A propósito de las representaciones algebraicas: una relación entre situaciones cotidianas y el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico

Linda Estefany Montoya Quintero

Trabajo de grado presentado para optar al título de:
Licenciada en Matemáticas y Física

Asesor
Yirsen Aguilar Mosquera
Magíster (MSc) en Enseñanza de las Ciencias

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas y Física
Medellín, Antioquia, Colombia
2021

Cita	(Montoya, 2021)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Montoya, L. (2021). *A propósito de las representaciones algebraicas; una manera de ilustrar la solución de situaciones cotidianas con el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico* [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Asesor de prácticas y de trabajo de grado: Yirsen Aguilar Mosquera
Coevaluador:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Vicerrectoría de Docencia

Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda.

Decano/Director: Wilson Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Juan David Gómez González.

Agradecimientos

En tiempos de Pandemia, a causa del Covid-19, donde hubo cambios significativos que me desacomodaron y una sensación de incertidumbre siempre presente, agradezco a todos aquellos que me brindaron una voz de aliento para continuar y finalizar este proceso, en especial a mi asesor, Yirsen Aguilar, quien siempre mostró su lado más humano y fue un apoyo incondicional en la culminación de este proceso.

“Los encantos de esta ciencia sublime,
las matemáticas,
sólo se le revelan a aquellos que
tienen el valor de profundizar en ella.”
Carl Friedrich Gauss

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La investigación surge con el propósito de reflexionar el porqué del marcado desinterés que muestran los estudiantes hacia la matemática, desinterés que se intensifica en la introducción al contenido algebraico, lo anterior constatado en la experiencia de la investigadora y diversas lecturas que lo documentan. Se reflexiona acerca de la naturaleza de la matemática y su incidencia en los procesos de enseñanza, colocándolo como eje clave en la estructuración de la enseñanza matemática, destacando una concepción falible de las matemáticas. Partiendo de esta concepción y con el interés de ganar significaciones más profundas en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje simbólico, se hizo un análisis histórico-epistemológico del lenguaje algebraico, el cual aportó herramientas para estructurar y realizar una indagación con estudiantes de grado octavo, lo cual permitió vincular las construcciones que hacían los estudiantes de manera informal para solucionar problemas planteados, con la manera en cómo se estructuró y construyó el lenguaje algebraico.

Palabras clave: Naturaleza de las matemáticas, Matemáticas falibles, Construcciones informales, Lenguaje algebraico

Abstract

The research arises with the purpose of reflecting on why the selfless marking shown by students towards mathematics, disinterest that intensifies in the introduction to algebraic content, the above found in the experience of the researcher and various readings that document it. It reflects on the nature of mathematics and its impact on teaching processes, concluding as a key axis in the restructuring of mathematical teaching, highlighting a fallible conception of mathematics. Based on this conception and with the interest of gaining deeper meanings in the transition from natural language to symbolic language, a historical-epistemological analysis of algebraic language was made, which provided tools to structure and conduct an investigation with eighth graders, which allowed to link the constructions that students made informally to solve problems raised, with the way algebraic language was structured and constructed.

Keywords: nature of mathematics, fallible mathematics, informal constructions, algebraic language

Introducción

No es un secreto que las matemáticas se convierten en el tormento de muchos estudiantes en la educación escolar, estas actitudes negativas suelen partir de un sentimiento de lejanía entre las matemáticas y el mundo real, lo cual se justifica en el lenguaje abstracto en el que estas se desarrollan. Es así como entender el entramado histórico por el cual se desarrollaron los postulados matemáticos, es un factor clave la comprensión matemática, de allí parte la necesidad de hacer uso de asuntos histórico-epistemológicos en matemáticas, para ganar significaciones más profundas, y así posibilitar estructurar insumos que enriquezcan la educación matemática.

Por consiguiente, evidenciando cómo el descontento, de los estudiantes, con las matemáticas se intensifica en la introducción del contenido algebraico, esta investigación busca, mediante una reflexión histórica-epistémica, vincular construcciones de soluciones que se dan de manera informal, con el lenguaje algebraico. Para ello la investigación se estructura en cinco capítulos, que buscan, detallar el contexto del problema, analizar a través de distintos autores alternativas que posibiliten construir procesos de enseñanza, orientados a superar esas dificultades. También, a la luz de las reflexiones establecidas, se construyeron instrumentos para recolectar las significaciones y modos de proceder de los casos seleccionados del grado octavo.

Finalmente, se reportan los hallazgos y las consideraciones finales que surgen, una vez culminado el proceso investigativo.

Capítulo 1. Contextualización

En este capítulo se presenta los elementos que motivaron la investigación y se justifican a través de diversos textos que documentan los factores que han incidido en la problemática. También se formula el problema y los objetivos que orientan la investigación.

1.1 Planteamiento del problema

En las últimas décadas se ha venido resaltando la importancia de los estudios socio-históricos en la enseñanza de las matemáticas, incluso documentos oficiales como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (en adelante MEN, 1998), señalan la importancia de asumir la matemática como construcción social. Al respecto, se resalta la importancia de considerar la experiencia e interacciones que los estudiantes tienen con su entorno para la construcción de conceptos matemáticos, en la que, la elaboración compartida de significados simbólicos se constituye en un factor clave. En este sentido, es oportuno decir que, este proceso debe estar orientados bajo un enfoque que considere los intereses y afectividades de los estudiantes. Sin embargo, investigaciones, (Chávez, Castillo y Gamboa, 2008; Fernández, Gutiérrez, Gómez, Jaramillo y Orozco, 2004; Murcia y Henao, 2015; Pérez y Ravaioli, 2013), señalan que es frecuente encontrar en los estudiantes actitudes y sentimientos negativos hacia las matemáticas y esto lo justifican expresando que no le encuentran sentido. Señalan, además, que lo significativo de ellas, para sus vidas, no va más allá de operaciones básicas de conteo, como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Esta visión que reduce las matemáticas a una mera herramienta para hacer cálculos tiende a generar la creencia de que, quienes las comprenden y se deciden por carreras afines a ellas, son muy tesos o tienen capacidades especiales ya que, sólo unos pocos se dedican a ellas y logran comprender y producir matemáticas, convicción que es acentuada por creencias culturales, familiares e incluso por el mismo maestro.

Las consideraciones anteriores, propician las condiciones para que el maestro se asuma como transmisor de un conocimiento que considera acabado e incuestionable y, en consecuencia, lleva a que el estudiante se asuma como un consumidor y receptor pasivo del mismo (Aguilar, 2002). Al respecto, también coincidimos con Chaves et al (2008) al afirmar que esta postura del maestro genera dificultades en las estrategias que este plantea afín de propiciar que el estudiante se acerque a las matemáticas, dado que podría limitar la reflexión sobre el objeto de las matemáticas y, desde luego, dificultad en la comprensión de estas.

En las investigaciones analizadas se evidencia como la postura que toma el maestro frente a su concepción de matemática determina su enseñanza. Se estima que, cuando se tiene una visión purista, estática y acabada de las matemáticas, el éxito de su enseñanza se reduce al buen dominio del área, descargando todo fracaso que se presente, en el aprendizaje, en la supuesta incapacidad del estudiante. De esta manera, la enseñanza se reduce a la transmisión de verdades, que sólo unos pocos, con capacidades especiales, podrán comprender. En esta mirada de la enseñanza de las matemáticas, se desvincula cualquier idea espontánea o construcción que el estudiante traiga en relación con su entorno (Jiménez, 2010).

Bajo esta concepción, hay una clara separación de la matemática pura (formal) y la matemática aplicada (relacionada con dimensiones representacionales y sociales, ligadas a la experiencia), se establece así una jerarquía de la primera sobre la segunda, incluso, se deja de lado esta última. Esto, sin duda alguna, se traduce en una dificultad para la enseñanza de las matemáticas ya que, crea un sinsentido en su quehacer ocasionando desinterés en los estudiantes.

Respecto a esta separación, Jiménez (2010) señala una situación que ilustra las consecuencias de omitir, en la enseñanza, las construcciones matemáticas que el estudiante trae consigo:

> (…) cabe aquí mencionar los casos de niños, sobre todo de extractos bajos, que antes de ir a la escuela hacen estimaciones y cálculos con gran agilidad y precisión, pero que, al llegar a la escuela, al ser obligados a seguir algoritmos tediosos o resolver problemas descontextualizados y sin sentidos para ellos, fracasan dramáticamente. (p.146)

Al despreciar todo lo que el estudiante ha construido, e iniciar la instrucción matemática como un conjunto de reglas sin relación con el contexto, se empieza a crear la sensación de una matemática lejana al sujeto, volviéndose tediosa y sin significado real para la vida.

Las dificultades, examinadas aquí, sobre la enseñanza de las matemáticas, señalan el foco de interés para este proyecto de investigación, en particular, el interés relacionado con las dinámicas que se dan al introducir al estudiante en el desarrollo del contenido algebraico. En este proceso suelen ser evidentes las dificultades y la falta de comprensión que emergen al introducir el contenido algebraico, en especial, en la escuela secundaria, ya que, como se ha planteado, se tiene la creencia de que la matemática útil para la vida no va más allá de la resolución de problemas aritméticos básicos. Al respecto, resulta apropiado decir que, en esta lógica se cree que, aquellas dimensiones que requieren mayor abstracción son sólo para algunos elegidos (Pérez & Ravaioli, 2013).

La introducción al álgebra, en la educación secundaria, por lo general se orienta a la resolución de polinomios, ecuaciones e inecuaciones. Al respecto, algunos autores (Vergel y Rojas, 2018; Cervantes & Reyes, 2016) reportan que, pocas veces se hace una conexión adecuada entre los saberes previos de los estudiantes y los contenidos abordados en grados anteriores. Esta separación y falta de relacionamiento entre estos saberes crea, en el estudiante, una sensación de lejanía con el nuevo tema y, en consecuencia, esto se traduce en una dificultad en la introducción de los conceptos del álgebra.

Esta transición abrupta, sin mediación de los saberes previamente construidos, muestra un divorcio entre las otras dimensiones matemáticas (aritmética, geometría, medida). Particularmente, entre la aritmética y el álgebra surge una marcada delimitación: la primera se relaciona con lo concreto y aplicable, mientras que, la segunda se vincula con lo abstracto y difícil (Pérez & Ravaioli, 2013).

Esta atomización de los contenidos matemáticos genera dificultades en la introducción al álgebra, lo cual, tal como se ha venido planteando, reduce y limita la enseñanza y el aprendizaje a la memorización y manipulación de un compendio de fórmulas con instrucciones concretas de uso para la resolución de ciertos problemas. Al respecto, Pérez y Ravaioli señalan que:

> El alumno ve una ecuación y en lugar de pensar que el objetivo es hallar el valor de la incógnita comienza a aplicar mecánicamente reglas y/o a pasar cosas para un lado y para el otro sin un criterio claro de prioridad y sin sentir la necesidad de controlar que el valor obtenido sea el que verifique la ecuación. (2013, p.1222)

Consecuente con lo anterior, en esta investigación, resulta de interés analizar cómo introducir el lenguaje simbólico/algebraico en la enseñanza, porque, aunque en su construcción histórica se necesitaron muchos años para dotarlo de significados, en la escuela, bajo un enfoque tradicional, se presenta el lenguaje algebraico como un conjunto de reglas, un conocimiento acabado y lineal, que no problematiza sus significados, coartando al estudiante de toda posibilidad de construcción y participación activa en el proceso. De esta manera, según (Butto y Rojano, 2004; Cervantes y Reyes, 2016), se profundiza únicamente en aspectos manipulativos sin que medie una reflexión para construir el sentido que deben tener las construcciones propuestas.

Según lo anterior, resulta apropiado decir que, las condiciones propiciadas por el maestro no favorecen la comprensión del estudiante y, por el contrario, se acentúa la creencia de que las matemáticas son un área de conocimiento abstracta que guarda poca relación con el mundo real.

Las consideraciones anteriores motivan a indagar por: ¿Qué representaciones algebraicas construyen algunos casos del grado octavo de la Institución Educativa Comercial de Envigado, en la solución de situaciones cotidianas que pueden ser relacionadas con el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Analizar las representaciones algebraicas que construyen algunos casos en la solución de situaciones cotidianas que pueden ser relacionadas con el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico.

1.2.2 Objetivos específicos

- ✓ Identificar como los casos establecen variables y fijan datos a través de situaciones cotidianas.
- ✓ Indagar cómo se construyen explicaciones en situaciones problémicas mediante la relación entre lo conocido y lo desconocido.
- ✓ Vincular las construcciones informales de los casos, con el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistémico.

Capítulo 2. Marco teórico

2. 1 El uso de la historia y la epistemología de las matemáticas en la construcción del lenguaje simbólico

En este apartado se reflexiona sobre la incidencia de la concepción de matemática en la enseñanza de esta, destacando la concepción falible de matemáticas, la cual favorece procesos dialógicos que privilegian la construcción social del conocimiento, además de poner como necesario el uso de reflexiones histórico-epistemológicas para significaciones más profundas de los postulados matemáticos. Es así como se recurre a la obra de François Viete para entender las bases histórico-epistémicas que estructuraron el lenguaje algebraico.

2.1.1 Naturaleza de las matemáticas y su incidencia en la enseñanza

En las investigaciones analizadas en el capítulo 1, se logró evidenciar la manera cómo influye, en la enseñanza de las matemáticas, la concepción que se tenga de esta, es notorio cómo las matemáticas vista como un sistema puramente lógico, abstracto e instrumental ha llevado a que su enseñanza sea descontextualizada, remitiéndose a una manipulación de conceptos y fórmulas de manera memorística y poco reflexiva.

Según el MEN (1998) estas concepciones acerca del conocimiento escolar matemático parten de la discusión que se ha mantenido durante siglos, sobre el origen y la naturaleza de las matemáticas. Esta discusión ha estado orientada por la pregunta, ¿las matemáticas están fuera de la mente humana (se descubren) o son una construcción humana?, centrando, a su vez, la discusión en la exactitud de sus postulados, sobresalen así, dos posturas contrarias, una que asume las matemáticas como exactas e infalibles, mientras en la otra, se asume como una construcción humana con características de falibles, corregibles y evolutivas.

En estas dos visiones opuestas, sobre la naturaleza de matemática se encuentran, a su vez, dos modos de asumir la enseñanza matemática. En este sentido, Vesga-Bravo y Lozada (2018) explican las características y la incidencia en la enseñanza de acuerdo con la postura que se tome.

En el siguiente cuadro se recogen sus características más representativas:

Matemáticas exactas e infalibles	Matemáticas falibles
- Verdades universales, absolutas, infalibles - No hay lugar para el error - La matemática se produce bajo un lenguaje formal - Se descubren y crean a partir de sistemas lógico-deductivos - Conjunto de reglas que no cambian - Una vez aprendidas las personas debe poder aplicarlas para resolver diferentes problemas Desde esta concepción el conocimiento matemático se considera como una disciplina aislada, discreta, delimitada y separada de otros ámbitos del conocimiento. Solo a través de la lógica se logra acceder a ella.	- Las matemáticas como producto de la invención humana - Pueden fallar, susceptibles a correcciones - Pueden sufrir modificaciones a lo largo del tiempo - Tienen significados compartidos dentro de una comunidad. - Creencia de que el conocimiento matemático tiene como origen fuentes informales que son cuerpos internos de información como resultado de experiencias e interacciones sociales e individuales - Las reglas se crean, y las matemáticas son inventadas y reinventadas. - Las matemáticas están conectadas indisolublemente como parte de todo el tejido del conocimiento humano

***Tabla 1**: Naturaleza de las matemáticas, infalibles y falibles*

Dadas estas dos concepciones opuestas sobre la naturaleza de las matemáticas, estudios señalan que la enseñanza se ve fuertemente influenciada por la mirada que el maestro asuma (Vesga-Bravo y Lozada, 2018). A la mirada con características de las matemáticas como absoluta se le atribuyen tipos de enseñanza tradicionales, mientras a las matemáticas falibles se le vinculan procesos de enseñanza constructivista. En el siguiente cuadro se detalla la incidencia de estas dos posturas en la enseñanza:

Enseñanza tradicional	Enseñanza constructivista
- El profesor como centro del proceso (trasmisor de conocimiento) - El estudiante es un sujeto pasivo (Receptor) - El papel del estudiante es asimilar, mecanizar algoritmos, memorizar y usar conceptos - Se presentan situaciones rutinarias, y repetitivas - Hay respuestas correctas o incorrectas - Los procesos de aprendizaje se dan a través de la capacidad memorística del estudiante en situaciones de tipo rutinario y repetitivo, donde las respuestas son correctas o incorrectas. Se considera que el estudiante logra aprender si es capaz de repetir la información que provee el maestro. - El proceso de enseñanza es un proceso autoritario, donde el maestro trasmite y el estudiante solo recibe	- El conocimiento se construye colectivamente, todos tienen aspectos valiosos a aportar, se favorece el trabajo en equipo - El estudiante es activo de sus procesos - El papel de estudiante es cuestionar y acercarse de manera crítica a lo que se le enseñan - El lenguaje es clave en la construcción del conocimiento, ya que a través de éste se justifica y comunica - Se considera que el estudiante logra el aprendizaje cuando puede resolver problemas, tiempo después del período de instrucción y en una amplia variedad de situaciones. - No hay recetas, se deben propiciar espacios para motivar retar al estudiante - Validación de ideas, a través del dialogo

***Tabla 2**: Enseñanza tradicional y constructivista*

De acuerdo con las características expuestas, la postura que asume esta investigación es la de las matemáticas como construcción social (falibles), se parte así de la creencia de que, asumirla desde una postura exacta e infalible ha llevado a intensificar las dificultades expuestas en el capítulo 1, ya que al considerarse un sistema lógico irrefutable ha ocasionado una gran brecha entre los estudiantes y la matemática. A la base de este último hay una creencia generalizada de imposibilidad de cuestionar y aportar a su construcción, mientras que al asumir una mirada social (con todas sus implicaciones) permite abrir posibilidades para que el estudiante haga parte activa de su enseñanza, lo que es clave en los procesos de enseñanza, dado que lo anima, a pensarse lo que se ha construido hasta el momento, abriendo la posibilidad de cuestionar lo ya construido, generando un acercamiento crítico a las matemáticas.

Asumir, entonces, esta postura sobre la naturaleza de las matemáticas, presupone dar valor especial a los aspectos histórico-epistémicos de las teorías matemáticas; dejando claro que, si bien la historia bajo esta mirada supone un valor importante en la enseñanza matemática, esta no significa la transformación del profesor en un historiador de las matemáticas, sino, un sujeto consciente de las transformaciones históricas de las teorías que enseña, haciéndose, a su vez, consciente del desarrollo y evolución de las teorías a causa de prácticas sociales compartidas, destacando también el factor sociológico y volviendo a las matemáticas una disciplina con origen en la actividad humana (D´Amore, Radford, Bagni, 2017).

En el caso particular de esta investigación, y dado su interés por construir significaciones más profundas sobre el álgebra, resultó clave analizar qué sucede en esa delgada línea entre el tránsito del lenguaje simbólico numérico al lenguaje simbólico algebraico, lo que, a juicio de la investigadora, resulta importante indagar en el entramado histórico que permitió el tránsito y así dotar de significados las ecuaciones que se presentan de manera acabada en la escuela.

2.1.2 Construcción Histórica-Epistemológica del lenguaje simbólico algebraico

Lejos de la concepción de unas matemáticas creadas por unos pocos genios que hacen sus hallazgos en solitario, el desarrollo algebraico de las matemáticas tiene una historia de siglos, su construcción se ha visto influenciada por un diverso número de pensadores y culturas que han aportado a su construcción, Barrera (2013) hace una antología recogiendo algunos autores y culturas que contribuyeron a su construcción. Empieza citando desde los matemáticos mesopotámicos, babilónicos y egipcios, los cuales desarrollaron un álgebra muy elemental que permitía resolver problemas habituales como la repartición de los víveres, cosechas, entre otros asuntos cotidianos; hasta autores como Giuseppe Peano donde ya hay una formalización amplia del álgebra, con tópicos que no se ven en la escuela, este recorrido permite ver la gran cantidad de mentes que han contribuido a la construcción del álgebra, constructo que ha ido respondiendo a las necesidades de cada época.

Como se ha expresado antes, el interés de este trabajo va más allá de la parte histórica del álgebra general, prestando especial interés en el desarrollo de su lenguaje, cómo se estructuraron los símbolos y establecieron las reglas que hoy manipulamos.

Según Nesselman (citado por Camero, 2014, p.25) se distinguen tres periodos en la construcción del lenguaje algebraico:

Fase Retórica o Verbal. Esta fase fue desarrollada aproximadamente entre los años 2000 y 250 a.C. Los problemas y soluciones se describen en un lenguaje natural, su enfoque principal es el de comunicar, es por lo que tanto el planteamiento como las explicaciones procedimentales para llegar a la solución también se dan de forma verbal; sus representantes van desde egipcios y babilónicos de ese tiempo, hasta la obra de Diofanto de Alejandría.

La Fase Sincopada. Desarrollada entre los años 250 a.C. – 1500 d.C. es considerada el tránsito que se da entre la fase retorica a la simbólica. Se amplían los conocimientos en aritmética debido al crecimiento de la actividad comercial, la complejidad de cálculos astronómicos, que necesitaban manejo de muchas cantidades desconocidas. Se hizo necesario agregar al lenguaje abreviaturas para representar cantidades desconocidas para favorecer el planteamiento y solución de problemas, se introduce así un lenguaje sincopado que hace uso de abreviaturas para las cantidades desconocidas y las operaciones, en esta fase aún predomina el uso del lenguaje natural para cálculos y procedimientos.

Fase Simbólica. Francois Viete (1540-1603) como representante de este periodo, da el paso definitivo del álgebra retórica a la simbólica, es el primero en utilizar las letras para todas las cantidades, si bien en su obra: Introducción al Arte Analítico, sus notaciones guardan varias diferencias con las notaciones usadas actualmente, su obra abrió paso a pensadores como Descartes, quien desarrolla el lenguaje algebraico tal como lo conocemos hoy. En esta etapa el álgebra pasa a ser considerada una importante herramienta, surgiendo la necesidad de ampliar dominios del álgebra y la geometría, haciendo posible que los problemas matemáticos se puedan expresar como fórmulas mediante notación algebraica.

Si bien, hay autores que se erigen como representantes de hitos en la construcción del lenguaje algebraico, es importante señalar que nombrarlos como representantes, de ningún modo supone que lo planteado en sus obras fueron en su totalidad postulados espontáneos de ellos, sino que han sido propuestas a las que llegaron gracias al estudio y análisis de diversos autores que permitieron llegar a tales razonamientos, tanto en la obra de Diofanto, quien es un autor clave en el tránsito de la fase retorica a la simbólica (donde es notable la influencia de Euclides), como la de Viete (donde además de la influencia de Euclides y Papus, recoge construcciones hechas por Diofanto), han sido herederas de construcciones teóricas anteriores. Lo que resalta de nuevo las matemáticas como constructo social.

2.1.3 François Viète: Bases Epistemológicas de la construcción del lenguaje algebraico

Para ganar una comprensión más amplia acerca de la lógica interna del lenguaje algebraico, en este apartado se estudia una de las obras de François Viète, se toma este autor, por considerar que es él, el que logra ese paso definitivo del lenguaje retórico al simbólico.

Según relata Boye (s.f.) Aunque François Viète no fue matemático de profesión su interés por ella se mantuvo a lo largo de su vida, dedicando su tiempo libre a estudiarlas, fue tanto su entusiasmo con ellas que era llamado por el rey para descifrar todo tipo de problemas matemáticos, convirtiéndose en experto descifrador, a veces llamado brujo por su habilidad de descifrar mensajes cifrados de otros reinos. Fue considerado un matemático de gran ingenio:

> En tiempos de Enrique IV, un holandés llamado Adrianus Romanus, sabio en matemáticas, pero no tanto como creía, hizo un libro donde constaba una proposición a resolver que ofrecía a todos los matemáticos de Europa; ahora bien, en cierto lugar de su libro nombraba a todos los matemáticos de Europa y no concedía ninguno a Francia. Poco después llegó un embajador de los Estados para ver al Rey en Fontainebleau. El Rey tuvo el placer de enseñarle todas las curiosidades, y le hablaba de los más excelentes que en cada profesión había en su reino. Pero Sire, le dijo el embajador, vos no tenéis matemáticos. Sí tengo, sí tengo dijo el Rey, tengo un hombre excelente: que me vayan a buscar a Monsieur Viète. Se le mostró la proposición (de Adrianus Romanus) a Monsieur Viète, quien se puso en una de las ventanas de la galería donde se hallaban en ese momento y antes de que el Rey se fuera escribió dos soluciones a lápiz. Por la tarde envió varias más al embajador,

añadiendo que le daría tantas como gustase». Tallemant des Réaux, Mèmoires pour servir à l'histoire du XVIIo siècle, historieta 46 (citado por Boye, s.f, p.263).

A esta habilidad para resolver espontáneamente, por decenas y veintenas, los problemas más difíciles lo llamo: el arte analítico, el cual consideraba el método de invención más cierto en matemáticas. Este arte se componía de tres momentos, La Zetectica: por la cual se establece una ecuación o proporción entre los términos dados y los desconocidos, la Poristica: por la cual se prueba la verdad de un teorema declarado por una ecuación o proporción y la exegética: por la cual se logra determinar el valor desconocido en una ecuación o proporción dada, a esta triple función la llamó la ciencia del descubrimiento correcto en matemáticas (Viète, 2006).

Al analizar la obra: Introducción al Arte Analítico, es evidente la fuerte influencia que toma tanto de Euclides como de Diofanto donde en las reglas de las Zetectica se ve una clara influencia de estos dos autores.

Cabe aclarar que en el contexto de Viète predominaba el desarrollo geométrico para dar solución a diversos problemas matemáticos, los elementos de Euclides eran ampliamente utilizados para todo tipo de razonamiento, de ahí que para Viète las reglas fundamentales de la ecuaciones y proporciones dadas en los elementos fueran aceptadas en su arte analítico. Las siguientes son las reglas expuestas por Viete (2006, p.14):

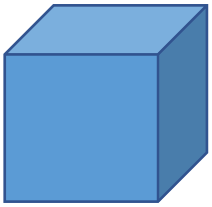
1. El todo es igual a (la suma de) sus partes.
2. Las cosas iguales a lo mismo son iguales entre sí.
3. Si se agregan iguales a iguales, las sumas son iguales.
4. Si los iguales se restan de iguales, los restantes son iguales.
5. Si los iguales se multiplican por iguales, los productos son iguales.
6. Si los iguales se dividen por iguales, los cocientes son iguales.
7. Lo que sea que esté en proporción directamente son en proporción inversa y alternativamente.
8. Si se añaden proporcionales similares a proporcionales similares, las sumas son proporcionales. (…)

De las reglas del pensamiento Euclídeo también utiliza la ley de los términos homogéneos por la cual establece unas reglas sobre los grados y tipos de magnitudes de comparación, en esta parte se ve como Viete (2006), a partir de representaciones geométricas, construye una escala de grados donde en las primeras tres dimensiones se ve una marcada relación con objetos geométricos:

La primera de las magnitudes es el lado (X)

La segunda es el cuadrado (X^2)

Y la tercera el cubo (X^3)



De estas tres representaciones geométricas que son representables en la dimensión tridimensional se desprenden las demás magnitudes.

Cuadrado-Cuadrado

Cuadrado-cubo

Cubo-Cubo

Cuadrado-cuadrado-cubo

Cuadrado-cubo-cubo

Cubo-cubo-cubo

Lo cual continúa siguiendo el mismo patrón de formación.

Para Viete (2006) estructurar su lenguaje simbólico, fueron clave las representaciones que logró establecer con la geometría. Aquí surgen cuestiones interesantes como: ¿Por qué no se inventó algún nombre en relación con la cuarta dimensión? ¿Por qué equiparar los grados con conocidas figuras geométricas? Sobre esto, puede decirse que, como las describió hizo uso de esas representaciones ya conocidas geométricamente, porque es más fácil manipular lo que se conoce que crear un nuevo sistema, porque aun con la imposibilidad de representar una cuarta dimensión se puede pensar en ella viendo su estructura a través de dos estructuras conocidas cuadrado-cuadrado.

Otro aspecto que muestra la marcada influencia en la construcción del lenguaje algebraico de la geometría es la ley de los términos homogéneos, la cual, si bien ya no se usa, deja ver una forma clara de entender el funcionamiento interno de las estructuras algebraicas, donde la manipulación de estas recae en el relacionamiento apropiado de las dimensiones. Al respecto, es apropiado decir que, desde las representaciones geométricas es muy intuitiva la idea de sumar longitudes con longitudes, pero no lo es tanto la imagen de sumar un cuadrado con un cubo, de ahí que Viete haga uso de esa ley como regla de la Zetetica (para establecer ecuaciones o proporciones), si bien por simplicidad matemática con Descartes se abandona la ley de términos homogéneos, entender el funcionamiento del álgebra desde esa ley es una forma muy didáctica e intuitiva de acercarse. En la figura 1 se observa la representación de la suma de objetos con igual dimensión.

Suma homogénea de dimensiones

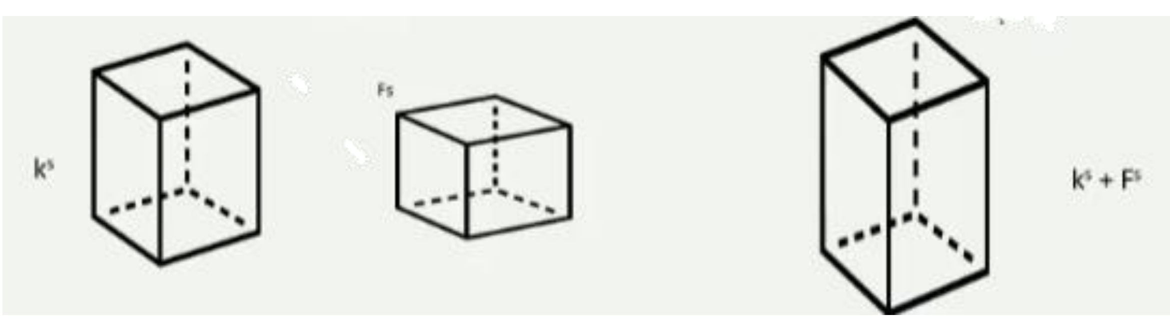


Figura 1*: Suma de términos homogéneos*

También, en la multiplicación se establece una forma representativa de operar, lo que supone una gran ayuda para entender el funcionamiento intuitivo de la multiplicación de forma geométrica, por ejemplo: si tengo un cuadrado que se repite a lo largo de la longitud de un segmento, lo que para Viete sería amplitud-cuadrado se crea una figura de tres dimensiones, es decir, un cubo (ver figura 2)

Figura 2*: Multiplicación*

Es clara la influencia geométrica en la construcción de su lenguaje, pero ¿cómo da Viete ese paso de un contexto donde las explicaciones por lo general se daban de forma geométricas, a poder expresarlo en términos simbólicos, manipulables que lograban englobar y generalizar problemas? En el análisis realizado a su obra, la impronta de Viete, consiste en hacer uso de letras tanto para valores conocidos como a los desconocidos, logrando así desde la Zetectica establecer ecuaciones o proporciones que dieran respuesta a problemas de forma general y no sólo a casos particulares. Las reglas planteadas por Viete,2006, p.23) son las siguientes:

Sobre las reglas de zeteticos

La forma de trabajar en zeteticos está, en general, contenida en estas reglas:

1. Si es una longitud que se va a encontrar y hay una ecuación o proporción latente en los términos propuestos, deje x ser esa longitud.

2. Si es un plano que se va a encontrar y hay una ecuación o proporción latente en los términos propuestos, deje que x^2 sea ese plano.

3. Si es un sólido que se encuentra y hay una ecuación o proporción latente en los términos propuestos, deje x^3 ser que sólido.

En las primeras tres reglas se deja ver que un asunto importante para establecer la ecuación o proporción es **identificar lo que se desea encontrar**, es decir lo que se desconoce y, acto seguido, nombrarlo.

4. Las magnitudes, tanto dadas como buscadas, deben combinarse y compararse, de acuerdo con la declaración dada de un problema, sumando, restando, multiplicando y dividiendo, observando siempre la ley de términos homogéneos.

> Por lo tanto, es evidente que al final se encontrará algo que sea igual a lo desconocido o a una de sus potencias. Esto puede estar compuesto en su totalidad por términos dados o puede ser el producto de términos dados y lo desconocido o de esos términos y una calificación de orden inferior.

Luego de establecer lo que se desconoce y lo que se quiere hallar, se debe buscar, establecer una relación con lo conocido, en términos de igualdad o proporción, así, además de identificar lo que se desconoce es importante identificar lo que se conoce, para luego establecer una relación entre ambos.

5. Con el fin de ayudar a esta obra por otro dispositivo, los términos dados se distinguen de los desconocidos por símbolos constantes, generales y fácilmente reconocidos, como (por ejemplo) designando magnitudes desconocidas por la letra A y las otras vocales E, I, O, U e Y los términos conocidos por las letras B, G, D y las otras consonantes.

Aquí radica en gran medida la gran idea de Viete, al nombrar con letras diferenciadas lo conocido (consonantes) de lo desconocido (vocales), donde si bien lo conocido da un valor fijo, constante, al ponerlo en términos de una letra indeterminada logra convertir la ecuación o proporción establecida en algo más general, pudiendo a partir de la relación establecida generar soluciones a problemas que compartan la misma estructura interna, pero en los cuales sus datos sean diferentes.

6. Los términos compuestos exclusivamente por magnitudes dadas se añaden o se restan entre sí de acuerdo con el signo de su afecto y se consolidan en uno. Que este sea el término homogéneo de comparación o la constante y colóquelo en un lado de la ecuación.

Esta regla estrechamente vinculada a la ley de términos homogéneos, establece lo que de manera intuitiva se observan en las representaciones geométricas, pone por regla que las operaciones como la suma y resta solo pueden darse con objetos pertenecientes a una misma dimensión, si bien actualmente, cuando estudiamos algebra no es permitido sumar x^2 con x, en la obra de Viete se extendía también para valores constantes que pertenecían a diferentes dimisiones, por ejemplo, la suma de 6^p+7^c (un plano de lado 6 y un cubo de arista siete) no era permitida, ya que se encontraban en dimensiones diferentes; si bien con Descartes se logra organizar y asumir cualquier constante en la dimensión uno, quitando así el problema de hacer coincidir la dimisión de las contantes para poder sumarlas o restarlas, esta regla permite establecer cómo el lenguaje algebraico propuesto por Viete es una forma de escribir simbólicamente objetos geométricos que va más allá del razonamiento puramente geométrico, dado que permite manipular objetos que son difíciles de representar de manera geométrica, permitiendo hacer generalizaciones y operaciones más allá de la tercera dimensión, consiguiendo establecer relaciones más fluidas que involucraran objetos que quizá no puedan representarse geométricamente.

De acuerdo con las reglas establecidas, la siguiente ecuación en el lenguaje propuesto por Viete sería equivalente a las ecuaciones que se trabajan actualmente (Boye, s.f., p.268)

Donde:

B in Aq + F plano in A – Ac aequatur Dsólido $\longrightarrow$ $ax^2 + bx - x^3 = c$

In = multiplicación

Aequatur = igualdad

B in Aq =B (término conocido) * Aq (A (término desconocido) q (cuadrado)= aX^2

Fplano in A (término conocido en el plano) * A (término desconocido) = bx

Ac (A (término desconocido) c (cubo)) = x^3

Dsólido (término conocido sólido (tercera dimensión) = c

Aunque su lenguaje tal y como lo estructuró no se usa, analizar la obra de Vieta (2006) deja una comprensión muy amplia de la génesis del lenguaje que hoy se enseña como fórmulas acabadas, donde se hace difícil entender la estructura interna de su funcionamiento; se logra ver, de manera clara, la influencia de la geometría en la construcción del lenguaje algebraico, lo que plantea el cuestionamiento acerca del porqué la poca vinculación que se establece entre álgebra y la geometría en la escuela. Al remitirnos a la obra de Viete es claro el protagonismo de la geometría en la construcción del lenguaje algebraico; quizá la posibilidad de escribir elementos geométricos de forma simbólica, sin la limitante dimensional que tenía, le quitó protagonismos a la geometría, lo que ocasionó el casi destierro en las clases de matemáticas escolares, donde esa área se da como una dimensión separada y con poca profundidad. Olvidando su papel histórico en la construcción representacional del lenguaje algebraico.

Si bien, la geometría presenta límites en niveles más avanzados de abstracción matemática, es clave para dar sentido al lenguaje algebraico, su dimensión representacional permite de manera intuitiva hacer relacionamientos para dotar de sentido esos signos algebraicos que en muchas ocasiones resultan vacíos y el sin sentido para los estudiantes.

2.2 El Lenguaje en la construcción de conceptos matemáticos

En este apartado se documenta como el lenguaje influye en los procesos de comprensión, y de construcción de significados propios, también se describe cómo se forman los conceptos y cómo estos se van ampliando y profundizando de manera progresiva, destacando en el caso particular de la formación de conceptos matemáticos la importancia del maestro, el cual permite el tránsito de los conceptos formados desde un lenguaje natural para lograr vincularlos al lenguaje formal matemático.

2.2. 1 El Lenguaje en la construcción de representaciones

Atendiendo al carácter social de las matemáticas, y al interés particular de este proyecto de poner el foco en la construcción del lenguaje simbólico, se hace importante visibilizar, el papel del lenguaje en la construcción de representaciones. Zagarra y Garcia (2016) analizan las relaciones que se establecen entre lenguaje y pensamiento en Lev Vigotsky, y establecen que, para Vygotsky los procesos de aprendizaje ocurren de afuera hacia adentro, es decir, como procesos de asimilación cultural y social, que permite procesos de interiorización, ocasionando transformaciones psicológicas y de pensamiento. Así el niño es mediado por su entorno: la naturaleza, los otros, donde logra interiorizar lo que previamente ha realizado en el contexto social, dicha mediaciones se logra a través de personas hábiles en el manejo de los instrumentos culturales.

El lenguaje como el instrumento mediador por excelencia, posibilita la comunicación con los demás, permite exteriorizar los pensamientos y es a partir de él que el ser humano conoce el mundo, permitiendo construir esquemas mentales de sus significaciones propias. En ese “conocer el mundo” se tejen relaciones con el entorno más cercano, creando un lenguaje social que emerge para hacer al niño participe de eventos y situaciones sociales, pero es el lenguaje egocéntrico, desarrollado a partir del lenguaje social, el que permite desarrollar el habla interiorizada, la cual permite la codificación de situaciones a través de establecimiento de signos representacionales, para una comprensión más ágil. Es así como lo que el sujeto, al interiorizar y hacer suyo un esquema, debió tener una experiencia en lo social y, al interiorizarse se convierte en un signo propio con el peso de su particularidad subjetiva.

En el caso del lenguaje algebraico, para lograr llegar a una interiorización efectiva es necesario que pase por el ámbito social, es decir por las prácticas sociales-culturales compartidas que se dan a través del lenguaje natural, así pues, al álgebra enseñarse como un compendio de fórmulas, sin una relación social-cotidiana clara, difícilmente será interiorizado o se instaurará como algo propio. Para esperar, entonces, que haya una interiorización del concepto es necesario que pase por las prácticas sociales compartidas, es decir, es necesario crear un vínculo con las experiencias vividas, con lo cotidiano, ya que, si no se dota de sentido, el lenguaje algebraico no se desarrollará.

2.2.2 Formación de conceptos: Del lenguaje natural al formal matemático

Como sujetos, en la interacción con el entorno hay una exposición continua a miles de estímulos, donde se da respuesta específica a aquellos estímulos que presentan características comunes, que se clasifican y se agrupan de acuerdo con esas similitudes. Al respecto Gonzales (2005) citando a Van Engen (1953), Lovell (1969) y Corroll (1964) expone:

> El hombre, en virtud de su capacidad para establecer distinciones, observa o percibe cualidades comunes en una cantidad de situaciones u objetos diferentes y, mentalmente, separa, es decir, abstrae dichas cualidades de la situación total en la que se hallan presentes; luego, las utiliza como criterio clasificador; así examina cada estímulo que percibe para establecer si puede ser incluido o no en una clase determinada y, a aquellos que poseen la cualidad común abstraída, los considera como miembros de una misma clase; es decir, las propiedades comunes son consideradas como criterios para la agrupación de los objetos en clases, ello permite dar una respuesta común a todos ellos reaccionando ante la clase y no ante cada uno de sus miembros en particular; luego, las cualidades comunes que han sido abstraídas a partir de un determinado conjunto de objetos o situaciones específicas permiten responder similarmente a una clase entera de objetos o situaciones relacionadas. Este proceso, eventualmente, es complementado con la selección o invención de alguna palabra u otro tipo de indicio lingüístico o gráfico que permite representar simbólicamente la clase que se ha constituido (p.41)

Al insertarse estos modos de agrupar en la estructura cognitiva del sujeto, este logra filtrar a través de todos los estímulos a los que está expuesto, esos que guardan relación con la estructura creada; es así que, cuando el sujeto logra establecer una nueva clase agrupadora es ahí donde se dice que se ha adquirido un nuevo concepto; también la manera de reaccionar hacia ciertos estímulos permite establecer si se posee o no un concepto (González, 2005).

Dichos conceptos se van estructurando progresivamente, ampliándose y profundizándose a medida que se encuentran nuevas características que lo enriquecen y se vinculan con otros conceptos del sistema al cual pertenece (González, 2005).

Este mismo autor manifiesta que, particularmente en la enseñanza de las matemáticas la formación de conceptos constituye un carácter esencial, ya que, al ser los conceptos matemáticos puramente abstractos, con existencia única en la mente humana, lleva a un fracaso, por parte del estudiante, el no lograr dominarlos plenamente.

Para formar un concepto se parte de la observación de objetos y fenómenos concretos y se establecen relaciones, aquí el docente tiene un papel claro, pues es el encargado de orientar la atención del alumno, para identificar esas relaciones y propiedades entre los objetos y fenómenos y así lograr esa vinculación con el lenguaje simbólico usado en matemáticas.

Estas relaciones van enriqueciéndose a lo largo de la interacción consiente con los objetos, por esta razón, es importante precisar que los conceptos no se forman de manera espontánea o acabada, por el contrario, surgen de la observación consiente y se van profundizando y ampliando a medida que se encuentran nuevas instancias de él y, luego se establecen vínculos con otros conceptos, en un sistema conceptual común (González, 2005).

Dado que los conceptos se construyen de manera progresiva, los autores Angulo, Artega y Carmenates (2020), basados en modelos de comprensión matemática de Van Hiele y Pirie & Kieren, establecen cuatro niveles en el proceso de construcción de conceptos matemáticos que tiene lugar en la escuela.

El primer nivel, es el visual y se caracteriza por como los estudiantes se forman conceptos de manera espontánea, sobre la experiencia vinculada a un contexto social. Aquí, si bien el estudiante utiliza los conceptos y se forma una imagen de este, no tiene conciencia de sus atributos, en este nivel al concepto se le asocia una imagen o nombre.

El segundo nivel, es el de distinción, aquí a diferencia del anterior se reconocen ciertos atributos propios del concepto, se establecen relaciones entre los conceptos y sus atributos, pero no se hace distinción de lo que es relevante y no. En este nivel se dan descripciones, caracterizaciones y ejemplos.

El tercer nivel, es el formal, donde el estudiante logra, a través de sus atributos comunes, determinar atributos relevantes del concepto. Se define el concepto de manera formal y se comprende la estructura lógica matemática y el vínculo con los conceptos formados.

El último nivel, es el de innovación, tiene por característica la formación inventiva de los conceptos, donde estos ya no tienen origen en la experiencia, sino que se construyen para organizar de mejor manera la información existente.

En estos niveles, se observa como a lo largo de los primeros dos, se forman los conceptos a través de un relacionamiento informal, desde las construcciones que se hacen mediadas por la interacción social; en el tercer nivel se da la formalización de esas construcciones, dando paso al uso de un simbolismo matemático más abstracto, en este nivel es crucial la intervención del docente, el cual propicia que el estudiante supere los niveles que van estrechamente ligados a asuntos concretos y cotidianos a desarrollar niveles más altos de abstracción.

En todo el proceso de formación de conceptos el papel del lenguaje es clave en cuanto permite identificar, asignarle un nombre, signo o etiqueta a los estímulos en relación con determinadas características (González, 2005). El maestro tiene entonces la tarea de propiciar esa vinculación en los estudiantes, de estructuras conceptuales formadas con un lenguaje cotidiano y las estructuras simbólicas propias de las matemáticas.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se expone la forma como se estructuró y desarrolló el proceso investigativo. Para este propósito se presenta: el enfoque y método, el contexto de investigación, los casos y criterios de selección, los métodos de recolección de la información y los correspondiente a la sistematización y análisis.

3.1 Enfoque y método

La línea en la cual se desarrolla esta investigación es la de los estudios históricos y epistemológicos de la ciencia, cuya preocupación no sólo se centra en el mundo natural, sino también en el proceder humano, las relaciones que estos tejen con los otros, con su entorno y, cómo esto incide en la construcción de teorías científicas, así pues, con lo lentes de los estudios histórico-epistémicos se asume un visión dinámica de historia/realidad, donde los hechos que constituyen los avances de la humanidad, en cuanto al conocimiento, son una construcción subjetiva dependiente de un contexto y un tiempo determinado; en esta lógica, es importante resaltar que la interpretación y la validación mediante consenso son factores determinantes en la construcción y validación del conocimiento.

Bajo esta mirada, no es posible que el contexto y los participantes sean neutrales, dado que se reconoce la legitimidad de las subjetividades. Conviene decir entonces, que estas circunstancias son determinantes y caracterizan este proceso investigativo y son estas consideraciones las que se tienen en cuenta al acceder a los informantes y a los datos. En este sentido, las interpretaciones que orientan esta investigación están referidas sólo a los participantes y fueron analizadas en el contexto en el que tuvieron su ocurrencia.

Para abordar el propósito de esta investigación se seleccionaron algunos casos (estudiantes) que permitieron comprender cómo cada uno de ellos construía sus propias significaciones acerca del lenguaje simbólico algebraico. Prestando mayor atención en cómo construyen representaciones propias y logran expresarlas de forma concisa, para manipular lo que ya conocen con lo que desconocen de manera más sencilla.

Igualmente, es importante decir que, todo el proceso estuvo orientado desde la intencionalidad de la investigadora: comprender las representaciones simbólicas que se hacen los estudiantes para manipular lo ya conocido y así comprender lo desconocido fue el interés que orientó el proceder investigativo.

Es oportuno decir que, el proceso también se caracterizó por la flexibilidad en el sentido de que se fue adecuando y precisando de acuerdo con los hallazgos, análisis histórico-epistemológicos, cuestionamientos, que surgieron a lo largo de la investigación.

Dado que el interés se centró en comprender las representaciones simbólicas que hacen los casos (informantes) en el planteamiento de situaciones cotidianas para economizar sus razonamientos, se optó por un estudio de caso instrumental en los términos planteados por Stake (1998) donde lo importante es comprender cada caso en su particularidad, sin ánimo de generalizar.

Por la perspectiva de realidad anteriormente descrita y dados los propósitos de esta investigación, el enfoque metodológico que, a juicio de la investigadora, es coherente y el que mejor se ajusta a este proceso investigativo es el enfoque cualitativo el cual su esencia según Sampieri (2010) es comprender y profundizar en los fenómenos, dotarlos de sentido, a la luz de las perspectivas, experiencias, opiniones de los participantes y la manera en que perciben la realidad en un determinado contexto.

3.2 Caracterización del contexto de investigación

La investigación se realizó en la Institución Educativa Comercial de Envigado, colegio de carácter público y mixto, ubicado en el municipio de Envigado en el sector La Mina, parte alta, a la institución llegan estudiantes de sectores aledaños como: San Rafael, La Mina, parte alta y parte baja, San José, El Salado, barrio Mesa, La Magnolia, La Paz y El Dorado, el estrato socioeconómico de los estudiantes se encuentra en 1, 2 y 3, donde predomina los estratos 1 y 2.

La emergencia sanitaria por el virus COVID-19, obligó a los colegios a pasar de la presencialidad al trabajo en plataformas virtuales; la plataforma utilizada por la institución fue TEAMS, plataforma que permite estar conectado en tiempo real con los estudiantes, si bien esta eventualidad supuso una brecha en cuanto acceso, no supuso problema para la investigación, dado que, los casos seleccionados no presentaban problemas de conexión.

3.3 Casos y criterios de selección

Para la investigación se seleccionaron 3 estudiantes del grado octavo. Se optó por el grado octavo porque el tema en el que se centra la investigación se desarrolla en este grado. Las edades de los participantes están comprendidas entre los 13 y 14 años. Debido a las dinámicas de la virtualidad y la intencionalidad de la investigación se establecieron los siguientes criterios de selección de los casos:

- **Conectividad y recursos**: que el caso tuviera buena conectividad y acceso a un computador, ya que fue importante que durante el proceso de indagación no se dieran interrupciones debido a dificultades de acceso a la red.
- **Participación**: se seleccionaron casos que no les diera pena hablar, seleccionando aquellos que se les facilitaba dar su opinión en clase y sentirse tranquilo dándola, esto fue importante en el sentido de lograr mayor naturalidad en el momento de dar sus apreciaciones.
- **Disciplina:** Se identificaron casos que se observaron activos de sus procesos académicos, es decir, donde fue notorio que hubo repaso o estudio del tema previo a ingresar a las clases, este criterio se tuvo en cuenta pues se consideró importante que el caso estuviera al día con la temática en matemáticas del grado octavo para lograr indagar su comprensión del tema
- **Disposición:** Que no se sintiera obligado, pues comprometía la investigación que su participación fuera bajo presión, ya que era probable que no se diera un desarrollo natural de las actividades propuestas.

3.4 Consideraciones éticas

Para la participación de los casos en el proyecto, se presentó ante los padres de familia o acudientes de los casos, un consentimiento informado donde se explicita los fines investigativos de la información que se va a recoger durante la intervención, y la discreción y confidencialidad para con los informantes (véase anexo 1).

3.5 Recolección de la información

La recolección de la información se llevó acabo en 5 sesiones, cada una con una duración de 50 minutos.

En primera instancia, fue importante la observación como estrategia para identificar los casos, haciendo una observación intencionada a la luz de los objetivos trazados por la investigación. Luego de seleccionados los informantes, las sesiones se tramitaron mediante la implementación de diversas estrategias; la observación fue crucial para identificar los casos, esta se mantuvo como estrategia de recolección durante toda la intervención, donde el Diario Pedagógico hizo las veces de instrumento, logrando recoger apreciaciones, cuestionamientos y reflexiones de todo lo observado.

Otra estrategia implementada consistió en los encuentros académicos, los cuales fueron sesiones desarrolladas en el horario asincrónico de la asignatura de matemáticas, donde se implementaron actividades y discusiones a la luz de situaciones problémicas que contemplaban asuntos de la cotidianidad de los casos. Como factor clave de los encuentros fue la puesta en común de los casos, pues las actividades iban orientadas a propiciar discusiones entre ellos y así generar una construcción colectiva, un consenso, desde la particularidad de cada caso.

En general, con los instrumentos se buscaba indagar cómo los casos manipulaban y fijaban variables, a qué estructuras representacionales acudían cuando solucionaban un problema. También fue objeto de análisis, la incidencia de las opiniones particulares en los discursos de los otros; la manera como nombraban y organizaban las representaciones que les permite el relacionamiento de lo que se conoce y lo que se desconoce, afín de llegar a deducciones y modos de operar informalmente. Aquí, es conveniente precisar que, en ningún momento se pretendió enseñar o indicar métodos o caminos de cómo operar, los instrumentos sólo posibilitaban discusiones que permitan indagar acerca de las significaciones y construcciones de cada caso.

En los instrumentos, se construyeron actividades problémicas que planteaban situaciones familiares o cercanas a los casos, donde se pudiera establecer una relación de lo conocido con lo que se desconoce, afín de dar posibles soluciones a las problemáticas. Al respecto, se indagó a los casos cuál era el proceso o las relaciones que hacían para llegar a las respuestas que daban en las diferentes actividades planteadas. Este procedimiento se hizo a la luz del método de la zetetica de Francois Viete, a su vez, se recurrió a este autor en el diseño de algunas actividades donde se hizo uso de las representaciones geométricas para establecer situaciones algebraicas manipulables.

3.6 Sistematización y análisis

La información recolectada se organizó de acuerdo con las categorías apriorísticas que surgieron en el desarrollo del marco teórico, estas guiaron la observación en el contexto, luego de esta primera organización se precisaron algunas categorías para que dieran mejor cuenta de la información recolectada, luego de organizada la información se hicieron varias triangulaciones respecto a lo conceptualizado a lo largo de la investigación y, según lo que reportaban los casos, con el fin de darle una consistencia interna a la información recogida, se crearon correlaciones con diversas categorías, para así construir desde diferentes puntos de vista lo mismo.

La información recogida se sistematizó en matrices de doble entrada, casos versus preguntas, la información seleccionada se escogió a la luz de los objetivos de la investigación, fue clave para esta selección la construcción de unas categorías que guiaron el análisis de lo proporcionado por lo estudiantes.

Para el análisis de la información se implementaron varias estrategias: la triangulación con el marco teórico, triangulación de instrumentos y la triangulación de métodos. Al respecto, debe precisarse que el análisis de información estuvo orientado por el sistema de categorías construido para tal fin. A continuación, se presenta el sistema de categorías que orientó el análisis y la estructuración de los hallazgos.

Categorías para el análisis	
Naturaleza de las matemáticas: La Incidencia de Reflexiones Histórico-epistemológicas en la enseñanza de las matemáticas	- Naturaleza de las matemáticas: Su incidencia en la participación activa o pasiva de los Casos - Uso de la Historia y epistemología de las matemáticas y su incidencia en la enseñanza
Caracterizar la vinculación de las construcciones informales de los casos, con el lenguaje algebraico	- Construcción de explicaciones en situaciones problémicas mediante el establecimiento de relaciones entre lo conocido y lo desconocido

formal mediante un análisis histórico epistémico	- Formación de conceptos: Del Lenguaje Natural al formal matemático

Tabla 3*: Categorías para el análisis.*

Capítulo 4. Hallazgos

Este capítulo se estructura teniendo en cuenta las categorías que orientaron la investigación. En este sentido se consideran los siguientes aspectos:

Naturaleza de las matemáticas y su incidencia en la enseñanza, particularmente, se analiza su incidencia en las actitudes de los estudiantes.

También se documenta, la incidencia del uso de la historia y epistemología de la matemática en su enseñanza, se parte de la creencia de que para entender los postulados que hoy manipulamos es necesario entender el entramado histórico que constituyó su desarrollo, lo cual permite hacer una reflexión más consciente acerca de las construcciones informales que los casos presentan ante situaciones problémicas, cuando las vinculan con constructos similares que se hicieron en la construcción de teorías previas.

Complementario a lo anterior, se aborda la construcción de explicaciones de situaciones problémicas mediante la relación de lo conocido y lo desconocido.

Finalmente, se desarrolla la formación de conceptos del lenguaje natural al formal matemático, la importancia del lenguaje natural en el transito al lenguaje simbólico.

4.1 Naturaleza de las matemáticas: Su incidencia en la participación activa o pasiva de los Casos

Las reflexiones a lo largo de la investigación permitieron establecer como incide, en la enseñanza de las matemáticas, la concepción sobre su naturaleza, para esta investigación, particularmente, fue de interés centrarse en la concepción que sostiene que las matemáticas son falibles, que tienen origen en fuentes informales y que se construyen en la interacción social. Partiendo de las características que describen, Vesga-Bravo y Lozada (2018) se plantearon actividades que buscaban confrontar a los casos acerca de sus conocimientos formales y conceptuales de matemáticas versus situaciones problémicas que no implicaban respuestas exactas, ni de un formalismo matemático exhaustivo, se buscaba identificar formas de proceder ante un problema, analizando las construcciones informales que se daban como solución a las situaciones planteadas y las modificaciones que estas soluciones sufrían cuando ocurría la interacción entre los Casos (en adelante el caso se representa con C).

Inicialmente se indagó con preguntas, con una entrevista semiestructurada, que permitían que los Casos explicitaran las creencias acerca de las matemáticas, específicamente sobre el álgebra, luego se contrastó con la solución que daban a las situaciones problémicas. Esto mostró marcadas diferencias, con las respuestas obtenidas cuando se indagó sobre la parte formal de las matemáticas. En este proceso se pudo evidenciar un aprendizaje memorístico de los conceptos, sin una reflexión sobre sus significados.

Por otro lado, al hacer los ejercicios planteados fue destacable la participación activa frente a situaciones que propician, de manera informal y desde el lenguaje natural, la manipulación de los mismos asuntos teóricos. Lo anterior se evidenció cuando se indagó, a través de una entrevista semiestructurada, sobre el uso de letras en matemáticas, todos los Casos coincidieron en afirmar que el uso de letras permitía simplificar y resumir expresiones en matemáticas. Por ejemplo, sobre el uso de letras C1 dice que se usan (…) para resumir una pregunta, para ser más específico (…). Mientras que C2 dice que se usan (…) para simplificar la vida (…) sería mucho más fácil poner una letra que poner un número, porque se simplifica, entonces no se confunden (…). Por su parte, C3 dice que se usan (…) para expresar números más fácilmente, o sea, números muy largos, para expresarlos más fácilmente (ver anexo 3).

Si bien, las respuestas coincidían en dar al algebra el carácter de simplificar y facilitar; debe decirse que, las respuestas denotan muy poca claridad acerca de lo que se simplifica o la utilidad de esa simplificación, por ejemplo, C2 inicialmente le da características de facilitar la vida, más adelante cuando se le cuestiona sobre sus usos en la vida diaria, con actitud confusa expresa que se usa en la ingeniería para que las estructuras no colapsen; por su parte C3 dice que se usa para economías internacionales, mientras C1 manifiesta desconocer para que se usa (ver anexo 1). Al contrastar con una actividad problémica se nota una actitud más relajada y participativa, en una de ellas, se presentó una balanza y se pedía establecer cuántos tornillos debían ir en la última balanza para mantener el equilibrio, tal como se indica en la figura 3.

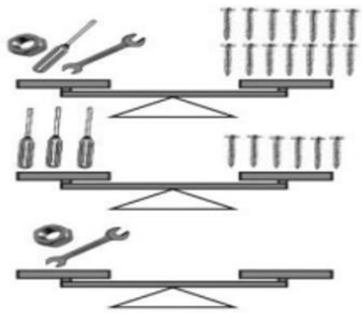


***Figura 3**: Balanza la establecer equilibrio*

Para solucionar la situación (ver anexo 4), C2 procedió de la siguiente manera: Lo primero que hice fue descubrir a cuánto equivale un destornillador, (…) si 3 destornilladores equivalen a 6 tornillos, eso significa que cada destornillador vale 2 tornillos.

En esta solución se ve como C2 usa lo conocido (la relación entre los elementos de la balanza 2) para establecer algo que desconocía (equivalencia en tornillos de un destornillador individual).

En la solución de la situación, C2 continúa diciendo: (…) entonces arriba hay una llave, una tuerca y un destornillador y hay 14 tornillos, si le quitamos el destornillador quedarían 12 tornillos, entonces serían 12 tonillos los que irían abajo.

Aquí, nuevamente C2 hace uso de los nuevos conocimientos (el equivalente en tornillos a un destornillador) y los relaciona con lo desconocido (la llave y la tuerca) para llegar a la respuesta.

Así mismo, los otros Casos establecieron relaciones similares para dar respuesta a la situación, por ejemplo, C1 relacionó cada artículo con valores numéricos para lograr balancearlo, aunque el procedimiento se extendió más, también fue evidente la relación que estableció entre lo conocido y lo desconocido, asignándole a lo conocido valores numéricos.

De esta manera, para dar respuesta al problema, los Casos logran establecer una relación de lo que se conoce, primeras balanzas, con lo desconocido (lo que se pide balancear), para dar solución al problema presentado, aquí se pudo contrastar cómo aunque los casos expresan desconocer para qué se usa el álgebra en la vida diaria, y relacionan su utilidad a aspectos complejos como la ingeniaría o economía internacional, se evidenció como al tratar de dar respuesta a la situación planteada establecen relaciones propias del álgebra de manera espontánea, entendiendo el álgebra, como la forma de establecer relaciones entre lo que se conoce y desconoce para encontrar eso que se desconoce (Viete, 2006).

Lo anterior coincide con las características de las matemáticas y la incidencia en la enseñanza descritas por Vesga-Bravo y de Lozada (2018), estos autores expresan que estas características (de falibilidad), favorecen procesos de acercamiento a las matemáticas, haciendo a los estudiantes participantes activos en la solución de situaciones y, donde el conocimiento va más allá de formalismos conceptuales: en este caso las relaciones que se logran establecer para solucionar un problema, muestra como la representación de los objetos favorecen procesos de manipulación de los mismos, logrando mayor confianza y participación de los Casos.

Es así, como la concepción de matemáticas como algo falible, posibilitan herramientas para enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se pudo establecer en esta investigación que, si no se proponen ejercicios repetitivos y sin sentido para los estudiantes y, en cambio, se plantean problemas que lleven a reflexionar acerca de lo que se hace, se pueden lograr procesos más significativos.

Sobre las consideraciones anteriores, cabe resaltar que esta concepción de las matemáticas, está íntimamente ligada al uso de la historia y epistemología de las matemáticas, la cual permite reflexiones crítica en cuanto a la evolución y transformaciones de las teorías, lo que, a juicio de la investigadora, permite un conocimiento más profundo de los aspectos conceptuales y, en consecuencia, establecer relaciones con las diversas formas de proceder cuando se intenta resolver una situación que involucra el razonamiento matemático.

4.2 Uso de la Historia y epistemología de las matemáticas y su incidencia en la enseñanza

Para plantear los ejercicios que orientaron la implementación, se tuvo en cuenta lo observado durante algunas sesiones donde se evidencio como la forma de presentar los problemas juega un papel clave en su solución hicieron reflexiones histórico epistemológicas acerca del lenguaje algebraico, para ello se recurrió a un autor que se consideró clave en el desarrollo de este lenguaje; el análisis hecho a la obra de Francois Viete, La Introducción al Arte Analítico, proporcionó herramientas para estructurar las actividades que se presentaron a los Casos, además, posibilitó una mirada amplia sobre las construcciones planteadas por ellos: al indagar y reflexionar sobre el entramado histórico de desarrollo algebraico, particularmente de la construcción de su lenguaje, surgieron herramientas que enriquecieron la mirada con la que se analizaba lo construido por los Casos. Al respecto, se establecieron coincidencias en las formas de proceder de los Casos y la forma en que Viete (2006), procede en su obra. A lo largo de todo el proceso, observamos la importancia de objetos representacionales, que permiten una manipulación efectiva, por parte de los Casos, para poder establecer esas relaciones que logran llevar a las soluciones. Para concretar esto, fue importante la interacción entre los Casos, más allá de construcciones individuales, se puso el foco en cómo dichas construcciones evolucionaban y se modificaban a partir de la interacción social. Al respecto, se presentó a los Casos una situación problema con el fin de analizar cómo iban fijando variables y cómo influía la intervención de sus compañeros:

La situación planteada indagaba acerca del porqué los tiempos en los recorridos de dos estudiantes, Valentina y Mateo (nombres ficticios), eran diferentes al transportarse de sus casas al Colegio cuyo radio de ubicación de sus casas, se limitaba en la situación inicial (ver figura 4)

Situación inicial

En una institución de Envigado, Mateo y Valentina siempre llegan al colegio a las 6:55am. Mateo sale de su casa a las 6:45, mientras que Valentia sale rumbo al colegio a las 6:20. Si sabemos que ambos viven el sector delimitado en la imagen donde cada rectángulo corresponde a una cuadra dentro del sector ¿Cómo explicarías que Valentina tarde más en llegar?

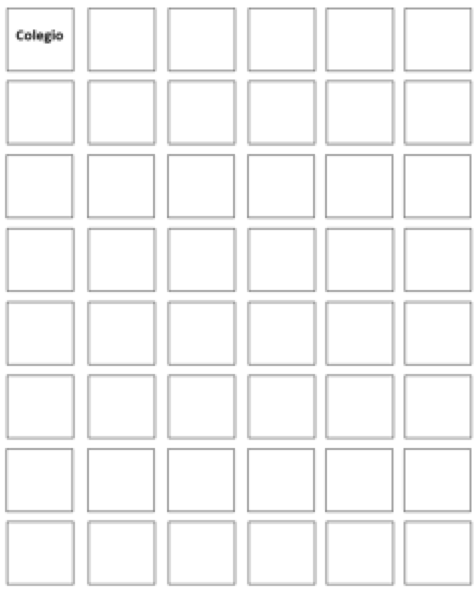


***Figura 4**: Situación inicial, cuadras donde posiblemente viven Mateo y Valentina*

Al preguntarles por la razón de la demora de Valentina, se lanzan las siguientes hipótesis, C1 dice que se desvía del camino, mientras C2 argumenta que puede ser por asuntos de rendimiento físico, diciendo: (…) para subir al Colegio hay una colina, es bien sabido que naturalmente los hombres en si son más fuertes y más resistentes (…) –Mateo duraría menos en el caso de haber colina; a lo que C3 lo interpela contestando: supongo que colocando el colegio en una colina podría ser una diferencia entre la resistencia de Mateo y la resistencia que tenga Valentina, pero estamos hablando de una diferencia de casi 25 minutos que es demasiado y es excesivo, en mi opinión puede ser que Mateo vive cerca del colegio y que Valentina puede vivir a un extremo del cuadro;

Aquí, se evidencia como se establecen procesos comunicativos en la construcción colectiva, se ve como los Casos establecen posibles causas, que están vinculadas a experiencias cotidianas;

también se evidencia cómo aprueban o descartan hipótesis de sus compañeros de acuerdo con sus conocimientos dados por la experiencia cotidiana.

En esta situación, mientras que C2, de manera convencida, expone el estado físico como condición de la demora de Valentina, C3, atendiendo a lo expuesto por C2, advierte que, si bien es una condición que interfiere en los tiempos que le toma a cada uno llegar al colegio, la diferencia de tiempo es muy alta para defender esa hipótesis, lo que ayuda a enriquecer la construcción colectiva, siendo más cuidadosos con las hipótesis que se lanzan partiendo de los pequeños detalles de la información inicial. En este caso la diferencia de tiempo es similar a lo dicho por C3, C1, estando de acuerdo con la hipótesis lanzada por C2. En la discusión, este último reflexiona y lanza una nueva posibilidad y dice: (…) ya sé, ya sé, puede que Mateo coja carro o bus y Valentina no (ver anexo 3). Aquí, se logra movilizar nuevas hipótesis a partir de la interacción social.

Como se puede ver, a lo largo de la situación planteada se iban dando nuevas hipótesis con el fin de fijar variables, ante la nueva información (se transportan en un vehículo automotor con velocidad similar y que viven en casas contiguas) se establecieron nuevas hipótesis y descartaron otras, todas validadas de manera colectiva.

Para finalizar el ejercicio se mostró el recorrido hecho (ver figura 3), donde se informó adicionalmente que Valentina se transportaba en un servicio de transporte estudiantil, y se pregunta si es posible establecer la distancia de un recorrido respecto al otro.

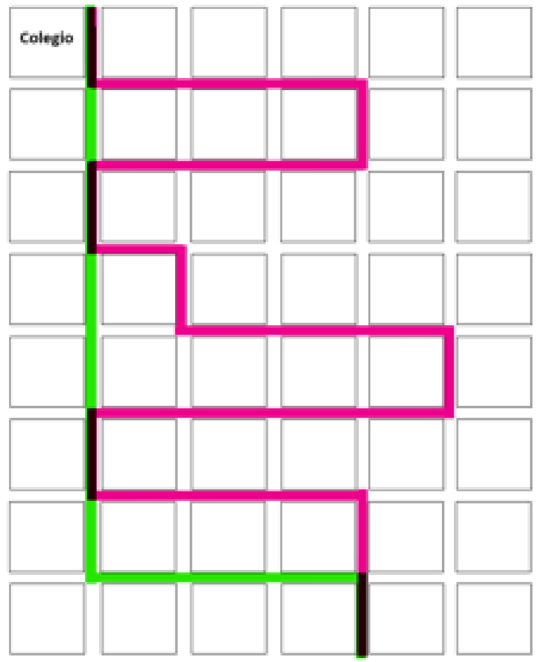


Figura 5*: Recorridos de Mateo y Valentina*

Para la solución de la situación, lo primero que hacen los Casos, en general, es contar el número de cuadras que recorre cada uno. Por ejemplo, procede C2 argumentando que, tendríamos que dividir, Mateo se demora 10 minutos en llegar, son 11 cuadras que pasa y 10 minutos se demora, se demora casi un minuto en pasar cada cuadra. Aquí se puede decir que, en lo expuesto por C2, hay una clara relación de dos variables que conoce, el tiempo que demora Mateo en hacer el recorrido y el número de cuadras que recorre, se nota en este punto cómo de manera espontánea se hace uso de lo conocido, estableciendo relaciones para llegar a lo que se pide (lo que se desconoce). Por su parte, C1 dice (…) profesora sería así, cada cuadra, tenemos que por ejemplo cada cuadra vale un minuto, (…), entonces el minuto equivale a un kilómetro en un carro entonces serian 25 kilómetros. Aquí, C1 partiendo de la construcción hecha por su compañero relaciona el valor que no se conoce con un valor numérico, para lograr establecer una relación entre lo recorrido por los dos estudiantes.

Es así como en la solución de esta situación se evidencian, nuevamente, las características falibles de las matemáticas: se observa nuevamente la incidencia de las fuentes informales en la construcción de explicaciones y, a su vez, el enriquecimiento a las explicaciones dadas cuando hay una interacción que permite validar socialmente las explicaciones.

Por otra parte, conviene decir que coincidimos con D´Amore, Radford y Bagni (2017) al señalar la importancia de advertir el entramado histórico y las transformaciones de las teorías que se enseñan: analizar a la luz de un teórico fundante del álgebra, permite dotar de sentido los desarrollos que construyen los Casos desde lo informal, analizar la actividad, partiendo de las reflexiones de la construcción del lenguaje algebraico propuesto por Viete (2006), permite encontrar un sentido más profundo a las construcciones hechas por los Casos; por ejemplo, la forma de establecer la relación entre los recorridos contando las cuadras, guarda una estrecha relación con la forma en que Viete (2006) establece a *x* como una longitud desconocida relacionándola con la representación geométrica de un lado. Al respecto, es oportuno decir que, en lo construido por los casos se ve como, para establecer la relación, esta se hace a partir de ese lado desconocido que llamaron cuadra y al percatarse que eran iguales, hacen una suma de los segmentos de cuadra recorrido por cada estudiante.

Para esta situación inicial, fue destacable la participación activa, fue notable la confianza que sentían los Casos al dar su opinión, ya que era una situación cercana a sus cotidianidades. Además, se observó cómo se ocurría la validación en la construcción de soluciones de manera social-colectiva. Igualmente, al ser un ejercicio colectivo, se observó cómo los Casos lanzaban hipótesis y se descartaban otras de acuerdo con las intervenciones de cada uno (validación social).

4.3 Construcción de explicaciones en situaciones problémicas mediante el establecimiento de relaciones entre lo conocido y lo desconocido

Partiendo del análisis que se hace del entramado histórico con el que se desarrolló el lenguaje algebraico y, particularmente la contribución que hace Viete (2006) en la construcción de este lenguaje, encontramos que, para este autor, el álgebra está vinculada al razonamiento mediante el cual se establecen ecuaciones o proporciones que permiten resolver cualquier problema. Según este autor, para este propósito es clave relacionar lo que se conoce y lo que se desconoce; analizando estas relaciones se observó que los Casos tienen una forma particular de construir explicaciones a través de un relacionamiento intuitivo, sin acudir a conceptos formales de las matemáticas.

Llamó la atención de cómo los Casos manipulan, casi que, de manera inmediata, aquello con lo que logran establecer un carácter representacional, ya sea a través de representaciones (imágenes, ayudas graficas) de los problemas, o representaciones ya formadas e interiorizadas que guardan relación con su experiencia cotidiana. Veamos lo que sucedió cuando se planteó a los Casos problemas algebraicos formales (sistema de ecuaciones) para que los resolvieran:

Se pidió encontrar los valores de A, N y L partiendo de las siguientes relaciones

$$N+A=153$$
$$L+A=257$$
$$L+N=306$$

***Figura 6**: Sistema de ecuaciones propuesto*

Si bien intentaron despejar las letras, no había una organización de cómo hacerlo (ver anexo 2A). Al respecto, C2 intento encontrar una solución manipulando las ecuaciones dadas, para eso hace las siguientes operaciones, si N+A= 153 y L+N=306 entonces 306 – 153 = 153 (C2 manifestó parecerle curioso ese resultado, pues daba lo mismo que N+A) Luego retomó tomando la ecuación L+A = 257 y resta el resultado anterior: 257-153 = 104. Finalmente propuso que al hacer la diferencia entre 153 y 104 se obtenía el valor de A (A=49). Al percatarse que ese valor no soluciona las ecuaciones dice sentirse enredado en general los Casos manifestaron sentirse enredados y confundidos y es poco lo que participan. Se observó que en la manera de proceder hay una intención de despejar las incógnitas, pero no hay un sentido de prioridad en la manera de despejar.

A continuación, se expone lo que ocurre al presentar una situación similar (sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con 3 incógnitas), (ver anexo 2B):

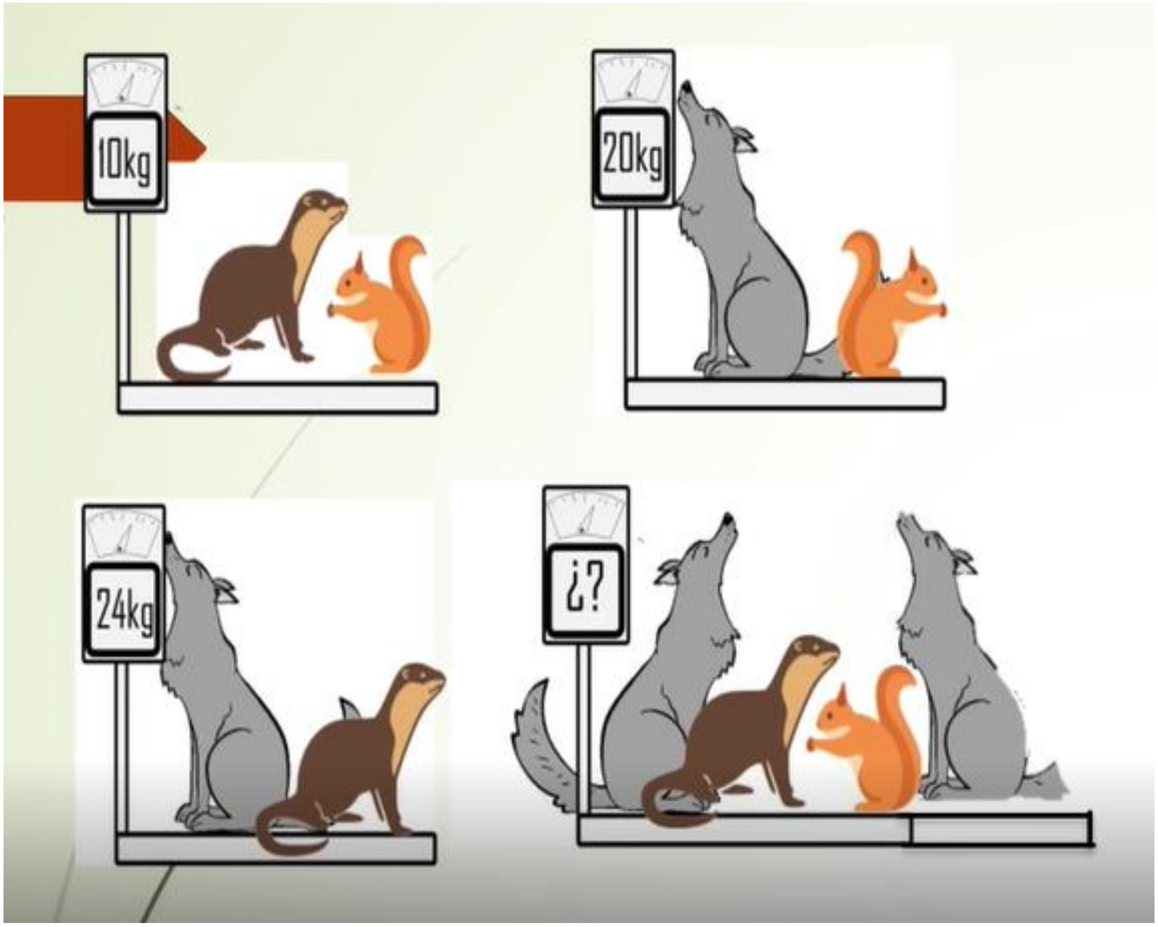


***Figura 7**: Situación problema, masa de cada animal*

En esta situación hubo un cambio en la forma de abordar su solución. C1 inicia, con la balanza dos, dándole un valor al lobo de 15 y, C2 continúa partiendo de lo establecido por C1 y asigna a la ardilla un peso de 5; analizando esta construcción que hace C1, llama la atención como en relación al valor total de la balanza 2, se le asignaba un valor mucho mayor al lobo, solución que reafirma C2. Este modo de proceder podría tener un sustento el conocimiento informal que se tienen acerca de los animales, un conocimiento ya interiorizado a través de la cultura: lo natural es que el lobo sea más pesado que una ardilla.

En la solución de la situación, C2 continúa explicando que la nutria pesaría 9, si se mira la balanza 3, 15+9 = 24; C3 interpela comentando que es incoherente, porque la ardilla y la nutria pesan 10kg, entonces no tendría lógica que el lobo pesará 15.

La discusión continúa, dan valores a los animales de acuerdo con sus proporciones y lo hacen coincidir con la balanza, pero al ser un ejercicio de dar valores al azar, se presentan dificultades cuando se intenta hacer coincidir los pesos establecidos y lo que indican las balanzas, luego de dar valores al lobo se llega a los valores de cada animal, además, luego de haber llegado a los valores C3 expone: también se hubiera cogido lo de la imagen 2 y 3 y se hubiera sabido el peso: se suman 2 y 3 y se resta 1 para saber que pesa el lobo.

Si bien no se establece, inicialmente una ecuación que describa de manera precisa los resultados, el cambio en la forma de abordar esta situación, respecto a la anterior, es significativo, se hacen aportes con mayor seguridad, ya que en la primera situación no se animaban a dar siquiera valor a las variables para tantear, también hay conciencia del error en los valores asignados; mientras que, al presentarse el sistema de ecuaciones, si bien se intentó despejar las variables, no había una idea de prioridad y los Casos, no tenían claro si estaba bien o mal lo que lograban establecer al manipular las variables.

A partir de lo anterior coincidimos con el análisis que hacen Zagarra y García (2016) de Vigotsky el cual expone que, solo se logra manipular lo que se conoce, lo que se ha interiorizado y desarrollado a través del contexto social, procedimiento en el que es clave el uso del lenguaje, el cual posibilita procesos de comunicación asertiva. Esto sin duda alguna, permite interpretar esos signos representacionales y una mejor comprensión.

Sobre la actividad del sistema de ecuaciones se puede decir que estas carecen de significados sociales compartidos y que, es justamente esto lo que dificulta su solución.

Finalmente, analizando el lenguaje propuesto por Viete (2006) donde este se construye y estructura mediante una íntima relación con las representaciones geométricas, que para la época era la forma más común de abordar un problema; en la solución de estas situaciones se evidencia que, se manipula de forma asertiva lo que se conoce bien, por esta razón los Casos logran construir significaciones más profundas con la representación de los animales en la balanza, dado que es una situación más cercana a su cotidianidad.

4.4 Formación de conceptos: Del Lenguaje Natural al formal matemático

A lo largo de la implementación se hizo evidente como situaciones que se vinculaban a representaciones de la vida cotidiana, generaban mayor interés en los casos, manifestándose en mayor participación y seguridad para construir relaciones que solucionaran los problemas planteados.

En este apartado, a partir de lo reportado por los Casos, se estableció en qué nivel (ver tabla) se ubica las construcciones hechas por los Casos en la formación de conceptos matemáticos planteada por Ángulo, Arteaga y Carmenates (2020).

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
NIVEL I	Objetos concretos, imagen del concepto	Rasgos o propiedades de los objetos
NIVEL II	Rasgos o propiedades de los objetos	Relaciones entre las propiedades.
NIVEL III	Relaciones entre las propiedades	Definición del concepto
NIVEL IV	Definición del concepto	Definición innovadora del concepto.

***Tabla 4**: Estructura recursiva de los niveles (tomada de Ángulo, Artega y Carmenates, 2020)*

Lo reportado por los casos se estructuro desde un lenguaje natural, es decir un lenguaje cuyo fin primario era la comunicación, expresando así todas las construcciones desde sus formas de hablar, mostrando una estrecha relación con eventos o conocimientos propios de su inmersión en el contexto social, por ejemplo, todos los casos coincidieron al asignarle un mayor valor al lobo (ver ilustración 5) que a la ardilla, debido al imaginario, construido desde la experiencia, o en caso de no haber tenido relacionamiento directo con dichos animales, desde el constructo social y las características que se le atribuyen a esos animales.

En general, se evidenció como los Casos, sobre la base de la experiencia, forman conceptos de manera espontánea asociando las representaciones de cada situación a algo conocido o previamente construido desde lo social, estado propio del nivel 1, a su vez, además de reconocer esa representación y asociarla a algo en la vida real, también logran sin complicaciones asociarle atributos propios, por ejemplo, en la situación de los estudiantes que se les lleva diferente tiempo llegar al colegio, establecen causas de esa diferencia, como tipo de transporte, cercanía al colegio, recorridos (posibles variables); pudiendo describir y caracterizar atributos de la situación. Lo que muestra buen desenvolvimiento en establecer vínculos, descripciones y características para construir soluciones.

Lo anterior desarrolla los niveles de visión y distinción descritos por Ángulo, Arteaga y Carmenates (2020), ambos niveles vinculados a un lenguaje natural,

Al analizar si los casos llegaban a estrados del nivel 3, se identificaron dificultades en la manipulación del simbolismo matemático, donde si bien se conoce los símbolos y reglas de manipulación del lenguaje simbólico, no hay una idea clara de lo que representan los símbolos o lo que se busca al manipularlos, esto se hizo evidente cuando se formuló el sistema de ecuaciones, los cuales de manera tímida (lo cual en relación con la actitud de actividades previas, denotó inseguridad) operaron sin un sentido claro de para que se manipulaban y que se quería encontrar.

Si bien no se evidenció buen dominio del lenguaje formal matemático, se observó un gran avance en los dos niveles anteriores, donde los casos establecen de manera espontánea relaciones a través de representaciones cercanas a la experiencia lo que es clave pues como persuaden los autores que plantean estos niveles en la formación de conceptos matemáticos, no se pueden saltar los niveles, para que el tercer nivel se desarrolle es necesario que se superen los dos niveles previos; lo que deja como reflexión como desde la enseñanza matemática, saltarse esos niveles previos y no vincular esas construcciones que se dan desde el lenguaje natural ha ocasionado los fracasos planteados en el capítulo 1 en la introducción al álgebra.

Desde la obra de Francois Vieta se pudo detallar cómo estructuró su lenguaje simbólico a partir de las representaciones geométricas (bien conocidas por el autor), vincular esas representaciones a través de letras y estructurar sus reglas por medio de las reglas que orientaban la manipulación geométrica le permitieron ampliar las posibilidades de razonamiento, en cuanto logró manipular objetos imposibles de representar geométricamente, como la cuarta y demás dimensiones. Lo anterior a la luz de los niveles propuestos por Ángulo, Arteaga y Carmenates (2020) muestra como Viete logra ese tránsito al nivel III a través del vínculo que establece de las representaciones geométricas (las cuales manipulaba muy bien) y el nuevo lenguaje que introduce, dotando de sentido el lenguaje algebraico.

Capítulo 5. Consideraciones finales

Atendiendo al problema y objetivos planteados en esta investigación se puede resaltar que los resultados obtenidos en la investigación dejan ver que reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas es clave en los procesos de enseñanza. Se pudo establecer que una concepción falible de las matemáticas favorece procesos dialógicos entre los estudiantes. Igualmente, los datos obtenidos permiten afirmar que, plantear discusiones con situaciones que vinculan asuntos del contexto social-cotidiano, posibilita desarrollar actitudes más seguras que permiten mayor participación y enriquecen modos de proceder y manipular la información.

Igualmente, el uso de la historia y la epistemología permitió identificar, en las construcciones dadas por los casos, aspectos que develan cómo se construyó el lenguaje simbólico en la obra de François Vieta (2006). Al respecto, es oportuno resaltar que se identificaron similitudes en cuando a lo que proponía este autor: relacionar lo conocido y lo que se desconoce lo cual permite establecer soluciones a las situaciones matemáticas planteadas.

Las consideraciones anteriores, permiten decir que, si bien, no se pretende convertir al maestro en un historiador y la clase de matemáticas en una de historia, el entramado histórico que se da en la construcción de las teorías permite estructurar rutas alternativas que posibilitan una mayor comprensión de los contenidos matemáticos. El análisis histórico epistemológico, también permite dotar de significado las construcciones que hacen los estudiantes, al identificar en esas construcciones y formas de proceder de los autores con las que intuitivamente realizan los estudiantes.

En cuanto al carácter representacional se puede decir que hay mayor participación y claridad respecto a lo que se pide hallar en un problema, cuando se logra vincular aspectos del problema con asuntos que se conocen, esto deja ver que las representaciones que son cercanas al estudiante, logran ser esa herramienta facilitadora que propicia la manipulación de asuntos que ya se conocen y establecer relaciones que permitan vincular nuevos aspectos o nuevas formas de nombrar.

Por último, para favorecer los vínculos entre lenguaje natural, del que hacen uso los casos de manera espontánea para resolver situaciones y, el lenguaje simbólico usado para describir problemas algebraicos, se vio la utilidad de hacer uso de situaciones contextuales que puedan relacionarse con las formas de nombrar y manipulación algebraica. Al respecto, es importante indicar que para que haya una vinculación efectiva, es necesario que el maestro propicie ese relacionamiento entre las situaciones planteadas y el lenguaje algebraico, a fin de dotarlo de sentido.

Las reflexiones hechas a lo largo de la investigación permitieron identificar la urgencia de transformar la forma en que se enseña, especialmente las formas de enseñanza vinculadas al sistema tradicional, es necesario que el maestro reflexione sobre los contenidos que imparte, para que facilite establecer vínculos entre los contenidos propuestas y las construcciones que deben realizar los estudiantes en sus contextos sociales. Es importante que, en estos procesos, el estudiante deje de ser la vasija en la que el maestro deposita todo lo que sabe y que, por el contrario, se propicien contextos en los que el estudiante asume un papel activo de cada proceso. Para este propósito, una alternativa puede ser el uso de la historia y la epistemología vinculado, para reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas, a fin de desarrollar procesos de enseñanza más significativos.

Finalmente, en esta investigación se pudo establecer la importancia de la geometría en la estructuración del lenguaje algebraico. Igualmente, se pudo evidenciar su utilidad, para comprender procesos como la suma y multiplicación algebraica a través de las representaciones geométricas. A tendiendo a estos hallazgos, se recomienda que en futuras investigaciones se indague por los aportes de la geometría en los procesos de conceptualización en matemáticas.

Referencias

Aguilar, Y. (2002). A propósito de las cosmovisiones: Relativista y Fenomenológica. Universidad de Antioquia

Angulo, M; Arteaga, E; Carmenates, O. (2020) La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Cnrado vol.16 no. 74

Barrera, F. (2013) Historia del Álgebra. Antología. http://profesores.dcb.unam.mx/users/ericagv/algebra/historia%20del%20algebra.pdf

Boyé A. (sin fecha) ¿Francois Viete invetor del álgebra? Traducción Sergio Toledo. Seminario “Orotava” de historia de la ciencia año XI-XII (pp259-276)

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16(1), 113-148. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105

Camero, D. (2014) Comprender e interpretar los modelos mentales que se manifiestan en los procesos de transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en la resolución de problemas. Una propuesta de aproximación al pensamiento algebraico. Universidad Nacional de Colombia.

Cervantes, O. y Reyes, D. (2016). La construcción social de un lenguaje simbólico desde las prácticas. Perfiles Educativos, 67-86.

Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 3(4), 29-44.

D'Amore, B.; Radford, L.; Bagni, G. (2017). Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. En D'Amore, Bruno; Radford, Luis (Eds.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos Énfasis. (pp. 167-194). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fernández, K., Gutiérrez, I., Gómez, M., Jaramillo, L. y Orozco, M. (2004). El pensamiento matemático informal en niños en edad preescolar. Creencias y prácticas de docentes de Barranquilla (Colombia). Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación. Universidad del Norte (5), 42-73.

González F. (2005) Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. Fundamentos en humanidades. 6

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y deferencias. En R. Hernández Sampieri, C. Fernández Collado, y P. Baptista Lucio, METODOLOGÍA de la investigación (Quinta ed., págs. 1-23). México D.F.: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Jiménez, A. (2010). La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase. Educación y ciencia (13), 135-150.

MEN (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas. Colombia Ministerio de Educación

Murcia, M. y Henao, J. (2015). Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. Entre Ciencia e Ingeniería, 9(18), 23-30.

Pérez, T. y Ravaioli, N. (2013). La estrategia de cover-up como primer acercamiento a la noción de resolución de ecuaciones en la transición de la aritmética al álgebra. Actas del VII CIBEM, 1220-1223.

Stake, R. (1998). Capítulo primero: El caso único. En Stake, R. E (1998) Investigacuón con estudio de casos (pags 15-24). Madrid. Ediciones Moratas, S. L.

Vergel, R. y Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vesga, G. y de Lozada, M. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en ejercicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Revista Colombiana de Educación (74), 243-267.

Viete F. (2006) The Analytic Art.Dover Publications Inc.Mineola, New York. reedición sin puentes la obra publicada originalmente por The Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983. Traducción T. Richard Witmer

Zegarra, C. y García, J (2016) Pensamiento y lenguaje: Piaget y Vygotsky. Trabajo final del seminario sobre Piaget.