



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1803

Facultad de Educación

**PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN COMO
PRODUCTO DE MEDIDA, A TRAVÉS DE TAREAS DE AULA**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica con
Énfasis en Matemáticas**

**YEFERSON MANRIQUE ARANGO
JESSICA JULIET RAMIREZ GARCIA**

Asesora

OLGA EMILIA BOTERO HERNÁNDEZ

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN COMO PRODUCTO DE MEDIDA, A TRAVÉS DE TAREAS DE AULA



Trabajo presentado para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

**YEFERSON MANRIQUE ARANGO
JESSICA JULIET RAMIREZ GARCIA**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS**

MEDELLÍN

2015

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	7
INTRODUCCIÓN.....	9
1. PRIMERA PARTE	
1.1. CARACTERIZACIÓN.....	13
1.2. PLANTEAMIENTO Y PROBLEMA.....	14
1.2.1. PRUEBAS SABER	17
1.2.2. EL CENTRO DE PRÁCTICA.....	20
1.2.3. ANTECEDENTES.....	26
1.2.4. ACOTACIÓN DEL PROBLEMA.....	32
1.3. PREGUNTAS ORIENTADORAS.....	35
1.4. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	36
1.5. OBJETIVOS.....	36
1.5.1. GENERAL:.....	36
1.5.1.1. ESPECÍFICOS:.....	36
2. SEGUNDA PARTE	
2.1. MARCO TEÓRICO.....	37
2.1.1. ENFOQUE SOCIOCULTURAL.....	38
2.1.2. TEORÍA DE LA ACTIVIDAD.....	40
2.1.3. TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN.....	41
2.1.4. MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN.....	46
2.2. MULTIPLICACIÓN: PRODUCTO DE MEDIDA.....	49

3. TERCERA PARTE

3.1. DISEÑO METODOLÓGICO.....53

3.2. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES.....58

4. CUARTA PARTE: ANÁLISIS

4.1. TRIANGULACIÓN.....59

4.2. ANÁLISIS DE LAS TAREAS.....61

4.2.1. Tarea de indagación N°1.....64

4.2.2. Tarea N°2.....72

4.2.3. Tarea N°3.....87

5. QUINTA PARTE: CONCLUSIONES.....100

6. BIBLIOGRAFÍA.....105

7. ANEXOS.....110

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Índice de figuras

<i>Figura 1.</i> Resultado que un estudiante da al resolver la prueba saber.....	19
<i>Figura 2.</i> Resultado que un estudiante da al resolver la prueba saber.....	20
<i>Figura 3.</i> Resultado que da un estudiante a la tarea.....	22
<i>Figura 4.</i> Resultado que un estudiante da una tarea.....	24
<i>Figura 5.</i> Multiplicación egipcia.....	26
<i>Figura 6.</i> Multiplicación Musulmana.....	27
<i>Figura 7.</i> Cuadro representativo.....	41
<i>Figura 8.</i> Isomorfismo de medida.....	51
<i>Figura 9.</i> Espacio único de medida.....	51
<i>Figura 10.</i> Producto de medida.....	51
<i>Figura 11.</i> Tabla delimitación de tareas.	60
<i>Figura 12.</i> Tabla de convenciones para los análisis.....	62
<i>Figura 13.</i> Señalamientos realizados por Fernando.....	66
<i>Figura 14.</i> Martín mostrando los conjuntos.....	68
<i>Figura 15.</i> Mezclas colores primarios y secundarios.....	73
<i>Figura 16.</i> Estudiante mezclando pinturas.....	76
<i>Figura 17.</i> Mezcla de los colores encontrados por los estudiantes.....	78
<i>Figura 18.</i> Estudiantes encontrando nuevos colores.....	79
<i>Figura 19.</i> Registro realizado por los estudiantes.....	80

<i>Figura 20. Conteo con los dedos.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 21. Señalamientos de Jenni.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 22. Mezclas de colores primarios y secundarios.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 23. Gorros y accesorios para los disfraces.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 24. Interacción de los estudiantes con los elementos y con ellos mismos.....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 25. Fernando mostrando a sus compañeros como hacer las diferentes mezclas.....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 26. Fernando disfrazándose.....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 27. Estudiantes plasmaron un dibujo para verificar la tarea.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 28. Esquema de análisis.....</i>	<i>99</i>



DEDICATORIA

A nuestras familias por su apoyo, sacrificio y comprensión en nuestros momentos de ausencia

AGRADECIMIENTOS

Principalmente a Dios por darnos la posibilidad de vivir esta experiencia tan significativa.

A nuestra asesora la Magister Olga Botero, por ser nuestra guía en este largo caminar.

A la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, por permitirnos vivir la experiencia de educar, educarnos e investigar.

Y finalmente a todas aquellas personas que de una u otra forma se vincularon en este proceso investigativo.

RESUMEN

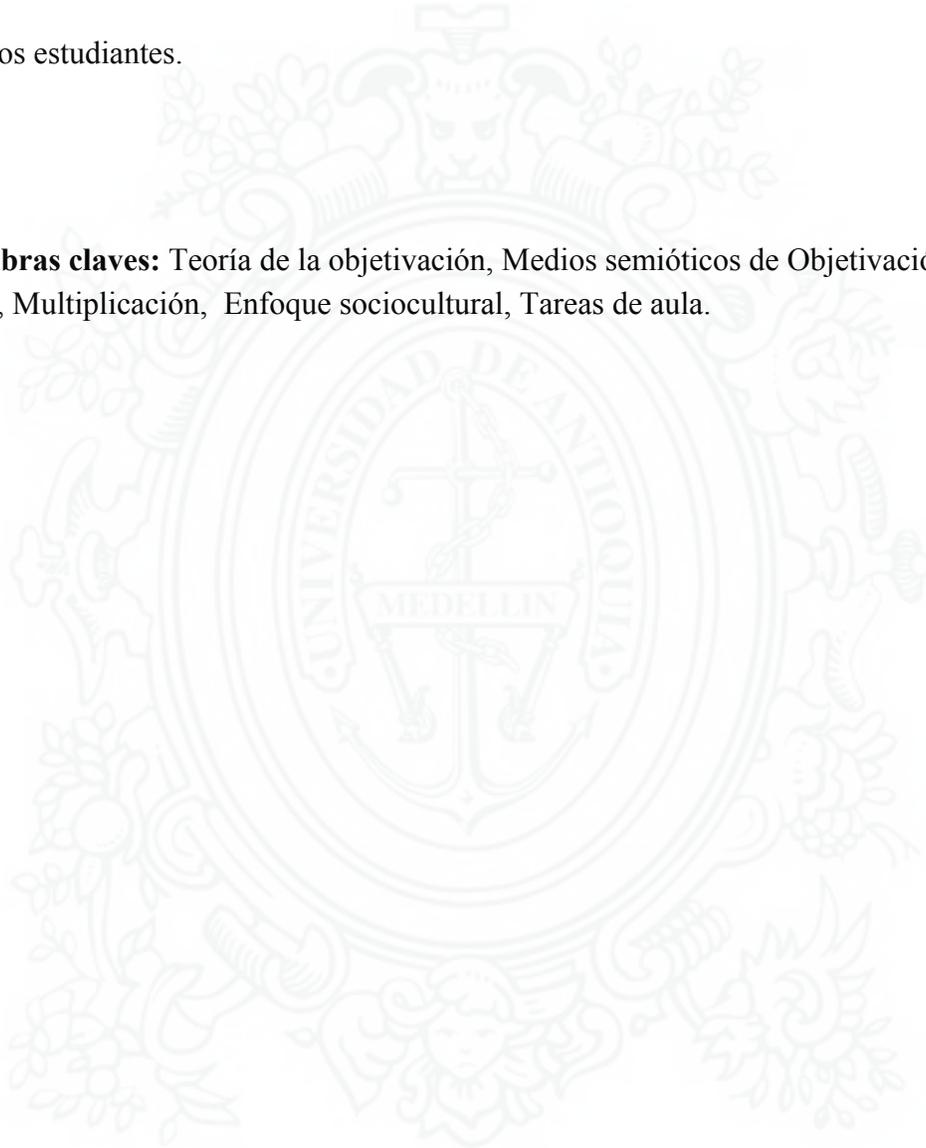
En este trabajo de investigación se procuró dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo son los procesos de objetivación de los estudiantes cuando resuelven tareas de aula relacionadas con el producto de medida?, para ello se presentó como objetivo de la investigación, analizar los procesos de objetivación de la multiplicación como producto de medida, desarrollados por estudiantes de grado tercero cuando resuelven tareas de aula a partir de la relación discreto-discreto, para ello entonces se consideró oportuno recurrir a analizar los medios semióticos de objetivación que emergieron en medio de la solución de las tareas, para ello entonces nos fundamentamos en los constructos teóricos de la teoría de la objetivación.

Esta investigación se llevó a cabo en la institución educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas ubicada en el municipio de Bello, con estudiantes del grado tercero. Recurrimos a un paradigma cualitativo para abordar la investigación de acuerdo a los planteamientos realizados por Sandoval (1996) y teniendo en cuenta el estudio de casos de Stake (1998).

A partir de los resultados obtenidos en esta investigación, evidenciamos como el diseño de tareas de aula, en las cuales haya un objeto/motivo para el docente y para el estudiante respectivamente, da cuenta de la emergencia de medios semióticos de objetivación que

conllevaron a tomas de conciencia crítica y activa de la multiplicación como producto de medida en los estudiantes.

Palabras claves: Teoría de la objetivación, Medios semióticos de Objetivación, Producto de medida, Multiplicación, Enfoque sociocultural, Tareas de aula.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

INTRODUCCIÓN

Desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas se plantea que la formación de maestros debe propender por formar educadores íntegros que posean ciertas cualidades entre las que se destaca la profesionalización, la actualización, la innovación y la investigación. A partir de allí estos lineamientos plantean que:

La formación de maestros debe descansar no sólo sobre una base metodológica firme que garantice la obtención de la cobertura y calidad apropiada, sino que, ésta debe subyacer sobre una propuesta conceptual que permita a los maestros desplegar la educación que necesita la sociedad colombiana del nuevo milenio (p. 95).

En este sentido desde la Facultad de educación de la Universidad de Antioquia se apuesta por la formación de maestros que reúnan una serie de cualidades las cuales están altamente vinculados con los planteamientos realizados por estos lineamientos, en ella se rescata al maestro como investigador y para dar cumplimiento a ello se posibilita un espacio de práctica pedagógica desde donde surge el problema de investigación que movilizó el siguiente trabajo de investigación.

Esta práctica pedagógica se realizó en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas (Sección 3), donde se tuvo la oportunidad de vivir experiencias con los

estudiantes y con los maestros cooperadores, experiencias relacionadas con la observación de clases llevadas a cabo por los maestros, con clases orientadas por nosotros los investigadores, revisión de pruebas hechas por los maestros cooperadores y otros elementos que de cierta forma posibilitaron consolidar el presente trabajo de investigación. En la primera etapa del proceso de práctica pedagógica la cual consistió en la observación de las clases dirigidas por estos maestros específicamente del área matemáticas, donde se tuvo en cuenta además las pruebas SABER del año 2012.

En la segunda etapa del proceso de práctica pedagógica, a partir de la experiencia vivida se empezó a identificar una problemática referente a la multiplicación y fue este el objeto matemático sobre el cual se fundamentó este trabajo investigativo, allí se observó que los estudiantes aún no le dan sentido y significado a la misma y que además la enseñanza ha sido abordada desde la suma reiterada, teniendo como propósito para los maestros la ejercitación y dominio del algoritmo de la operación, es por esto que se realizó una serie de intervenciones con los estudiantes en donde se propusieron unas tareas para trabajar en grupos pequeños dentro del aula de clase, dichas tareas tenían como fin apoyar los contenidos trabajados por los maestros cooperadores y permitirle a los estudiantes un mejor acercamiento a las matemáticas. Finalmente en la última etapa de la práctica pedagógica se realizaron una serie de tareas de aula que fueron de gran peso en este trabajo investigativo.

Muchos teóricos han descrito distintas formas en que se puede abordar la multiplicación, en este trabajo se ha determinado abordarla a partir del producto de medida,

como uno de los diversos problemas de tipo multiplicativo que se conocen en la actualidad, Vergnaud (1991). A consideración nuestra, es oportuno abordarla desde el producto de medida, ya que por una parte este tipo de problemas de carácter multiplicativo permiten un acercamiento a la multiplicación distinta a la realizada en el aula de clase, donde la multiplicación fue abordada como una suma reiterada solamente y por otra parte son pocos los estudios que se han podido registrar en los cuales se da cuenta la manera como el producto de medida a partir de la relación *producto discreto-discreto*¹, impacta o bien aporta en la comprensión o aprendizaje de la multiplicación. Es de suma importancia tener en cuenta que la multiplicación se puede ver desde distintas miradas y que no solo se puede enseñar a través de la suma reiterada de sumandos iguales, en este sentido asumiendo el rol de maestros se le debe posibilitar al estudiante una serie de elementos por medio de los cuales podrá apropiarse tanto del concepto como de la situación presentada.

La importancia de este trabajo investigativo radica entonces que a partir de los análisis que se realizaron se puede dar cuenta de las formas en que los estudiantes aprenden, de las manifestaciones que hacen para llegar al aprendizaje, de las distintas estrategias que los estudiantes usan al enfrentarse a ciertas tareas partiendo de sus conocimientos previos de igual forma este trabajo investigativo permite reconocer también el porqué de los razonamientos de los estudiantes. Por otra parte este trabajo investigativo le posibilita de cierta forma a la didáctica de las matemáticas, crear estrategias acordes a las formas en que los estudiantes abordan cada tarea propuesta. De acuerdo a la trascendencia del trabajo de

¹ Vergnaud (1991), *El niño las matemáticas y la realidad*.

investigación y de acuerdo a nuestros intereses, esta investigación se fundamentó desde una aproximación sociocultural, específicamente desde una perspectiva histórica-cultural abordada por Vygotsky enmarcada en la Teoría Cultural de la Objetivación (en adelante TCO) de (Radford. 2006, 2008, 2012, 2013, 2014) donde se vió necesario analizar los Medios Semióticos de Objetivación emergentes en las tareas llevadas a cabo y así mismo conocer los procesos de objetivación desencadenados a partir de allí.

El presente trabajo investigativo presenta la siguiente estructura; en la primera parte se presenta lo concerniente a la caracterización del centro de práctica donde se vivieron las múltiples experiencias, se presenta de igual forma el planteamiento del problema, antecedentes algunas preguntas que fueron surgiendo en nuestro caminar investigativo, el problema desentrañado y sus objetivos, en la segunda parte se presenta el Marco Teórico en el cual se fundamentó el trabajo investigativo; donde está el enfoque sociocultural, la perspectiva histórico cultural, la teoría de la objetivación, los medios semióticos de objetivación y lo concerniente a la multiplicación. En la tercera parte la metodología empleada, en la cuarta parte los análisis respectivos a las tareas ejecutadas teniendo en cuenta los preceptos de los Medios Semióticos de Objetivación y finalmente en la quinta y última parte se presentan las conclusiones que arrojó el estudio.

1. PRIMERA PARTE

1.1. CARACTERIZACIÓN

A continuación, se presenta la institución centro de práctica en la que se pudo vivenciar la práctica pedagógica y desde donde surgió el problema de investigación. Según lo planteado en el Proyecto Educativo Institucional (en adelante PEI) de acuerdo con la resolución departamental N° 15180 del 30 de octubre 2002, la escuela urbana de niñas Machado y la escuela de niños Fontidueño, se fusionan con la institución educativa Liceo Jaime Arango Rojas, conformando así la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas (IEFJAR) dividida en tres sedes.

Se habla entonces, únicamente de la sección 3, dado que es en este lugar donde se realizó la práctica. En cuanto a la infraestructura, la institución cuenta con ocho aulas de clase, un aula de apoyo, una sala de informática con su nombre “Ciber-machado”, un restaurante estudiantil, una biblioteca que a su vez es empleada como sala de profesores, una tienda, zona lúdica “kiosco” donde se imparte la clase de danzas, una cancha de microfútbol y de básquet, un parque de diversión que se conforma con una pequeña zona verde, baños (mujeres y hombres), una coordinación, corredores alrededor de las aulas y del patio de

recreo. La IEFJAR sección tres es de carácter mixto y el estrato socioeconómico de sus estudiantes 1 y 2, cuenta con dos jornadas académicas (mañana-tarde) brindando así niveles de educación que van desde preescolar hasta tercero.

Desde las clases de matemáticas teniendo en cuenta las observaciones, la multiplicación es vista en el aula de clase como una suma reiterada o repetitiva, donde no hay posibilidad para ver la multiplicación desde otras categorías o formas de abordarla, de igual forma se reconoce en el aula de clase que los estudiantes en ocasiones no le encuentra sentido a lo que se les está enseñando y es posible que la razón principal de esto, se deba a que los conocimientos matemáticos no son abordados a la luz de la realidad. En la misma línea desde el plan de área para el área de matemáticas se puede ver claramente que la multiplicación se debe abordar como una suma reiterada de sumandos iguales.

1.2. PLANTEAMIENTO Y PROBLEMA

En la educación actual, el Ministerio de Educación Nacional (en adelante MEN), plasma en sus documentos oficiales bases que se deben tener en cuenta a la hora de trabajar las matemáticas en el aula de clase, las cuales están orientadas a contribuir de manera más efectiva a los requerimientos de la educación actual y por ende a los requerimientos de la sociedad del hoy. En dichos planteamientos se reflexiona acerca de la necesidad de

transformar las prácticas educativas matemáticas para llegar a otras que posibiliten la conceptualización, la comprensión y el desarrollo de competencias que le permitan a los estudiantes desenvolverse en la sociedad de la mejor manera posible (MEN, 1998).

Se propone así una nueva forma de educar a los estudiantes, de manera tal que se dé una comprensión de los conceptos donde se puedan generar espacios de motivación, ya que en cuanto al entorno cultural se reconoce la importancia de utilizar las matemáticas, para ampliar el conocimiento matemático. Desde acá, parte el interés de generar en el aula de clase diversos ambientes donde el estudiante se posicione y enfrente nuevos conocimientos y saberes que le permitirán desenvolverse de una mejor manera ante la sociedad.

A partir de esto, la facultad de educación de la Universidad de Antioquia, ha realizado grandes esfuerzos enfocados en hacer de la labor del maestro más cualificada en términos de las exigencias de la sociedad del hoy. A partir de esto la facultad se ha pensado un lugar donde el quehacer de los futuros maestros empiece a consolidarse con ciertas características esenciales y que estén vinculadas con los planteamientos hechos por el MEN, por tanto establecen la práctica pedagógica como eje que transversaliza la formación de los maestros, tanto en su carácter teórico como práctico y donde el contenido pedagógico cobra gran importancia en la producción del conocimiento.

Teniendo en cuenta la oportunidad brindada por la facultad de educación, siendo maestros en formación de ser partícipes de los procesos dentro del aula de clase, fue posible

llevar a cabo una investigación que diera cuenta de los procesos de los estudiantes en las instituciones educativas. Desde el proceso de práctica, como se mencionó anteriormente se realizó en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, se empezó a identificar una problemática en la enseñanza de las matemáticas, particularmente en la enseñanza de la multiplicación, dado que era uno de los temas que más se aborda en el aula de clase para el grado tercero.

A partir de lo que se iba vivenciando en el primer semestre de práctica, el cual fue de observación de las clases dirigidas por los maestros cooperadores², se vió la necesidad de recurrir a tres elementos que fueron fundamentales en la consolidación del problema de investigación, el primero de estos es desde los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas SABER del año 2012, donde se realizó un análisis exhaustivo de las mismas, como segundo elemento se consideró lo realizado en el centro de práctica por los profesores cooperadores, por los investigadores y por último se hizo un rastreo de los distintos trabajos investigativos que han trabajado la multiplicación y de igual forma se contrastó la realidad vivida en el establecimiento educativo con lo que está planteado en los documentos rectores, es decir desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

² Maestro cooperador: Término usado en este trabajo para referirse a los maestros de la institución que nos posibilitaron el espacio de clase para vivir nuestra experiencia como maestros investigadores.

1.2.1. PRUEBAS SABER

Desde las primeras visitas al centro de práctica, se consideró oportuno recurrir a los resultados de las pruebas SABER de la institución específicamente del grado tercero en el año 2012, dado que por una parte este era el grado al cual se asistía y por otra parte en aquel momento se tenía poca información sobre los niveles de conceptualización de los estudiantes en el área de matemáticas, es de igual forma importante reconocer que dicha prueba contiene aspectos importantes que de cierta manera conllevan a dar luces acerca de los conocimientos que poseen los estudiantes.

Desde las pruebas SABER y desde el análisis realizado a los resultados obtenidos por la institución, se evidenció que el establecimiento educativo en comparación con el municipio (Bello), el departamento (Antioquia), y el país (Colombia), presenta un resultado “positivo” en el área de matemáticas, en la medida en que el 61% de los estudiantes se encuentra en un nivel satisfactorio y avanzado, niveles en los cuales según el mismo ICFES, todos los estudiantes deberían ubicarse. Es importante tener en cuenta así que en dicha prueba se realizó una evaluación en lenguaje y matemáticas por competencias, entre las que están comunicación, representación y modelación, planteamiento y resolución de problemas, de acuerdo a esto se evidenció que tres fueron los componentes evaluados en el área de matemáticas de una manera agrupada, los cuales son:

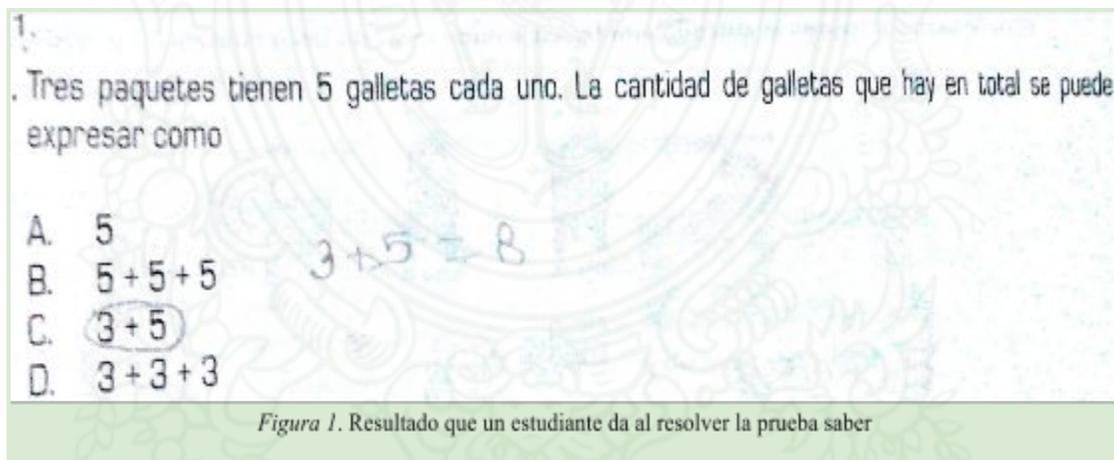
- Numérico-Variacional
- Geométrico-Métrico
- Aleatorio

Dentro de los tres componentes evaluados se centró la mirada en el primero de estos, el numérico-variacional, dado que desde el centro de práctica, en aquel momento el pensamiento numérico fue el componente que tomó más fuerza durante todo el año lectivo, correspondiendo así al plan de área, lo cual fue corroborado por nosotros durante el proceso de práctica. En correspondencia con ello, se evidenció además que el tema que más se trabajaba en el aula de clase es el de la multiplicación.

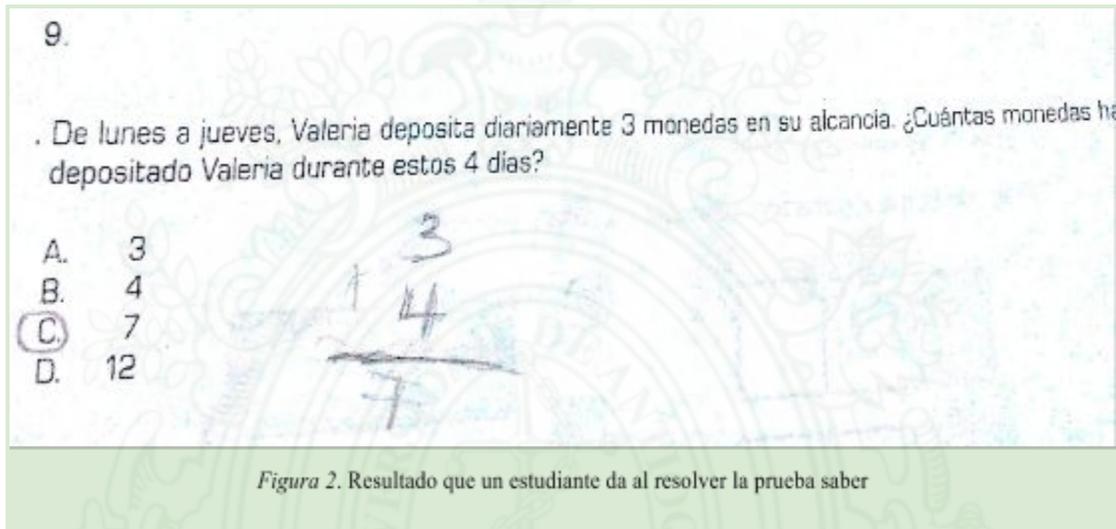
Teniendo en cuenta esto, se vió en la necesidad de analizar las preguntas realizadas en las pruebas SABER en aquel momento, para después replicar algunas de estas preguntas con los estudiantes, con el fin de observar en primera instancia las formas cómo los estudiantes del grado tercero llevaban a cabo dichas tareas. En dicha prueba se identificaron 14 preguntas correspondientes al pensamiento numérico y variacional, de las cuales 3 estaban enfocadas a la multiplicación, de acuerdo con esto, se les presentó a los estudiantes una serie de preguntas relacionadas con el pensamiento numérico específicamente en el campo de la multiplicación, las cuales fueron tomadas textualmente para que los estudiantes las desarrollaran de manera individual y se evidenció así que los estudiantes no comprendían los enunciados propuestos, al parecer por la poca relación que habían tenido con este tipo de enunciados desde sus clase

de matemáticas. Surgían preguntas por parte de los estudiantes, relacionadas con “*qué debo hacer en este problema*”, refiriéndose específicamente a qué operación realizar o utilizar en dicho proceso; así mismo los estudiantes en su gran mayoría respondieron usando operaciones distintas a la multiplicación, donde sin lugar a dudas el algoritmo de la adición al parecer fue su herramienta más importante para dar sus respuesta, sin embargo, la respuesta dada por los estudiantes en general no era la correspondiente al planteamiento realizado.

Estos son algunos registros de lo realizado por los estudiante cuando resolvían los enunciados propuestos.



En el planteamiento el estudiante lo que hace es acudir a la suma de las cantidades dadas en el enunciado, cuando en realidad lo planteado se refería específicamente a una multiplicación, esto fue algo que se vivencio con la mayoría de los estudiantes.



En el registro es nuevamente evidente que los estudiantes acuden a la adición desde lo algorítmico lo cual empezó a dar rutas de los conocimientos que aún no habían logrado desarrollar los estudiantes y de igual forma posibilitó reflexionar acerca de las formas en que se trabajan los contenidos matemáticos en el aula de clase.

1.2.2. EL CENTRO DE PRÁCTICA

Por otra parte además del análisis realizado a las pruebas SABER, otras experiencias vividas en la institución permitieron refinar el problema de investigación, dentro de estas experiencias se encuentra lo concerniente la observación que se realizó a las clases dadas por los maestros cooperadores en el grado tercero, revisión de exámenes propuestos por los maestros cooperadores o bien por tareas que nosotros los docentes en formación llevábamos

para trabajar con los estudiantes, es importante tener en cuenta acá que dichas tareas eran previamente discutidas con la asesora del proyecto de investigación a la luz de la pertinencia de las mismas, las cuales eran ejecutadas posteriormente en las visitas realizadas, estas tareas giraban en torno a la multiplicación o en relación con los requerimientos de los maestros cooperadores. Es importante reconocer que a partir de las observaciones a las clases dadas por los maestros cooperadores y a partir de las revisiones de los exámenes en las clases cuando se abordó la multiplicación, se evidenció que esta era interpretada únicamente como una suma de sumandos iguales, y esto según Fernández (2007) es arriesgar la comprensión del concepto desde sus orígenes. Este autor plantea que cuando esto se da al interior del aula de clase representa una dificultad en la comprensión del concepto. Fernández (2007) afirma que:

Nos encontramos con una seria dificultad didáctica respecto a la comprensión del concepto, cuando decimos que una multiplicación es una suma de sumandos iguales, ya que, no solo estamos diciéndole al niño que la multiplicación es <<eso>>, sino que todo lo que no sea <<eso>>, no vale como multiplicación. (p. 121)

En concordancia con estos planteamientos realizados por el autor, esta forma de interpretar la multiplicación si bien es válida en ciertos casos, es necesario ser rigurosos en cuanto a la forma en que es llevada al aula de clase, ya que esto aleja la posibilidad de que el alumno esté consciente de su pensamiento relacional. A partir de esto se vió necesario diseñar y ejecutar tareas con los estudiantes las cuales contribuyeron a identificar plenamente qué conocimientos o acercamientos tenían los estudiantes respecto a la multiplicación. Entre

las múltiples tareas que se diseñaron queremos mostrar una de ellas, los enunciados que a continuación se presenta hacen parte de una de las tareas y fue propuesto a un grupo de estudiantes, del grado tercero de la IEFJAR, para llevar a cabo en las sesiones de clase..

Enunciado: *En un salón de clase hay 5 filas y 8 columnas de sillas, se necesita identificar cuántos son los estudiantes que tiene el salón para entregar los refrigerios. El total de niños que hay en el salón es de ____*

A continuación se presenta una imagen de lo que algunos de los estudiantes respondieron de acuerdo al enunciado presentado

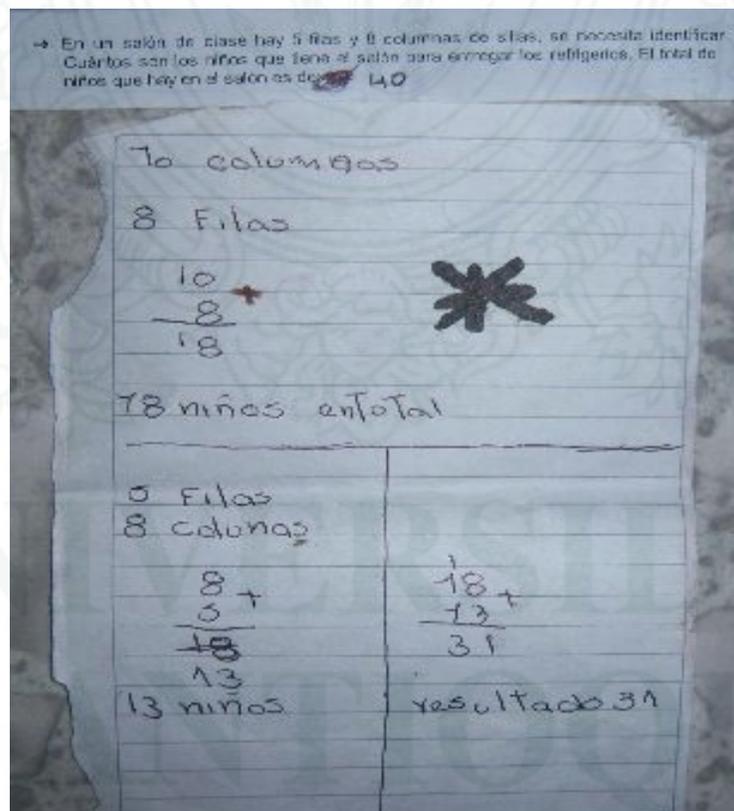


Figura 3. Resultado que da un estudiante a la tarea

En la *figura 3*, los estudiantes lo que hacen para dar respuesta al enunciado propuesto es una serie de sumas, sin saber si realmente correspondía a la respuesta que se le pedía inicialmente, los estudiantes duplican el número 5, según ellos lo necesitaban para dar respuesta a lo que se pedía en el enunciado planteado, posteriormente le sumaron las 8 columnas de sillas. Seguidamente, adicionan los valores que se le dan (5 filas y 8 columnas), para después con los valores hallados dar el resultado, a partir de una adición.

Es evidente, que a partir de un primer análisis, los estudiantes ante una tarea que requiere el uso de una operación, en este caso, el uso de la multiplicación lo que hacen es operar bajo la adición, quizás la razón está dada porque el algoritmo es lo más recurrente en los procesos de enseñanza desde el grado primero hasta el grado tercero, enfocado hacia las sumas reiteradas como única forma de llegar a la multiplicación, lo cual según Vergnaud (1991) es tan solo uno de los distintos problemas de tipo multiplicativo que se conocen referente a la multiplicación.

En otro enunciado propuesto a los estudiantes se les planteó lo siguiente:

En un parque de diversiones, hay distintas atracciones pero para hacer uso de ellas es necesario adquirir una tarjeta recargable que funciona como la cívica. A la señora que vende las recargas alguna vez una cliente le preguntó. ¿Cuánto debo cargar para que mi hijo juegue en el playground? , la señora que vende las recargas manifestó que esta

atracción tiene un costo de \$2250, la cliente preguntó ¿Cuánto debo recargar para que mi hijo juegue 6 veces en el playground?. Realiza el procedimiento.

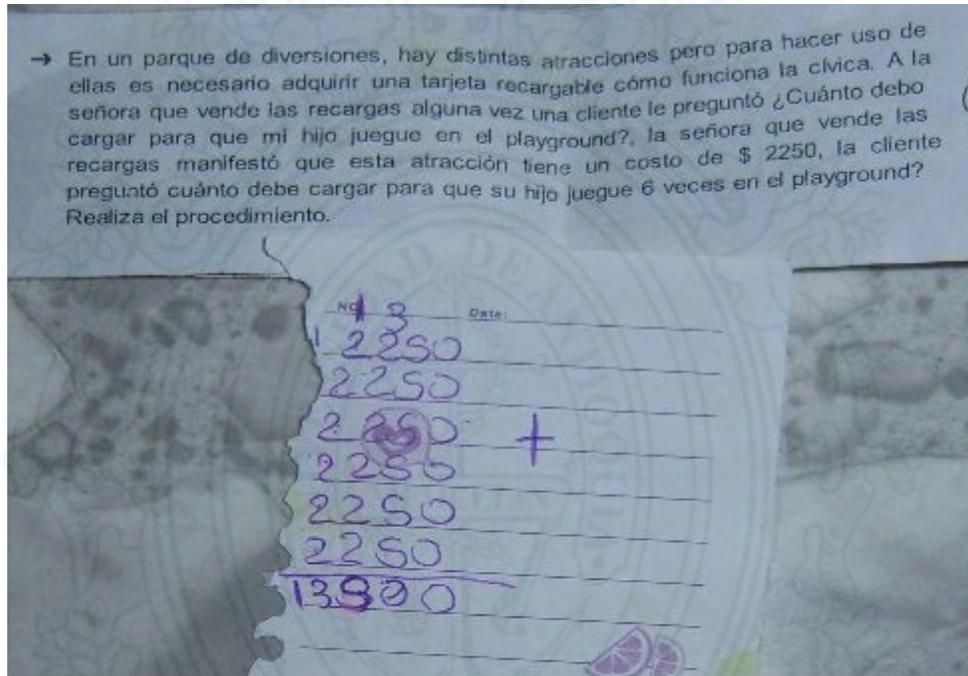


Figura 4. Resultado que un estudiante da una tarea

En la *figura 4*, se da cuenta de cómo los estudiantes a la hora de resolver una situación donde se hace necesario utilizar la multiplicación, usan la suma reiterada para dar respuesta a la pregunta inicial, allí la interpretación por parte de los estudiantes muestra que comprenden el planteamiento hecho en el ejercicio pero el único medio que usan para dar respuesta a este tipo de tareas es la adición, dejando ver así que la multiplicación aún no tiene cabida en sus pensamientos. Acá los estudiantes llegaron al resultado de la situación, y esto por medio de la suma reiterada. Por esto, es importante tener en cuenta como se ha venido mencionando que a la luz de la teoría, si bien es válido abordar con los estudiantes la multiplicación como una suma reiterada, abordarla sólo desde aquí puede generar en los estudiantes dificultades para

desarrollar tareas como las que se han referenciado anteriormente, de ahí radica la importancia de abordar la multiplicación desde los distintos modos de hacerlo, al mismo tiempo que puedan aprender a interpretar y a desarrollar las tareas con mayor facilidad.

Finalmente, frente a este tipo de enunciados o problemas, los niños en general emplearon diversas estrategias aditivas, que en la mayoría de veces no les permitía dar respuestas coherentes al planteamiento dado, donde aparecen sumandos y por ende las relaciones que se establecen son netamente de tipo aditivo sin lograr en muchos casos darle solución al problema planteado inicialmente.

A partir de allí, estamos convencidos de la necesidad de que los estudiantes no solo vean la multiplicación como suma reiterada, sino que también puedan verla a partir de otro tipo de problemas multiplicativos en los que se hagan explícitas diferentes relaciones en cuanto a las magnitudes involucradas y así poder llegar a darle significado a la multiplicación, de acuerdo con esto se consideró oportuno hacer un reconocimiento de los trabajos concernientes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la multiplicación, teniendo en cuenta diferentes momentos históricos.

1.2.3. ANTECEDENTES

Históricamente la multiplicación ha sido importante para distintas civilizaciones, en el caso de los Egipcios, que fueron quizás los primeros en hacer uso como tal de ella, se usaba una técnica de duplicación, Hernández & Ojeda (2014) dan un ejemplo de ello:

80	1		83	1
160	2		166	2
320	4		332	4
640	8		664	8

- Resultado 80×14 : $160 + 320 + 640 = 1120$ (ya que $14 = 2 + 4 + 8$).
- Resultado 83×13 : $83 + 332 + 664 = 1079$ (ya que $13 = 1 + 4 + 8$).

Figura 5. Multiplicación egipcia

En dicho ejemplo se evidencia lo particular y una de las múltiples formas en que se puede operar el objeto matemático multiplicación, de igual forma los musulmanes también tenían su propia forma de multiplicar, que es sin duda muy similar a la que se usa en nuestra sociedad hoy, estos hacen uso de diagonales.

1 8 0 3

Este método consiste en hacer una tabla con tantas filas como números tenga el primer factor, y lo ponemos de abajo arriba, y tantas columnas como tenga el segundo factor. Además, partimos por la mitad cada cuadrado resultante como se muestra en la figura. Se multiplica en cada cuadro el valor de su fila por el valor de su columna, donde la parte izquierda son las decenas y la parte derecha las unidades, y se escribe el resultado. Después sumamos las diagonales que se han formado, desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda. (Hernández & Ojeda, 2014, p. 10)

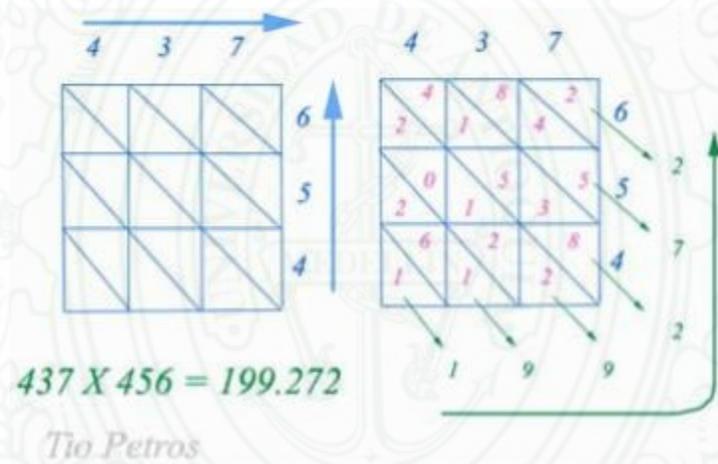


Figura 6. Multiplicación Musulmana.
Imagen recuperada de: <http://tiopetrus.blogia.com/upload/multiarab.jpg>

Así como los Musulmanes y los Chinos, Muchas otras civilizaciones usaron sus propias formas para abordar la multiplicación y a partir de esto es importante entonces reconocer que todo objeto matemático tiene una carga cultural e histórica, tal cual como en el caso de la multiplicación, y desde aquí es necesario reconocer la complejidad del objeto matemático.

Fishbein (1985 y 1987), desde su teoría de la intuición y desde los modelos intuitivos, muestra como el abordaje de la multiplicación representa serias repercusiones en el aprendizaje

de los estudiantes. en concordancia con esto Mora, L; Romero, J; Rojas, P; Rodríguez, J; Castillo, E; Bonilla, M; & Sánchez, N (2006), refiriéndose a los planteamientos hechos por Fishbein (1985, 1987) sostiene que:

Una enseñanza de la multiplicación que la restrinja a suma reiterada, por lo tanto reducida sólo a la matematización de grupos iguales; a la memorización generalmente asociada a una generalización de uno más, de las tablas de multiplicar; y al uso de sus algoritmos de cálculo, hoy canónicos, desestimula el aprendizaje e impide el desarrollo del pensamiento matemático complejo en los niños. (p.122)

Posteriormente, Vergnaud (1991, 1993) desde su posición cognitivista y a partir de sus estudios crea la teoría de los campos conceptuales, donde se concibe la multiplicación dentro de un campo conceptual, la cual se relaciona a partir de múltiples categorías que muestran la polisemia de interpretaciones que se pueden dar a partir de ella, de acuerdo a los planteamientos realizados por Vergnaud (1991), se sostiene que “la estructura multiplicativa no puede y no conviene entenderla desde la estructura aditiva, es decir, que la multiplicación no es solamente una suma repetida, es más, esta concepción es limitante y generadora de obstáculos en el aprendizaje” (García & Suárez, 2010, p. 396).

Es importante mencionar a Maza (1991), que hace estudios considerables con respecto a la multiplicación y en correspondencia con los planteamientos realizados por Vergnaud, sostiene que la multiplicación es una operación binaria y por lo tanto no es recomendable entenderla únicamente como una suma reiterada, dado que esto limitaría el reconocimiento de otras relaciones

A partir de allí muchos autores han realizado investigaciones referentes a la multiplicación o bien al pensamiento multiplicativo, autores como Behr, Harel & Post (1992) y tantos otros como Confrey & Smith (1994), han hecho sus aportes frente a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. En la década de los 2000 también se tienen registro de distintos trabajos referentes a la multiplicación, como los de Botero (2006) con su tesis de maestría titulada *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación*, aborda la multiplicación a partir del isomorfismo de medida, recurriendo a situaciones de variación, es importante destacar que en dicha tesis se mencionan cuatro maneras distintas de recurrir a la multiplicación, refiriéndose a los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, se plantea que la multiplicación puede entenderse como:

- Factor multiplicante
- Razón
- Suma Reiterada de sumandos iguales
- Producto Cartesiano o bien producto de medida

Así mismo, otro trabajo de carácter investigativo titulado *Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas* (2010), se hizo un estudio de los procedimientos que realizaban ciertos estudiantes de grado quinto cuando resolvían problemas de carácter multiplicativo a partir de una estructura de isomorfismo de medida,

encontrando que el proceso de objetivación de los estudiantes, es generado por el pensamiento del mismo, dando lugar a la dotación de sentido donde la resolución de problemas se convirtió en el puente para llegar a esta dotación de sentidos y significados. De igual manera, otra tesis que se rastreó y que fue importante retomar en el trabajo investigativo, tiene como título *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional*, realizada por Torres (2013). Esta tesis hace un estudio a partir de relaciones funcionales, encontrando entre otras conclusiones, que en el pensamiento multiplicativo de los estudiantes se debe tener en cuenta las forma de acción cuando emerge un concepto matemático, así mismo se pone de manifiesto que en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, contribuye en el estudiante a la constitución del concepto de multiplicación

Además, se rastreó una tesis de maestría de Mojica titulada *Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo* (2014), donde se realiza una investigación acerca de la forma de pensamiento de los estudiantes en torno a la multiplicación, enfocando su análisis en los medios semióticos de la objetivación, de la cual se concluyó entre otras cosas que a partir de los procesos de objetivación se puede lograr elaborar diversos significados en torno a la multiplicación. De este trabajo, se pudo hacer un rastreo más profundo acerca de cómo algunos estudiantes ven la multiplicación en grados superiores a tercero, específicamente en el grado sexto.

A partir de estos antecedentes y considerando que la multiplicación es un campo amplio en el cual se han realizado diversas investigaciones y que sin embargo aún queda mucho por explorar, se ha considerado necesario darle importancia a otro tipo de problema multiplicativo de acuerdo a los planteamientos realizados por Vergnaud (1991. 1993), en esta oportunidad nuestro interés se centró en el producto de medida, dado que desde nuestras búsquedas no encontramos registros que den cuenta de qué moviliza en los estudiantes este tipo de problema multiplicativo, además porque consideramos que mediante esta aproximación, es posible para los niños utilizar otras representaciones de la multiplicación, diferentes a la suma reiterada, como los arreglos rectangulares, los conteos sucesivos y los diagramas de árbol, permitiéndoles así asociar la multiplicación a una mayor cantidad de situaciones cotidianas, para evidenciar entonces la forma en que los estudiantes se aproximan a la multiplicación, se realizó un análisis que da cuenta de las interpretaciones, manifestaciones y significados que los estudiantes dan a determinadas tareas de aula que involucran el producto de medida, puesto que les permitirá realizar tareas de su entorno con mayor facilidad y a partir de allí reconocer la trascendencia de este tipo de problemas multiplicativos en el aprendizaje de los estudiantes.

1.2.4. ACOTACIÓN DEL PROBLEMA

Como se acaba de mencionar es importante realizar estudios que den cuenta de cómo el *producto de medida* entendido a partir del producto *discreto-discreto* como lo plantea Vergnaud, impacta en el aprendizaje de la multiplicación por parte de los estudiantes, para ello entonces consideramos propicio identificar todas las manifestaciones que hacen los estudiantes en aras de dar respuesta a determinada situación presentada, de igual forma se consideró oportuno identificar las estrategias que llevan a cabo. Es así como se recurre al diseño de tareas de aula, entendiéndose estas como aquellos elementos tangibles y no tangibles que hacen posible que los estudiantes movilicen su actividad matemática y por medio de la cual se podrá evidenciar todas sus manifestaciones.

Es claro entonces que en los grados tercero de dicha institución la multiplicación es vista como una suma reiterada, limitando al estudiante a conocer otras relaciones matemáticas que incluso son fundamentales en su diario vivir. En esta delimitación del problema es importante tener en cuenta también que los estudiantes requieren de tareas que les permitan dar un significado a la multiplicación, que le permita enfrentarse a un objeto matemático y hacerlo propio.

En este sentido el sujeto debe construir contextos de la vida real, que permita relacionar lo visto en su entorno con las operaciones básicas a través de diversos problemas y a su vez que pueda producir diversos significados (MEN 2006); es por esto que se ve importante que

el estudiante se cuestione acerca de los procesos que lleva a cabo por medio de los enunciados propuestos por el docente, y así mismo que pueda identificar los diversos significados que puede contener un concepto, en este caso la multiplicación.

De esta manera, se considera pertinente plantear tareas donde el estudiante pueda relacionar su entorno con el concepto que está movilizándolo su pensamiento y que a su vez le permitirá ver la multiplicación como un concepto aparte de la suma. Orozco (2009), plantea que la multiplicación es entendida en las escuelas como una suma reiterada, delimitando así la comprensión de la multiplicación por parte del estudiante, esta autora sostiene que la multiplicación “corresponde a una operación de la forma $a \times b = c$, que cumple con ciertas propiedades” (Orozco, 2009, pág. 1), lo cual revalida la noción de la multiplicación como un campo amplio que debe ser explorado.

Por otra parte de acuerdo a nuestros intereses consideramos que la perspectiva o bien aproximación epistemológica que más se ajusta a nuestras pretensiones es la sociocultural, la cual en la última década ha dado acercamientos significativos a otras formas de apropiación del conocimiento en el aula de clase, donde el aprendizaje y la enseñanza son emergentes y dinámicos, de igual forma recurrimos a la Teoría Cultural de la Objetivación, dado que por una parte ésta según Mojica (2014), considera la acción semiótica mediada como uno de sus pilares fundamentales y la cual posibilita no sólo “la comprensión de las formas de conocer de los individuos sino en sus posibles incidencias en el ámbito educativo y particularmente en

el campo de la educación matemática” (p.5), el precursor de esta teoría es Luis Radford (2011), quien se refiere a la objetivación, “en términos de los procesos sociales a través de los cuales el alumno alcanza una comprensión crítica, a través de dotación de significados, de los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de estos” (p. 45), lo cual quiere decir, que dichos procesos no surgen desde el individuo propiamente, estos provienen de la interacción que el sujeto establece con su medio y con el concepto, el cual ya tiene consigo una carga histórica y cultural, que opone resistencia al individuo, y que es a partir de ese trance que logra consolidarse como propio de él. Los procesos de objetivación según Radford están mediatizados por elementos culturales como por ejemplo signos, artefactos y la interacción entre sujetos o en otras palabras por los medios semióticos de objetivación donde el medio le posibilita al individuo el aprendizaje y es a partir de estos medios semióticos que se hace posible llegar a un proceso de objetivación mediado por el contexto y por la carga histórica y cultural del concepto matemático en cuestión, que según Vergel (2012), estos medios semióticos corresponden a “los objetos y signos utilizados para objetivar el conocimiento” (p. 21).

A partir de estas vivencias y revisiones bibliográficas fueron surgiendo múltiples preguntas que posibilitaron dar una orientación a la formulación del problema, las cuales fueron:

1.3. PREGUNTAS ORIENTADORAS

- ¿Cómo generar en los estudiantes una capacidad de análisis y de comprensión en relación a la multiplicación, desde la teoría de la objetivación?
- ¿Cómo contribuye a la conceptualización de la multiplicación enseñarla únicamente a partir del algoritmo de la operación?
- ¿Cómo perciben los estudiantes la enseñanza de la multiplicación relacionada con el producto de medida partiendo desde tareas de aula?
- ¿Qué representaciones llevan a cabo los estudiantes cuando la tarea a resolver no se relaciona con una suma reiterada?
- ¿Qué significado atribuyen los niños a las diferentes magnitudes involucradas en un problema del tipo producto de medida?
- ¿Qué tareas pueden llevar a cabo los niños, de modo que les sea posible objetivar la multiplicación en un contexto significativo y relacionado con su entorno?

A partir de allí fué posible refinar nuestra pregunta de investigación la cual presentamos a continuación.

1.4. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo son los procesos de objetivación de los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, cuando resuelven tareas de aula relacionadas con el producto de medida?

1.5. OBJETIVOS

1.5.1. GENERAL:

Analizar los procesos de objetivación de la multiplicación como producto de medida, desarrollados por estudiantes de grado tercero cuando resuelven tareas de aula a partir de la relación discreto-discreto

1.5.1.1. ESPECÍFICOS:

- Describir y analizar, los medios semióticos de objetivación que emergen de los estudiantes cuando resuelven las tareas de aula que involucran el producto de medida.

2. SEGUNDA PARTE

2.1. MARCO TEÓRICO

Como se ha venido mencionando desde la introducción del trabajo, la investigación ha partido desde una posición sociocultural del aprendizaje, de acuerdo a los planteamientos realizados por Vygotsky, situándose específicamente en la teoría cultural de la objetivación de acuerdo a los planteamientos realizados por Radford (2006, 2008, 2010), esta teoría ve al aprendizaje como un fenómeno caracterizado por lo semiótico cultural que emergen en el desarrollo de ciertas prácticas Mojica (2014), las prácticas que se mencionan acá han sido entendidas desde la Teoría de la actividad, a continuación profundizaremos en el enfoque sociocultural, la teoría de la actividad, de la objetivación y los medios semióticos de objetivación.

2.1.1. ENFOQUE SOCIOCULTURAL.

La perspectiva sociocultural la cual es planteada por Vigotsky, ha tomado gran fuerza en los últimos tiempos, debido a los múltiples aportes que le ha dado a la educación, específicamente en el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas. Desde esta perspectiva se destaca la cultura y el medio como partes importantes en los procesos de aprendizaje de un individuo, es decir, el individuo, aprende cuando se relaciona con otros, donde la cultura y el medio son los ejes que le dan forma al aprendizaje, es en este sentido, este, el sujeto se constituye con y a partir del otro sujeto que está inmerso en una cultura, la cual permea indirectamente la dialéctica que se puede construir entre los individuos, es así, que bajo el enfoque sociocultural es válido afirmar que el sujeto está en una constante reconstitución, Cadavid & Restrepo (2011).

Carrera & Mazzarella (2001), sostienen que el aprendizaje se da desde la interacción con las demás personas, a partir de allí sostienen que:

(...) el aprendizaje estimula y activa una variedad de procesos mentales que afloran en el marco de la interacción con otras personas, interacción que ocurre en diversos contextos y es siempre mediada por el lenguaje. Esos procesos, que en cierta medida reproducen esas formas de interacción social, son internalizadas en el proceso de aprendizaje social hasta convertirse en modos de autorregulación. (Carrera & Mazzarella, 2001, 43)

A partir de esto el aprendizaje no es posible desde esta mirada sin la interacción, sin la dialéctica, sin el contexto, sin la cultura. “Las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo, es decir, los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática” (Vergel, 2003, p.495).

Es así como en esta investigación hablar del enfoque sociocultural toma sentido, ya que posibilita configurar las formas en que el conocimiento es llevado al aula de clase a los estudiantes en sus cursos de matemática, logrando estimular un aprendizaje a través de la interacción con el otro. Vigotsky para hablar de aprendizaje se refiere a dos niveles; el nivel evolutivo real y el nivel de desarrollo potencial, el primero lo plantea como aquellas cosas que el niño, en este caso el estudiante puede hacer por sí solo y el segundo habla acerca de lo que él puede hacer bajo la orientación, en palabras de Vigotsky, lo que puede hacer con la ayuda de los otros. Estar inmersos en una cultura posibilita el desarrollo mental del individuo al momento de enfrentarse a cierta situación, lo cual se evidenció durante el desarrollo de la investigación, donde el papel del maestro orientador, se convertía en una posibilidad para generar espacios donde el estudiante tenga acercamientos con el objeto matemático, mientras que a su vez se constituye y reconstituye con los demás.

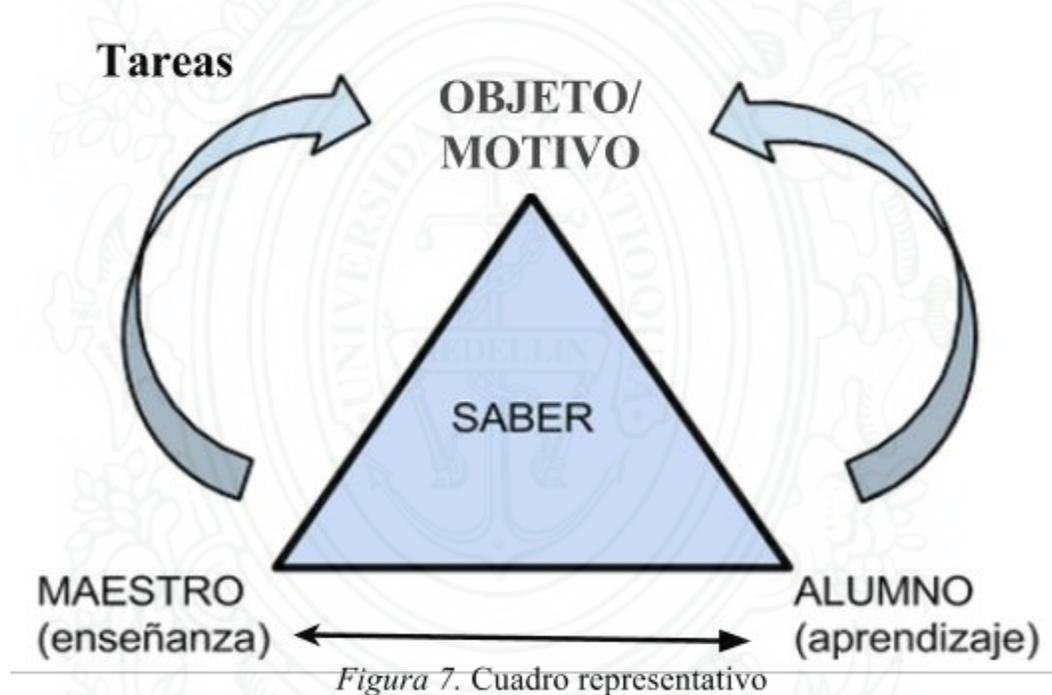
2.1.2. TEORÍA DE LA ACTIVIDAD

Un elemento clave que se torna importante rescatar en el trabajo ha sido el de actividad vista desde los planteamientos realizados por Leontiev. Davidov (1988) referenciando a Leontiev plantea que:

La teoría de la actividad es una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana.

Donde la concepción que se ha tenido por actividad esta se transforma en algo que va más allá de un encuentro entre personas para realizar alguna tarea, la actividad desde esta teoría debe ser entendida como las acciones interconectadas que el individuo realiza con otras personas u objetos, apuntando a un mismo fin, para cumplir un objetivo, como lo menciona Davidov parafraseado en Pérez (2014), el objetivo debe estar enmarcado por el motivo que inspira la acción que se realiza. Aca, el motivo se convierte en parte fundamental del individuo, dado que las acciones que realiza no pueden perder sentido. Desde esta mirada es que Radford (2014) aborda el concepto de “labor” al cual lo considera desde una visión materialista dialéctica entendida desde Hegel donde el individuo es permeado por la cultura, es así que la “Labor” no hace alusión meramente al hecho de cumplir un objetivo, sino que a su vez le posibilita al estudiante que está en constante cambio, construirse como un sujeto íntegro. En términos de la Labor se consideró así oportuno diseñar y ejecutar las distintas tareas, las cuales se pensaron en términos del Objeto/Motivo, de acuerdo a nuestros intereses

como investigadores y de acuerdo a algún elemento que hiciese motivante la tarea para los mismos estudiantes, el siguiente esquema representa nuestras intenciones por medio de las tareas de aula vinculadas directamente con el saber.



2.1.3. TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN

Por otra parte, el trabajo se fundamenta desde la Teoría de la objetivación, la cual es una teoría que se desprende desde la teoría sociocultural. El precursor de esta teoría es Radford³, que la sustenta como una teoría de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual busca entre otras cosas la dotación de sentido de los conceptos presentes. Parafraseando

³ Luis Radford docente de la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad Laurentian en Canadá . Sus líneas de investigación abarcan tanto los aspectos teóricos y prácticos de las matemáticas de pensamiento, la enseñanza y el aprendizaje

a Radford (2014), la objetivación es vista como ese proceso social de toma de conciencia, en el cual la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debe estar siempre implicado el alumno, donde es importante tener en cuenta el contexto en el cual están inmersos los estudiantes para que se convierta en el eje principal del aprendizaje.

Además, la Teoría de la objetivación, parte de una posición política-conceptual, que le da su propia forma y contenido al saber, donde se hace énfasis no solo en el saber, sino en el ser y se plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es el desarrollo de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente. En esta teoría, existe un elemento que hace parte de las formas en que el sujeto acciona conjuntamente, esta es la labor, de la cual ya hablamos en el apartado anterior ya que no solo se refiere a una satisfacción de las necesidades, sino que esta va más allá, permitiendo ver las ideas que se cohesionan en el momento del desarrollo de la situación. La labor se vuelve importante en el trabajo en la medida en que es desde allí, desde donde se puede analizar las acciones de cada uno de los individuos, y de aquí cobra sentido cada una de las tareas que se diseñaron.

Aún así, hablando desde el proceso de objetivación, es necesario resaltar que da información de cómo el alumno está aprendiendo, aclarando así que el aprendizaje es un proceso y no un estado. Por eso desde esta teoría según Radford (2014), no es posible decir que el alumno ha llegado a objetivar algo, sino más bien que el alumno participa de un

proceso de objetivación de cierto concepto, en este caso, el de la multiplicación “en todo caso, el aprendizaje ocurre en un proceso de objetivación, lo que significa que en ese proceso el alumno *toma conciencia*, críticamente y activamente, del concepto x en cuestión”(Comunicación personal, 26 Noviembre de 2014).

En este trabajo investigativo, se recurre a la definición que da Radford (2014) a la objetivación, quien la entiende como “el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente” (p. 141), en este sentido la teoría de la objetivación no deja su preocupación meramente al saber, esta por su parte se preocupa tanto por el saber como por el sujeto, donde la subjetividad del individuo se vuelve parte importante en los procesos de apropiación del conocimiento. En esta teoría cuatro son los principios fundamentales que se establecieron de acuerdo a Mojica (2014) parafraseando a Radford (2013).

Dimensión ontológica: el saber, considerado como movimiento codificado y como mera posibilidad (potencial); corresponde al conjunto, cultural e históricamente constituido, de procesos corpóreos de acción y reflexión generados a través de la labor humana en el seno de unas prácticas sociales que definen un conjunto de formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente.

Dimensión epistemológica: El conocimiento, de naturaleza mediada, corresponde al contenido conceptual concreto de naturaleza abstracta (actual). Es la instanciación o actualización del saber; saber que deja su huella a través de la labor que lo medió. Radford (2013a) precisa que en tanto el saber es pura posibilidad no puede ser percibido en su totalidad y por lo tanto no se puede equiparar con cualquiera de sus instanciaciones o actualizaciones.

Dimensión ética: el individuo, es un ser reconocido como sujeto histórico hecho por la cultura, el cual participa de prácticas sociales que lo hacen ser y saber en la cultura. Es un sujeto en formación, tanto de carne y hueso como de historia y de relaciones sociales y culturales (Radford, 2014). En tanto se considera al sujeto como individuo de, en y para la cultura; se asume que el individuo participa en la aparición de la presencia del ideal a través de la actividad o labor, a través de procesos de subjetivación

Dimensión educativa: Enseñanza-aprendizaje, es considerado como un proceso de objetivación, de toma de conciencia de los objetos matemáticos de naturaleza semiótico cultural históricamente formados.

En esta última dimensión, la educativa, se pone de manifiesto que el aprendizaje corresponde a la objetivación del saber. Es importante reconocer además que desde la teoría de la objetivación, las investigaciones se han centrado específicamente en el pensamiento algebraico, a partir de allí se han reconocido dos procesos de objetivación los cuales han sido denominados por Radford (2008) como iconicidad y contracción semiótica, el primero de estos la iconicidad, se refiere tácitamente al proceso por medio

del cual, el estudiante se remite a experiencias previas para configurar sus nuevas acciones dentro de la tarea, Radford (2008). A partir de las manifestaciones de los estudiantes, es posible dar cuenta de cómo las experiencias previas, le posibilitan al estudiante una toma de conciencia y un posicionamiento crítico frente a la tarea en medio de la Labor. El segundo proceso referenciado por este autor a partir de sus investigaciones corresponde a la contracción semiótica, el cual se refiere a una transformación de los medios semióticos usados por el estudiante, donde se hace un refinamiento de los recursos semióticos que fueron movilizados allí, Mojica (2014). Así mismo el autor de la teoría reconoce este proceso de objetivación como una señal de que el estudiante está en un proceso de aprendizaje.

Dentro de los constructos teóricos de la teoría de la objetivación, es importante reconocer otro proceso, que está estrechamente relacionado con los procesos de objetivación, este se refiere a la subjetivación, el cual se da cuando el sujeto se relaciona con los otros (ese otro puede ser un sujeto, un artefacto u objeto) y este el sujeto sufre una transformación y se reconoce como un ser cultural, en concordancia con esto Radford (2011), sostiene que la subjetivación se expresa en términos de procesos propios del sujeto o intersubjetivos, “a través de los cuales el alumno se posiciona en las configuraciones de las prácticas sociales a las que participa y a través de las cuales se reconoce y es reconocido miembro de una comunidad sociocultural”. (p. 45). De igual forma Cadavid & Restrepo (2011), afirman que:

1 8 0 3

En cada acercamiento entre el sujeto y el objeto se produce una reconstitución de ambos. Así, en el curso del aprendizaje, el sujeto objetiva conocimientos culturales y, al hacerlo, se torna objetivado, en un movimiento reflexivo que se puede llamar subjetivación. (p. 12).

A partir de allí es importante reconocer entonces que en todo proceso de objetivación, el sujeto sufre una transformación, la cual le permite a este posicionarse de acuerdo a las condiciones socioculturales.

2.1.4. MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN

Ahora bien, es importante desde la teoría de la objetivación reconocer los medios semióticos de objetivación que plantea Radford, dado que estos se fundamenta esencialmente en la relación que establece el sujeto con los objetos matemáticos y con los demás, esta relación tiene que ver explícitamente con la forma en que construyen diversas experiencias a partir de una situación. Por lo tanto, parafraseando a Radford en Lasprilla (2012), plantea que una construcción semiótica refleja de cierta forma el estado de concientización del estudiante, lo cual se hace evidente a partir de las acciones desencadenadas por los estudiantes en medio de la labor, específicamente se trata de ver cómo el sujeto logra darle sentido al objeto

matemático a partir de diversas estrategias utilizadas, es desde aquí, donde el estudiante puede establecer relaciones entre la matemática y el entorno.

Los medios semióticos en concordancia con los planteamientos realizados por Radford (2006) son parte constitutiva en los procesos de objetivación, estos están caracterizados por las manifestaciones que el sujeto realiza a partir de los signos, los cuales son evidentes en las interacciones, en el lenguaje, en los movimientos corporales entre otros, los cuales cobran gran importancia dentro de la Labor que desarrollan los individuos por el significado del que están cargados, de igual forma reconocemos que no sólo los medios mencionados anteriormente se reconocen como medios semióticos de objetivación, puesto que durante la Labor otras herramientas consideradas dentro de esta teoría como artefactos se pueden transformar en medios semióticos de objetivación, dado que ponen de manifiesto una acción cargada de significado en el desarrollo de la Tarea.

De acuerdo a Mojica (2014), los medios semióticos de objetivación devienen de la actividad matemática exactamente cuando el estudiante recurre a un objeto o artefacto para desarrollar el objetivo de la misma, por medio de la Labor, donde se puede observar o hacer evidente aspectos como las intenciones que cada estudiante tiene frente a la actividad. Es así, que se hace necesario traer a colación los aspectos que se tiene en cuenta a la hora de identificar un medio semiótico de objetivación, estos se dividen en dos de acuerdo con la Teoría de la Objetivación. Reconocemos de igual forma que en medio de la Labor

desarrollada por los estudiantes más recursos semióticos pueden aparecer, los cuales pueden transformarse como medios semióticos de objetivación.

1. Los kinestésicos, está conformado por los señalamientos, las inscripciones, los gestos y las acciones desencadenadas por los estudiantes, que de cierta forma buscan dotar de significado algo que se puede o no estar verbalizando.

2. Los lingüísticos, está conformado por los déicticos espaciales, tales como acá, aquí, etc.

Estos medios, se consideran como elementos importantes para la elaboración del análisis de las tareas de aula que se realizaron y los cuales fueron fundamentales para dar respuesta al problema investigativo, al mismo tiempo permite, tener claridad ante la tarea y el posicionamiento de cada uno de los estudiantes durante los procesos de objetivación, los cuales se hacen visibles a partir de estos medios semióticos de objetivación. A su vez Lasprilla (2012) plantea que:

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado objetivación, el cual se da a través del uso de diversos medios semióticos, que permiten la objetivación del objeto y a la vez los procesos de producción de significados. (p.2)

2.2. MULTIPLICACIÓN: PRODUCTO DE MEDIDA

Si bien la base teórica que sustenta el objeto matemático trabajado en esta investigación es desde los planteamientos realizados por Vergnaud (1982), de base cognitivista, es importante reconocer que esta teoría también concibe el aprendizaje desde un enfoque sociocultural, de acuerdo con esto Vergel (2003) sostiene que “las investigaciones realizadas sobre el pensamiento multiplicativo, específicamente la de Vergnaud (1981), reconocen también una posición sociocultural del aprendizaje” (p. 496). Así mismo Vergnaud (1981) citado por este autor sostiene que:

No solo es importante que las situaciones sean claras y exhaustivamente clasificadas desde el punto de vista de la estructura conceptual, sino que también los invariantes (conceptos y teoremas) sean verbalizados, simbolizados, diagramados o graficados, y así estos vienen a ser elementos de explicitación racional de las concepciones y no sólo elementos remanentes o sólo esquemas implícitos. (p. 496).

A partir de allí, se reconoce la importancia de los símbolos y del lenguaje dentro de las investigaciones llevadas a cabo por Vergnaud.

Orozco (2009), por su parte define la multiplicación de la forma $a \times b = c$, como se mencionó inicialmente y esta autora expresa que es importante dejar de ver en la escuela la multiplicación como suma reiterada y poder hacer que los estudiantes realicen procedimientos multiplicativos en diversas tareas,, ya que se toma en la escuela como

procesos de-pendientes, pero se requiere que los procesos en estas operaciones sean completamente independientes.

En vista de la necesidad de abordar la multiplicación desde los diferentes significados que se le dan y que no esté centrada en el algoritmo y la suma repetitiva, es necesario entonces, entenderla como “Una operación aritmética tanto de naturaleza unitaria como binaria, que puede interpretarse como una suma reiterada (sin ser lo mismo) o como un producto cartesiano” (Maza, 1991). Como se mencionó inicialmente, se decidió abordar la multiplicación bajo el producto de medida, dado que se identificaron algunos elementos teóricos importantes como los realizados por Vergnaud (1990, 1991), donde presenta las distintas formas de abordar la multiplicación entre ellas el producto de medida, por lo que se considera apropiado que los estudiantes de grado tercero pueda ampliar el concepto que tienen de la multiplicación, ya que sólo es enseñada a partir de la suma repetitiva, es por esta razón que se hace énfasis a la manera de aprendizaje y a su vez al significado que pueden darle cada uno de los estudiantes, de radica la importancia de que en el marco teórico se retome a Vergnaud quien habla de las estructuras multiplicativas bajo la teoría de los campos conceptuales, citado por Orozco (2009), el cual presenta diversas maneras de abordarlas, las cuales son llamados problemas de tipo multiplicativo los cuales son⁴:

⁴Imágenes tomadas de Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Trillas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133-170.

1. Isomorfismo de medida

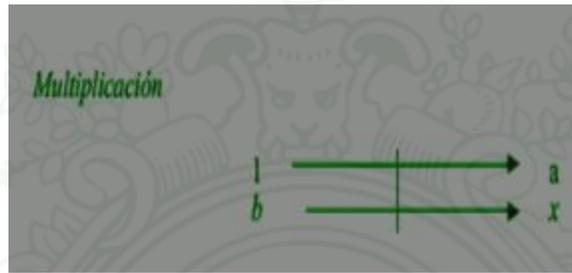


Figura 8. Isomorfismo de medidas

2. Espacio único de medida



Figura 9. Espacio único de medidas

3. Producto de medida.

		F			
		f	g	h	i
G	a	(a,f)	(a,g)	(a,h)	(a,i)
	b	(b,f)	(b,g)	(b,h)	(b,i)
	c	(c,f)	(c,g)	(c,h)	(c,i)

Figura 10. Producto de medida

Se considera propicio, vincular los contenidos matemáticos con la realidad, y desde estas intenciones el producto de medida, se transforma, presentando a los estudiantes la multiplicación de manera tal, que por una parte propicie la comprensión de la misma y que por otra les posibilite establecer relaciones con otros contenidos matemáticos, que los lleven a un continuo desarrollo de su conocimiento. Si bien es importante tener en cuenta que estos aportes no son exclusivos del producto de medida, es importante resaltar sin duda alguna, que

son fuente principal para transformar las prácticas matemáticas en torno a la multiplicación, en el sentido que reconozcan otras formas de abordar la multiplicación distinta a la suma reiterada. Desde Vergnaud (1991) la multiplicación y bien la división pueden ser abordadas desde el producto de medida a partir de tres sub-categorías entre las que están, *producto discreto-discreto*, *producto continuo-continuo* y *producto continuo-continuo noción de medida*. Este autor ejemplifica para el caso de la división cada uno de ellos, a continuación se muestran los dos primeros⁵.

Producto discreto-discreto

“Un vendedor quiere poner a disposición de los clientes 15 variedades de helados cubiertos de chocolate. Dispone de tres variedades de chocolate. ¿Cuántas variedades de helados debe tener?”

Producto continuo-continuo

“Un rectángulo tiene una superficie de 18.66 metros cuadrados y una anchura de 3.23 metros. ¿Cuál es su longitud?”

producto continuo-continuo noción de medida.

“Una alberca tiene un área de 265,4 metros y hacen falta 633.3 metros cúbicos de agua para llenarla, ¿Cuál es la profundidad media del agua?”

Para el caso de la multiplicación estos ejemplos funcionan análogamente, el primero de estos quedaría de la siguiente forma

⁵ Ejemplos tomados del texto el niño las matemáticas y la realidad. Disponible en <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/vergnaud.pdf>

Un vendedor de helados posee 3 tipos de galletas distintas y 5 variedades de helado, ¿Cuántos helados distintos pueden salir a partir de de las galletas y las variedades?. A partir de estos subgrupos derivados del producto de medida se optó por seleccionar el producto de medida desde lo *discreto-discreto*.

3. TERCERA PARTE

3.1. DISEÑO METODOLÓGICO

Como se ha venido mencionando a lo largo de este trabajo, en el problema de investigación, se vio necesario indagar en las experiencias y en comprender la realidad social en la cual se ven involucrados los sujetos en cuestión, es decir, los estudiantes, quienes durante cada tarea de aula se verán inmersos en su realidad, donde cada palabra o cada acción que realicen de forma individual o en conjunto es de gran importancia, ya que están cargadas de un gran contenido y que requiere así de un análisis exhaustivo y profundo del mismo, para ello se consideró entonces necesario abordar dicha investigación desde un enfoque cualitativo, puesto que la investigación bajo este enfoque permite indagar acerca de las emociones, conocimientos, creencias y muchos otros elementos, que permiten posteriormente comprender la realidad de los sujetos directamente involucrados. Es por tanto que la investigación cualitativa tiene como foco no solo darle

(...) sentido de lo que el otro o los otros quieren decir a través de sus palabras, de sus silencios, de sus acciones y de sus inmovilidades a través de la interpretación y el diálogo, sino también, la posibilidad de construir generalizaciones, que permitan entender los aspectos comunes a muchas personas y grupos humanos en el proceso de producción y apropiación de la realidad social y cultural en la que desarrollan su existencia. (Sandoval, 1996, p. 32)

Dentro de la investigación cualitativa, existen distintos métodos de realizar análisis a las tareas propuestas, una de ellas y en la cual se basa el trabajo investigativo cualitativo es el estudio de casos, que según Stake (1998) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas. Dentro del estudio de casos existen 3 modalidades para su estudio, la primera de estas es el intrínseco, su propósito básico es alcanzar la mayor comprensión del caso en sí mismo, la intención acá radica aprender de él en sí mismo sin generar ninguna teoría ni generalizar los datos, donde la función del investigador es observar y analizar distintas prácticas ya constituidas, el segundo de estos es el instrumental su propósito es analizar para obtener una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico, el papel del investigador es ver cómo ciertas prácticas que el mismo constituye y las lleva a cierto espacio, tocan a los individuos de cierta forma y por último se encontró el colectivo, su interés es indagar un fenómeno, población o condición general a partir del estudio intensivo de varios casos. Se basa en el estudio instrumental, dado que la investigación de alguna manera se llevan elementos (en este caso las tareas de aula) al centro de práctica, donde el interés básicamente

está dado en darle respuesta al problema ya identificado a partir de la propuesta, teniendo claridades en los aspectos teóricos acá mencionados.

Partiendo de la teoría cultural de la objetivación, según Radford (2007) las investigaciones se trabajan por grupos pequeños, dado que en el análisis se tiene en cuenta los sistemas semióticos que tiene que ver con las acciones de cada individuo, es decir desde “una concepción multimodal” (Miranda; Radford y Guzmán, 2007, p. 12). Es acá, donde se pudo hacer un análisis de las producciones y acciones de los estudiantes.

De acuerdo a lo anterior se recurre a la selección del caso donde se acude a Sandoval (1996) quien afirma que “El caso en estudio puede ser una cultura, una sociedad, una comunidad, una subcultura, una organización, un grupo o fenómenos tales como creencias, prácticas o interacciones, así como cualquier aspecto de la existencia humana” (p. 92). Así se establece, como caso del trabajo investigativo el proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida.

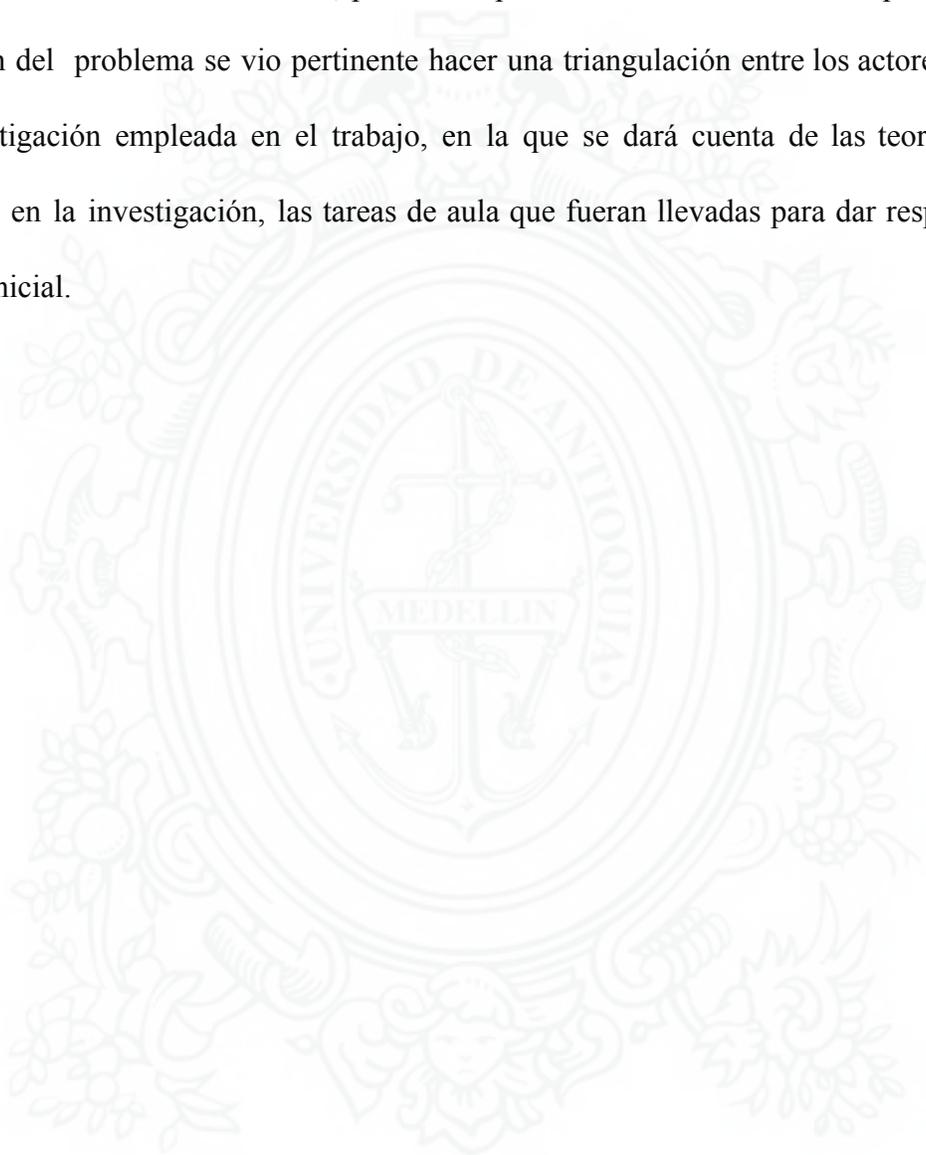
Para la selección de los actores del caso, se tuvo en cuenta algunos elementos tales como, la asistencia constante de los estudiantes a las clases, así mismo que fueran estudiantes que se hicieran partícipes activamente de las clases de matemáticas, aclarando entonces que la intención no era seleccionar estudiantes que a nivel institucional fuesen buenos o malos, para ello entonces se pre-seleccionaron un grupo de 20 estudiantes teniendo en cuenta los criterios mencionados anteriormente y de allí se realizó un sorteo al azar que permitió

finalmente seleccionar cuatro estudiantes, es importante resaltar que hubo un consentimiento firmado por parte de los padres de los estudiantes, en el cual se resaltaba que la participación en el trabajo investigativo era voluntaria y con sus respectivos permisos firmados por parte de los padres de familia quienes autorizaron su participación, de igual forma los nombres que aparecen de los estudiantes seleccionados son simulados, dado a un acuerdo descrito en los permisos firmados por sus padres.

Con esta investigación se realizará una descripción cualitativa que permita ver cómo los estudiantes a partir de tareas de aula que tienen cierta característica pueden darle significado a la multiplicación, así mismo observar la manera como objetivan y resuelven las tareas que se les plantea de la multiplicación basado en el producto de medida. Se vio viable así analizar cuatro estudiantes (actores del caso), que serán un solo caso de estudio: dos actores del grado tercero C y dos del grado tercero D, teniendo en cuenta la teoría de la objetivación, en la cual debe haber una actividad social que permita un aprendizaje a través de los objetos culturales y sociales.

Los instrumentos necesarios para el estudio de casos desarrollado con los estudiantes, fueron entrevistas semi-estructuradas, grabaciones (video y de audio) los cuales dieron cuenta de las expresiones y gestos de los estudiantes a la hora de resolver una tarea, ya que la teoría de la objetivación requiere de un análisis exhaustivo y registros escritos de las producciones que los estudiantes hacen a los problemas planteados en cada tarea de aula, para determinar

los alcances de las mismas. Además, para hacer posible un análisis minucioso para aportar a la solución del problema se vio pertinente hacer una triangulación entre los actores del caso y la investigación empleada en el trabajo, en la que se dará cuenta de las teorías que se emplearon en la investigación, las tareas de aula que fueran llevadas para dar respuesta a la pregunta inicial.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

3.2. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

	ETAPAS	2013-2014	Mes	Julio				Agosto				Septiembre				Octubre				Noviembre				Enero				Febrero				Marzo			
		Semanas		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
		Duración en semanas																																	
Cronograma de actividades Seminario práctica pedagógica I,II, III y Trabajo de grado	Contextualización y observación centro de práctica	20																																	
	Espacios de discusión y retroalimentación	55																																	
	Revisión bibliográfica	56																																	
	Identificación del problema	29																																	
	Identificación de la pregunta y de los objetivos	30																																	
	Marco teórico	38																																	
	Metodología de investigación	46																																	
	Intervenciones propias de la investigación	18																																	
	Recolección de datos	18																																	
	Análisis de los datos	16																																	
	Cronograma de actividades Seminario práctica pedagógica I,II, III y Trabajo de grado	ETAPAS	2013-2014	Mes	Abril				Mayo				Junio				Julio				Agosto				Septiembre				Octubre				Noviembre		
Semanas		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4		
Duración en semanas																																			
Contextualización y observación centro de práctica		20																																	
Espacios de discusión y retroalimentación		55																																	
Revisión bibliográfica		56																																	
Identificación del problema		29																																	
Identificación de la pregunta y de los objetivos		30																																	
Marco teórico		38																																	
Metodología de investigación		46																																	
Intervenciones propias de la investigación		18																																	
Recolección de datos	18																																		
Análisis de los datos	16																																		

DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

4. CUARTA PARTE: ANÁLISIS

4.1. TRIANGULACIÓN

Desde Stake (1998) la triangulación es entendida como una estrategia que permite la validación de los datos. Esto se da en la medida en que sea posible articular la validación, con los objetivos y con las estrategias en el marco del trabajo investigativo, estos elementos se convierten así en soporte para las conclusiones que posteriormente han de surgir del análisis desarrollado. La validación del análisis se refiere entonces a la precisión lógica que se pueda tener en la recolección de los datos, la articulación de los conceptos con los mismos y con los demás elementos presentados en el marco teórico, los objetivos por su parte se refiere a las evidencias que sean objetos de análisis a partir de los intereses demarcados y por último las estrategias se refieren a aquellas que “permiten conseguir la conformación necesaria, para aumentar el crédito de la interpretación, para demostrar lo común de un aserto” (p. 98), es decir, las estrategias se refieren a todas aquellas formas en las que se hace posible trascender a la validación y a los objetivos.

Como estrategia para abordar esta triangulación partiendo desde el marco teórico, donde se plantea que toda actividad matemática debe estar orientada por un Objeto/motivo bajo la teoría de la objetivación, se propuso entonces la elaboración de un esquema que permitiera delimitar cuáles de las tareas se debían tener en cuenta para el análisis a la luz de

la teoría de la objetivación en las cuales era posible ver cómo las características propias de dichas tareas que involucran el producto de medidas, movilizan la comprensión de las relaciones multiplicativas. Las tareas **Una tarde de color y sabor** y **Renovando nuestro espacio**, para los respectivos análisis no fueron tenidas en cuenta puesto que desde el momento de la ejecución, ya no representaban como tal un reto para los estudiantes, dado que en las tareas anteriores ya habían reconocido al producto de medida como una forma de comprender la multiplicación distinta a la suma reiterada.

TAREA DE AULA	OBJETO/ MOTIVO	
	Investigador	Estudiante
Haciendo uniformes	Indagar los conocimientos previos de los estudiantes frente al producto de medida	Crear distintos uniformes
Mezclando y Pintando	El estudiante empiece a ver e interpretar la multiplicación en otros contextos distintos a los que comúnmente está acostumbrado	Realizar un dibujo con el mayor número de colores, realizando diferentes mezclas a partir de los colores primarios.
Preparación de Halloween	El estudiante puede empezar a dotar de significado la multiplicación	Disfrazarse para halloween
Una tarde de color y sabor	Que el estudiante	Elaborar mazapanes.

		reconozca la multiplicación como producto de medida	
Renovando nuestro espacio	Momento 1	Evidenciar el cambio de magnitud área, por medio del producto de medida	Contribuir a mejorar la institución
	Momento 2	Evidenciar el cambio de magnitud área, por medio del producto de medida	

Figura 11. Tabla delimitación de tareas

Una vez seleccionadas las tareas para los respectivos análisis surgieron diferentes medios semióticos, a partir de los cuales se hace posible realizar una triangulación teniendo en cuenta las siguientes subcategorías.

- a. Lingüísticos
- b. Kinestésicos

4.2. ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Como se ha venido mencionando desde la introducción de esta investigación, frente a la decisión de analizar los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes cuando resuelven tareas de aula relacionadas con la multiplicación específicamente con el producto de medida, consideramos necesario indagar sobre los medios semióticos de objetivación que fueron movilizados en el desarrollo

de cada situación, dado que es a partir de estos medios semióticos por los cuales los estudiantes dan cuenta de esos procesos de objetivación alcanzados. A partir de allí es importante resaltar que ante el análisis de los medios semióticos, la mirada debe estar siempre sensible a cada gesto, cada palabra, cada signo que los estudiantes realicen, de acuerdo con esto se consideró oportuno hacer una categorización de los medios semióticos presentes en estas tareas, para ello se tuvo en cuenta las categorías presentadas por Mojica (2014), signo kinestésico de señalamiento (conteo con las manos...) por lo que un primer momento se tiene en cuenta las acciones (gestos y señalamientos) de los estudiantes donde se observa cómo realizan sus manifestaciones frente a determinadas tareas de aula, en un segundo momento se tiene en cuenta la parte escrita que realizaron, dado que es allí donde se evidencia las representaciones de las relaciones y las magnitudes involucradas en las tareas de producto de medida, y en un tercer momento se tiene en cuenta la interacción (verbalización) entre los mismos. Para efectos de este análisis se decidieron realizar las siguientes convenciones.

< >	Ampliación de lo que ocurre, bien sea contando lo que ocurre, describiendo algo complementario que hace el estudiante o bien realizando un comentario frente a lo realizado
I	Investigador
G1	Grupo 1
G2	Grupo 2
Es	Estudiantes
José	Estudiante 1
Fernando	Estudiante 2
Martín	Estudiante 3
Jenni	Estudiante 4

Figura 12. Tabla de convenciones para los análisis

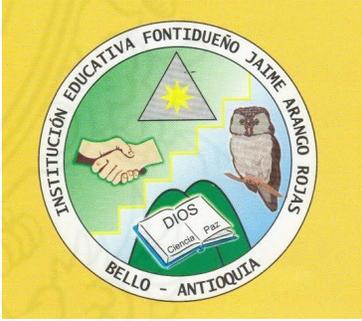
De igual forma cada línea en la que se exprese lo que aconteció en cada situación estará demarcada así (R1: Renglón 1, R2: Renglón 2, ... Rn: Renglón n), esto en aras de hacer más claros los análisis y ubicar al lector de la mejor manera posible .

A continuación, se presentan cada una de las tareas de aula que fueron realizadas en la IEFJAR, para responder al problema de investigación y de igual forma se argumenta la selección de algunas de ellas para el análisis correspondiente.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

INSTITUCIÓN EDUCATIVA FONTIDUEÑO JAIME ARANGO ROJAS. SECCIÓN 3



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tarea de indagación N°1

Estimados estudiantes el día de hoy queremos que nos ayuden a organizar algunos uniformes, para ello se nos ha posibilitado traerle los moldes que se encuentran al final, la idea de esto es evidenciar cuantos uniformes distintos nos pueden resultar de acuerdo a ello,

1 8 0 3

de igual forma tendrán acceso a otros materiales, como cartulina, tijera, colores por si desean hacer otros arreglos. Muchas gracias por su ayuda.



4.2.1. Tarea de indagación N°1

Trabajar con el producto de medida sin duda es poco común en la escuela, a partir de allí y considerando además lo que se había encontrado en el centro de práctica referente a la forma de enseñar a multiplicar, se consideró oportuno posibilitar la exploración por parte de los estudiantes frente a una tarea de producto de medida, pero en esta ocasión se les facilitó a los estudiantes una serie de moldes de uniformes deportivos con el fin de que realizaran algunos conjuntos de uniformes (camiseta-pantalóneta), esto en aras de identificar primeramente los acercamientos que pueden tener los estudiantes frente al producto de medida, segundo evidenciar y analizar las manifestaciones o bien medios semióticos movilizados por los estudiantes, en el desarrollo de la misma.

En esta ocasión, a los cuatro estudiantes se les pidió que se organizaran en parejas, para que cada grupo pudiera confrontar la cantidad de uniformes realizados a partir de los elementos

presentados, de acuerdo a esto a cada grupo se les facilitó materiales concretos para desarrollar las tareas.

Luego de explicar la manera como se debía abordar dicha tarea, los estudiantes empezaron a dialogar entre ellos, inicialmente asistimos al primer grupo (G1) para indagar acerca de lo que dialogaban.

❖ **R1. Fernando:** pero yo veo que hay más camisas que pantalonetas <haciendo un gesto de preocupación>

❖ **R2. Jenni:** Entonces contemos <señalando con uno de sus dedos y al mismo tiempo haciendo correspondencia entre cada pantaloneta y cada camisa> cuantos uniformes nos salen y miramos a ver cuántas camisas nos sobran.

❖ **R3. Fernando:** uno, dos, tres <contando la cantidad de pantalonetas presentes>, Jenni, pero si solo hay tres pantalonetas, sólo serán tres uniformes.

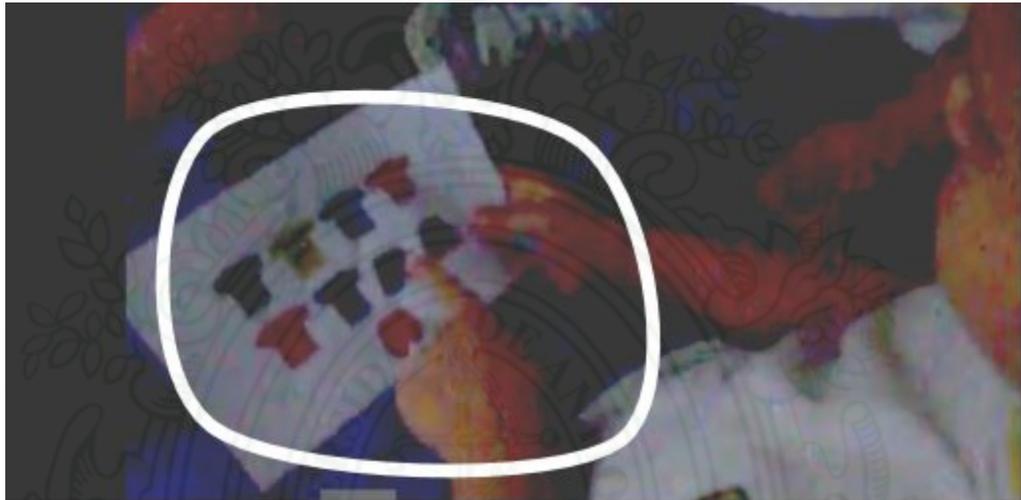


Figura 13. Señalamientos realizados por Fernando

Los estudiantes acá sólo relacionan las tres pantalonetas con tres camisetas, teniendo como premisa que para cada uniforme es necesario tanto una pantaloneta como una camiseta, aún no se dan cuenta de la posibilidad de formar uniformes adicionales relacionando las pantalonetas ya utilizadas con las camisetas sobrantes. Se observa también cómo los estudiantes han utilizado recursos semióticos, los cuales de acuerdo a Radford (2002), permiten clarificar cómo están adquiriendo significados a partir de la situación planteada. Las expresiones **hay más, conteo y sobran**, son claramente recursos semióticos de carácter lingüístico usados por los estudiantes, los cuales se han convertido en base para solventar y comprender la tarea propuesta. Particularmente la expresión dada por Fernando en **R1**, es una expresión que se refiere básicamente a una relación de comparación de dos cantidades, de acuerdo a esto Vergnaud (1990), desde la teoría de los campos conceptuales plantea que estas relaciones de comparación hacen parte de las estructuras aditivas, esto permite considerar que frente a este problema presentado, hay otras relaciones matemáticas que se van tejiendo a partir

de la interacción con el otro, las cuales están encaminadas a dar respuesta a la misma tarea, de igual forma es importante reconocer que la interacción entre los dos estudiantes fue fundamental en la labor conjunta que realizaron. Por otra parte los gestos faciales realizados por Fernando, son gestos cargados de una intencionalidad, que manifiesta que realmente está tomando conciencia de lo que está enfrente de ellos. Posteriormente, nos dirigimos hacia el grupo 2 el cual estuvo conformado por José y Martín.

- ❖ **R1.I:** ¿Cómo van con la tarea?
- ❖ **R2. Martín:** Profe nosotros hemos recortado cada camisa y cada pantaloneta, para armar los conjuntos
- ❖ **R3. José:** pero sobraron dos camisetas <Mostrando las que sobraban, ver figura>
- ❖ **R4. I:** ¿Por qué sobraron?
- ❖ **R5. José:** Porque no hay más pantalonetas.
- ❖ **R6. I:** ¿Recuerdan que estamos haciendo con los uniformes?
- ❖ **R7. Martín:** Estamos encontrando cuantos conjuntos de uniformes salen de estos que tenemos, pero el problema es que hay más camisas que pantalonetas.

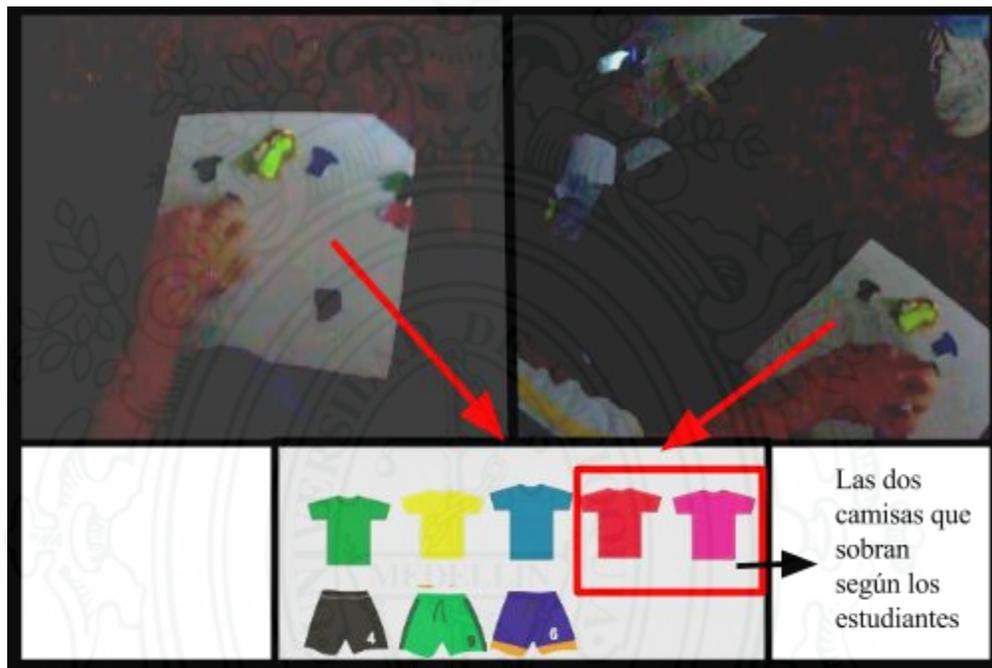


Figura 14. Martín mostrando los conjuntos

Nuevamente encontramos por medio de la labor que desarrollan los estudiantes, la emergencia o bien movilización de nuevos medios o recursos semióticos en este caso el lenguaje verbal, el cual muestra cómo los estudiantes, usan palabras que son propias de los constructos culturales, palabras que no fueron usadas por nosotros los investigadores en la explicación de la tarea propuesta, sin embargo la palabra “conjunto”, surge propiamente de los estudiantes y da cuenta de cómo están tomando conciencia frente a la tarea. Cuando los estudiantes hablan de conjuntos en este contexto, se están refiriendo a la *unión* de las dos prendas (camisa-pantalóneta) (Ver *figura 14*), en **R3**, el recurso “Sobraron”, expresa que los estudiantes están haciendo una comparación entre la cantidad de camisas y pantalones, aludiendo al hecho de que no hay más pantalónetas para hacer las correspondencias entre cada

elemento. Estas interpretaciones empiezan a dar luces de la forma en que los estudiantes tomaron conciencia de la tarea propuesta, para los estudiantes determinar cuántos uniformes distintos pueden resultar a partir de los materiales dados, básicamente consistió en armar parejas y de allí concluir que algunos elementos sobran y con los cuales no era posible hacer más uniformes.

Es importante tener en cuenta, que si bien la situación tal cual como se planteó por parte de nosotros se refería a un producto de medida, los estudiantes hicieron una comprensión distinta a la misma, la cual es válida y nos permitió evidenciar medios semióticos que sin lugar a dudas posibilitaron la relación de otros conceptos matemáticos. En **R7**, Martín expresa a partir de su recurso semiótico lingüístico que **hay mayor** cantidad de camisas **que** de pantalonetas, lo cual deja ver que otras relaciones matemáticas como las de orden (en este caso de mayor que), la cual es una relación de cantidades, que posteriormente les posibilitaron a ellos realizar los apareamientos o mejor aún correspondencias biunívocas entre algunos de los elementos presentados, estas manifestaciones realizadas por los estudiantes cobran gran trascendencia en los procesos de toma de conciencia de los estudiantes frente a la tarea propuesta. Finalmente en esta tarea de indagación se realizó una socialización de lo que aconteció.

A partir de esta primera tarea de indagación se consideró oportuno tomar los planteamientos realizados por Vergel (2003), quien plantea como presupuesto teórico que “una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que un concepto funcione en sus diversos aspectos y para que aparezca la multitud de relaciones que tiene con otros conceptos” (p. 494). A partir de allí se consideró oportuno hacer una re-elaboración de las siguientes tareas de la investigación, en aras de que los estudiantes empiecen a relacionarse con el producto de medida a partir de las mismas. De igual forma este autor plantea que “Para que los saberes matemáticos ingresan a la escuela deben sufrir una re-elaboración didáctica, que los re-contextualiza, los re-personaliza y los re-temporaliza. Es en esta re-elaboración didáctica donde se debe centrar la actividad profesional del maestro de matemáticas” (Vergel, 2003, p. 494). A partir de esto se procede a la elaboración de la segunda tarea



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA
FONTIDUEÑO JAIME ARANGO
ROJAS. SECCIÓN 3**

**UNIVERSIDAD DE
ANTIOQUIA**



Mezclando y Pintando: Tarea N°2

Carta dirigida los estudiantes



Estimados estudiantes, es un placer para nosotros saludarles, teniendo en cuenta que ustedes han sido los elegidos para un gran proyecto que se está realizando en la Universidad de Antioquia; nos place informarles que ustedes van a ser partícipes de múltiples experiencias en las cuales tendrán la oportunidad de divertirse mientras aprenden y para ello es necesario que estén siempre dispuestos a participar activamente de cada una de las actividades con el fin de que el proyecto se desarrolle de la mejor manera posible.

Para iniciar nos han encargado realizar la primera misión la cual consiste en lo siguiente:

Realizar un dibujo que esté relacionado con algo alusivo al día del amor y la amistad, teniendo en cuenta que el dibujo que realicen debe contener la mayor cantidad de colores distintos posibles obtenidos por ustedes mismos y para que los encuentren les daremos las siguientes pautas.

1. Utiliza los colores primarios (amarillo, azul y rojo) y a partir de estos encontrarán los colores secundarios.
2. Una vez que tengas los nuevos colores secundarios, debes mezclarlos con los colores primarios para obtener nuevos colores que son llamados colores terciarios. Manos a la obra.
3. Realizar un dibujo que tiene que ver con algo alusivo al día del amor y la amistad, teniendo en cuenta que la pintura que realicen debe contener la mayor cantidad de colores distintos posibles y para que los encuentres te daremos las siguientes pautas.

4.2.2. Tarea N°2

Mezclando y Pintando

En esta tarea, se pretendía que los estudiantes empezarán a ver e interpretar la multiplicación de otra forma y en otros contextos distintos a los que comúnmente están acostumbrados, para ello entonces se les planteó realizar un dibujo con el mayor número de colores, realizando diferentes mezclas de colores, a partir de los colores primarios. En un

primer momento debían encontrar los colores secundarios a partir de los colores primarios (grupo N°1 (amarillo, azul y rojo)), y en un segundo momento debían mezclar los colores hallados con los primarios (grupo N°2 naranja, verde y morado), para así encontrar los colores terciarios, donde era posible ver el producto de medida. La tarea permite que el estudiante dé cuenta de distintas relaciones multiplicativas que pueden surgir durante su labor, haciendo las relaciones respectivas, dejando de lado la suma reiterada para poner en práctica diversos conceptos que están relacionados con la multiplicación, como el conteo por mencionar uno de ellos.

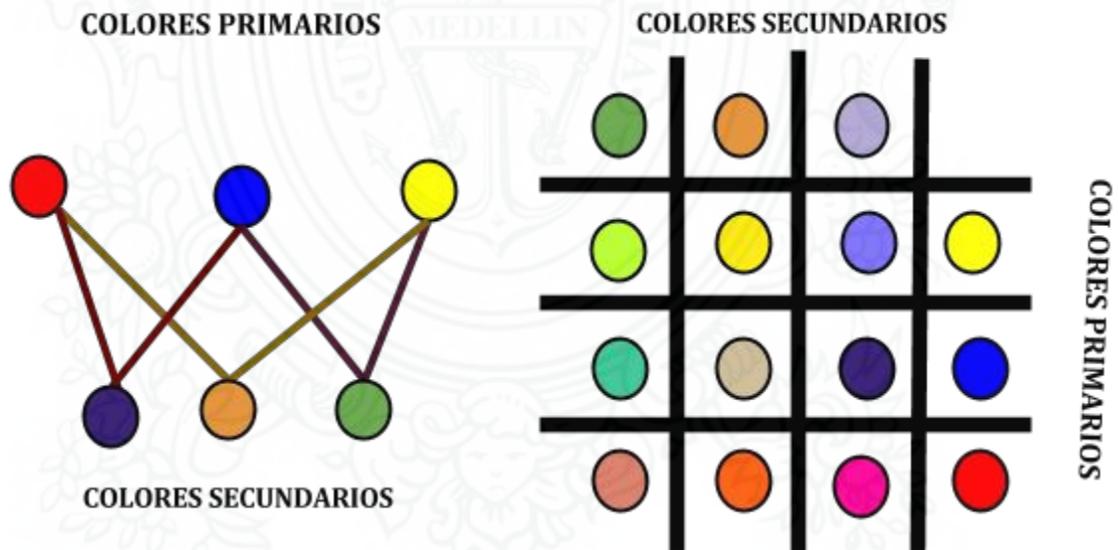


Figura 15. Mezclas colores primarios y secundarios

En aras de hacer motivante la tarea para los estudiantes, se les propuso realizar un dibujo, el cual debería contener la mayor cantidad de colores posibles, este dibujo debería estar relacionado con el día del amor y de la amistad, teniendo en cuenta que el mes en curso era el

1 8 0 3

de septiembre. Posteriormente los estudiantes dan inicio a su labor y empiezan a dialogar entre ellos. Un primer diálogo que tuvimos con los estudiantes fue el siguiente

- ❖ **I:** ¿Cómo van a hacer para encontrar estos colores?
- ❖ **Es:** Mezclando todos los colores
- ❖ **I:** ¿Cuáles colores?
- ❖ **Jenni:** El amarillo, el azul y el rojo <Deslizándolo sus dedos sobre los colores mientras respondía a la pregunta>.

A partir de este primer diálogo que tuvimos con los estudiantes, nos dimos cuenta de que los estudiantes han comprendido lo propuesto en la tarea, además de los medios semióticos lingüísticos que aparecen allí, los signos kinestésicos también hacen presencia dando cuenta de las formas en que el estudiante ha ido tomando conciencia de lo planteado, el señalamiento de los colores ayudan al estudiante a explicar lo que va verbalizando a partir del recurso kinestésico y lingüístico respectivamente.

Igualmente, se puede dar cuenta en el siguiente diálogo de la forma como los estudiantes interactúan, inicialmente lo hacen entre ellos mismos y con los objetos o artefactos que se encuentran presentes, los cuales a la luz de la teoría de la objetivación empiezan a verse como el camino hacia un aprendizaje. El diálogo continuó

- ◆ **R1. Jenni:** Por qué mejor cada uno no realiza una mezcla para tener todos los colores.
- ◆ **R2 Fernando:** Ah sí, yo mezclo el amarillo con el rojo.
- ◆ **R3 Martín:** Bueno, entonces yo mezclo el rojo con el azul.
- ◆ **R4. José:** Y yo... yo combino el que falta, ¿Cuál falta?(...) !ya! el azul y el amarillo.

El diálogo muestra claramente, que los estudiantes empiezan a tomar conciencia de la tarea propuesta y que a su vez se sienten motivados al trabajar con el material concreto, (aclaramos de igual forma que material concreto no siempre debe verse como cosas manipulables), lo cual les hacía más fácil entender lo propuesto. De acuerdo a lo anterior, es importante resaltar que “el material concreto o el juego pueden ser esenciales para que el aprendizaje ocurra. En este sentido, el material más adecuado, no siempre, será el más visualmente hermoso y tampoco jamás construido” (Fiorentini & Morin, 1990, p. 4). Esto da cuenta de la importancia de usar objetos concretos, los cuales repercuten en las formas de acción de los estudiantes. Por otra parte este diálogo permite ver además la importancia del trabajo colaborativo, donde la interacción entre los estudiantes se constituye en una ruta encaminada hacia la dotación de sentido de los objetos matemáticos presentes.

Ahora bien, en el momento en que los estudiantes mezclaron encontrando los colores secundarios, se evidencia que establecen una relación con los objetos dados, es aquí donde se hizo importante observar lo que realizaban entre todos, ya que a medida que desarrollan la tarea

tuvieron un diálogo e interacción permanente que les permitía encontrar los colores secundarios y esto lo realizaron delegando distintas funciones entre ellos para hacer de la tarea propuesta algo más sencillo, al mismo tiempo pudieron descubrir cómo surgen dichos colores y de esta manera lograron establecer la relación entre cada conjunto de colores primarios al relacionarse con los otros dos, obteniendo un total de tres colores secundarios. Estas interacciones, de acuerdo con Radford (2006) son consustanciales al aprendizaje, “En lugar de desempeñar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando la interacción es consustancial del aprendizaje” (p. 114).

Las palabras “mezclo”, “mezcla” y “combino” usadas por los estudiantes, están dando cuenta del uso de recursos semióticos lingüísticos y a su vez están haciendo manifestaciones a partir de los recursos semióticos kinestésicos, en la siguiente figura los estudiantes, empiezan a realizar las distintas mezclas.

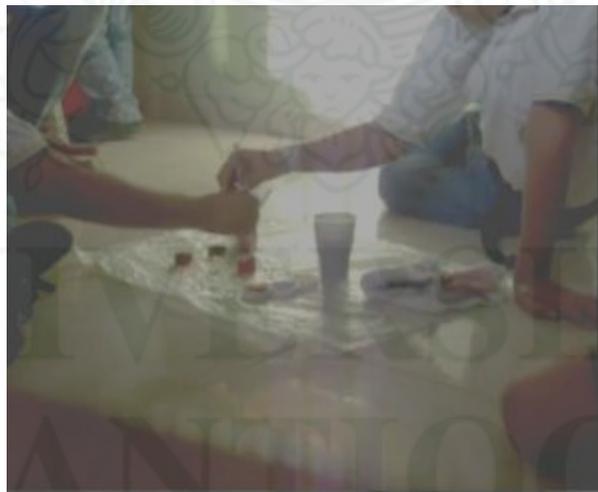


Figura 16. Estudiante mezclando pinturas

1 8 0 3

Es importante reconocer, que desde nuestras lecturas e indagaciones sostenemos que en cada producto de medida hay una mezcla de colores implícitamente (Como lo expresa José en **R4**) y es a partir de estos planteamientos que se asegura que los estudiantes tácitamente a partir de la carga histórico-cultural usan palabras que son propias de sus discursos y las cuales tienen una estrecha relación con las formas de ver la multiplicación anteriormente, este hecho de recurrir a experiencias anteriores, según Radford (2008), es un indicador del proceso de objetivación denominado iconicidad, aunque en este caso la multiplicación como producto de medida aún no se manifestó explícitamente por parte de los estudiantes, dado que los planteamientos realizados por los mismos eran enfocados más al conteo dactilar o conteo por señalamientos.

En la siguiente ilustración se muestra los colores que obtuvieron los estudiantes a partir de las primeras mezclas que realizaron



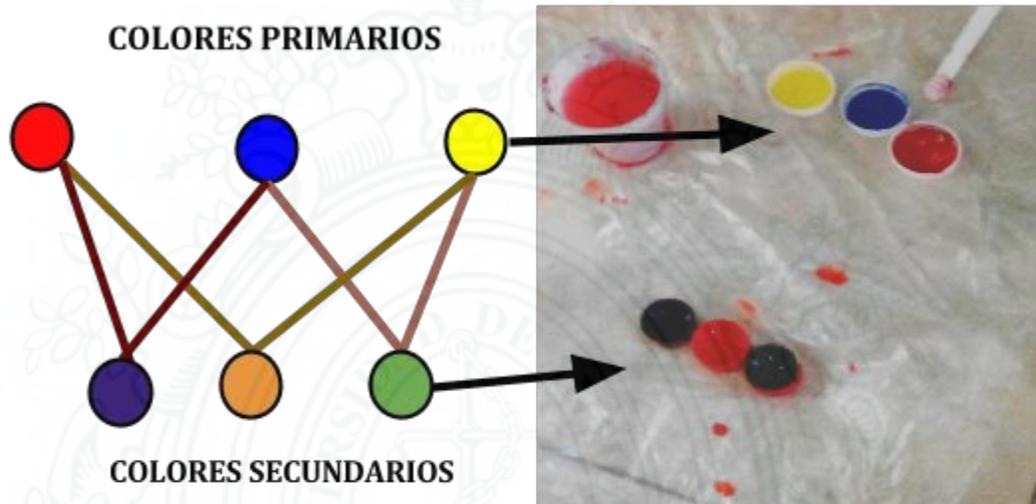


Figura 17. Mezcla de los colores encontrados por los estudiantes

SEGUNDO MOMENTO

Después de realizar la primera mezcla, se realiza un segundo momento el cual cobraba más importancia dado que en este las relaciones matemáticas se pueden observar con mayor claridad. Aquí, la misión de los estudiantes era mezclar los colores secundarios y primarios encontrados inicialmente para darle paso a los terciarios, donde tácitamente iba a estar el producto de medida, en este caso de (3×3) .

Para ello se optó por denominar por grupos los colores a mezclar de la siguiente manera,

el grupo N°1 correspondió a los colores primarios,  y el grupo N°2

correspondió a los colores secundarios, . En este caso no se les pidió a los estudiantes que se hicieran por parejas, puesto que consideramos que a partir de ellos esta necesidad debería surgir, así los estudiantes empezaron por mezclar los colores del grupo 1 con los colores del grupo 2, con el fin de obtener nuevos colores, sin realizar mezclas entre los colores del mismo grupo, esto para obtener sólo los colores terciarios, inicialmente los estudiantes empezaron a realizar cada uno sus propias mezclas (Ver *figura 18*). Y así, surgió la siguiente discusión



Figura 18. Estudiantes encontrando nuevos colores

- ❖ **R1. Martín:** José yo ya mezcle el verde y el amarillo
- ❖ **R2. José:** Aaaaaah, yo no sabía
- ❖ **R3. Martín:** Cuáles ha mezclado usted? <refiriéndose a José>
- ❖ **R4. José:** El amarillo con el verde, el rojo con el morado y el azul con el naranja

- ❖ **R5. Jenni:** Yo también mezclé el azul con el naranja
- ❖ **R6. Martín:** Deberíamos copiar las mezclas que ya están para no repetirlas
- ❖ **R7. Jenni:** Ah bueno, entonces yo copio los que vamos mezclando <Ver figura

19>.

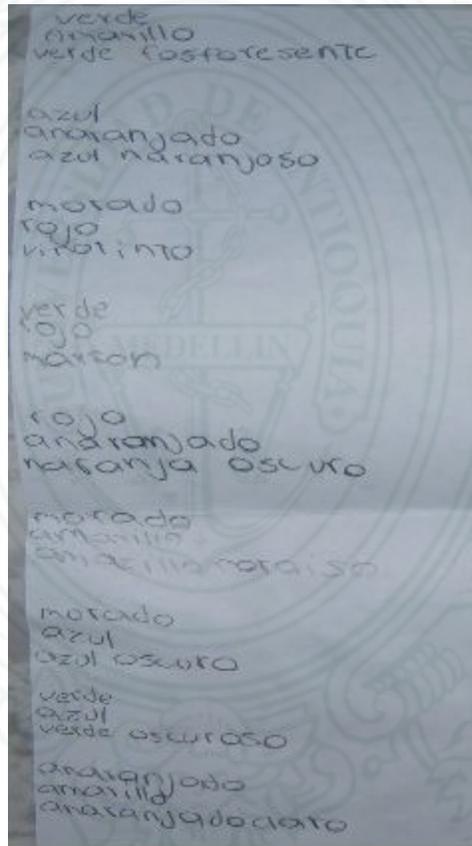


Figura 19. Registro realizado por los estudiantes

Esta discusión muestra como los diálogos e interacciones entre los estudiantes se hace necesario, puesto que a partir de allí es posible establecer acuerdos en concordancia con la Labor que van desarrollando, de igual forma esto cobra gran trascendencia en los procesos de aprendizaje. Así mismo aparece por parte de los estudiantes la necesidad de registrar las

distintas mezclas como se ve en R6, estos registros son sin duda alguna, artefactos culturales que les posibilita a los estudiantes dar respuesta a la tarea presentada de una manera más fácil y a su vez se convierten en un puente que lleva hacia la movilización de su pensamiento. De acuerdo con esto Radford (2008), plantea que “los artefactos no son simplemente ayudas para pensar, ni simples amplificadores, sino más bien partes constitutivas y consustanciales del pensamiento. Pensamos con y a través de artefactos culturales” (p. 218). Las palabras expresadas por Martín en R6, son “una manifestación de la necesidad de tener registros, de palpar, de poder acceder al objeto de forma mediada, necesita algo para poder tomar conciencia de lo que están haciendo” (p. 63), es entonces a partir de aquí, que esta necesidad les posibilita a los estudiantes tomar conciencia de eso que están haciendo, en medio de la Labor.

Posteriormente los estudiantes terminaron de encontrar los colores terciarios, a partir de allí los investigadores, en la socialización con los estudiantes, realizamos una serie de preguntas, las cuales pretendían determinar qué acercamientos lograron tener los estudiantes de la multiplicación, específicamente de la multiplicación como producto de medida

- ❖ **R1. I:** ¿cuál es el total de los colores que surgieron?
- ❖ **R2. José:** 1,2,3,4,5,6,7,8,9... 9 <haciendo señalamientos a los colores encontrados>
- ❖ **R3. I:** ¿estos colores surgieron de?
- ❖ **R4. Fernando:** de mezclar los tres colores primarios con los otros tres secundarios <señalando el grupo N°1 con el N°2>.

- ❖ **R5. I:** ¿En caso tal de que tuviéramos cuatro colores de un grupo y necesitamos mezclarlos con tres colores del otro grupo cuántos colores pueden resultar?
- ❖ **R6. Jenni:** 12.
- ❖ **R7. I:** ¿por qué?
- ❖ **R8. Fernando:** porque si agregamos otro color solo faltaría sumarle tres más a los que ya hicimos por eso da 12.
- ❖ **R9. I:** si ya no son 3 con 4 los colores que tenemos que mezclar, sino 6 con 3 ¿cuántos colores obtendremos?
- ❖ **R10. Martín:** Entonces habría que agregar, tres más si fuesen cinco, pero como son seis debemos agregar seis más, entonces serían 18 profe <Contando con sus dedos los seis colores más, como se muestra en la *figura 20*>



Figura 20. Conteo dactilar

1 8 0 3

En R2, es posible evidenciar que el estudiante usa el conteo para dar respuesta a la pregunta de cuántos colores resultaron, reconocemos a partir de aquí que a los estudiantes en sus clases se les ha presentado la multiplicación, a partir de la suma reiterada por medio de algoritmos, por lo cual se explican sus formas de acción frente a la cuestión propuesta. Desde Radford & André (2009) citado en Mojica (2014).

(...) cuando el niño empieza a contar, toca o indica con gesto indexical los objetos contados; las acciones y gestos suponen una orientación en el espacio, sin la que el conteo se perdería. De manera frecuente, cuando algunos niños están contando varios objetos frente a ellos, "pierden" la cuenta debido a la falta de orientación espacial entre lo que ha sido tocado o indicado a través del gesto y aquello que queda por contar. Esto también significa una pérdida en el control de las acciones y de la posición respecto a los objetos que están siendo contados. (p. 79)

Estas formas de contar por señalamientos usadas por los estudiantes, hacen parte de medios semióticos kinestésicos, las cuales en este caso son formas de acción histórico-culturales, que les permiten a los estudiantes la movilización de pensamiento matemático, los cuales se traducen en conteos de unidades en la lógica de la multiplicación, según Mojica (2014), quien manifiesta, que en este Medio Semiótico de Objetivación “se acude a la práctica cultural de realizar conteos con los dedos, los cuales no solamente representan conteos de unidades simples sino de unidades múltiples que capturan la lógica de la multiplicación” (p. 52), es decir, estas manifestaciones realizadas por los estudiantes tienen una estrecha relación con las formas de operar con la multiplicación.



Figura 21. Señalamientos de Jenni

Otro aspecto importante a tener en cuenta, tiene que ver con las formas en que los estudiantes se expresan entre ellos mismos, donde hacen uso de recursos semióticos del lenguaje y al mismo tiempo de recursos semióticos kinestésicos, estos diálogos permiten a todos los estudiantes presentes, tomar conciencia colectiva sobre lo que se debe realizar de acuerdo a la tarea presentada, dado que es en estas discusiones donde los estudiantes realmente terminan por entender lo planteado y por ende encaminarse en la Labor. Este es un posible acercamiento a la multiplicación sin tener que recurrir a la operación algorítmica o suma repetitiva, porque al mezclar un color de uno de los grupos con tres del otro se da lugar a otros, estos tres colores no son ni iguales al del primer grupo ni iguales a los tres del segundo grupo, apareciendo así una nueva mezcla de colores. La siguiente ilustración muestra la forma como los estudiantes mezclaron los dos grupos entre sí para obtener los colores terciarios.

1 8 0 3



Figura 22. Mezclas de colores primarios y secundarios

Todas estas manifestaciones realizadas por los estudiantes en la Labor da indicios de que hay un acercamiento a la multiplicación por parte de los estudiantes vinculada con el producto de medida, dado que las acciones de los niños desencadenaron actividad matemática, en el sentido en que empezaron a unir los colores que se mezclaban. Si bien los estudiantes han realizado sus apreciaciones a partir del conteo, agregando las cantidades necesarias para dar respuesta a las preguntas planteadas, consideramos que es importante reconocer que en esta tarea la multiplicación explícitamente no ha sido develada por los estudiantes, y para ello entonces se recurre al diseño de una nueva tarea, la cual se expresa a continuación.



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA
FONTIDUEÑO JAIME ARANGO
ROJAS. SECCIÓN 3**



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Preparación de Halloween: Tarea N°3

Inicialmente se les preguntó a los estudiantes que les parecía interesante que abordaremos en el mes de octubre, ellos manifestaron que les gustaría hacer algo con algunos disfraces, y para ello se realizó la siguiente tarea.



A los estudiantes se les facilitó algunos elementos como gorros (de papá noel, zorro, bruja, payaso); y algunos accesorios (un par de gafas y un par de antifaces) (Ver imágenes).



Se les permitió que interactúen con estos elementos, y en el transcurso de esto se les preguntó a los estudiantes por la cantidad de disfraces distintos que resultan teniendo en cuenta todos los gorros y todos los *accesorios*.

4.2.3. Tarea N°3

PREPARACIÓN DE HALLOWEEN

En concordancia con el objetivo planteado en esta investigación, de igual forma que en las anteriores tareas se propone indagar acerca de los medios semióticos movilizadas por los estudiantes durante la Labor que emprendieron y así reconocer cuál o cuales procesos de objetivación se evidenciaron.

La tarea de aula se llamó *preparación de Halloween*. Aprovechando el mes de octubre y a partir de las sugerencias dadas por los estudiantes que hacían parte del caso, quienes

manifestaban que querían hacer algo alusivo a este mes, se les facilitó a los estudiantes diversos accesorios con los cuales se pudiesen disfrazar, estos fueron cuatro gorros y cuatro accesorios diferentes, como se ilustra en las siguientes imágenes.



Foto 1

Foto 2

Figura 23. Gorros y accesorios para los disfraces

Después, de que los estudiantes interactuaron con los elementos dados y entre ellos mismos, surgió una pregunta la cual permitió en los estudiantes la movilización de su pensamiento matemático, esta fue **¿De cuántas maneras distintas me puedo disfrazar con cada uno de los gorros teniendo en cuenta los accesorios?**

En el desarrollo de la tarea, se evidenció que después de que se les presentó la pregunta a los estudiantes se mostraron muy confundidos, en primera instancia se muestra un acercamiento a la incertidumbre y la incompreensión.

- ❖ **R1. Jenni:** lo podemos hacer con cada gorro, con todos las gafas, y después el otro.
- ❖ **R2. Fernando:** tenemos que mezclar accesorios, el gorro.
- ❖ **R3. Martín:** Aaaaaaah si! así sí podríamos hacerlo.

A partir de este primer diálogo los estudiantes empezaron a colocarse cada uno un gorro con los distintos accesorios, en este caso resaltamos la palabra mezclar, dado que en esta tarea los elementos con los cual se trabajaba eran distintos, sin embargo la experiencia adquirida por los estudiantes en la anterior tarea les permitió usar recursos semióticos, que posteriormente los han de llevar a una toma de conciencia de lo que se ha planeado en esta ocasión, reiteramos de acuerdo con Radford (2008) que el acudir a las experiencias anteriores por parte de los estudiantes para transformar sus formas de acción durante la Labor, es señal de un proceso de objetivación de iconicidad tal y cual como se mencionó en el análisis de la anterior tarea.



Figura 24. Interacción de los estudiantes con los elementos y con ellos mismos

En concordancia con los planteamientos realizados por Radford (2006) de acuerdo a su teoría en la cual se plantea que el trabajo en el aula de clase se debe realizar en grupos pequeños, en la situación presentada se permitió una mayor comprensión de la tarea propuesta, dado que el intercambio de palabras que se da entre los estudiantes es un elemento fundamental en los procesos de objetivación. Los estudiantes empiezan entonces a discutir las posibles

soluciones a la pregunta formulada, analizando detalladamente el diálogo inicial de los estudiantes, es posible evidenciar que los estudiantes usan diferentes expresiones para comunicar lo mismo, en este caso, particularmente los estudiantes se refieren a realizar mezclas entre los elementos, en R2 se muestra cómo aparece la palabra **mezclar**, aunque el estudiante lo expresa de acuerdo a los movimientos que realiza con sus manos cuando empiezan a hacer correspondencias entre cada accesorio haciendo distintos gestos, manifiesta que se debe realizar una mezcla de distintos objetos para encontrar de cuántas maneras distintas se pueden disfrazar.

Ahora bien, los estudiantes al comprender la situación, también acceden al mecanismo de expresar en forma verbal lo que se les plantea, es por esta razón que se puede decir que dan cuenta del surgimiento de otro medio semiótico vinculado con el recurso lingüístico, ya que lo utilizaron como medio para dar un acercamiento a la solución. Sin duda alguna han emergido ya elementos semióticos que han ido posibilitando en los estudiantes tomar conciencia de lo que han ido realizando. Seguidamente al acontecimiento dado anteriormente y reflexionando en torno a la pregunta movilizadora los estudiantes empiezan a estimar para saber de cuántas maneras se podían poner el disfraz. Surgió el siguiente diálogo.

- ❖ **R1. Fernando:** más o menos unas 8.
- ❖ **R2. I:** ¿Por qué?
- ❖ **R3. Fernando:** Porque son cuatro gorros y cuatro accesorios
- ❖ **R4. Jenni:** mmm Yo creo que deben ser más porque habría que <una pausa>

mezclar, pero no sé cuántos serán

En primera instancia Fernando no interpreta que cada gorro debe relacionarse con los cuatro accesorios, para formar mayor cantidad de disfraces diferentes, sino que se dispone a sumar los gorros con los accesorios, como está expresado por Fernando en R3, tal vez buscando un total y asociando esta pregunta a problemas anteriores en los que se les suele preguntar por un total y la operación esperada es una adición.

Luego de poner en juego las discusiones de los niños en la situación y ante la intención de los estudiantes de dar una respuesta acertada, se dio nuevamente una discusión con los estudiantes, donde terminaron considerando oportuno empezar a colocarse cada gorro con cada accesorio, para ir contando.

- ◆ **R1. Martín:** Deberíamos empezar a mirar cuantos nos sale de cada gorro con cada accesorio
- ◆ **R2. Fernando:** ¡Siii!, Deberíamos coger cada gorro con el antifaz y ver cuantos resulten
- ◆ **R3. José:** mmmm ¿Cómo?
- ◆ **R4. Fernando:** Así, nos ponemos el antifaz <haciendo la representación corporal de ello, ver *figura 25* > y luego un gorro, luego otro y así



Figura 25. Fernando mostrando a sus compañeros como hacer las diferentes mezclas

Fernando, deja claro que ha tomado conciencia de la tarea presentada, haciendo uso de manifestaciones auténticas de él, estas acciones corporales, a luz de la teoría de la objetivación se constituyen en formas de acción que conllevan a un estado de significación, de igual forma estos diálogos e interacciones sostenidos por Felipe con los demás estudiantes impulsaron la reflexión de los demás. Luego de esto los estudiantes, continuaron en la Labor, donde empezaron a ponerse cada accesorio con cada gorro, tal y cual como se muestra en la siguiente imagen.

1 8 0 3



Figura 26. Fernando disfrazándose

Esta serie de imágenes presentadas anteriormente, se muestra a Fernando haciendo las distintas relaciones con los elementos, esto lo realizó con ayuda de los demás estudiantes quienes se encargan de decirle cuál accesorio debía ponerse en aras de no perder el orden de lo que iba realizando y así poder culminar con la tarea de forma exitosa. Así mismo cuando se

disfrazaba de una manera distinta, los estudiantes llevan un conteo simultáneamente, el conteo nuevamente toma gran importancia en este tipo de tareas, el cual empieza a dar cuenta de que el conteo para abordar la multiplicación no debe ser un único punto de partida, es una ruta para llegar a otras formas de comprender la multiplicación, de acuerdo con esto, el abordaje implícito que han hecho los estudiantes hasta este momento del objeto matemático en cuestión a partir de los conteos, deja ver que estos conteos están mediados por artefactos culturales, los cuales en este caso son más visibles, puesto que estos aparecen de forma concreta.

Por otra parte, mientras los estudiantes continuaban realizando la tarea, Jenni de igual forma iba registrando los distintos disfraces realizados

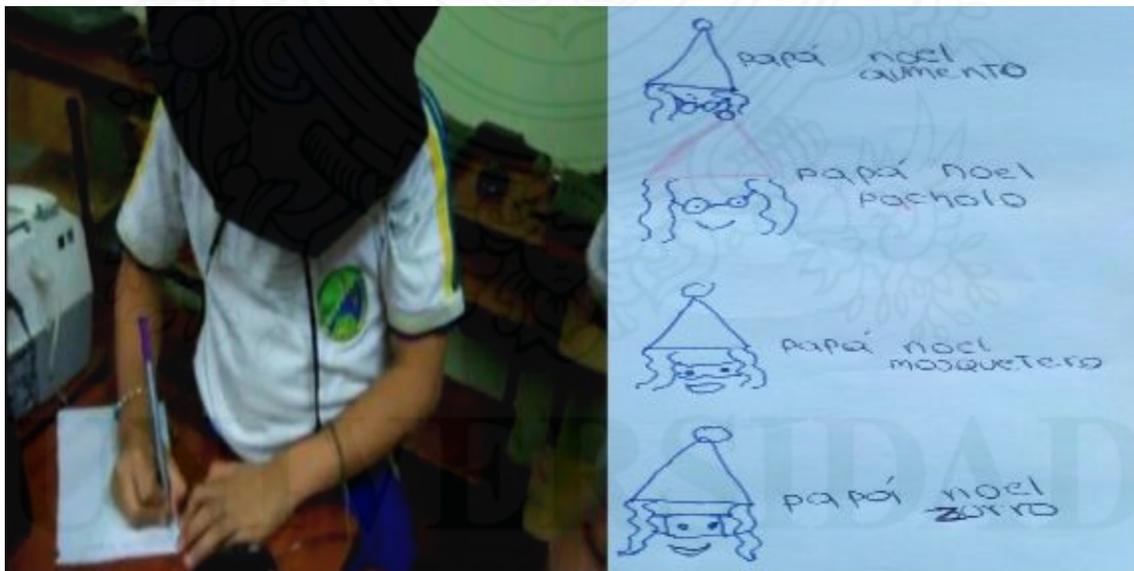


Figura 27. Estudiantes plasmaron un dibujo para verificar la tarea

Es así, que se observa con claridad que frente a las acciones de los estudiantes para resolver la tarea, estos recurrieron al dibujo el cual puede ser visto como un recurso semiótico

de objetivación, dado que fue resultado de la misma necesidad de los estudiantes de registrar para posteriormente realizar un proceso de conteo, en esta misma figura los estudiantes acuden a escribir en frente de cada dibujo un nombre representativo para cada disfraz, y esto surgió a partir de las interacciones que los estudiantes tuvieron en el transcurso de la tarea, lo que les sirvió para identificar cada uno de los disfraces, esto da cuenta de intenciones comunicativas por parte de los estudiantes, pues quieren ser claros a la hora de registrar cada disfraz en aras de no equivocarse en los conteos. Como lo plantea Mojica (2014) “el MSO dibujo no aparece de forma aislada, surge como parte de la labor” (p.71), es decir, el dibujo por si solo tiene una razón de ser en medio de la Labor el cual se convierte en un puente importante para dar respuesta a la tarea planteada

Además, en el transcurso de la situación también se les preguntó a los estudiantes: **¿habrá una forma para saber de cuántas maneras distintas vamos a obtener sin tener que colocarnos los accesorios?**, se puede observar en el siguiente fragmento tomado del diálogo con los estudiantes como entran a jugar los saberes de los mismos:

- ❖ **R1. Jenni:** sí, sumando, cada una de las gafas con cada uno de los gorros.
- ❖ **R2. Martín:** Juntándolos.

En el R1, se evidencia que en la respuesta que Jenni da, es acudir a la adición y esto aún demuestra que para hacer los cálculos requiere de este objeto matemático, dado que desde su posición en su momento es más fácil acceder a la suma que a la multiplicación. Entonces, ve

así en la tarea algo más sencillo que es sumar cada uno de los accesorios con cada uno de los gorros, lo mismo que en el R2 como lo expresa Martín, cuando dice es juntandolos haciendo alusión a la misma operación aritmética. A partir de allí se afirma que aún los estudiantes ven la tarea en términos aditivos, lo cual no es lo mismo que un producto de medida, como lo menciona Maza (1991). Sin embargo, esto les está permitiendo encaminarse hacia el producto de medida, dado que al juntarlos forman en sí una relación de dos cantidades. Finalizando la tarea y los estudiantes dando respuesta a la pregunta inicial ¿De cuántas maneras distintas se podían disfrazar teniendo en cuenta los elementos dados?, a partir de los conteos, los estudiantes respondieron que en total eran 16, posterior a esto se realizó un conversatorio con la tarea presentada, donde se dió lo siguiente.

- ❖ **R1. I:** ¿Qué pasaría si ya no fueran 4 gorros sino 5, cuántas maneras distintas podríamos tener para disfrazarnos?
- ❖ **R2. Fernando:** profe son 20 maneras.
- ❖ **R3. I:** ¿Cómo llegó a esta respuesta tan rápidamente?
- ❖ **R4. Fernando:** profe, con 4 son 16, y entonces 17 con una máscara, 18 con otra, 19 con otra y 20 con otra.<esto lo realiza a través del conteo con los dedos>.

Así mismo, esta discusión resulta ser de cierta forma similar a lo que aconteció en la tarea anterior, donde nuevamente el conteo dactilar por parte del estudiante, se convierte en herramienta para dar respuesta a la pregunta planteada. Es así, que se evidencia que la emergencia de estos medios semióticos, en especial el Kinestésico, se convirtió en herramienta

fundamental para posibilitar en los estudiantes la construcción social de significados referentes a la multiplicación a partir del producto de medidas, los cuales empezaba a inducir a un proceso de objetivación de la multiplicación como producto de medida, permitiendo así la elaboración de otros significados para el objeto matemático en cuestión.

Continuando con las discusiones en torno a la pregunta anterior se presenta el siguiente diálogo entre los estudiantes:

- ❖ **R1. I:** ¿Qué pasaría si las relaciones que debemos hacer se hacen con números más grandes, por ejemplo con cinco pelucas y ocho accesorios?
- ❖ **R1. José:** Jum!!!, ya no se podría hacer agregando de a tres
- ❖ **R2. Fernando:** ¡Claro!, hay que hacer una multiplicación
- ❖ **R3. Jenni:** mmmm si, yo creo que multiplicación se puede hacer
- ❖ **R4. Martín:** José, sí porque por la suma es más largo y la multiplicación es más rápida.

A partir de esta discusión, los estudiantes se dan cuenta de que el conteo no puede ser funcional para ellos en todos los casos y que lo que se esconde detrás de estas relaciones matemáticas es una multiplicación de manera tal que al unir dos conjuntos distintos se puede obtener una magnitud nueva y diferente a la de las colecciones iniciales. La expresión dada por Martín en R4. “*porque por la suma es más largo y la multiplicación es más rápida*”, está manifestando que no es obligación acudir al conteo en problemas de tipo multiplicativo

referentes al producto de medida, donde la multiplicación se convierte en una herramienta más eficiente y más rápida en la realización de los cálculos. Aclaramos acá que no desconocemos de igual forma la importancia del conteo y más aún en estas tareas, donde a partir de los análisis el conteo por señalamiento o dactilar fue el enlace para que los estudiantes empezaran a hacer un acercamiento a la multiplicación de una manera más significativa, resaltamos de igual forma el hecho trascendental de que los estudiantes le hayan dado significado al objeto cultural de la multiplicación como producto de medida, el cual les permitió entrar en un proceso de toma de conciencia y un posicionamiento crítico frente a los objetos matemáticos allí presentes. A partir de estos análisis, evidenciamos que los estudiantes desplegaron medios semióticos de objetivación Kinestésicos y Lingüísticos, donde además la interacción cobró un papel importante, así mismo de acuerdo a lo dicho en R1, en esa transición de pasar de la suma a la multiplicación hay una reducción de los medios semióticos, al considerar que a partir del conteo dar respuesta a la pregunta planteada es más complejo y por ende pasan a otras formas más sofisticadas de resolver tareas de este tipo, por medio de la multiplicación. En concordancia con esto, la reducción hace parte de un proceso de objetivación de contracción semiótica, donde los recursos semióticos utilizados actuaron en pro de llegar a la multiplicación, la cual les permitió a los estudiantes tomar conciencia de una nueva forma de significar la multiplicación. Por último presentamos este esquema en el cual se recogen aspectos generales frente a los hallazgos encontrados en los distintos análisis.

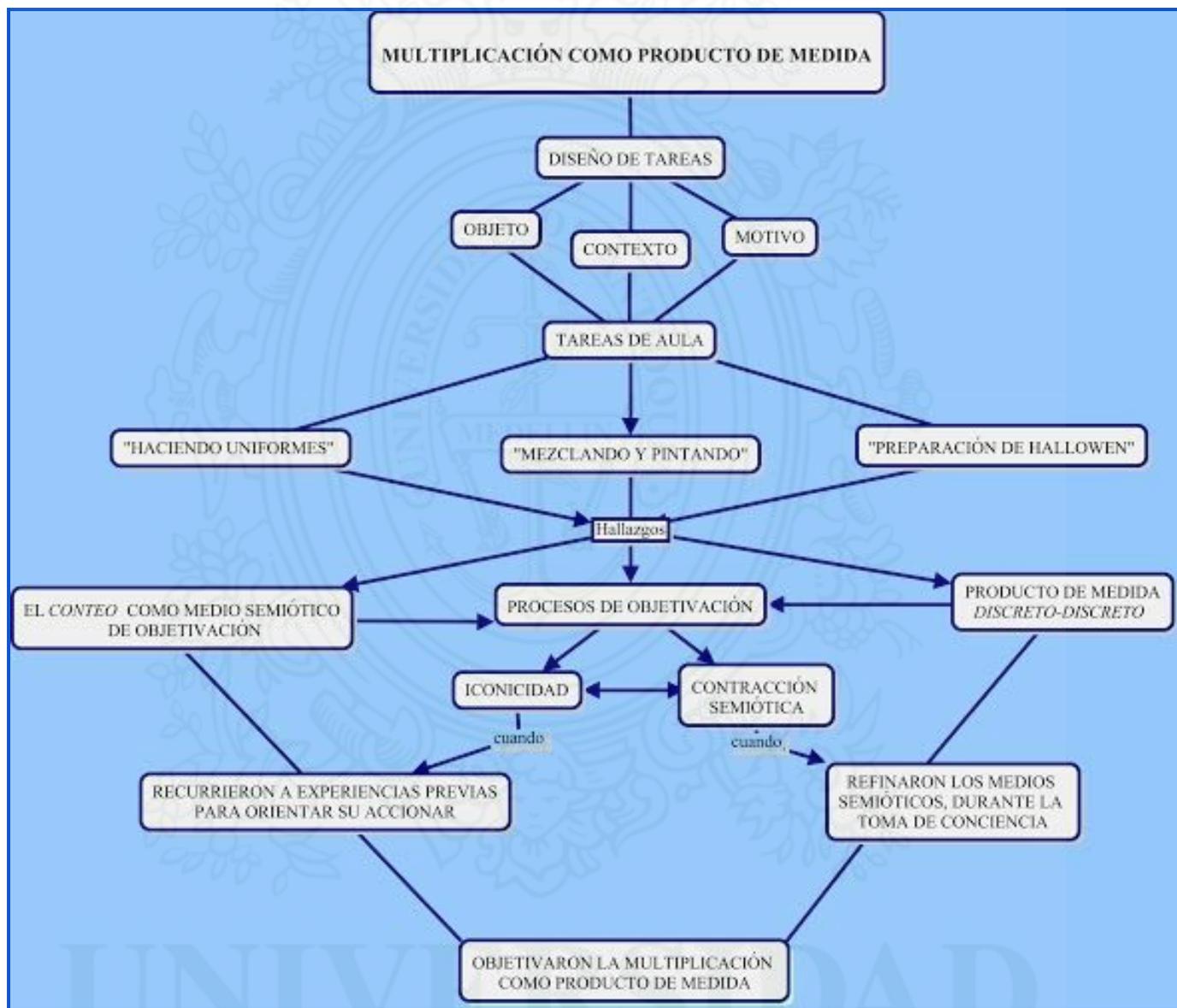


Figura 28. Esquema de análisis.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

5. QUINTA PARTE: CONCLUSIONES

Las conclusiones que a continuación se presentan, están fundamentadas desde el proceso de investigación que llevamos a cabo y así mismo desde las experiencias que como maestros en formación vivimos por medio de la práctica docente, señalando los aportes del centro de práctica hacia nosotros y así mismo los aportes que como maestros en formación e investigadores le brindamos a la institución.

En este trabajo investigativo, la pregunta que movilizó esta investigación fue **¿Cómo son los procesos de objetivación de los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, cuando resuelven tareas de aula relacionadas con el producto de medida?**, a partir de allí se consideró oportuno analizar las formas en que los estudiantes le dan significado a la multiplicación, para ello entonces se vio necesario reconocer y analizar los medios semióticos de objetivación que emergieron en el desarrollo de las tareas por medio de la labor, de acuerdo con este análisis se reconocen dos procesos de objetivación, el primero de ellos tiene que ver con la iconicidad, el cual se hizo visible cuando los estudiantes acuden a sus experiencias previas, para desplegar acciones frente a una nueva tarea. Esto se dió en los estudiantes cuando en las dos últimas tareas para dar respuesta a las mismas de acuerdo a experiencias previas, acuden al conteo del cual ellos ya habían tomado conciencia, realizando así las distintas mezclas que iban surgiendo del producto de medida, a

partir de la relación *discreto-discreto*, puesto que desde esta relación el conteo les resultaba más elemental y finalmente el otro proceso de objetivación identificado correspondió al proceso de contracción semiótica, el cual les permitió a los estudiantes refinar los recursos semióticos que se movilizaron en primera instancia, conduciéndolos “a un nivel más profundo de inteligibilidad de la tarea” (Radford, 2012, p. 686), referenciado en Mojica (2014), es decir a niveles que les permitieron una mejor comprensión de la tarea, en este caso, esta contracción semiótica se hizo evidente en el reconocimiento que hicieron los estudiantes del conteo como medio semiótico de objetivación para dar solución a la tarea, trascendiendo posteriormente a reconocer la multiplicación como una manera eficaz y rápida de realizar operaciones relacionadas con las tareas diseñadas, en otras palabras a partir de allí los estudiantes lograron dotar de significado la multiplicación, en este caso como producto de medida

En vista de ello, múltiples fueron los medios semióticos de objetivación que emergieron en el desarrollo de estas tareas, especialmente el de conteo dactilar o por señalamientos, correspondiente a los medios semióticos Kinestésicos, los cuales se convirtieron en una forma de manifestación de las maneras de significar o bien de pensar de los estudiantes, de acuerdo a esto se consideró que el conteo parece ser la estrategia más viable de llegar a procesos de objetivación de la multiplicación como producto de medida, como mencionamos anteriormente. En la misma línea se piensa que las formas de acción en las cuales los estudiantes usan partes de su cuerpo para dar respuesta a las tareas (con las cuales según nuestras indagaciones no habían tenido relación) para luego trascender a una forma más rápida y eficiente de resolver la tarea como lo es la multiplicación, da cuenta de la importancia de

reconocer en el aula de clase, todas estas manifestaciones que los estudiantes realizan, pues sin duda alguna todas están cargadas de distintos significados que a simple vista pasan desapercibidos.

Además, los registros usados como los dibujos o representaciones por los estudiantes, se convirtieron de igual forma en Medios Semióticos de Objetivación, los cuales están cargados de intencionalidad y pretenden así mismo ayudar a los estudiantes a partir del objeto material a dar respuesta a las tareas presentadas. La emergencia de los MSO antes referenciados, permitió a los estudiantes darle otro sentido y significado a la multiplicación, que gradualmente les permitió llegar a un proceso de objetivación continuo de la multiplicación como producto de medida, donde cada interacción, cada gesto, cada discusión, cada accionar, cada manifestación en medio de la Labor, fueron puente en la transición del conteo a la multiplicación, donde el alumno tomó conciencia, crítica y activamente de la multiplicación como producto de medida.

Por otra parte como se planteó en el Marco teórico de este trabajo de investigación, las tareas que se diseñaron teniendo en cuenta el objeto/motivo (objeto de investigación y motivo para los estudiantes), les permitieron a los estudiantes una participación más activa, dado que en ellas había algo más allá que una solución, en estas los estudiantes podían hacer emerger relaciones matemáticas sin ser ese su objetivo. También, se asegura que el diseño de tareas bajo las condiciones presentadas, requieren de un proceso de análisis detallado del contexto en el

cual se van a desarrollar y de nuestras pretensiones pues es a partir de allí desde donde van a cobrar gran sentido para los mismos estudiantes, pues el relacionar las matemáticas con su vida cotidiana, despierta en los estudiantes un mayor interés por el saber y más allá de esto van a permitir generar procesos de toma de conciencia y llevar por ende a procesos de objetivación.

Desde la experiencia como practicantes e investigadores y desde el reconocimiento que se le da al aula como un lugar donde concurren diversos aprendizajes, tenemos que agradecer a la Institución Educativa, pues de allí aprendimos que el aula es un lugar diverso y complejo (acá no nos referimos al espacio físico, sino más bien al espacio donde se da lugar a la enseñanza y aprendizaje), donde se dan distintas interacciones entre los estudiantes, los maestros y el saber. De igual forma se comprende que el aula, es un lugar donde es posible evidenciar distintos aspectos referentes al aprendizaje; del porqué de los razonamientos y acercamientos que los estudiantes hacen a los distintos saberes que pueden emerger en el aula, todo esto es visible a partir de las manifestaciones que realizan los mismos. Por ello, se considera a partir de esta experiencia, que la mirada de los maestros debe ser más sensible frente a las formas en que los estudiantes se relacionan con los objetos matemáticos, pues es desde allí desde donde el docente puede generar acciones que orientan a los estudiantes a procesos de objetivación de los contenidos tratados.

Finalmente, como líneas futuras de investigación, se propone a partir de los constructos teóricos realizados por Vergnaud y Radford, indagar sobre los medios semióticos de

objetivación que emergen cuando se trabaja el producto de medida, a partir de la relación continuo-continuo, pues en este caso el producto de medida fue abordado desde la relación discreto-discreto. Así mismo, se propone indagar acerca de cómo son los medios semióticos de objetivación emergentes y procesos de objetivación llevados a cabo en tareas distintas a las relacionadas con el producto de medida, como lo son el isomorfismo de medida y el espacio único de medida, pues esto llevaría a reconocer cuales son los procesos de objetivación que están presentes en el campo tan grande que es la multiplicación. De igual forma, se considera oportuno investigar qué acercamientos a la multiplicación llevan a cabo estudiantes que no han tenido ninguna relación con la multiplicación, pues en este caso, se trabajó con estudiantes de grado tercero, los cuales ya tenían acercamientos a ésta a partir de la suma reiterada.

6. BIBLIOGRAFÍA

Botero, O. E. (2006). Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Carrera, B. & Mazzarella, C. (2001). Vygotsky: enfoque sociocultural. *Educare*, 5(13), 41-44.

Davídov V. (1988). La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. *Investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Progreso.

García, M. & Suárez, A. (2010). Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas.

Godino, J. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colección Digital Eudoxus*, (11).

Fernández B. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: Una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de educación*, 43, 119-130.

Fiorentini, D & Miorim, M. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, 4(7).

Hernández, I & Ojeda, J. (2014). El producto a lo largo de la historia. *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*, (3), 10-11.

ICFES. (2012). Colombia en PISA 2012. Informe Nacional de resultados. Resumen ejecutivo. Recuperado de <http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa>

Maza, C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. Madrid: Síntesis.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. *Magisterio*, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30. [PDF]

Mojica, J. (2013). Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. *Revista Científica*, 121 - 125.

Mojica, J. (2014). Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Mora, L. O., Romero, J., Rojas, P. J., Rodríguez, J., Castillo, E., Bonilla, M., & Sánchez, N. (2006). Aspectos históricos y psicológicos de la multiplicación.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. (Spanish). *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, p. 103-129.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació*, 33-49.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de*

Etnomatemática, 7(2), 132-150.

Rosas, Y. Solovieva, Y. & Quintanar, L. (2014). Formación de las acciones de multiplicación y división en la escuela primaria.. *PoiéSis-Revista Do Programa De Pós-Graduação Em Educação*, 8, 83 a 101. Recuperado de: <http://portaldeperiodicos.unisul.br/index.php/Poiesis/article/view/1721>

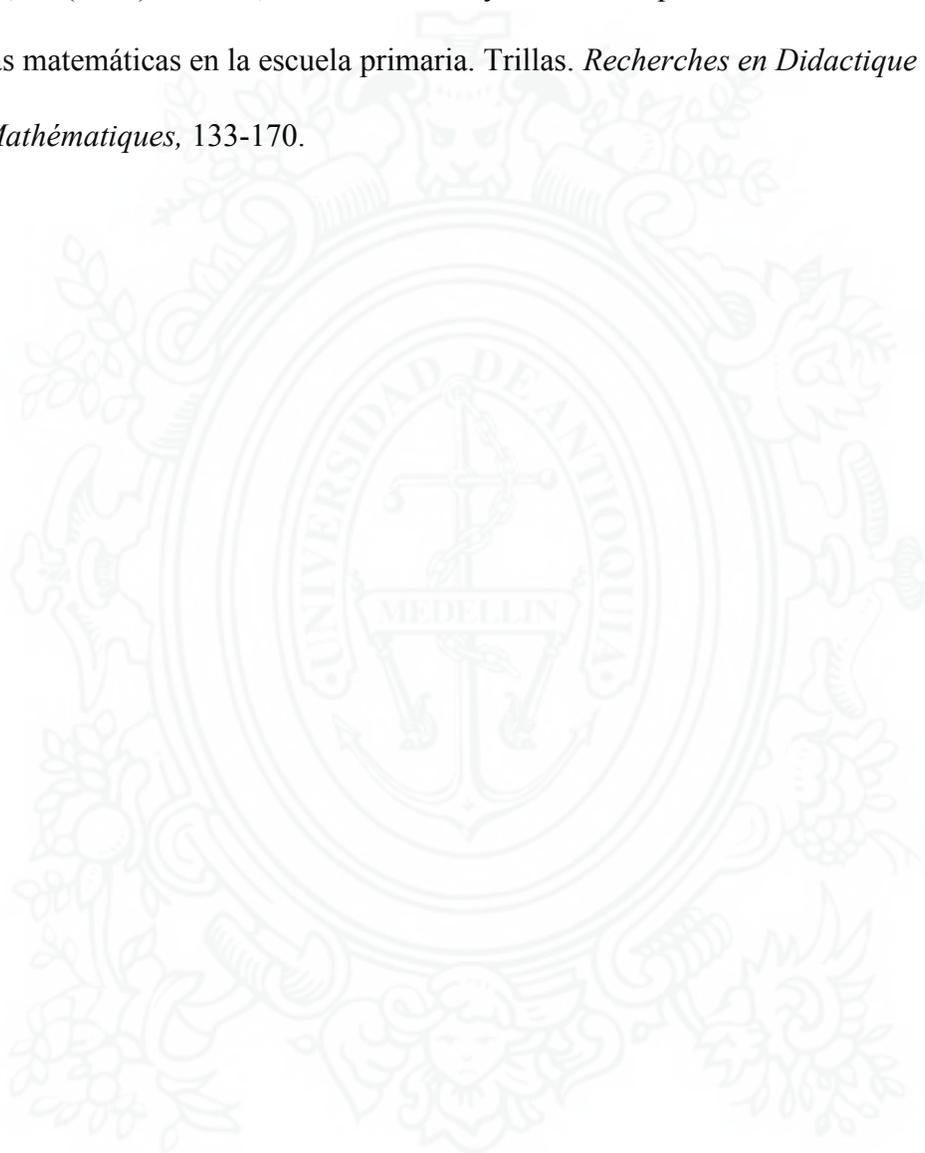
Stake, R. E. (1998). Investigación con estudio de casos. Ediciones Morata.

Sandoval, A. (1996). Investigación cualitativa. ICFES, Asociación Colombiana de Universidades e instituciones Universitarias Privadas.

Torres, M. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional. Medellín, Universidad de Antioquia, Colombia.

Vergel, R. (2012). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Proyecto doctoral. Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Trillas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133-170.



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

7. ANEXOS

CONSENTIMIENTO DE LOS PADRES DE LOS ESTUDIANTES

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS
ARTES.
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS.

Consentimiento de Participación 1

Yo Jesús Antonio Marín M. estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a) participar en la investigación titulada - Objetivación de la Multiplicación que es conducida por los practicantes Yeferson Manrique y Jessica Ramirez estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mí o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es:

Identificar como los estudiantes objetivan la multiplicación

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática y contribuir en su aprendizaje

Procedimiento: Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

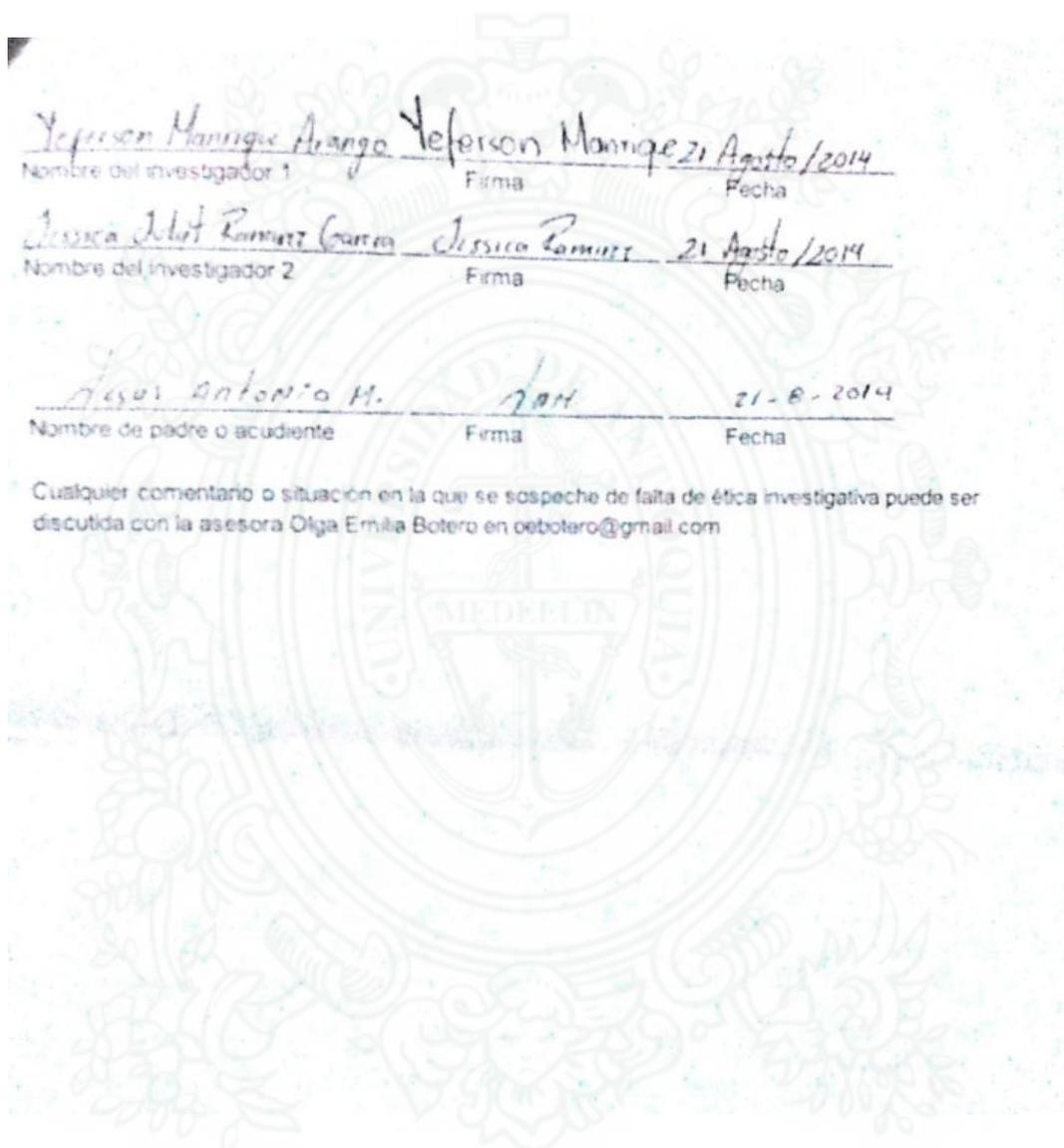
Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: En la investigación se respetará la confidencialidad, es decir, ni el nombre del niño ni su rostro aparecerán en el proceso investigativo. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono:

INVESTIGADOR	CELULAR	CORREO ELECTRÓNICO
<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>3136718985</u>	<u>yeferson.manrique@udea.edu.co</u>
<u>Jessica Juliet Ramirez G</u>	<u>3217136093</u>	<u>jessica.ramirez@udea.edu.co</u>

Consentimiento: Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a).



<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>Yeferson Manrique</u>	<u>21 Agosto / 2014</u>
Nombre del investigador 1	Firma	Fecha
<u>Jessica Juliet Ramirez Guerra</u>	<u>Jessica Ramirez</u>	<u>21 Agosto / 2014</u>
Nombre del investigador 2	Firma	Fecha
<u>Jesus Antonio M.</u>	<u>JAM</u>	<u>21-8-2014</u>
Nombre de padre o acudiente	Firma	Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la asesora Olga Emilia Botero en obotero@gmail.com

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS
ARTES.
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS.

Consentimiento de Participación 1

Yo Marta Lucia Rojas estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a) participar en la investigación titulada "Objetivación de la Multiplicación" que es conducida por los practicantes Yeferson Manrique y Jessica Ramirez estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mí o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es:

Identificar como los estudiantes objetivan la multiplicación

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática y contribuir en su aprendizaje

Procedimiento: Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: En la investigación se respetará la confidencialidad, es decir, ni el nombre del niño ni su rostro aparecerán en el proceso investigativo. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono:

INVESTIGADOR	CELULAR	CORREO ELECTRÓNICO
<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>3136778985</u>	<u>yeferson.manrique@udea.edu.co</u>
<u>Jessica Mariel Ramirez Garcia</u>	<u>3217136093</u>	<u>jessica.ramirez@udea.edu.co</u>

Consentimiento: Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a).

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Yeferson Manrique Arango Yeferson Manrique 15 Septiembre / 2014
Nombre del investigador 1 Firma Fecha

Jessica Juliett Ramirez Carrera Jessica Ramirez 15 Septiembre / 2014
Nombre del investigador 2 Firma Fecha

Marta Lucia Rojas Marta Rojas. 15 Septiembre / 2014
Nombre de padre o acudiente Firma Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede discutida con la asesora Olga Emilia Botero en oebotero@gmail.com

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS
ARTES.
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS.

Consentimiento de Participación 1

Yo Clara Rosa Muñoz Acudelo estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a) participar en la investigación titulada "Objetivación de la Multiplicación" que es conducida por los practicantes Yeferson Manrique y Jessica Ramirez estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mí o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es:

Identificar como los estudiantes objetivan la multiplicación

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática y contribuir en su aprendizaje

Procedimiento: Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: En la investigación se respetará la confidencialidad, es decir, ni el nombre del niño ni su rostro aparecerán en el proceso investigativo. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono.

INVESTIGADOR	CELULAR	CORREO ELECTRÓNICO
<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>3136778985</u>	<u>yeferson.manrique@udea.edu.co</u>
<u>Jessica Juliet Ramirez G</u>	<u>3217136093</u>	<u>jessica.ramirez@udea.edu.co</u>

Consentimiento: Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a)

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Yeferson Manrique Arango Yeferson Manrique 21 Agosto/2014
Nombre del investigador 1 Firma Fecha

Jessica Johel Ramirez Garcia Jessica Ramirez 21 Agosto/2014
Nombre del investigador 2 Firma Fecha

Olivia Rosa Muñoz Aguado Olivia Rosa Muñoz 02/09/2014.
Nombre de padre o acudiente Firma Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la asesora Olga Emilia Botero en oebotero@gmail.com

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS
ARTES.
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN
MATEMÁTICAS.

Consentimiento de Participación 1

Yo Islena Ester Moscuo estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a) participar en la investigación titulada "Objetivación de la Multiplicación" que es conducida por los practicantes Yeferson Manrique y Jessica Ramirez estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mí o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es:

Identificar como los estudiantes objetivan la multiplicación

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática y contribuir en su aprendizaje.

Procedimiento: Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

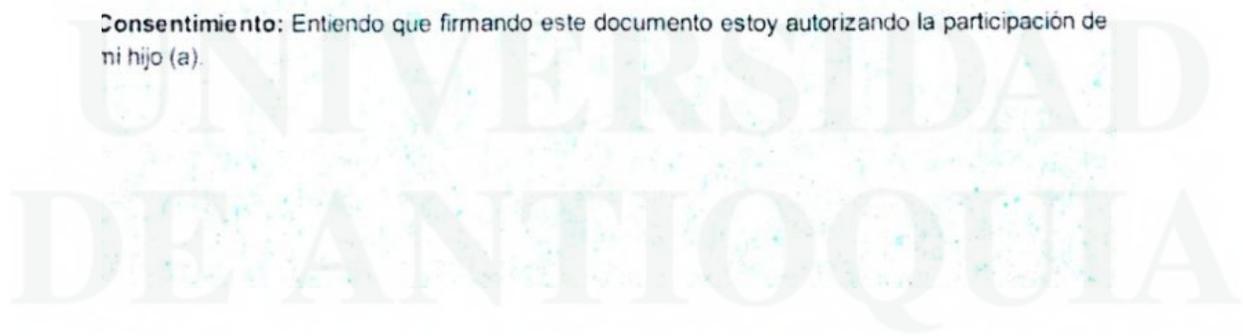
Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: En la investigación se respetará la confidencialidad, es decir, ni el nombre del niño ni su rostro aparecerán en el proceso investigativo. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono:

INVESTIGADOR	CELULAR	CORREO ELECTRÓNICO
<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>3136778985</u>	<u>yeferson.manrique@udea.edu.co</u>
<u>Jessica Mari Ramirez G</u>	<u>3217136093</u>	<u>jessica.ramirez@udea.edu.co</u>

Consentimiento: Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a).



<u>Yeferson Manrique Arango</u>	<u>Yeferson Manrique</u>	<u>21 Agosto/2014</u>
Nombre del investigador 1	Firma	Fecha
<u>Jessica Mil Ramirez Garcia</u>	<u>Jessica Ramirez</u>	<u>21 Agosto/2014</u>
Nombre del investigador 2	Firma	Fecha
<u>Islena Ester Moreno Hernandez</u>	<u></u>	<u>08-26-2014</u>
Nombre de padre o acudiente	Firma	Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la asesora Olga Emilia Botero en oebotero@gmail.com

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Tareas de aula



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA
FONTIDUEÑO JAIME ARANGO
ROJAS. SECCIÓN 3**



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tarea Una tarde de color y sabor



Para el proyecto del cual ustedes hacen parte se le ha encargado la realización de algún pasaboca con el fin de compararlo con otros pasabocas para seleccionar al final el que más se adecue para cierto evento, a nosotros nos ha correspondido la realización de mazapanes, es importante que conozcas los ingredientes que usaremos en este caso para la realización de los mismos y la manera de hacerlo, aquí te los presentamos:

Ingredientes:

- 1 Bolsa de leche en polvo
- 1 frasco o tarro grande de leche condensada
- Anilinas vegetales comestibles de varios colores.

Se nos ha pedido que debemos realizar tres figuras específicas en aras de que pueda ser agradables para la persona que desee consumirlas en su momento, para ello se nos ha encargado realizar Zanahorias, Naranjas y fresas, usando los colores Amarillo, Rojo, Naranja y Verde. Hay que tener en cuenta que cada figura deberá de estar hecha con cada uno de los colores antes mencionados.



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA
FONTIDUEÑO JAIME ARANGO
ROJAS. SECCIÓN 3**



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tarea Renovando mi espacio

Ahora nos encontramos de nuevo, para la siguiente misión para ello queremos saber ¿qué actividades se realizan en el kiosko de la Institución?, dado que es un espacio que quieren renovar para mejorar los lugares dentro de la Institución, la idea es poder contribuir con dicho suceso.

Para iniciar, han decidido poner baldosa al kiosko, por lo tanto, la misión es medir la superficie para encontrar el área total, consultar el tamaño de cada baldosa y descubrir entre todos cuántas baldosas necesita dicho espacio.