SITUACIONES PROBLEMA: DINAMIZADORAS DE PROCESOS DE RAZONAMIENTO EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Catherine Hoyos Monsalve

Lina Marcela Ruiz Cortés

Trabajo investigativo para optar el título de

Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

John Jairo Múnera Córdoba

Asesor

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Medellín, Colombia

2011

AGRADECIMIENTOS

Durante el desarrollo de esta investigación, participaron personas que merecen nuestros agradecimientos, porque sin su valioso aporte no hubiese sido posible culminar este trabajo.

A nuestras familias por su apoyo, su guía y su confianza en la realización de nuestros sueños.

A la Institución Educativa María Auxiliadora por abrirnos sus puertas.

A Jessica Velásquez, Juan José Flórez y Carolina Jurado por su constancia y colaboración.

A nuestro asesor John Jairo Múnera por su presencia incondicional, sus apreciados y relevantes aportes, críticas, comentarios y sugerencias durante el desarrollo de esta investigación.

A la profesora Luz Marina Díaz por sus valorables sugerencias a la versión original de este texto, que contribuyeron al mejoramiento y ordenamiento del presente trabajo.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hacemos extensivo nuestro más sincero agradecimiento.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

Implementar estrategias didácticas y pedagógicas en el aula de clase que faciliten a los estudiantes la adquisición y comprensión de conceptos a través de la construcción de relaciones matemáticas, debe ser una prioridad del quehacer de los docentes. Es este sentido, las situaciones problema se convierten en una alternativa de enseñanza, que permite a los estudiantes un acercamiento al conocimiento matemático en la escuela.

El presente trabajo muestra algunas reflexiones que son fruto de nuestro proyecto de investigación. Así pues, nuestro objetivo es identificar elementos característicos de las situaciones problema que favorecen las diferentes formas de razonar de los estudiantes en el aprendizaje de conocimientos matemáticos. De igual manera, con el propósito de aportar elementos que contribuyeran al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, nos planteamos el siguiente interrogante: ¿Qué contribuciones hacen las situaciones problema, a las formas de razonar de los estudiantes, en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares?

Nuestra investigación está orientada desde los parámetros de la investigación cualitativa y desarrollada a partir de un estudio de casos con tres estudiantes. Las ideas que aquí ilustramos, nacen de las interacciones vivenciadas al interior de las clases de matemáticas con

un grupo de estudiantes del grado quinto de primaria de la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Caldas (Ant).

PALABRAS CLAVE:

Razonamiento- Situaciones Problema- Matemáticas escolares.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación contiene parte de las experiencias vividas por nosotras en el centro de práctica pedagógica: la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Caldas Antioquia. Nos enfocaremos principalmente en el proceso de aprendizaje matemático que logran adquirir los estudiantes en el aula escolar. De igual manera, ampliaremos las estrategias didácticas de enseñanza, basándonos en el enfoque de situaciones problema. También abordaremos, las diversas y particulares formas que los estudiantes tienen para comprender y construir nuevas relaciones matemáticas, formas que están directamente vinculadas a los procesos de razonamiento.

Fue así como consideramos pertinente y necesario encauzar nuestra investigación en este sentido. Por ello, nos planteamos el siguiente interrogante: ¿Qué contribuciones hacen las situaciones problema, a las formas de razonar de los estudiantes, en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares? En consecuencia, el objetivo de esta investigación es identificar elementos característicos de las situaciones problema, que favorecen diferentes formas de razonar en los estudiantes, durante los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares.

Para analizar este cuestionamiento, trabajamos con 45 estudiantes del grado 5º de primaria, pero como este trabajo está orientado bajo el enfoque de Investigación cualitativa mediante un estudio de casos; solo centramos la atención en tres estudiantes: Jessica Velásquez Múnera, Juan José Flórez Chica y Carolina Jurado Colorado.

Nuestro trabajo está conformado por cinco capítulos. En el primero, contamos de manera breve como nace nuestro problema de investigación. En el segundo capítulo, mostramos los referentes teóricos que soportan nuestro trabajo. En el tercero, presentamos la estrategia metodológica que implementamos en el desarrollo del mismo. Luego viene un cuarto capítulo en el que documentamos y analizamos los resultados obtenidos a partir de dos categorías emergentes y finalmente están las conclusiones.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Volver a una institución educativa, fue una experiencia diferente, como si regresáramos al colegio. Pero en esta ocasión, nuestro papel ya no era de estudiantes, nuestro papel ahora era otro. Pero, ¿cómo describirlo? Tal vez lo más acertado es decir: un rol de observadoras y aprendices dispuestas a reflexionar sobre lo visto en el ambiente escolar. El centro educativo que nos abrió sus puertas y en el que tuvimos la oportunidad de diseñar y aplicar algunas experiencias pedagógicas, es la Institución Educativa María Auxiliadora, ubicada en el municipio de Caldas (Ant.).

En un primer momento, cuando iniciamos nuestra práctica pedagógica, la profesora cooperadora, venía trabajando con los estudiantes la multiplicación y sus propiedades, también múltiplos y divisores de un número, fracciones, líneas paralelas, líneas perpendiculares y clasificación de polígonos según el número de sus lados. De lo que observábamos en estas clases, nos surgieron algunas inquietudes: ¿Cómo es abordada en el aula, la enseñanza de las matemáticas desde los lineamientos y estándares curriculares? ¿Qué apropiación de conceptos y relaciones matemáticas adquieren los estudiantes a lo largo de la educación básica primaria? y ¿En qué medida, el trabajo con situaciones problema en el aula, propuesto por los lineamientos curriculares, contribuye a la enseñanza de la matemática escolar?

Simultáneamente a estos interrogantes, empezamos a observar las actividades que se les presentaban a los estudiantes en clase, éstas sobre los temas que mencionamos anteriormente y en las cuales era evidente el instrumentalismo y el uso de un modelo clásico de la enseñanza, implementada por la maestra cooperadora. Esto lo evidenciamos en las actividades que ella proponía. A continuación mostraremos tres ejemplos de ello:

Escribir al frente de cada número como se lee:

a) 1.562.003
b) 56.965.789
c) 965.012

Descomponer en factores primos los siguientes números:

- *2585* - *1356*
- *9632* - *2105*
- *500* - *3132*
- *68*

Resuelve aplicando las propiedades de la multiplicación:

*a) 5 * (10+4) = (5*10) + (5*4)*
*b) 5 * (20-3) = (5*20) - (5*3)*
c) 4 (40-7) = (4*40) - (4*7)*

Frente a ejercicios como estos, los estudiantes no tenían más que aplicar los algoritmos aprendidos y que ya habían sido enseñados por su profesora con anterioridad. Visto de esta forma, es realmente poca o nula la importancia que se le da al papel que juega el razonamiento de los estudiantes en la construcción de relaciones matemáticas. A pesar de considerarse dicho proceso que debe desarrollarse con los estudiantes, parecía que en estas clases se olvidaban las formas de proceder y de actuar que los estudiantes utilizan cuando son enfrentados a situaciones y actividades.

Una posible justificación a este tipo de prácticas en el aula por parte de los docentes de matemáticas, pueden ser los libros de texto que ellos toman como referencia y único norte, pues éstos se centran en dar definiciones y en explicar paso a paso el procedimiento que se debe seguir para resolver ejercicios de ese tipo, centrando así su atención en las respuestas correctas y no en los procesos que los estudiantes utilizan para llegar a ellas.

Como ninguna de estas prácticas clásicas implementadas en el aula encajaba con nuestros esquemas (los de buscar otras formas de enseñar matemáticas en la escuela), ni mucho menos con las nuevas propuestas curriculares planteadas desde 1998 por el ministerio de Educación Nacional; vimos con urgencia la necesidad de diseñar situaciones que promuevan procesos matemáticos en los estudiantes, procesos que la comunidad académica internacional asegura deben estar presentes en las clases de matemáticas; y que interpretamos desde Llinares (2005) como las formas de razonar y las formas de generar un discurso, procesos semejantes a los propuestos en nuestros lineamientos curriculares.

Al respecto, los Lineamientos Curriculares (1998) señalan que: “el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas.” (p.77).

Interpretando los lineamientos, podríamos decir entonces que el razonamiento es un eje fundamental en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y que éste conlleva a los estudiantes a explorar, conjeturar, pensar, crear estrategias para resolver problemas, reflexionar y autoevaluarse.

En un segundo momento, están las interacciones que realizamos con los estudiantes en el segundo semestre de nuestra práctica pedagógica, éstas se dieron a partir de actividades de aula que fueron diseñadas por nosotras mismas; pero nos encontramos en este trabajo de clase, que los comportamientos de los niños seguían siendo los mismos y que sus formas de proceder eran estereotipadas. Creemos que esto es consecuencia de las actividades típicas a las que los chicos estaban acostumbrados, y por ende a la metodología implementada por la profesora.

Ya en un tercer momento, empezamos a rastrear autores como Bruno D´Amore, Orlando Mesa, Salvador Llinares, Nicolás Balacheff, Mario Carretero, entre otros, que nos dieron luces y que nos ampliaron el panorama sobre los procesos matemáticos que los profesores debemos promover en el aula de clase, y en razón a ello, que tipos de actividades ayudarían a dinamizar dichos procesos.

Con la intención de hacer un acercamiento a lo que existe en el medio académico respecto al razonamiento escolar, realizamos una serie de lecturas: un trabajo de grado y una monografía de pregrado y una tesis de maestría, las cuales nos aportaron herramientas teóricas pertinentes para delimitar lo que se constituiría en nuestro proyecto investigativo. Estas lecturas fueron:

- El trabajo de grado realizado por Hincapié Jaramillo Gloria Amparo, Suárez Ríos Adriana María & Urrea Galeano Gloria Luz (2008) titulada: *"El razonamiento matemático y la resolución de problemas",* surge como un aporte a las necesidades de los estudiantes, pues busca dotar a éstos de herramientas necesarias para que puedan saber, saber hacer, crear, construir , elaborar y utilizar habilidades del pensamiento y el razonamiento matemático contando con métodos y estrategias apropiadas para resolver problemas. Esta investigación está organizada en tres momentos: primero, el desarrollo de las habilidades del pensamiento, segundo, razonamiento matemático y por último la resolución de problemas. Este trabajo es una propuesta para fortalecer el razonamiento matemático en la escuela.

Los autores de esta investigación llegan a concluir que el "saber" tradicional, producto de la memorización, la ejercitación y la práctica, no son suficientes para dotar al estudiante de las herramientas necesarias para ser apto y funcional bajo las nuevas condiciones de una sociedad tan competente.

- La monografía realizada por los estudiantes Barrientos Tascón Paula Andrea, Cano Vallejo Mauricio Andrés & Orozco Guzmán Jason (2010) titulada: "*El razonamiento desde la enseñanza de conceptos matemáticos utilizando las TIC";* evalúa los impactos que se generaron en los estudiantes a través de la enseñanza de conceptos matemáticos apoyados en las TIC y como éstas influencian y movilizan el razonamiento en los estudiantes.
- La tesis realizada por John Henry Durango Urrego (2009) para optar por el título de Magíster en Educación Titulado: "*La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: el contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemática.*". Esta investigación surge de analizar inicialmente todas aquellas dificultades que los estudiantes universitarios presentan con respecto a razonamientos deductivos al momento de la elaboración de pruebas y conjeturas, además, tiene la intencionalidad de mejorar dichos procesos en los estudiantes que se encuentran en la transición de la educación media a la universitaria. Para ello, se elaboró una intervención con una guía didáctica que le permitió al estudiante acceder al rigor matemático, a la elaboración de pruebas matemáticas, pasando de pruebas empíricas

hasta pruebas intelectuales. Podríamos decir que este trabajo es una invitación que el profesor Durango extiende a todos los maestros, para que hagan conscientes a los estudiantes de los procesos de razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales.

Paralelamente con el rastreo de los trabajos investigativos mencionados anteriormente, empezamos a preguntarnos por una estrategia pertinente que motivara a los estudiantes a enfrentar situaciones donde los caminos a seguir fueran más allá de la simple aplicación de algoritmos, razón por la cual hicimos un rastreo de algunas investigaciones las cuales nos llevaron a interesarnos por las situaciones problema. Estos trabajos fueron dos monografías:

- La monografía realizada por Botero Marulanda Alfonso & García Jiménez Julio Cesar (2006), titulada: "*Estrategia metodológica para resolver situaciones problema con los números racionales,* donde se pretende proporcionar ayudas didácticas para la enseñanza de las matemáticas basada en situaciones problema, para que el estudiante se aproxime a la exploración, sistematización y evaluación de unos procedimientos heurísticos y cognoscitivos para la solución de dichas situaciones.

- La monografía realizada por Bedoya Restrepo Jhon Fredy, Bustamante Castrillón Mariluz, Cano Ríos James David, Castillón Galvis Diana Marcela, Lopera Correa Mónica Yasmid, Sierra Cadavid Milton Esteban & Villa Gallego Jinela María (2008), titulada: *"Situaciones problema para la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones intra e inter figurales en los triángulos".* La propuesta realizada en este trabajo, parte de la investigación del estado actual de la enseñanza del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, analizando el currículo propuesto desarrollado y logrado en la educación actual, y elaborando situaciones problema desde la teoría del profesor Orlando Mesa; permitiendo con esto que el estudiante más que reproducir contenidos, reflexiones sobre ellos, desarrolle competencias de comunicación y argumentación y lo más importante, que reconozca la aplicación de los conceptos, en situaciones de su propio contexto.

Así mismo, debido a la formalidad de los conceptos y contenidos matemáticos, los autores concluyen, que es necesario que el profesor de matemáticas, diseñe diferentes estrategias didácticas, entre ellas las Situaciones Problema, que motiven al estudiante a ser protagonista en la construcción de su conocimiento, de tal forma que se favorezcan los procesos de observación, análisis, abstracción, reflexión y argumentación, facilitando así el camino hacia la conceptualización y la generalización.

Es entonces, gracias a todos los elementos mencionados anteriormente, nuestras observaciones, nuestras interacciones y el rastreo bibliográfico, que nace nuestro problema de investigación: **¿Qué contribuciones hacen las situaciones problema a las formas de razonar de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares?**

En consecuencia, nos hemos planteado el siguiente objetivo: **Identificar elementos característicos de las situaciones problema que favorecen formas de razonar en los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares**.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Las situaciones problema.

La implementación de estrategias didácticas y pedagógicas por parte de los docentes en el aula de clase, está encaminada hacia la creación de espacios que faciliten a los estudiantes, la adquisición y comprensión de conceptos a través de la construcción de relaciones matemáticas.

Para este fin, el Ministerio de Educación Nacional[1] en los Lineamientos curriculares (1998) propone implementar en el aula situaciones problemáticas como un contexto que permite un acercamiento al conocimiento matemático en la escuela, al respecto afirma:

> El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (p.41)

[1] En adelante nos referiremos al MEN

De esta manera, el aprendizaje activo de los estudiantes esta mediado por la actividad intelectual que ellos realizan en el aula, esto se da cuando observan, formulan hipótesis, se cuestionan, establecen relaciones, argumentan, reflexionan e integran nuevos conocimientos con los aprendizajes ya adquiridos.

Así mismo, autores como Múnera (2009-2011), Mesa (1998), D´Amore (2006) han hablado de la enseñanza desde la implementación de situaciones problema, además se han interesado por definirlas y caracterízalas. De manera general, para estos autores las situaciones problema son entendidas como aquellos espacios favorables para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mediante éstas los estudiantes realizan interacciones tanto sociales como con los objetos de conocimiento y a partir de esto construyen nuevos saberes.

Partiendo de las primeras ideas que sobre situaciones problema existen, encontramos los aportes del didacta de las matemáticas Bruno D´Amore, quien difundió la idea de que una situación problema es una situación de aprendizaje en la que los estudiantes no pueden resolver asuntos matemáticos por la mera reproducción o aplicación de conocimientos ya adquiridos, si no que es necesario el planteamiento de nuevas hipótesis (D´Amore, 2006).

Igualmente, el profesor Orlando Mesa (1998), ofrece a los maestros una alternativa didáctica de trabajo en el aula de clase, basada en situaciones problema con las que se pretende que los estudiantes construyan hipótesis y realicen conjeturas, haciendo del aprendizaje una práctica motivadora. En este sentido, Mesa las define como: “ una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como las simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático.”(p.15)

Además, para este autor las situaciones problema posibilitan en gran medida el desarrollo de competencias lógico-matemáticas en los estudiantes, en tanto estas involucran procesos dinámicos tales como expresar ideas, interpretar y evaluar, hacer representaciones, usar los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas; dichos procesos le permiten al estudiante descubrir conceptos, tejer relaciones matemáticas y plantear nuevas alternativas.

De igual forma, el profesor John Jairo Múnera (2011) se ha preocupado por problematizar el currículo de las matemáticas escolares, y por tanto define una situación problema de la siguiente manera:

> Una *situación problema* es un espacio para la actividad matemática, en donde los estudiantes, al participar con sus acciones exploratorias en la búsqueda de soluciones a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos exteriorizan diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión. (p.181)

De las líneas anteriores, interpretamos que para Múnera 2011, una situación problema es un instrumento de enseñanza y de aprendizaje que promueve la construcción sistemática de conceptos matemáticos a partir de nuevas relaciones, éstas están mediadas por aquellas interacciones existentes entre el docente, el estudiante y el objeto de conocimiento y se dan a través de la formulación de interrogantes que llevan a los estudiantes a cuestionarse, reflexionar y poner en juego todos sus saberes previos.

Parafraseando a Mesa(1998) las interacciones que se dan al interior del aula, deben ser altamente participativas, es decir, que el estudiante anticipe respuestas, busque alternativas de solución, valide sus procesos, confronte resultados y se plantee nuevos interrogantes; que el docente conozca a sus estudiantes y tenga en cuenta sus capacidades lingüísticas y cognitivas al igual que su entorno cultural y que esté presto a reformular preguntas e inquietudes que surjan a los estudiantes, y que el objeto de conocimiento no sea asumido como un todo terminado, sino que permita profundizar y ampliar los saberes adquiridos.

Este instrumento que dinamiza los procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela, permite que los estudiantes desarrollen procesos relacionados con la actividad matemática, la que según Llinares (2005) parafraseado por Múnera (2011) es: "la idea de actividad matemática está configurada por procesos matemáticos como construir, buscar regularidades, conjeturar / formular, probar, generalizar, proponer problemas y clasificar / definir" (p.180); y se convierte en un medio para la construcción de relaciones y conceptos matemáticos.

En este sentido, las situaciones problema se caracterizan por favorecer el desarrollo de habilidades propias del razonamiento, las cuales están ligadas a procesos tales como argumentar, explicar, justificar, exponer ideas, explorar, indagar, formular hipótesis, conjeturar y validar. También es propio de ellas, generar espacios ricos en diálogos, en donde los estudiantes interactúen de manera tal que puedan negociar significados y construir nuevos saberes.

2.2. El razonamiento: reconocerlo y desarrollarlo.

Uno de los objetivos que se pretende lograr con la enseñanza de las matemáticas, es el desarrollo de procesos de razonamiento en los estudiantes, ya que promueve en ellos la búsqueda y posterior aplicación de estrategias que posibiliten la resolución de distintas situaciones tanto de su entorno escolar como social.

Partimos entonces, de la importancia que el Ministerio de Educación Nacional da, en los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN 2006) al proceso de razonar:

> Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos. (p.54)

Así mismo, en la enseñanza de las matemáticas en la escuela, se hace necesario tener en cuenta aquellas formas de razonar y formas de comunicar de los estudiantes que son empleadas por ellos, en los diferentes ambientes escolares. También es importante encontrar e implementar un enfoque didáctico y pedagógico que oriente y propicie dichos procesos.

De igual manera, los Lineamientos Curriculares[2] (MEN, 1998) proponen que es primordial que el razonamiento matemático esté presente en las actividades propuestas a los estudiantes en el aula. Además afirma que razonar está relacionado con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (p.77-78)

En este sentido, el español Mario Carretero (1995) plantea que: "el razonamiento es un proceso que permite a los sujetos extraer conclusiones a partir de premisas o acontecimientos dados previamente, es decir, obtener algo nuevo a partir de algo ya conocido."(p.44)

Pensar en el razonamiento matemático escolar, implica pensar en todas esas formas como los estudiantes se enfrentan a determinadas situaciones, planteadas en el aula. Al respecto, El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) plantea que el

[2] Publicados por el Ministerio de Educación Nacional, Colombia.

razonamiento matemático, es un proceso que brinda eficaces caminos para desarrollar y expresar comprensiones frente a diferentes fenómenos o situaciones a las que son enfrentados los estudiantes. Las personas que piensan y razonan analíticamente, tienen una tendencia a encontrar patrones, regularidades o estructuras tanto en situaciones matemáticas como en el mundo en el que se desenvuelven.

De igual manera, el razonamiento se configura como un hábito mental, lo que implica, entonces, que éste sea desarrollado por medio de un uso coherente de actividades propuestas en el aula, claro está, sin olvidar los diferentes contextos que envuelven a los estudiantes.

Para el NCTM, reconocer el razonamiento como un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matematicas, conlleva a los estudiantes a comprender desde las primeras etapas educativas que es necesario razonar todas aquellas afirmaciones que se hagan. Por lo tanto, es posible aprender en la escuela a formular, perfeccionar y comprobar conjeturas; pero para esto, es necesario que el profesor contribuya generando múltiples oportunidades y propiciando contextos de aprendizajes variados y atractivos para ellos.

Duval (1998), hace mención a la escasa reflexión teórica sobre lo que es el razonamiento en los estudios psicológicos y didácticos, sin embargo, para él el razonamiento es: “Cualquier proceso que permita sacar nueva información de información dada se considera un razonamiento.” (p.45)

Este mismo autor le asigna al razonamiento diferentes procesos de pensamiento. Por un lado, aquellos procesos en los que de una o varias proposiciones se infiere otra, los cuales están específicamente ligados a un lenguaje. De otro lado, aquellos procesos propios a un acto de exploración, los que se efectúan con el propósito de adaptar una situación nueva, dando solución a problemas mediante la manipulación de objetos o instrumentos.

Bajo esta misma mirada, parafraseando a Rico (1995), razonar es aquella capacidad de establecer nuevas relaciones entre conceptos, relaciones que pueden ser expresadas en argumentos; además un razonamiento es todo argumento suficientemente fundado de manera tal que de razón o justifique una propiedad.

Por otra parte, los aportes que Nicolás Balacheff (2000) hace sobre el razonamiento, están encaminados a la manipulación de la información que el estudiante hace para llegar a una nueva información y validarla. Por consiguiente, él define el razonamiento como "la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información." (p.13)

2.2.1. El razonamiento informal.

El desarrollo de aptitudes matematicas en el aula por parte de los estudiantes, ha implicado por mucho tiempo, el estudio y la investigación de habilidades relacionadas al proceso de razonar. Teniendo en cuenta que en los primeros años de escolaridad los estudiantes razonan a parir de sus vivencias y experiencias diarias, hablaremos del razonamiento informal, el cual está vinculado al estudio del razonamiento humano en contextos cotidianos, con el propósito de estudiar y analizar las formar de proceder y de actuar frente a situaciones particulares.

Analizaremos entonces, lo que Carretero (1995) y el NCTM (2000) plantean sobre el razonamiento informal. Y posteriormente, revisaremos lo que Balacheff (2000) propone sobre los tipos de prueba, la explicación y la argumentación.

Según el NCTM (2000), los estudiantes de primaria poseen unas formas propias y particulares de hallar resultados matemáticos, y que aunque ellos apenas están empezando a adquirir conocimientos matemáticos, ya están en capacidad de razonar a partir de sus experiencias, porque el razonamiento empieza antes de la escuela y se modifica continuamente por las experiencias vividas.

Además, en los primeros niveles de escolaridad el razonamiento que los estudiantes hacen es de manera informal, es decir, sin ningún tipo de rigurosidad matemática. Por esta razón, es necesario incitar a los estudiantes a que razonen partiendo de lo conocido para ellos, generando así unos primeros intentos porque justifiquen sus razonamientos. En todos los niveles de escolaridad, los estudiantes razonan de manera inductiva a partir de patrones, casos determinados y algunos ejemplos, aunque esto no quiere decir que los estudiantes no estén en la capacidad de aprender a razonar de manera deductiva.

Un segundo referente, es Carretero *et al* (1995), quien asegura que el razonamiento informal es un término que admite diferentes matices e incluso diferentes significados. Para ello cita a los siguientes autores:

> “D. Kuhn (1991,1993), quien afirma que razonar informalmente es esencialmente sinónimo de argumentar.

Para Galotti (1989) el razonamiento informal se identifica con el razonamiento empleado en la vida cotidiana y que no se restringe solo a la capacidad de argumentar.

Perkins (1989), el razonamiento de la vida cotidiana puede entenderse como un proceso de construcción de modelos situacionales. La persona que razona construye un modelo que representa la situación del problema y articula en él las dimensiones y factores implicados en el problema." (p.38)

Similarmente, Voss, Perkins y Segal (1991), definen el razonamiento informal como:

Razonamiento informal es el razonamiento que se aplica fuera de los contextos formales de las matemáticas y la lógica simbólica. Implica razonamiento sobre las causas y las consecuencias y sobre las ventajas y las desventajas o los pros y los contras de determinadas proposiciones o de alternativas sobre las que hay que decidir. (p.39)

De las anteriores acepciones, es claro ver que el razonamiento informal es considerado paralelo al razonamiento cotidiano, pues éste se interesa particularmente en estudiar las estrategias y habilidades de razonamiento de las personas en contextos propios y relevantes para ellas.

Al respecto, Carretero plantea unas características para identificar el razonamiento informal:

- Se aplica a cuestiones de la vida cotidiana, incluyendo cuestiones profesionales o académicas.

- Se aplica a cuestiones *relevantes* para el individuo.

- Está relacionado con la capacidad de elaborar y valorar argumentos y contraargumentos.
- No utiliza un lenguaje formal o simbólico sino el lenguaje cotidiano.
- Es dinámico y muy dependiente del contexto.
- Se aplica a tareas abiertas y mal definidas.
- Se aplica a tareas no deductivas.
- Es utilizado en todos los dominios del conocimiento, incluso en las matemáticas y las ciencias naturales. (p.43)

2.2.2. Tipos de prueba

Balacheff (2000) clasifica las pruebas en dos grandes grupos, pragmáticas e intelectuales.

2.2.2.1.Pruebas pragmáticas.

Son "aquellas que recurren a la acción o a la ostensión" (p.22), es decir, garantizan la singularidad del evento que la construye. Este tipo de prueba suministra elementos como herramientas imprecisas e imperfección de funcionamiento y no permiten establecer la validez de una aserción. Dentro de este grupo se encuentran el empirismo ingenuo, la experiencia crucial y el ejemplo genérico.

- **Empirismo ingenuo.**

“Este término se usa para denominar los procedimientos marcados por la ausencia de índices de procesos de validación. Las conjeturas se obtienen del examen de pocos casos y el problema de su validez no es abordado. Los estudiantes se fían de esas afirmaciones y manifiestan su confianza en los hechos o por medio de sus declaraciones” (p.54). En otras palabras, el empirismo ingenuo no es más que una prueba, donde el estudiante sólo tiene en cuenta sus afirmaciones o explicaciones para mostrar que algo es válido.

- **Experiencia crucial**

Balacheff hace referencia a este tipo de procedimiento cuando está marcado por una voluntad deliberada de someter a prueba una proposición aplicándola a un nuevo objeto matemático, es decir, una prueba pragmática, que denota una experimentación cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas.

- **Ejemplo genérico.**

“El carácter genérico del ejemplo está relacionado con el hecho de que, en el procedimiento de los estudiantes, el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura” (p.69). Aquí se hace referencia al procedimiento que el estudiante hace para hacer una prueba con la intención de establecer la validez de una conjetura.

2.2.2.2. Pruebas intelectuales.

Son "aquellas que separándose de la acción, se apoyan en formulaciones y propiedades en juego" (p.23). La prueba intelectual implica comparar significados, evaluar la pertinencia de estos y apoyarse de un lenguaje propio de la matemática. Dentro de estas pruebas, se clasifican la experiencia mental y el cálculo sobre enunciados.

- **La experiencia mental.**

Este tipo de prueba, señala el paso de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en la medida en que las pruebas pasan de ser acciones basadas en la experiencia perceptiva a ser acciones eventualmente interiorizadas, las cuales están fundadas en los conceptos implícitos que el estudiante utiliza para argumentar las soluciones propuestas.

- **Cálculo sobre enunciados**.

Este hace referencia a las "construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como el resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas" (p.80).

2.3. La argumentación y la justificación.

El papel que juegan la argumentación y la justificación en los procesos de aprendizaje de las matemáticas escolares, es imprescindible. Razón por la cual, los estudiantes en el aula de clase deben desarrollar capacidades que estén vinculadas con las formas de comunicar, compartir ideas y defender puntos de vista. De igual manera, el razonamiento también está estrechamente relacionado con la capacidad de elaborar argumentos y justificarlos.

2.3.1. La argumentación.

La argumentación es una forma discursiva con la que se puede defender con razones o argumentos una hipótesis o una idea que se quiere probar. Argumentar tiene que ver con probar o rechazar una conjetura o bien con convencer a otro de aquello que se está afirmando o negando.

Mediante la argumentación, un sujeto trata de convencer a otro de algo de lo que se está absolutamente convencido, en este sentido, Rivadulla (1991) asegura que: "el argumento es el razonamiento en el que se pretende apoyar una afirmación determinada" (p.20), es decir, mediante la argumentación, se pretende probar o refutar una idea, con el fin de persuadir a los demás sobre la verdad o falsedad de la misma.

En concordancia con lo anterior, Duval (1999) señala que la argumentación es "toda justificación o refutación espontánea de una declaración en una discusión o debate" (p.144), lo que nos sugiere la espontaneidad como una condición necesaria en la argumentación.

Siguiendo bajo los planteamientos de este último autor, la argumentación se realiza cuando se trata de convencer a alguien mediante el lenguaje natural, de la aceptabilidad de nuestra declaración o la insostenibilidad de la suya, respetando la continuidad temática entre los pasos del razonamiento.

La argumentación en los términos expuestos hasta este punto, coincide con lo que para Balacheff (2000) es una explicación, siendo ésta la que establece y garantiza la veracidad de un enunciado dado por un locutor y se basa en un lenguaje natural. En este orden de ideas, Miéville, citado por Balacheff indica:

> La explicación tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad. Estos objetos se encuentran, se armonizan y en su afinidad determinan la organización de una explicación que se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber. (p.12)

2.3.2. La justificación.

La justificación en la clase de matematicas tiene que ver con la construcción de las nociones matematicas y el desarrollo de habilidades como la observación, la exploración, la verificación, la descripción y el análisis. Igualmente, ésta propicia espacios que favorecen la comunicación y la comprensión de los conceptos matemáticos al interior del aula.

Según la idea de Moliner (1986), justificar consiste en encontrar qué cosa es la causa o el motivo de otra, o la explicación que hace que otra no sea o parezca extraña, inadecuada, inoportuna, censurable o culpable.

Por otra parte, Marrades & Gutiérrez (2000) proponen una clasificación sobre la justificación, ellos hacen una distinción entre las justificaciones empíricas y las justificaciones deductivas. Las justificaciones empíricas son en la que se usan los ejemplos como elemento necesario de persuasión. Mientras que en las justificaciones deductivas la validación de las conjeturas se hace de habitualmente de forma genérica y los ejemplos sólo son utilizados para apoyar y organizar las argumentaciones.

2.4.El papel de los saberes previos.

De manera breve, presentaremos algunas consideraciones sobre los conocimientos previos, dada su importancia en el aprendizaje y en la construcción de conceptos matemáticos. Pozo, Limón y Sanz (1991), mencionan, algunas características que definen a los conocimientos previos:

- Son construcciones personales que hacen los estudiantes y que han sido elaboradas de manera espontánea en su interacción cotidiana con el mundo.
- Mediantes el uso de ellos, los estudiantes pueden anticipar fenómenos cotidianos.
- Los conocimientos previos propician la toma de conciencia de los estudiantes con respecto a sus propias ideas, para que, una vez explícitas, puedan completarse o modificarse.
- Estos conocimientos buscan ser útiles más que verdaderos.

Estas características apuntan a identificar la naturaleza de los conocimientos previos. Estos parten de lo perceptivo, de la influencia cultural y social, incluso del lenguaje y de los medios de comunicación. Pozo et al (1991) hablan sobre los diversos orígenes de los conocimientos previos en tres concepciones que se interrelacionan entre sí. Ellas son:

- Concepciones espontáneas: que dan significado a las actividades cotidianas y aplican una inferencia causal a los datos recogidos del mundo natural mediante procesos sensoriales y perceptivos.

- Concepciones inducidas: antes que del propio estudiante, estas concepciones son propias del entorno social. La cultura y sus creencias serían el ámbito propio para definirlas, dado que el sistema educativo no es el único vehículo por el que se transmiten.

- Concepciones analógicas: Son propias de las múltiples áreas del conocimiento para las que los estudiantes no disponen de ideas específicas y por ende, activan, por analogía, otra concepción posiblemente válida para atribuir significado a los nuevos objetos de aprendizaje.

2.5.El uso de objetos concretos y abstractos en la clase de matematicas.

En los primeros grados de escolaridad, la mayor parte de los contenidos matemáticos son enseñados con actividades que implican el uso de objetos físicos en el aula. La forma en que los estudiantes utilizan estos objetos determina, en gran medida, la posibilidad de comprender el contenido que se trabaja.

Según el profesor Mesa (1997) se suele separar los objetos en dos categorías a saber:

- Los objetos discretos son aquellos que son rígidos, es decir, que no pueden ser transformados y por tanto su característica principal no puede ser modificada, por ejemplo las canicas, los palitos, las monedas, etc.

- Los objetos continuos son aquellos que pueden ser maleables y transformables. Ellos pueden ser la plastilina, la arcilla, la arena, entre otros. Estos objetos movilizan el pensamiento que relaciona un objeto con las partes que la constituyen.

Es importante que en un primer momento se permita a los estudiantes manipular dichos objetos para que se familiaricen con ellos, siendo necesario entonces, plantearles situaciones en las que usarlos cobre sentido. De esta forma, los estudiantes comprenderán el tipo de acciones que tienen que realizar con los objetos para poder descubrir propiedades y regularidades que les sirva de apoyo para resolver las actividades que les propongan.

Sin embargo, a medida que los estudiantes progresen en el proceso de aprendizaje, se les puede ir retirando paulatinamente estos objetos, con el propósito de permitirles construcciones que vayan más allá de uso de material físico.

Asimismo, Múnera (2009) considera dos tipos de objetos, los concretos y los abstractos. Los objetos concretos son todos aquellos que son manipulados a la luz de la acción física, mientras que los objetos abstractos, son aquellos tenidos como “ideas” y que ya se comprenden a la luz de las operaciones mentales. Estos últimos son denominados por el profesor Vasco como saberes concretos y son por ejemplo: la tabla de multiplicar, el Triángulo de Pascal, un gráfico, una definición, un teorema, etc.

Es así como en la medida en que los estudiantes utilicen tales objetos, crece la red de significados que ellos han ido construyendo. Se trata entonces de reconocer la existencia tanto simbólica como operatoria que hace concretos a los objetos matemáticos, y que permite al estudiante utilizar diferentes representaciones para la construcción de relaciones matemáticas.

3. METODOLOGÍA.

Para analizar en qué medida los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa María Auxiliadora realizan razonamientos matemáticos a partir de situaciones problema, fue necesario para nosotras, conocer parte de su mundo social y académico. En cuanto a esto, podemos decir que los estudiantes proceden de los sectores urbanos y de las veredas más cercanas del municipio de Caldas; en su mayoría, ellos pertenecen a los estratos económicos dos y tres; y sus padres se desempeñan como agricultores, pequeños ganaderos, comerciantes, trabajadores independientes u operarios. Por otro lado, la institución busca formar seres competentes que puedan desarrollarse en el ámbito social e intelectual, y que también sean reflexivos y útiles a la sociedad.

En este sentido, rescatando la firme relación que debe existir entre las experiencias cotidianas de los estudiantes y los procesos académicos que se llevan a cabo en la Institución Educativa, consideramos que la investigación a realizar debía ser de corte cualitativo. Respecto a esto, Sandoval (2002) plantea:

> Los acercamientos de tipo cualitativo reivindican el abordaje de las realidades subjetiva e intersubjetiva como objetos legítimos de conocimiento científico; el estudio de la vida cotidiana como el escenario básico de construcción, constitución y desarrollo de los distintos planos que configuran e integran las dimensiones específicas del mundo humano y, por último, ponen de relieve el carácter único, multifacético y dinámico de las realidades humanas. (p.15)

Este método de investigación nos permitió obtener de las experiencias vividas en el aula, sentimientos, procesos de pensamientos y emociones que son tan difíciles de percibir y reconocer desde otra mirada investigativa.

El enfoque de investigación que adoptamos para este trabajo, fue el interpretativo, siendo este pertinente en la medida que nos permitió comprender y analizar todas aquellas emociones y sentimientos que se dieron durante el proceso por parte de los participantes, en este sentido, Gutiérrez (2002) afirma: “La investigación interpretativa es un campo joven de indagación interesado por explicar, describir, comprender, caracterizar e interpretar los fenómenos sociales y los significados individuales en la profundidad y complejidad que los caracteriza” (p. 534).

Nuestro trabajo fue realizado en el grado 5°B, un grupo conformado por 45 estudiantes cuyas edades están comprendidas entre los 10 y 12 años, pero para al momento de interpretar y analizar los datos, realizamos un estudio de casos con tres estudiantes, estudio que interpretamos desde López (2006) como la descripción y el análisis de una situación real en la que se plantea o puede plantearse un problema, evitando en lo posible expresar juicios de valor.

Los tres estudiantes escogidos para nuestro estudio de casos aceptaron de forma voluntaria participar del proyecto, contando con el respaldo de sus acudientes. Los criterios por los cuales seleccionamos estos estudiantes fueron primordialmente por su participación activa y constante, además por el interés que mostraron en el desarrollo de cada una de las situaciones planteadas en el aula, también por algunas sugerencias de nuestra docente cooperadora y finalmente bajo la idea de que fueran de distinto rendimiento académico.

En adelante presentaremos algunas características de los tres estudiantes participantes de esta investigación:

Jessica Velásquez Múnera.

Es una niña de 10 años de edad, que se distingue por su alto rendimiento académico, en especial en el área de matemáticas. Según sus compañeros de clase, ella es muy juiciosa y responsable con sus tareas. Jessica siempre manifestó un gran interés por las actividades que le planteamos, demostrando una gran capacidad de análisis y reflexión frente a las mismas.

Juan José Flórez Chica.

Es un estudiante muy activo y participativo dentro en las clases. Se caracteriza por ser un niño responsable, respetuoso y amable. Según su maestra de matemáticas, es un buen estudiante y sobresale por su interés. Juan José tiene 10 años de edad.

Corolina Jurado Colorado.

Carolina es una niña a la que se le hace un poco difícil el área de matemáticas, al parecer porque se distrae con facilidad dentro de las clases. Es respetuosa, tierna y un poco introvertida, aunque esto último no fue un limitante para acercarnos a ella. Es catalogada por su profesora como una estudiante con bajo rendimiento académico, sin embargo, en las interacciones que tuvimos con ella, esto no fue tan notorio. Carolina tiene 11 años de edad.

Es importante aclarar, que utilizamos los verdaderos nombres de nuestros participantes y no pseudónimos, porque contamos con el permiso escrito firmado por sus acudientes, quienes nos autorizaron hacer públicos los nombres, trabajos escritos, fotos, grabaciones de audio y video. (Ver Anexos)

Como registros para la producción de datos, tuvimos en cuenta instrumentos como la observación participante, la entrevista semi-estructurada, el diario de campo, grabaciones de audio y video y situaciones problema.

A través de la observación participante realizada, pudimos adentrarnos en la realidad de cada niño, accediendo así de manera directa a sus actuaciones. Este instrumento, requirió que como observadoras estuviéramos presentes y fuéramos parte de las interacciones dentro del aula. En palabras de Sandoval (2002), la observación participante no es otra cosa que un registro continuo y acumulativo de todo lo acontecido durante la vida del proyecto de investigación.

Con las entrevistas semi-estructuradas, logramos un acercamiento más directo con los protagonistas de la investigación. Mediante éstas, pudimos entablar diálogos con cada uno de los participantes en torno a los procesos realizados por ellos frente a las situaciones problema implementadas, con el fin de hacer una ampliación, profundización e interpretación más fiel de sus razonamientos y procedimientos.

Gracias a nuestros los diarios de campo, hicimos un registro reflexivo de las interacciones vivenciadas y que no podían ser registradas mediante otros instrumentos. En estos diarios, plasmamos las ideas, inquietudes y formas de proceder de los estudiantes durante cada sesión. De igual forma, registramos en ellos nuestras sensaciones y sentimientos, por lo que este instrumento se constituyó en una herramienta muy útil para nuestros análisis.

Las situaciones problema desarrolladas por los estudiantes, nos dieron bases para interpretar los razonamientos de los estudiantes y nos posibilitaron percibir aspectos sobre los procesos realizados por ellos al momento de abordarlas. En este sentido, las planteamos con el fin de proponer desafíos nuevos a nuestros participantes, de forma tal que ellos buscaran diferentes caminos para desarrollarlas, a través de la exploración, la interpretación y la verificación.

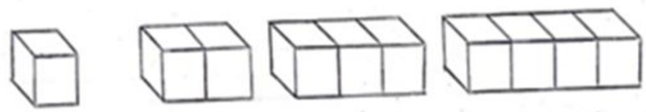
Para esta investigación, implementamos un total de nueve situaciones problema, de las cuales solo documentaremos cuatro[3], pues son éstas las que dan surgimiento a las posteriores categorías de análisis. Cada situación fue desarrollada en dos sesiones de 55 minutos cada una y diseñada para ser trabajada en grupos conformados por dos estudiantes, puesto que el trabajo en equipo es una herramienta pertinente para incentivar la interacción social en el aula. Interpretando a Balacheff (2000) el trabajo en equipo posibilita la comunicación en el aula y conlleva a los estudiantes a que realicen discusiones sobre sus respuestas y convencer al otro de su veracidad.

A continuación, describiremos las situaciones problema que tuvimos en cuenta para el análisis de los datos.

[3] Las dos primeras, fueron diseñadas por nosotras, la tercera, fue diseñada y sugerida por nuestro asesor de práctica John Jairo Múnera Córdoba y la última fue creada por Sebastián Cano y Ángela Giraldo, compañeros del seminario de práctica pedagógica.

Primera situación.

Construye y observa los siguientes sólidos y luego completa la tabla:



Numero de cubos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de cuadrados total en las caras por cuerpo	6		14							

a- ¿Qué relación encuentras entre los números de la primera fila y la segunda fila de la tabla?

b- ¿Cuál es el número total de cuadrados en las caras de un cuerpo construido con 18 cubos? ¿Cómo lo hallaste?

c- ¿Cómo podrías determinar cuántos cuadrados hay en total en las caras de un cuerpo construido con cualquier cantidad de cubos?

En esta situación propusimos a los estudiantes completar una tabla a partir de unos arreglos conformados por cubos de madera, para la cual les proporcionamos seis cubos. La intencionalidad de esta actividad, consiste en que los estudiantes observen y encuentren regularidades entre dichos arreglos, haciendo relaciones que les permita inferir una regla de formación.

Segunda situación

Completa la tabla con base en las figuras:

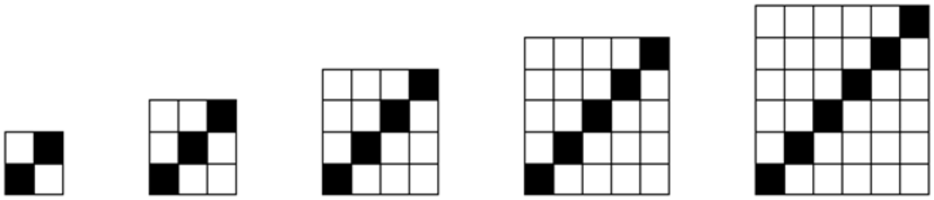


Figura 1 (P1) *Figura 2 (P2)* *Figura 3 (P3)* *Figura 4 (P4)* *Figura 5 (P5)*

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros								
Cantidad de cuadrados blancos								

a- Explique una manera de obtener el total de los cuadrados para cualquiera de las figuras.

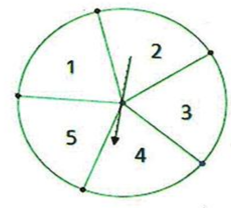
b- ¿Qué cantidad de cuadrados negros debe tener una figura de la posición 12? ¿Cuántos blancos? Explique el por qué.

c- Si alguien afirma que la figura de la posición 16 tiene 32 cuadrados blancos, ¿es cierto? Explique el por qué.

La presente situación tiene como motivo unos mosaicos. Con base en estos, los estudiantes deben completar una tabla en la que se les pide hallar la cantidad de cuadrados negros y de cuadrados blancos para un mosaico de acuerdo a su posición. El objetivo de esta situación, es llegar a una ley general y encontrar dichas cantidades en un mosaico cualquiera sin importar su posición.

Tercera situación [4]

Se construye un indicador como el de la figura derecha. Al girar la aguja, puede caer igualmente en cualquiera de los cinco espacios, (supongamos que la punta de la aguja no cae en la línea).



a- Si giramos la aguja, ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en 5?

b- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio que tenga un número impar?

c- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con número par?

d- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con un número menor que 5?

El propósito de esta situación es acercar a los estudiantes a la noción de probabilidad. El motivo de la actividad es una ruleta que sirve de apoyo a los estudiantes para poder determinar varias posibilidades, y de este modo puedan llegar a establecer conclusiones sobre la obtención de un resultado.

[4] Esta situación fue diseñada por el profesor John Jairo Múnera Córdoba y sugerida por él para ser implementada en el aula.

Cuarta situación[5]**.**

Un niño queriendo compartir algunos dulces con sus compañeros de grado sexto decide repartirlos en los casilleros de ellos así: dejó una chocolatina cada 9 casilleros, dejó una galleta cada 12 casilleros y una colombina cada 6 casilleros. Es de aclarar que respecta el orden en que están los casilleros.

Con esta información resuelva las siguientes actividades:

a- Si en grado sexto hay 120 estudiantes y cada uno tiene un casillero. ¿Cuántos estudiantes encontraron los 3 dulces en su casillero?

b- ¿Los números de los casilleros donde quedaron 3 dulces que tienen de especial para que en ellos quedaran de todos los dulces?

El objetivo de esta situación, es que los estudiantes encuentren y reconozcan los múltiplos comunes de un número y se acerquen al concepto de mínimo común múltiplo.

[5] Situación diseñada por nuestros compañeros de seminario de práctica Ángela María Giraldo Muñoz y Sebastián Cano Rojas.

Finalmente, para el análisis de la información, realizamos una triangulación con base en los registros obtenidos a través de los instrumentos anteriormente descritos, las voces de los autores consultados para el proyecto y la interpretación nuestra. Para Sandoval (2002), la triangulación es:

> Metodológicamente, la legitimación del conocimiento desarrollado mediante alternativas de investigación cualitativa se realiza por la vía de la construcción de consensos fundamentados en el diálogo y la intersubjetividad. En el contexto anterior nace el concepto de triangulación, el cual se aplica a las fuentes, los métodos, los investigadores y las teorías empleados en la investigación y que constituye, en la práctica, el reconocimiento de que la realidad humana es diversa y que todos los actores sociales involucrados en su producción y comprensión tienen perspectivas distintas, no más válidas o verdaderas en sentido absoluto, sino más completas o incompletas.(p.15)

4. ANÁLISIS DE DATOS Y CATEGORÍAS EMERGENTES.

De acuerdo con la metodología que elegimos para nuestro trabajo investigativo, el análisis de los datos fue realizado a través de una triangulación, proceso que consideró las voces de los autores consultados, las voces de los niños y las nuestras como investigadoras. Por consiguiente, realizamos una dialéctica entre lo que observamos en el aula, las interacciones que tuvimos con los participantes de la investigación y nuestras propias reflexiones, en relación a la educación matemática escolar, y lo sustentamos con los planteamientos realizados por autores, como Balacheff (2000), el NCTM (2000), Carretero (1995), entre otros.

Aludiendo entonces a un proceso de triangulación, que según Pérez (1998) es un control cruzado entre diferentes fuentes de datos: personas, instrumentos, documentos o la combinación de éstos; pudimos desde nuestras reflexiones, caracterizar los datos construidos desde dos categorías emergentes. Estas categorías, se hicieron visibles después de muchos ires y venires nuestros, en función de los trabajos realizados por los estudiantes, los diálogos e interacciones con ellos y por supuesto las extensas horas de revisiones nuestras sobre procedimientos, reacciones y sentires de los protagonistas de nuestra investigación.

En consecuencia, emergieron dos categorías, las que hemos denominado respectivamente: el uso de objetos concretos y abstractos como soporte explorador de ideas matemáticas y, el papel de los saberes previos en la construcción de conocimientos matemáticos.

4.1. El uso de objetos concretos y abstractos como soporte explorador de ideas matemáticas.

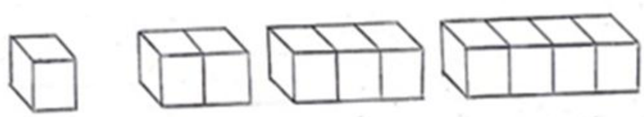
En nuestras primeras visitas a la Institución Educativa María Auxiliadora, pudimos notar como los estudiantes del grado 5°B recurrían a ejemplos concretos, muchas veces apoyándose en objetos físicos, para tratar de decir o explicar algo frente a cualquier pregunta o actividad propuesta por su profesora de matemáticas, Felipa Romaña.

Ya cuando empezamos a analizar los datos obtenidos en las interacciones con los niños, pudimos notar de manera clara, que los estudiantes participantes de este proyecto, utilizaban dibujos y los dedos de sus manos para explicar, ejemplificar y luego solucionar las actividades que les planteábamos. En adelante, analizaremos las producciones de los participantes en dos de las situaciones problema trabajadas, donde mostramos el surgimiento de la categoría en el marco de este proyecto.

4.1.1. Situación problema # 1.

En la sesión del día 24 de febrero de 2011, llevamos al aula una situación problema que consistía en la construcción de unos arreglos formados por cubos. Para trabajar en esta actividad, les entregamos a cada pareja de estudiantes un total de 6 cubos, los cuales les servían de soporte para representar los arreglos que estaban dibujados en la guía que les habíamos entregado. Los niños debían llenar una tabla y luego resolver unas actividades. Con esta situación, lo que pretendíamos era que los estudiantes empezaran a notar regularidades entre los arreglos de cubos y trataran de descubrir una regla de formación, como mostraremos a continuación:

Construye y observa los siguientes sólidos y luego completa la tabla:



Numero de cubos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de cuadrados total en las caras por cuerpo	6		14							

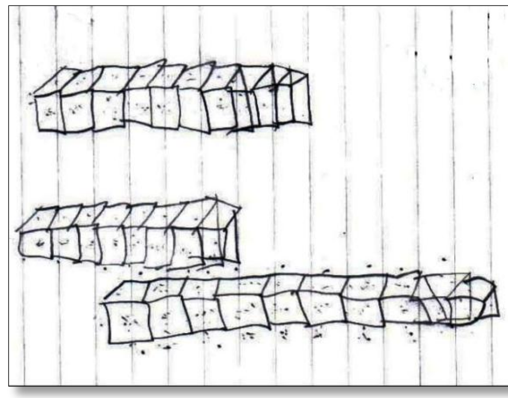
a- ¿Qué relación encuentras entre los números de la primera fila y la segunda fila de la tabla?

b- ¿Cuál es el número total de cuadrados en las caras de un cuerpo construido con 18 cubos? ¿Cómo la hallaste?

c- ¿Cómo podrías determinar cuántos cuadrados hay en total en las caras de un cuerpo construido con cualquier cantidad de cubos?

Seguidamente, documentaremos las actividades realizadas por los estudiantes participantes de esta investigación donde se hace evidente las formas de proceder descritas anteriormente.

Jessica en un primer momento, así lo notamos, procedió a utilizar los cubos de madera para representar los cuatro primeros arreglos de la guía; pero para los siguientes, ya no se ayudó de los cubos, sino que se valió de representaciones gráficas. Cuando le consultamos porque empleaba dibujos para representar los arreglos siguientes, no dudo en respondernos: "dibujé porque así es más fácil contar las caras, que haciéndolo en la mente"[6]. (Al mismo tiempo Jessica, al contar, marcaba con su lápiz el dibujo, señalando cada una de las caras de los cubos).

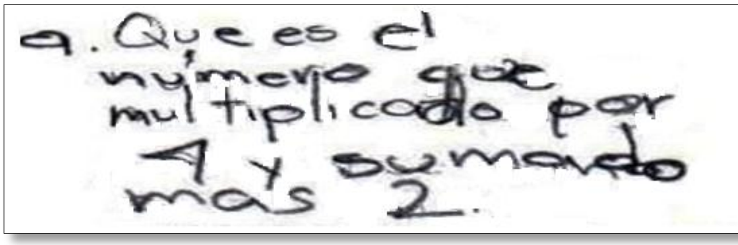


Evidencias correspondientes al día 24 de febrero de 2011

De lo realizado por Jessica, podemos inferir que ella se valió de apoyos tanto físicos como concretos, para razonar frente a los datos numéricos que debía completar en la tabla, datos que al ser analizados corresponden a los esperados por nosotras.

[6] Grabación diario de campo N°4. 24 de febrero de 2011.

En un segundo momento de la actividad, les pedíamos a los estudiantes que encontraran una relación entre el número de cubos utilizados en cada arreglo y el número de cuadrados del sólido construido. Frente a esto, Jessica escribió:



Evidencias correspondientes al día 24 de febrero de 2011

Para ganar un poco de claridad en estas palabras, dialogamos un poco con ella:

Profesora Catherine: *cuál es el número que se multiplica por 4 y se le suman 2?*

Jessica: *el número de cubos*

Profesora Catherine: *y por qué lo multiplicas por 4?*

Jessica: *porque vea!!, (al mismo tiempo que señala la hoja donde realizó la representación gráfica) cuando los cubos están pegados se les ven cuatro caras, entonces por eso se multiplica por 4.*

Profesora Catherine: *bueno, y por qué sumabas 2?*

Jessica: *ahh!, pues porque son las caras que se ven en las esquinas, y las que están pegadas no se ven, entonces esas no las conté.*

Desde este acercamiento a las ideas de Jessica, logramos comprender el porqué de los datos completados, y por consiguiente ver como ella en sus esquemas si había logrado construir una ley de formación para dichos arreglos numéricos. De manera que para saber cuántas caras hay en cada arreglo, Jessica cuenta el número de cubos y los multiplica por cuatro y luego les suma dos caras más.

En el trabajo realizado por Carolina Jurado, vemos que también la forma de completar la tabla coincide con los datos esperados.

Numero de cubos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de cuadrados total en las caras por cuerpo	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42

Evidencias correspondientes al día 24 de febrero de 2011

Sin embargo, al no tener registros claros de sus procedimientos para la obtención de estos datos, quisimos preguntarle cómo había abordado el desarrollo de la situación.

Profesora Lina: *Carolina, ¿Cómo hiciste para completar la tabla?*

Carolina: *utilice borradores.*

Profesora Lina: *¿Cómo así que utilizaste borradores? ¿Por qué?*

Carolina: *Como los cubos no me alcanzaron, tuve que utilizar borradores para poder contar, y siempre que contaba me daban cuatro más, o sea que van de 4 en 4.*

Es claro entonces, que la estrategia utilizada por Carolina fue la de utilizar borradores para simular los cubos que le hacían falta y así poder construir los arreglos restantes. Ella comenzó las construcciones haciendo uso de los cubos que le dimos inicialmente, pero dada la insuficiencia del material, como ella misma lo expresa, recurrió al uso de borradores, lo que le ayudó a desarrollar la situación. Para expresar la relación que encontró entre el número de cubos y el número de cuadrados en cada cubo, ella escribe:

9. a medida que uno ba agregando un Cubo se sumar 4 mas al total

Evidencias correspondientes al día 24 de febrero de 2011

Numero de cubos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de cuadrados total en las caras por cuerpo	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42

Evidencias correspondientes al día 24 de febrero de 2011

Del trabajo escrito realizado por Carolina y de las interacciones que tuvimos con ella, pudimos inferir que el uso de borradores se convierte para ella en un soporte valioso que le permite comenzar a observar regularidades, como ella misma lo plasmó en la hoja, sin embargo, al indagarle cómo hallaría la cantidad de cuadrados totales en las caras de un sólido construido con cualquier cantidad de cubos, nos dice:

"*Necesito tener los cubos o borradores para decirle cuantos son*".

Nuevamente, es claro ver en estas palabras como ella se queda fijada en la representación física de los cubos, lo que medianamente le permite encontrar la ley de formación para estos arreglos.

Al observar en el aula la manera como Juan José Flórez aborda esta situación, fue visible que él únicamente utilizó los cubos dados por nosotras para solucionar la situación, reutilizándolos cada vez que los necesitaba, por ejemplo, para el quinto arreglo, que no está en la guía y para el cual se necesitaban cinco cubos, Juan José, lo formó uniendo el primer arreglo con el cuarto arreglo. Sin embargo, para completar los datos de la tabla se ayudó del uso de sumas, pues cuando él se dio cuenta que los datos pedidos en la misma aumentaban de cuatro en cuatro, simplemente se dedica a sumar contando con sus dedos para obtener los datos pedidos.

En los registros plasmados por Juan José en la tabla, pudimos comprobar que el hecho de haberse apoyado en sumas, le permitió hallar los valores esperados, y así encontrar una regularidad para estos arreglos.

En particular, para esta situación problema, nos encontramos con que los estudiantes realizan procesos de manera intuitiva e informal, porque ellos se apoyaban todo el tiempo en instrumentos, objetos o elementos conocidos para ellos, lo que de una u otra manera les permitió a partir de la manipulación y la interacción con los mismos, exploraciones y construcciones de ideas nuevas. Al respecto, John Mason (1989) dice: "…El nivel en el que empieza la manipulación debe ser concreto e inspirar confianza, y los resultados de la manipulación serán entonces susceptibles de una interpretación…" (p.164)

4.1.2. Situación problema #2.

A continuación analizaremos las diferentes formas de proceder y de razonar de Jessica, Carolina y Juan José en una actividad[7], cuyo objetivo era explorar y encontrar los múltiplos de

[7] Actividad diseñada por nuestros compañeros de seminario de práctica pedagógica, Ángela María Giraldo y Sebastián Cano Rojas, en el marco de su proyecto de investigación.

los números seis, nueve y doce, además les exigía establecer relaciones entre múltiplos de estos números. La situación es la siguiente:

Un niño queriendo compartir algunos dulces con sus compañeros de grado sexto decide repartirlos en los casilleros de ellos así: dejó una chocolatina cada 9 casilleros, dejó una galleta cada 12 casilleros y una colombina cada 6 casilleros. Es de aclarar que respecta el orden en que están los casilleros.

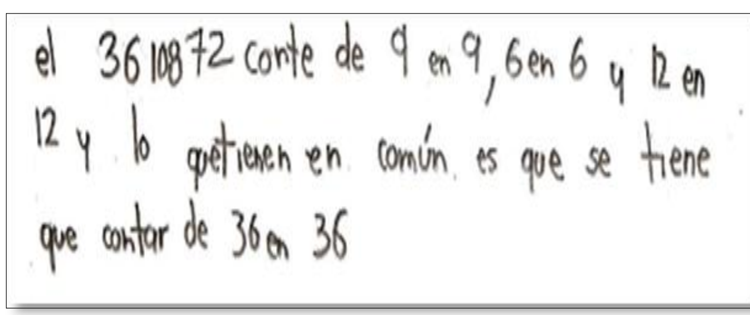
Con esta información resuelva las siguientes actividades:

a- Si en grado sexto hay 120 estudiantes y cada uno tiene un casillero. ¿Cuántos estudiantes encontraron los 3 dulces en su casillero?

b- ¿Los números de los casilleros donde quedaron 3 dulces que tienen de especial para que en ellos quedaran de todos los dulces?

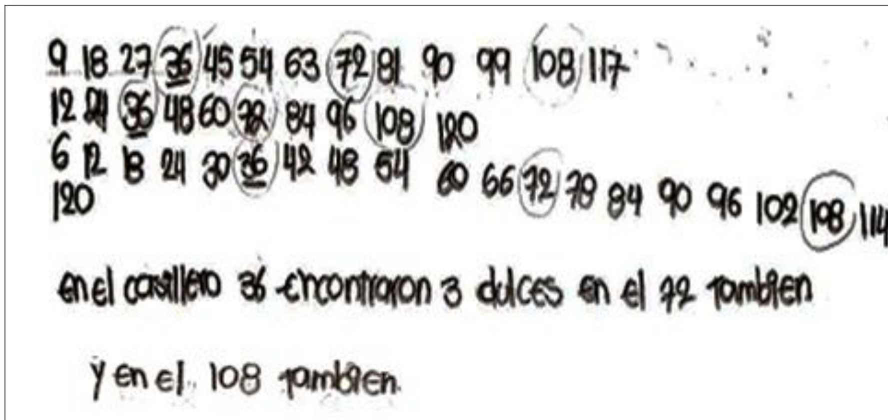
Mientras los niños exploraban formas de solución a las actividades aquí plateadas, nosotras nos dedicamos a observar de manera detenida, sus comportamientos y actitudes frente a las formas de proceder y notamos que los tres estudiantes, utilizaron estrategias muy similares. Veamos el por qué.

Jessica, comienza su trabajo asegurando que para repartir los dulces, debe contar de 6 en 6, de 9 en 9 y de 12 en 12. Para tales conteos, la niña se vale de los dedos de sus manos. De esta forma, ella


el 36 108 72 conte de 9 en 9, 6 en 6 y 12 en 12 y lo qetienen en común es que se tiene que contar de 36 en 36

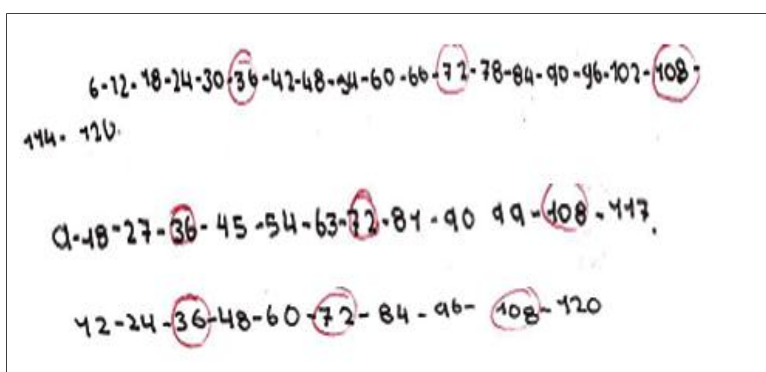
Evidencias correspondientes al día 02 de junio de 2011 concluye, como se puede ver en su trabajo escrito, que los números 36,108 y 72 son los casilleros en los que quedan los tres dulces, además concluye que los tres números de los casilleros tienen en común que van de 36 en 36, lo que en matemáticas es equivalente a decir múltiplos de 36.

Observando el trabajos escrito de Carolina, podemos ver que en un primer momento, ella realiza los mismos conteos que Jessica, pero adicional a esto, escribe en su guía los números que va obteniendo cuando cuenta de 6 en 6, de 9 en 9 y de 12 en 12. Luego de estos conteos, que realiza inicialmente en sus dedos (para 6 y 9) y luego a través de sumas para el caso de 12 en 12, Carolina compara las tres series de números que obtuvo, y encierra en círculo los números que son comunes a las tres series, argumentándonos que esos son los casilleros que tienen 3 dulces.



Evidencias correspondientes al 02 de junio de 2011

Las formas de proceder de Juan José no se alejan mucho de las dos descritas anteriormente. En primer lugar, él también realiza



Evidencias correspondientes al 02 de junio de 2011 conteos, pero de la siguiente manera: para los conteos de 6 en 6, y de 9 en 9 utiliza las tablas de multiplicar y para los de 12 en 12, recurre a las sumas sucesivas, hecho que el niño nos explicó al indagarle porque no había multiplicado como lo hizo con los otros números. Seguidamente, escribe las series de números que obtuvo y luego encierra en círculos los tres números que se repiten, pues él asegura que en estos tres números es donde se encuentran los tres dulces.

Con respecto a esta categoría, podemos decir, que trabajar en el aula a partir de situaciones problema, conlleva a los estudiantes a desarrollar prácticas en las cuales ellos se atreven a explorar, predecir, concluir e incluso replantear sus estrategias de trabajo, de forma tal que empiezan a ganar confianza, formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos. Muchos de estos procesos se realizaron con el apoyo de diferentes objetos, tanto concretos como abstractos. Esto fue notorio, cuando los estudiantes hicieron uso de borradores, dibujos, conteos en sus dedos y cálculos mentales; los cuales permitieron entender y construir relaciones de tipo matemático. Al respecto Múnera (2009) afirma:

> Podemos entonces considerar como objetos concretos, todos aquellos que son manipulados a la luz de la acción física. Los objetos abstractos, son aquellos tenidos como "ideas" y que ya se comprenden a la luz de las operaciones mentales; serían aquellos que según el profesor Vasco se denominan saberes concretos. Por ejemplo: la tabla de multiplicar, el Triángulo de Pascal, un gráfico, una definición, un teorema, etc. (p.4)

A través de estas experiencias vividas en el aula, pudimos ver con mayor claridad la importancia de motivar a los estudiantes a explorar y resolver situaciones matemáticas, que los conlleve a construir nuevos conocimientos, además experimentar e interactuar con objetos concretos o abstractos, les aporta elementos para entender conceptos y construir significados. Por esta razón, los estudiantes deben procurar establecer sus propias formas de interpretar ideas, relacionarlas con sus vivencias y transformarlas para adquirir nuevos saberes.

En consecuencia, lo realizado en estas dos situaciones problema por los estudiantes participantes de esta investigación, nos permitió validar lo propuesto por el NCTM (2000), pues según este "…Los niños expresan sus conjeturas y describen lo que piensan con sus propias palabras y, con frecuencia, las exploran usando materiales concretos y ejemplos…" (p.60)

4.2. El papel de los saberes previos en la construcción de conocimientos matemáticos.

En esta categoría fue frecuente a la luz de los análisis de los distintos materiales y registros de información, como los estudiantes frente a cualquier actividad nueva que les proponíamos, vehiculaban sus ideas matemáticas apoyándose en lo que ya sabían. Fue visible como el saber previo es un insumo potente para dar cuenta de la forma como razonan los estudiantes ideas que ayudan a producir estrategias de solución a los planteamientos.

Si bien es cierto que lo expresado anteriormente no son ideas nuevas, porque distintos autores ya han hablado del papel que juegan los saberes previos en la construcción de saberes matemáticos, si nos parece interesante señalar como esto entra en concordancia con lo planteado por Pozo, Limón y Sanz (1991) cuando dicen que los conocimientos previos son construcciones personales que se han elaborado en interacción con el mundo cotidiano, con los objetos, con las personas y en diferentes experiencias sociales o escolares.

En adelante, documentaremos dos actividades en las que pudimos ver claramente la recurrencia permanente del uso de los conocimientos anteriores que los participantes de nuestra investigación ya poseían y usaban al momento de enfrentarse a las situaciones planteadas.

4.2.1. Situación problema # 1.

Les planteamos a los estudiantes la situación siguiente:

Completa la tabla con base en las figuras:

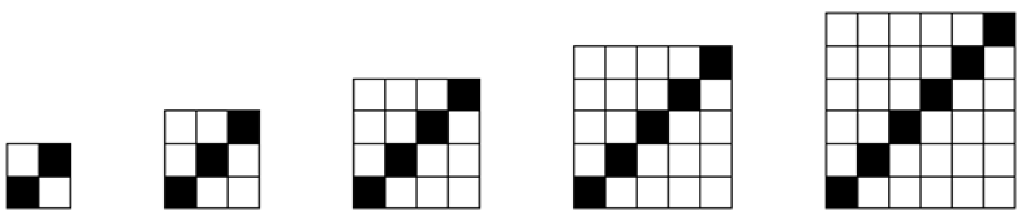


Figura 1 (P1) *Figura 2 (P2)* *Figura 3 (P3)* *Figura 4 (P4)* *Figura 5 (P5)*

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros								
Cantidad de cuadrados blancos								

a- Explique una manera de obtener el total de los cuadrados para cualquiera de las figuras.

b- ¿Qué cantidad de cuadrados negros debe tener una figura de la posición 12? ¿Cuántos blancos? Explique el por qué.

c- Si alguien afirma que la figura de la posición 16 tiene 32 cuadrados blancos, ¿es cierto? Explique el por qué.

La actividad la organizamos con el fin de permitir en los estudiantes la observación sobre la composición de los mosaicos y así explorar ideas que los orientara en la búsqueda de regularidades tras la consecución de una ley de formación para el mosaico de la posición *n*. Es decir, la intencionalidad de la situación es problematizar la constitución de la ley de formación para cualquier posición, completar una tabla y dar cuenta de la forma como lo realizaron.

En adelante documentaremos la forma como abordaron sus elaboraciones los participantes esta actividad:

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros	8	12	16	20	24	28	32	36
Cantidad de cuadrados blancos	8	30	54	88	138	238	328	693

Evidencias correspondientes al día 03 de marzo de 2011

Al observar los datos registrados por Jessica, notamos que éstos no corresponden a los esperados y como no había registro alguno que nos dejara ver de dónde salieron estos números, nos vimos en la necesidad de generar una conversación con ella para desentrañar de donde emergieron éstos.

***Profesora Lina**: Jessica, ¿Qué procedimientos utilizaste para completar la tabla?*

***Jessica**: para los cuadrados negros me di cuenta que multiplicando el número de cuadrados negros por ocho daba el resultado.*

***Profesora Lina**: ¿Por qué por ocho?*

***Jessica**: digo por cuatro.*

***Profesora Lina**: ¿Y por qué por cuatro?*

***Jessica**: Por qué acá irían dos, acá otros dos, acá dos y acá también (al mismo tiempo que señala los lados de la figura 1).*

Con este pequeño diálogo, empezamos a esclarecer el porqué de los procedimientos utilizados por Jessica. De sus explicaciones, intuimos que ella conservaba en sus esquemas mentales la actividad documentada en la página 45 cuyo motivo eran unos cubos de madera. A partir de esto, inferimos que ella estaba viendo en los arreglos de mosaicos como las caras frontales de un sólido, en este caso, de un cubo. Desde esta mirada, los datos que Jessica escribió en su tabla en relación al total de cuadrados negros, son válidos. Sin embargo, hoy lamentamos no haber indagado por la forma en que ella halló el total de los cuadrados blancos, pues continuamos con la duda de donde surgen los números 8, 30, 54, 88, 138, 238, 328 y 693.

Dentro de este mismo conversatorio, le plantemos a Jessica algunos interrogantes, con el fin de orientarla hacia la búsqueda de nuevas estrategias que le permitieran solucionar la situación.

***Profesora Lina**: Si yo te digo que esos no son cubos si no cuadrados tal y como se ven ¿Cómo hallarías los cuadrados blancos y los cuadrados negros para cada figura?*

***Jessica**: Entonces acá son dos blancos y dos negros (señala la figura 1), acá son seis blancos y tres negros (señala la figura 2), acá doce blancos y cuatro negros (señala la figura 3)*

***Profesora Lina**: ¿Y por ejemplo para la posición seis? ¿Cómo los hallarías?*

***Jessica**: Entonces tendría un cuadrado de 6x6 que es 36, y entonces le quitamos 6 negros y me quedan los blancos. Pero todos los cuadrados en total darían 36*

***Profesora Lina**: Entonces, en la posición cinco ¿Cuántos cuadrados hay?*

***Jessica**: Serían 5x5 que da 25 porque acá van 5 y acá van 5. (Señala los lados del cuadrado de la posición 5)*

***Profesora Lina:** ¿Y está segura que acá le da 5? (Señala un lado del cuadrado de la posición 5).*

***Profesora Jessica**: A no. Es en la posición cuatro en el que hay 5. Entonces acá habría 36 y acá 25 (se refiere al total de cuadrados de las posiciones 5 y 4 respectivamente).*

Al indagarle por la cantidad de cuadrados negros y blancos que debía tener la figura de la posición 12, ella nos expresa:

***Jessica**: se pondría 13x13 (realiza la operación en una hoja) que meda 169 cuadrados en total, entonces le resto 13 y da 156 blancos.*

***Profesora Lina**: Bueno Jesica, ¿Cómo harías para hallar los cuadrados negros y blancos para una figura de cualquier posición?*

***Jessica**: Por ejemplo si me dan la posición 20 serian 21 y luego multiplico 21x21 y le resto 21.*

De las palabras expresadas por Jessica, logramos inferir que ella realmente construye un algoritmo propio para encontrar el total de cuadrados negros y blancos de una figura cualquiera, el cual podemos expresar así: calcula el área del cuadrado de la posición dada y luego resta el número de cuadrados negros (de acuerdo a ella, la diagonal), y así encuentra el total de cuadrados blancos para cualquier figura. Es característico de la estudiante hacer uso de ejemplos para validar sus razonamientos, esto entra en relación con lo que Balacheff (2000) denomina ejemplo genérico, el cuál describe como, todo procedimiento que un estudiante realiza para hacer una prueba que le ayude a establecer la validez de sus hipótesis.

Juan José registra los datos esperados (excepto para el total de cuadrados blancos de la posición 10).

Posición de la figura	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P8	P10
Cantidad de cuadrados negros	2	3	4	5	6	7	9	11
Cantidad de cuadrados blancos	2	6	12	20	30	42	72	90

Evidencias correspondientes al día 03 de marzo de 2011

En cuanto a los argumentos para obtener el total de cuadrados para una figura determinada esto es lo que nos deja por escrito:

1) Sumamos dos en cada uno ejemplo en decir contado en par desde 4

2 6 12 20 30
4 6 8 10

Evidencias correspondientes al día 03 de marzo de 2011

A pesar de las evidencias escritas, estas no fueron suficientes para nosotras poder realizar una interpretación de su trabajo, por lo cual procedimos a interactuar con él como sigue:

Profesora Catherine: *Cómo hiciste para completar la tabla.*

Juan José: *Primero comencé contando y después llegue hasta el P5 que es el último (se refiere al dibujo, del mosaico, de la figura que está en la posición 5), entonces, yo estaba buscando como en el último ejercicio que hicimos en la otra clase*[8]*, que era sumando de a cuatro, entonces vi que era así. Entonces, vi primero que se podía sumar de a dos en par, por ejemplo acá hay un dos (el niño señala en la tabla el número 2 que había escrito en la cantidad de cuadrados blanco) y 2 + 4= 6, se le suma dos 6 +6 = 12, se le suman otros dos 12 + 8= 20, se le suman otros dos 20+10=30, y así entonces respondimos las preguntas.*

De esta explicación, comenzamos a comprender las relaciones que Juan José estaba construyendo para justificar como había hallado el número total de cuadrados para cualquier mosaico. Como lo vimos anteriormente en sus evidencias, él inicia su conteo desde el número cuatro[9] y a este le suma 2, de esta manera obtiene el número 6 el cual corresponde al total de cuadrados blancos para el mosaico de la segunda posición. Al número 4 le suma 2 obteniendo el 6 y este resultado lo suma con la cantidad de cuadrados blancos de posición anterior que es 6, obteniendo 12. Al número 6 le suma nuevamente 2 para obtener 8 y este número lo suma con la cantidad de cuadrados blando del mosaico de la posición anterior, es decir, con el

[8] Juan José se refiere a la situación problema que documentamos en la página 46.

[9] Inferimos que este número sale de la asociación que Juan José hace con la actividad referida anteriormente.

número 12 y así obtiene el número 20. Este procedimiento, se repite hasta terminar de completar la tabla. Es así, como estos números se convierten en apoyo para Juan José en la medida que le posibilitan hallar el número total de cuadrados blancos.

Al consultarle si su estrategia funcionaba para cualquier figura, él nos dice: *"No porque toca sumar todo, pero después entendí que era multiplicando los P*[10] *con la cantidad de cuadros negros daba el resultado".* De aquí nos queda claro que Juan José encuentra una regularidad consistente en multiplicar el número de la posición por el total de cuadrados negros. Sin embargo, estas justificaciones no dan cuenta de la manera en que él encuentra el total de cuadrados negros. Razón por la cual decidimos indagarle un poco más:

Profesora Catherine: *Entonces así puedo encontrar el número de cuadrados blancos y de cuadrados negros para cualquier posición.*

Juan José: *Si (responde de manera muy segura).*

Profesora Catherine: *Si por ejemplo te pregunto por la figura de la posición 25. ¿Cuántos cuadrados negros tiene?*

Juan José: *26*

Profesora Catherine: *Estas seguro*

Juan José: *Si*

Profesora Catherine: *¿por qué estás seguro de eso?*

Juan José: *porque siempre se le lleva una ventaja*

[10] El estudiante cuando utiliza la letra *P* se refiere a la posición del mosaico.

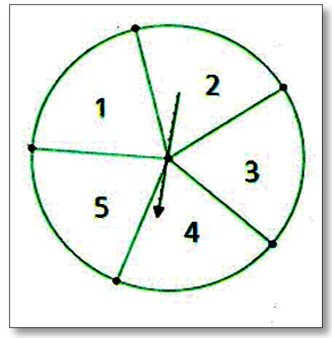
Profesora Catherine: *cuando hablas de desventaja, ¿a qué te refieres?*

Juan José: *ósea que este (muestra el lugar de la posición de una figura) le lleva uno de desventaja a este (señala la cantidad de cuadrados negros).*

Las formas de proceder de Juan José ante esta situación, son muy dicientes, porque nos dejan ver claramente como él elabora ideas a partir de todo lo que hizo. En un primer momento, para encontrar la cantidad de cuadrados blancos, él se basa en el procedimiento de sumar de a dos, pero después se percata de que había otra forma más sencilla, consistente en multiplicar la posición de la figura por la cantidad de cuadrados negros, siendo notorio como se vale de sus saberes previos para encontrar un algoritmo que le permitió dar solución a la situación.

Después de analizar estas formas de proceder de Jessica y Juan José, es fácil ver como de una u otra manera ellos acuden a lo que ya conocen para establecer una estrategia de solución, sin embargo, esto nos los condiciona al momento de encontrar nuevas posibilidades. Respecto a esto, Balacheff (2000) plantea que una experiencia crucial denota una experimentación cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. Lo realmente importante en este trabajo es que los estudiantes están razonando y produciendo ideas matemáticas y conocimientos desde sus propias actividades.

4.2.2. Situación problema # 2.



El propósito de esta situación[11] es aproximar a los estudiantes a la idea de probabilidad. El motivo de esta actividad es una representación gráfica de una ruleta (como se muestra en la figura), consistente en un indicador en el que al girar la aguja esta puede caer igualmente en cualquiera de los cinco espacios. Dicha situación se problematizó a través de las siguientes actividades:

a- Si giramos la aguja, ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en 5?

b- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio que tenga un número impar?

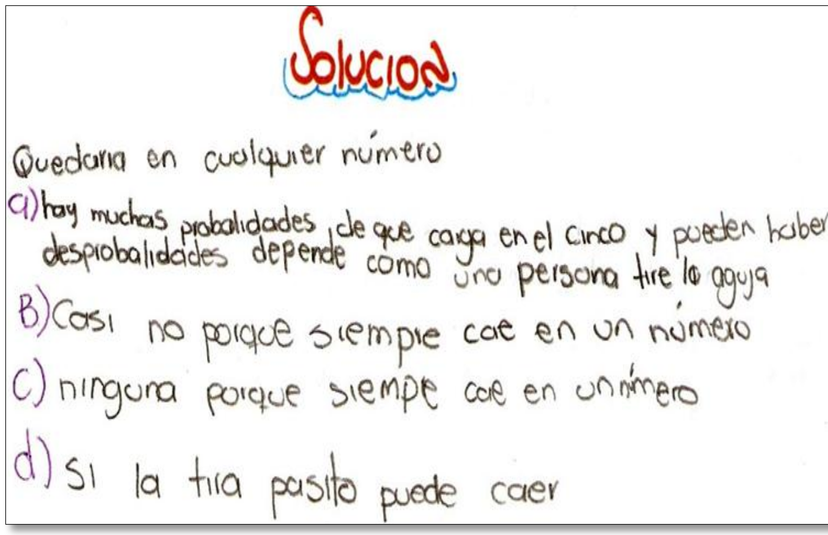
c- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con número par?

d- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con un número menor que 5?

En adelante comentamos y reflexionamos sobre la forma como procedieron Carolina, Jessica y Juan José:

[11] Situación diseñada por el profesor John Jairo Múnera Córdoba y sugerida por él para llevar al aula.

Carolina comienza de forma muy particular, atribuyéndole un grado de importancia al azar. Esto se hace evidente cuando escribe "*quedaría en cualquier número*", lo que puede significar que para ella, todo lo que tenga que ver con probabilidad está asociado con la suerte. Cuando quiso hablarnos de la posibilidad que la aguja cayera en el número cinco (literal *a*), nos llama mucho la atención el término *desprobabilidad*, al indagarle por el significado de esta palabra ella lo asume como aquellas posibilidades de que la aguja no caiga en el número cinco.



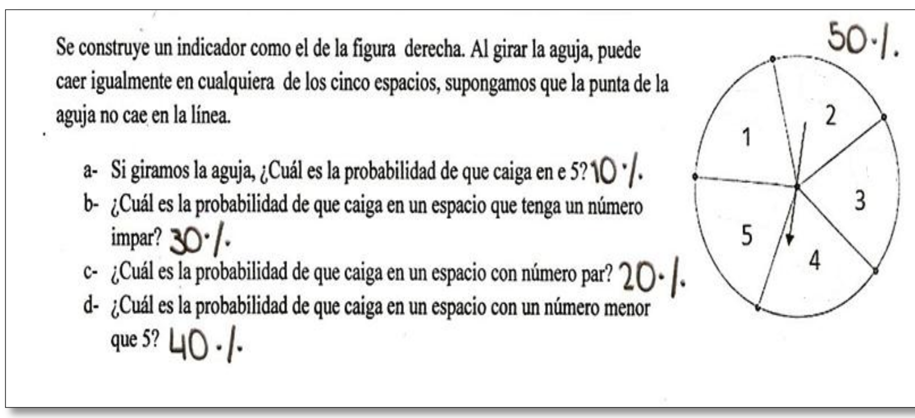
Evidencias correspondientes al día 07 de abril de 2011

Al averiguarle por las posibilidades de que la aguja caiga en un espacio de un número par o un número impar (literales *b* y *c*), observamos como lo escrito por ella no concierne a un razonamiento que apunte a la reflexión sobre lo que es un número par o impar, por lo que intuimos que ella ignoraba esta diferencia.

Por otra parte, para Carolina la probabilidad de que la aguja caiga en un espacio con un número menor que cinco, depende de la fuerza con la que una persona lance la aguja, porque como pudimos ver en su trabajo escrito (literal *d*) ella sólo dice que hay que tirarla pasito. De esto, podemos interpretar que ella se basa en la representación gráfica de la ruleta, en la que la aguja señala el número cuatro. Visto de esta manera, es comprensible su razonamiento, pues siendo así, solo bastaría girar la aguja sin mucha fuerza hacia la derecha para que pueda caer en los número tres, dos o uno.

Vemos como Carolina en sus palabras le está dando un cierto grado de azar a todo lo relacionado con la probabilidad, además ella emplea unas palabras muy propias de su lenguaje natural, como lo pudimos notar cuando hablaba de desprobabilidades, siendo este un término adoptado por ella para justificar las relaciones que tejía alrededor de esta situación. Con relación a esto, Carretero (1995) plantea que: “el razonamiento informal no utiliza un lenguaje formal o simbólico, sino el lenguaje empleado en la vida cotidiana.” (p.43)

En el trabajo escrito de Juan José, notamos en primer lugar que él asocia la probabilidad con la idea de porcentaje, porque como se puede ver escribe y asume que la ruleta completa equivale a un 50%, es decir, asume que cada uno de los espacios en el que está dividido el indicador, vale un 10%.


Se construye un indicador como el de la figura derecha. Al girar la aguja, puede caer igualmente en cualquiera de los cinco espacios, supongamos que la punta de la aguja no cae en la línea.

a- Si giramos la aguja, ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en e 5? 10 %.
b- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio que tenga un número impar? 30 %.
c- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con número par? 20 %.
d- ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en un espacio con un número menor que 5? 40 %.

Evidencias correspondientes al día 07 de abril de 2011

Con el propósito de ahondar en los procesos realizados por Juan José, cuando socializábamos la actividad con el grupo, él tuvo la oportunidad de darnos a conocer explicaciones de sus ideas al respecto:

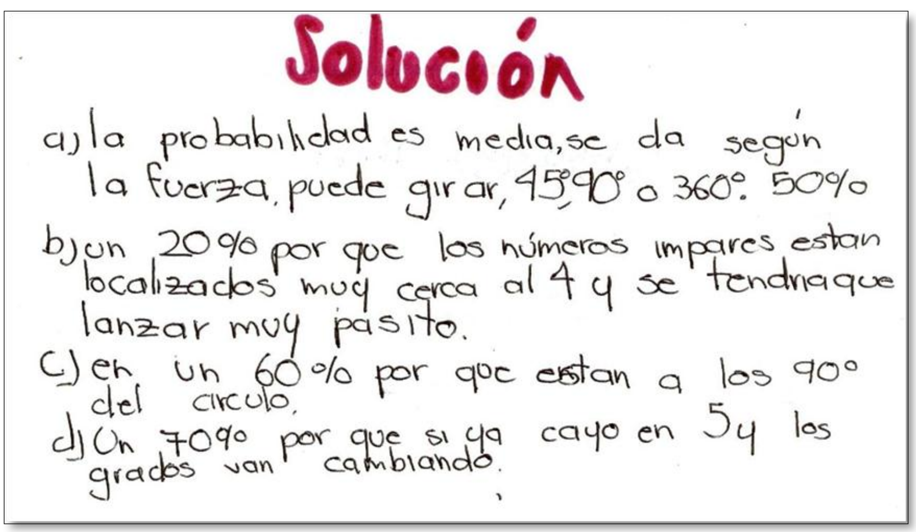
__Juan José__: toda la ruleta es el 50% porque cada partecita es el 10%. Por ejemplo si cae en el cinco: es el 10% y si fuera a caer en un espacio impar: es el 30% porque son tres partecitas.

***Profesora Lina**: Juan José, ¿por qué dices que la ruleta es el 50%?*

***Juan José**: Porque solamente está dividida en cinco partes.*

Interpretando las palabras de Juan José, consideramos validos sus razonamientos, porque el hecho de que él haya asumido que el total de la ruleta era el 50% y no el 100% como lo esperábamos, esto en nada interfiere ni cambia las asociaciones establecidas por el niño. Este asunto que parece una cuestión de simples valores, no afecta ni interfiere en la construcción de ideas matemáticas que él hace con relación a la probabilidad.

Miremos ahora las elaboraciones construidas por Jessica:



Solución

a) la probabilidad es media, se da según la fuerza, puede girar, 45°, 90° o 360°. 50%

b) un 20% por que los números impares estan localizados muy cerca al 4 y se tendria que lanzar muy pasito.

c) en un 60% por que estan a los 90° del circulo.

d) Un 70% por que si ya cayo en 5 y los grados van cambiando.

Evidencias correspondientes al día 07 de abril de 2011

Una primera interpretación que hacemos a las soluciones halladas por esta estudiante, es que ella asocia el concepto de probabilidad a la fuerza con que es lanzada la aguja, lo que se hizo evidente cuando le cuestionamos por las probabilidades de que la aguja cayera en el número cinco, porque ella escribe en sus soluciones que la probabilidad es media y se da según la fuerza. Igualmente, al indagarle por la probabilidad de que la aguja cayera en un espacio que contenga un número impar, ella dice que es de un 20% y que la aguja se tendría que lanzar muy pasito.

Observamos además, que la estudiante utiliza ideas relacionadas con conceptos matemáticos como el de porcentaje y ángulos para explicar sus razonamientos. Con respecto a esto, durante un conversatorio, surgió lo siguiente:

Profesora Lina: *Jessica, ¿Por qué utilizaste grados en tu trabajo?*

Jessica: *porque la ruleta es un círculo y mi profe me enseño que los círculos se miden en grados.*

Profesora Lina: *¿Y por qué usaste porcentajes?*

Jessica: *Porque lo escuche un día que estaba viendo eso en la televisión.*

Con esta pequeña charla, nos pudimos dar cuenta como Jessica dispone de una amplia variedad de capacidades cognitivas, estrategias y habilidades que ha ido adquirido a través de sus interacciones con el mundo que la rodea, también es claro como la influencia de la cultura y todas las experiencias vividas por fuera de la escuela, enriquecen los conocimientos.

Hasta este punto, podemos afirmar en primer lugar, que cuando los estudiantes razonan casi siempre emplean el lenguaje usado en la vida cotidiana; en segunda instancia podemos decir que los razonamientos realizados por los niños fueron todos informales. Entendiendo razonamiento informal desde Voss, Perkins y Segal (1991) citados por Carretero (1995), como:

> Razonamiento informal es el razonamiento que se aplica fuera de los contextos formales de las matemáticas y la lógica simbólica. Implica razonamiento sobre las causas y las consecuencias y sobre las ventajas y las desventajas o los pros y los contras de determinadas proposiciones o de alternativas sobre las que hay que decidir. (p. 39)

Podemos decir también, que los estudiantes logran construir aprendizajes matemáticos, cuando elaboran abstracciones e inferencias a partir de la información que poseen, cuando observan propiedades y regularidades, cuando establecen relaciones y buscan estrategias de solución. Para esto, es necesario llevar al aula situaciones que supongan desafíos matemáticos atractivos para los estudiantes, donde sea posible interiorizar conceptos matemáticos a través de la exploración y manipulación de diferentes objetos.

Finalmente, pero no menos importante, es que el razonamiento está estrechamente ligado a la manipulación y al tratamiento que los estudiantes le dan a cierta información que está de manera disponible para ellos y con la cual buscan soluciones a problemas nuevos.

5. CONCLUSIONES FINALES.

Al inicio de nuestro trabajo nos planteamos la pregunta ¿Qué contribuciones hacen las situaciones problema a las formas de razonar de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de matemáticas escolares? Después de realizar los respectivos análisis de los datos producidos durante nuestra investigación, surgen dos categorías: la primera de ellas fue denominada "El uso de material concreto como soporte explorador de ideas matemáticas" y la segunda categoría "El papel de los saberes previos en la construcción de conocimientos matemáticos"; ambas encaminadas a las diversas formas de proceder que los estudiantes ponen en juego cuando abordan una situación planteada.

A la luz de los resultados obtenidos en nuestra investigación, tejimos ideas que dan cuenta de aquellos elementos que caracterizan a las situaciones problema, visualizando como éstas favorecen en los estudiantes formas de razonar asociadas a los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares. En este orden de ideas, el trabajo con situaciones problema permite desarrollar destrezas y habilidades en los estudiantes como la reflexión, la interpretación y la capacidad de decidir cuáles son los planteamientos necesarios para emprender la resolución de una situación.

La enseñanza problémica, promueve el desarrollo de la observación, la atención, el razonamiento, la capacidad de reflexión, el análisis, el uso de conocimientos ya adquiridos y todo un conjunto de elementos intelectuales y afectivos, que facilitan el acceso al conocimiento. De esta forma, se encuentra centralizado el desarrollo del razonamiento y la formación del espíritu creativo en el estudiante. La clase, a partir de allí, se da como un espacio rico en aprendizaje, que resulta altamente significativo para el grupo, por el hecho mismo de que tiene una relación directa con el entorno y con las necesidades individuales y colectivas.

A partir de estas situaciones, los estudiantes realizan procesos de construcción de conocimiento a través de las soluciones iniciales e informales que ellos mismos inventan. Desde esta perspectiva, se pretende que ellos trabajando en interacción con sus pares, reinventen los objetos, saberes y herramientas de la matemática.

Finalmente, podemos afirmar que una situación problema apunta a los procesos de aprendizaje de las matemáticas, pues ésta no es simplemente una tarea, sino una herramienta que permite pensar matemáticamente, a través de ella, el estudiante elabora su propio pensamiento, fomenta sus habilidades creadoras y desarrolla el pensamiento matemático, ya que se forman individuos intelectuales, capaces de crear y razonar matemáticamente.

6. REFERENCIAS.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Colombia. Estándares Básicos. (2006). *Competencias en matemáticas*. Ministerio de educación nacional. Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares matemáticas. (1998).

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de las matemáticas.* Universidad de Bologna.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view? En C. Mammana y V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

Gutiérrez, J.; Pozo, M. T. y Fernández, A. (2002). "*Los estudios de caso en la lógica de la investigación interpretativa*" Arbor, Revista de Ciencia, Pensamiento y Cultura, Consejo Superior de Investigaciones Científicas CLXXI, 675.

Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje.* Conferencia invitada presentada en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática- CIBEM, Oporto, Portugal. Julio, 2005 [Versión Electrónica].

López, F (2006). Investigación cualitativa: nuevas formas de investigar en el ámbito universitario.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Martínez Carazo, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. Recuperado el 12 de Junio de 2009, de http://investigacioncualitativa.cl/2008/01/estudios-de-caso.html

Mason, et at. *Pensar matemáticamente*. Trad. Martínez, M. España: Labor, 1989.

Mesa, O. (1997). *Criterios y estrategias para la enseñanza de las matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá, D. C.

Mesa, O. (1998). *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de María Moliner*. Madrid: Editorial Gredos.

Múnera, J, 2009, *Diseño de situaciones problema dinamizadoras de pensamiento matemático escolar*, en: Memorias Décimo Encuentro colombiano de matemática educativa, octubre, San Juan de Pasto, Colombia.

Múnera, J. (2011, enero-abril). *Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema*. Revista educación y pedagogía. Vol. 23, N°23, 179-193.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación Matemática*, traducido por Manuel Fernández, Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

Pérez, G. (1998). *Investigación cualitativa retos e interrogantes*. Madrid: Editorial La Muralla S. A.

POZO, J.I., LIMÓN, M. y SANZ, A. (1991). *Conocimientos previos y aprendizaje escolar*. Cuadernos de pedagogía, 188, pp. 12-14.

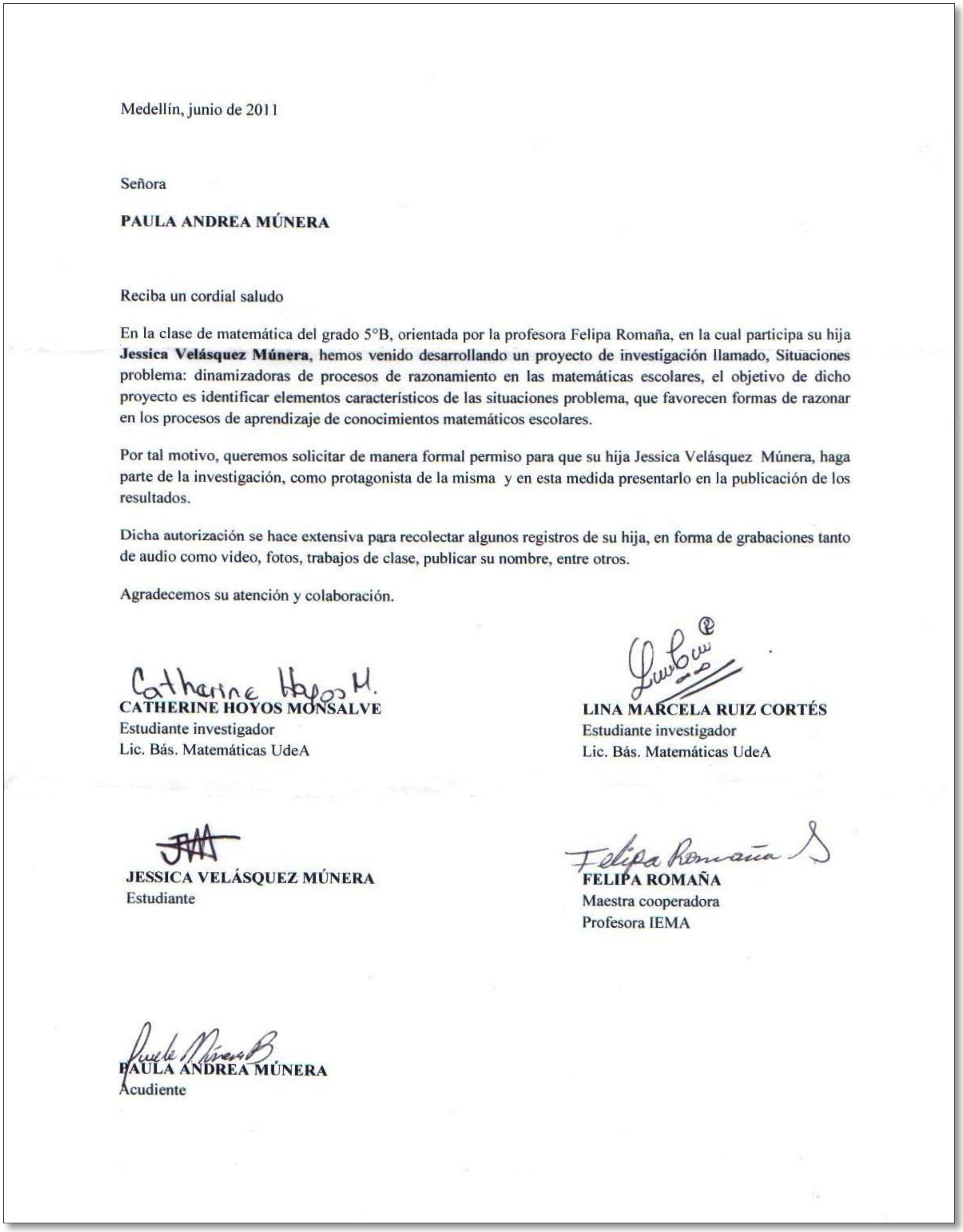
Rico, L. (1995). *Consideraciones sobre el currículo escolar en matematicas.* Revista EMA, investigación e innovación en investigación matemática. Vol. 1, número 1, de la página 4 a la 24.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica*. Barcelona: Antrophos, Editorial del Hombre.

Sandoval Casilimas, C. A. (Diciembre de 2002). *Investigación Cualitativa*. (A. E. Ltda, Ed.) Recuperado el 21 de Septiembre de 2010 de http://www.scribd.com/doc/12839590/Inv-Cualitativa-Carlos-Sandoval.

Santamaría, C. (1995). *Razonamiento y comprensión*. En M. Carretero, J. Almaraz & P. Fernández (Eds.)

7. ANEXOS.



Medellín, junio de 2011

Señora

PAULA ANDREA MÚNERA

Reciba un cordial saludo

En la clase de matemática del grado 5°B, orientada por la profesora Felipa Romaña, en la cual participa su hija **Jessica Velásquez Múnera**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado, Situaciones problema: dinamizadoras de procesos de razonamiento en las matemáticas escolares, el objetivo de dicho proyecto es identificar elementos característicos de las situaciones problema, que favorecen formas de razonar en los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares.

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hija Jessica Velásquez Múnera, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma y en esta medida presentarlo en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hija, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, publicar su nombre, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Catherine Hoyos M.
CATHERINE HOYOS MONSALVE
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

LINA MARCELA RUIZ CORTÉS
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

JESSICA VELÁSQUEZ MÚNERA
Estudiante

Felipa Romaña
FELIPA ROMAÑA
Maestra cooperadora
Profesora IEMA

PAULA ANDREA MÚNERA
Acudiente

Medellín, junio de 2011

Señora

PATRICIA HELENA CHICA

Reciba un cordial saludo

En la clase de matemática del grado 5°B, orientada por la profesora Felipa Romaña, en la cual participa su hijo **Juan José Flórez Chica**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado, Situaciones problema: dinamizadoras de procesos de razonamiento en las matemáticas escolares, el objetivo de dicho proyecto es identificar elementos característicos de las situaciones problema, que favorecen formas de razonar en los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares.

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hijo Juan José Flórez Chica, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma y en esta medida presentarlo en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hijo, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, publicar su nombre, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Catharine Hoyos M.
CATHERINE HOYOS MONSALVE
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

LINA MARCELA RUIZ CORTÉS
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

Juan José Flórez
JUAN JOSE FLOREZ CHICA
Estudiante

Felipa Romaña
FELIPA ROMAÑA
Maestra cooperadora
Profesora IEMA

Patricia E. Chica.
PATRICIA HELENA CHICA
Acudiente

Medellín, junio de 2011

Señora

NOELIA COLORADO GIRALDO

Reciba un cordial saludo

En la clase de matemática del grado 5°B, orientada por la profesora Felipa Romaña, en la cual participa su hija **Carolina Jurado Colorado**, hemos venido desarrollando un proyecto de investigación llamado, Situaciones problema: dinamizadoras de procesos de razonamiento en las matemáticas escolares, el objetivo de dicho proyecto es identificar elementos característicos de las situaciones problema, que favorecen formas de razonar en los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos escolares.

Por tal motivo, queremos solicitar de manera formal permiso para que su hija Carolina Jurado Colorado, haga parte de la investigación, como protagonista de la misma y en esta medida presentarlo en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de su hija, en forma de grabaciones tanto de audio como video, fotos, trabajos de clase, publicar su nombre, entre otros.

Agradecemos su atención y colaboración.

Catherine Hoyos M.
CATHERINE HOYOS MONSALVE
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

LINA MARCELA RUIZ CORTÉS
Estudiante investigador
Lic. Bás. Matemáticas UdeA

Carolina Jurado C.
CAROLINA JURADO COLORADO
Estudiante

Felipa Romaña S.
FELIPA ROMAÑA
Maestra cooperadora
Profesora IEMA

Noelia Colorado G.
NOELIA COLORADO GIRALDO
Acudiente