les digo que igualmente como en la serie geométrica, no resulta fácil ni rápido hacer una sumatoria de los números naturales hasta el 100 para hallar el resultado, que para ello existe una ecuación que nació a partir de la sumatoria de Gauss, aquí les cuento un poco sobre gauss y como encontró la sumatoria, y les presento un ejemplo de la sumatoria de gauss para hallar el triangular de la posición 3.

Para ello escribo en el tablero (ver figura 13). explicándoles que ello era lo que Gauss descubrió cuando se enfrentó a un problema similar.

$$\begin{array}{r} 1+2+3 \quad + \\ 3+2+1 \quad \\ \hline 4+4+4 \quad \end{array}$$

Figura 13 Sumatoria de Gauss 1

En la imagen se muestra la sumatoria de Gauss para hallar el triangular de la posición 3, para ello se escribe una suma de los tres primeros números naturales, y luego dicha suma se suma con su conmutativa, es decir, con la misma suma, pero sus factores dispuestos en orden contrario, luego se procede a resolver el algoritmo de la suma, el cual arroja como resultado una sumatoria de tres números cuatro.

Luego pregunto a las estudiantes como más puedo representar esa suma de cuatros, y comienzan a surgir respuestas tales como: 4^3, por lo que se hizo necesario mostrar a las estudiantes ejemplos tales como:

4+4+4= 12, y 4*4*4= 64, y pedirles que usaran la calculadora para hallar el valor de 4^3. Y posteriormente representar el 12 como 3*4, y explicar que ello representa, o quiere decir tres veces el cuatro, luego de ello como la sumatoria nos había dado 12, y ya se sabía, por la serie geométrica presentada al inició de la actividad que el triangular de la posición tres, es igual a seis, pregunté a las estudiantes que debía hacer para obtener dicho resultado (6), si tenía un 12, ellas responden sin duda alguna “dividir por dos”, más sin embargo no saben sustentar desde el ejercicio que se venía resolviendo, por qué dividir por dos, a lo que les explico que habíamos sumado dos veces la misma serie (ver figura 13), por ello había que dividir por dos, ya que la sumatoria solo la necesitamos una vez.

Luego muestro a las estudiantes la ecuación para hallar el triangular seis como: $\left(\frac{3*4}{2}\right) = 6$

Luego explico que cuatro también podemos representarlo como 3+1 para que nos quede todo representado en función de la posición, por ello la ecuación queda como: $\frac{(3*(3+1))}{2} = 6$

Luego del tratamiento con esta situación particular pase a la general, e hice en el tablero la sumatoria de gauss para hallar el triangular n, y le di un tratamiento similar al de la situación particular.

A continuación se muestra el procedimiento, escrito por una estudiante (ver figura 14).

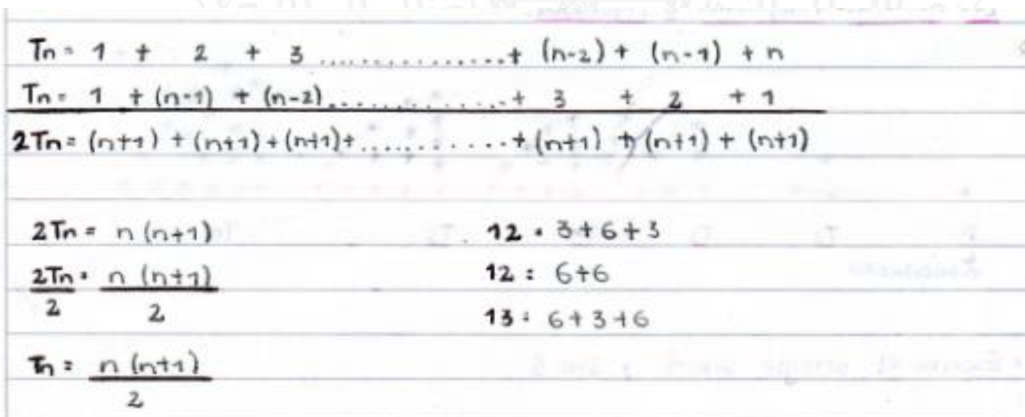
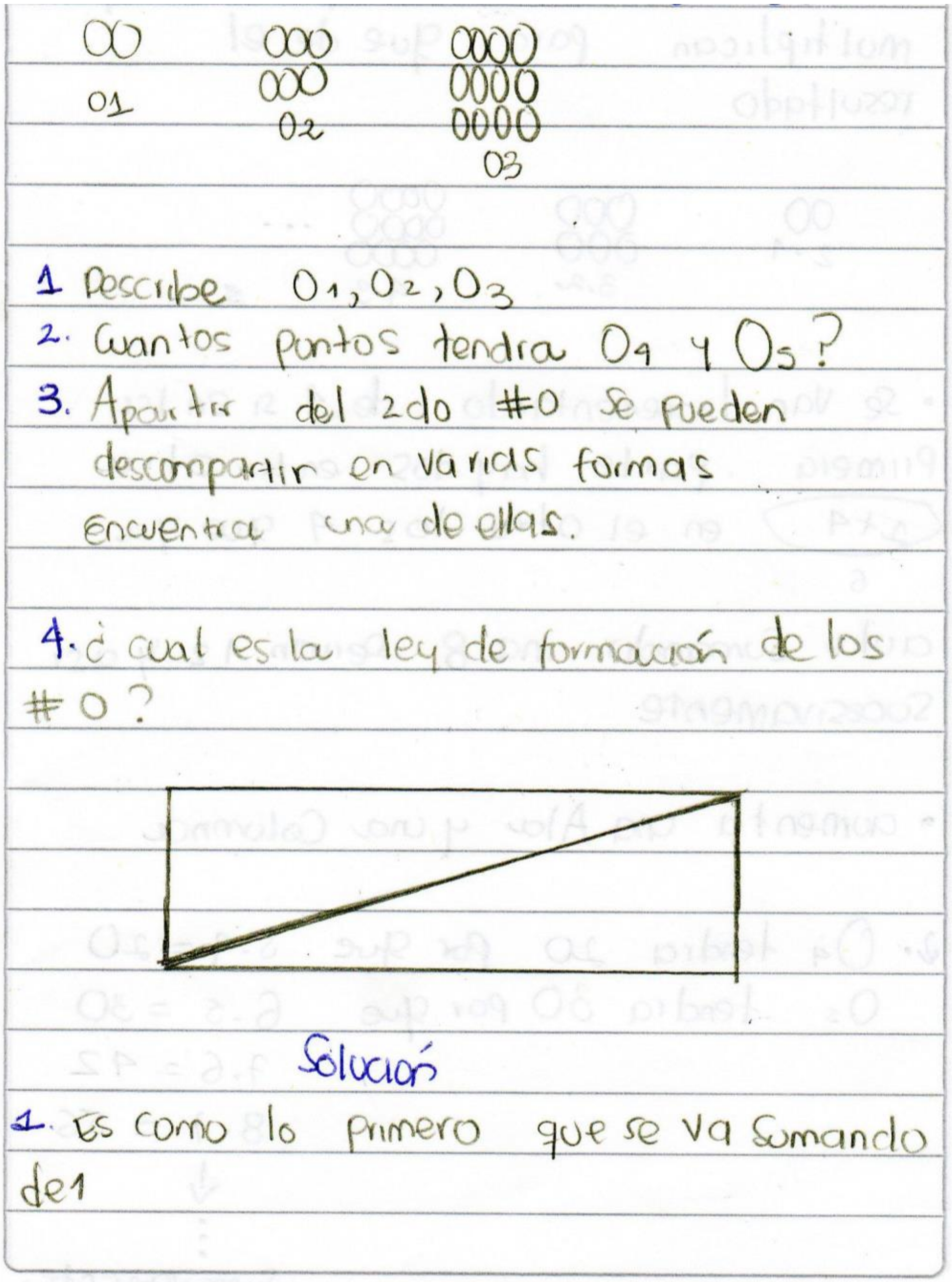


Figura 14 Sumatoria de Gauss 2

Luego del tratamiento por los números triangulares, pedí a las estudiantes trabajar los números oblongos, en el desarrollo de esta parte de la actividad, me dedique principalmente a observar los procedimientos de las alumnas, más que a explicar.

A continuación se muestra la actividad resuelta por una estudiante.(ver figuras 15 y 16)


O1 O2 O3

1 Describe O1, O2, O3

2. Cuantos puntos tendra O4 y O5?

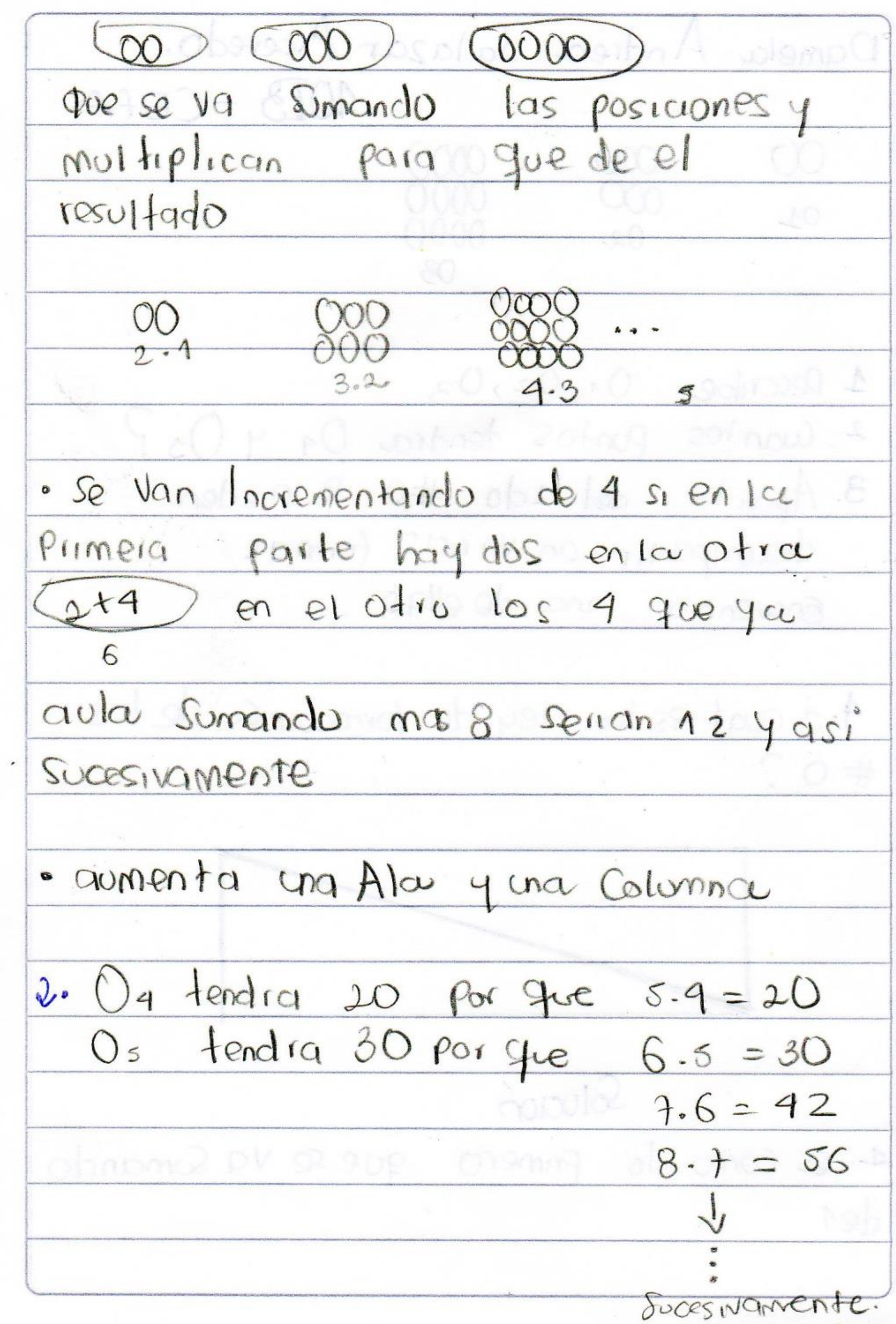
3. Apartir del 2do #O se pueden descompartir en varias formas encuentra una de ellas.

4. ¿ cual es la ley de formación de los #O?

Solución

1. Es como lo primero que se va sumando de1

Figura 15 Oblongos 1



OO OOO OOOO

Que se va Sumando las posiciones y multiplican para que de el resultado

OO — 2·1
OOO OOO — 3·2
OOOO OOOO OOOO — 4·3
... 5

• Se van Incrementando de 4 si en la Primeia parte hay dos en la otra 2+4 en el otro los 4 que ya
6
aula Sumando mas 8 serian 12 y asi Sucesivamente

• aumenta una Ala y una Columna

2. O_4 tendra 20 por que $5 \cdot 4 = 20$
O_5 tendra 30 por que $6 \cdot 5 = 30$
$7 \cdot 6 = 42$
$8 \cdot 7 = 56$
↓
⋮
Sucesivamente.

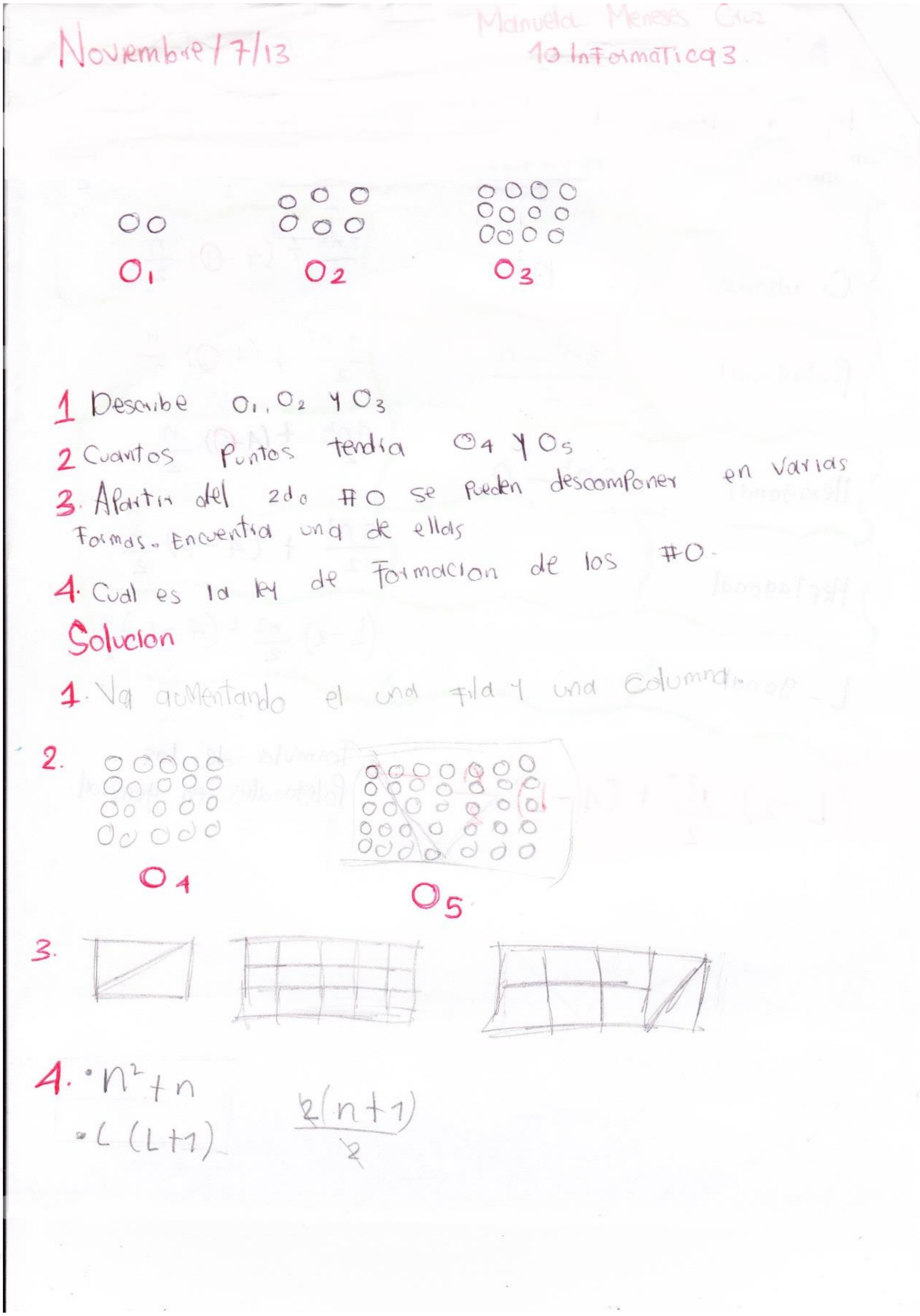
Figura 16 Oblongos 2

La serie geométrica presentada en la parte superior de la figura corresponde a la serie presentada a las estudiantes en la guía original, luego viene una primera pregunta cuyo fin era que las estudiante observaran bien la serie geométrica, y puedan describir algunas particularidades de cada uno de los elementos de la serie.

Esta estudiante como respuesta a la primera pregunta menciona escribe (ver figura 15) “es como el primero que se va sumando de 1”, aunque en esta primera descripción no es claro lo que quiere decir, más adelántela estudiante expresa de forma escrita que (ver figura 16) “aumenta un fila y una columna”, ello muestra que la estudiante relacionó esta actividad con la primera en el sentido que a medida que el triangular iba aumentando, aparecía una nueva fila de puntos en la base, y una nueva fila de puntos en la diagonal; en esta actividad a medida que el oblongo va aumentando aparece una nueva columna, y una nueva fila de puntos.

En sus descripciones también se puede identificar que la estudiante logra establecer y comprender como se está formando la serie tanto numérica como geométrica, y muestra algunos ejemplos, más sin embargo no escribe una expresión general de la situación; pero ello no quiere decir que la estudiante no haya logrado una generalización de la situación, ya que en la respuesta a la segunda pregunta, la estudiante muestra un proceso que le permitirá hallar cualquier término de la serie, y lo afirma cuando escribe puntos suspensivos, y escribe (ver figura 16) “sucesivamente”

A continuación muestro la actividad resuelta por otra estudiante. (ver figura 17)



Noviembre/7/13

Manuela Meneses Cruz

10 Informatica 3

O_1 O_2 O_3

1 Describe O_1, O_2 y O_3

2 Cuantos puntos tendría O_4 y O_5

3. Apartir del 2do #O se pueden descomponer en varias formas. Encuentra una de ellas

4. Cual es la ley de formacion de los #O.

Solucion

1. Va aumentando el una fila y una columna.

2. O_4 O_5

3.

4. • n^2+n $\frac{2(n+1)}{2}$

• $L(L+1)$

Figura 17 Oblongos 3

Esta estudiante en la fase de ver y describir, nota y expresa como regularidad, (ver figura 17) que “va aumentando en una fila y una columna”, en ello hace referencia a la serie geométrica. En base a dicha descripción resuelve la segunda pregunta la cual pregunta por el oblongo 4 y 5. La figura correspondiente al oblongo 4 que realizo la estudiante esta correcta con respecto al oblongo 4 según su descripción, pero en el oblongo 5 no es así, este debe aumentar en una fila y una columna con respecto al oblongo 4, y la estudiante lo realizo aumentando una fila y dos columnas, saliéndose de la descripción que dio la estudiante.

Esta estudiante llego a una representación simbólica de la situación, valiéndose de la ley de formación de los triangulares que ya conocía, se puede ver como en el tercer punto, donde se pide hallar diferentes formas de descomponer los oblongos, la estudiante dibuja un rectángulo con una de sus diagonales, con ello pudo identificar que los oblongos se pueden descompones en dos triangulares con igual cantidad de puntos, y en su proceso de simbolización también muestra una operación donde hace uso de la ley de los triangulares, aunque no la escribe correctamente (le falta un término), y la multiplica por 2, interpreto que hace este proceso de multiplicar por dos, ya que había notado que el oblongo se podía descomponer en dos triangulares iguales, entonces multiplica la ley por dos, obteniendo como ley de formación $n^2 + n$,aunque no escribió de manera correcta la ley de formación para de los triangulares, para dicho proceso, la estudiante llego a una ley de formación correcta de los oblongos de lo que podemos inferir que en su mente trabajaba con la ley correcta, y dicho error fue de atención al escribir. La ley que hallo la estudiante también permite interpretar los oblongos como la composición del cuadrado correspondiente a la posición más una columna

Para dicho proceso de simbolización, esta estudiante se ha apoyado en simbolizaciones ya establecidas, lo que para Posada et al. es conocido como uso de la generalización para construir otras generalizaciones.

"Se trata de procesos en los cuales los alumnos se apoyan en las relaciones ya establecidas para argumentar sobre procedimientos; justificar y construir nuevas relaciones; elaborar y construir conjeturas sobre nuevas propiedades" (2006, p.20)

En el desarrollo con esta actividad las estudiantes pasaron por un proceso de visualización, e identificación de las figuras de la serie geométrica, identificación de su formación, cuando descomponen en figuras cuyo tratamiento ya conocen descripción de regularidades desde el razonamiento geométrico, cuando describen que aumentan filas y columnas; descripción del razonamiento numérico cuando mencionan cantidades y operaciones entre ellas, y finalmente llegan a un razonamiento algebraico cuando a partir de generalizaciones ya establecidas como la de los triangulares representaron y simbolizaron la generalidad de los números oblongos.

Esta actividad fue solo una pequeña muestra de actividades con los números poligonales, aún queda mucho por explorar, muchas propiedades por descubrir acerca de los números poligonales, que da abierta para próximas experiencias el trabajo con número pentagonales, hexagonales…l-gonales, y la relación de esta actividad con otras actividades tales como el triángulo de Pascal.

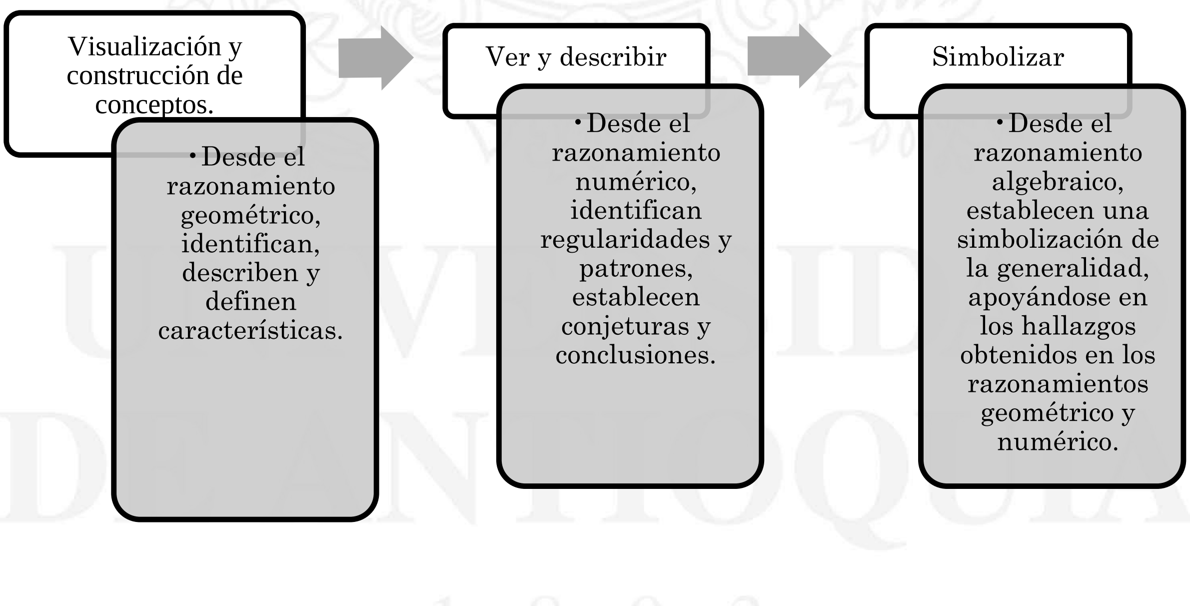
Conclusiones

El análisis y desarrollo de las actividades ya descritas me permitió dar algunas conclusiones como respuesta a la pregunta planteada ¿Cuáles son los procesos de generalización que desarrollan las estudiantes de décimo grado del CEFA, en situaciones que parten de un contexto geométrico, y son trabajadas bajo la metodología de aula taller?

En el desarrollo y análisis de dichas actividades me pude dar cuenta que las estudiantes de décimo grado del CEFA desarrollaron cinco procesos de generalización desde tres razonamientos matemáticos, empezando por el geométrico desarrollando los procesos de visualización y construcción de conceptos; siguiendo por el numérico desarrollando los procesos de ver y describir, descritos por el grupo Azarquiel; y teminando con el razonamiento algebraico desarrollando el proceso de simbolización como última etapa del proceso de generalización.

Como ya se mencionó, desde el razonamiento geométrico las estudiantes desarrollaron los procesos de visualización y construcción de conceptos, en el caso de la actividad de los cuerpos geométricos cuando identificaban, describían y definían características de los cuerpos geométricos, y series geométricas presentadas, en relación con otras figuras u objetos ya conocidos, y en el caso de los números polígonas cuando visualizaban y describían regularidades desde la serie geométrica. Desde el razonamiento numérico las estudiantes desarrollaron los procesos de ver y describir descritos por Azarquiel que hacen mención a las regularidades y patrones, ello lo hicieron desde las series numéricas que construyeron a partir del conteo, en el caso de los cuerpos geométricos, de caras, vértices y aristas, y en el caso de los números poligonales en el conteo de puntos. Desde el razonamiento algebraico desarrollaron el proceso de simbolización de la generalidad, para el cual se apoyaron en los hallazgos obtenidos en los razonamientos geométricos y numéricos.

El siguiente grafico es un resumen de lo ya mencionado.



La generalización trabajada por medio de la metodología de aula taller permitió la interrelación de tres razonamientos matemático, y a las estudiantes descubrir propiedades y características de los cuerpos geométricos, y las series numéricas trabajadas, y expresar algunas de ellas de forma simbólica; todo ello se dio gracias a la interacción entre las estudiantes, a compartir ideas, a la manipulación de materiales, y la experimentación, todo ello característico de la metodología de aula taller. Permitir a las estudiantes aprender por descubrimiento y asimilación propia hace que los aprendizajes sean más significativos, ya que ellas mismas han vivido, experimentado y descubierto el proceso.

Anexos

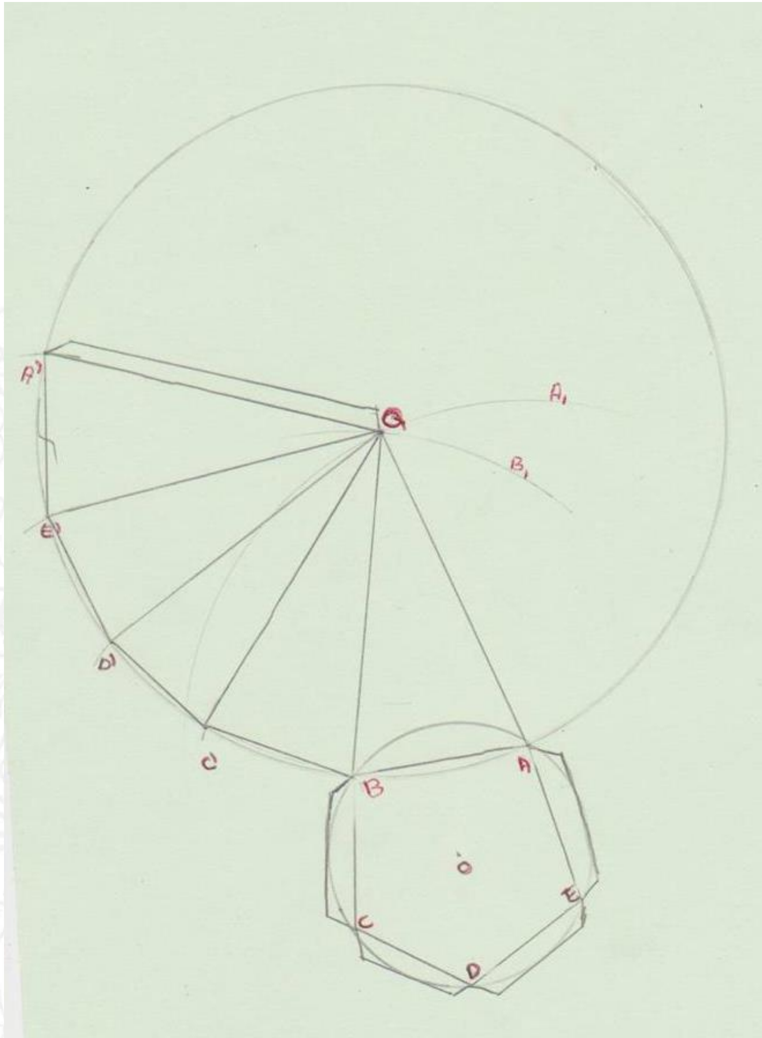
Anexo 1

CONSTRUCCIÓN DE UNA PIRÁMIDE CON REGLA Y COMPAS

1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera.
2. Inscribir un polígono cualquiera en la circunferencia con centro en O
3. Nombrar los vértices del polígono A, B, C, D… consecutivamente.
4. Con centro en A y una abertura mayor al radio de la circunferencia con centro en O trazar un arco A1.
5. Concentro en B y sin cambiar la abertura del compás trazar un arco A2.
6. El punto de intersección de los arcos A1 y B1 se nombrará Q
7. Con centro en Q y radio AQ trazar una circunferencia que pasará por los puntos A y B.

Traslado de los lados del polígono sobre la circunferencia con centro en Q, Los lados del polígono deben ser trasladados en el mismo orden que están nombrados.

8. Con centro en B y radio BC trazar sobre la circunferencia con centro en Q el punto C’
9. Con centro C’ y radio CD trazar sobre la circunferencia con centro en Q el punto D’
10. Continuar este mismo proceso hasta haber trasladado todos los lados del polígono sobre la circunferencia con centro en Q.
11. Trazar con regle los segmentos BC’, C’D’,D’E’ y así consecutivamente (no trazar el segmento A’A)
12. Trazar con regla los segmentos AQ, BQ, C’Q, D’Q...


A'
G
A1
B1
E'
D'
C'
B
A
O
E
C
D

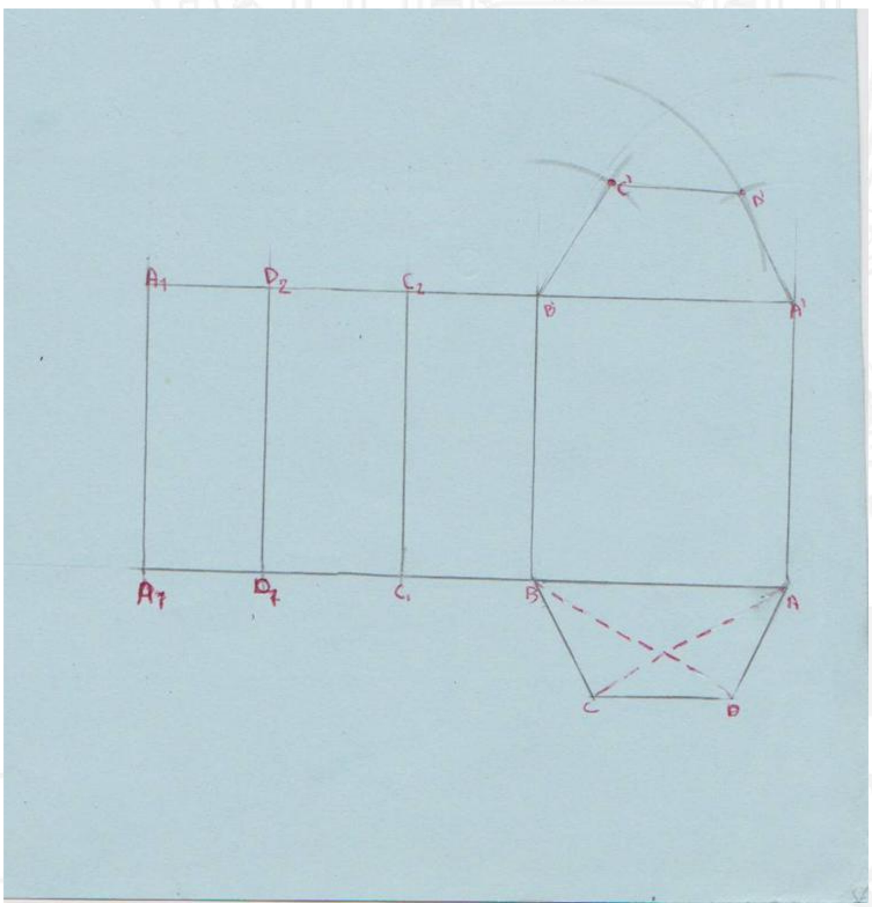
Anexo 2

CONSTRUCCIÓN DE UN PRISMA RECTO CON REGLA Y COMPÁS

1. Se traza un polígono cualquiera.
2. Se nombran los lados del polígono A, B,C,D… en orden consecutivo.
3. Se prolonga el lado AB .
4. Sobre la prolongación AB se trasladan los lados del polígono en orden consecutivo, de la misma manera como se trasladaron los lados del polígono de la base de la pirámide.
5. Se traza una recta M paralela a la prolongación AB.
6. Por cada uno de los puntos trazados cuando se trasladaron los lados del polígono sobre la prolongación AB; incluidos A y B, trazar rectas perpendiculares a la prolongación AB, que intersecten a la recta M.
7. Nombrar los puntos de intersección sobre la recta M CO A_1, B_1, C_1,…según su correspondiente
8. Trasladar el polígono sobre el segmento A1B1, dividiendo el polígono en triángulos y trasladando cada uno de los triángulos en los que fue dividido el polígono.

Trasladar un triángulo.

1. Sea el triángulo ABC.
2. Traza una recta L.
3. Trasladar sobre L el segmento AB.
4. Con centro en B y radio BC tazar un arco B_1
5. Con centro en A y radio AC trazar el arco A_1
6. La intersección de los arcos A_1 y B_1 será el punto C.
7. Unir AC, y BC. Para obtener el triangulo



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Anexo 3

GUÍA: NÚMEROS POLIGONALES. GRUPO ÁBACO.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MEDELLÍN
GRUPO ÁBACO

Los Números Poligonales

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Botones, canicas o monedas
No. de páginas:	5

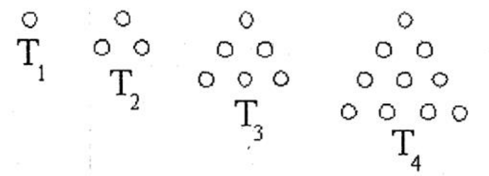
Un problema con más de 2.000 años

Las expresiones «números triangulares» o «números cuadrados» no son meras metáforas sino que esos números son, efectivamente, ante el espíritu y ante los ojos de los pitagóricos, triángulos y cuadrados. Los números poligonales se remontan al comienzo mismo de la matemática, fueron los pitagóricos los que los descubrieron (siglo. VI A de C). Tal vez, la mejor forma de comprender los números poligonales es percatarse que en aquella época los números se representaban mediante guijarros (semillas) que se disponían en una superficie. Algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 guijarros se pueden disponer formando un triángulo, 4 formando un cuadrado, etc; Dichos números representan un enlace entre la geometría y la aritmética.

Expresiones y conceptos como números triangulares, números cuadrados, números pentagonales, etc. no sólo conservan su interés histórico, sino que fueron el origen de la teoría de números. Continuada por Eratóstenes y ampliada por Menelao, quien resumió todas las propiedades de los números pares, impares, primos, perfectos, amigos, poligonales, etc. Y que ha llegado hasta nuestros días.

Los números poligonales ejercieron siempre una gran fascinación sobre los matemáticos, pero fue CAUCHY quien concluyó con el problema de la descomposición de números enteros en números poligonales. Demostró que un número cualquiera es como máximo, la suma de tres números triangulares, de cuatro números cuadrados, de cinco números pentagonales,... Matemáticos prestigiosos anteriores a él, entre ellos GAUSS, FERMAT y LAGRANGE habían descubierto casos particulares.

1 **ACTIVIDAD 1: "NÚMEROS TRIANGULARES"**



a El primer dibujo T_1 esta formado por un punto, el segundo dibujo T_2 esta formado por tres puntos que forman un ____________, si a estos tres puntos les añadimos otros tres (todos en uno de los lados) seguimos teniendo un triángulo y así sucesivamente.

b ✓ Elabora el quinto y el sexto arreglo (T_5 y T_6) y escribe cómo lo hiciste ____________

____

____

c ✓ Llena la tabla y encuentra una expresión con la que puedas obtener un número triangular cualquiera conociendo sólo el orden, a la que llamaremos ley de formación:

n	1	2	3	4	5	6.				n
T	1	3	6							¿T_n?=
Doble de T										

Algunas propiedades de los números triangulares tienen relación con otros números.

✓ Una anotación de Gauss en su diario responde a la alegría de haber encontrado una demostración para el caso particular de números triangulares: *"Todo número entero es suma de, a lo sumo, tres números triangulares"*. Por Ejemplo: 36 = 15+15+6, donde él 15 y el 6 son números triangulares. Verifícalo con otros tres números enteros:

____

____

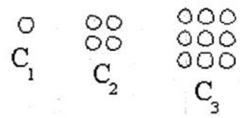
____

✓ Algunos números triangulares son producto de tres números enteros consecutivos; cuatro de estos números son: 6; 120; 210; 990, etc. Verifica.

____

____

ACTIVIDAD 2: "NÚMEROS CUADRADOS".



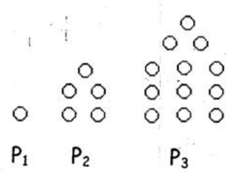
- ✓ Describe C_1 , C_2 y C_3 ____
  ____
- ✓ ¿Cuántos puntos tendrá C_4?____
- ✓ Construye los siguientes números cuadrados y llena la tabla y deduce la ley de formación de un C_n , es decir, número cuadrado cualquiera.

n	1	2	3	4	5	...					n
C	1	4									¿C_n?

Algunas propiedades de los números cuadrados tienen relación con otros números.

- ✓ la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado. Verifica y Dibuja.
- ✓ "Todo número natural puede ser expresado como la suma de cuatro cuadrados de números enteros" (Teorema demostrado por Lagrange en 1770). Busca tres números que cumplan esto.
  ____
  ____
  ____

ACTIVIDAD 3:



- ✓ ¿Que nombre le darías a los números que resultan de este arreglo? ______________

4

✓ ¿Cuántos puntos tendrán los siguientes arreglos, es decir P_4____, P_5?________________________y P_{10}?____

N	1	2	3	4	5						n
P	1										¿P_n?

✓ Deduce la ley de formación de un P_n.

ACTIVIDAD 4:
Verifica la afirmación de CAUCHY que se enunció al principio de la guía, con los siguientes números.

	Suma de los números triangulares	Suma de los números cuadrados	Suma de los números pentagonales
40			
99			
75			

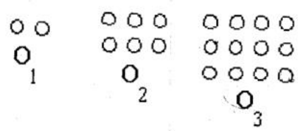
ACTIVIDAD 5:
Vamos a encontrar una expresión general para los números poligonales, completando la siguiente tabla, donde sistematizaremos toda la información obtenida hasta el momento.

Tipo de número	Ley de formación	Transformemos la expresión*
Triangular		
Cuadrado	n^2	

*De manera que todas queden expresadas de una forma similar.

ACTIVIDAD 6:

Existen más tipos de números figurados: **Oblongos o Números rectangulares** en los que la dimensión de un lado es una unidad mayor que el otro.



- ✓ Dibuje los dos números siguientes ¿cuáles son?______________________________
- ✓ Deduce la ley de formación de un O_n.
- ✓ A partir del segundo número rectangular, pueden descomponerse de varias formas, busca las leyes de formación y expresa algebraicamente como se puede obtener el n-ésimo número rectangular.

Elaborado por:	Lina María Jaramillo Vélez. Mayo de 2004
Bibliografía:	

Referentes teóricos

Referentes de las guías:

Corporación grupo Ábaco.

Referentes bibliográficos.

- Alonso, F., et al. (1993); Generalización. Ideas y actividades para enseñar Algebra. (27-53) Grupo Azarquiel. España: Editorial Síntesis.
- Echavarría, H., & Bermúdez, G. (Mayo; 2014). Metodología de aula taller. Grupo ábaco. (SP)
- Posada, F, et al. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Medellín: Artes y letras Ltda.
- Gutiérrez, J, et al. (2006). Pensamiento espacial y geométrico. Medellín: Artes y letras Ltda.
- Jara, H. (2003). Para sistematizar experiencias. Revista innovando, 20, 1- 16
- Jara, H. (1994). Para Sistematizar Experiencias: Una Propuesta Teórica y Práctica, Tarea, Lima, 29

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación