

## TABLA DE CONTENIDO

<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>20</b>
<b>PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1. Antecedentes de la investigación .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1.1. Antecedente 1 .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1.2. Antecedente 2 .....</b>	<b>21</b>
<b>1.1.3. Antecedente 3 .....</b>	<b>22</b>
<b>1.2. Identificación del problema de investigación.....</b>	<b>24</b>
<b>1.3. Importancia de las explicaciones en esta investigación.....</b>	<b>24</b>
<b>1.4. Pregunta de investigación .....</b>	<b>26</b>
<b>1.5. Objetivo general .....</b>	<b>27</b>
<b>1.6. Preguntas temáticas .....</b>	<b>27</b>
<b>1.7. Descripción de la población: <i>The New School</i>.....</b>	<b>27</b>
<b>1.8. Caracterización de los actores participantes en la investigación .....</b>	<b>30</b>
<b>1.9. Justificación: .....</b>	<b>32</b>

<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>34</b>
<b>MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>34</b>
<b>2.1. El objeto matemático: La proporcionalidad-----</b>	<b>35</b>
<b>2.1.1. La Proporcionalidad directa -----</b>	<b>36</b>
<b>2.1.2. Las relaciones asociadas con la proporcionalidad-----</b>	<b>37</b>
<b>Razón-----</b>	<b>37</b>
<b>Escala-----</b>	<b>37</b>
<b>Similitud-----</b>	<b>37</b>
<b>Porcentaje-----</b>	<b>38</b>
<b>Probabilidad -----</b>	<b>38</b>
<b>Covariación directa -----</b>	<b>38</b>
<b>2.2. El Razonamiento Matemático-----</b>	<b>38</b>
<b>2.2.1. Definición de Razonamiento -----</b>	<b>38</b>
<b>2.2.2. El objeto de estudio: La Explicación-----</b>	<b>40</b>
<b>2.3 RESOLUCION DE PROBLEMAS -----</b>	<b>43</b>
<b>2.3.1. La resolución de problemas -----</b>	<b>43</b>
<b>2.3.1.1. Una Comparación de marcos teóricos en resolución de problemas-44</b>	
<b>2.3.1.2. Las heurísticas para resolver problemas propuestas por Polya -----</b>	<b>47</b>
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>50</b>
<b>LA METODOLOGÍA, EL MÉTODO Y LA TECNICA DE LA INVESTIGACIÓN....</b>	<b>50</b>
<b>3.1. Metodología cualitativa -----</b>	<b>50</b>
<b>3.1.1. Caracterización de la investigación cualitativa -----</b>	<b>51</b>
<b>3.1.2. ¿Por qué esta investigación tiene un enfoque cualitativo?-----</b>	<b>52</b>

3.1.3. Criterios de rigor tenidos en cuenta en la investigación cualitativa ----	52
3.2. El método de estudio de casos -----	58
3.2.1. Importancia del estudio de casos en la investigación -----	58
3.2.2. ¿Cuáles estudiantes serán tenidos en cuenta en la investigación? ----	59
3.3. La técnica: El análisis de contenido-----	61
3.3.1. Definición de análisis de contenido-----	61
3.3.2. Las fuentes del material-----	63
3.4 El protocolo de la investigación e instrumentos-----	64
3.4.1. El protocolo de la investigación-----	64
3.4.2. Cronograma de las sesiones de intervención y entrevista-----	65
3.4.3. Los instrumentos empleados en la investigación-----	67
3.4.3.1. Las sesiones de intervención-----	67
3.4.3.2. La entrevista semi-estructurada -----	68
3.4.3.3. Pertinencia de los instrumentos-----	69
CAPÍTULO 4 .....	70
ANÁLISIS Y RESULTADOS .....	70
4.1. DESCRIPCIÓN DE LOS ESTUDIOS DE CASOS-----	70
4.1.1. El caso de John -----	71
4.1.2. El caso de Guillermo -----	73
4.1.3. El caso de Lucía -----	76

4.1.4. El caso de Sandra .....	80
4.2. Análisis de las explicaciones .....	84
4.2.1. Análisis de las explicaciones apoyadas en gráficas .....	86
4.2.2. Análisis de las explicaciones elaboradas a partir del enunciado .....	87
4.2.3. EL ANÁLISIS DE CONTENIDO EN LAS EXPLICACIONES .....	89
CAPÍTULO 5 .....	91
CONCLUSIONES Y TEMÁTICAS FUTURAS .....	91
5.1. Conclusiones relativas al cumplimiento del objetivo general .....	91
5.2. Conclusiones relativas a las preguntas temáticas .....	94
5.3. Temáticas futuras que surgen del trabajo de investigación .....	95
BIBLIOGRAFIA .....	98
ANEXOS .....	102
Anexo A. ....	102
SESIÓN DE INTERVENCIÓN .....	102
SESIÓN UNO: RAZÓN.....	102
SESIÓN DOS: ESCALA Y SIMILITUD .....	104
SESIÓN TRES: PROBABILIDAD .....	106
SESIÓN CUATRO: PORCENTAJES .....	107
SESIÓN CINCO: COVARIACIÓN DIRECTA .....	110
Anexo B: Permisos de los responsables de los actores .....	112
Anexo C: La categorización de las preguntas .....	113
CATEGORÍA DE LAS PREGUNTAS PARA LA ENTREVISTA.....	113

**Anexo D: Rastreo de investigaciones recientes ----- 120**

**Anexo E: Veracidad de los resultados expuestos ----- 126**

## ÍNDICE DE ESQUEMAS

Esquema 1: Presentación del trabajo de investigación -----	18
Esquema 2: Antecedentes de la investigación -----	23
Esquema 3: Motivos de la pregunta de investigación-----	26
Esquema 4: Características de The New School-----	29
Esquema 5: El objeto matemático -----	36
Esquema 6: El razonamiento como punto de partida en la investigación-----	40
Esquema 7: La explicación según Balacheff-----	42
Esquema 8: Instrumentos empleados en la investigación -----	70

## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1: Textos escolares colombianos que fueron revisados</i>	21
<i>Tabla 2: Particularidades de los participantes en la investigación</i>	32
<i>Tabla 3: Condiciones necesarias en proporcionalidad directa</i>	37
<i>Tabla 4: Relaciones asociadas con la proporcionalidad</i>	39
<i>Tabla 5: Autores que proponen métodos para resolver problemas</i>	47
<i>Tabla 6: Las heurísticas para resolver problemas propuestas por Polya</i>	50
<i>Tabla 7: Características de la investigación cualitativa</i>	52
<i>Tabla 8: Criterios de rigor en la investigación</i>	54
<i>Tabla 9: Criterios para vislumbrar el método y la técnica de investigación</i>	59
<i>Tabla 10: Criterios para seleccionar los casos</i>	61
<i>Tabla 11: Conceptos implicados en la definición de análisis de contenido.</i>	63
<i>Tabla 12: Fuentes de los datos en el análisis de contenido</i>	64
<i>Tabla 13: Cronograma de las sesiones para la obtención de las evidencias</i>	66
<i>Tabla 14: Cronograma de las sesiones de intervención y entrevista</i>	67
<i>Tabla 15: Análisis de las explicaciones apoyadas en gráficas</i>	88
<i>Tabla 16: Análisis de las explicaciones elaboradas a partir del enunciado</i>	89
<i>Tabla 17: Programas extranjeros y nacionales</i>	103
<i>Tabla 18: Contenido en cajas con jugo</i>	109
<i>Tabla 19: Variación de la temperatura con relación al tiempo</i>	110
<i>Tabla 20: Batería de preguntas para la entrevista</i>	119

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

<b>Ilustración 1: Episodio 1</b>	<b>72</b>
<b>Ilustración 2: Episodio 2</b>	<b>73</b>
<b>Ilustración 3: Episodio 3</b>	<b>73</b>
<b>Ilustración 4: Episodio 4</b>	<b>75</b>
<b>Ilustración 5: Episodio 5</b>	<b>76</b>
<b>Ilustración 6: Episodio 6</b>	<b>76</b>
<b>Ilustración 7: Episodio 7</b>	<b>78</b>
<b>Ilustración 8: Episodio 8</b>	<b>79</b>
<b>Ilustración 9: Episodio 9</b>	<b>80</b>
<b>Ilustración 10: Episodio 10</b>	<b>81</b>
<b>Ilustración 11: Episodio 11</b>	<b>82</b>
<b>Ilustración 12: Episodio 12</b>	<b>83</b>
<b>Ilustración 13. Características de las explicaciones de los estudiantes</b>	<b>84</b>
<b>Ilustración 14: Rompecabezas</b>	<b>104</b>
<b>Ilustración 15: Carro transformado</b>	<b>104</b>
<b>Ilustración 16: Barco 1</b>	<b>105</b>
<b>Ilustración 17: Barco 2</b>	<b>105</b>
<b>Ilustración 18: Frascos</b>	<b>106</b>
<b>Ilustración 19: Cajas</b>	<b>106</b>
<b>Ilustración 20: Resultados de una encuesta</b>	<b>107</b>
<b>Ilustración 21: Caja que ofrece un 20% de contenido gratis</b>	<b>108</b>
<b>Ilustración 22: Lata que ofrece un 20% de contenido gratis</b>	<b>108</b>
<b>Ilustración 23: Contenido que se ofrece en empaque de natuchips</b>	<b>109</b>

## RESUMEN<sup>1</sup>

La presente investigación es de corte cualitativo, en ella se empleó el método de estudio de casos donde se escogieron cuatro estudiantes, para analizar el contenido de las explicaciones proporcionadas en cinco sesiones de intervención y entrevista a través de la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple.

Se presenta un análisis de contenido a las explicaciones de los participantes en donde se caracteriza la validez e invalidez de estas a partir de las condiciones necesarias o suficientes y de la consciencia o inconsciencia, en cuanto a la proporcionalidad.

Palabras clave. Razonamiento proporcional, explicación, resolución de problemas, metodología cualitativa, estudio de casos, análisis de contenido.

---

<sup>1</sup> Se sugiere al lector de este informe escrito hacer una lectura a la par de los anexos incorporados en el cuerpo del trabajo y en el CD adjunto.

## PRÓLOGO

Esta investigación hace parte de una entre seis (6) que se han desarrollado bajo mi programa de investigación y en la cual se toma como marco teórico las teorías de la prueba propuestas por Nicolás Balacheff y en la cual se quiere lograr un avance al marco conceptual en referencia.

Este programa de investigación ha sido proyectado a futuro el cual se enmarca en la línea del Razonamiento matemático que presentan los estudiantes escolares y universitarios, particularmente en los procesos de validación que emplean los estudiantes para corroborar la certeza de los enunciados que estos producen en la clase de matemáticas.

Los autores de esta investigación han estudiado a profundidad cuatro casos de estudiantes de *The New School: El caso de John, El caso de Guillermo, El caso de Lucía y El caso de Sandra*, en torno a las explicaciones que hacen ellos al momento de solucionar problemas de proporcionalidad directa simple, esta investigación se hace destacable ya que es la primera que explora en el razonamiento proporcional que los estudiantes plasman en sus explicaciones privilegiándolas de la tradicional y mecánica regla de tres simple.

Adicionalmente, con ésta se quiere aportar a los investigadores y maestros de matemáticas lo fundamental de los procesos de validación desde las intuitivas y personales como lo son las explicaciones, pasando por las pruebas matemáticas hasta finalmente llegar a un proceso de formalización en la demostración en matemáticas que nos permite convalidar los teoremas y enunciados que a diario exponemos a nuestros estudiantes en las clases. Al respecto uno de los autores de esta investigación escribe:

*En el texto de Lakatos: Pruebas y refutaciones que Durango (2010) cita en su tesis de maestría<sup>2</sup>, se reconoce el contexto de descubrimiento como aquel en el cual se elaboran pruebas, partiendo de las concepciones que emplea cada estudiante. En el desarrollo de “pruebas y refutaciones” se está poniendo en discusión el lema o la prueba de un estudiante, mediante ajustes o el rechazo de estos. Esto fue lo que se entendió en esta investigación como las condiciones empleadas. Pues, si la explicación tiene condiciones suficientes, esta puede ser probada, pero si no hay las suficientes condiciones, la explicación pasaría a ser refutada.*

*El contexto de justificación que Durango (2010) define apoyándose en Balacheff, permitió reconocer la “explicación” como un proceso transversal y necesario antes de realizar cualquier prueba.*

El propósito de esta investigación es enmarcarla dentro de mi proyecto de doctorado en la línea de razonamiento matemático bajo la dirección del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia, UdeA-Eafit, así como también otros dos trabajos anteriores que han tenido mi orientación: Tapias, (2008):*Para hallar el área de este polígono tan extraño, necesito aprender mil fórmulas o sólo contar puntos, conjeturar y refutar?*, en el cual se retoma el marco de teórico de Lakatos en referencia al contexto de descubrimiento en una clase de matemáticas en séptimo grado y Durango, y otros, (2010): *Investigación documental referida a contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas*, la cual rastrea investigaciones que se han realizado en algunas partes del mundo con relación al razonamiento, la prueba, la demostración y las conjeturas en la Educación Matemática.

---

<sup>2</sup>Titulada: *La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: “El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas”.*

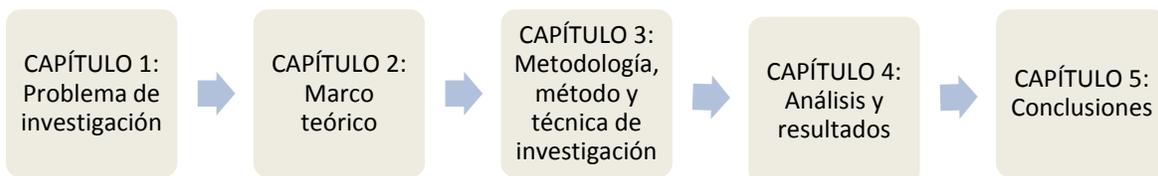
Quiero expresar mi sincero reconocimiento a los autores de esta investigación por su valiosa dedicación y por orientarse bajo esta línea de investigación.

*(John Henry Durango Urrego, 2 de Octubre de 2011, Universidad de Antioquia)*

# INTRODUCCIÓN

Esta investigación fue realizada por maestros en formación de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, cuya práctica pedagógica permitió intervenir a partir de una problemática detectada en la institución educativa *The New School*.

El siguiente esquema contiene los cinco capítulos que conforman este trabajo escrito.



Esquema 1: Presentación del trabajo de investigación.

El **capítulo 1** presenta el problema de investigación, incluyendo los antecedentes, la pregunta, el objetivo, una descripción de la población intervenida y una corta justificación planteada desde los lineamientos curriculares de matemáticas.

El **capítulo 2** expone el marco teórico que consta de tres apartados, los cuales son: el objeto matemático, el objeto de estudio y la resolución de problemas.

El **capítulo 3** se refiere a la metodología *cualitativa*, el método *estudio de casos* y la técnica de *análisis de contenido*.

El **capítulo 4** atiende al análisis de contenido que facilitaron los instrumentos empleados, considerando las explicaciones dadas por cada participante en la investigación.

El **capítulo 5** corresponde a las conclusiones vinculadas a la pregunta y el objetivo planteados en el capítulo 1, y que se escenifican en el análisis.

Además, están los anexos y un CD, los cuales contienen información complementaria con respecto a esta investigación.

# CAPÍTULO 1

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El presente capítulo contiene: los antecedentes, la identificación del problema, la pregunta, el objetivo, una descripción de la población intervenida y una justificación planteada desde los lineamientos curriculares de matemáticas, en lo referente a la investigación realizada.

### 1.1. Antecedentes de la investigación

Durante los inicios de la investigación se tuvieron en cuenta los siguientes antecedentes que direccionaron la elección final de la pregunta de investigación.

**1.1.1. Antecedente 1:** Estrategias incorrectas en la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple detectadas en algunos estudiantes de séptimo grado de *The New School*.

El problema de investigación se centró inicialmente en la comprensión de magnitudes que están en proporción directa en estudiantes de séptimo grado de

*The New School*, quienes emplearon estrategias incorrectas<sup>3</sup> frente a los problemas propuestos por el docente.

**1.1.2. Antecedente 2:** Revisión bibliográfica acerca de la proporcionalidad directa simple en textos escolares Colombianos

El antecedente 1 motivó a los investigadores a realizar una revisión bibliográfica de textos de matemáticas de séptimo grado,<sup>4</sup> concluyendo que se da preferencia a la ejercitación de la proporcionalidad mediante la *regla de tres simple*<sup>5</sup> lo cual permite aplicar el algoritmo con procedimientos mecánicos haciendo difícil detectar el razonamiento en los estudiantes.

<b>Nombre del texto escolar</b>	<b>Autor</b>	<b>Año de edición</b>	<b>Editorial</b>
<b>Matemáticas con tecnología aplicada 7</b>	Luis Pompilio Beltrán Beltrán Benjamín Plinio Rodríguez Sáenz Mónica Sofía Dimaté Castellanos	<b>1996</b>	Prentice Hall Colombia
<b>Matemática Moderna Estructurada 2</b>	Hugo Guarín Néstor Londoño Gómez Raúl Darío Wills	<b>1978</b>	Norma
<b>Olimpiadas matemáticas 7</b>	Víctor Hernando Ardila Gutiérrez	<b>2000</b>	Voluntad
<b>Conexiones matemáticas 7</b>	Leonor Camargo Uribe	<b>2007</b>	Norma

**Tabla 1: Textos escolares colombianos que fueron revisados**

<sup>3</sup>Ver apartado 2.2.4.2.

<sup>4</sup>Se sugiere al lector ver anexo F.1. *Revisión bibliográfica acerca de proporcionalidad directa simple en textos escolares colombianos*, en el cual se exponen las principales conclusiones a las que se llegaron en ellas.

<sup>5</sup> Este algoritmo es el que se emplea en problemas de valor perdido, es decir, en aquellos que requieren hallar uno de los cuatro términos que conforman la proporción.

Esta revisión bibliográfica permitió detectar que varios textos escolares abordan la proporcionalidad desde la aplicación del algoritmo (donde el enunciado pide encontrar un valor perdido) y hay pocas investigaciones que caracterizan explicaciones presentadas por estudiantes. Por otra parte, la propuesta de los *Lineamientos Curriculares Colombianos de Matemáticas* es desde el razonamiento, señalando que el uso del valor perdido descuida este proceso. Este también es un motivo que permite que se enfatice en las “explicaciones” en esta investigación.

### **1.1.3. Antecedente 3:** Rastreo de literatura de investigaciones en Educación Matemática relacionadas con el objeto matemático

Además de los textos escolares revisados, se consultaron diferentes investigaciones en Educación Matemática que han abordado particularmente el objeto matemático: proporcionalidad directa simple.

Están las investigaciones acerca de la proporcionalidad y el razonamiento proporcional por investigadores como Piaget, (1968) quien sitúa la adquisición de proporcionalidad como una relación que se establece entre relaciones y por su parte Karplus, (1974) pone en evidencia que un gran número de estudiantes al final de la escuela secundaria e incluso en edades universitarias no han logrado adquirir una comprensión de la proporcionalidad.

En años de 1997 hasta el año 2009 se han realizado investigaciones alrededor del objeto matemático de la presente investigación, como las tesis<sup>6</sup> que tienen que ver

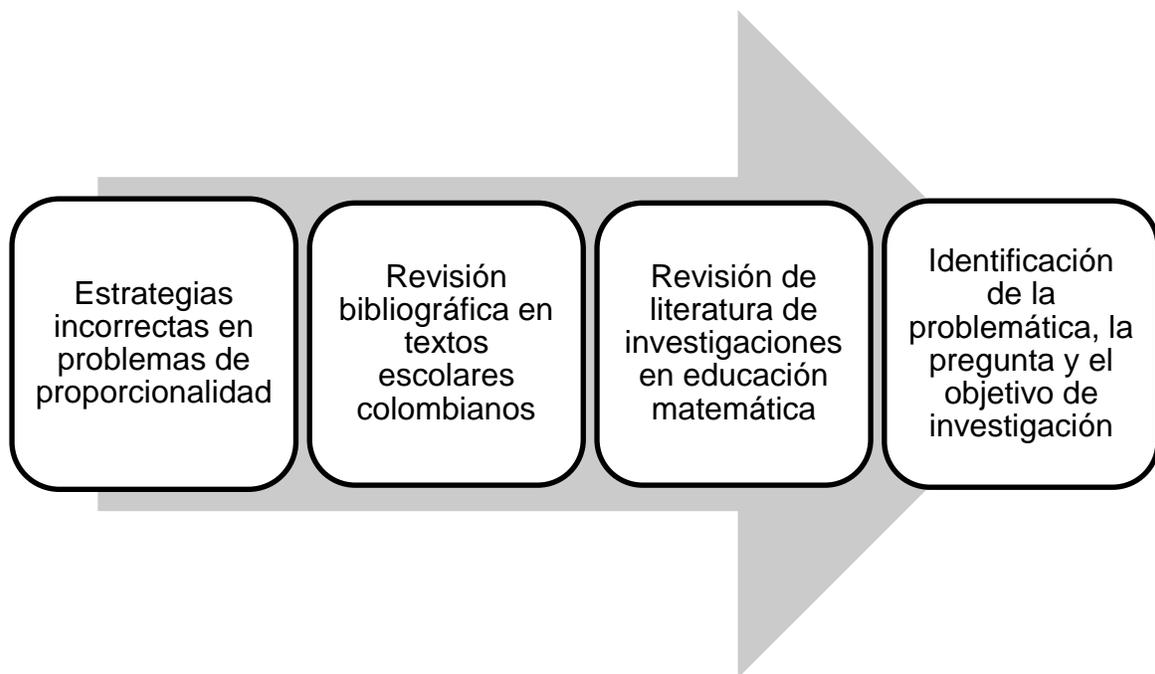
---

<sup>6</sup>Ver anexo D: Rastreo de investigaciones recientes en torno a la proporcionalidad.

con el razonamiento proporcional y lo enmarcan desde diferentes conceptos matemáticos.

La revisión bibliográfica de la teoría existente en lo relacionado con el concepto de proporción permitió en la presente investigación identificar cómo el razonamiento proporcional está presente en la resolución de problemas.

El esquema 2, sintetiza los antecedentes que permitieron identificar el problema de investigación:



**Esquema 2: Antecedentes de la investigación**

## 1.2. Identificación del problema de investigación

Los antecedentes mencionados (apartado 1.1), junto con la bibliografía rastreada al respecto (capítulo 2) y la propuesta metodológica (capítulo 3) sugieren que la aplicación del algoritmo no permite a los investigadores evidenciar explicaciones a nivel de razonamiento proporcional, por tanto se plantean problemas que permitan destacar:

*Explicaciones que constituyen indicios de razonamiento proporcional.*

## 1.3. Importancia de las explicaciones en esta investigación

Para situar al lector en el objeto de estudio de la presente investigación, se hace un recorrido por los procesos de validación propuestos por Nicolás Balacheff, (2000) investigador francés que enfoca sus trabajos en el razonamiento. Este autor distingue como procesos de validación a las: explicaciones, pruebas y demostraciones.

En cuanto a la demostración, Balacheff (2000) afirma que es la aceptación de una prueba de un enunciado matemático por parte de una comunidad matemática. Esta aceptación no depende del momento o el lugar o las personas que elaboran la prueba. Es decir, la demostración es la aceptación de una prueba fuera de un contexto temporal, espacial o personal. La demostración es la aceptación de una prueba formal por parte de una comunidad matemática.

En cuanto a la prueba, Balacheff (2000) afirma que es la aceptación de una explicación de un enunciado matemático por parte de un grupo de personas en un momento dado. Es decir, la prueba es válida en la medida que logre convencer a

sus interlocutores pero en el momento. No importa si es refutada esa explicación posteriormente por otras personas.

En cuanto a la explicación, Balacheff (2000) afirma que es el convencimiento personal que resulta de producir información a partir de otra que procesa, siendo la explicación el primer proceso de validación del razonamiento.

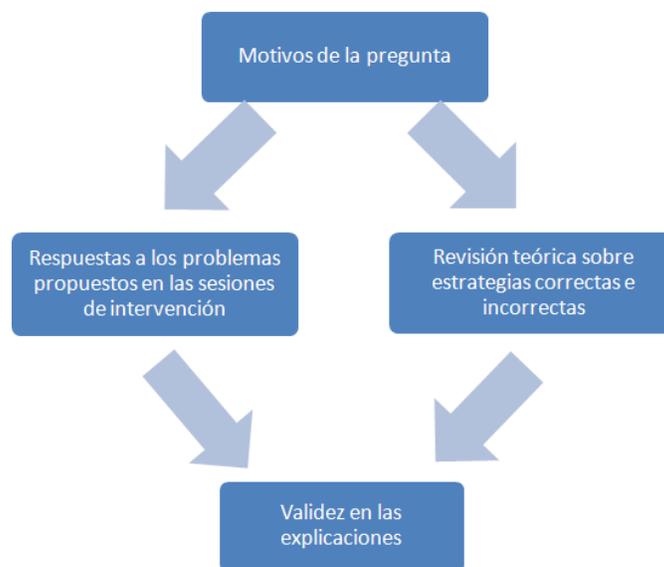
La pertinencia de Balacheff en este trabajo, radica en que para entender las pruebas o las demostraciones que se construyen en clase, antes debe entenderse el razonamiento individual y personal, que es la explicación. Al respecto, Balacheff propone una tipología de pruebas y da una definición en sus primeras páginas, pero no profundiza en explicaciones.

Entendiendo el razonamiento como una actividad intelectual que incluye explicaciones, pruebas y demostraciones, el objeto de estudio que se aborda en esta investigación son las “*explicaciones*” puesto que estas dan cuenta del convencimiento personal del estudiante mediante el discurso y el texto escrito que constituyen indicios de su proceso de razonamiento. Este trabajo está delimitado a las explicaciones porque el diseño de clase implementado en las intervenciones realizadas en el aula *no proponía generar debate matemático* entre los estudiantes *y tampoco enfatizaba en la institucionalización o aceptación fuera del contexto del argumento del estudiante como válido*. Además, la explicación es un proceso que implica a la prueba y la demostración, porque toda explicación es abordada desde unas creencias (saberes previos) y unas expectativas (especulación sobre la falsedad o veracidad para darle un tratamiento a la información y conjugarla con los saberes previos). Así, esta investigación puede servir como un primer paso hacia otras investigaciones en cuanto a procesos de razonamiento más generales en el modo que se considera la validación de enunciados o la aceptación de estos.

#### 1.4. Pregunta de investigación

Desde los referentes teóricos y metodológicos que sugiere el problema de investigación identificado, surge la pregunta:

*¿Cómo son las explicaciones que presentan los cuatro actores participantes al resolver problemas de proporcionalidad directa simple?*



**Esquema 3: Motivos de la pregunta de investigación**

La revisión teórica sobre el razonamiento proporcional junto con las respuestas presentadas en las sesiones de intervención, permitieron establecer las categorías, determinando así que la pregunta debía apuntar a la caracterización de las explicaciones, según su validez, desde un contexto lógico-matemático<sup>7</sup>. Cabe aclarar que la pregunta no se fijó desde los inicios de la investigación, sino

<sup>7</sup> El contexto lógico-matemático predice la forma que debe tomar el análisis, puesto que se estudiaron los casos en los cuales se presentaban explicaciones válidas en torno a la resolución de problemas. El contexto lógico-matemático le permite al investigador considerar la veracidad y la suficiencia de la información empleada en la explicación elaborada por los participantes, para precisar la perspectiva desde la cual se analizan los datos.

que se fue ajustando según la revisión teórica, la metodología pertinente y la información propiciada por los participantes<sup>8</sup>.

### **1.5. Objetivo general**

Analizar la validez de las explicaciones elaboradas por los participantes, a través de problemas de proporcionalidad directa simple.

### **1.6. Preguntas temáticas**

A continuación se plantean las preguntas que soportan el análisis, con la finalidad de orientar la pregunta de investigación y alcanzar el objetivo propuesto.

- ¿Qué explicaciones presenta cada participante de la investigación en torno a un problema de proporcionalidad directa simple?
- ¿Qué información destaca el participante de la investigación al apoyarse en las gráficas o en la información literal que presenta el problema?

### **1.7. Descripción de la población: *The New School***

El colegio cuenta a mayo del año 2011 con trescientos veinte (320) estudiantes que fluctúan durante el año académico por las condiciones sociales y económicas del país.

---

<sup>8</sup>Robert Stake afirma la pertinencia de un diseño que se revise y modifique constantemente, en una metodología cualitativa.

Se encuentra ubicado en el kilómetro diez (10) vía las Palmas, cerca de los miradores del Poblado, por esta ubicación la mayoría de estudiantes residen en Poblado o en Laureles. El colegio se encuentra ubicado en una zona tranquila de las laderas de Medellín: éste limita por el norte y oriente con el proyecto de Urbanización Cinturón verde, por el occidente y por el sur con la carretera vía las Palmas (Miradores del Poblado).

Este colegio es privado<sup>9</sup>, las clases se dan en inglés, a excepción de “lengua castellana”. Es el único colegio en Medellín que tiene calendario B<sup>10</sup>, debido a que las vacaciones (verano) en el extranjero deben coincidir con las de la jornada académica.

El colegio ha modificado varias veces su misión y su visión (PEI de *The New School*, modificado junio en 2011) con el propósito de ofrecer a los habitantes de la ciudad de Medellín una educación diferente bajo algunos aspectos:

- La misión del colegio ***The New School*** reza así: *es una institución educativa privada, mixta, bilingüe, certificada en ISO 9001:2008; que basada en la metodología de Escuela Nueva, los lineamientos del Pensamiento Sistémico y el Aprendizaje Significativo, favorece la inclusión, formando ciudadanos integrales, competentes y emprendedores.*

---

<sup>9</sup>Es aquel que no es manejado por el Estado sino por personas u organismos. Allí los estudiantes deben pagar mensualidad.

<sup>10</sup>Se definen dos tipos de calendarios en el país: el calendario "A" que empieza en el mes de febrero y culmina en el mes de noviembre, y el calendario "B" que empieza en el mes de septiembre para finalizar actividades en el mes de junio. En la actualidad todos los establecimientos oficiales desarrollan sus actividades en el calendario "A". Anteriormente en los departamentos del Valle del Cauca, Nariño y Cauca se aplicaba el calendario "B", pero en la actualidad se han trasladado al "A". (Ministerio de Educación Nacional)

- Además The New School tiene por visión: *“Consolidarse en el ámbito local como líder de las instituciones educativas privadas en seguir la metodología de **Escuela Nueva** para beneficio de nuestros estudiantes y sus familias.”*

Al momento de realizar la intervención, *The New School* contaba con:

Médica que atiende a los estudiantes considerados con capacidades o talentos excepcionales.

Experta en Atención a Necesidades Educativas Especiales, que actualmente es Investigadora en el Campo de la Inteligencia Emocional y Atención a Talentos Excepcionales.

Especialista en dificultades del aprendizaje.

Calendario B, debido a que las vacaciones (verano) en el extranjero deben coincidir con las del colegio.

Trescientos veinte estudiantes .

Proceso selectivo de admisión de estudiantes, ya que es privada.

Quince estudiantes en el grado séptimo, los cuales tienen entre doce y catorce años de edad. Son ocho niños y siete niñas.

Estudiantes que pertenecen al estrato cinco o seis.

**Esquema4: Características de The New School**

## **1.8. Caracterización de los actores participantes en la investigación**

### **1.8.1. Caracterización de los estudiantes que acompañaron la resolución de los problemas en la actividad y la entrevista para realizar posteriormente el estudio de casos.**

Conforme se mencionó anteriormente el grado séptimo del colegio contaba con catorce (14) estudiantes, ocho (8) niñas y seis (6) niños con edades que oscilaban entre los doce (12) y los trece (13) años. Dentro de estos catorce (14) estudiantes se escogieron cuatro (4) de ellos como muestra representativa teórica para la investigación cualitativa.

En los cuatro (4) estudiantes escogidos se encontraron cualidades como: disposición hacia el trabajo de clase, participación acertada en las sesiones de clase, materiales y cuaderno al día, conocimientos básicos firmes, apertura a lo nuevo y al cambio, colaboración con los compañeros que presentaban ritmos de aprendizaje más lentos con respecto a los otros compañeros y apoyo familiar. Los padres de familia acompañan o asisten de forma personalizada a sus hijos, comprometidos con las tareas y con el proceso académico.

### **1.8.2. Caracterización de los estudiantes seleccionados para el estudio de casos**

En un primer momento no había claridad acerca de lo que es el estudio de casos y las características que debían presentar los participantes de la investigación. Al discernir se reflejó en esta las características que se evaluarían en cada uno de los actores seleccionados, quienes han obtenido calificaciones sobresalientes<sup>11</sup> en

---

<sup>11</sup>Ver anexo F.5 (CD).Historia académica de los actores participantes de la investigación.

su estancia por el colegio. Los seleccionados fueron: *John, Guillermo, Lucía y Sandra*<sup>12</sup>.

*Los estudiantes fueron seleccionados atendiendo a diferentes criterios, por ejemplo John y Guillermo por las capacidades que mostraban en la resolución de problemas y la disposición en cada una de las sesiones. Lucía y Sandra por sus capacidades intelectuales, por el compromiso adquirido en las diferentes sesiones planteadas, por el acompañamiento familiar constante, por el deseo de mejorar cada día, por su responsabilidad con el proceso académico.*

Cabe resaltar que uno de los actores participantes ha sido considerado después de una evaluación neuro-psicológica como una estudiante con talentos excepcionales y se tiene información relevante relacionada con la estudiante de un libro<sup>13</sup> escrito por su padre quien ha permitido utilizarlo en esta investigación.

Estos cuatro estudiantes son los actores participantes del proceso definitivo de la investigación y que permitieron la recolección de información, ellos han mostrado interés y se ha llegado a un acuerdo con ellos. Se les solicitó permiso por escrito tanto a ellos como a sus padres como sus responsables, con el fin de seguir los criterios éticos pretendidos en cualquier investigación.

---

<sup>12</sup> Todos los nombres de los actores participantes son seudónimos, por motivos éticos en la investigación.

<sup>13</sup> Ver anexo F.6 (CD). Diario: una niña con capacidades o talentos excepcionales.

Actores de la investigación	Características
<b>John</b>	El estudiante se destacó por su compromiso, por su facilidad para argumentar, hechos que se evidenciaron en las actividades desarrolladas, tanto escritas como verbales. A pesar de tener facilidad para argumentar presenta vacíos en la parte conceptual relacionada con la proporcionalidad.
<b>Guillermo</b>	Mostró gusto e interés por participar en los problemas que se plantearon acerca de la proporcionalidad directa simple, es de precisar que comprende y tiene facilidad en realizar procedimientos matemáticos acordes a la edad y el grado académico en el cual se encuentra.
<b>Lucía</b>	Es una estudiante que mostró interés en participar en el proceso de la investigación. En palabras del papá se expresa que: <i>Desde temprana edad, lee cuentos en ambos idiomas. Llega del colegio a su casa y hace las tareas inmediatamente. Luego, puede dedicarse a realizar otras actividades. Se le exige continuidad en las tareas, realizarlas sin interrupción. La evaluación neuropsicológica reveló que tiene un Coeficiente Intelectual de ciento treinta y nueve (139) puntos.</i>
<b>Sandra</b>	La estudiante se caracterizó por ser comprometida con sus estudios, demostró capacidades en la resolución de problemas, y comprensión en cuanto a los conceptos de proporcionalidad directa simple, utilizó estrategias correctas como se evidencia en los análisis, dio explicaciones validas en los procedimientos realizados y tuvo creatividad al asociar diferentes conceptos de proporcionalidad al momento de resolver los problemas.

Tabla 2: Particularidades de los participantes en la investigación

### 1.9. Justificación: El razonamiento matemático desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998) se plantea a los docentes diseñar actividades en donde sea necesario involucrar el razonamiento, teniendo en cuenta la edad de los estudiantes y el nivel de desarrollo, por lo tanto, el razonamiento es un eje fundamental en las matemáticas, lo que implica la

necesidad de profundizar en él, y proponer actividades que lo potencialicen, tal y cómo se ha desarrollado en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad, propuestas en las sesiones de intervención, en donde además de considerar la edad de los actores de la investigación, y evaluar la pertinencia de las cinco sesiones, se presentan los problemas considerando las diferentes relaciones asociadas a la proporcionalidad, que son conceptos matemáticos que han sido estudiados en el grado séptimo y anteriores a éste.

Lo expuesto anteriormente y a partir de la concepción en los Lineamientos Curriculares vemos que: *“razonar está relacionado con la manera como los estudiantes dan cuenta del cómo y del por qué de los procesos que siguen para llegar a conclusiones”* MEN, (1998).

Los investigadores han contribuido a realizar esta investigación y el de diseñar unos instrumentos de intervención en los cuales se caracterizaron las explicaciones enfocadas en establecer inferencias entre la información de los enunciados y llegar a dar conclusiones como producto final de la interacción de los actores de la investigación con los problema propuestos.

Los aportes que se desprenden de esta investigación, es el de diseñar y proponer unas sesiones de intervención que permitan a los actores desarrollar habilidades y de emplear un proceso de razonamiento proporcional consciente para analizar, comprender, refutar y describir enunciados matemáticos. Además de fortalecer en los estudiantes y actores participantes de la investigación de una estrategia multiplicativa en la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple, mediante la utilización de tablas y problemas en donde sea necesario hallar el factor escalar, y privilegiando otros objetos matemáticos asociados con proporcionalidad.

## **CAPÍTULO 2**

### **Marco teórico**

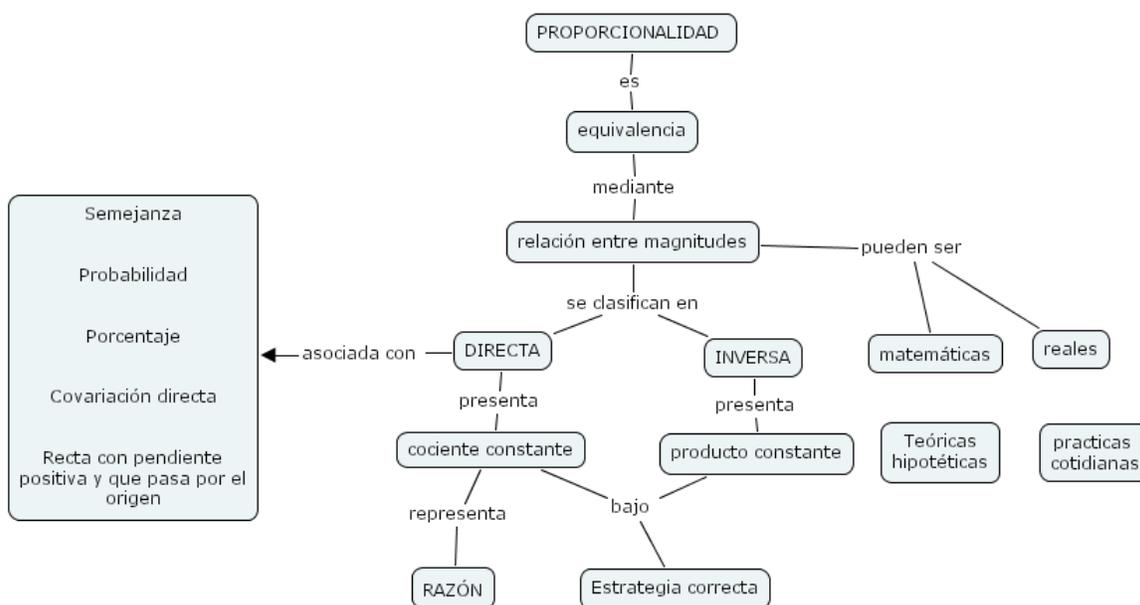
En las sesiones de clase, los estudiantes elaboraron explicaciones en cuanto a la resolución de problemas, empleando estrategias correctas o incorrectas de razonamiento proporcional pero que posiblemente el mismo maestro no había considerado en el momento. Y en esa diversidad de razonamientos debe aprovecharse el objeto matemático desde diferentes puntos de partida, pero sin desviarse del objetivo de la clase.

Este es el caso de la proporcionalidad, que puede presentarse desde diferentes relaciones a través de problemas cuya resolución implica razonamiento proporcional. En el presente capítulo, se exponen algunas conceptualizaciones que direccionaron esta investigación, tales son: la proporcionalidad directa, las relaciones asociadas a la proporcionalidad (razón, escala y similitud, probabilidad, porcentaje y covariación directa), el razonamiento matemático, la definición de explicación, el razonamiento proporcional, las estrategias de razonamiento proporcional (correctas e incorrectas), y la resolución de problemas.

## 2.1. El objeto matemático: La proporcionalidad

La proporcionalidad es entendida como una equivalencia entre magnitudes<sup>14</sup> relacionadas<sup>15</sup> bajo una estrategia multiplicativa *Tourniaire y Pulos, (1985)*, dichas magnitudes pueden ser de tres tipos: estrictamente matemáticas, de otro campo del saber o de situaciones de la vida diaria. Para los problemas presentados en este trabajo se consideran las del primer tipo.

El esquema 6 muestra todo el recorrido teórico de la investigación en referencia a la proporcionalidad.



Esquema 5: El objeto matemático

<sup>14</sup> Una magnitud se entiende como una propiedad que poseen los cuerpos y fenómenos que permite que puedan ser medidos y dicha medida, representada en la cantidad, puede ser expresada mediante números.

<sup>15</sup> La relación es entendida en este trabajo como la razón. En este caso la relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva porque: cuando la proporcionalidad es directa, la relación de equivalencia se cumple entre razones. Así, una razón es igual a sí misma, esto es la propiedad reflexiva  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ . Además, si una razón es igual a otra, esto es la propiedad simétrica  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Y finalmente, si una primera razón es igual a una segunda razón, y la segunda razón es igual a una tercera razón, esto implica que la primera razón sea igual a la tercera, esto es la propiedad transitiva. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  entonces  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ .

### 2.1.1. La Proporcionalidad directa

Si se relacionan dos magnitudes puede suceder que estas sean directa o inversamente proporcionales.

En el primer caso, que es el interés de la investigación, hay un cociente constante, es decir, aunque las cantidades de las respectivas magnitudes que están siendo relacionadas varíen, el cociente no cambia, por esto se dice que es constante. Propiamente desde las matemáticas, dos magnitudes son directamente proporcionales si una de ellas al variar es múltiplo constante de la otra o como lo plantean Stanley, McGowan, & Hudson Hul, (2003) dos cantidades son proporcionales cuando su variación determina una razón constante.

A continuación se presenta en la tabla 3 la síntesis de las condiciones que deben emplearse para determinar la proporcionalidad directa entre magnitudes.

<b>Condiciones necesarias a partir de una gráfica en el plano cartesiano</b>	La gráfica corresponde a una línea recta. La línea recta tiene pendiente positiva. La línea recta intercepta al origen.	La conjunción de las condiciones enunciadas anteriormente es suficiente para determinar la proporcionalidad directa entre magnitudes.
<b>Condiciones necesarias a partir de un enunciado escrito</b>	Las magnitudes se relacionan directamente, es decir, a medida que una magnitud aumenta, la otra también lo hace. El cociente entre las cantidades correspondientes a las magnitudes relacionadas es constante.	La conjunción de las condiciones enunciadas anteriormente es suficiente para determinar la proporcionalidad directa entre magnitudes.

**Tabla 3: Condiciones necesarias en proporcionalidad directa**

Al tener en cuenta todas las condiciones necesarias en proporcionalidad, se están empleando las condiciones suficientes. De este modo, es pertinente definir las condiciones suficientes en resolución de problemas de proporcionalidad directa en función de las condiciones necesarias.

### 2.1.2. Las relaciones asociadas con la proporcionalidad

Cabe reconocer diferentes relaciones que pueden asociarse al objeto matemático, en la resolución de problemas. Esto tiene la finalidad de otorgar una comprensión a la situación que está siendo expuesta en clase. En sentido estricto a la proporcionalidad directa simple.

<b>Relaciones asociadas con la proporcionalidad</b>	<b>Definición</b>	<b>Ejemplos</b>
<b>Razón</b>	En matemáticas, <b>una razón es una relación</b> que refleja las veces que la cantidad correspondiente a una magnitud cabe en otra cantidad, esto es el cociente. Que en el caso de este objeto matemático es el cociente de proporcionalidad. Convencionalmente se expresa como " <b>a</b> es a <b>b</b> " o <b>a:b</b> ; y representa las veces que <b>b</b> cabe en <b>a</b> con a y b enteros y b diferente de cero.	Ver anexo: A.1. Sesión de razón.
<b>Escala</b>	Se utiliza en dibujos, donde las distancias reales y las del dibujo mantienen una <b>relación que es constante de proporcionalidad</b> , entendida en este caso como el cociente entre dos magnitudes que posibilitan hacer el cambio de una magnitud a otra. Ibarra & Moreno, (2010, pág. 66).	Ver anexo: A.2. Sesión de escala y similitud.
<b>Similitud</b>	Las <b>razones de las partes de una figura</b> son equivalentes a las razones de las partes de la otra figura.	Ver anexo: A.2. Sesión de escala y similitud.

<b>Porcentaje</b>	Es una representación de la relación entre dos cantidades. Se compara una cantidad como una parte con respecto a cien (100), como valor de referencia.	Ver anexo: A.3. sesión de probabilidad
<b>Probabilidad</b>	Es una relación entre sucesos, que se presenta particularmente al relacionar los casos favorables y los posibles en un experimento, examinando las posibilidades de que ocurra un evento favorable en un espacio muestral.	Ver anexo: A.4. Sesión de porcentaje.
<b>Covariación directa</b>	Es una <b>relación entre magnitudes</b> , porque al aumentar o disminuir la cantidad de una magnitud, la cantidad de la otra magnitud también lo hace.	Ver anexo: A.5. Sesión de variación directa.

**Tabla 4: Relaciones asociadas con la proporcionalidad. Tomado y adaptado de Stanley, McGowan, & Hudson Hul, (2003)**

## **2.2. El Razonamiento Matemático**

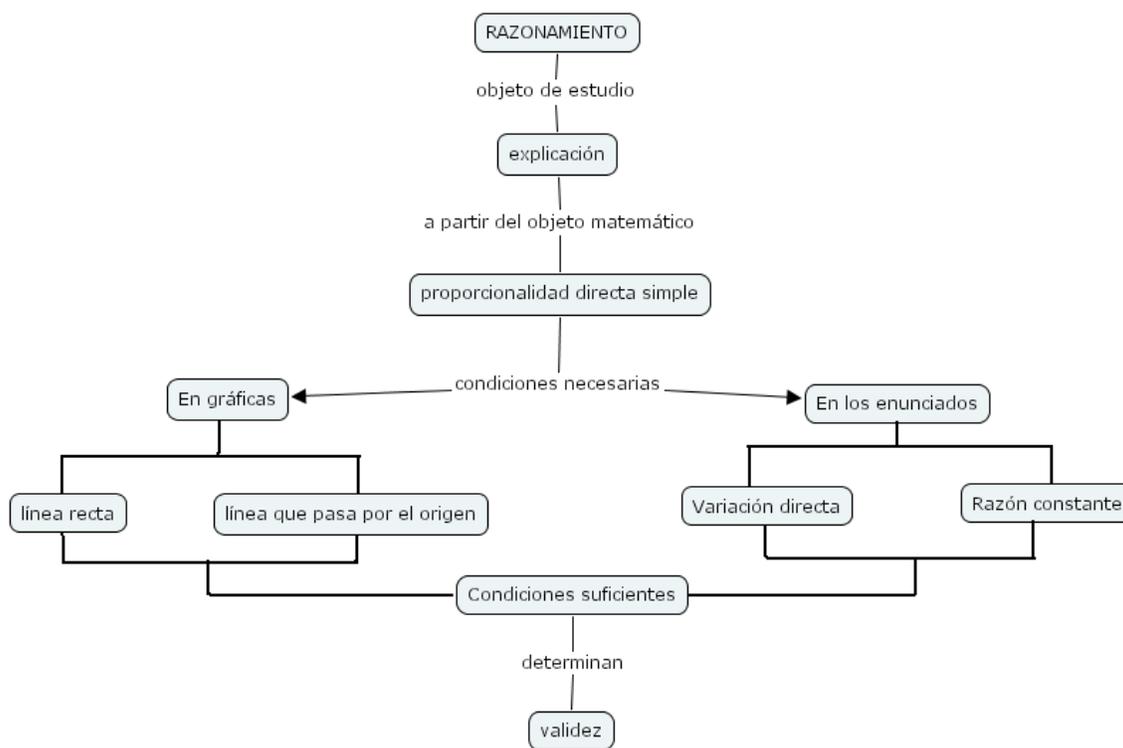
En el apartado anterior, se presentaron las relaciones asociadas con el objeto matemático y se realizó un acercamiento al concepto de proporcionalidad directa simple. En este apartado, se parte de una definición de explicación, se enfatiza en el razonamiento proporcional y finalmente se exhiben estrategias de razonamiento proporcional que permiten determinar la validez de la explicación.

### **2.2.1. Definición de Razonamiento**

Según Balacheff, (2000) el razonamiento es una actividad intelectual que consiste en procesar información para generar una conclusión o producir una nueva información. Este autor menciona procesos de validación, del más individual al más generalizado, que comienzan con el razonamiento que se evidencia como proceso de validación cuando se genera una explicación para que otros entiendan la propia posición. Como proceso de validación, se estudiaron las explicaciones de acuerdo a los registros escritos y verbales en las secciones realizadas en las

entrevistas, al darle respuesta a los problemas en las intervenciones realizadas en cinco sesiones, que enfatizaban en el razonamiento proporcional.

Esta investigación se enfocó en la explicación, en particular desde la proporcionalidad directa simple, en la resolución de problemas, puesto que “la explicación” es transversal a los procesos de validación. Así, vale la pena destacar entre aquellos problemas que tienen la intención de reconocer razonamientos proporcionales, de los que pretenden encontrar un valor perdido<sup>16</sup>.



**Esquema 6: El razonamiento como punto de partida en la investigación**

<sup>16</sup> Ver anexo F.1 (CD). Revisión bibliográfica acerca de proporcionalidad directa simple en textos escolares Colombianos

## 2.2.2. El objeto de estudio: La Explicación

La explicación consiste en la propia aceptación como verdadero<sup>17</sup> de un procedimiento. Cuando se expresa en un discurso sin la intención de convencer al otro, sino únicamente para exponer el propio punto de vista, aún no se constituye prueba. La explicación es importante abordarla porque es un requisito de la prueba, y esta última, a su vez, es un requisito de la demostración. Antes de constituir la prueba, el estudiante debe haber ganado terreno en la explicación. Es por esto que antes de explorar procesos de prueba o demostraciones, la presente investigación estudia las explicaciones que dan los estudiantes. En futuras investigaciones se podrían retomar estos apuntes, para indagar por la prueba.

La caracterización de las explicaciones como válidas e inválidas implica comparar<sup>18</sup> unos con respecto a otros, se entendió el error como el empleo de una estrategia<sup>19</sup> inadecuada, y en consecuencia el estudiante respondería

---

<sup>17</sup> En este caso, la aceptación depende de las condiciones consideradas en el apartado 2.1.1.

<sup>18</sup> Las comparaciones no tienen la intención de señalar o juzgar, sino identificar las explicaciones inválidas, que luego se pueden corregir.

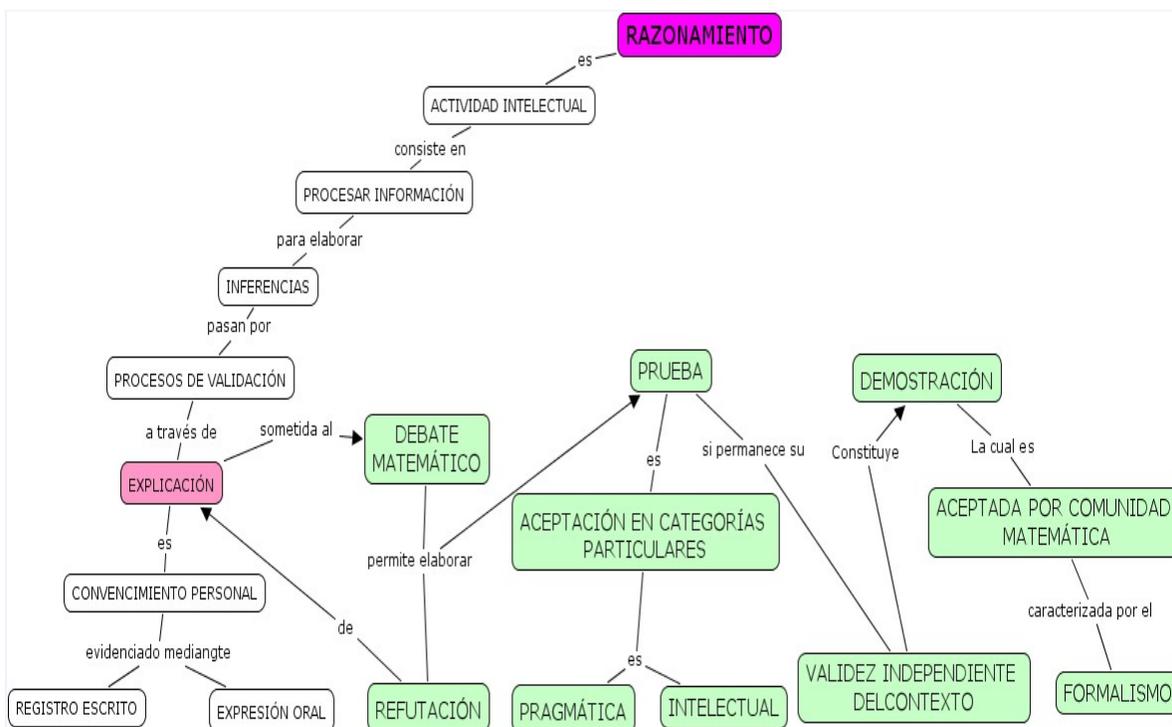
### <sup>19</sup> **Las estrategias de razonamiento proporcional**

Son las estrategias a través de las cuales se establecen relaciones entre cantidades. Con respecto a la resolución de problemas, las estrategias de razonamiento proporcional son los procedimientos o la planificación de las acciones que se consideran tras reconocer que un problema es de proporcionalidad o por lo menos involucra magnitudes. Según Tourniaire & Pulos, (1985) pueden destacarse estrategias correctas e incorrectas, estas se detectaron en las sesiones de intervención y posibilitaron la producción de las categorías emergentes.

#### **Estrategias correctas**

**Estrategia multiplicativa:** Relación entre los términos que conforman una razón Tourniaire y Pulos, (1985, pág. 185). Como puede evidenciarse en el problema que consistía en ampliar el cuadrado según la información dada, *Sandra* (ver página 80) afirmó que cada lado debía multiplicarse por 1.4, valor correspondiente a la razón entre el dibujo que debía construirse y el original.

incorrectamente el problema. Se vio la estrategia incorrecta como una oportunidad para que el estudiante se hiciera consciente de que su razonamiento no era válido al resolver problemas de proporcionalidad.



**Esquema 7: La explicación según Balacheff (2000)**

### Estrategias incorrectas

Se deben al uso de una estrategia inapropiada o al mal uso de una estrategia correcta. Las sesiones de intervención permitieron detectar las siguientes estrategias incorrectas:

- Descartar parte de la información en el problema.
- Determinar la constante como la diferencia o mediante una estrategia aditiva.
- Usar una unidad arbitraria.

### 2.2.3. Razonamiento proporcional

Según Chamorro, (2005) el razonamiento proporcional es una comparación en la que se otorga significado a los símbolos que representan cantidades, bajo una estrategia empleada. Así, los problemas que pretenden evidenciar razonamiento proporcional en los estudiantes, son resueltos al establecer una comparación o se da una explicación respecto a la verdad o falsedad de un enunciado, que aparentemente involucra proporciones. Mientras que los problemas de valor perdido son aquellos que pueden resolverse utilizando regla de tres. Esta perspectiva permite afirmar que el razonamiento proporcional es el procesamiento de información en torno a la proporcionalidad.

Como procesos involucrados en el razonamiento proporcional que presentan los estudiantes es relevante definir las estrategias de razonamiento proporcional.

En el siguiente apartado se plantean problemas que implican razonamiento proporcional. Es por esto que para la elaboración de las sesiones de intervención se tienen en cuenta aquellos problemas que son planteados para evidenciar razonamientos y distinguirlas de aquellos que sólo pretenden ejercitar para afianzar una conceptualización. Así, se podrían plantear problemas de comparación o encontrar una incógnita (en el primer caso se pretende establecer razones equivalentes mientras que en el segundo se debe hallar el término desconocido). También se puede pedir sólo respuesta o explicación (en el primer caso, una respuesta correcta puede generarse sin razonamiento proporcional pero en el segundo se pregunta el cómo encuentran la respuesta). El algoritmo de producto cruzado también conocido como regla de tres no debe ser usado como estrategia de cálculo sin entender las condiciones de proporcionalidad directa y sin tener la oportunidad de buscar estrategias de resolución de problemas.

## 2.3 RESOLUCION DE PROBLEMAS

### 2.3.1. La resolución de problemas

La resolución de problemas es considerada como la parte esencial en el estudio del conocimiento matemático, convirtiéndose en uno de los principales propósitos de la escuela, que es precisamente que los estudiantes resuelvan problemas, es decir, prepararse para el mundo laboral o sus propios conflictos personales.<sup>20</sup> Tal y como está estipulado en los Lineamientos Curriculares Colombianos de Matemáticas MEN, (1998, pág. 52), en donde se plantea que la resolución de problemas es el eje central del currículo de matemáticas, para proveer un contexto en el cual los conceptos sean aprendidos.

Al respecto, en una conferencia acerca de la resolución de problemas pronunciada por George Polya, (1961) habló de la importancia de la resolución de problemas para la educación matemática y expresó lo siguiente: *“Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática”*

Con lo cual queda planteado que con la resolución de problemas se puede emprender un diálogo entre sus concepciones y llegar a validar el procedimiento empleado, facilitando así, las explicaciones de tipo verbal y escritas, por tanto el estudiante necesita comunicar los logros obtenidos en la resolución de problemas, para convencerse que el razonamiento utilizado le ha permitido precisamente

---

<sup>20</sup>Parte de las acciones cotidianas de los seres humanos es resolver problemas, la gran mayoría de estos tiene que ver con proporcionalidad, en muchas de las actividades comunes, se mezclan ingredientes proporcionalmente. Puede verse en la preparación de alimentos, por ejemplo, en las recetas de cocina se establece que para una taza de arroz se le agrega una taza de agua y que al preparar dos tazas más de arroz deben agregarse dos tazas más de agua, o cuando un vehículo viaja a ciertos kilómetros por hora a mayor velocidad será mayor los kilómetros recorridos por hora, y así como estos ejemplos mencionados, es posible encontrar numerosas vivencias asociadas a la proporcionalidad.

**examinar la solución obtenida;** revisar la solución para responder a las siguientes preguntas:

- *¿Tiene sentido el plan que se ha concebido?*
- *¿Qué información es importante en el enunciado?*
- *¿Se logró responder a lo que pregunta el problema?*

Ya que estas preguntas como lo plantea Polya (1961) “ayudan a resolver un problema en cuestión y segundo desarrolla en el estudiante la habilidad de modo que puede resolver por sí mismo problemas ulteriores”.

Estas preguntas han sido claves al momento de la construcción de las sesiones de intervención y la entrevista semi-estructurada.

En matemáticas se ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores Polya, (1961) y Schoenfeld, (1985) citado por el MEN (1989, pág 25)

### 2.3.1.1. Una comparación de marcos teóricos en resolución de problemas

Varios autores han escrito acerca de la resolución de problemas como se muestra en la tabla 5.

Etapas de Fridman (citado por Céliz, Zingaretti y Feliziani, 2006)	Fases de Gustavo Gallego (2000)	Dimensiones de Schoenfeld (cita por Barrantes, 2006)	Heurísticas de Polya (1961)
<p><b>Primera etapa:</b></p> <p><b>Análisis del problema</b> Entender de qué problema se trata, ¿cuáles son sus condiciones?, ¿en qué consisten sus requerimientos?</p> <p><b>segunda etapa:</b></p> <p><b>Escritura esquemática del</b></p>	<p>La resolución de un problema es una actividad intelectual de carácter especial conformada por las siguientes fases:</p>	<p>Dimensiones en la resolución de problemas:</p> <p>1. <b>Recursos:</b> asociados a los conocimientos previos</p> <p>Inventario de recursos: ¿cómo accede el estudiante al conocimiento que tiene?</p> <p>circunstancias estereotípicas: con procedimientos casi automáticos.</p>	<p>Para Polya “resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, conseguir el fin</p>

<p><b>problema</b> Utilización de tipos de simbolizaciones: signos, literales, dibujos, gráficos, esquemas, etc. Es una forma más esquemática para fijar los resultados de la etapa anterior. <b>Tercera etapa:</b></p> <p><b>Búsqueda de un método de resolución</b> La búsqueda del plan para resolver un problema constituye la parte central del proceso de resolución. Una recomendación muy importante es que no es posible enseñar a ejecutar la búsqueda del plan de resolución de un problema, sino que es necesario aprender a hacerlo uno mismo. <b>Cuarta etapa:</b></p> <p><b>Aplicación del método de resolución:</b></p> <p>Una vez encontrado el método se hace necesario aplicarlo para obtener la solución del problema presentado. <b>Quinta etapa:</b></p> <p>Prueba de la resolución Es necesario convencerse de que dicha resolución es correcta y que satisface los requerimientos del problema. <b>Sexta etapa:</b></p> <p><b>Análisis del problema</b> Se realiza una investigación del problema: se establecen las condiciones bajo las cuáles el problema tiene solución, cuántas son las resoluciones posibles, bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc. <b>Séptima etapa:</b></p> <p><b>Formulación de la respuesta al problema</b></p> <p>Una vez convencidos de la exactitud de la solución se debe formular de manera precisa la respuesta al problema. <b>Octava etapa:</b></p> <p><b>Análisis de la resolución del problema</b> Se realiza un análisis de la</p>	<p>- Una pregunta específica sin posibilidad de respuesta inmediata. - Selección acertada de datos que permita definir presupuestos y demandas del problema. - Elaboración de un esquema o estrategia de solución del problema, visualizar unos caminos, analizarlos y definir el más apropiado. - Identificar las operaciones a realizar y jerarquizarlas de acuerdo al esquema definido. - Realizar las operaciones, sus algoritmos y encontrar la respuesta acertada. -Finalmente verificar la respuesta, confrontarla con los presupuestos del problema.</p>	<p>Recursos defectuosos.</p> <p><b>2. Heurísticas</b></p> <p>En general, el problema con las heurísticas tal como lo propone Polya, según Schoenfeld, es que son muy generales, por eso no pueden ser implementadas. Barrantes, (2006, Pág.3)</p> <p><b>3. Control</b> Monitorear y evaluar el proceso. Implica un conocimiento de sí mismo. Entendimiento:tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de</p> <p>Consideración de varias formas posibles de solución y seleccionar una específica, o sea: hacer un diseño. Monitorear el proceso. Llevar a cabo el diseño. Revisar proceso de solución.</p> <p><b>4. Sistema de creencias</b></p> <p>El tipo de creencia que Schoenfeld enfoca más es aquel sobre cómo perciben el estudiante y los profesores o los matemáticos el asunto de la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema. El matemático usa esto como una herramienta más; es decir, la argumentación y el razonamiento formal le sirve a él para descubrir soluciones. Por otra parte, el estudiante no usa eso jamás, Barrantes, (2006, Pág.4-5)</p>	<p>deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”.</p> <p><b>Comprender el problema:</b> primero hacemos una lectura rápida del problema y después una segunda lectura tratando de identificar: datos, incógnita, condición. Lo leemos las veces que sea necesario hasta poder comprenderlo.</p> <p><b>Concebir un plan:</b> Recordar si hemos resuelto algún problema semejante, o relacionado con él. Construir un problema similar, pero más simple: con más datos, con menos condiciones para la incógnita, más general o más particular según nos convenga. También intuitivamente, tratar de aproximar una solución: ¿cuáles serían los posibles valores que podría tomar la incógnita?</p> <p><b>Ejecución de un plan:</b> Una vez encontrado el camino, abordamos la solución, comprobando cada uno de los pasos y releendo el problema, para no omitir nada.</p> <p><b>Examinar la solución obtenida:</b> Revisar la solución, ¿tiene sentido?, ¿nos hemos</p>
--	--	--	--

solución obtenida con fines cognoscitivos y de aprendizaje y se sacan conclusiones a partir de dicha solución.			olvidado de algo?, ¿responde a lo que pregunta el problema?
--	--	--	---

**Tabla 5: Autores que proponen métodos para resolver problemas<sup>21</sup>**

En esta investigación sólo se tuvo como referente teórico a George Polya (1961) en lo relacionado con la resolución de problemas para diseñar las preguntas que se tuvieron en cuenta en la entrevista semi-estructurada en las sesiones de intervención, ya que este autor fue el primero en presentar una heurística de resolución de problemas específicos para las matemáticas. Por lo tanto, Polya es un referente sobre el tema, ya que sus ideas representaron una importante innovación, esta teoría ha servido de base en el trabajo de otros estudiosos contemporáneos.

A partir de la resolución de problemas los estudiantes alcanzan metas significativas en su conceptualización de proporcionalidad directa simple, desarrollando habilidades como es la de utilizar argumentos propios a la hora de exponer sus ideas, fortaleciendo así la capacidad de razonar.

En cuanto al desarrollo de habilidad Polya expresa lo siguiente:

*“El resolver un problema es una cuestión de la habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar aplicando la natación”.*  
 Polya, (1961, Pág. 27)

Por lo tanto, para que los estudiantes desarrollen habilidades prácticas en lo relacionado con la proporcionalidad, es necesario comenzar a resolver problemas que permitan plasmar las explicaciones mediante registros orales y escritos, para

<sup>21</sup>En este cuadro, únicamente se tuvo en cuenta a Polya. Los demás autores pueden retomarse en futuras investigaciones.

interpretar, representar y describir relaciones, provocando procesos que subyacen al razonamiento matemático; haciendo referencias precisamente a las estrategias correctas: multiplicativa y de incremento, por medio de la manipulación y exploración de problemas con los diferentes usos de la proporcionalidad. Lo que se quiere lograr en la investigación, es que los estudiantes en el aula, resuelvan problemas que les facilite desarrollar capacidades para explicar los procedimientos dispuestos que los llevó a una resolución de un problema de proporcionalidad directa simple a través de otros objetos matemáticos asociados, haciendo consciente el **qué, por qué, para qué** y el **cómo** de las situaciones y los sucesos que los motivó a razonar de ese modo; la forma como se articulan las explicaciones se evidencian a partir de las heurísticas propuestas por Polya, (1961) las cuales han sido tenidas en cuenta, tanto en la construcción de la actividad diagnóstica, como en el diseño de la entrevista semi-estructurada.

### **2.3.1.2. Las heurísticas para resolver problemas propuestas por Polya**

En este trabajo de investigación se presentará la definición de problema desde Polya en el libro *Mathematical Discovery* el cual se especifica: *“Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata”*. Polya, (1961)

El problema no tiene una respuesta inmediata y se necesita de unas heurísticas para su solución, esto hace necesario que se interactúe con los diferentes conocimientos matemáticos y se busque relaciones nuevas entre ellos. La tabla 6 recoge las heurísticas, descripción y características de la resolución de problemas según George Polya.

Resolución de problemas	<b>Heurística</b>	<b>Descripción</b>	<b>Características</b>
	<b>Comprender el problema</b>	Leer para identificar incógnitas, datos, condición	<p>Ver claramente lo que se pide.</p> <p>Se debe de repetir el enunciado e identificar las partes del problema.</p> <p>Hacer figura relacionada con el problema e introducir notación adecuada.</p> <p>Familiarizarse.</p> <p>Trabajar para una mejor comprensión.</p>
	<b>Concebir un plan</b>	<p>Recordar si antes se ha resuelto un problema similar.</p> <p>Estimar valores que podría tomar la incógnita.</p> <p>Formular problemas similares con más datos y menos incógnitas.</p>	<p>Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, es decir la incógnita, los datos y la condición.</p> <p>Considerar el problema desde varios puntos de vista.</p> <p>Acordase de lo que le ayudo en el pasado en circunstancias análogas.</p>
	<b>Ejecutar el plan</b>	Efectuar cada paso planificado.	<p>Proporciona una línea general.</p> <p>Se inicia por la idea que me conduce a la solución.</p> <p>Se debe asegurar que los detalles se escojan bien en esta línea.</p> <p>Asegurarse que tiene buena comprensión del problema.</p> <p>Se ejecuta en detalle todas las operaciones que se reconocen factibles.</p> <p>Sugerencias y preguntas de su lista.</p> <p>Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.</p>

	<b>Examinar la solución obtenida</b>	Revisar solución.	la Reconsiderar solución. Reexaminando resultado y el camino que lo condujo a ella y tratarlo de aplicar a otros problemas, esto servirá para encontrar otras soluciones y conocer nuevos hechos interesantes.

**Tabla 6: Las heurísticas para resolver problemas propuestas por Polya**

## CAPÍTULO 3

### LA METODOLOGÍA, EL MÉTODO Y LA TÉCNICA DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se enfocó en la metodología cualitativa, puesto que en la pregunta<sup>22</sup> se tuvo en cuenta la interpretación que los participantes expusieron mediante explicaciones frente a los objetos y relaciones matemáticas tratadas en las sesiones de intervención en las cuales los investigadores participaron.

#### 3.1. Metodología cualitativa

El proceso de investigación llevado a cabo en la construcción de esta investigación parte de la **metodología cualitativa**, en tanto se pretende estudiar las explicaciones verbales y escritas, presentadas por los actores de la investigación en las sesiones de la intervención, en este sentido se enmarca en los parámetros que establecen Denzin y Lincoln (2005) cuando afirman que la investigación cualitativa sitúa al investigador en un contexto espacio-temporal, para lograr una interpretación del mundo o del fenómeno estudiado mediante instrumentos. “En este nivel la investigación cualitativa implica un acercamiento interpretativo y naturalista del mundo. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian los objetos en sus escenarios naturales, intentando dar

---

<sup>22</sup>Ver apartado 1.3.

sentido, o interpretar los fenómenos en términos de los significados que las personas les dan”. Denzin (2005)

### 3.1.1. Caracterización de la investigación cualitativa

La tabla 7 exhibe las características principales tenidas en cuenta en la investigación adicionalmente de una correspondiente descripción de cada una de ellas plasmadas en la misma.

<b>Característica de la investigación cualitativa Sandoval (2002)</b>	<b>Descripción</b>
Apunta a la comprensión	La investigación es un esfuerzo por comprender la realidad social como fruto de un proceso histórico de construcción visto a partir de la lógica y el sentir de sus protagonistas, por ende, desde sus aspectos particulares y con una óptica interna.
Tiene una visión epistémica de la realidad	La investigación requiere, para su existencia, de un sujeto cognoscente, el cual está influido por una cultura y unas relaciones sociales particulares.
La interacción entre investigador y participante es fundamental	La subjetividad y la intersubjetividad son los medios por excelencia para conocer las realidades humanas.
Su diseño es emergente	La investigación se estructura a partir de los sucesivos hallazgos que se van realizando durante su transcurso. No presenta un modelo fijo desde sus inicios.
Es un proceso inductivo	La información se produce a medida que hay descubrimientos o hallazgos.

**Tabla 7: Características de la investigación cualitativa**

### **3.1.2. ¿Por qué esta investigación tiene un enfoque cualitativo?**

Por medio de la investigación cualitativa los investigadores llevaron a cabo la recolección de la información en la población intervenida<sup>23</sup>, con el propósito de explorar los registros verbales y escritos para describir las explicaciones tal y como fueron experimentadas en su contexto natural.

Además la investigación cualitativa fue un medio que permitió estudiar las explicaciones centrándolas en el análisis, dándole prioridad a la experiencia y al conocimiento de los actores de la investigación.

### **3.1.3. Criterios de rigor tenidos en cuenta en la investigación cualitativa**

Lo planteado en la tabla 8 está orientado bajo las investigaciones de Guba y Lincoln citados por Castillo y Vásquez, (2003) en lo referente a los criterios de rigor en la investigación cualitativa, como son: la credibilidad, confirmabilidad y aplicabilidad.

---

<sup>23</sup>Ver apartado 1.5

<b>CRITERIOS</b>	<b>DEFINICIÓN</b>	<b>PROCEDIMIENTOS</b>
<p><b>Credibilidad</b></p> <p>Confianza en la veracidad de los descubrimientos realizados</p>	<p>Es la confianza generada a los lectores en el momento que los participantes de la investigación declaran la veracidad de los resultados.</p>	<p>Presentación del análisis a los participantes de la investigación, donde estos afirmaron estar de acuerdo con lo expuesto<sup>24</sup>.</p>
<p><b>Confirmabilidad (fiabilidad externa)</b></p> <p>A partir de los análisis de la información aportados en el marco teórico de la investigación, en los anexos del mismo y en los análisis de las intervenciones. Estos hallazgos pueden ser trasladados y adaptados a otros contextos concretos.</p>	<p>Es la ratificación de los resultados, siguiendo la ruta del investigador original, pretendiendo obtener conclusiones similares.</p>	<p>Ver el apartado 3.4.</p>
<p><b>Aplicabilidad<sup>25</sup></b></p> <p>Repetición de los hallazgos al realizar investigaciones con características similares.</p>	<p>Es la posibilidad de replicar en otras poblaciones los resultados obtenidos en la presente investigación.</p>	<p>Delimitación del contexto físico y social.</p> <p>Uso de la metodología, método y técnica en otra institución educativa.</p>

**Tabla 8: Criterios de rigor en la investigación**

A continuación se expone la tabla 9 en relación con los planteamientos de Castillo y Vásquez, (2003) en “El rigor metodológico en la investigación cualitativa”. Es relevante porque permitió vislumbrar el método y la técnica pertinentes para esta investigación.

<sup>24</sup>Ver anexo E. Veracidad de los resultados.

<sup>25</sup>Los resultados pertenecen a alguna casilla del análisis (ver apartados 4.2.1 y 4.2.2), debido a que estos presentan exhaustividad y exclusión mutua.

<b>CRITERIO DE CREDIBILIDAD</b>		
<b>Orientaciones según cada criterio</b>	<b>Respuesta desde la generalidad</b>	<b>¿Cómo se logra en esta investigación?</b>
<p><b>¿Qué se hará para contrarrestar la perspectiva del investigador? Esto quiere decir si se consideraron los efectos de la presencia del investigador sobre la naturaleza de los datos.</b></p>	<p>Al ser la realidad un complejo donde intervienen múltiples factores, el investigador debe estar inmerso en el contexto donde se desarrolla su investigación, para percibir la problemática del mismo modo que los informantes lo hacen. Es decir, la primera fuente para la recolección de información no son sus prejuicios y tampoco la teoría al respecto, sino los eventos que logre detectar en el lugar donde se lleva a cabo su trabajo. Aquí se debe tener en cuenta que la producción debe ser libre de prejuicios y apuntar a lo que realmente interesa, descartando así la información que pueda carecer de relevancia.</p>	<p>Presentando el análisis a los participantes de la investigación.</p>
<p><b>¿Los investigadores discutirán su propio comportamiento y experiencias en relación con la experiencia de los informantes?, ¿cómo?</b></p>	<p>Es fundamental acoger las diferentes perspectivas que puedan tener los investigadores, y no solo entre estos, sino también apreciar los aportes que hacen los informantes quienes son protagonistas en este trabajo de investigación.</p>	<p>Discutiendo en sesiones de clase y acogiendo las recomendaciones del asesor.</p>
<p><b>¿Se utilizarán otros métodos (triangulación) en la recolección de datos para determinar la congruencia entre los resultados?, ¿cuáles?</b></p>	<p>Triangulación de fuentes y de investigadores.</p>	<p>Cada investigador analiza por separado la información y luego exponen sus análisis.</p>

<p><b>¿Se usarán transcripciones textuales de las entrevistas para respaldar significados e interpretación presentados en los resultados del estudio?, ¿cómo?</b></p>	<p>Es importante retomar literal o textualmente las afirmaciones de los participantes, o en la medida de lo posible hacer interpretaciones de su discurso, pero libres de sesgos, para no acomodar las vivencias de ellos a la propia realidad del investigador. Pues, sus creencias y conceptualizaciones constituyen una fuente sólida de evidencia.</p>	<p>Se analiza el contenido directo o latente proporcionado por las sesiones de intervención y entrevista.</p>
<p><b>¿El investigador discutirá sus interpretaciones con otros investigadores?, ¿de qué forma?</b></p>	<p>En los espacios destinados para asesorías y encuentros tanto con los compañeros como con el cooperador se pueden abrir espacios para confrontar los hallazgos.</p>	<p>Se presentan los avances a docentes de la Universidad de Antioquia que son expertos en el objeto de estudio o el objeto matemático.</p>
<p><b>¿Los lectores podrán ver los hallazgos como significativos y aplicables en su propio contexto?</b></p>	<p>Aunque no se garantiza la descontextualización de los resultados que arroje ese proceso inductivo, puede lograrse una generalización que algunos participantes presentan con respecto a sus razonamientos sin dejar de lado el hecho de que cada quien elabora su propia explicación.</p> <p>Pero concretamente, los hallazgos serán significativos para aquellos que serán investigados, puesto que la caracterización amplía la perspectiva del docente cooperador y de los participantes involucrados en la resolución de problemas de proporcionalidad directa</p>	<p>La información de los participantes constituye un aporte valioso porque sus explicaciones permitieron analizar la validez de las mismas.</p>

	simple.	
<b>CRITERIO DE AUDITABILIDAD O CONFIRMABILIDAD</b>		
<b>Orientaciones según cada criterio</b>	<b>Respuesta desde la generalidad</b>	<b>¿Cómo se logra en esta investigación?</b>
<p><b>¿Se usarán cintas de grabación magnetofónica, de video u otros mecanismos de grabación?, ¿de qué forma?</b></p>	<p>Citando a Herbst y Chazan (2009), usar medios que registren eventos es importante en tanto estos pueden captar momentos que al investigador pueden escaparse y resultar esenciales en el trabajo. Pero hay que tener cuidado con el uso de estos, ya que los participantes pueden sobreactuarse al saber que están siendo grabadas sus conversaciones. Estos medios deben usarse de una manera ética de modo que haga más transparente (confiable) la investigación.</p>	<p>Se usan grabaciones de las explicaciones presentadas en las sesiones de entrevista.</p>
<p><b>¿Se describirán las características de los informantes y su proceso de selección?, ¿cómo?</b></p>	<p>El método pertinente para responder que esto se hará es el estudio de casos, donde cada caso corresponde a las explicaciones presentadas por cada participante. Aquí se profundiza en la realidad que permea al estudiante y se sintoniza el discurso del investigador con el que tiene el informante, poniendo al primero en función del segundo.</p>	<p>La técnica más propicia para lograr esto es el análisis de contenido.</p>
<p><b>¿Se analizará la transcripción fiel de las entrevistas a los informantes?, ¿cómo?</b></p>	<p>Los registros garantizan que no se presente información sesgada.</p>	<p>En los anexos del CD se aprecian las explicaciones presentadas en las sesiones de intervención y entrevista.</p>

<p><b>¿Los contextos físicos, interpersonales y sociales serán discutidos en la presentación del informe de investigación?</b></p>	<p>Si la generalización se logra en un contexto determinado, y los hallazgos no se universalizan, entonces debería caracterizarse esa realidad que envuelve al estudiante. El entorno será pues parte fundamental en esa realidad vista como una red donde interactúan variables que no pueden controlarse, ya que la investigación no se lleva a cabo en un laboratorio sino en un mundo que es dinámico.</p>	<p>Se describió la población intervenida mediante los instrumentos enunciados en el apartado 3.4.3.</p>
<p><b>CRITERIO DE TRANSFERIBILIDAD O APLICABILIDAD</b></p>		
<p><b>Orientaciones según cada criterio</b></p>	<p><b>Respuesta desde la generalidad</b></p>	<p><b>¿Cómo se logra en esta investigación?</b></p>
<p><b>¿Los investigadores indicarán lo típico de las respuestas de los informantes?, ¿cómo?</b></p>	<p>Este punto no es el fuerte en una investigación de corte cualitativo, pero si se puede destemporalizar y despersonalizar lo encontrado durante el trabajo, esto otorgaría aun mayor rigor a la investigación. Puesto que al reproducirse en un contexto diferente, el fenómeno cuenta ya de entrada con los dos criterio anteriormente tratados.</p>	<p>En el análisis se exponen explicaciones que se validan de acuerdo a las condiciones empleadas, condiciones que tienen un componente matemático.</p>
<p><b>¿Los investigadores examinarán la representatividad de los datos como un todo?, ¿cómo?</b></p>	<p>Los patrones hallados con un caso pueden ser diferentes de los que presente otro, pero esta información va a ser sistematizada de modo tal que haya categorización o distinción entre los razonamientos de quienes participan en las sesiones de</p>	<p>Las categorías emergentes son exhaustivas y mutuamente excluyentes como se aprecia en el apartado 4.2.</p>

	intervención y entrevista.	
--	----------------------------	--

**Tabla 9: Criterios que permitieron vislumbrar el método y la técnica de investigación**

Los investigadores realizaron un rastreo de algunas investigaciones relacionadas con la proporcionalidad en distintos autores referente al razonamiento proporcional y la resolución de problemas, los cuales permitieron una conceptualización y ajustes al marco teórico, posteriormente se diseñó una sesión de intervención, que fue implementada en *The New School* con los actores de la investigación, atendiendo a una clasificación de la proporcionalidad directa a partir de relaciones vinculadas a esta, con el objetivo de caracterizar las explicaciones, mediante un estudio de casos.

### **3.2. El método de estudio de casos**

Como las explicaciones han sido un proceso alrededor del cual no se ha estructurado un marco teórico, se requiere un estudio de casos de tipo *instrumental*<sup>26</sup>, el cual consistió en investigar los actores de la investigación, pero enfocando los resultados al interés principal que es la clasificación de las explicaciones acorde a su validez.

#### **3.2.1. Importancia del estudio de casos en la investigación**

Dado que el problema de investigación<sup>27</sup> centra su interés en explorar un proceso intelectual, es conveniente usar el estudio de casos como método de

<sup>26</sup>En el estudio de caso instrumental el interés está centrado en las implicaciones de los resultados de la investigación en otros ámbitos más allá del propio caso. El caso tiene un interés secundario, desempeña un papel de apoyo, facilitando el entendimiento de algún problema.  
Stake (1999)

<sup>27</sup>Ver apartado 1.2.

investigación, puesto que se busca categorizar las explicaciones dadas por los estudiantes de forma particular.

Por lo tanto, la investigación dado su paradigma cualitativo optó por el estudio de casos, ya que como lo define Stake, *“el estudio de casos es el estudio de la particularidad, no la generalización y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. Stake, (1999).* Por tal motivo, esta investigación busca al elegir el método de estudio de casos, estudiar las explicaciones en profundidad, a través de las condiciones necesarias y suficientes que los actores de la investigación expresaron en la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple, para llegar a establecer unas categorías en cuanto al razonamiento empleado.

### **3.2.2. ¿Cuáles estudiantes serán tenidos en cuenta en la investigación?**

Los criterios fueron escogidos por los investigadores en consonancia con la metodología cualitativa y en particular por el problema de investigación, cuyo interés es explorar un proceso de validación o una actividad intelectual. Por esto, la muestra debe ser **teórica**, ya que de entrada se buscaron aquellos estudiantes que podían aportar información que facilite la selección de las categorías.

Es de resaltar que las conclusiones dependen de un contexto y su aplicabilidad depende del contenido que presenten los participantes. De modo que fueron tenidos en cuenta aquellos estudiantes que en el proceso de investigación se han destacado en los criterios expuestos en la tabla 10.

<b>Criterios para seleccionar los casos</b>	
<b>Disposición</b>	<p>Referida a la iniciativa de los estudiantes para aportar información. Ya que la voluntad del estudiante facilita la recolección de información para el análisis.</p> <p>Además, por ética en la investigación, el estudiante debe estar enterado y de acuerdo para participar de la misma.</p>
<b>Interacción oral</b>	<p>En la relación estudiante-docente, concerniente a la intervención del estudiante en el aula de clase mediante explicaciones. Esto se pone en escena cuando el estudiante hace un aporte en el transcurso de la clase.</p> <p>En la relación entre los actores y sus pares, es decir, los estudiantes de 7º, se presenta un apoyo en cuanto a las dificultades que uno de ellos pueda tener, cuando se presentan las explicaciones como un mecanismo para superar estas dificultades se evidencia como recurren a las condiciones necesarias y suficientes para convencer al otro que la estrategia empleada permite llegar a la solución del problema.</p>
<b>Registros escritos</b>	<p>Involucra la información que el participante de la investigación incluye en su libreta de apuntes al momento de presentar la solución de un problema planteado en clase. Abarca las respuestas que el estudiante plasma en las sesiones de intervención. Los registros verbales y escritos seleccionados con aquellos que permiten evidenciar razonamiento, como las explicaciones.</p>

**Tabla 10: Criterios para seleccionar los casos**

En el estudio de casos fueron elegidos cuatro (4) estudiantes porque con ellos era posible hacer una clasificación de las explicaciones elaboradas en torno a la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple.

### 3.3. La técnica: El análisis de contenido

Se empleó el análisis de contenido como técnica<sup>28</sup> para analizar la información suministrada por los participantes de la investigación, lo cual implicó hacer una revisión de las entrevistas semi-estructuradas<sup>29</sup>. El análisis de contenido permite darle mayor rigurosidad a la investigación cuyo método es el estudio de casos. Este facilitó trabajar con el contenido de los datos, además precisar la información suministrada por cada actor de la investigación.

#### 3.3.1. Definición de análisis de contenido

Para Krippendorff, (2002, pág. 28) el análisis de **contenido** se entiende como una técnica de investigación que pretende elaborar **inferencias reproducibles** y **válidas** para un **contexto**, mediante **datos** propiciados por los participantes en la investigación. En este trabajo, tanto la reproducibilidad como la validez van orientadas a los datos y no precisamente hacen referencia a la población.

A continuación en la tabla 11 se presentan los conceptos implicados en la definición propiciada en Krippendorff (2002) con respecto al análisis de contenido.

---

<sup>28</sup>Este término hace referencia al cómo se analiza la información respecto al problema de investigación.

<sup>29</sup> Haciendo referencia a las entrevistas semi-estructuradas, se entiende que en esta el entrevistador tiene libertad en expresar sus sentimientos y opiniones. Él tiene que animar a los entrevistados a hablar de un determinado concepto y orientarlos, debe crear un ambiente en la que los actores de la investigación se halle en libertad para expresarse.

<b>Conceptos</b>	<b>Significado</b>
<b>Inferencia</b>	Argumento elaborado en torno a un <i>contenido</i> directo (es explícito) o latente (puede emerger). Producción de una nueva intelección, a partir de un contenido.
<b>Reproducibilidad</b>	Se garantiza si los mismos investigadores u otros obtienen resultados similares tras analizar los mismos datos.
<b>Dato</b>	“es una unidad de información registrada en un medio duradero”. Krippendorff (2002)
<b>Validación</b>	Es la aceptación de los resultados de las investigaciones como hechos indiscutibles.
<b>Contenido</b>	Unidad textual. Mensaje. Este puede ser directo (explícito) o latente (puede emerger).
<b>Contexto</b>	Medio en el cual se producen los <i>datos</i> . Aquí cabe aclarar la muestra (fragmento del universo de datos que se analiza). “El analista debe explicitar las premisas de sus <i>inferencias</i> . Esta explicitación posibilita compartir dichas experiencias y permite el examen crítico de otros investigadores”. Krippendorff (2002)
<b>Muestra</b>	<p>Selección de <i>datos</i> relevantes, en primera instancia. Si el volumen de datos relevantes es demasiado grande, se acude a muestras aleatorias. Krippendorff (2002) En el análisis de contenido, las muestras son teóricas por naturaleza.</p> <p>Las categorías que contienen las muestras deben ser <i>exhaustivas</i> (No debe haber unidades excluidas, sino que todas deben pertenecer a alguna categoría) y <i>mutuamente excluyentes</i> (Ninguna unidad debe estar en más de una categoría).</p>

**Tabla 11: Conceptos implicados en la definición de análisis de contenido.**

### 3.3.2. Las fuentes del material

En la tabla 12 se muestran las diferentes fuentes de las que pueden provenir los datos. Cabe destacar que la investigación incluye todas las fuentes, en esta, las fuentes primarias son: sesiones de intervención y entrevista, las fuentes secundarias son: las transcripciones de las entrevistas y las fuentes terciarias son: las discusiones que permitieron la emergencia de categorías.

Fuentes de los datos	Descripción	En la investigación
<b>Primarias</b>	Son los textos originales. Estos pueden ser: diarios, libros, documentos históricos, registros sonoros o visuales.	Respuestas de los problemas propuestos en las sesiones de intervención. Audio de las sesiones de entrevista semi-estructurada. Ver anexo F.6, en el CD: Diario una niña con capacidades o talentos excepcionales.
<b>Secundarias</b>	Son textos derivados de los originales. Estos pueden ser: transcripción o interpretación de las fuentes primarias. Son útiles porque pueden constituir también fuentes apreciables para la comparación.	Transcripción de las sesiones de entrevista semi-estructurada. Ver anexo F.4.
<b>Terciarias</b>	Son el producto de un proceso de experimentación comunicacional en el que se introducen y/o se observan variables controladas experimentalmente, con el objeto de constituir discursos a partir de interacciones entre los participantes.	Discusiones que permitieron elaborar las categorías emergentes <sup>30</sup> . Ver apartados 4.2.1 y 4.2.2

**Tabla 12: Fuentes de los datos en el análisis de contenido**

<sup>30</sup>Ver apartados 4.2.1 y 4.2.2.

El tipo de análisis de contenido que se tuvo en cuenta en la investigación fue el semántico el cual define cierta estructura (significativa) de relación y considera todas las ocurrencias que concuerden con dicha estructura.

El análisis semántico pretende estudiar las relaciones entre objetos matemáticos tratados en el texto de las grabaciones transcritas y de la solución del instrumento puesto que no se redujo al conteo de palabras, sino que se centró en la interpretación de la producción escrita y de las explicaciones que dieron los actores de la investigación en cada uno de los problemas de las sesiones de intervención.

### **3.4 El protocolo de la investigación e instrumentos**

El protocolo tuvo la función de delimitar el camino por el cual transitaron los investigadores con la finalidad de guiar la investigación, sin perder de vista el objeto principal, que consiste en clasificar las explicaciones presentadas por los actores de la investigación, en la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple.

#### **3.4.1. El protocolo de la investigación**

El protocolo de la investigación fue el plan de acción que brindó la posibilidad de especificar las principales tareas que se realizaron antes de iniciar con la recolección, el análisis e interpretación de las evidencias.

En este apartado se presentan las actividades llevadas a cabo en la selección de los casos que hicieron parte de la investigación; selección que se realizó después de la intervención a la población, con el objetivo de definir los criterios que se tuvieron en cuenta en las unidades de análisis, como la disposición, colaboración entre pares, interacción oral y registros escritos.

<b>ACTIVIDAD</b>	<b>PRÓPOSITO</b>	<b>RESPONSABLES</b>
<b>Identificación de la población</b>	Establecer un problema de investigación.	Los cuatro (4) investigadores.
<b>Enseñar el concepto de Proporcionalidad directa simple</b>	Se presentaron los objetos matemáticos involucrados en el desarrollo de las sesiones de intervención.	
<b>Intervención con la sesión diagnóstico</b>	Recolección de los datos, que fueron la base con la cual se establecen las categorías.	

**Tabla 13: Cronograma de las sesiones de intervención**

### **3.4.2. Cronograma de las sesiones de intervención y entrevista**

Fueron cinco sesiones, de dos horas aproximadamente cada una, desarrolladas en *The New School*, a partir de problemas con relaciones vinculadas a la proporcionalidad como son: razones, escala y similitud, probabilidad, porcentaje y variación directa.

<b>Sesión</b>	<b>Propuesta</b>	<b>Instrumentos</b>	<b>Fecha</b>
<b>Razones</b>	Determinar si dos razones son proporcionales, comparándolas según la estrategia empleada por cada estudiante.	Sesión diagnóstica Entrevista semi-estructurada Grabación de audio	Mayo 12 de 2011
<b>Escala y similitud</b>	Establecer proporcionalidad entre razones, apoyados en percepciones visuales e instrumentos de medición.		Mayo 19 de 2011
<b>Probabilidad</b>	Establecer relaciones de comparación entre los casos que son favorables de los casos posibles, para determinar cuáles elecciones realizadas por los estudiantes determinan un razonamiento proporcional.		Mayo 26 de 2011
<b>Porcentaje</b>	Verificar información que presentan cotidianamente los medios de comunicación acerca de promociones y descuentos comerciales para establecer un razonamiento proporcional.		Mayo 31 de 2011
<b>Covariación directa</b>	Identificar cuando dos magnitudes están variando proporcionalmente por medio de representaciones en el plano cartesiano.		Junio 02 de 2011

**Tabla 14: Cronograma de las sesiones de intervención y entrevista**

### **3.4.3. Los instrumentos empleados en la investigación**

Los instrumentos utilizados en la investigación fueron las sesiones de intervención y la entrevista semi-estructurada, que fueron las fuentes primarias en las que los investigadores se apoyaron al momento de realizar los análisis.

#### **3.4.3.1. Las sesiones de intervención**

Las sesiones de intervención<sup>31</sup> se diseñaron con problemas tomados de textos escolares de matemáticas de séptimo grado, de donde se abordaron problemas asociados al objeto matemático que fueron analizados y seleccionados de acuerdo a los siguientes parámetros<sup>32</sup>:

- Establecer la igualdad entre razones
- Hallar la constante de proporcionalidad, a través de la construcción de figuras geométricas.
- Comparar los casos posibles y favorables de un evento.
- Verificar información que pueden presentar los medios de comunicación en lo referente a la publicidad de productos comerciales y encuestas estadísticas.
- Distinguir entre las magnitudes que están directamente relacionadas y las que son directamente proporcionales.

---

<sup>31</sup>En los inicios de la investigación se había propuesto una guía didáctica como instrumento de intervención, pero debido a la necesidad de diagnosticar las concepciones, sin sesgar la información propiciada, se incluyeron los problemas en las sesiones de intervención. Por esta razón, en el anexo F.2 se lee "unidad" pero podría sustituirse este término por "sesión", puesto que en el transcurso del trabajo se hace referencia a este último término.

<sup>32</sup> Ver anexo A: Sesiones de intervención.

### **3.4.3.2. La entrevista semi-estructurada y la categorización de las preguntas según el marco de George Polya**

Inicialmente se contaba con una batería de preguntas<sup>33</sup>, las cuáles posiblemente serían empleadas para invitar y orientar al participante hacia la explicación de las respuestas a los problemas propuestos en las sesiones de intervención. Como es semi-estructurada, no se emplearon todas estas preguntas y en ese orden, sino que fueron tenidas en cuenta aquellas que facilitarían información pertinente para el análisis.

La entrevista semi-estructurada como la propone Stake (1999), es una técnica utilizada ampliamente en la investigación cualitativa, la misma permite obtener información variada y relevante sobre las concepciones y actitudes de los actores de la investigación, además, como su propio nombre lo indica, el entrevistador despliega una estrategia en la que alterna preguntas estructuradas con preguntas espontáneas. Por ello, permite una mayor libertad y flexibilidad en la obtención de la información Stake (1999).

Por lo tanto, en la investigación, no sólo se hicieron preguntas sobre los aspectos que se relacionan con los objetos matemáticos estudiados, sino que se realizaron preguntas sobre otros tópicos, que apuntaban a las condiciones en las que los actores de la investigación se desenvuelven.

En la elaboración de la entrevista semi-estructurada, se consideraron dos ejes que actuaron como elementos guía en la formulación de las preguntas: en un primer momento se diseñó el proceso de planificación, en un segundo instante se propuso que la finalidad de la planificación de las preguntas estaría orientada a la obtención de registros escritos y verbales, considerados como tales a partir de la transcripción<sup>34</sup> realizada.

---

<sup>33</sup>Ver anexo C: Categorización de las preguntas según el marco de George Polya.

<sup>34</sup>La transcripción de la entrevista, se convirtió en un insumo fundamental en la obtención de la información para luego realizar el análisis de contenido y extraer las categorías. Ver anexo F.4: *Transcripciones* de la entrevista.

### 3.4.3.3. Pertinencia de los instrumentos elaborados en esta investigación

Los instrumentos que posibilitaron acceder a indicios de razonamiento fueron las sesiones de intervención que no se limitaron a pedir una respuesta sino que exigieron exponer el proceder de los estudiantes y las sesiones de entrevista donde se profundizó en “explicaciones”, tomando como punto de partida las respuestas dadas a los problemas propuestos. El esquema 3 ilustra los instrumentos empleados en la investigación.



**Esquema 8: Instrumentos empleados en la investigación**

## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISIS Y RESULTADOS**

Este capítulo expone los resultados arrojados por los participantes del estudio de casos, a través de los instrumentos: sesiones de intervención y entrevistas, mediante un análisis de contenido. Los apartados correspondientes al estudio de casos y al análisis de contenido dan respuesta a las preguntas temáticas, planteadas en el apartado 1.4.1.

#### **4.1. DESCRIPCIÓN DE LOS ESTUDIOS DE CASOS**

El estudio de casos reveló que en los problemas de la sesión 1 que se respondían tan sólo aplicando el algoritmo<sup>35</sup> los participantes acertaron, pero en los problemas de las demás sesiones cada participante se caracterizó por sus explicaciones.

Aunque todos los participantes se caracterizaron por su consistencia en las explicaciones, puesto que sus respuestas daban cuenta de su convencimiento, no todos empleaban estrategias correctas de razonamiento proporcional. La descripción de cada participante permite profundizar la comprensión del análisis<sup>36</sup> de contenido.

---

<sup>35</sup>Ver anexo A.

<sup>36</sup>Ver el apartado 4.2.

Las muestras<sup>37</sup> seleccionadas resultaron ser representativas porque abarcan los criterios propuestos para la caracterización. Además, el estudio no busca representar casos típicos, sino conducir a la comprensión de las explicaciones presentadas por los participantes.

#### 4.1.1. El caso de John

El estudiante se destacó por su compromiso, por su facilidad para argumentar, hechos que se evidenciaron en las actividades desarrolladas, tanto escritas como verbales.

John emplea condiciones no necesarias para determinar si un problema es de proporcionalidad. Presenta explicaciones inválidas a partir de condiciones no necesarias y no suficientes, puesto que se fija en detalles que no son de utilidad para resolver el problema. Dichos detalles son los siguientes:

- 4.1.1.1. Si las cantidades no tienen MCD (Máximo Común Divisor) diferente de 1, la relación entre las cantidades es la diferencia.

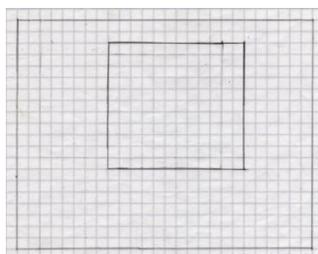


Ilustración 1: Episodio 1

Investigador: ¿En qué se basa para construirlo? ¿O hace la figura como esta en la hoja que nosotros le entregamos?

---

<sup>37</sup> Se analizaron más de 10 episodios pero, con la intención de guiar al lector, solo se presentan a lo sumo tres por cada participante.

**John:** Primero yo miro cuanto hay entre 5 y 7, para ver si son múltiplos o par, como no eran pares entonces por dos, pues sumado dos.

**Investigador:** ¡AH! ¿Le sumo dos?

**John:** Al cinco

**Investigador:** Al cinco le sumo dos, y a los otros lados. ¿Cuánto les sumo?

**John:** Dos.

#### 4.1.1.2. Cantidad de datos.

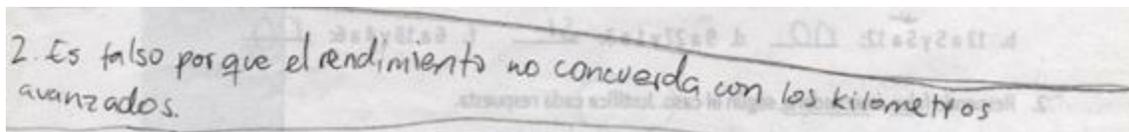


Ilustración 2: Episodio 2.

En el anexo F.4.1.2, John explicita lo siguiente, tras la pregunta del investigador:

**Investigador:** ¿Cómo lo resolvió?

**John:** Elegí regla de tres, siempre que tengo tres valores hago regla de tres, haciendo la regla de tres no me daba, me daba cuenta del valor que buscaba analizando y calculando. Suben horas y suben kilómetros.

#### 4.1.1.3. Cantidad de fichas por recipiente, sin importar su color.

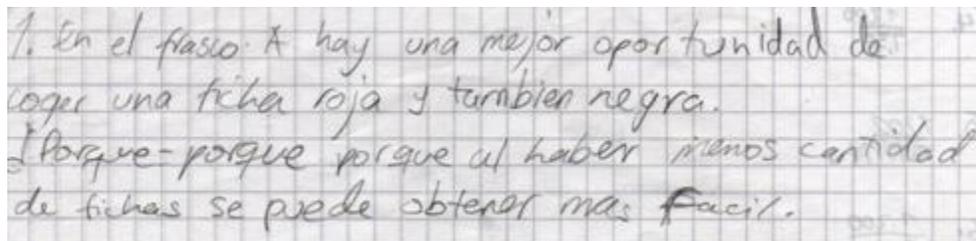


Ilustración 3: Episodio 3.

Se sugiere ver el anexo F.4.1.3., donde John afirma:

**Investigador:** ¿Cuál es la respuesta correcta?

**John:** Que hay una mejor oportunidad de encontrar una ficha roja y también negra en el frasco1.

**Investigador:** ¿Primero, cuál es la mejor oportunidad de escoger una ficha de color negro?

**John:** En el frasco 1.

**Investigador:** ¿Cuál es la mejor oportunidad de escoger una ficha de color rojo?

**John:** En el frasco1.

**Investigador:** ¿Por qué en el frasco 1?

**John:** Porque hay menos cantidad en la A de fichas, solo 5 fichas. Y el B tiene mayor.

**Investigador:** ¿Qué información descartó del problema?

**John:** Yo tomé la cantidad de fichas por frasco.

#### **4.1.2. El caso de Guillermo**

Mostró gusto e interés por participar en las actividades que se plantearon acerca de la proporcionalidad directa simple, es de precisar que tiene una particularidad al efectuar y resolver los problemas propuestos en las sesiones de intervención, que guarda similitud con su actitud en clase tímida e introvertida, que se refleja en las explicaciones, puesto que al momento de resolver los problemas de proporcionalidad directa simple, sus explicaciones son breves en cuanto a los argumentos que enuncia en la justificación y la solución obtenida, siendo en varias oportunidades su única posibilidad de explicar lo realizado, indicando la solución como una forma de presentar el procedimiento empleado.

Las respuestas a los interrogantes expuestos en la entrevista son puntuales y el estudiante quiere ser contundente en sus explicaciones. Esta forma de responder con precisión, sin vacilación, ha sido una constante que se mantuvo a lo largo de la intervención desarrollada con Guillermo, tanto en la parte escrita, como en la verbal, con lo cual se puede concluir que el estudiante se ha convencido que el procedimiento utilizado es válido.

Al igual que John, presenta explicaciones inválidas a partir de condiciones no necesarias y no suficientes. Estas son:

**4.1.2.1.** Tener en cuenta las medidas de la figura original para aumentar la misma medida a cada lado del cuadrado. Estrategia aditiva incorrecta.

**Guillermo** responde así:

**Investigador:** ¿Qué relación hizo usted, para construir la figura?

**Guillermo:** Le sumé dos (2) a cada lado.

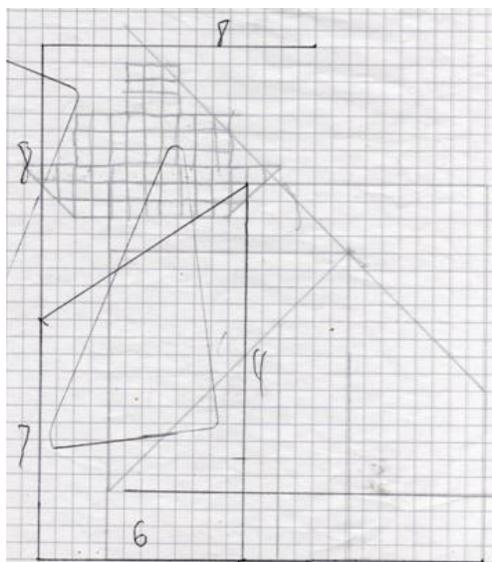


Ilustración 4: Episodio 4.

Se evidencia que al sumar dos centímetros a cada segmento, no puede completar el cuadrado. Esto se debe a que emplea una estrategia aditiva, tras haber comparado las cantidades presentadas en el enunciado.

4.1.2.2. Reproducir la figura en otra hoja.

A la pregunta del investigador, responde:

**Investigador:** ¿Qué estrategia consideras que es más adecuada para construir el rompecabezas y por qué?

**Guillermo:** Dibujar primero la figura, luego tratamos de hacerla más grande.

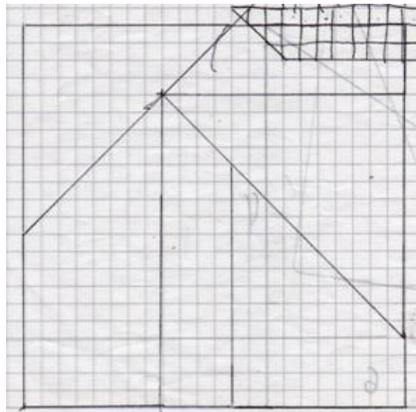


Ilustración 5: Episodio 5.

Este cuadrado es similar al original, pero esta construcción no permite responder con lo planteado en el problema.

4.1.2.3. Cantidad de fichas por recipiente, sin importar su color.

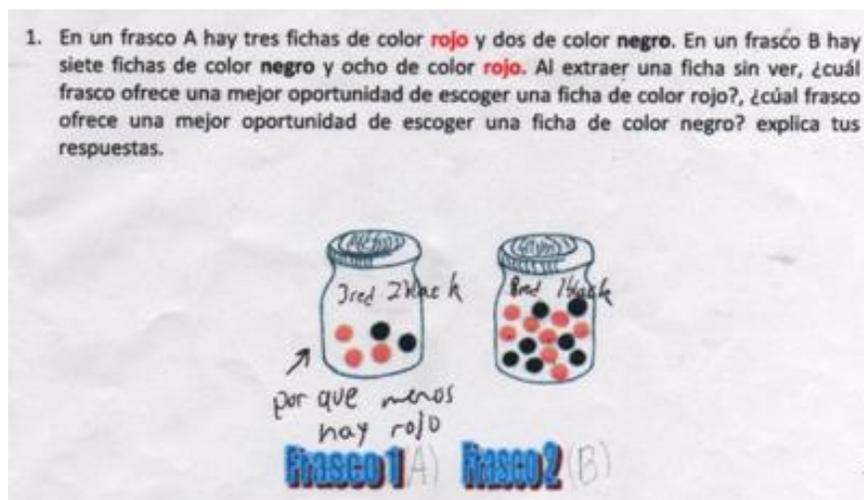


Ilustración 6: Episodio 6.

En el anexo F.4.2.3 se encuentra la siguiente explicación:

**Investigador:** ¿Y a partir de ahí cómo empezó a desarrollarlo?

**Guillermo:** Vi cuantas bolitas habían en cada frasco y en este, en el A habían menos de las dos, entonces habían más posibilidades de sacar las dos.

**Investigador:** ¿Qué parte de la información consideró para realizar el problema?

**Guillermo:** La posibilidad de sacar la negra, la B es más difícil porque hay más rojas que negras, en la primera solo hay 3 rojas.

**Investigador:** Entonces ¿Dónde hay más posibilidad de sacar la negra?

**Guillermo:** En el frasco A.

**Investigador:** ¿Por qué en el frasco A?

**Guillermo:** Porque hay menos rojas.

**Investigador:** ¿Por qué en el frasco B la probabilidad es menor?

**Guillermo:** Porque hay más rojas y menos negras. En el frasco A hay menos rojas.

#### 4.1.3. El caso de Lucía

Es una estudiante que mostró interés en participar en el proceso de la investigación. Es talentosa como lo manifiesta su propio padre en un escrito<sup>38</sup> facilitado días previos a la intervención.

Se percibe que está comprometida con sus estudios y además es autónoma. Mostró que comprende los conceptos de proporcionalidad directa simple, en la resolución de problemas, por lo general, emplea estrategias correctas aunque a

---

<sup>38</sup> Se sugiere al lector ver anexo F.6 (CD). Diario: Una niña con capacidades o talentos excepcionales.

veces no empleó las condiciones suficientes al resolver los problemas que se le propusieron.

Lucía presenta explicaciones inválidas a partir de condiciones necesarias pero no las suficientes para resolver problemas de proporcionalidad, puesto que enuncia que únicamente la variación directa entre magnitudes determina la proporcionalidad. Los indicios de la invalidez en su explicación son:

#### 4.1.3.1. La línea recta determina que hay proporcionalidad directa.

En la sesión 5, ver anexo F.4.3.5. , afirma:

**Investigador:** A partir de la información de la tabla y la gráfica, en donde María dice: la temperatura está variando en proporción directa con el tiempo ¿María tiene razón?

**Lucía:** Si tiene razón porque la *liniecita* que me dio era recta, y había entendido por allá que si me daba recta era proporcional.

**Investigador:** ¿La gráfica te permite determinar si dos magnitudes son proporcionales?

**Lucía:** Si

**Investigador:** ¿Por qué?

**Lucía:** Porque si la *liniecita* de la recta es proporcional, si da como curvita, no es proporcional.



Ilustración 7: Episodio 7.

**4.1.3.2.** Si las dos cantidades que representan las magnitudes aumentan simultáneamente, entonces hay proporcionalidad directa.

En otro episodio de la sesión 5, Lucía explica:

**Investigador:** ¿La información que presenta la tabla es de variación directa?

**Lucía:** Algunas si, algunas no

**Investigador:** Por ejemplo ¿cuáles si y cuáles no?

**Lucía:** La A no es directa

**Investigador:** ¿Por qué no es directa la A?

**Lucía:** Porque no es proporcional, porque la una aumenta y la otra no.

**Investigador:** ¿Cómo se dio cuenta de esto? ¿Qué procedimiento empleo?

**Lucía:** Empecé a ver que una subía, que la otra no subía, empecé ahí como alarmar.

**Investigador:** ¿Y la B que sería?

**Lucía:** La B si es directamente proporcional por que las dos aumentan a la vez.

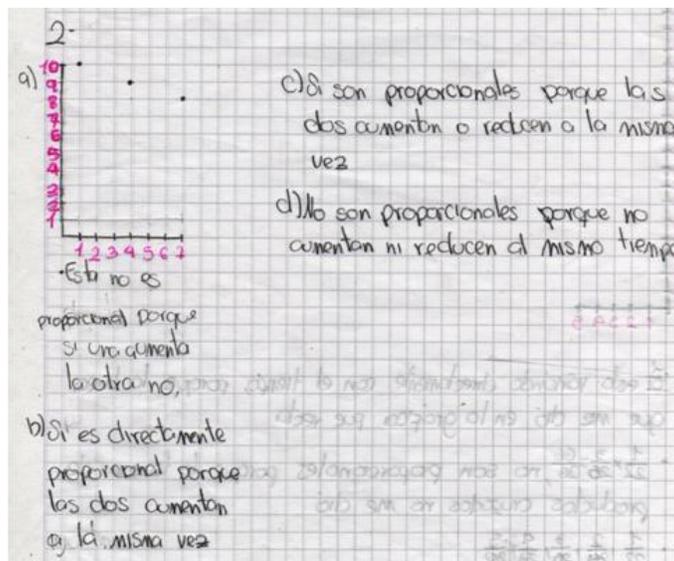


Ilustración 8: Episodio 8.

**4.1.3.3.** Reconocer que deben relacionarse las cantidades, pero desconocer la operación que permite relacionarlas.

En el anexo F.4.3.2., expresa lo siguiente:

**Investigador:** ¿Cuáles son las mayores dificultades?

**Lucía:** Pues porque yo no sabía qué hacer cuando me daba ese numerito, pues yo no sabía si multiplicarlo, restarlo, sumarlo.

**Investigador:** ¿Cuál número?

**Lucía:** El 1.4 pues ese usted me entiende.

**Investigador:** ¿Cómo relaciona la siguiente expresión que está en el enunciado: Construir en cartulina este rompecabezas pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 5 cm. tenga una longitud de 7 cm?

**Lucía:** Pues que debía cambiar al final, pues que hice esa divisioncita y ya. Y después no sabía qué hacer con ese número que me dio. Y después de 15 minutos, me di cuenta que era 1.4, pensé que había que multiplicarlo.

**Investigador:** ¿Cuál fue la primera estrategia que empleó?

**Lucía:** Sumarle a los lados que tenían 5, dos, 2 cm. Al lado de 5 dos

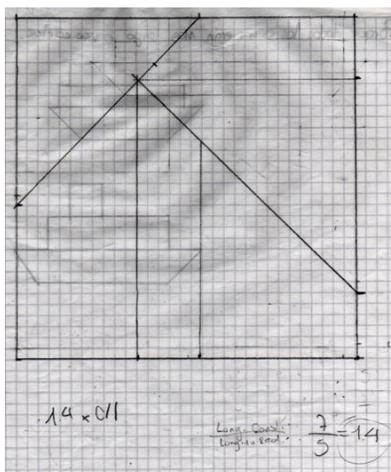


Ilustración 9: Episodio 9.

Lucía comenzó a comparar las cantidades 5 y 7 mediante la sustracción, pero luego notó que con la razón podía obtener un valor que le permitiría ampliar la figura. Empezó tanteando para llegar a esta construcción.

#### 4.1.4. El caso de Sandra

La estudiante se caracterizó por ser comprometida con sus estudios, demostró capacidades en la resolución de problemas, y comprensión en cuanto a los conceptos de proporcionalidad directa simple, utilizó estrategias correctas como se evidencia en los análisis, dio explicaciones válidas en los procedimientos realizados, además de poner creatividad al asociar diferentes conceptos de proporcionalidad.

Las explicaciones de Sandra son válidas porque tiene en cuenta las condiciones necesarias y además suficientes para responder el problema.

**4.1.4.1.** Multiplica cada segmento por 1.4, que es la constante de proporcionalidad en este problema.

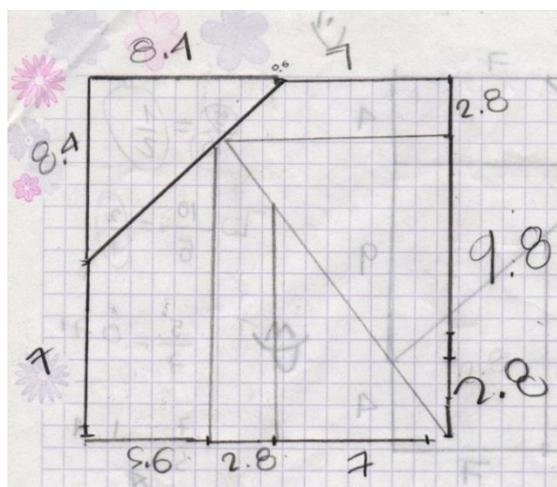


Ilustración 10: Episodio 10.

**4.1.4.2.** Afirma que no hay un cociente constante, a pesar que la gráfica determina una recta o hay variación directa.

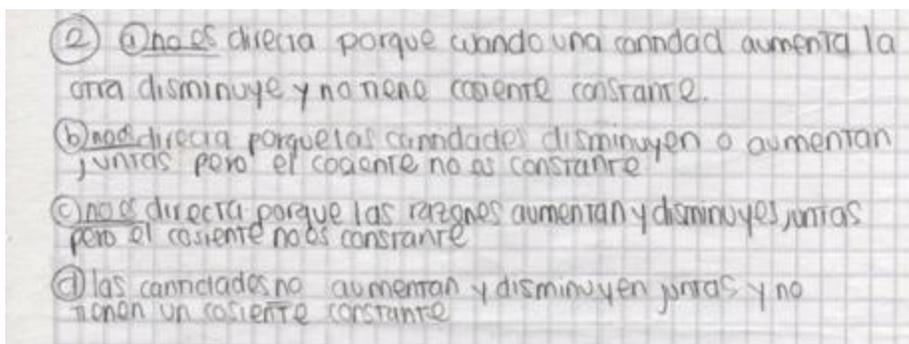


Ilustración 11: Episodio 11.

Se recomienda ver el anexo F.4.4.5., donde Sandra dice:

**Investigador:** ¿Por qué las tablas no son directamente proporcionales?

**Sandra:** Porque la A no es directa, porque cuando una cantidad aumenta la otra disminuye.

En la B no es directa por que las cantidades disminuyen o aumentan juntas ¿pero el cociente?

En la C no es directa por que las cantidades disminuyen o aumentan juntas ¿pero el cociente?

En la D las cantidades no aumentan y no disminuye juntas.

**Investigador:** Entonces, ¿qué necesito para que sea de variación directa?

**Sandra:** Primero que las cantidades aumenten o disminuyan de una manera igual y que también tengan un cociente constante es decir que si las divido me dan todas el mismo número.”

**4.1.4.3.** Asocia cada razón con el porcentaje, luego verifica si los porcentajes son iguales, para determinar si efectivamente son proporcionales.

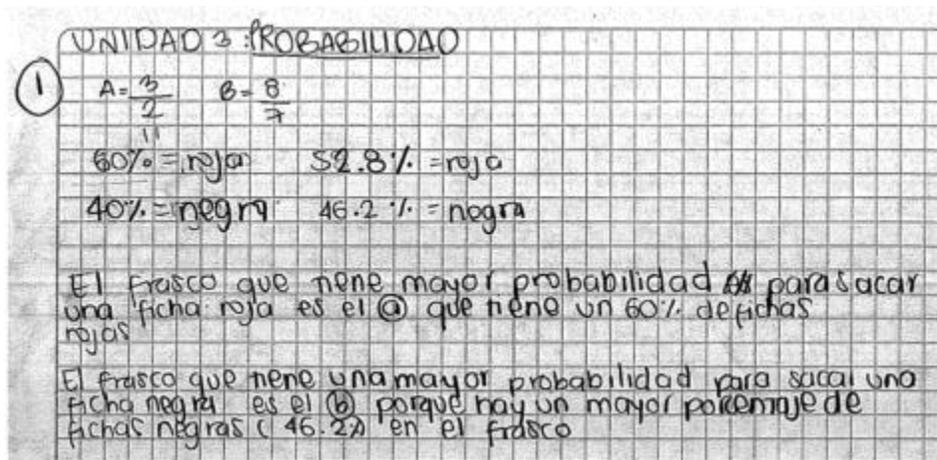


Ilustración 12: Episodio 12.

En el anexo F.4.4.3., afirma:

**Investigador:** ¿Cómo comienza a resolver el problema número uno y dos de la sesión tres?

**Sandra:** Primero lo copie como razones y luego le busque el porcentaje a cada uno de los colores.

**Investigador:** ¿Por qué cree usted que debe utilizar las razones?

**Sandra:** No sé, para organizarlos.

**Investigador:** ¿Por qué utilizó el concepto de razón?

**Sandra:** Porque por cada tres fichas rojas hay dos negras, y por cada ocho fichas rojas hay siete negras.

**Investigador:** ¿Qué indica que por cada tres fichas rojas hay dos negras y por cada ocho fichas rojas hay siete negras?

**Sandra:** O sea, que hay más rojas.

**Investigador:** ¿Qué le permite determinar que por cada tres fichas rojas hay dos negras?

**Sandra:** Del enunciado, y para no copiar todo el enunciado escribo  $\frac{3}{2}$  y  $\frac{8}{7}$ .

En el frasco A me di cuenta que hay un 60% de fichas rojas y un 40% de fichas negras. Y en el frasco B me di cuenta 52.8% de fichas rojas y 46.2% de fichas negras.

**4.1.4.4.** El orden de los términos es fundamental para determinar la razón constante, que a su vez determina la proporcionalidad.

En un episodio de la entrevista correspondiente a la sesión 3, Sandra responde:

**Investigador:** ¿Si se invirtieran las cantidades de fichas de color seguiría siendo mayor las ventajas de este frasco que elegiste al principio?

**Sandra:** Cambiaría.

**Investigador:** ¿Qué entiende usted por invierta las cantidades?

**Sandra:** Que no hay siete negras y ocho rojas sino ocho negras y siete rojas.

**Investigador:** ¿Seguiría siendo mayor la ventaja que ofrece el frasco?

**Sandra:** De rojos no, pero sí de negras, cambiaría la ventaja.”

La ilustración 13 sintetiza las características de las explicaciones presentadas por los participantes.



**Ilustración 13. Características de las explicaciones presentadas por los estudiantes**

## 4.2. Análisis de las explicaciones a partir de la técnica de análisis de contenido

El análisis de contenido como técnica de investigación permitió analizar la información suministrada por cada participante y así encontrar consistencias en los indicios de razonamiento presentados por los estudiantes en torno a la resolución de problemas.

Cada participante<sup>39</sup> desde las relaciones asociadas con la proporcionalidad, empleó sus estrategias. Pero el foco de atención del análisis fueron las explicaciones a partir de condiciones necesarias y suficientes y la validez que implica el uso de estas condiciones.

Los participantes no siempre fueron conscientes que estaban abordando problemas de proporcionalidad. Esto se evidenció en el momento que *Lucía* afirmó que “*no sabía qué hacer*” con el cociente de proporcionalidad, o cuando *John y Guillermo* decían que debían aumentar a cada lado la misma medida y así obtener una figura semejante<sup>40</sup>.

Otro indicador de la inconsciencia de que hay un razonamiento proporcional se evidencia al comparar la cantidad de fichas que hay en un recipiente con la cantidad de fichas del otro recipiente, cuando la tarea consistía en determinar las razones entre cantidades en el mismo recipiente y luego comparar las razones<sup>41</sup>.

Pero también fue posible observar que *Sandra* no sólo emplea condiciones necesarias sino las suficientes para responder correctamente. Puesto que interesaba en la investigación no que el actor dijera o escribiera un carácter que

---

<sup>39</sup> Entiéndase por participante a cada uno de los cuatro actores seleccionados en la investigación.

<sup>40</sup> Se sugiere al lector ver anexo A.2.

<sup>41</sup> Se sugiere al lector ver anexo A.3.

representaba un número sino que diera cuenta del dominio que tiene del objeto matemático. Esto fue posible cuando respondía que en una gráfica no sólo la línea recta determina que las magnitudes relacionadas son proporcionales entre sí. O cuando expresan que no sólo la variación de las cantidades determinan que dos magnitudes son directamente proporcionales sino también el cociente constante<sup>42</sup>.

Al hacer una analogía entre las respuestas obtenidas y las heurísticas que propone Polya, las preguntas de la entrevista estuvieron centradas en la ejecución del plan y el examen de la solución obtenida. Polya no es el referente en el método que los estudiantes emplearon para resolver problemas. La pertinencia de Polya es que sus heurísticas nos permitieron categorizar las preguntas que fueron respondidas por estos.

A continuación se presentan las tablas 15 y 16 correspondientes al análisis de las explicaciones apoyadas en gráficas y al análisis de las explicaciones elaboradas a partir del enunciado. Cada tabla contiene tres columnas. La primera columna son las condiciones que determinan si la información empleada conduce a la respuesta, la segunda columna caracteriza el razonamiento proporcional del estudiante, esto es, si se refiere directamente a la proporcionalidad o si asocia el contenido a otra temática y no enuncia explícitamente que el problema sea de proporcionalidad y la tercera columna determina la validez de la explicación<sup>43</sup>. Una explicación es inválida si no emplea las condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema y es válida cuando se han empleado condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema propuesto.

---

<sup>42</sup>Se sugiere al lector ver anexo A.5.

<sup>43</sup> Aunque las explicaciones son siempre importantes a pesar de su validez o invalidez.

#### 4.2.1. Análisis de las explicaciones apoyadas en gráficas

En las sesiones de intervención, la gráfica contiene información suficiente para resolver correctamente los problemas. La validez de las explicaciones está determinada por las condiciones empleadas y el reconocimiento de las relaciones vinculadas con el objeto matemático.

Condiciones empleadas por el estudiante para resolver el problema	Reconocimiento del razonamiento proporcional por parte del estudiante	Validez en la explicación
No necesarias y no suficientes	<p><b>Inconsciente:</b> En el dibujo a escala, <i>John</i> deforma la figura, percatándose que se conservan la medida de los ángulos esto le permite afirmar que ambas figuras tienen la misma forma. Pero no hay un reconocimiento consciente de la proporcionalidad.</p> <p><b>Consciente:</b> En el plano cartesiano <i>Guillermo</i> se percata que a medida que hay un cambio constante en una magnitud también hay un cambio constante en la otra magnitud, pero no tiene en cuenta la constante de proporcionalidad sino la diferencia constante al relacionar estas magnitudes entre sí.</p>	EXPLICACIÓN INVALIDA
No necesarias y suficientes	NO APLICA	
Necesarias y no suficientes	<p><b>Inconsciente:</b> En el dibujo a escala, <i>Guillermo</i> entiende la ampliación como el crecimiento o cambio de tamaño sin considerar la constante.</p> <p>En el plano cartesiano al visualizar o construir la figura. <i>John</i> tiene en cuenta que se forma la recta y afirma que este es el criterio para asegurar la proporcionalidad.</p> <p><b>Consciente:</b> En el dibujo a escala <i>John</i> y <i>Guillermo</i> reconocen que debe de cambiar la medida de cada lado pero emplean una</p>	

	estrategia aditiva incorrecta.	
<b>Necesarias y suficientes</b>	<p><b>Consciente:</b> Según <i>Sandra</i>, en el dibujo a escala las figuras son semejantes según la constante dada.</p> <p><b>Inconsciente:</b> En el plano cartesiano, <i>Lucía</i> y <i>Sandra</i> relacionan las coordenadas afirmando que de estas se obtiene igual cociente.</p>	<b>EXPLICACIÓN VÁLIDA</b>

Tabla 15: Análisis de las explicaciones apoyadas en gráficas

#### 4.2.2. Análisis de las explicaciones elaboradas a partir del enunciado

Los enunciados presentan información que permite resolver correctamente los problemas. De la interpretación de los enunciados depende el empleo de condiciones.

<b>Condiciones empleadas por el estudiante para resolver el problema</b>	<b>Reconocimiento del razonamiento proporcional por parte del estudiante</b>	<b>Validez en la explicación</b>
<b>No necesarias y no suficientes</b>	<p>Consciente: La cantidad de datos, <i>John</i> afirma: “que siempre que tenga tres datos en un problema aplica regla de tres”.</p> <p>Inconsciente: <i>John</i> y <i>Guillermo</i> comparan no entre razones sino entre la cantidad total de bolas que hay en cada frasco sin</p>	<b>EXPLICACIÓN INVALIDA</b>

	tener presente la cantidad de cada color y establecer la comparación por este último criterio.	
<b>No necesarias y suficientes</b>	<b>NO APLICA</b>	
<b>Necesarias y no suficientes</b>	<p>Consciente: <i>John</i> afirma que al variar las magnitudes hay una relación de proporcionalidad entre estas siendo este el único criterio para determinar la proporcionalidad.</p> <p><i>Lucía</i> tiene en cuenta que hay una variación directa y una constante entre cada variación.</p>	
<b>Necesarias suficientes y</b>	<i>Sandra</i> asocia la proporcionalidad correctamente a la probabilidad.	<b>EXPLICACIÓN VÁLIDA</b>

**Tabla 16: Análisis de las explicaciones elaboradas a partir del enunciado**

La tabla 16 tiene en cuenta los criterios de exhaustividad y exclusión mutua entre las muestras que fueron analizadas.

Las inferencias de la tabla son el resultado de cinco sesiones de intervención y entrevista, donde los participantes respondían problemas de proporcionalidad, a partir de relaciones vinculadas con este objeto matemático.

### **4.2.3. EL ANÁLISIS DE CONTENIDO EN LAS EXPLICACIONES CONSCIENTES E INCONSCIENTES**

Este análisis estuvo centrado en identificar aquellas expresiones escritas o verbales que dieran cuenta del reconocimiento por parte de los participantes de la investigación del razonamiento proporcional empleado en los problemas propuestos. Pero cabe aclarar que la consciencia o inconsciencia sirve para caracterizar las explicaciones y no para determinar su validez.

Hay explicación consciente en el momento que aceptan que utilizan procedimientos correspondientes a la proporcionalidad. Esto se evidencia cuando decían que la proporcionalidad está representada por una línea recta en el plano cartesiano, o que a medida que aumenta una magnitud, la otra también lo hace. Pero esta consciencia no garantiza que la respuesta sea acertada. Porque aunque son conscientes de algunas condiciones necesarias, descuidan otras que también se requieren para que haya proporcionalidad directa entre magnitudes.

La inconsciencia en la explicación se percibía en las palabras utilizadas por los participantes que caracterizaban la semejanza, por ejemplo, el cambio en el tamaño, la conservación en las propiedades de la figura que dan cuenta de la proporcionalidad desde la geometría.

Otros participantes asocian la proporcionalidad a los problemas que mencionan tres datos (solucionados a través de la regla de tres simple). Esto evidencia que no hay un razonamiento proporcional a pesar de que el carácter que representaba la respuesta coincidía con lo que se preguntaba. Pero esto es consecuencia de la aplicación del algoritmo producto cruzado sin tener las garantías que este fuera el procedimiento que debía llevarse a cabo.

Algunas muestras no permitían determinar directamente que había un razonamiento proporcional consciente o inconsciente. Pero la inferencia sobre el contenido latente fue posible, gracias a las respuestas de la entrevista que respaldaron lo que fue emergiendo de la intervención. Ejemplo de esto son los problemas asociados a la probabilidad, donde los estudiantes afirmaron que si hay igual probabilidad, entonces las razones constituyen proporciones. Pero como las razones son diferentes, no es pertinente definir proporcionalidad entre los eventos comparados.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y TEMÁTICAS FUTURAS

#### 5.1. Conclusiones relativas al cumplimiento del objetivo general

En relación con las condiciones empleadas por los participantes en cuanto a las explicaciones de proporcionalidad directa simple, se observa que la condición necesaria y no suficiente en donde se considera que a medida que una magnitud aumenta o disminuye, la otra también aumenta o disminuye, pues *John* no tienen en cuenta la condición de que para que pueda existir una relación de proporcionalidad es necesario que haya una constante entre las razones.

En el caso de *Guillermo* se observa que le cuesta explicar los procedimientos puestos en acción a la hora de resolver un problema y se apoya en la certeza que le da el hecho de hallar un valor, se evidencia como hay un convencimiento personal de los procesos puestos en operación, en donde sus explicaciones no son registrados de forma oral o escrita por parte del participante ,como es el hecho de hacer la resolución del problema a través de una cantidad, sin efectuar algún procedimiento escrito que dé cuenta del razonamiento empleado.

Se evidencia en un primer momento el arraigo a la utilización de la regla de tres simple en lo concerniente a la comprensión que se tiene acerca de la proporcionalidad, pues algunos estudiantes resuelven los problemas hallando el valor perdido, esto se evidencia en la sesión 1, en donde un participante alude a la explicación de que si en un problema de proporcionalidad intervienen tres magnitudes es necesario aplicar regla de tres para resolver el problema.

En la investigación se muestra una variedad de estrategias y formas de resolución de problemas de proporcionalidad directa que los estudiantes de séptimo grado de *The New School* evidencian mediante un estudio de casos afrontados con diversos problemas de proporcionalidad en donde son capaces de producir soluciones y explicaciones particulares.

Los participantes muestran un razonamiento proporcional en algunos casos de manera inconsciente, en donde se evidenciaron explicaciones invalidas y en la resolución de algunos problemas aplicaron condiciones no necesarias y no suficientes, necesarias y no suficientes, como se evidencia en los análisis de los casos de *John y Guillermo*, pero también hubo casos en donde su razonamiento fue aplicado de una manera consciente donde dieron una explicaciones válidas y utilizaron unas condiciones necesarias y suficientes como en el caso de *Lucía y Sandra* cuando desarrollaron las sesiones de variación directa y probabilidad ,y de *Guillermo* en el momento que trabajó la sesión de razones.

Se puede ver los resultados y concluimos que los estudiantes tienen un largo camino por recorrer hasta dominar las estrategias y habilidades básicas del razonamiento proporcional.



## 5.2. Conclusiones relativas a las preguntas temáticas

Las explicaciones que dan cuenta del razonamiento proporcional pueden resultar inválidas en un proceso de prueba. Pero una explicación válida puede ser una demostración en el momento que sea expuesta formalmente y sea aceptada por una comunidad matemática.

Presentar la proporcionalidad asociada a otras relaciones vinculadas con la proporcionalidad posibilita caracterizar el razonamiento de los estudiantes en la medida que evidencia las condiciones necesarias y suficientes empleadas.

Las condiciones empleadas en la resolución de problemas de proporcionalidad directa permiten determinar la validez de la explicación elaborada.

Los problemas de valor perdido permiten aplicar el algoritmo “producto cruzado”, pero esto no garantiza que haya un razonamiento proporcional consciente. Además, si se presentan estos problemas de proporcionalidad directa simple con la misma tipología, el estudiante puede tener una visión reducida del objeto matemático, por ellos se reconoce la importancia de asociar otros objetos matemáticos al de proporcionalidad directa.

Presentar la proporcionalidad asociada a otras relaciones vinculadas posibilita caracterizar el razonamiento de los estudiantes en la medida que evidencia las condiciones necesarias y suficientes empleadas.

Los problemas de proporcionalidad tienen una gran variedad de tipologías, que siendo tenidas en cuenta, potencializan la asimilación de este concepto, desde diferentes objetos matemáticos y no siempre a través de la misma clase de preguntas que automatizan al estudiante y crean confusiones cuando este se enfrenta cotidianamente a otro tipo de situaciones que involucran razonamiento proporcional.

Las condiciones empleadas en la resolución de problemas de proporcionalidad directa permiten determinar la validez de la explicación elaborada.

La utilización de tablas y el plano cartesiano, favorece el aprendizaje del concepto de proporcionalidad, esto se evidencia en la sesión número cinco de variación directa en donde se observa que los estudiantes identifican las condiciones necesarias y suficientes para que se establezca una relación de variación directa, pues relaciona el hecho de que haya una constante de variación y establecen una correspondencia con las magnitudes, al identificar como en el plano cartesiano y en las tablas, a medida que una magnitud aumenta o disminuye, la otra magnitud también aumenta o disminuye y efectivamente algunos estudiantes resuelve los problemas, apoyándose en esta definición para explicar el procedimiento que les permitió llegar a la conclusión.

### **5.3. Temáticas futuras que surgen del trabajo de investigación**

#### **5.3.1. Temáticas relacionadas con los procesos de validación**

- Implicaciones del razonamiento proporcional en un contexto no matemático.
- Importancia del razonamiento inductivo en la transición de un razonamiento cualitativo a uno cuantitativo.

##### **5.3.1.1. Temáticas relacionadas con la explicación**

- Explicaciones alrededor de la resolución de problemas de proporcionalidad inversa.
- Explicaciones en resolución de problemas.
- Explicaciones en educación matemática.
- ¿Qué información destacan los estudiantes, al momento de resolver un problema de proporcionalidad directa simple?
- ¿El estudiante qué inferencias realiza al apoyarse en las gráficas que presenta el problema y en la información literal?
- ¿Los estudiantes emplean condiciones suficientes y son conscientes de ello, después de haber razonado en torno al problema?

- ¿El estudiante comprende el significado de la razón constante, según el objeto matemático asociado a la proporcionalidad directa simple?
- ¿Cómo asocia el estudiante la proporcionalidad con otros objetos matemáticos?
- Rastreo conceptual de los tipos de *explicaciones* que presentan los estudiantes de secundaria.

#### **5.3.1.2. Temáticas relacionadas con la prueba**

- Pruebas elaboradas alrededor de un problema de proporcionalidad, a partir de un debate matemático.
- Refutaciones expuestas en cuanto a explicaciones invalidas, desde la proporcionalidad.

#### **5.3.1.3. Temáticas relacionadas con la demostración**

- Demostraciones en torno a problemas teóricos de proporcionalidad.

#### **5.3.2. Temáticas relacionadas con la resolución de problemas**

- De la fracción a la razón: Problemas de razones internas y externas en proporcionalidad directa.
- ¿Cómo los estudiantes formulan problemas matemáticos a partir del reconocimiento de condiciones necesarias?
- ¿Cómo la resolución de problemas favorece el razonamiento proporcional?
- Diseño de actividades diagnóstico con problemas de proporcionalidad y razón que generan en los estudiantes de séptimo grado *explicaciones*.

### **5.3.3. Temáticas relacionadas con dificultades de aprendizaje**

- Dificultades que presentan los estudiantes de séptimo grado en cuanto a la utilización de la proporcionalidad y sus diferentes relaciones (Escala, similitud, probabilidad, porcentaje, interés, variación directa).
- Obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de razón y proporción en estudiantes de séptimo grado.

## BIBLIOGRAFIA

Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada. Centro de Estudios Andaluces.

<http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf> (Retrieved: 1-2-2010)

Ardila, V. (2000). *Olimpiadas matemáticas 7*. Santafé de Bogotá, Colombia: Voluntad S. A.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. (U. de los Andes, Ed.) Bogotá: Una Empresa Docente.

Baraja, C. (2009). Recuperado el 23 de abril de 2010, de [www.asocolme.com/ata/article.php3?id\\_article=7](http://www.asocolme.com/ata/article.php3?id_article=7)

Barrantes, H. (2006). *Cuaderno de investigación y formación en educación matemática*. Recuperado el 23 de Enero de 2010, de Cuaderno de investigación y formación en educación matemática:

<http://es.scribd.com/doc/53894585/Resolucion-de-Problemas-El-Trabajo-e-Allan-Schoenfeld>

Beltrán, L., Rodríguez, B., & Dimaté, M. ((1996)). *Matemáticas con tecnología aplicada 7*. Bogotá: Prentice Hall de Colombia.

Ben-Chaim, D., & William Fi, J. F. *El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencias curriculares*.

Camargo, L. (2007). *Conexiones matemáticas 7*. Colombia: Norman S. A.

Cañizares Castellanos, J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. España. Extraído el 16 de julio de 2010.

<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CANIZARE.pdf>

Castillo, E., & Vásquez, M. (2003). El rigor metodológico en la investigación cualitativa. *Revista Colombia Médica*, 34 ( 3), 164-167.

Celiz, María José, Feliziani Viviana Andrea, Zingaretti María Laura; (2006). La resolución de problemas como objeto de enseñanza y medio para el aprendizaje: <http://unvm.galeano.com/cap09.pdf>.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. España: Pearson education.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). *Handbook of Qualitative Research* ( Third Edition ed.). Thousand Oaks: Sage Publications, Inc. Introduction.

Durango , J. H. (2010). *La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: "El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas"*. Medellín: Trabajo de Maestría, Centro de documentación-Facultad de Educación- Universidad de Antioquia.

Durango, J. H., Cadavid, D., Toro, j. A., Marulanda, L., Monsalve, L. M., Zapata, M., y otros. (2010). *Investigación documental referida a contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas*. Medellín: Tesis de Grado, Centro de documentación-Facultad de Educación-Universidad de Antioquia.

Gallego Giron, G. (2000). *Dificultades de aprendizaje en las matemáticas* . Medellín. Documento inédito.

García García, J. (2005). *De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. España: Universidad de Jaén.

Gómez Alfonso, B. (2007). *La razón en semejanza: el caso del perrito*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia.

Gómez, R., Wills, D., Guarín, H., & Londoño, N. (1978). *Matemática Moderna Estructurada 2*. Colombia: Norma.

Goswami, U. (2001). *Analogical reasoning in children*. En "The analogical mind: perspectives from cognitive science". (D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. Kokinov, Edits.) Massachusetts Institute of Technology.

Karplus, R. (1974). *Intellectual development beyond elementary school iv: ration, the influence in cognitive style*. School science and mathematics.

Krippendorff, K. (2002). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós Ibérica S. A.

López, F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en física*. Madrid: C.I.D.E.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (1989) Estándares curriculares y de evaluación para la educación *matemática*. Bogotá.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. (1968). *Epistemologie et psychologie de la fonction*. Paris: PUF.

Piñuel Raigada, J. L. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido*. Madrid: Copyright © Estudios de Sociolingüística .

Pólya, G. (1961). *Como plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas.

Reiss, M., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1985). *Cognitive Processes And Products in Proportional Reasoning. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (I. L. Streefland, Ed.) Noordwijkerhout (Utrecht), Holland: PME.

Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, 9 (2), 299-324.

Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de INVESTIGACIÓN SOCIAL*. Bogotá: ARFO.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (Segunda ed.). Madrid: Morata.

Stanley, D., McGowan, D., & Hudson Hul, S. (2003). Recuperado el 15 de Enero de 2010, de:

<http://www.utdanacenter.org/mathtoolkit/downloads/support/proportionality.pdf>

Tapias, Y. H. (2008). *Para hallar el área de este polígono tan extraño, necesito aprender mil fórmulas o solo contar puntos, conjeturar y refutar?*. Trabajo de Grado: Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Centro de documentación-Facultad de Educación Universidad de Antioquia. Medellín Colombia.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). *Proportional reasoning: A review of the literature*. *Educational Studies in Mathematic*, 16, 181-204.

## ANEXOS

### Anexo A.

#### Sesiones de intervención

### SESIÓN DE INTERVENCIÓN

Cada Sesión de intervención se implementó The New School con los estudiantes de séptimo grado.

#### A.1 Sesión de razón (SR)

### SESIÓN UNO: RAZÓN

1. Determina si las razones son iguales. Escribe si ó no, luego explique la estrategia empleada.

a. 3 a 4 y 7 a 8: \_\_\_\_\_ c. 1 a 2 y 3 a 6: \_\_\_\_\_ e. 5 a 10 y 2 a 4: \_\_\_\_\_

b. 12 a 5 y 5 a 12: \_\_\_\_\_ d. 9 a 27 y 1 a 3: \_\_\_\_\_ f. 6 a 18 y 4 a 6: \_\_\_\_\_

2. Responde falso ó verdadero, según el caso. Justifica cada respuesta.
- Un vehículo recorre doscientos cuarenta (240) kilómetros en tres(3) horas. Esto significa que en promedio recorre ochenta (80) kilómetros cada hora.
  - Supongamos que un automóvil recorre ciento ochenta (180) Km. por cada seis (6) galones de gasolina, podríamos decir que el rendimiento del automóvil es de cuarenta (40) km./galón.
3. En uno de los canales de televisión colombiana se transmiten tres (3) programas extranjeros por cada siete (7) programas nacionales.
- 3.1. Determinar el número de programas nacionales que se transmiten:
- Por cada seis (6) programas extranjeros.
  - Por cada dieciocho (18) programas extranjeros.
- 3.2. Determinar el número de programas extranjeros que se transmiten:
- Por cada catorce(14) programas nacionales.
  - Por cada setenta (70) programas nacionales.
  - Por cada  $7n$  programas nacionales, siendo  $n$  un número natural cualquiera
  - Completa la siguiente tabla:

Programas extranjeros	3	6	9			
Programas nacionales	7			14	70	$7n$

**Tabla 17: Programas extranjeros y nacionales**

## A.2 Sesión de escala y similitud (SES)

### SESIÓN DOS: ESCALA Y SIMILITUD

1. En la figura adjunta se presentan las piezas de un rompecabezas. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Diseñar en una hoja este rompecabezas ampliando el tamaño, de tal manera que el lado de 5 cm. tenga una longitud de 7 cm. ¿Cuál es el factor de conversión?

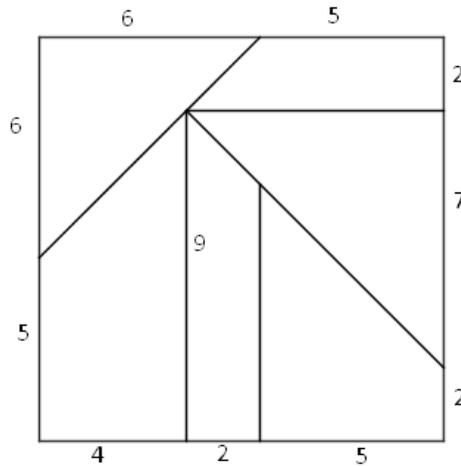
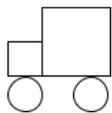
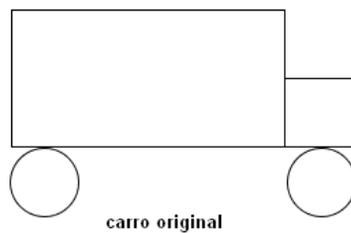
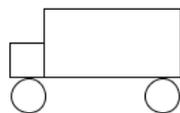


Ilustración 14: Rompecabezas

2. El carro original ha sido reducido y reflejado, escoja la réplica que cumpla con estas condiciones mencionadas.

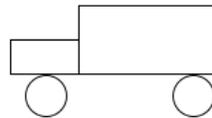


A

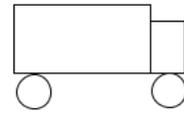


B

Carro semejante



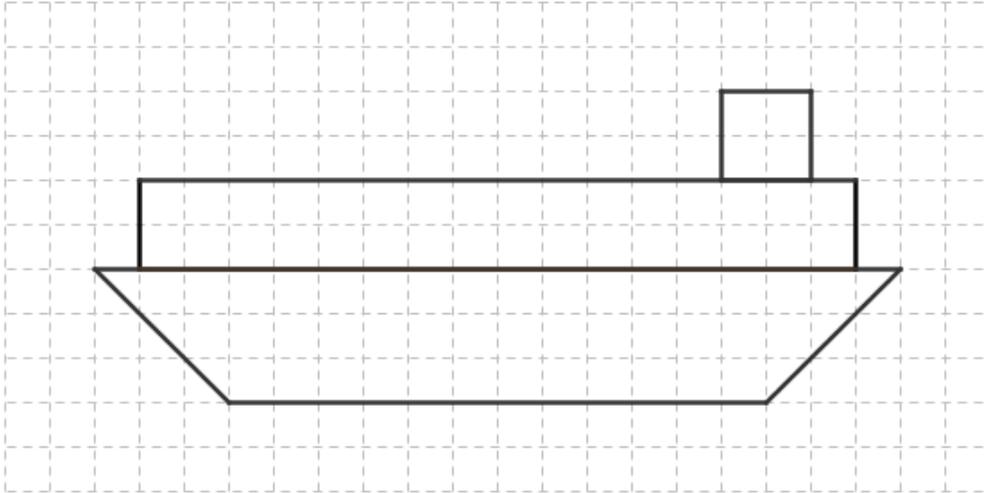
C



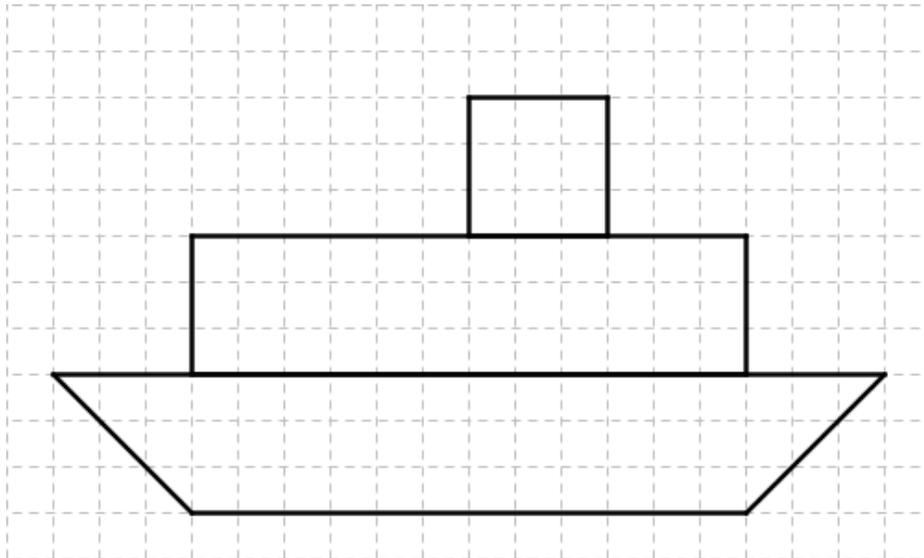
D

Ilustración 15: Carro transformado

3. Representa gráficamente los siguientes barcos en una hoja cuadriculada de tal manera que dos renglones en cada imagen sean un renglón en la hoja que vas a utilizar.



**Ilustración 16: Barco 1**



**Ilustración 17: Barco 2**

### A.3 Sesión de probabilidad (SP)

## SESIÓN TRES: PROBABILIDAD

1. En un frasco A hay tres fichas de color **rojo** y dos de color **negro**. En un frasco B hay siete fichas de color **negro** y ocho de color **rojo**. Al extraer una ficha sin ver, ¿cuál frasco ofrece una mejor oportunidad de escoger una ficha de color rojo?, ¿cuál frasco ofrece una mejor oportunidad de escoger una ficha de color negro? explica tus respuestas.



Ilustración 18: Frascos

2. ¿En cuál de las siguientes cajas es más probable obtener una ficha negra?

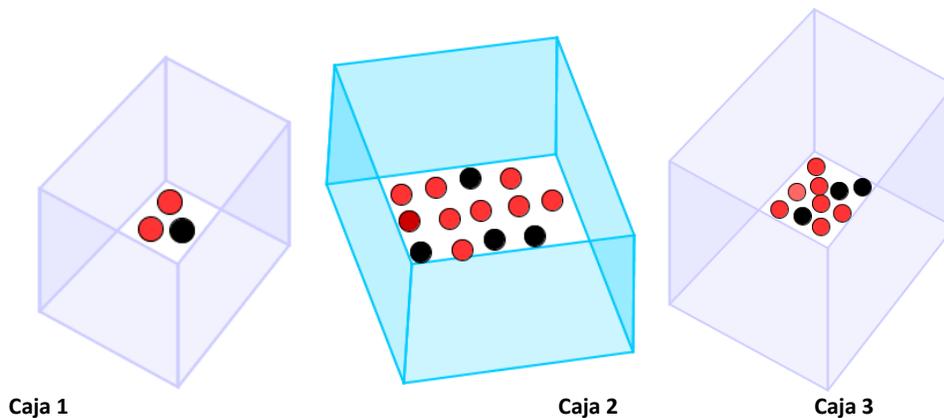


Ilustración 19: Cajas

#### A.4 Sesión de porcentaje (SPO)

### SESIÓN CUATRO: PORCENTAJES

1. Una encuesta realizada a mil doscientas (1.200) personas acerca de sí está de acuerdo ó no con implantar un nuevo impuesto, arrojó los siguientes resultados:

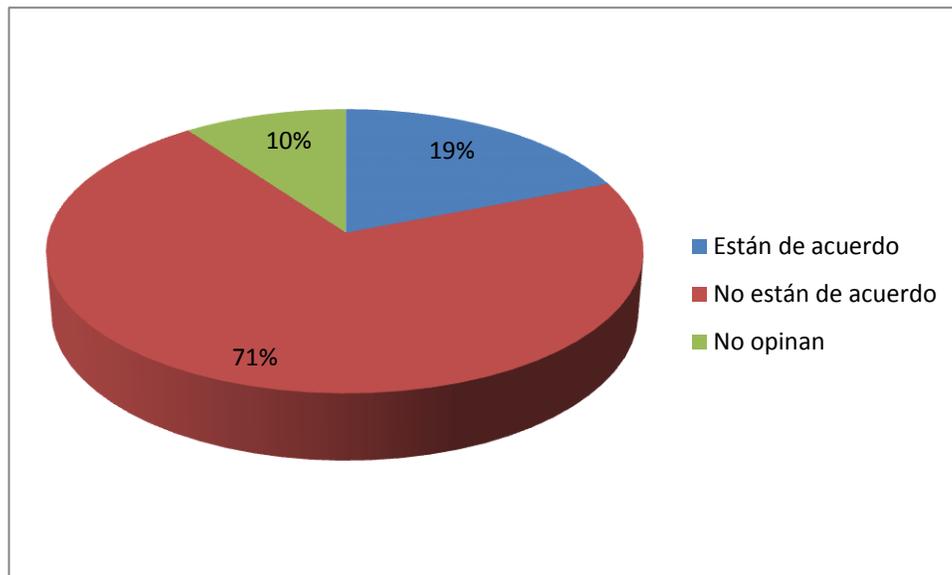


Ilustración 20: Resultados de una encuesta

- ¿Cuántas personas están de acuerdo con implantar un nuevo impuesto?
- ¿Cuántas personas no están de acuerdo?
- ¿Cuántas prefieren no opinar?
- ¿Cuál es la razón entre el total de personas encuestadas sobre el total de personas que están de acuerdo con implantar un nuevo impuesto?
- ¿Cuál es la razón entre el total de personas encuestas sobre el total de personas que no están de acuerdo con implantar un nuevo impuesto?
- ¿Cuál es la razón del número del total de personas encuestas sobre el total de personas que no prefieren opinar?
- ¿Es posible afirmar que la razón del número del total de personas encuestas sobre el número de personas que no prefieren opinar, es proporcional, con la razón entre el total de personas encuestas sobre el número de personas que están de acuerdo con implantar un nuevo impuesto?

Verifica si las ventajas que aparecen en cada empaque son ciertas. Explica tu respuesta.

2.1 Esta caja antes contenía 125 ml. y ahora trae 150 ml.



**Ilustración 21: Caja que ofrece un 20% de contenido gratis**

- ¿Cuál es la razón entre el contenido de antes y el contenido de ahora?
- ¿Cuál es la cantidad de mililitros que se ofrecen de más en: dos, tres, cuatro, cinco y seis productos?
- ¿Cuántos mililitros hay en 57 envases de 150 mililitros cada uno?

2.2 Esta lata antes contenía 625 ml. y ahora contiene 750 ml.



**Ilustración 22: Lata que ofrece un 20% de contenido gratis**

- ¿Cómo podemos interpretar la siguiente razón  $\frac{625}{750}$ ?

b. Completa la siguiente tabla.

Cantidad de jugos	Contenido en mililitros sin el 20 % de más	Contenido en mililitros Con el 20% de más
1	625	750
2	1.250	
3		
4		
5		3.750
6		

Tabla 18: Contenido en cajas con jugo

2.3 La información ampliada con la lupa representa el peso actual y el peso anterior de los “Natuchips”.



Ilustración 23: Contenido que se ofrece en empaque de Natuchips

- Verifica si el contenido ofrecido de más es correcto.
- En caso de no ser correcto el contenido que aparece en el empaque, ¿Cuál debería ser el porcentaje para obtener el peso neto?
- si compramos dos paquetes de *Natuchips*, ¿Cuál será el contenido recibido de más?
- ¿Qué indica el cociente de la razón  $\frac{45}{40}$ ?

## A.5 Sesión de variación directa (SCD)

### SESIÓN CINCO: COVARIACIÓN DIRECTA

1. Elabora una gráfica en el plano cartesiano para representar los valores de la siguiente tabla:

<b>Tiempo (horas)</b>	1	2	3	4	5
<b>Temperatura (°C)</b>	22	24	26	28	30

Tabla 19: Variación de la temperatura con relación al tiempo

María dice: “*la temperatura está variando en proporción directa con el tiempo*”. Explique si María tiene la razón y por qué.

- Determinar si las razones  $\frac{1}{22}$  y  $\frac{3}{26}$  forman una proporción
  - ¿Cuál es la razón de la tabla anterior  $\frac{\text{Tiempo (horas)}}{\text{Temperatura (°C)}}$ ?
  - ¿Son iguales las razones  $\frac{\text{Tiempo (horas)}}{\text{Temperatura (°C)}}$  y  $\frac{\text{Temperatura (°C)}}{\text{T tiempo (horas)}}$ ? , explica la respuesta
  - ¿Qué conclusiones puedes obtener a partir de la gráfica?
2. Explica si las siguientes tablas de valores representa una variación directa entre **X** e **Y**.

X	Y
1	10
4	9
7	8

a.

X	Y
90	3
80	2
70	1

b.

X	Y
9	3
11	5
13	7

c.

X	Y
75	15
85	10
90	5

d.

3. Dada la siguiente tabla de valores entre **X** e **Y**, diga si representa una variación directa, y si representa una variación directa, encuentra la constante de variación.

X	Y
9	3
12	4
15	5

- a. Cuando  $X = 18$ ;  $X = 21$  y  $X = 24$ , ¿Qué valores le corresponde a  $Y$ ?
- b. Cuando la  $Y = 10$ , ¿qué valores le corresponden a la  $X$ ?
- c. ¿Con cuáles razones de la tabla podemos formar una proporción?
- d. Representar los valores de la tabla en el plano cartesiano.

## Anexo B: Permisos de los responsables de los actores participantes de la investigación (PRAPI)



Medellín, Mayo 16 de 2010

Señores:  
Padres de Familia

Reciba un cordial saludo.

En la clase de matemáticas del grado 7° A. de la institución educativa "The New School", orientada por el profesor Leonardo Zabala Casas, en la cual participan sus hijos, estamos desarrollando un proyecto de investigación denominado "El razonamiento proporcional en estudiantes de séptimo grado al momento de abordar la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple. El objetivo de dicho proyecto es: Analizar las estrategias y esquemas de razonamiento empleadas por ellos en la resolución de situaciones cotidianas, a través de problemas de proporcionalidad.

Queremos de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en ésta medida presentarla en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Ana María Quintero Martínez  
Sebastián Cuartas Carmona  
Hernán Restrepo Estrada  
Leonardo Zabala Casas

Estudiante investigador  
Lic. en Edu. Bás. Matemáticas. U de A

John Henry Durango Urrego Asesor de investigación Profesor U de A	Leonardo Zabala Casas Maestro cooperador Institución Educativa The New School.
---	--

Nombre del Acudiente	Nombre del estudiante
_____	_____
Firma del acudiente	Firma del estudiante
_____	_____

### B.1: Formato de Permiso de actor y acudiente

## **Anexo C: La categorización de las preguntas según el marco de George Polya (ES)**

### **CATEGORÍA DE LAS PREGUNTAS PARA LA ENTREVISTA SEMI-ESTRUCTURADA**

Las categorías enunciadas a continuación son tomadas de las heurísticas propuestas por Polya (1965).

#### **CATEGORIA A: Concepción del plan**

Categoría A1: Examen de la construcción o extracción de información del enunciado:

- Semántica.
- Sintáctica.

Categoría A2: Pregunta asociada a la red conceptual:

- obstáculos epistemológicos.
- saber previo.
- Dominio del objeto matemático.

Categoría A3: Atención selectiva. Fijeza funcional.

- Condiciones necesarias.
- Condiciones suficientes.

Categoría A4: Apelación a la autoridad.

#### **CATEGORIA B: Ejecución del plan**

Categoría B1: Estrategias de razonamiento proporcional. *Démarche*.

Categoría B2: Inferencia sobre los datos.

**CATEGORIA C:** Examen de la solución obtenida.

Categoría C1: Explicación referente a la validez de la respuesta dada.

Categoría C2: Generalización.

Categoría C3: Tipo o nivel de explicación (de aquí pueden emerger categorías).

Categoría C4: Comprensión en la cotidianidad.

Mediante estas preguntas se indaga por las convicciones personales que tienen los estudiantes. Dado que nuestra investigación es cualitativa, hacemos preguntas abiertas que apuntan a evidenciar razonamiento. Los registros escritos que proporcionan las sesiones de intervención y las respuestas a estas preguntas, serán tratadas desde la ética en la investigación, por esto la base es el contenido directo (la información explícita). Aunque la información latente también será considerada.

Sesión	Problema	Pregunta	Categoría									
			A				B		C			
			A1	A2	A3	A4	B1	B2	C1	C2	C3	C4
		¿Cómo piensa resolver el problema?					X					
		¿Qué se sabe del problema?		X								
		¿Qué información importante puedes sacar del problema?	X									

		¿Por qué empleo este procedimiento?							X			
		¿Por qué hizo eso?							X			
		¿Piensa que hay otras estrategias para solucionar el problema?					X					
		¿Qué sabes en relación con el concepto, te han enseñado una situación similar o parecida a estos problemas?		X								
		¿Cómo lo solucionaría tu profesor?				X						
1	1	¿Qué le permite afirmar que dos razones son iguales?							X			
1	1	¿Cuál razón es mayor?		X								
1	2	¿Por qué eligió este procedimiento para llegar a la respuesta?							X			
1	3	¿Por qué eligió este procedimiento? ¿Conoce otro procedimiento que te permita responder la pregunta?					X					
1	3	¿Cree que la pregunta tiene respuesta?						X				
1	3	¿Lo que le han enseñado sirve para responder o considera que tiene conocimientos insuficientes?		X								
2	1	Desde un primer momento, ¿creíste en que sería imposible construir la figura?		X								
2	1	Como relaciona la siguiente expresión: "Construir en cartulina este rompecabezas pero de mayor tamaño, <b>de tal manera que el lado de 4 cm.</b> "		X								

		<b>tenga una longitud de 7 cm</b> ". <sup>44</sup>											
2	1	¿Qué estrategia consideras que es la adecuada para construir el rompecabezas y por qué?					X						
2	1	¿Cuáles estrategias consideras que son las adecuadas para resolver el problema?					X						
2	1	¿Cómo explicas que dos figuras son semejantes?							X				
2	1	¿Cuál es la razón de los lados del cuadrado dado con los lados del cuadrado que ha construido?		X									
2	1	Después de hallar la constante, entre la razón de los lados del cuadrado dado y el que ha construido, ¿qué puedes concluir?								X			
2	2	¿Con qué región tuviste mayor dificultad para dibujar?					X						
2	2	¿Cuál sector comenzaste a dibujar, y por qué elegiste esta parte?					X						
2	2	¿Son proporcionales la figura original y la que construiste? Explica.										X	
2	3	¿Qué entiendes por reducir?		X									
2	3	¿En qué te fijaste para responder que esta figura era la reflejada?  ¿Por qué te causo dificultad decir cuál figura había sido reducida y reflejada?			X								

<sup>44</sup>Ver problema de la sesión de intervención (Sesión dos, problema uno).

2	3	¿Cuál ha sido el factor escalar para construir cada figura?		X									
2	3	¿Por qué cada figura que has ampliado o reducido, permanece con la misma forma?										X	
2	3	¿Qué significa ampliar y reducir?		X									
2	3	¿Qué puede cambiar al ampliar o reducir una figura?		X									
2	3	¿Cambiará la forma de la figura?		X									
2	3	¿Cambiará la longitud de sus lados?		X									
3	1 y 2	¿Qué procedimiento llevó a cabo para dar respuesta al problema?					X						
3	1 y 2	¿En qué se fijó y qué información descartó para llegar a la respuesta?			X								
3	1 y 2	¿Qué pasaría si escribiera la respuesta sin tener en cuenta el orden de los términos?										X	
3	1 y 2	¿Que la llevó a pensar que el problema era de proporcionalidad?		X									
3	1 y 2	¿Qué otro procedimiento puede utilizarse para dar con la respuesta correcta?  ¿Cuántas fichas más de color rojo o negro se necesitan en el segundo frasco para que haya igual ventaja en ambos frascos?					X						
3	1 y 2	¿Si se invierten las cantidades de fichas de cada color, seguiría siendo mayor la									X		

		ventaja que ofrece ese frasco que elegiste al principio?										
4	1	¿Los resultados de las encuestas pueden expresarse mediante porcentajes?							X			
4	1	¿Por qué razón utilizan porcentajes para analizar los resultados de las encuestas?									X	
4	1	¿Qué significa duplicar el porcentaje de personas que eligieron una opción? ¿Si esto sucede, que pasaría con los otros porcentajes?	X									
4	1	¿Si aumenta la cantidad de personas encuestadas, también tendría que aumentar el porcentaje de las respuestas?							X			
4	1	¿Cómo obtienes la respuesta? ¿Crees que puede haber otra estrategia que permita llegar a la respuesta? ¿Por qué empleas este procedimiento?					X					
4	2	¿Alguna vez te has fijado en el significado de estas garantías o beneficios que ofrecen en tiendas o supermercados?										X
4	2	¿Es posible responder a lo que se pide, con la información presentada? ¿Qué información falta, ó qué datos necesitaste para llegar a la respuesta?			X							
4	2	¿Qué conceptos involucra este problema?		X								
4	3	¿Cuál estrategia consideras que es la adecuada para solucionar el problema?					X					

4	3	¿Cómo sabes que tu respuesta es la adecuada?							X			
5	1	¿La gráfica te permite determinar si dos magnitudes son proporcionales?			X							
5	1	¿Qué elementos te brinda la gráfica y cuáles le faltan para determinar proporcionalidad entre magnitudes?			X							
5	2 y 3	¿Qué dificultades encontraste en la solución de los problemas propuestos?		X								
5	2 y 3	¿Las tablas te dan información suficiente para solucionar el problema?			X							
5	2 y 3	¿Con la información suministrada puedes solucionar los problemas?	X									

**Tabla 20: Batería de preguntas para la entrevista**

## **Anexo D: Rastreo de investigaciones recientes en torno a la proporcionalidad (RIRP)**

### ***RASTREO DE INVESTIGACIONES RECIENTES EN TORNO A LA PROPORCIONALIDAD***

A continuación se presentan algunas de las tesis que fueron rastreadas, para constituir posteriormente un antecedente del problema de investigación y que permitieron identificar la importancia que desempeña el razonamiento proporcional en estas y en cualquier investigación que se quiera elaborar al respecto.

***Investigación 1:*** *De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* escrita por Javier García García de la Universidad de Jaén en 2005 (España);

**Objeto de estudio:** Estudio de la relación de proporcionalidad y de las relaciones funcionales en la educación secundaria.

**Problema de investigación:** ¿Cómo conseguir que los alumnos elaboren por sí mismo estrategias de modelización no rutinarias de sistemas (extra-matemáticos)?

#### **Conclusiones**

El recorrido de estudio e investigación constituye una propuesta realizada desde la teoría antropológica de lo didáctico para abordar el fenómeno de la desarticulación del estudio de las relaciones entre magnitudes, usando como herramienta la reformulación de los procesos de modelización.

**Investigación 2:** *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* escrita por Jesús Cañizares Castellanos en Granada en 1997(España);

**Objeto de estudio:** Estudiar a profundidad, algunas de las dificultades relacionadas con el razonamiento probabilístico.

**Problema de investigación:** Realizar una exploración y evaluación de las *intuiciones probabilísticas primarias* en los escolares de 10 a 14 años.

**Conclusiones:**

Una de las conclusiones acerca de uno de los objetivos que se fijó en el trabajo fue evaluar las intuiciones probabilísticas de los alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años, sobre un amplio conjunto de conceptos probabilísticos elementales. El estudio, realizado sobre la primera muestra experimental mediante el cuestionario de Green (1982), proporciona una información valiosa sobre estas intuiciones que permitirá orientar el trabajo de los profesores encargados de introducir la probabilidad en los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Estos resultados, que fueron comparados con las respuestas obtenidas por Green (1982), y el estudio comparativo sobre la misma muestra de alumnos del instrumento de Green y el de Fischbein y Gazit (1984) proporcionan importantes aportaciones sobre el razonamiento probabilístico de los alumnos. Permiten también contextualizar las peculiaridades de las intuiciones de nuestros escolares respecto a los resultados obtenidos en otras investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico.

**Investigación 3:** *La razón en semejanza: el caso del perrito* escrita por Bernardo Gómez Alfonso. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia;

**Objeto de estudio:** La construcción de conceptos matemáticos.

**Problema de investigación:** Estudio sobre razón y proporción, realizado mediante el análisis de las respuestas de estudiantes de distintos niveles educativos a un cuestionario de tareas específicas de esta temática. En particular, se describen las dificultades de comprensión de la razón en semejanza a partir del análisis de la tarea denominada “el perrito”.

**Conclusiones:**

Cuando tienen que cambiar el tamaño de una figura rectilínea formada por rectángulos, como se les pide en la tarea del perrito, muchos estudiantes consideran que no es necesario conservar la forma.

Esto es coherente con algunas de las conclusiones del estudio sobre razón y proporción del CSMS (Hart, Brown y Küchman, 1981)) con estudiantes de secundaria: “al aumentar figuras existe el peligro de que el niño esté tan concentrado en el método que ha de utilizar que ignore el hecho de que las figuras resultantes tienen que tener la misma forma que la original. Cuando el aumento implica dibujar figuras, los niños son muy a menudo incapaces de comparar la forma de la nueva figura con la del original y producen figuras que muestran considerable desemejanza” (p. 103).

Lo que ha evidenciado este estudio es que este comportamiento persiste con estudiantes de los niveles educativos superiores.

***Investigación 4:*** *Los apuntes: más allá de la letra y el papel* escrito por Claudia Baraja en la revista<sup>45</sup>, artículo en el cual quiso responder la pregunta: ¿Cómo el sentido que los apuntes tienen en la metodología de enseñanza influye en la construcción del concepto Proporcionalidad de los estudiantes de séptimo grado?

**Objeto de estudio:** Los apuntes en la metodología de la enseñanza.

**Problema de investigación:** ¿Cómo el sentido que los apuntes tienen en la metodología de enseñanza influye en la construcción del concepto Proporcionalidad de los estudiantes de séptimo grado?

## **Conclusiones**

Al ser focalizados los apuntes en clase desde una perspectiva diferente al dictado-copiado, se condujo a los estudiantes a desarrollar y desplegar habilidades lecto-escritoras que incluyen los procesos psicológicos básicos que se ubican dentro de los procesos cognitivos centrales del ser humano que permiten lograr el conocimiento los cuales van desde la sensación, la percepción, la atención, la memoria y la motivación hasta poner en marcha los operadores mentales que transforman la información que está en el contenido del pensamiento en un nuevo conocimiento a través del análisis, la síntesis, la abstracción, la comparación, la generalización, la racionalización y la conceptualización, todos estos actuando en pro de la formación de los conceptos lo que resulta acorde con lo propuesto en los Lineamientos. Así, los estudiantes que participaron en la investigación mostraron un fuerte avance en torno a dos aspectos importantes: uno, el desarrollo de su pensamiento cuantitativo a partir del pensamiento cualitativo sobre la razón y la proporción; dos, la carta de sentidos que le dieron al empleo de los algoritmos. Además evidenciaron en la resolución de problemas la fuerza que tuvo el dato perceptual y el apoyo en su experiencia para dar solución a las situaciones problema lo cual incidió significativamente en el desarrollo alcanzado en el razonamiento proporcional.

---

<sup>45</sup>ASOCOLME, tomado de [www.asocolme.com/ata/article.php3?id\\_article=7](http://www.asocolme.com/ata/article.php3?id_article=7)

Estas investigaciones tienen que ver con el razonamiento proporcional y lo enmarcan desde diferentes conceptos matemáticos, además se encontró una tesis acerca de las explicaciones que dan los estudiantes de grado séptimo al resolver problemas relacionados con la proporcionalidad:

**Investigación 5:** *El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencias curriculares. Escrita por* David Ben-Chaim, James Fey, William Fitzgerald, Catherine Benedetto y Jane Miller.(1998, *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 247-273).

**Objeto de estudio:** El razonamiento proporcional en diferentes experiencias curriculares.

**Problema de investigación:** Describir el carácter y la efectividad del razonamiento proporcional en alumnos con diferentes experiencias curriculares, frente a problemas de razón.

## **Conclusiones**

El propósito de este estudio fue comparar el razonamiento proporcional de alumnos de 7º grado con dos tipos bastante diferentes de experiencias curriculares (CMP reforma curricular y currículo tradicional). En particular, este informe se ha focalizado en la comparación numérica y en problemas de proporcionalidad donde falta un valor, con diferentes contextos y estructuras numéricas. Ambos grupos fueron evaluados a través de un examen escrito sobre problemas de razón. A continuación el 25% de cada muestra fue entrevistada para explorar su pensamiento en la prueba escrita y realizar algunas preguntas sobre proporcionalidad que incluían sólo datos numéricos sin contexto. Los autores de este informe reconocen la limitación al tratar sólo con los resultados de los problemas de razón, sin considerar el amplio repertorio de la proporcionalidad que incluye escala y otras pruebas sobre razón. Los resultados demuestran que

los alumnos de la reforma, además de estar su desempeño por arriba de los alumnos del grupo control, fueron capaces de dar explicaciones escritas y orales de buena calidad acerca de su trabajo.

Por supuesto, se puede ver los resultados y concluir que ambos, alumnos de la reforma y del currículo tradicional, tienen un largo camino por recorrer hasta lograr dominar las estrategias y habilidades básicas del razonamiento proporcional. De acuerdo con los resultados, un considerable porcentaje de alumnos de ambos grupos dio respuestas incorrectas, cerca de un 15% de todas las respuestas fueron clasificadas como “respuesta correcta con justificación incorrecta”, y el mismo porcentaje como “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. Estas respuestas deberían alentarnos a interpretar con cuidado los resultados: algunos alumnos tienen un conocimiento basado en un razonamiento incorrecto mientras que otros tienen ideas buenas pero no tienen habilidad para completar su razonamiento.

En esta investigación se presentaron problemas contextualizados que envuelven números racionales y razonamiento proporcional a estudiantes de séptimo grado 7° con diferentes experiencias curriculares. Hay fuerte evidencia que los estudiantes en la reforma curricular, quienes son estimulados a construir sus propios conceptos y procedimientos de proporcionalidad a través de trabajo colaborativo de resolución de problemas, tuvieron un desempeño superior a los estudiantes con un enfoque tradicional de enseñanza dirigida por el docente. Los estudiantes de séptimo grado (7°) que estudian el nuevo currículo desarrollan su propio repertorio de herramientas útiles que los ayudan a producir soluciones y explicaciones creativas. Esto se demostró por medio del análisis de las estrategias de solución aplicadas por estudiantes a una variedad de problemas de proporcionalidad.

La tesis referida se acerca a este trabajo de investigación porque involucra explicaciones de problemas contextualizados en razonamiento y se preocupa por

los razonamientos de los estudiantes; se hace un énfasis menor en que sean problemas de proporcionalidad directa simple, por lo anterior se considera que este trabajo es pertinente, ya que en el contexto de colegios colombianos vemos como estudiantes de los primeros años de la secundaria presentan aprietos al enfrentarse con problemas de proporcionalidad.

## **Anexo E: Veracidad de los resultados expuestos (VRE)**

### **FORMATO CON RESPECTO A LA VERACIDAD DE LOS RESULTADOS EXPUESTOS**



Medellín

Octubre de 2011

Estudiantes participantes de la investigación:

Tras haber expuesto el trabajo de investigación, en cuya realización ustedes facilitaron información valiosa, es fundamental que expresen su punto de vista respecto del trabajo presentado. Apreciamos que manifiesten su conformidad o desacuerdo frente a la interpretación de la información que acabamos de exponer.

Observaciones al respecto: