

**EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN A PARTIR DE TAREAS DE  
PROPORCIONALIDAD DIRECTA**

**SARA MEJÍA VASCO  
LILIANA QUINTERO LÓPEZ**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
MEDELLÍN**

**2013**

**EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN A PARTIR DE TAREAS DE  
PROPORCIONALIDAD DIRECTA**

**SARA MEJÍA VASCO**

**LILIANA QUINTERO LÓPEZ**

**Trabajo de grado para optar por el título de  
Licenciadas en educación básica con énfasis en matemáticas**

**ASESORES**

**MARÍA DENIS VANEGAS**

**GILBERTO OBANDO ZAPATA**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**MEDELLÍN**

**2013**

**Nota de aceptación Jurado**

---

---

---

---

María Denis Vanegas

Asesora

## *RESUMEN*

El aprendizaje de la multiplicación ha sido un tema de gran discusión y apropiación entre diversos investigadores que se han centrado de una u otra manera en discutir sobre su aprendizaje en la actualidad y en proponer maneras de acercar a los estudiantes a una mejor comprensión y aplicación. Bajo esta idea, el trabajo de investigación que a continuación se comparte se centra en analizar la actividad matemática de las estudiantes a partir de las situaciones que surgieron cuando se llevaron al aula tres tareas que buscaban que ellas trascendieran la mirada de la multiplicación como suma de sumandos iguales. Entendiendo la tarea como aquel instrumento creado por las maestras en formación donde se incluyen ejercicios, enunciados, problemas, entre otros elementos que permiten orientar el aprendizaje de las estudiantes.

Es de resaltar, que todo el proceso de la práctica estuvo orientado desde una perspectiva sociocultural, comprendiendo la dialéctica entre lo individual y lo social y asumiendo el sujeto como un ser colectivo, que construye saber con el otro. Y la actividad como el conjunto de acciones organizadas, estructuradas y orientadas para lograr un objetivo.

El análisis de la actividad matemática de las estudiantes se dio a la luz de tres elementos: los objetos de conocimiento, las interacciones entre los sujetos y los instrumentos. De esa manera se buscó comprender y analizar cómo las tareas de proporcionalidad directa mediaron el aprendizaje de la multiplicación y cómo a partir de ellas las estudiantes lograron pensar multiplicativamente y adquirieron así una nueva mirada de la multiplicación.

Se considera finalmente, como durante todo el proceso de la práctica pedagógica las tareas seleccionadas y presentadas en el aula de clase muestran un posible camino para llevar a los estudiantes de quinto grado a pensar multiplicativamente; donde cada tarea fue diseñada bajo las ideas de la proporcionalidad directa, y

establecida como instrumento potente que medió entre las estudiantes y el objeto de conocimiento que para este caso es la multiplicación.

## *RESUMO*

A aprendizagem da multiplicação tem sido um tema de grande discussão e apropriação entre diversos pesquisadores, que se focaram de uma ou outra forma em discutir sobre sua aprendizagem na atualidade e em propor maneiras de acercar os estudantes a uma melhor compreensão e aplicação. Este trabalho de pesquisa que se apresenta se foca em analisar a atividade matemática das estudantes a partir das situações que surgiram quando se levaram à sala de aula três tarefas que tinham como objetivo que elas transcendessem a mirada da multiplicação como soma de parcelas iguais. Entendendo a tarefa como aquele instrumento criado pelas professoras em formação a qual inclui exercícios, enunciados, problemas, entre outros elementos que permitem orientar a aprendizagem das estudantes.

É preciso ressaltar, que tudo o processo da prática pedagógica esteve sob orientado de uma perspectiva sociocultural, compreendendo a dialética entre o individual e/ou social e assumindo o sujeito como um ser coletivo, que constrói saber com o outro. A atividade é entendida como o conjunto de ações organizadas, estruturadas e orientadas para alcançar um objetivo.

A análise da atividade matemática das estudantes foi dada a través de três elementos: os objetos de conhecimento, as interações entre os sujeitos e os instrumentos. Dessa forma, se procuro compreender e analisar como as tarefas de proporcionalidade direta medeiam à aprendizagem da multiplicação e como, a partir das mesmas, as estudantes começaram a pensar multiplicativamente adquirindo uma nova perspectiva para a multiplicação.

Consideram-se finalmente, como durante todo o processo da prática pedagógica as tarefas selecionadas e apresentadas na sala de aula, mostram em possível caminho para levar os estudantes de quinto ano pensar multiplicativamente; onde cada tarefa foi elaborada a partir das ideias de proporcionalidade direta e estabelecida como instrumento potente que médio entre as estudantes e o objeto de conhecimento a multiplicação.

## *DEDICATORIA*

*A mi familia quien me acompañó en este largo proceso, a mi madre quien estuvo ahí cada mañana para recordarme lo importante que es cumplir cada meta propuesta, a mi hermano que estuvo ahí cada noche para escuchar mis lamentos y dificultades.*

*A mi querido novio John David quien sostuvo mi mano en este andar, fue un motor de motivación y quien me enseñó que con esfuerzo y dedicación todas las metas se pueden alcanzar.*

*A mi compañera Sara mejía quien con paciencia y buenas ideas permitió que este proceso tuviera un buen final.*

*Liliana Quintero López*

*A todas aquellas personas que estuvieron de una u otra manera en este proceso que culmina. En especial a mi madre y mi hermana que con sus acciones lograron hacerme comprender que este andar siempre va a estar rodeado alegrías, triunfos y de tropiezos.*

*A mi compañera Liliana Quintero que estuvo animándome, apoyándome y acompañándome en el arduo camino que un día iniciamos y que hoy felizmente concluimos con el presente trabajo de investigación.*

*Y finalmente a la persona que en este momento tengo a mi lado, que ha sido un apoyo incondicional y me ha mostrado que sólo cuando se tiene un camino trazado es posible llegar a él por más oscuro que se encuentre.*

*Sara María Mejía Vasco*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Nuestros más sinceros agradecimientos:*

*A la institución educativa José Antonio Ricaurte por abrirnos sus puertas y permitirnos hacer parte del proceso de formación de las estudiantes y en especial por permitirnos hacer un alto en el camino y reflexionar sobre nuestro quehacer docente.*

*A las estudiantes de los grados quintos por su participación y entusiasmo en cada clase, por habernos dejado sembrar y cosechar ideas que finalmente tuvieron resultado, por brindarnos un poco de cariño y en especial por haber logrado que cada día tuviésemos un motivo más para ir al aula.*

*A nuestros asesores Denis Vanegas y Gilberto Obando que con sus cuestionamientos e ideas lograron que hoy se entregue el fruto de un largo camino recorrido, y en especial agradecerles por habernos hecho entender que sólo con conocimientos teóricos e ideas claras es posible cuestionar y cambiar lo que ya está escrito.*

*A todos los maestros que hicieron parte de nuestro proceso de formación como licenciadas en educación básica con énfasis en matemáticas, que con sus saberes, acciones, ideas, cuestionamientos, palabras y gestos; hoy han hecho de nosotras unas personas interesadas en la educación y en cuestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en la escuela.*

*Finalmente al profesor Oriosvaldo de Moura de la Universidad de São Paulo y a su grupo de orientandos, por escuchar nuestros avances y hacernos parte de sus discusiones, por permitirnos ampliar nuestros conocimientos y por sus observaciones para nuestro trabajo de grado.*

## CONTENIDO

|   |    |
|---|----|
| LISTA DE ILUSTRACIONES .....  | 10 |
| LISTA DE ANEXOS .....   | 11 |
| INTRODUCCIÓN.....   | 1  |
| CAPITULO 1: INICIANDO EL CAMINO .....   | 3  |
| JUSTIFICACIÓN .....   | 3  |
| GENERALIDADES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO RICAURTE .....  | 9  |
| <i>La comunidad</i> .....   | 9  |
| <i>Modelo pedagógico</i> .....  | 10 |
| <i>Objetivo general del área de matemáticas desde el PEI y el Plan de Área de la Institución Educativa Antonio Ricaurte</i> ..... | 11 |
| <i>Sistema de evaluación y promoción de estudiantes (SIEPE)</i> .....   | 11 |
| <i>El PEI en la realidad educativa</i> .....  | 12 |
| <i>El Plan de área y las clases</i> .....   | 13 |
| EL CAMINO HACIA NUESTRA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....   | 14 |
| METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN .....  | 17 |
| Investigación cualitativa .....   | 17 |
| Orientaciones metodológicas.....  | 18 |
| Estudio de caso.....  | 25 |
| CAPÍTULO 2: EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN A PARTIR DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.....                               | 28 |
| LO OCURRIDO EN EL AULA .....  | 32 |
| <i>Tarea 1: Jugando con Agua</i> .....  | 32 |
| <i>Tarea 2: Agua Azucarada</i> .....  | 33 |
| ¿QUÉ OCURRIÓ CON LAS TAREAS?.....   | 33 |
| TAREA 1: .....  | 34 |
| TAREA 2.....  | 44 |
| CAPITULO 3: ¿QUÉ EMERGIÓ? .....   | 71 |
| LA IMPORTANCIA DE LA MEDIDA.....  | 71 |
| DE LAS RELACIONES CUALITATIVAS A LAS RELACIONES CUANTITATIVAS.....  | 77 |
| LAS TAREAS DE PORPORCIONALIDAD DIRECTA EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN .....   | 82 |
| REFERENCIAS.....  | 89 |
| ANEXOS .....  | 91 |

## LISTA DE ILUSTRACIONES

|  |    |
|--|----|
| ILUSTRACIÓN 1: PANTALLAZO APPLET DE NLVM .....   | 6  |
| ILUSTRACIÓN 2: REGISTRO DE PUNTOS DEL JUEGO DE LA RANA.....                                | 7  |
| ILUSTRACIÓN 3: RESPUESTA A UNO DE LOS PROBLEMAS DE VISITA AL ZOOLOGICO .....               | 14 |
| ILUSTRACIÓN 4: REGISTRO DE LOS PUNTOS DEL JUEGO DE LA RANA .....                           | 15 |
| ILUSTRACIÓN 5: DISEÑO METODOLÓGICO .....   | 19 |
| ILUSTRACIÓN 6: APRENDIENDO JUNTOS .....  | 31 |
| ILUSTRACIÓN 7: VASOS .....   | 32 |
| ILUSTRACIÓN 8: ANALISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA.....                                    | 34 |
| ILUSTRACIÓN 9: RESPUESTA DEL EQUIPO 1 .....  | 35 |
| ILUSTRACIÓN 10:RESPUESTA DEL EQUIPO 2.....   | 35 |
| ILUSTRACIÓN 11: JUGANDO CON AGUA.....  | 35 |
| ILUSTRACIÓN 12: RESPUESTA DEL EQUIPO 1 .....   | 37 |
| ILUSTRACIÓN 13: RESPUESTA DEL EQUIPO 3.....  | 37 |
| ILUSTRACIÓN 14: RESPUESTA DEL EQUIPO 2.....  | 39 |
| ILUSTRACIÓN 15:RESPUESTA DEL EQUIPO 2.....   | 39 |
| ILUSTRACIÓN 16: REPRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN HECHA POR EL GRUPO DE LA ESTUDIANTE 1 ..... | 42 |
| ILUSTRACIÓN 17 LA RECETA .....   | 43 |
| ILUSTRACIÓN 18: AGUA AZUCARADA .....   | 45 |
| ILUSTRACIÓN 19: REGISTRO AGUA AZUCARADA EQUIPO 1 .....                                     | 49 |
| ILUSTRACIÓN 20: REGISTRO AGUA AZUCARADA EQUIPO 2 .....                                     | 49 |
| ILUSTRACIÓN 21: REGISTRO AGUA AZUCARADA EQUIPO 3 .....                                     | 50 |
| ILUSTRACIÓN 22: GUÍA AGUA AZUCARADA .....  | 51 |
| ILUSTRACIÓN 23: GUÍA AGUA AZUCARADA .....  | 51 |
| ILUSTRACIÓN 24: GUÍA AGUA AZUCARADA .....  | 52 |
| ILUSTRACIÓN 25: GUÍA AGUA AZUCARADA .....  | 52 |
| ILUSTRACIÓN 26: GUÍA AGUA AZUCARADA .....  | 52 |
| ILUSTRACIÓN 27: PRESENTACIÓN PROPUESTA DE REFRIGERIO.....                                  | 58 |
| ILUSTRACIÓN 28 PROPUESTA DE REFRIGERIO.....  | 59 |
| ILUSTRACIÓN 29 PROPUESTA DE REFRIGERIO.....  | 59 |
| ILUSTRACIÓN 30 PROPUESTA ENSALADA DE FRUTAS .....  | 60 |
| ILUSTRACIÓN 31 PROPUESTA BURRITOS.....   | 60 |
| ILUSTRACIÓN 32 ENSALADA DE FRUTAS.....   | 63 |
| ILUSTRACIÓN 33 TRABAJO DE LAS ESTUDIANTES.....   | 63 |
| ILUSTRACIÓN 34: JUGANDO CON AGUA.....  | 69 |

## LISTA DE ANEXOS

|  |     |
|--|-----|
| ANEXO 1: VISITA AL ZOOLOGICO .....                 | 91  |
| ANEXO 2: PLANEACIÓN JUGANDO CON AGUA.....          | 96  |
| ANEXO 3: PLANEACIÓN EL JUEGO DE LA RANA.....       | 98  |
| ANEXO 4: PLANEACIÓN AGUA AZUCARADA .....           | 102 |
| ANEXO 5: PLANEACIÓN APRENDIENDO JUNTOS .....       | 105 |
| ANEXO 6: PLANEACIÓN COLOREADO DE SUPERFICIES.....  | 107 |
| ANEXO 7: PERMISOS DE LOS PADRES DE LAS NIÑAS ..... | 108 |

## INTRODUCCIÓN

Durante el camino recorrido como estudiantes de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas se reflexionó sobre elementos conceptuales pedagógicos y didácticos del quehacer del docente de matemáticas. Luego se dio inicio al seminario de práctica pedagógica donde se estudiaron y analizaron conceptos y concepciones metodológicas y pedagógicas para desarrollar una propuesta de enseñanza en la institución educativa, que permitiera poner en correspondencia los elementos teóricos con la realidad de la escuela.

El desarrollo de la práctica pedagógica se realizó en la Institución Educativa Antonio Ricaurte ubicada en el barrio Belén Rincón. El primer semestre se estudiaron todos los documentos rectores de la institución y se observaron las clases del docente cooperador; en los semestres siguientes se inició con la intervención en las clases de matemáticas con el grado quinto donde se presentaron diversas tareas. Algunas orientaron el camino hacia nuestra pregunta de investigación y las otras fueron pensadas y diseñadas después de definir la pregunta de investigación, ahora el interés se ubicó en la multiplicación a partir de situaciones de proporcionalidad directa.

En este documento se reporta todo el proceso que se realizó en la institución educativa teniendo como objeto de estudio el pensamiento multiplicativo. El capítulo uno inicia con una breve descripción de algunos elementos del centro de práctica y cómo éstos se ven reflejados en la realidad educativa, luego se narra el camino que permitió llegar a la pregunta de investigación centrada en la importancia de las tareas de proporcionalidad directa para mediar el aprendizaje de la multiplicación y enmarcada en la teoría de la actividad; completando este capítulo se incluye la metodología de investigación, que responde a un enfoque de tipo cualitativo, donde la información se recolectó en grabaciones de audio, registros que las estudiantes hacían bajo la orientación de las tareas y los diarios de campo en los que se narraba lo ocurrido en cada clase.

El capítulo dos muestra las evidencias recolectadas en tres tareas llevadas al aula: jugando con agua, agua azucarada y aprendiendo juntos, las cuales fueron desarrolladas durante un periodo de tiempo de un año y medio. Allí, todos los episodios se presentan en diálogo con los elementos teóricos, se resalta la voz de las estudiantes ubicando en ellas las diferentes situaciones, que fueron analizadas a la luz de los objetos de conocimiento, la interacción de los sujetos y los instrumentos. La primera tarea preparó el camino para las tareas de proporcionalidad directa, permitió el estudio del conjunto de los números racionales, reveló la necesidad de medir y la importancia de los instrumentos que serían de nuevo protagonistas en la tarea agua azucarada. A partir de la segunda y tercera tarea se muestran los avances de las estudiantes a lo largo del proceso, cómo ellas alcanzan a través de su actividad matemática un pensamiento multiplicativo.

En el último capítulo se presentan, las categorías emergentes, y las consideraciones finales; para la primera parte se establecieron tres categorías emergentes que fueron nombradas como: la importancia de las medidas en la actividad matemática de las estudiantes, de las relaciones cualitativas a las relaciones cuantitativas y las tareas de proporcionalidad directa en el aprendizaje de la multiplicación. En la segunda parte del capítulo se incluyen conclusiones y recomendaciones que podrían orientar futuras investigaciones.

## CAPITULO 1: INICIANDO EL CAMINO

### JUSTIFICACIÓN

En los últimos años se han realizado varias investigaciones tanto a nivel internacional como a nivel nacional centradas en la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. A nivel Internacional está la tesis de doctorado de Ana Ruth Stare (São Paulo, 2010) “A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino” ella centra su investigación en tres elementos: el primero el proceso de enseñanza-aprendizaje, el segundo la relación profesor-alumno-conocimiento y por último la noción de multiplicación. Con relación a la enseñanza de la multiplicación ella expresa, entre muchas de sus ideas que:

Para muchos profesores, la enseñanza de la multiplicación (también de las demás operaciones) pretende básicamente el dominio del algoritmo convencional y su posterior aplicación para resolver problemas. De esa forma, se espera que los alumnos dominen las tablas de multiplicar (hasta el 10) al comienzo de la enseñanza fundamental, este dominio pasa a ser tratado como un pre-requisito para la utilización del algoritmo de la multiplicación y de la división. (Stare, 2010, p.67)

Con relación a los trabajos de investigación que se han realizado a nivel nacional están dos trabajos ubicados en la facultad de educación de la universidad de Antioquia. La tesis de maestría de la profesora Olga Botero (2006) “Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación” y la tesis de Monly Torres (2013) “Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional”. La primera trasciende el modelo tradicional de la multiplicación como suma de sumandos iguales aportando elementos conceptuales y metodológicos para la conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones problema que permitan al estudiante interactuar con la variación simultánea entre

cantidades. Y la segunda analiza las formas de acción de los estudiantes al tratar situaciones problema de tipo multiplicativo en términos del análisis relacional tipo función.

Ambas buscan ampliar el pensamiento multiplicativo y trascender el modelo inicial de multiplicación que es enseñado en la escuela. Resguardan una nueva mirada de la multiplicación en la que se consideran dos espacios de medida, la unidad como cantidad explícita y la correlación entre pares de cantidades.

Reconocen cómo la escuela aún no ha logrado ir más allá de la enseñanza de la multiplicación como una suma reiterada, donde se asume que el estudiante ha aprendido a multiplicar porque aplica correctamente el algoritmo, tal como lo expresa Torres, 2013

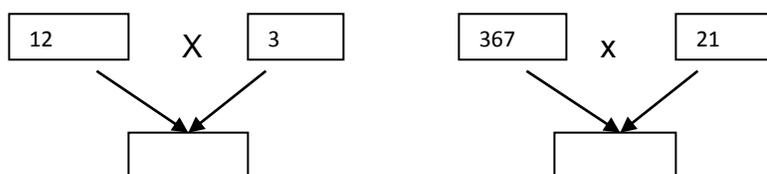
El tratamiento que se le ha dado a la multiplicación en la escuela, en la mayoría de los casos, se ha reducido a su enseñanza como una suma reiterada, al aprendizaje de un algoritmo y a la memorización de las tablas de multiplicar, (Valencia & Gómez, 2010), dejando a un lado el significado de la multiplicación en la resolución de situaciones de tipo multiplicativo y la relación de la multiplicación con otros conceptos matemáticos, como la razón, la proporción y la proporcionalidad. (p.10)

Lo que presentan estas tres autoras, se evidenció en la primera parte del proceso de práctica donde se observó y analizó lo que las niñas del grado cuarto hacían. Ellas centraban su actividad matemática en la utilización constante del algoritmo y la resolución de problemas matemáticos a partir de una única vía de solución, la suma de sumandos iguales. Es decir, buscaban resolver cada tarea por medio de conteos, lo cual muestra un pensamiento basado exclusivamente en la adición, no lograban poner en correspondencia dos familias de cantidades y no había consciencia de las cantidades ni de la variación entre ellas.

Para ilustrar mejor lo anterior, se trae a colación lo realizado en una de las clases que se observó, así como la actividad matemática de las niñas en algunas tareas

llevadas por las maestras en formación. Con relación a la clase, el profesor propone en el tablero el siguiente ejercicio:

“Encuentra el valor de las siguientes operaciones”



$$\begin{array}{r}
 12 \times \text{factor} \\
 3 \text{ factor} \\
 \hline
 36 \text{ producto}
 \end{array}$$

Cuando el profesor terminó de escribir las multiplicaciones, decide realizar la primera e inicia preguntando ¿Cuáles son los términos de la multiplicación? La hace a un lado (la escribe en términos del algoritmo, tal como se ilustra en la parte superior) y pregunta, ¿cuánto es 3x2? y ¿cuánto es 3x1?, allí las niñas responden en conjunto. Luego expresa “como hice esa, hacen las otras pero deben de aprenderse las tablas”

Aquí se observa como el maestro asume que las niñas multiplican porque saben las tablas de multiplicar y porque resuelven los ejercicios de tipo algorítmico, sin detenerse a pensar que aprenderse las tablas de multiplicar, no garantiza que se estén comprendiendo las relaciones que se involucran en ella. Es decir, “un niño puede saber las tablas de multiplicar y utilizar correctamente el algoritmo enseñado por el profesor sin comprender las relaciones involucradas en esa operación” (Stare, 2010, p.67)

De igual manera, se observó en los cuadernos de las niñas, que para dar inicio a una temática escriben primero los procedimientos en forma de receta que hay que seguir para operar determinados números o para encontrar un valor,

posteriormente aparece un ejemplo para dar claridad a los pasos dados por el docente y finalmente ejercicios donde aplican lo visto en clase.

También se evidenció en una de las tareas llevadas por las maestras en formación, como las niñas reclaman los algoritmos, están acostumbradas que para cada operación hay una receta que seguir y se sienten más cómodas haciendo uso de los procedimientos que habitualmente usan. Lo cual es reflejado en una de las clases donde se les presentó a las estudiantes la multiplicación de fracciones de manera gráfica usando un applet de la nlvm (biblioteca nacional de manipuladores virtuales) [http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_194\\_g\\_2\\_t\\_1.html?from=topic\\_t\\_1.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_194_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html) donde surgió el siguiente diálogo:

- Estudiante: «Profe y por qué mejor no explica eso de la otra manera....».
- Maestra en formación: «¿Y cuál es la otra manera?».
- Estudiante: «Con números, como hacemos en la suma y en la resta....por ejemplo, para sumar  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$  hago unas cositas y luego a la respuesta».

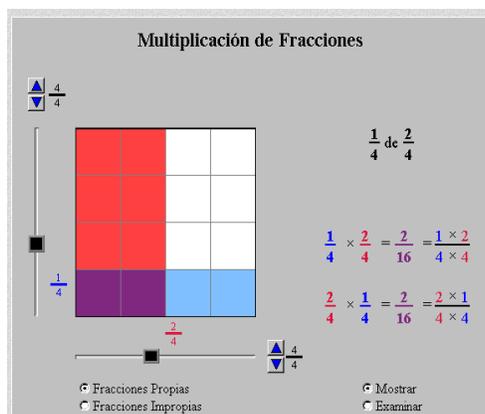


Ilustración 1: Pantallazo applet de nlvm

Cuando la niña menciona “cositas” hace referencia a varios pasos que ella debe seguir para sumar o restar fraccionarios, como si fuera una receta.

Con lo anterior, se ve como las estudiantes muestran una tendencia en buscar soluciones a las tareas presentadas a través de cálculos y procedimientos mecánicos que fueron enseñados por el docente, tal como lo expresa Torres (2013) “Si el profesor sólo nombra un algoritmo (generalmente el canónico) al estudiante para resolver una multiplicación, éste se ve obligado a seguir dicho esquema y a no pensar en otras alternativas que hagan posible una solución” (p.16)

Continuando con la observación de la actividad matemática de las estudiantes, se retoma un momento de la tarea “el juego de la rana” (ver anexo 3) donde las

estudiantes reunidas por equipos debían lanzar 12 fichas en una canasta pintada con cuatro colores, a cada color le correspondía un puntaje diferente y al final debían registrar los puntos obtenidos y definir la compañera ganadora de su respectivo equipo de trabajo.

En dicha tarea, un equipo, para indicar que nueve fichas cayeron en el color que asigna ocho puntos suman  $8+8+8\dots$  las nueve veces, tal como se muestra en la ilustración 2. Aquí se observa como la vía de solución de las estudiantes, para dar cuenta de la cantidad de puntos fue la suma de sumandos iguales. Se evidenció, cómo ellas resolvían la tarea a partir de sus conocimientos previos, lo que implicó que usaran la suma

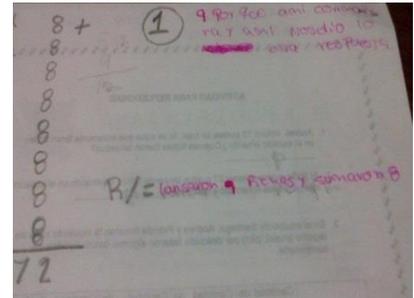


Ilustración 2: Registro de puntos del juego de la rana

como herramienta para obtener el total de puntos, lo cual es natural asumirlo ya que ellas interpretaron las operaciones matemáticas existentes en el juego a partir de cómo se iban generando los diferentes puntajes; sin embargo, una de las finalidades a lo largo de las intervenciones de las maestras en formación, es que las estudiantes comiencen a emplear herramientas multiplicativas para darle solución a tareas de naturaleza similar.

Lo presentado hasta el momento, refleja cómo las estudiantes buscan como única vía de solución la utilización de sumas repetidas y en algunos casos saben que para resolver un problema, como fue en el caso de la guía del zoológico requieren de una operación ya sea suma, resta, multiplicación o división pero no saben cuál es la que realmente las llevará a la solución. Se observa en ellas, una mirada de la multiplicación como suma de sumandos iguales y un aprendizaje centrado más en lo algorítmico y en la aplicación de reglas, que en la comprensión de la tarea que les permite utilizar la operación. .

Si bien la enseñanza de la multiplicación desde la idea de suma de sumandos iguales y desde la asimilación del algoritmo es importante para generar en las estudiantes un modelo inicial de significación y para avanzar en su asimilación, no es suficiente para dar cuenta de los dos espacios de medida que se relacionan

puesto que ellas en las dos tareas nombradas anteriormente (visita al zoológico-juego de la rana) solamente estarían pensando en una acumulación sucesiva y no en la cantidad de comida por día transcurrido o en el caso de la rana cantidad de fichas que cayeron en un color por el valor de cada color.

Desde esta mirada, es necesario que la multiplicación sea pensada y abordada en el aula de clase a partir de tareas que permitan que el estudiante sea capaz de pensar multiplicativamente, es decir que establezca relaciones entre las cantidades de los dos espacios de medida, que logre establecer una relación de proporcionalidad directa entre las cantidades e inicie en el camino del desarrollo del pensamiento proporcional donde se involucre el sentido de la covariación y el cambio.

También es importante considerar en este camino las características especiales de la proporcionalidad como la correlación positiva y lineal que limitan las situaciones y las transforman en situaciones de proporcionalidad directa que muestran la correspondencia con un real sentido de la multiplicación y de lo que es pensar multiplicativamente. Además, generar espacios donde a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes emerja el conocimiento matemático, a través de tareas donde la actividad de aprendizaje se vea fortalecida por lo que el estudiante conoce del mundo y por las interacciones entre pares.

## **GENERALIDADES DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO RICAURTE**

Durante el proceso de la práctica pedagógica, se tuvo la oportunidad de conocer un poco más la Institución Educativa, a través de la lectura de los documentos rectores, tales como el PEI y el plan de área de matemáticas, los cuales permitieron conocer la razón de ser de la institución, el camino a recorrer a largo plazo y su vinculación con la comunidad, además identificar el perfil del egresado que la institución pretende formar y orientar no sólo a nivel académico, sino también a nivel social y cultural.

Para precisar mejor lo anterior, es oportuno compartir algunos de estos elementos que permitan tener un panorama más amplio del lugar donde se recorrió una buena parte del camino y donde se lograron aprender, reformular y hasta cambiar muchas formas de ver y de pensar la realidad educativa.

Es por ello que se inicia la descripción de estos elementos con la ubicación de la institución y las características de la comunidad que la rodea; posteriormente se resaltan de forma textual algunos de sus elementos filosóficos, como lo son el modelo pedagógico y los objetivos de matemáticas que se describen en el plan de área y finaliza esta parte retomando algunos elementos del sistema de evaluación.

La Institución Educativa Antonio Ricaurte es una institución de carácter oficial localizada al sur-occidente de la ciudad de Medellín en la comuna 16, Barrio Belén Rincón. Atiende una población de estrato socio-económico 1, 2 y 3; es de carácter femenino en la mañana (536 estudiantes) y mixto en la tarde (506 estudiantes). Ofrece los niveles de Preescolar y Básica Primaria en la jornada de la mañana, y Básica Secundaria y Media Académica en la tarde.

### ***La comunidad***

El barrio Belén Rincón se encuentra ubicado al sur-occidente de la ciudad de Medellín, en la comuna 16 con niveles socio-económicos del 1 hasta el 5. Éste no es ajeno a los problemas sociales y económicos por los cuales atraviesan los

barrios y ciudades de nuestro país. La Institución educativa se encuentra ubicada en una frontera invisible, lo que ha generado dificultades tanto para el colegio como para la comunidad, como dice el PEI “hay esporádicos brotes de conflicto” que son mortales y ocasionan desplazamiento individual y familiar. Otro problema que atraviesa a esta comunidad es la descomposición familiar, los núcleos familiares no están conformados por padre y madre, sino por otros familiares como abuelos y tíos, muchos padres trabajan durante el día y dejan a los niños a cargo de familiares y amigos.

### ***Modelo pedagógico***

La Institución Educativa Antonio Ricaurte, acorde con sus elementos filosóficos, adopta el modelo pedagógico humanista-desarrollista, pues éste tal como es expresado en el PEI permite, primero la posibilidad de favorecer por medio de dinámicas e interacciones dentro y fuera del aula, el desarrollo, la formación en valores y la autonomía de los estudiantes y segundo permite responder al propósito de la institución.

La institución educativa es consciente que adoptar este modelo no es nada fácil, ya que éste implica que el aprendizaje, la relación maestro-alumno, la evaluación, el currículo y los ambientes de aprendizaje, se piensen y se consideren de acuerdo a los enfoques teóricos planteados por autores como: Dewey, Freinet, Montessori y Decroly.

En conclusión, la Institución Educativa Antonio Ricaurte expresa en el PEI que adopta el modelo humanista-desarrollista porque ve en él la oportunidad de formar el tipo de estudiante que establecen en la misión, la visión, los principios y la filosofía institucional. Además, de la formación de conocimientos, competencias, valores y actitudes en los estudiantes, que les ayuden para la vida.

**Objetivo general del área de matemáticas desde el PEI y el Plan de Área de la Institución Educativa Antonio Ricaurte**

| OBJETIVO GENERAL DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS  |   |
|---|---|
| Desde el PEI  | Desde el Plan de Área   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Propiciar en la comunidad educativa la capacidad lógica y analítica, para argumentar, interpretar, proponer y solucionar situaciones problemáticas de su entorno sociocultural.</li> <li>• Crear espíritu de investigación por la ciencia y la tecnología, como elementos concomitantes para la búsqueda del conocimiento y la integridad espiritual del ser en todas sus dimensiones, de acuerdo con la visión y misión de la institución.</li> </ul> | <p>Generar espacios de análisis y crítica reflexiva en el desarrollo de habilidades intelectuales, apropiándose de procesos de pensamiento, y las competencias propositiva, argumentativa e interpretativa, que generen en el estudiante autonomía frente a la solución de diferentes situaciones problema que se le presente en la vida.</p> |

(Proyecto Educativo Institucional (P.E.I), 2004)

**Sistema de evaluación y promoción de estudiantes (SIEPE)**

En el PEI se estipula que la Institución Educativa Antonio Ricaurte adopta el Sistema de Evaluación y Promoción de Estudiantes (SIEPE), en concordancia con la estructura y los requerimientos señalados en el artículo 4° del decreto 1290 de 2009. Este sistema de evaluación determina las reglas para evaluar el aprendizaje y la promoción de los estudiantes desde el grado primero hasta once y la valoración de los procesos académicos institucionales.

Con el fin de identificar las necesidades de mejoramiento de los desempeños de los estudiantes, expresan desde el PEI que es “necesario que la evaluación se constituya en una herramienta que permita hacer el seguimiento oportuno y eficaz, con el fin de efectuar un análisis sobre el desarrollo del estudiante en su proceso de formación académica, personal y social”.

### ***El PEI en la realidad educativa***

La observación de los documentos institucionales, de las clases de matemáticas, y la contrastación entre ellos permitió construir algunas reflexiones finales sobre la Institución Educativa Antonio Ricaurte con respecto a la formación de los estudiantes y en especial con relación a la educación matemática.

Las clases han permitido preguntarse por ¿dónde está ese sujeto activo, constructor de su propio proceso de aprendizaje?, ¿dónde quedó ese docente que proporciona oportunidades que estimulen y favorezcan el encuentro con el saber?; cuestionamientos que surgen a partir de lo observado en la realidad educativa, donde se refleja un estudiante que adquiere un rol pasivo dentro de su formación, y un docente que ha centrado su enseñanza en dar definiciones y proponer ejercicios para abordar la temática explicada.

Asimismo, no se brindan espacios que estimulen al estudiante a que argumente, interprete, busque posibles alternativas de solución y las dé a conocer en el grupo. Puesto que la clase se ha centrado en una enseñanza de tipo memorístico pensada en la comprensión y aplicación de algoritmos y definiciones. Frente a lo anterior es pertinente preguntarse ¿qué entienden los docentes por una enseñanza como acto puro de acción donde los estudiantes realizan actividades a través de experiencias directas y situaciones concretas?, ¿cómo se están pensando esas experiencias directas y esas situaciones concretas?

Otro elemento importante a resaltar es precisamente que el modelo humanista-desarrollista tal como lo enuncia el PEI nace en oposición a la escuela tradicional ubicando al alumno como agente activo y al maestro en el rol de orientador. Sin

embargo en las aulas de clase se refleja una interacción maestro-alumno centrada en un maestro que permanece la mayor parte del tiempo haciendo uso del tablero, las estudiantes del cuaderno, en ninguna ocasión se ve al maestro acercarse a las alumnas con la finalidad de cuestionarlas sobre lo que están haciendo y pensando.

### ***El Plan de área y las clases***

Con relación al Plan de Área de Matemáticas, en él se propone una amplia variedad de contenidos. Si bien es necesario que los estudiantes conozcan las distintas temáticas que conforman el cuerpo de saber matemático, tienen mayor importancia los procesos que se desarrollen alrededor de dichos contenidos y las habilidades que allí se potencien. Además, cabe preguntarse si realmente tantos temas logran estudiarse, conociendo los inconvenientes de tiempo con los que se enfrenta una institución educativa.

## EL CAMINO HACIA NUESTRA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

En los dos primeros semestres que se asistió al centro de práctica, bajo una mirada reflexiva entrelazada con los elementos teóricos y con el lente puesto en las estructuras multiplicativas, se observó que la actividad matemática de las niñas tanto en las clases como en las intervenciones, reveló dos elementos importantes: el primero el uso de algoritmos y el segundo el uso de la suma para la solución de diferentes situaciones.

Para dar cuenta de dichos elementos, se traen a colación dos evidencias. En la primera de ellas se les presentó a las estudiantes una tarea llamada “Visita al zoológico” (ver anexo 1) que buscaba identificar cómo ellas resolvían problemas de tipo multiplicativo y cómo lograban analizar y usar los datos que les brindaba el problema.

The image shows a student's handwritten solution to a math problem. At the top left is a drawing of an elephant. To its right is the text of the problem: "es un animal herbívoro, que se alimenta de hierbas, hojas, ramas, raíces, frutos y cortezas, según la zona y la época del año. Debido a su gran tamaño, un ejemplar adulto puede ingerir 1120 kilos de alimento en 8 días en la época de sequía, y más de 1600 kilos en la época húmeda, entonces, ¿cuántos kilos de comida consume en un día de época de sequía? y ¿cuántos kilos de comida consume en un día de época húmeda?". Below the text, under the heading "Cálculos", the student has written "1120" and a series of additions: "30+30+30+30+30+30+30+30+30". There are also two long division problems: "1120/8" and "1600/8". Under the heading "Respuestas:", the student has written "EL ELEFANTE COME 30 KG EN UN DIA" and "140 KILOS DE SEQUIA".

Ilustración 3: Respuesta a uno de los problemas de visita al zoológico

En uno de ellos se debía encontrar la cantidad de alimento que come un elefante en un día conociendo la que come en ocho días. Uno de los equipos de trabajo empieza a sumar  $30+30+30\dots$  como se observa en la ilustración 3. Cuando se les pregunta ¿qué esperan encontrar?, ellas responden que “vamos a sumar  $30+30+30\dots$  hasta que llegemos a la cantidad de alimento que el elefante consume en ocho días y si esto pasa, sabremos que la respuesta a la pregunta es que el elefante come 30 kilos en un día”.

Partiendo de dicha respuesta nuevamente se les pregunta ¿si no les da con 30 que van a hacer?, ellas dicen “vamos a intentar con otros números como 40 o 45 hasta que encontremos el que es”. Después de algunas preguntas por parte de las maestras en formación, tales como: ¿de qué otra manera pueden saber la cantidad de comida que come el elefante sin necesidad de ensayar con todos los números?, ¿qué información les está dando el problema? Y ¿qué les están

preguntando?. Dichos interrogantes les permitió entender que es necesario averiguar por la cantidad de comida que el elefante come en un día y para ello utilizan el algoritmo de la división. Allí, se observa como la primera vía de solución que las estudiantes plantean es en términos de sumas de sumandos iguales y a través del tanteo y la estimación. Además se evidencia, como en la comprensión de este problema, las niñas no identifican las dos cantidades que se relacionan, es decir cantidad de comida por día transcurrido, sino que piensan las cantidades como cantidades del mismo tipo que se pueden acumular como única manera de relacionarlas, kilos de comida más kilos de comida, dejando de lado la relación que se establece entre la cantidad de comida que el elefante come en esos ocho días y lo que comerá en un día.

Retomando el juego de la rana (ver anexo 3) mencionado anteriormente, donde las estudiantes debían lanzar 12 fichas en una canasta, que tenían 4 colores con puntaje diferente cada uno y donde cada equipo debía dar cuenta de los puntos y definir un ganador. A continuación se presenta el registro de los puntos que llevaban dos de las estudiantes; la primera de ellas en sus 12 lanzamientos, 9 fichas les cayeron en el color que asignaba 8 puntos, ella suma  $8+8+8\dots$  las 9 veces, cuando se le pregunta si puede conocer el número de puntos de otra manera, utiliza las tablas de multiplicar como instrumento para obtener dicho puntaje; como se puede ver en la ilustración 4, copia la tabla de multiplicar del 8 hasta llegar al resultado buscado (es común verlas escribir las tablas de multiplicar completas aunque necesiten sólo los resultados del final; esto más como proceso memorístico). Aquí es evidente el uso de algoritmos como un elemento base para dar solución a la tarea presentada.

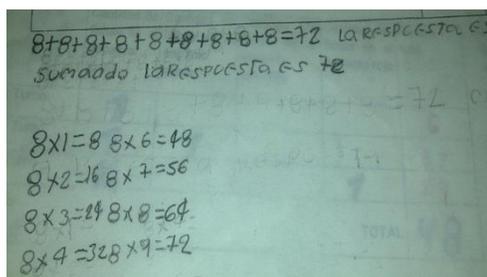


Ilustración 4: Registro de los puntos del juego de la rana

A partir de lo observado se empezaron a proponer tareas con las que se buscaba que las estudiantes trascendieran el uso de los algoritmos y la utilización de la suma de sumandos iguales como única vía de solución, tal avance consistió en el

hecho de que se asumió la multiplicación no sólo de la forma mencionada anteriormente sino también como una relación entre dos cantidades susceptibles de ser medidas bien sea de forma discreta o continua, estableciéndose una correspondencia entre estas cantidades, lo cual no es otra cosa que un análisis proporcional, es decir, el estudiante será capaz de establecer la variación lineal entre los cambios de una magnitud con respecto a otra.

Fue así, como surgió el interés por el aprendizaje de la multiplicación, estableciendo como mediador principal las tareas de proporcionalidad directa; logrando que las estudiantes trascendieran esa mirada de la multiplicación como suma de sumando iguales, puesto que la suma repetida solamente permite que se establezca un solo espacio de medida y que haya una acumulación de cantidades, y por tanto no se hace evidente la relación entre las cantidades de los dos espacios de medida como ocurre con la multiplicación.

Lo anterior se hace explícito dentro del trabajo de investigación a partir de la siguiente pregunta:

**¿De qué manera las tareas de proporcionalidad directa median el aprendizaje de la multiplicación en estudiantes de quinto grado?**

Pregunta que permitió analizar la actividad matemática de las estudiantes de 5°B a partir de tres elementos: los objetos de conocimiento, los instrumentos y las interacciones entre los sujetos, camino que estuvo siempre orientado bajo el objetivo:

**Analizar cómo las tareas de proporcionalidad directa median el aprendizaje de la multiplicación en estudiantes de quinto grado.**

## METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

### Investigación cualitativa

En vista de que el presente trabajo de investigación está pensado desde un enfoque sociocultural, donde se asume el conocimiento matemático como una construcción social y donde desde la teoría de la actividad se comprende la “dialéctica entre lo individual y lo social” (Obando, 2011, p. 44). Surge el deseo por indagar de qué manera las tareas de proporcionalidad directa median el aprendizaje de la multiplicación a partir de la investigación cualitativa, puesto que ésta

Corresponde a problemáticas sustantivas, que son aquellas que emergen del análisis concreto de un sector de la realidad social tal cual ella se manifiesta en la práctica y no a partir de conceptualizaciones previas realizadas desde alguna de las disciplinas ocupadas del estudio de lo humano. En tal sentido, la selección de los tópicos de investigación y la conceptualización de los mismos, sólo puede hacerse a través del contacto directo con una manifestación concreta de una realidad humana, social y cultura (Sandoval, 2002, p.115)

Allí se opta tal como lo expresa Sandoval (2002) por una investigación orientada hacia el descubrimiento de la realidad y no hacia la comprobación, a través de la simultaneidad de los procesos que comprenden la realidad. Es decir, en la investigación se apuntó a mostrar cómo a través de las tareas de proporcionalidad directa los estudiantes pueden ver y comprender la multiplicación, de modo diferente a la suma de sumandos iguales.

Bajo esta mirada, el trabajo de investigación se centró en las ideas de Galeano (2007) con relación al estudio cualitativo de caso puesto que éste posibilita abordar lo particular, analizar la información desde la mirada de pocos actores, permite localizar un suceso o aspecto en un espacio y un tiempo definido; asume

la recolección, el análisis y la presentación de la información ya sea de un individuo, grupo o una institución. En otras palabras, el estudio de caso es:

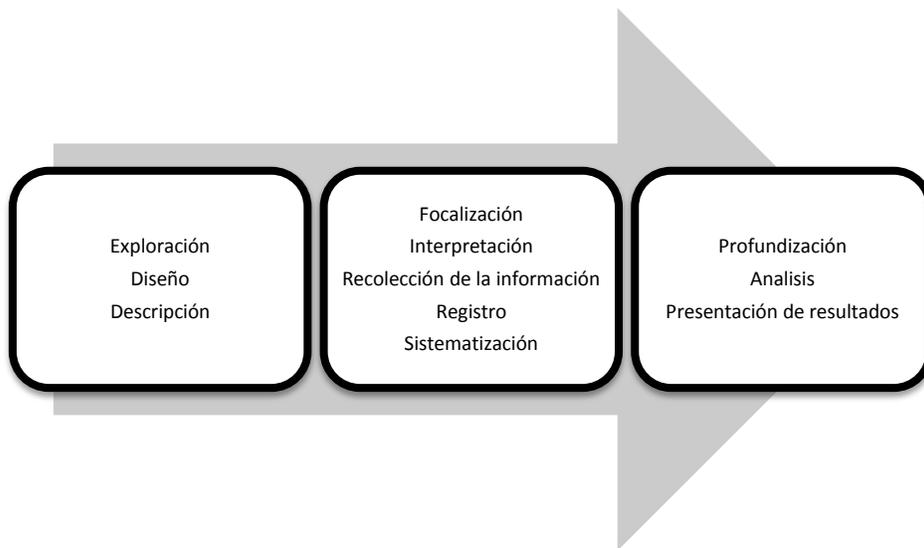
Elegir lo particular y prescindir de lo general. Implica sacrificar la posibilidad de generalizar a contextos amplios, de recoger información sobre numerosos actores, de tener visiones de conjunto sobre situaciones sociales, e incluso de valerse de técnicas de generación de información que involucra directa, intensa y vivencialmente a actores, escenarios y al investigador mismo; implica, de alguna manera, marcos de análisis más específicos y formas particulares de presentación de los resultados, centrados en objetos más definidos en términos espaciales y temporales. (Galeano , 2007, p.67-68)

## **Orientaciones metodológicas**

### Proceso metodológico

El abordaje del diseño metodológico se hizo de forma longitudinal, es decir, se realizó a través del tiempo en un periodo de un año y medio, donde cada tarea se desarrolló en un periodo de dos a tres meses aproximadamente. Es de aclarar, que las tareas que fueron analizadas en este trabajo de investigación tuvieron un espacio de tiempo entre tarea y tarea de un mes, puesto que se hizo necesario que las maestras en formación abordaran algunos temas que el maestro cooperador consideraba que las estudiantes debían asumir para dar cumplimiento a su planeación.

El proceso metodológico se centró en los siguientes componentes: Diseño, desarrollo del estudio, interpretación, análisis y presentación de resultados. Con relación al diseño metodológico Galeano (2007) habla de tres momentos tal como se refleja en el esquema.



**Ilustración 5: Diseño metodológico**

En el primer momento se realizó la exploración tanto de la institución y el personal académico, como de sus documentos rectores; es de aclarar que si bien en esta primera fase se tenía el foco en las estructuras multiplicativas y en los grado 5° en los que se llevaría a cabo todo el proceso de investigación, aún no se había seleccionado el caso, el objeto de conocimiento y el planteamiento del problema.

En el segundo momento, luego de que las maestras en formación tuvieron un mayor acercamiento con los dos grupos de trabajo (5°A -5°B), con el maestro cooperador y a partir de las observaciones que realizaron de la actividad matemática de las estudiantes en diversas tareas llevadas al aula, se estableció el objeto de estudio, así como el grupo focal. También se planearon, seleccionaron y organizaron las tareas que se llevarían al aula, como los instrumentos que se utilizarían para la recolección de los datos.

En un tercer momento, se seleccionó el caso y se terminaron de recolectar los datos. Es de aclarar que el análisis de los datos se realizó a la luz de la teoría que se iba abordando, es decir no se esperó hasta el final para iniciar con la indagación de los elementos teóricos, sino que a partir de lo que emergía en el

aula de clase se fueron organizando esos elementos teóricos que daban cuenta y sustentaban lo que allí estaba ocurriendo.

## Diseño

Partiendo de las ideas de Galeano (2007), el diseño implica

La selección y delimitación del caso y la conceptualización del objeto de estudio. Se deben tener en cuenta fundamentos epistemológicos, teóricos y metodológicos que soporten el estudio; plantear objetivos; establecer criterios de selección del caso; identificar el fenómeno o tema y sus características más importantes; elaborar las preguntas de investigación, contextualizar el estudio; analizar su factibilidad y pertinencia; evaluar con qué recursos, definir la técnica para la recolección, sistematización y análisis, y validación de la información y decidir acerca de los participantes y escenarios. (P.73-74)

Basándose en lo anterior, el trabajo de investigación se enfocó bajo la mirada del aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa; donde se analizó la información obtenida de un solo caso, el cual está conformado por tres equipos de estudiantes pertenecientes al grupo 5°B, y cuyo estudio estuvo orientado por la pregunta de investigación:

¿De qué manera las tareas de proporcionalidad directa median el aprendizaje de la multiplicación en estudiantes de quinto grado?

La anterior pregunta presentó a las maestras en formación un objetivo a cumplir en el trabajo de la investigación, el cual se expresa de la siguiente manera:

Analizar cómo las tareas de proporcionalidad directa median el aprendizaje de la multiplicación en estudiantes de quinto grado.

Es de aclarar que el caso seleccionado no fue establecido desde el inicio de la investigación, sino que luego de haber interactuado con los dos grupos durante un periodo de tiempo se llegó a la decisión de asumir como grupo focal las

estudiantes del grado 5°B pues éstos además de tener una actitud positiva hacia las tareas de matemáticas, tenían una adecuada disciplina, permitiendo que las clases se desarrollaran de la mejor manera. Al centrar la mirada específicamente en ese grupo, se observó que allí algunos equipos eran más participativos y se mostraban más interesados por compartir su actividad matemática tanto en los trabajos grupales como en las socializaciones que se generaban al interior de la clase, además eran equipos que con sus preguntas, intervenciones y dificultades lograban generar en el aula un espacio de reflexión con relación a la multiplicación.

### Desarrollo del estudio

Desde las ideas de Galeano (2007) el desarrollo del estudio comprende la recolección de la información, los ajustes que se le establecieron al diseño inicial, el registro de la información, la confrontación de los objetivos y los logros del trabajo investigativo, entre otros elementos que permiten que el lector tenga un panorama amplio sobre la investigación realizada.

Asumiendo lo que la autora expresa sobre la variedad de técnicas para recolectar la información:

Si bien el estudio de caso puede acudir a variedad de técnicas para recolectar información, las más utilizadas son la observación directa en cualquiera de sus modalidades (intensiva, participativa); la entrevista (estructurada, semiestructurada y en profundidad) y la revisión documental. Los diarios de campo y las fichas de contenido hacen parte de las técnicas de registro de información. (Galeano, 2007, p.75)

Las técnicas que se utilizaron para esta investigación fueron específicamente tres: la observación participante y no participante, exploración de la literatura, los diarios de campo y grabaciones de audio en algunas de las clases que las investigadoras asumían como significativas dentro de la investigación.

### Observación no participante

Si bien ésta técnica fue utilizada con profundidad el primer semestre que se asistió al centro de práctica pedagógica, en ella se logró no sólo analizar al maestro de matemáticas encargado de las clases, sino también el ambiente de la clase, la actividad matemática de las estudiantes, las relaciones que se lograban establecer en el aula, entre otros elementos que permitieron tener un panorama general de la vida institucional y el ideal de estudiante a formar.

En general, fue una herramienta, que permitió identificar la realidad de la institución, tal como lo expresa Sandoval (2002) “en ella, el investigador busca ubicarse dentro de la realidad sociocultural que pretende estudiar” (p.139)

### Observación participante, Diarios de campo y Grabaciones de audio

La observación participante permitió a las maestras en formación comprender la actividad matemática de las niñas con relación a la multiplicación, conocer e identificar sus formas de expresar y dar a conocer sus ideas matemáticas, las maneras en las que las estudiantes interactuaban y compartían con el otro y en general la manera cómo interactuaban con los instrumentos.

En conclusión ésta fue utilizada para “definir el problema de investigación con referencia a la vida cotidiana de las personas, una estrategia flexible de apertura y cierre” (Sandoval, 2002, p.140)

Con relación al diario de campo, la observación participante se apoya en él para registrar lo ocurrido en la investigación. Según Sandoval (2002) el diario de campo “no es otra cosa que un registro continuo y acumulativo de todo lo acontecido durante la vida del proyecto de investigación” (p.140). Éste, al igual que las grabaciones logró que se recopilara la actividad matemática de las niñas en cada una de las tareas llevadas al aula, sus comentarios, las discusiones al interior del aula, entre otros elementos que hoy permiten poner en diálogo las teorías abordadas.

### Revisión de la literatura

Según Sandoval (2002), una de las partes más importante dentro del proceso de investigación es la revisión y análisis de la literatura existente. Permite que el investigador oriente cada uno de los elementos teóricos con la investigación en curso. Ésta

Corre en paralela al proceso de recolección de los datos y a los análisis preliminares. Se emplea para ir depurando conceptualmente las categorías que van aflorando al realizar el análisis de la información generada y recogida en el transcurso del proceso de investigación (Sandoval, 2002, p.117)

Para la realización del trabajo de investigación, es de aclarar que desde un inicio la mirada se centró en la teoría de la actividad y en las estructuras multiplicativas, sin embargo a medida que se avanzaba en la investigación y se adquiría una relación más sólida con las estudiantes, empezaron a surgir en la actividad matemática de ellas elementos que llevaron a abordar la multiplicación desde la proporcionalidad directa, tomando como centro la razón, la proporción y la proporcionalidad, así como el conjunto de los números racionales y dentro de la teoría de la actividad, la mediación.

### Análisis, interpretación y presentación de resultados

Asumiendo el análisis como

Un proceso permanente dentro de la investigación, de principio a fin, es secuencial e interactivo (entre los datos y los fundamentos teóricos). Mediante el análisis, el investigador devela categorías y patrones de los datos, en tanto su sentido demuestra en los textos emergentes que sugieren otras relaciones y explicaciones y nuevas formas de análisis, para llegar a la estructuración de un texto integrado (Galeano, 2007, p.75)

Analizar desde la mirada de esta autora, implica escoger alternativas de interpretación de los datos en correspondencia con los propósitos del estudio y a

partir de ello, desarrollar postulados o hacer generalizaciones acerca del caso. “Algunas estrategias usualmente utilizadas para el análisis son: el descubrimiento de categorías que ayudan a clasificar o tipificar la información; la triangulación y confrontación entre datos, y los conceptos y fundamentos teóricos que orientan el estudio” (Galeano, 2007, p.75)

Partiendo de lo anterior, el análisis de esta investigación se realizó a partir del estudio de la actividad matemática de las estudiantes, que es abordada a la luz de tres elementos: los objetos de conocimiento, los instrumentos y las interacciones entre los sujetos; permitiendo así hablar de una triangulación de los datos y por ende como estrategia de análisis el descubrimiento de las categorías que emergieron de la investigación.

Bajo la anterior idea se entenderá la triangulación como:

El proceso que utiliza múltiples percepciones para clasificar significados, mediante la identificación de diferentes formas de ver el fenómeno y la verificación de la repetibilidad de una observación o interpretación (...) El uso de la triangulación implica combinar diversas fuentes (directas y documentales) técnicas de recolección de información (entrevista, encuesta, observación, grupo de discusión, grupo focal, etc.) y técnicas de análisis (de contenido, juicio de expertos, categorización, y tipificación) y que el tipo de participantes permita contrastar la información (Galeano, 2007, p.75-76)

En la presente investigación el lector no encontrará una triangulación explícita al final del trabajo como comúnmente se observa, puesto que se escribió el marco teórico a la luz de los elementos que emergieron en el campo de la investigación, es decir se puso en diálogo esos referentes teóricos tales como: la teoría de la actividad, la multiplicación, la proporcionalidad directa, el pensamiento multiplicativo y la idea de instrumento y artefacto; con lo que se recopiló en el aula de clase. Por tanto es durante todo el capítulo dos y tres que el lector encontrará

un análisis entre los datos que emergieron, los abordajes teóricos y las percepciones de las maestras en formación.

### **Estudio de caso**

Como se expresó anteriormente el grupo focal fueron las estudiantes del grado 5°B y dentro de dicho grupo se asumió un caso conformado por tres equipos de estudiantes, cada equipo con cuatro integrantes, para proteger su identidad nombraremos en adelante a las estudiantes como: estudiante del equipo 1, estudiante del equipo 2 y estudiante del equipo 3, cuando hacen intervenciones en las socializaciones, y cuando sea un registro del equipo los nombraremos como equipo 1,2 y 3 según corresponda. Es de aclarar que en esta investigación, los tres equipos seleccionados no van a hacer objeto de comparación, sino que los aportes, la actividad matemática de las estudiantes de cada uno de ellos y todas las situaciones que se retomaron de las evidencias, permitirán comprender y analizar cómo las tareas de proporcionalidad directa mediaron el aprendizaje de la multiplicación en las estudiantes de quinto grado.

Se seleccionaron estos tres equipos porque mostraron disposición y agrado por cada una de las tareas llevadas por las maestras en formación, fueron equipos muy participativos en cada una de las socializaciones y diálogos que se entablaron al interior del aula (ver en anexo 7, permiso de los padres de familia). Si bien todas las tareas fueron propuestas para todo el grupo, ya que se debía dar cumplimiento con los acuerdos establecidos con el docente cooperador de dirigir el grupo dos veces a la semana en las horas de matemáticas y geometría, el trabajo se centró en observar la actividad matemática de estos tres equipos de trabajo tanto en su dinámica interna, como en cada una de las socializaciones dadas con todo el grupo donde alguna de las compañeras del equipo tomaba la vocería para contar cómo pensaron las tareas.

El estudio de caso, permitió narrar el proceso realizado con las estudiantes del grado quinto, interpretando las interacciones de las niñas, la forma cómo se acercaron al conocimiento, sus comentarios, entre otros elementos que logran mostrar ese abanico de experiencias que surgieron a partir de la pregunta de

investigación. Lo anterior gracias a que el estudio de caso cualitativo se caracteriza por:

El descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos, más que la verificación de hipótesis previamente establecidas (...) centrados más en resultados humanísticos de diferencias culturales, que en resultados de conducta o de diferencias individuales. La información obtenida de los participantes no está sujeta a criterios de verdad o falsedad, sino al contrario de credibilidad que permite interpretaciones desde diferentes lógicas. (Galeano, 2007, p.70)

Dentro del estudio de caso (Stake 1994 citado en Galeano, 2007) habla de tres tipos: el estudio de caso Intrínseco, el estudio de caso instrumental y el estudio de caso colectivo. El trabajo se centró en el estudio de caso Intrínseco puesto que éste permitió comprender y analizar otra mirada de la multiplicación diferente a la que comúnmente la escuela enseña, permitió ver cómo las niñas utilizan otros instrumentos para resolución de sus tareas diferentes al algoritmo. En otras palabras, se elige el estudio de caso intrínseco con el fin de

Lograr una mejor comprensión de un caso particular, no porque éste represente otros casos o ilustre un problema o rasgo particular, sino que, en toda su particularidad y cotidianidad, el caso es de interés en sí mismo. Su propósito no es construir una teoría, sino que se analiza por su valor intrínseco (Galeano, 2007, p.70)

Es de aclarar que el estudio de caso se clasifica en descriptivos e interpretativos de acuerdo con los niveles de desarrollo del estudio y sus resultados. Si bien los primeros aportan información para la investigación de forma detallada pero sin fundamentación teórica, es decir permite recoger información sobre el tema de investigación. El trabajo se centró en el segundo, interpretativo, el cual “contiene descripciones ricas y densas. Los datos de las descripciones se utilizan para desarrollar categorías conceptuales o para ilustrar, soportar o discutir presupuestos teóricos” (Galeano, 2007, p 72).

En otras palabras se utilizó el estudio de caso interpretativo porque éste permite mostrar cómo la idea de multiplicación entendida como suma de sumandos iguales posibilita una concepción inicial, pero no es suficiente para afirmar que el estudiante ya sabe multiplicar. Permite ver cómo desde diversas tareas de proporcionalidad directa, la multiplicación cobra un sentido y un significado diferente, haciendo que las estudiantes amplíen su mirada e inicien en el camino del pensamiento multiplicativo.

## **CAPÍTULO 2: EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN A PARTIR DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA**

En el presente capítulo el lector encontrará el análisis de los datos que emergieron en la investigación, los cuales están pensados a la luz de las bases teóricas y la posición de las maestras en formación con relación a la multiplicación. Es así como la teoría de la actividad, los fundamentos teóricos de la investigación cualitativa, los planteamientos de Galeano (2007) y Sandoval (2002) permitieron realizar una triangulación de los datos que emergieron en las intervenciones y trabajos realizados.

El análisis tal como se expresó anteriormente, se realizó a partir de la posición que tienen las maestras en formación frente al aprendizaje de la multiplicación. Posición que está en concordancia con la idea de Lesh y otros (1988) citado por (Obando 2006, p. 123) los cuales expresan que “iniciar el camino en el desarrollo del pensamiento proporcional, puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de la covariación y comparaciones múltiples y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información”. Allí la multiplicación es pensada desde las tareas de proporcionalidad directa como mediadoras de su aprendizaje, estableciendo que “los mediadores funcionan como medios por los que el individuo recibe acción de factores sociales, culturales e históricos y actúa sobre ellos” (Cole 1996 citado en Daniels, 2003, p.31). Es así como la primera acepción es estudiada a la luz de la segunda en cada una de las intervenciones y desarrollos hechos por las estudiantes, donde se obtiene una visión descriptiva y lógica del aprendizaje de la multiplicación que obtuvieron las mismas en las secciones de clase de la práctica docente.

Con respecto a lo anterior, tratando de ubicar el camino para lograr que las estudiantes amplíen su campo conceptual multiplicativo y trasciendan la mirada tradicional de la multiplicación enseñada como suma de sumandos iguales, se diseñaron y se propusieron varias tareas, tales como; el juego de la rana, aprendiendo con el tangram, coloreado de superficies, contornos y superficies,

rectángulos y más rectángulos, presupuesto y preparación de refrigerio (aprendiendo juntos), jugando con agua y agua azucarada (ver anexos 1-5). Unas orientaron el camino hacia la pregunta de investigación y las otras fueron pensadas y diseñadas para recoger información que permitiera darle respuesta a la misma. Todas fueron diseñadas desde la idea que expresa Obando (2011) que el conocimiento matemático es una construcción de los sujetos a través de la acción mediada por instrumentos.

Es por esto, que es pertinente considerar la Teoría de la Actividad, pues ésta reconoce la importancia del intercambio cultural y aporta elementos para la comprensión de la dialéctica entre lo social y lo individual; destaca la acción, los instrumentos y la agencia social, reconociendo la heterogeneidad de los procesos psicológicos. Es de aclarar que el concepto de actividad surge desde las ideas de Vygotsky, el cual lo incorporó en su teoría cultural-histórica de las funciones psicológicas superiores; las cuales aparecen primero en forma primaria para luego transformarse en formas superiores que obedecen a una intelectualización (realización consciente) y auto-regulación de naturaleza social, adquiridos a través de una mediación, la cual marca la distinción entre las funciones psicológicas elementales y las superiores.

De igual forma, para Vygotsky el sujeto además de conocimientos, se vale de las interacciones con otros individuos para adquirir conciencia de sí mismo. También hace uso de sus experiencias, de conocimientos ya adquiridos y de instrumentos simbólicos, que se convierten en actividades generadoras de conciencia humana.

Expresaba que:

La conducta y la mente del ser humano se deben considerar más en función de acciones intencionales y culturalmente significativas que en función de reacciones biológicas adaptativas. Los objetos de la experiencia humana y, en consecuencia, los objetos de la experimentación psicológica,

deben ser cosas, procesos y sucesos que sean culturalmente significativos, no simples estímulos abstractos. (Kozulin, 2000, p. 26)

Vygotsky estudió la conciencia del hombre en la actividad, pensando el sujeto como un agente individual; por su parte Leontiev pensó el sujeto que se relaciona con los Otros y es en esa relación que constituye conocimientos. Éstas miradas de Leontiev transformaron la idea de mediación, pues para él fue necesario incluir nuevos elementos sociales para dar cuenta de los procesos de mediación; también expresaba que “en la sociedad humana, la relación entre el individuo y el objeto no es inmediata sino que está mediada por la experiencia colectiva y por la división del trabajo” (Kozulin, 2000, p.43)

Bajo esta mirada, se entenderá por actividad el “*conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin*” (Leontiev, 1978 citado en Obando, 2011, p.18) es decir, la actividad se establece a partir de acciones organizadas, estructuradas, orientadas para lograr un objetivo. Entendiendo acción como aquello que implica un acto intencional, es una forma de organización de la experiencia e implica una dialéctica entre la realidad y el individuo que la modifica.

Dentro de la actividad se resalta la relación objeto/motivo hacia la cual se orientan las acciones tanto externas como internas, puesto que permite que se oriente y se genere la actividad y a su vez logra que el sujeto reflexione sobre la actividad misma. También se resaltan los instrumentos que son quienes median las reflexiones externas e internas, en la medida en que comportan los dos lugares, cumplen el papel como instrumento material y posteriormente como instrumento psicológico, tal como lo expresa Kozulin (2000)

Los instrumentos materiales no existen como instrumentos individuales: presuponen un empleo colectivo, una comunicación interpersonal y una representación simbólica. Los instrumentos psicológicos... ocupan una

posición estratégica entre los estímulos del mundo y los procesos psicológicos internos de un individuo. Por lo tanto, los instrumentos psicológicos transforman la interacción no mediada del ser humano con el mundo en una interacción mediada. (p.18)

Es por ello, que el lector encontrará de manera detallada todo lo ocurrido con algunas de las tareas llevadas al aula, haciendo evidente cómo las tareas de proporcionalidad directa mediaron el aprendizaje de la multiplicación a partir de las experiencias y palabras de las estudiantes.

Es de resaltar, que cada una de estas tareas fueron pensadas desde la idea de un sujeto que

Como ser biológico, social e histórico va construyendo sus conceptos y su conciencia en la medida que emerge una necesidad en sus prácticas, necesidad que le permite una relación con diferentes objetos que son socialmente constituidos por las necesidades de los mismos sujetos sociales y que se vuelven conscientes en los sujetos individuales. (Torres, 2013, p.31)



**Ilustración 6: Aprendiendo juntos**

## LO OCURRIDO EN EL AULA

A continuación se presentan dos tareas (Jugando con agua y agua azucarada) que se seleccionaron para analizar y entender los sucesos ocurridos en el aula, a la luz de los elementos teóricos, además se traen a colación algunos momentos de la tarea “aprendamos juntos” la cual se realizó después de agua azucarada. Es de aclarar que en el proceso de esta investigación se ha considerado la tarea como aquel instrumento construido por las maestras en formación, donde se incluyen ejercicios, situaciones problemas, instrucciones, enunciados, entre otros elementos que permiten orientar los procesos de aprendizaje de las estudiantes; la tarea “lleva al planteamiento de la acción mediada por instrumentos; y a uno de los problemas más difíciles: la asimilación de nuevos conocimientos y habilidades” (Davidov, 1981, citado en Montealegre, 2005, p.41).

### ***Tarea 1: Jugando con Agua***

Esta tarea tenía como finalidad que las estudiantes afianzaran el conjunto de los números racionales, haciendo que transitaran por otros conjuntos numéricos, es decir, posibilitarles a las estudiantes espacios en los que trascendieran su pensamiento matemático más allá de los números naturales.

Para el desarrollo de la tarea las estudiantes contaron con cinco vasos desechables de 1, 2, 4 y 16 onzas nombrados con la letra **A**, **B**, **C** Y **D** respectivamente (ver ilustración 7) y con un vaso auxiliar que sirvió para recoger el agua restante. Se les propuso a las estudiantes que en una reunión familiar se estaba repartiendo gaseosa en el vaso **C**, el cual se acabó. Se les pregunta ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

El trabajo se realizó en equipos de 4 estudiantes, donde cada uno debía entregar una hoja con las recomendaciones para seguir repartiendo la gaseosa.



Ilustración 7: Vasos

## **Tarea 2: Agua Azucarada**

Esta tarea fue desarrollada luego de definir la pregunta de investigación, donde se buscaba que las estudiantes iniciaran en el camino de situaciones de proporcionalidad directa para el aprendizaje de la multiplicación.

Para el desarrollo de ésta, las estudiantes se reunieron en equipos de 4 personas, a cada equipo se le entregó una botella plástica de diferente capacidad (150, 200, 250, 300, 350, 400 y 620 ml) vasos de 16, 4, 2 y 1 onzas, los cuales sirvieron para medir la cantidad de agua que necesitarían; además se les repartió una cantidad indeterminada de cubos de azúcar, es decir, cada equipo utilizaba la cantidad de azúcar que creía conveniente.

En presencia de las estudiantes las maestras en formación echaron 6 vasos de agua medidos con el vaso **D** y 24 cubos de azúcar en una botella de gaseosa grande. La indicación que se les dio a las estudiantes era que debían preparar la misma agua azucarada que la preparada por las profesoras pero en botellas más pequeñas y diferentes para cada equipo de trabajo. Se les entregó una tabla de registro donde debían indicar cada uno de los ensayos con la cantidad de agua y azúcar utilizada. La pregunta orientadora del trabajo fue ¿Cómo lograr preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

### **¿QUÉ OCURRIÓ CON LAS TAREAS?**

Cuando se llevaron al aula estas tareas, surgieron diversas situaciones de las que se recogieron evidencias. A continuación se presentará una selección de algunos momentos donde se analizó la actividad matemática de las niñas a la luz de las interacciones entre los sujetos, los objetos de conocimientos y los instrumentos (ver ilustración 8). Los sujetos son las estudiantes, el objeto de conocimiento principal es la multiplicación y el instrumento central son las tareas de

proporcionalidad directa. Mostrando así como en la relación inseparable entre sujeto-objeto es necesaria la presencia de un instrumento que medie en esta relación.

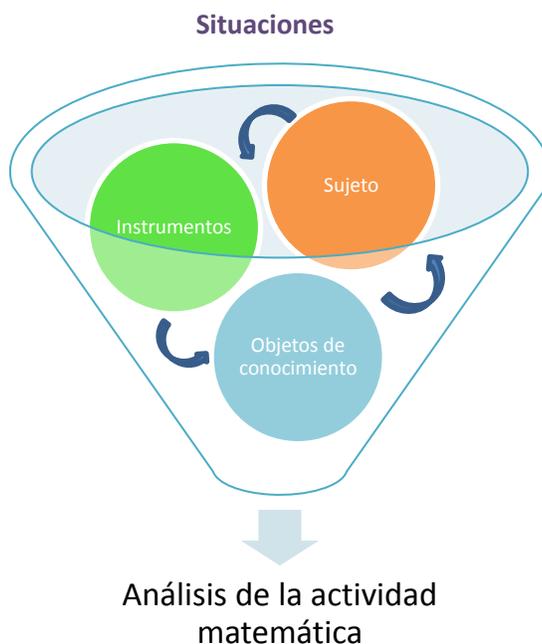


Ilustración 8: Análisis de la actividad matemática

**TAREA 1:**

En un primer momento la actividad que realizaron los equipos fue mirar la cantidad de gaseosa que ocupaba el vaso **C** en los otros vasos. Esta estrategia les permitió encontrar la respuesta con el vaso **A**, **B** y **C**, como se puede ver en las ilustraciones 9 y 10 donde el equipo 1 y el equipo 2 dan la respuesta de forma diferente pero llegan a conclusiones análogas.

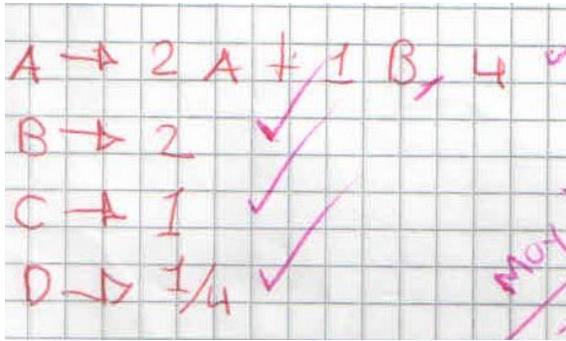


Ilustración 9: Respuesta del equipo 1

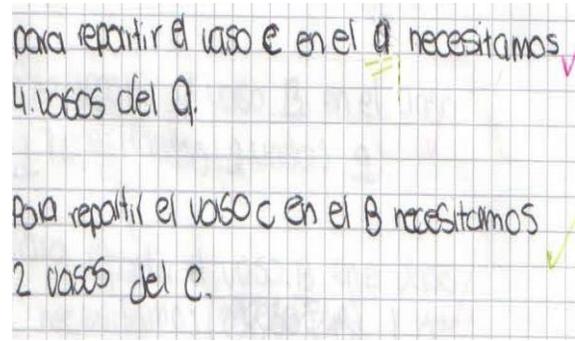


Ilustración 10: Respuesta del equipo 2

En el equipo de trabajo 2, las estudiantes para indicar la cantidad de gaseosa que debían repartir con los vasos **A** y **B** expresaban “muy fácil, porque si yo echo la gaseosa de **C** en el vaso **B** una sola vez me sobra gaseosa en **C**, entonces tengo que volverla a echar y así me dan dos vasos de gaseosa con el vaso **B**”; en el equipo 1, una estudiante para saber cuántos vasos de **A** necesitaba para repartir la gaseosa les dijo a sus compañeras “yo voy sirviendo lo que tiene el vaso **C** en el vaso **A** y ustedes escriben cuántos vasos llenamos”.

Pero para dar respuesta a la cantidad de gaseosa que debían servir utilizando el vaso **D**, las estudiantes del equipo 3 decían “profe es uno, porque mire que el líquido cabe una vez”, “profe debe ser uno, yo no veo como más decir”

Frente a dichas respuestas, pregunta la maestra en formación: ¿sí, el líquido sólo cabe una vez en el vaso, pero necesitamos saber qué cantidad de gaseosa debo de dar en ese vaso? Se quedaron pensando un rato y expresaban que no veían manera de decir qué cantidad. En vista de lo anterior, se les propuso que miraran cuánta cantidad de gaseosa medida con el vaso **C** se necesitaba para llenar el vaso **D**, muchas se pusieron a hacer el experimento otras decían “yo creo que deben de ser cuatro veces, porque mire los vasos” y luego de que verificaron que sí eran cuatro vasos,



Ilustración 11: Jugando con agua

se les dijo ¿qué parte es el vaso **C** del vaso **D**? Gracias a la intervención por parte de las maestras en formación las niñas encontraron fácilmente la relación entre el vaso **C** y el **D**, es decir, lograron establecer primero que la cantidad de gaseosa del vaso **C** cabe cuatro veces en el vaso **D** y partiendo de lo que ellas encontraron se dio el siguiente diálogo (diálogo 1):

Maestra en formación: ¿pero debemos repartir toda esa cantidad de gaseosa?,

Estudiantes: “no, de las cuatro necesitamos una”

Maestra en formación: ¿entonces cuánta cantidad de gaseosa debo repartir utilizando el vaso **D**?

Estudiantes: “profe un cuarto, porque en el vaso echamos cuatro veces y como necesitamos una vez, por eso es un cuarto”

Allí se resalta cómo las decisiones que toma el maestro logran transformar y orientar las acciones iniciales de las estudiantes en experiencias que las lleven por nuevos caminos en los que encuentren soluciones y constituyan conocimiento. Asimismo se reconoce como las niñas le confieren uso e importancia a cada uno de los artefactos llevados para el desarrollo de la tarea, incorporándolos a sus acciones y por ende convirtiéndolos en instrumentos.

Pero ¿qué se entenderá por artefacto e instrumento? artefacto bajo la mirada de (Rabardel 1995 como se citó en Ballestero, 2007) como los objetos pertenecientes a la cultura con los que el sujeto ha tenido acceso durante su desarrollo. Éste posee una importancia especial no tanto desde su naturaleza física, sino porque ha sido creado para un uso determinado y así mismo se ha incorporado a un sistema de fines y propósitos humanos. Sin embargo cuando sufre una transformación de origen humano y es utilizado en situaciones particulares y delimitado por un uso específico a través de una relación instrumental del sujeto con el artefacto, se convierte en un instrumento.

Y por instrumento:

El objeto con el que el hombre realiza la acción laboral, pero también, el objeto social que sintetiza unos modos de empleo, socialmente elaborados. El instrumento aporta en sí un modo de acción socialmente elaborado, es el conjunto complejo de métodos y operaciones socialmente elaboradas y cristalizadas en él. El instrumento es así, una construcción social (material y simbólica), y por tanto una abstracción, una generalización de las acciones culturales cristalizadas en su estructura. (Leontiev, 1978 como se citó en Obando, 2011, p.22)

Retomando el trabajo con las estudiantes se observa cómo en la medida en que ellas usan los instrumentos logran identificar lo que representa un vaso más pequeño comparado con otro más grande, es decir empiezan a reconocer las fracciones unitarias, ejemplo de ello, el equipo 1 expresó solamente la cantidad encontrada (ver ilustración 12), mientras que el equipo 3 decidió escribir además de la cantidad encontrada el procedimiento que realizaron, para mirar la cantidad que debían repartir del **C** con el vaso **D** expresaban “echamos 8 veces el vaso **B** en el vaso **D** pero como era una vez dio un octavo” (ver ilustración 13)

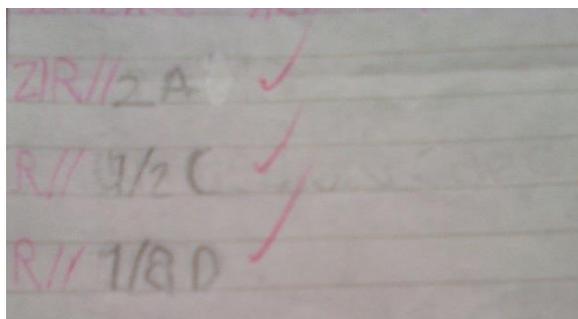


Ilustración 12: Respuesta del equipo 1

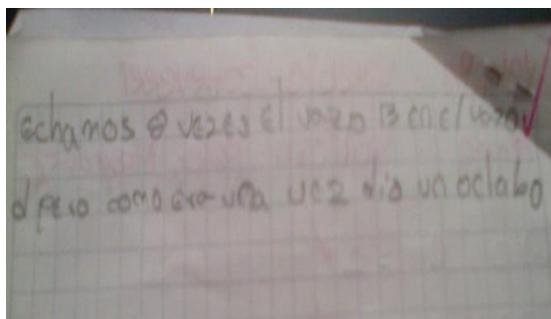


Ilustración 13: Respuesta del equipo 3

Es de aclarar que en el desarrollo de las situaciones fueron muy importantes los procesos experimentales, pues las niñas siempre buscaban la verificación de sus respuestas desde la manipulación de los instrumentos, esto les permitió aclarar

las discusiones al interior de los grupos, cuando tenían una pregunta que resolver donde cada una daba su respuesta.

En la ilustración 13 se evidencia también, como las estudiantes logran reconocer que ocho veces la cantidad del vaso **C** llenan completamente el vaso **D**, pero como están midiendo con un vaso grande la cantidad de agua de uno pequeño, es decir la cantidad del vaso **D** en el vaso **C**, identifica que de esas ocho solamente debe tomar una. En otras palabras lo que el equipo 3 estaba haciendo matemáticamente es reconocer la razón como relator, entendida como

Una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad de comparación. Esto permite entonces diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación de dicha relación. Por ejemplo: entre dos cantidades **x** e **y** se puede dar la relación **x** es el doble de **y** y por ende la razón **x** a **y** es 2. Ahora bien, dado un fenómeno determinado se puede dar que, en la relación al fenómeno estudiado las dos cantidades sean homogéneas o no. Si lo primero, dadas dos cantidades **x** e **y** la razón **x:y** expresa cuántas veces está contenida la cantidad **x** en la cantidad **y** o cuántas veces la cantidad **y** contiene a la cantidad **x** (Obando, Vasco y Arboleda, 2012, p.3)

Dentro de la misma parte de la tarea, se observó que algunas estudiantes aunque comprendían los procedimientos que debían hacer, asumían la relación de dos vasos en un solo sentido, es decir, el equipo 2 para indicar cuánta cantidad de gaseosa **B** se debía dar en el vaso **C** respondieron “el vaso **C** cabe un  $\frac{1}{2}$  en el vaso **B**” allí vemos que lo que querían expresar las estudiantes es que la cantidad **B** representa en el vaso **C** un medio. Lo mismo les ocurre para dar respuesta con el vaso **D** (ver ilustración 14 y 15)

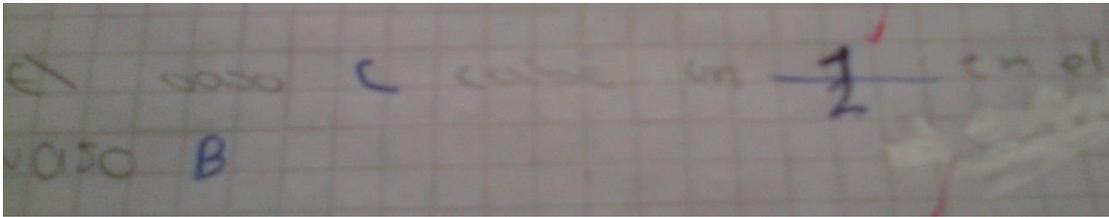


Ilustración 14: Respuesta del equipo 2

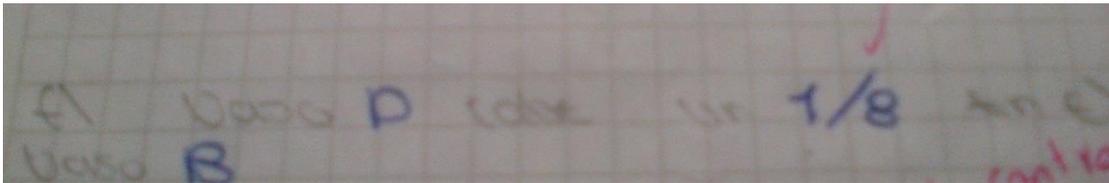


Ilustración 15: Respuesta del equipo 2

En otro momento del desarrollo de la tarea se realizó una socialización en la que se registró la información en una tabla de doble entrada (ver tabla 1), donde fue necesario hacer las preguntas de varias maneras, es decir, primero se preguntó la relación de cada vaso pequeño con los más grandes y luego la relación de los vasos grandes con cada uno de los pequeños, por ejemplo, se les preguntaba qué representa el vaso **C** en el vaso **B**, qué cantidad de gaseosa del vaso **C** cabe en el vaso **B**, entre otras maneras que buscaban que las estudiantes tuvieran una mayor comprensión de “qué estaban comparando con qué”. La clase fue muy productiva en cuanto a los datos que lograron establecer las estudiantes, ellas se apoyaban en la experiencia que habían tenido en los momentos anteriores para argumentar sus respuestas, todas defendían sus posiciones y les mostraban a las compañeras por qué debía ser como ellas decían. Ejemplo de ello, la estudiante 2 para responder lo que representaba el vaso **A** en el vaso **D** decía “profe mire es un dieciseisavo, porque mire el vaso **A** cabe 16 veces en el vaso **D**, pero como yo sólo estoy preguntando por un vaso **A** entonces es un dieciseisavo”.

|       |          |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| Medir | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> |
| Con   |          |          |          |          |

|          |                |               |               |    |
|----------|----------------|---------------|---------------|----|
| <b>A</b> | 1              | 2             | 4             | 16 |
| <b>B</b> | $\frac{1}{2}$  | 1             | 2             | 8  |
| <b>C</b> | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{2}$ | 1             | 4  |
| <b>D</b> | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | 1  |

Tabla 1

Continuando con la socialización, en la parte donde debían comparar el vaso **A** con el vaso **D** y del vaso **D** con vaso **A**, las estudiantes no lograban establecer la diferencia de comparar el vaso **A** con el **D** y el vaso **D** con el **A**, para ellas en un inicio era lo mismo así se les preguntara en el orden en el que se necesitaba para completar la tabla, ellas lo cambiaban y respondían diciendo cuantas veces podían echar el líquido del vaso pequeño en el grande y no cuánto es ese vaso pequeño medido con uno más grande. Sin embargo, a medida que avanzaba la clase se utilizaron los vasos para verificar las ideas que daban las estudiantes y así se logró una clase muy interesante, donde ellas al terminar de llenar la tabla, daban sus respuestas sin necesidad de verificar las mediciones.

Allí, se reconoce como los instrumentos permitieron que las expresiones e ideas de las estudiantes generaran en el aula de clase un espacio de reflexión sobre la tarea, modificaron la actividad matemática inicial de las niñas en una experiencia donde lograban verificar y confirmar cada uno de sus argumentos. En otras palabras los instrumentos tal como lo expresa Obando (2011) modificaron sustancialmente la naturaleza de la actividad matemática en el aula de clase.

Al finalizar la socialización una estudiante del equipo 1 expresó “profe mire, encontré que si yo miro por ejemplo el vaso **C** comparado con el vaso **D** encuentro que **C** representa  $\frac{1}{4}$  del vaso **D**, pero si hago lo contrario, comparo el vaso **D** con el **C** encuentro que el vaso **D** es cuatro veces **C**....entonces es diferente las dos miradas” Lo anterior, muestra claramente como en el equipo no sólo lograron hacer una lectura de derecha a izquierda de la tabla sino que además lograron reflexionar lo que ocurre en el sentido contrario. En otras palabras, lo que el equipo estaba expresando con sus palabras, es la diferencia que se da al elegir la

unidad de medida, puesto que no es lo mismo medir el vaso **C** con el vaso **A**, que medir el vaso **A** con el vaso **C**, en la primera se genera una medida entera, mientras que en la segunda se da una medida fraccionaria menor que la unidad; y esa diferencia fue precisamente la que se logró con las estudiantes al final de la socialización.

Como último momento de la tarea, se propuso reescribir una receta que estaba dada en términos de todos los vasos, para que quedara en términos de un sólo vaso (ver anexo 2). En la medida en que estaban reunidas en los equipos se logró evidenciar que las estudiantes ya se sienten más confiadas con las respuestas que dan y los procedimientos que realizan, puesto que ya tuvieron un acercamiento con los artefactos que se llevaron al aula, ya se les hacía mucho más fácil dar la respuesta a la situación.

Para el desarrollo de esta parte de la tarea, las estudiantes utilizaron la tabla que se había completado en la socialización (Tabla 1), pues a través de ella lograban establecer la cantidad de ingredientes que necesitaban con cada vaso, por ejemplo la receta decía 2 vasos **D** de harina y debían escribir la receta en términos del vaso **B**, entonces ellas en la tabla miraban un vaso **B** qué representaba en un vaso **D** y así saber la cantidad que necesitaban.

Es de aclarar, que para las estudiantes en un inicio no fue tan fácil cambiar la receta, pues no lograban comprender la manera de modificar esos valores dados y aunque discutían en sus equipos de trabajo sobre la cantidad a escribir, se sentían angustiadas y expresaban “profe mire nosotras sabemos por la tabla que hicimos la medida de los vasos pero no entiendo cómo puedo saber la cantidad de harina que necesito con otro vaso”, otras decían “hay profe eso no se puede cambiar”.

Frente a ello, con todo el grupo reunido se realizó la receta utilizando el vaso **C**, se inició el diálogo preguntando la receta inicial y para lograr que comprendieran cómo debían cambiar la receta, se dibujaron en el tablero los vasos a utilizar y los

que se necesitaban con la nueva receta. Es decir, para saber por ejemplo la cantidad de harina con el vaso **C**, se dibujaron los dos vasos **D** de harina y se miró en la tabla, la cantidad de agua de un vaso **C** cabe cuatro veces en el vaso **D**; entonces se dibujaron para un vaso **D** ocho vasos **C** y para el otro vaso **D** otros ocho vasos **C** (ver ilustración 16). Y así las niñas lograron establecer la relación de la cantidad de un vaso con otros vasos y además identificaron como con diferentes vasos se puede seguir repartiendo la misma cantidad de ingredientes.

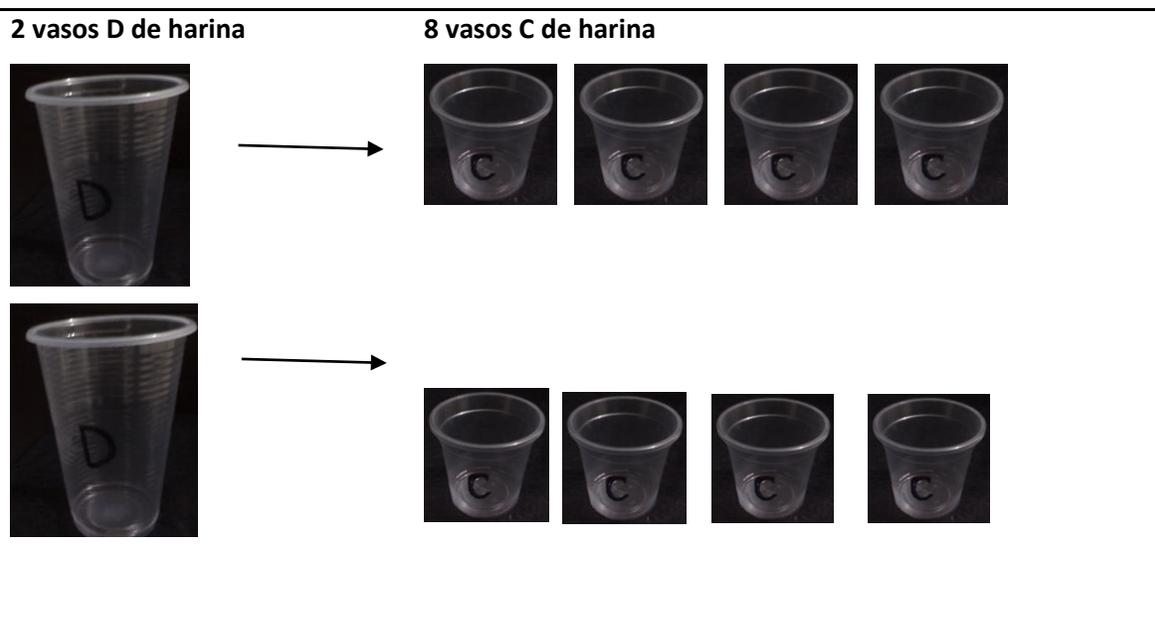


Ilustración 16: Representación de la situación hecha por el grupo de la estudiante 1

Luego de haber realizado con todo el grupo la receta en términos del vaso **C**, las estudiantes se reunieron nuevamente en sus equipos de trabajo y comenzaron a realizar la receta con el vaso **B**. De manera general, se logró observar que para las niñas fue de gran ayuda dibujar los vasos, pues fue de esta manera como lograron hacer la receta con otro vaso, tal como se observa en la ilustración 17.

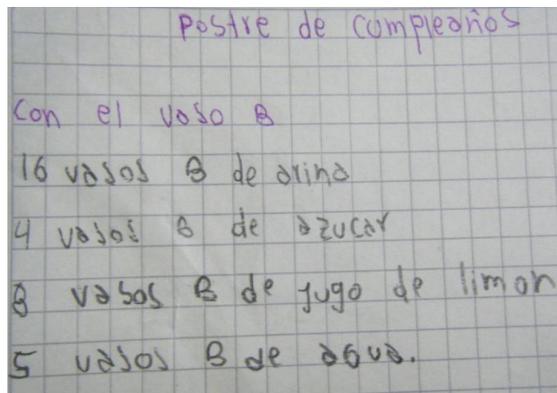


Ilustración 17 la receta

De esta tarea uno de los elementos más importantes que se rescatan es precisamente la importancia de esos instrumentos como mediadores en la comprensión de los números racionales. Cada uno de los sucesos narrados muestra

Que lo que los individuos hacen, lo hacen de esa forma porque disponen de unos sistemas de instrumentos para la acción, o mejor aún, de unos sistemas culturales de objetivación, que dan forma a la acción, y que por tanto, su cognición no está localizada sólo en su mente: nuestra mente se ex-tiende más allá de nuestra piel, a través de los instrumentos, a través de la co-acción con los instrumentos y con los otros, y por lo tanto, nuestra cognición no sólo está en nosotros, sino distribuida en los otros, en instrumentos de mediación que nos brinda la cultura (Obando, 2011, p. 24)

## **TAREA 2**

### **¿Qué paso al empezar la tarea?**

Antes de narrar lo ocurrido en esta tarea, se hace importante y necesario recordar que en ella, las estudiantes debían preparar la misma agua azucarada de la profesora, pero en recipientes más pequeños; la cual fue preparada con 6 vasos **D** de agua y 24 cubos de azúcar.

La actividad que realizaron los equipos en la primera parte del trabajo fue a través de la experimentación ensayo-error, es decir, probaron el agua de la profesora y hacían al tanteo la cantidad de azúcar y para la cantidad de agua la solución era llenar el tarro. En el equipo 1 decidieron llenar completamente el tarro sin dejar espacio para el azúcar, mientras que el equipo 2 llenó el tarro hasta que les dio una cantidad exacta de vasos. También se observó cómo en el equipo 3 decidieron hacer el agua azucarada en los vasos, llenando cada uno de ellos y repartiendo el azúcar en partes iguales.

Allí se refleja claramente cómo la actividad de las estudiantes está pensada a través de la manipulación de dos magnitudes totalmente separadas, cantidad de azúcar y cantidad de agua; es decir, ellas no lograron pensar la situación a través de la relación cantidad de agua por cantidad de azúcar. En este primer acercamiento con los instrumentos, las niñas no establecieron relaciones entre la cantidad de agua y la cantidad de azúcar, ellas se quedaron en la preocupación por la cantidad de agua y no pensaron mucho en el azúcar, su manera de comprobar si los sabores eran iguales era probando las dos aguas y comparando el sabor.



Ilustración 18: Agua azucarada

El equipo 3 no lograba comprender cuántos cubos de azúcar usar para un solo vaso **D**, entonces se utilizaron cuatro vasos y se les preguntó ¿cuántos cubos de azúcar utilizó la profesora?, ellas contestaron 24, luego les dice la maestra en formación “vámonos devolviendo, sí echo uno acá cuántos quedan, dicen 23, y otro acá expresan 22 y otro acá, 21...” Gracias a la utilización de los vasos y el diálogo maestro-alumno las niñas comprendieron que en cada vaso **D** se utilizaron 4 cubos de azúcar.

### **¿Qué pasó durante la socialización?**

A partir de la actividad inicial de las estudiantes se optó por posibilitar un espacio de socialización en el que se les preguntó por la receta llevada por las maestras en formación, las niñas respondieron en coro que la profe utilizó 6 vasos **D** de agua y 24 cubos de azúcar, luego se les pregunta ¿si tuvieran un solo vaso **D** de agua cuántos cubos de azúcar se necesitarían? La mayoría daban respuestas al azar sin pensar en la relación que hay entre el azúcar y el agua.

Algunas decían ocho, cinco, etc, es decir daban respuestas sin detenerse a pensar sobre la cantidad que estaban diciendo; hasta que una estudiante del equipo 1 expresó que “en el vaso **D** se debían echar cuatro cubos de azúcar porque cuatro por seis es igual a 24”. Se resalta como en éste dialogo se reconoce la importancia de la unidad cuando se interesa a través del diálogo en buscar cuántos cubos de azúcar se necesitan para un solo vaso de agua. Aquí se observa una situación de proporcionalidad, aunque las estudiantes no lo hacen evidente en su expresión ellas establecen, si a seis vasos de agua le corresponden veinticuatro cubos de azúcar, a un solo vaso **D** de agua le corresponden cuatro cubos de azúcar. Esto se comprobó al preguntarle a la estudiante por el significado de cada número.

Otra estudiante (equipo 2) cuenta que “echaron un vaso **D** de agua y 4 cubos de azúcar y explica que como el agua de la profesora tenía 6 vasos **D** de agua y 24 cubos de azúcar entonces para un solo vaso necesitaba dividir 24 entre 6”. Se reconoce con esta expresión como este equipo resuelve esta parte de la tarea como una situación de proporcionalidad y además como en su actividad matemática reconocen los dos espacios de medida y la relación por cociente entre las dos cantidades, es decir establecen razones.

Bajo esta mirada, se entenderá por razón la “cuantificación de la relación por cociente entre dos cantidades, y no como un cociente entre dos números” (Obando et al, 2013, p.6) y la proporcionalidad desde el mismo autor como “una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de identificar una propiedad invariante a todas la parejas de cantidades correspondientes: conservar la misma relación por cociente”

La participación de las estudiantes en la primera parte de la socialización permitió que tuvieran una mejor comprensión sobre el por qué eran cuatro cubos de azúcar. Luego las maestras en formación dicen, si para el vaso **D** necesitaban 4 cubos de azúcar, ¿para el vaso **C** cuántos debían utilizar? al principio decían que 2, 3 o más. Por lo anterior, se les preguntó ¿cuántas veces cabe la cantidad del vaso **C** en el vaso **D**? inmediatamente contestaron que 4, y ¿cuántos cubos de

azúcar se utilizaron en el vaso **D**?, las estudiantes observaron los cuatro vasos e inmediatamente contestaron que “1 porque como son cuatro cubos y se deben repartir en partes iguales a cada vasito **C** le corresponde un cubo de azúcar”.

Se observa claramente como las estudiantes hacen uso de la multiplicación para dar respuesta a las situaciones, pero dicha multiplicación es expresada con un significado completo, es decir, ellas logran contextualizar y darle sentido a esos números, de acuerdo a la situación presentada. Se refleja cómo a través de una acción mediada con diversos instrumentos las niñas logran comprender lo que se les está preguntando y cómo la intervención del maestro resulta ser un mediador fundamental para que las estudiantes logren modificar, organizar o cambiar sus ideas y acciones en pro del aprendizaje.

Continuando con la socialización, las maestras en formación hicieron la misma pregunta pero para el vaso **B**, una estudiante del equipo 3 inmediatamente expresó que “como el vaso **B** cabe dos veces en el vaso **C** entonces necesitamos medio cubo de azúcar”, allí se le indaga por qué y responde “porque el vaso **C** tiene un cubo y el vaso **B** al caber dos veces en **C** nos toca partir el cubo en dos partes, entonces por eso es la mitad”. Con relación al vaso **A** inmediatamente recordaron que el vaso **A** cabe dos veces en el vaso **B** y que como el vaso **B** tiene  $\frac{1}{2}$  cubo de azúcar entonces ese vaso tendrá  $\frac{1}{4}$  de cubo de azúcar.

Con lo anterior se les indagó ¿se puede decir que un cuarto es la mitad de un medio? Y respondieron que si “porque el vaso **B** tenía la mitad de azúcar al volverlo a partir a la mitad quedan cuatro pedacitos”. Además se les preguntó ¿cómo sería un  $\frac{1}{4}$  de cubo de azúcar? y expresaron que “es dividir ese cubito en cuatro partecitas iguales y luego tomar una”

Fue muy agradable ver como las estudiantes dominan las fracciones un medio y un cuarto y las sumaban sin necesidad de utilizar papel y lápiz, también como piensan fácilmente en partir un cubo de azúcar en dos o cuatro partes y como

asumen las fracciones desde ahí. Se observa cómo surge la fracción como relación parte-todo entendida como “nueva cantidad que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte” (Obando et al, 2006, p.61). Esta relación se establece mediante procesos de medición en los que se cuantifica la parte y el todo. También se reconoce como las estudiantes le confieren uso e importancia a cada uno de los artefactos llevados para el desarrollo de la tarea, incorporándolos a sus acciones y por ende convirtiéndolos en instrumentos.

Finaliza el diálogo organizando la información en la siguiente tabla:

| Vaso | Cantidad de azúcar |
|------|--------------------|
| D    | 4 Cubos            |
| C    | 1 Cubo             |
| B    | $\frac{1}{2}$ Cubo |
| A    | $\frac{1}{4}$ Cubo |

Tabla 2

### **¿Qué pasó después de la socialización?**

Luego de la socialización las estudiantes continuaron registrando los ensayos en sus tablas. En los registros (ver ilustración 19, 20 y 21) se observa como antes del asterisco son los primeros ensayos que realizaron las niñas donde la mayoría daban sus respuestas a través del ensayo-error; luego del asterisco se evidencia como los equipos ahora resolvían la situación de una forma más consciente con las medidas. Ellas, establecieron a través de su actividad matemática correspondencias entre los dos espacios de medida, es decir, reconocieron que a

cierta cantidad de azúcar le corresponde cierta cantidad de agua. En otras palabras comenzaron a aproximarse a un pensamiento proporcional.

En la ilustración 19 se reconoce cómo las estudiantes para hacer esa correspondencia entre la cantidad de agua con la cantidad de azúcar, hacen uso de las fracciones, ellas expresan que como son nueve vasos **B** y en cada vaso cabe  $\frac{1}{2}$  de cubo de azúcar y entonces serían nueve veces  $\frac{1}{2}$  por tanto escriben  $\frac{9}{2}$ . Aquí se puede ver como el instrumento cumple un doble papel de mediación, guía internamente mediando los procesos cognitivos y externamente a través de las acciones sobre el medio. Es decir “que cualquier instrumento físico es a la vez instrumento psicológico en tanto desde el conocimiento histórico-cultural depositado en él emerge su capacidad como mediador cognitivo” (Rabardel, 2005 citado en Obando, 2011)

| Ensayo     | Cantidad de agua   | Cantidad de azúcar |
|------------|--------------------|--------------------|
| Ensayo 1   | vaso D 1 vaso      | 4 cubos            |
| Ensayo 2   | vaso C 3 1/2 vasos | 3 cubos 3/2        |
| * Ensayo 3 | vaso B 9 vasos     | 9/2                |
| Ensayo 4   | vaso A 17 vasos    | 17/9               |

Ilustración 19: Registro agua azucarada equipo 1

| Ensayo     | Cantidad de agua | Cantidad de azú |
|------------|------------------|-----------------|
| Ensayo 1   | un vaso D = 1    | 4 cubos         |
| * Ensayo 2 | dos vaso C       | 2 cubos         |
| Ensayo 3   | 5 vaso B         | 2 1/2 cubos     |
| Ensayo 4   | 12 vasos A       | 3 cubos         |

Ilustración 20: Registro agua azucarada equipo 2

| Ensayo   | Cantidad de agua      | Cantidad de azúca |
|----------|-----------------------|-------------------|
| Ensayo 1 | 1 16 16 0             | 5                 |
| Ensayo 2 | 1 16 16 0             | 6                 |
| Ensayo 3 | una a y uno c         | 5                 |
| Ensayo 4 | 3 vasos c y 4 vasos b | 5                 |

Ilustración 21: Registro agua azucarada equipo 3

### Guía Agua Azucara

En otro encuentro con las estudiantes se les propuso seguir trabajando con el agua azucarada pero ahora se llevó como tarea una guía (ver anexo 4) para realizar en equipos, la cual fue pensada sobre la misma dinámica de la clase anterior, conservar el mismo sabor. La diferencia radicaba principalmente en que ya no iban a contar con los instrumentos que tenían en las clases anteriores, tales como: vasos de diferentes tamaños, agua, cubos de azúcar y recipientes (botellas). Se propusieron dos recipientes de agua azucarada **A** y **B** diferentes a los vasos de la otra parte de la tarea; el primero preparado con 4 vasos de agua y 2 cubos de azúcar y el segundo con 6 vasos de agua y 3 cubos de azúcar.

Con relación a la primera pregunta ¿cuál recipiente contiene el agua más dulce? dos equipos expresaban que “el recipiente **B** era el más dulce porque era el recipiente al que se le echaba más agua y más azúcar”; con esta respuesta se observa claramente como las estudiantes están pensando las magnitudes de forma separada, es decir no están logrando hacer una relación entre el agua y el azúcar; piensan que como el recipiente **B** tiene más agua y más azúcar necesariamente debe de ser el más azucarado, tal como se observa en las ilustraciones 22 y 23.

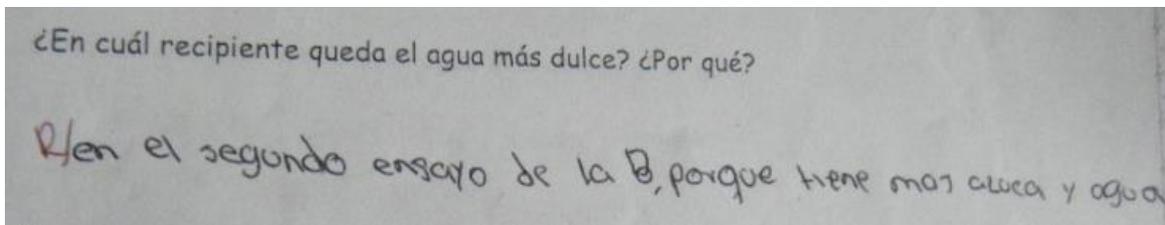


Ilustración 22: Guía agua azucarada

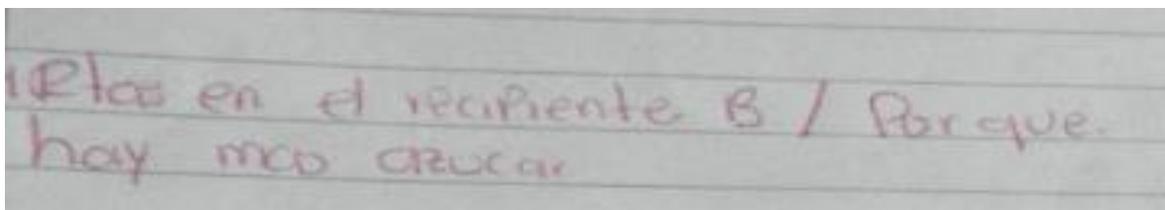


Ilustración 23: Guía agua azucarada

Durante la clase se logró dialogar con algunas estudiantes y tratar de orientarlas para que pensarán la tarea bajo otra mirada, a través de preguntas tales como: ¿Cuántos vasos de agua hay en el recipiente **A**? y ¿cuántos cubos de azúcar? luego de que las estudiantes dieran cuenta de las cantidades de la receta, se les pregunta ¿Cuántos cubos de azúcar se echaron en un solo vaso? Donde las niñas utilizaron una representación gráfica para ilustrar la situación (ver ilustración 24) y luego expresaron “la mitad”. De forma análoga se les indagó por el vaso **B**, donde nuevamente contestaron que “cada vaso contenía la mitad de azúcar” y así lograron comprender que era la misma agua azucarada en ambos recipientes.

Allí se ve claramente como el diálogo con el maestro se hace necesario para que el estudiante logre adquirir o visualizar aquello que él no logra percibir en el momento. Este diálogo cobra sentido por el tipo de preguntas realizadas con relación a la unidad, es decir el detonante de la reflexión de las estudiantes fue la pregunta por la unidad, esto tiene un sentido importante en la proporcionalidad directa como punto de partida y como punto de llegada para la multiplicación.

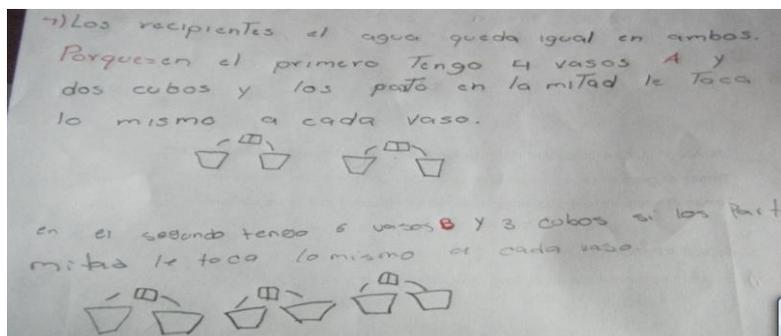


Ilustración 24: Guía agua azucarada

En el segundo punto de la guía se les preguntó por la cantidad de agua y azúcar para dos, tres y más recipientes de los mismos. Con relación a ésta las estudiantes hacían uso del cálculo mental y de las tablas de multiplicar, además organizaron la información como se ve en la ilustración 25 y 26.

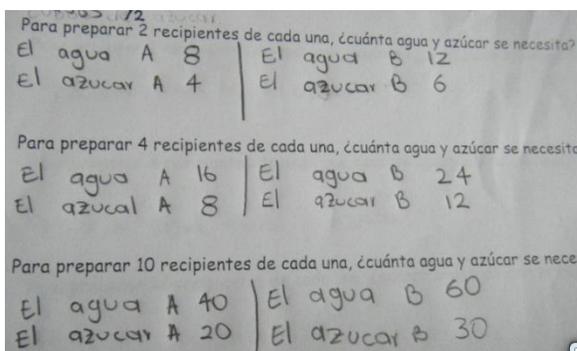


Ilustración 25: Guía agua azucarada

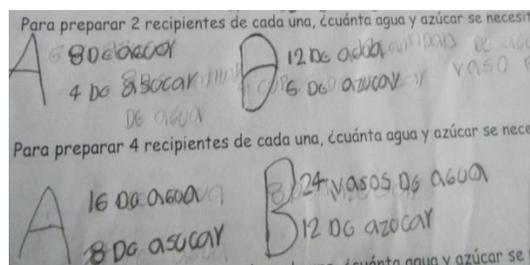


Ilustración 26: Guía agua azucarada

Del desarrollo de esta tarea se puede resaltar que el hecho de haber trabajado primero desde la experimentación, contribuyó para que el trabajo sin el material se desarrollara de manera significativa, puesto que los errores que se cometieron correspondían más a la comprensión lectora que a la actividad matemática.

En conclusión, en esta tarea se logró evidenciar que el artefacto

Por sí mismo, no es automáticamente un instrumento mediador (...) Solamente después que el sujeto ha asignado significados para el uso del artefacto con un propósito específico puede valorar que ese objeto es relevante y que forma parte de un instrumento útil que media su actividad” (Rabardel, 1995 citado en Ruiz Vahos, 2011, p.21).

Es decir, las estudiantes lograron a través de su actividad matemática reconocer la importancia de esos instrumentos para dar solución a la tarea.

### **Socialización de la guía**

La socialización se da a través de un diálogo entre el maestro formador y todo el grupo, el cual inicia con una pregunta abierta sobre la cantidad de agua y la cantidad de azúcar que se necesita para dos recipientes **A**, una de las estudiantes (equipo 1) responde que “para dos recipientes sería el doble de la cantidad de **A**, entonces sería de agua ocho y cuatro de azúcar” frente a ello se le indaga ¿Qué sería el doble de algo? Una de las estudiantes (equipo 1) expresa “el doble sería otra vez la misma cantidad”

Se les indaga después por tres recipientes **A**. Una estudiante (equipo 3) responde “de agua 12 y de azúcar serían 6”. Se le pregunta a la que dio la primera respuesta y ¿por qué 6? dice “porque dos por tres es seis” ¿Qué representa el dos y qué representa el 3? Ella dice “el dos es el azúcar y el tres sería la cantidad de recipientes”.

Para organizar las respuestas de las estudiantes se propuso llenar la siguiente tabla con las reflexiones que surgieron en la socialización.

| Cantidad de recipientes | Cantidad de vasos de agua | Cantidad de cubos de azúcar |
|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1                       | 4                         | 2                           |
| 2                       | 8                         | 4                           |
| 3                       | 12                        | 6                           |
| 4                       | 16                        | 8                           |
| 8                       | 32                        | 16                          |
| 10                      | 40                        | 20                          |
| 20                      | 80                        | 40                          |

Tabla 3

Cuando se hace la pregunta para 10 recipientes, una de las estudiantes (equipo 2) responde “40 de agua y 20 de azúcar porque ahí aparece la tabla del cuatro en la columna donde se registró la cantidad de agua y la tabla del dos en la columna donde se registró la cantidad de azúcar”. También se les preguntó por qué la tabla del cuatro y por qué la tabla del dos, ellas comentan “porque se está multiplicando y además el número principal es el cuatro y el dos”. Cuando las niñas explican su respuesta, lo que ellas están haciendo es reconocer esas cantidades de la receta que permanecen invariantes, independientemente de que aumenten los recipientes, es decir, ellas identifican que por cada cuatro vasos de agua siempre van a haber dos cubos de azúcar.

Luego de que se pregunta por las otras cantidades de recipientes se cuestiona sobre la relación que hay entre el azúcar y el agua. Una estudiante del equipo 1 expresa “dos por dos es cuatro”, se le pregunta ¿y ese cuatro qué sería de ese dos?, ella dice “el doble”. Se le cuestiona además ¿qué es el azúcar del agua? dicen “números pares”, otras expresan “el agua es el doble del azúcar, porque cuatro más cuatro es ocho, seis más seis es doce”. Asimismo se indaga por si encontraban algo más en la tabla, en vista de que no lograban ver otras relaciones, se les preguntó ¿qué representa ese dos de ese cuatro? Dicen “la mitad....el azúcar es la mitad del agua”

Nuevamente las maestras en formación dicen ¿el agua qué viene siendo del azúcar?, estudiante equipo 3 “sería el componente sin agua queda sólo azúcar”, otra dice “el agua es el doble del azúcar y lo contrario...es que éste es la mitad....si lo miramos de acá a acá es la mitad y de acá a acá es el doble” (la estudiante usa sus manos para apoyar lo que dice)

En estas intervenciones surge la razón como correlator, es decir, las niñas logran definir una relación entre familias de cantidades donde cada elemento de una de las familias se pone en correspondencia biunívoca con uno y solo un elemento de la otra familia.

También se reconoce como las estudiantes dan cuenta en sus intervenciones de lo que Torres (2013) ha denominado operador escalar y operador funcional; el primero observado cuando ellas para llenar la tabla decían que debemos multiplicar por dos la cantidad de agua y la cantidad de azúcar, y así la receta original por el número de recipientes pedidos. Es decir, las estudiantes reconocen como la multiplicación por  $n$  es el resultado de analizar como la variación en uno de los espacios, determina los valores posibles en el otro espacio; O dicho de otra forma, cambios en un espacio de medida, generan cambios simétricos en el otro espacio de medida. El segundo, es reflejado cuando las niñas logran establecer que para dos recipientes, para tres recipientes, para cuatro o más, el azúcar es la mitad del agua y el agua es el doble del azúcar. Es decir las estudiantes establecen la relación entre la cantidad de un espacio de medida con la cantidad de otro espacio de medida que estén correlacionadas, la razón que resulta de esta relación es igual para todas las parejas de cantidades.

Continuando con la socialización se dio el siguiente diálogo (Diálogo 2):

- Maestro mediador: ¿si pongo 50, 100 o más recipientes se me va a seguir conservando que el azúcar es la mitad del agua?

- Estudiante equipo 1: “sí, porque si le echo menos cantidad de azúcar queda muy simple”.
- Maestro mediador: ¿cuál es la clave para que el azúcar sea la mitad del agua?, ¿Qué realizamos la clase pasada, qué teníamos que conservar?
- Estudiantes equipo 1: “la receta de la profesora”
- Maestro mediador: ¿la tarea del martes?
- Estudiante equipo 3: “la cantidad de cubos de azúcar y de agua”
- Maestro mediador: ¿cuál era la condición entre agua y azúcar?
- Estudiante equipo 3: el sabor.
- Maestro Mediador: ¿Cómo sabemos que sí se está conservando esa agua azucarada?
- Estudiante equipo 1: “porque a medida que vamos echando vamos echando lo que es de azúcar entonces así sigue siendo la misma agua azucarada, no se endulza ni se hace simple”
- Estudiante equipo 3: “mientras más van creciendo los recipientes, el agua y el azúcar, va quedando más agua azucarada pero sigue sabiendo igual”.

En esta parte, se observa como las estudiantes reconocen que entre más recipientes tengan más agua azucarada van a tener pero con el mismo sabor, es decir establecen aquello que se conserva como cuantificador cualitativo y en el momento anterior se reconocía como cuantificador cuantitativo al expresar que el agua era el doble del azúcar para mostrar que se conserva el sabor.

También surge una correlación positiva, pues la variación en un espacio de medida genera variaciones en el mismo sentido en el otro espacio de medida, es decir si en un espacio aumenta en el otro también. Además hay una correlación lineal que se puede ver cuando las variaciones en un cierto factor en un espacio de medida generan en el otro espacio de medida variaciones en el mismo sentido, y en el mismo factor. Como hay una correlación lineal y positiva decimos que es una situación de proporcionalidad directa (Obando et al , 2006)

Partiendo de esta tarea, se reconoce a través del entramado entre objetos, instrumentos y situaciones cómo las estudiantes resolvían algunos momentos de la tarea como situaciones de proporcionalidad directa, ellas lograron establecer relaciones entre dos espacios de medida, dando cuenta de un pensamiento multiplicativo. Desde Torres (2013) pensar multiplicativamente implica que: se identifiquen dos sistemas de cantidades, se establezcan las relaciones entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades, y se identifiquen las razones y proporciones que permiten correlacionar las cantidades entre los dos sistemas. Estableciendo así correspondencias multívocas que definen la correlación entre los dos sistemas de cantidades.



### ***Aprendiendo juntos (Preparación del refrigerio)***

En concordancia con todo lo expuesto, es pertinente traer a colación algunos momentos que se dieron a partir de otras tareas llevadas al aula centradas en el aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa, con la única finalidad de evidenciar si realmente las estudiantes se acercaron a la multiplicación desde esta nueva mirada. Para ello, se comparten algunos momentos de la tarea “Aprendiendo juntos” (ver anexo 5) la cual buscaba

**Ilustración 27: Presentación propuesta de refrigerio**

estudiar a partir de la preparación de un refrigerio para todo el grupo algunos elementos en relación al aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa. Allí, las niñas debían organizar una propuesta, y luego el grupo escogería la que le pareciera más pertinente por tiempo, dinero y gusto.

En un inicio cada equipo debía escoger su receta y hacer su presupuesto (ver ilustración 28 y 29). A medida que transcurría la clase, se observó cómo las estudiantes primero hacían un análisis de la situación a partir de expresiones cualitativas, pero partiendo de la misma necesidad que en este caso era dar el valor total de su receta, logran expresar esas mismas ideas de una forma cuantitativa. Es decir, en los equipos de trabajo las estudiantes decían “un paquete de mortadelas alcanza yo creo que para la mitad del grupo, tenemos que comprar más mortadelas”, otra integrante del mismo equipo les decía “un paquete trae yo creo que 20 mortadelas, entonces como somos 45 debemos comprar tres paquetes, no importa que sobre”. Otro equipo para realizar obleas decían “hacer obleas sale más barato que hacer hamburguesas porque van a comer muchas y un paquete de obleas es más barato que un paquete de pan”. Con estas expresiones y otras más, se evidencia cómo las niñas son conscientes que a más personas más ingredientes, en otras palabras se resalta como ellas están

pensando la situación a partir de la relación entre esos dos espacios de medida cantidad de personas, por cantidad de ingredientes.



Ilustración 28 propuesta de refrigerio

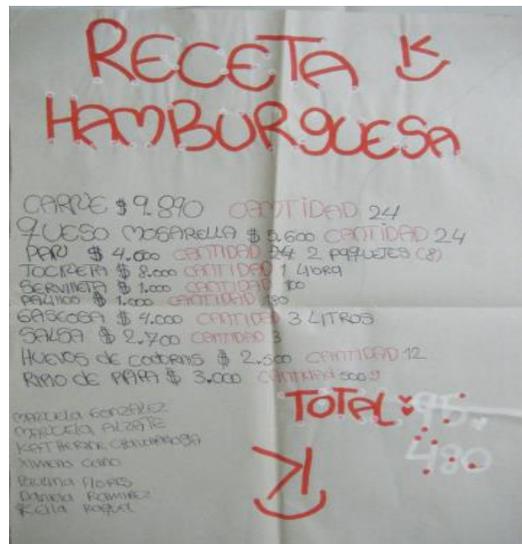


Ilustración 29 propuesta de refrigerio

También, prevalece como en un primer momento de la tarea, las estudiantes hacen uso del algoritmo de la multiplicación de una forma más consciente, es decir, ellas saben que deben multiplicar el precio del producto por la cantidad que requieren. Lo cual se ve reflejado en el siguiente diálogo que se dio en el equipo 2 y en las ilustraciones 30 y 31. Se observa que si bien están haciendo uso del algoritmo, lo hacen de una forma más reflexiva pues reconocen la relación que se establece entre las cantidades que deben operar y además saben lo que esperan obtener con el resultado, en este caso el precio de la cantidad del producto que necesitan.

Estudiante A (equipo 2): Bueno ¿cuánto vale el mango?

Estudiante B (equipo 2): por mi casa vale ochocientos y son grandes

Estudiante C: pues como son grandes con cuatro nos alcanza, igual todas no comen mango

Estudiante A (equipo 2): Es mejor cinco para las que quieran repetir mango. Entonces multipliquemos ochocientos pesos por los cinco mangos que necesitamos.

Estudiante C (equipo 2): yo hago la multiplicación en mi cuaderno y ahora la pasan a la cartelera.

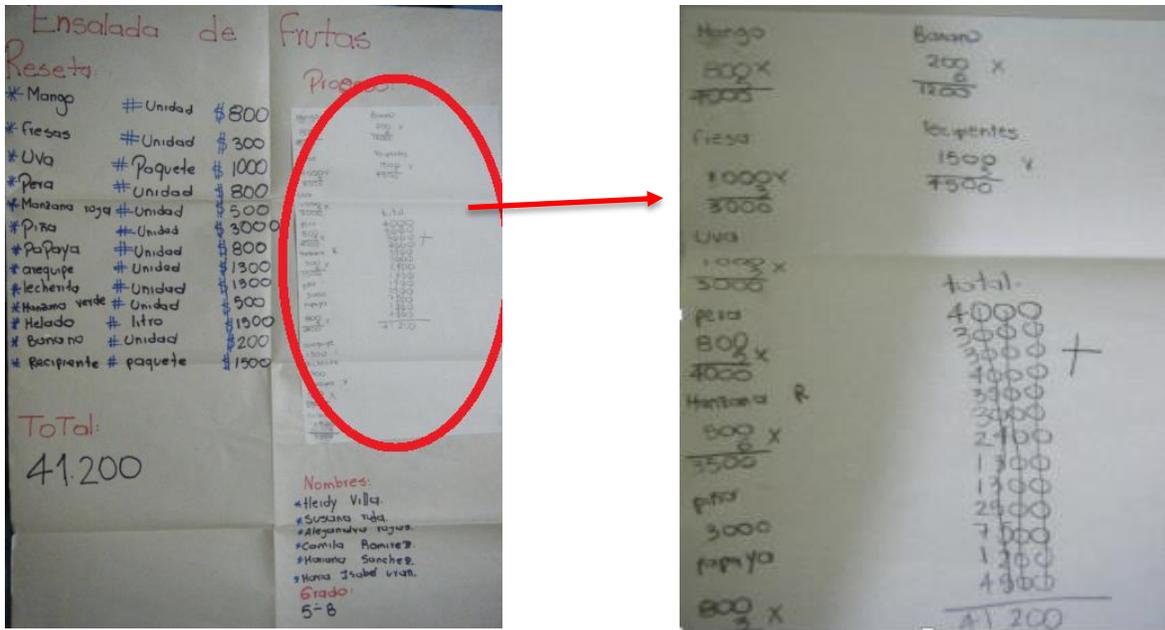


Ilustración 30 propuesta ensalada de frutas

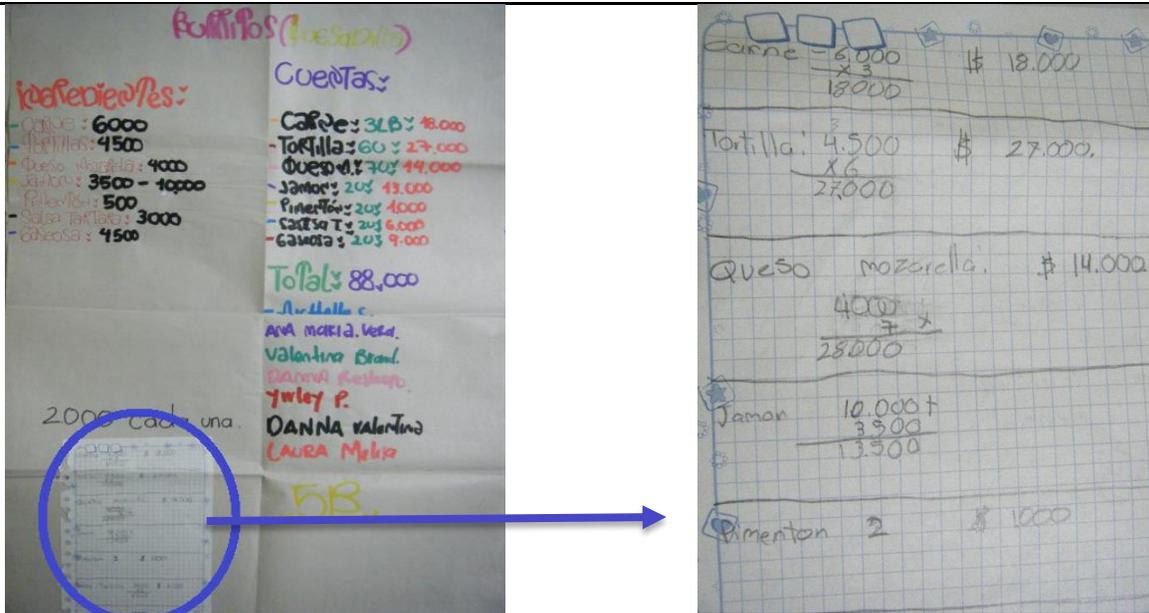


Ilustración 31 propuesta burritos

Se refleja tanto en el diálogo como en las dos ilustraciones lo que Torres 2013 expresa en relación a la multiplicación

Hablar de multiplicación implica no solamente considerar la operación  $a \times b = c$  sino también considerar las situaciones que requieren de dicha operación, de este modo se puede observar que la multiplicación no es un caso particular de la suma, sino que como lo plantea Nunes y Bryan más que añadir sumas, es establecer una correspondencia multívoca entre dos conjuntos o correspondencias entre cantidades, es decir, se considera de manera simultánea el proceso de covariación entre dos cantidades variables (Torres , 2013, p.49)

Continuando con la tarea, luego de que los equipos organizaron sus carteles para presentarle al grupo, escogieron la receta de la ensalada de frutas, pero debido a que el presupuesto se pasaba del dinero con el que contaba, se cambió la receta por la preparación de sandwich, por tanto se compartirán algunos momentos de las dos recetas.

En relación a la ensalada de frutas se escogieron dos frutas para abordar algunos elementos matemáticos, el mango y las manzanas. Con relación al mango, las estudiantes decían que un mango valía \$800 y que para el grupo se necesitaban 5 mangos. Frente a ello, se les indagó a las estudiantes ¿qué pensaban sobre la propuesta?; algunas decían “hay profe eso depende del mango...porque si es pequeño necesitaríamos más mango”, otras decían “profe además hay que tener claro que no todas van a comer mango, entonces hay que mirar quienes comerían”, otras “hay que pensar cómo vamos a partir los mango porque si es en rodajas necesitamos más mango, que si los partimos en cubitos, porque eso sale mucho” se observa claramente en las intervenciones de las niñas como ellas reflexionan sobre el tamaño del producto en relación con la cantidad de personas que comerán.

Al final se acordó con el grupo que sería un mango Tomy con un valor de \$1.500 y que por tanto necesitaríamos 6 mangos. Con dicha información se les pregunto

cuánto dinero necesitarían para esos seis mangos, luego para 2,8, 9 y para más mangos. Para ordenar la información se realizó una tabla (ver tabla 3), en ella se ubicaron dos columnas, una para la cantidad de mangos y otra para el valor de los mangos, para las estudiantes fue muy fácil pensar en el dinero y establecer la relación entre el número de mangos y el precio, ellas expresaban ideas como “pues profe si un mango vale mil quinientos pesos, entonces yo multiplique mil quinientos por seis”, otra estudiante expresa “lo mismo hice yo y me dio \$9.000”.

| Cantidad Mangos | Valor de los Mangos |
|-----------------|---------------------|
| 1               | \$1.500             |
| 2               | \$3.000             |
| 3               | \$4.500             |
| 7               | \$10.500            |

En esta parte del trabajo las estudiantes se sienten más confiadas con las relaciones que establecen entre los dos espacios de medida, la cantidad de mangos por el valor de cada mango. En conclusión se observa como ellas logran establecer a través de la multiplicación correspondencias, en palabras de Torres 2013

La correspondencia que se establece entre las cantidades de un problema que requiera de la multiplicación debe ser de dos sistemas de cantidades correlacionadas uno a uno. Si un estudiante desarrolla correctamente esta abstracción en la solución de problemas es capaz de pensar multiplicativamente. (p.15)

En otro momento de la tarea, se analizaron algunos elementos matemáticos a través de las manzanas, para ello se les entrega por equipos una guía de trabajo (ver anexo 5) donde se expresa que una manzana cuesta \$900 y que en total necesitamos 12 manzanas para que todo el grupo coma manzana (45 personas) y

se les pide organizar la información en una tabla con tres columnas (números de manzanas, número de personas que comerían y el precio).

En esta primera parte del trabajo, la mayoría de los equipos tal como ocurrió con el mango con gran facilidad expresaban que solamente necesitaban multiplicar el precio inicial por la cantidad de manzanas que querían comprar. Pero en relación a la columna que les pedía el número de personas que podían comer con la cantidad de manzanas compradas, ellas eran conscientes que debían indagar por la unidad, es decir la cantidad de personas que comen con una manzana, ellas expresaban “profe yo necesito saber cuántas personas comen con una sola manzana”, “profe sólo sabemos que esas 12 manzanas son para 45 personas, pero eso no me sirve para llenar lo otro, debo dividir” se le pregunta ¿dividir qué? La niña dice “45 dividido las 12 manzanas” y se le pregunta ¿y por qué? Expresan “porque 45 personas son las que comen las 12 manzanas y yo necesito saber con una manzana cuántas personas comen”. Las niñas hicieron la división y con ello llenaron la tabla (tal como se ve en la ilustración 32)

Hoja principal

**ENSALADA DE FRUTAS**

Vamos a hacer el presupuesto para las manzanas y los recipientes.

**MANZANAS**

Conociendo que una manzana cuesta \$900, y en total necesitaríamos 12 manzanas para 45 personas. Con dicha información completa la siguiente tabla.

| N° DE MANZANAS | N° PERSONAS QUE COMERIAN | PRECIO  |
|----------------|--------------------------|---------|
| 1              | 3,75                     | 400     |
| 2              | 7,50                     | 1.600   |
| 3              | 11,25                    | 2.700   |
| 4              | 15,00                    | 3.600   |
| 8              | 30,00                    | 7.200   |
| 12             | 45,00                    | 10.800  |
| 17             | 63,75                    | 15.300  |
| 20             | 75                       | 18.000  |
| 24             | 90,00                    | 21.600  |
| 29             | 11,250                   | 227.000 |

**RECIPIENTES**

Para los recipientes dice el señor de la tienda que un paquete trae 20 unidades y cuesta \$2500. Con dicha información completa la tabla.

| N° DE PAQUETES | N° PERSONAS QUE COMERIAN | PRECIO |
|----------------|--------------------------|--------|
| 1              | 20                       | 2.500  |
| 2              | 40                       | 5.000  |
| 3              | 60                       | 7.500  |
| 4              | 80                       | 10.000 |
| 8              | 160                      | 20.000 |
| 12             | 240                      | 30.000 |
| 17             | 340                      | 42.500 |
| 20             | 400                      | 50.000 |
| 22             | 440                      | 55.000 |

Ilustración 32 ensalada de frutas

Hoja trasera (Trabajo de las niñas)

Solución

1)  $\frac{45}{12} = 3,75$

2)  $\frac{45}{6} = 7,50$

3)  $\frac{45}{3} = 15$

4)  $\frac{45}{2} = 22,50$

5)  $\frac{45}{4} = 11,25$

NOTAS DEL DÍA / NOTES OF THE DAY

Ilustración 33 trabajo de las estudiantes

En el equipo de trabajo 2, las estudiantes no lograban encontrar la manera de saber la cantidad de personas que comen con una manzana. Por ello, se les pregunta si parto la manzana en dos pedazos cada una, ¿para cuántas personas alcanza? responde fácilmente que 24 personas, allí agregan “profe si parto las manzanas en tres pedazos me da para que coman...espere yo multiplico.... Me da 36 personas y si la parto en cuatro haciendo la multiplicación me da para que coman 48 personas, se me pasa”

Frente a ello, en otro momento de la clase, se realizó una socialización donde se buscaba que las estudiantes compartieran lo que habían realizado en sus grupos de trabajo. Donde se estableció el siguiente diálogo

Maestra en formación: ¿Qué información brinda la tarea?

Estudiantes: las estudiantes expresaron que se necesitaban 12 manzanas para 45 personas

Maestra en formación: ¿qué debemos averiguar para poder completar la tabla?

Estudiante Equipo 1: “la cantidad de personas que comen con una manzana.... dijeron que para tres...luego 3,75”

Maestra en formación: ¿de dónde salió ese valor?

Estudiante Equipo 1: “de una división, de 45 dividido 12”.

Maestro en formación: ¿qué significa ese 3.75?

Estudiante Equipo 2: “la cantidad en que parto cada manzana, las personas que comen con una manzana”

Maestra en formación: ¿cómo represento 3.75?

Estudiante Equipo 3: “profe dibujamos las tres ensaladas”

Maestra en formación: ¿qué pasa con el 0,75?

Estudiante Equipo 2: “eso es el 75%”

Maestra en formación: Entonces si es el 75% ¿cuánto me queda faltando?

Estudiante Equipo 2: “nos falta el 25%”.

Partiendo de lo anterior, se les explico que significa en fracciones esos porcentajes, llegando así a la conclusión que lo que faltaba para completar la otra ensalada era  $\frac{1}{4}$ . Allí, las estudiantes del equipo 1 decían “nos alcanza para tres ensaladas y para un setenta y cinco por ciento de la cuarta”, se les pregunta por lo que queda faltando para completar la porción y ellas responden que un veinticinco por ciento.

Frente a ello, se dibujaron las 12 manzanas y se dividieron en 45 partes y se les cuestiona ¿cuánta manzana come cada persona? Ellas expresan: “doce” se les dice ¿doce qué? Dicen “12 sobre cuarenta y cinco” se aclara que se lee doce cuarenta y cincoavos. Allí, la maestra en formación aprovecha la respuesta de la estudiante para explicarle al grupo por medio de un esquema un poco sobre fracciones equivalentes para que logran comprender como se podía simplificar la fracción por  $\frac{4}{15}$ . Bajo esta mirada se explica que la manzana se dividía en quince partes y por tanto cada parte representaba un quinceavo y que efectivamente al repartir la primera manzana donde cada persona comía cuatro quinceavos alcanzaba para darles a tres personas y quedaba tres quinceavos de la primera manzana. Y luego las estudiantes del equipo 2 decían “entonces cogemos una porción de la otra manzana” se les pregunta ¿cuánto representa esa porción? Dicen “un quinceavo, necesitamos eso para hacer una cuarta ensalada” y fue de esta manera como las niñas conceptualizaron que 3.75 representaba esas tres ensaladas y que quedaba faltando un quinceavo de la otra para completar la cuarta.

Luego de que lograron conceptualizar lo que significaba ese 3,75 que les surgió luego de dividir la cantidad de personas por las 12 manzanas, continuaron con el trabajo en sus respectivos equipos y así empezaron a establecer que cada manzana siempre les iba a alcanzar para tres porciones y debían utilizar partes de la otra manzana para completar la otra ensalada.

En esta parte del trabajo, al tener las niñas clara la idea de que una manzana alcanzaba para 3,75 ensaladas, continuaron llenando la tabla y al final daban ideas al grupo tales como: “al aumentar la cantidad de manzanas, también se está

aumentando la cantidad de ensaladas que puedo servir”, “es muy fácil saber la cantidad de ensaladas y el precio; porque si hay por ejemplo el doble de ensaladas, también va a haber el doble en el precio, multiplicamos por dos en los dos lados,”, otra estudiante (equipo 1) dice “en mi grupo vimos que si dividimos por ejemplo dos mil setecientos por tres, me da lo mismo que si divido diez mil ochocientos por doce. Pues el precio de las manzanas dividido por la cantidad de manzanas que están en el mismo renglón de la tabla siempre me va a dar novecientos pesos, porque es el valor inicial”

En las intervenciones de las estudiantes, ellas, tal como se ilustró en la tarea agua azucarada logran establecer, los dos elementos que surgen en una proporcionalidad directa: correlación positiva y una correlación lineal. La primera se establece cuando las niñas dicen que si las manzanas aumentan, aumenta la cantidad de ensaladas, es decir ellas reconocen que si un espacio de medida aumenta el otro también; y la segunda cuando las niñas expresan que al duplicar las manzanas se van a duplicar las ensaladas, que en palabras de Posada y otros (2006) sería como las variaciones en un cierto factor en un espacio de medida generan en el otro espacio de medida variaciones en el mismo sentido y en el mismo factor.

En relación a los Sandwich, para las estudiantes la tarea fue mucho más sencilla pues no tuvieron que trabajar como en la ensalada con números decimales. Ellas para saber la cantidad de pan que se necesitaba expresaban “un paquete de pan tajado trae veinte panes, de un paquete se sacan diez sandwich y por eso se necesitan cinco paquetes, porque cinco por diez es cincuenta y no importa que sobren panes”. Con relación al queso dicen “un paquete trae dieciséis unidades y vale cinco mil pesos, entonces hay que comprar tres paquetes, porque si compráramos dos nos faltaría, pero si compramos los tres aunque nos sobraría pero nos alcanzaría para todo el grupo”. Para la lechuga dicen “vale mil pesos y con una se saca para dieciséis sandwich más o menos, por eso hay que comprar tres lechugas, de la misma manera presentan la mortadela, el tomate, la salsa y la

gaseosa. Esta propuesta cuesta \$42.000 pesos y cada niña debería dar \$1000 o \$900 pesos.

Partiendo de la información que se tiene sobre la cantidad de ingredientes y el precio para hacer los sandwich con todo el grupo, se les pregunta ¿si quisiéramos preparar el algo para el doble de personas cuántos paquetes de panes, mortadelas y quesos necesitaríamos? Y ¿qué valor tendría?

En esta parte del trabajo, las niñas expresaban fácilmente en qué consistía decir el doble de algo, pues expresaban “el doble es dos veces el mismo ingrediente” “el doble es otra vez la misma cantidad entonces el algo sería para 90 personas”. Dichas intervenciones facilitaron el trabajo del grupo con relación a la pregunta. Se socializó lo que significa el doble y se propuso el mismo ejercicio para el triple, se consignaron los datos en una tabla (ver tabla 4) y se preguntó por el cuádruple y el quíntuple, las estudiantes reconocieron con facilidad las relaciones que se establecían entre la cantidad del ingrediente, su precio y la cantidad de personas, ellas expresaban “profe sólo necesito multiplicar el número que usted ponga ahí por lo que se necesita para las 45 personas”

| Pan       | Cantidad de personas | Cantidad de paquetes | Valor total |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------|
| Unidad    | 45                   | 10                   |             |
| Doble     | 90                   | 20                   |             |
| Triple    | 135                  | 30                   |             |
| Quíntuple | 225                  | 50                   |             |
| Séptuple  | 315                  | 70                   |             |

| Queso     | Cantidad de personas | Cantidad de paquetes | Valor total |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------|
| Unidad    | 45                   | 3                    | \$5.000     |
| Doble     | 90                   | 6                    | \$10.000    |
| Triple    | 135                  | 18                   | \$15.000    |
| Quíntuple | 225                  | 15                   | \$25.000    |
| Séptuple  | 315                  | 21                   | \$35.000    |

Tabla 4 pan y queso

Cuando se terminó de organizar las ideas que daban las estudiantes en las tablas, una estudiante del equipo 2 expresó “profe es muy fácil llenar la tabla porque si yo aumento al doble la cantidad de personas, también tengo que hacer lo mismo con la cantidad de paquetes de cada ingrediente y el precio, pues todas cambian igual” otra estudiante (equipo 2) complementa la idea de la compañera diciendo “profe si yo aumento el cuadro de las personas, también aumento lo mismo en el del dinero y en el de la cantidad de cada ingrediente”

En lo anterior, se reconoce como a partir de situaciones que requieran de la multiplicación

Los estudiantes pueden identificar dos espacios de medida que traen consigo unas cantidades que están correlacionadas. Estas cantidades pueden ser relacionadas de dos formas, por un lado hay un operador escalar al relacionar cantidades del mismo espacio de medida, y por otro lado, al encontrar un operador función al relacionar cantidades de espacio de medida diferente (Torres Jaramillo, 2013, pág. 16)

También, se hace evidente como las estudiantes asumen la tarea del refrigerio como una situación de proporcionalidad, entendida ésta como “una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de identificar una propiedad invariante a todas las parejas de cantidades correspondientes: conservar la misma relación por cociente” (Obando et al, 2013, p.6). Es decir, ellas a través de sus intervenciones, tal como se veía anteriormente, lograron establecer relaciones entre la cantidad de personas y la cantidad de ingredientes, en el caso de los panes ellas expresaban que “como para el salón necesitamos 10 paquetes de panes, entonces si vamos haciendo siempre grupitos de 45 se van a ir haciendo grupitos de panes”

En concordancia con todo lo expuesto en este capítulo, se hace evidente que hay correspondencia entre pensar multiplicativamente y la actividad matemática de las estudiantes, y es por esto que se asume que ellas se acercaron a la multiplicación desde la proporcionalidad directa. Y a su vez comprendieron que al multiplicar

Hay una correlación entre una colección de conjuntos con igual cantidad de elementos, con otra colección de conjuntos con igual número de elementos, de tal forma que a cada conjunto de una de las colecciones le corresponde uno y sólo un conjunto de la otra colección, estableciéndose a través de estas correspondencias una relación de proporcionalidad entre las cantidades representadas en dicha colección de conjuntos (Torres, 2013, p.14)

Las estudiantes reconocieron y dotaron de sentido la multiplicación, lograron pensarla desde la relación entre dos espacios de medida y no como acumulación de cantidades. Y más aún se reconoce como cada una de las tareas propició un espacio donde lo más importante no era la aplicación de un algoritmo o de un cálculo sin sentido, sino un espacio donde las estudiantes en interacción con el otro construyeran su propio conocimiento y se cuestionaran sobre cada una de sus acciones.

También se evidencia como esa nueva mirada de la multiplicación que las estudiantes reconocieron y conceptualizaron, se dio a través de esas relaciones que lograron establecerse entre los estudiantes, con sus pares y con las maestras en formación; es decir, siempre estuvo la idea de que el sujeto construye saber con el otro; pensando ese sujeto



Ilustración 34: Jugando con agua

(...) Como un ser colectivo y como ser individual. Así, hablar de un ser colectivo hace referencia a todas aquellas concepciones que se han formado a través de las prácticas sociales de acuerdo con las necesidades colectivas. Como ser individual, se hace referencia al sujeto que constituye sus conceptos y su conciencia, construye su entendimiento del mundo a partir de las prácticas sociales, pero estas constituciones y construcciones las elabora en función de sus propias necesidades. Kozulin (1994) (como se citó en Torres 2013, p. 31)

A modo de cierre, se valora que la forma como se desarrollaron las tareas de proporcionalidad directa y gracias a las interacciones que se establecieron en el aula, las estudiantes lograron no sólo un refinamiento progresivo en su lenguaje matemático tanto cualitativo como cuantitativo y sino que además lograron alcanzar niveles de complejidad en el pensamiento multiplicativo.

Se reconoce como en cada una de las tareas propuestas siempre estuvo la idea de que la escuela debe pensar en otras formas de compartir el conocimiento, debe lograr que el estudiante vaya más allá de la asimilación de procedimientos totalmente algorítmicos que lo limitan a no pensar y a cuestionar el saber. Es decir, los docentes deben “aprender a no transmitir conocimientos hechos sino a plantear las situaciones que harán que los niños elaboren sus propios conocimientos”. (Vergel Causado, s.f, p.494)

### **CAPITULO 3: ¿QUÉ EMERGIÓ?**

A lo largo del camino de la práctica pedagógica fueron identificados en la actividad matemática de las estudiantes varios elementos de vital importancia para el trabajo de investigación, los cuales se hicieron evidentes tanto en las observaciones como en los diferentes registros que las estudiantes compartieron. Dichos elementos se organizaron en tres categorías emergentes, la primera es *la importancia de la medida en la actividad matemática de las niñas*, la segunda fue denominada de las *relaciones cualitativas a las relaciones cuantitativas* y la tercera, *las tareas de proporcionalidad directa en el aprendizaje de la multiplicación*.

A continuación se presentará cada una, mostrando su importancia en la educación matemática y resaltando los momentos donde ellas se revelaron en el proceso que se llevó con las estudiantes.

#### **LA IMPORTANCIA DE LA MEDIDA**

Desde los estándares curriculares se contempla que los conceptos y procedimientos del pensamiento métrico y sistema de medidas “hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (MEN, 2006) hoy es evidente que dicha aproximación se ha realizado sin que el alumno y el docente se hayan acercado conceptualmente a las magnitudes y más aún sin darse cuenta de la necesidad misma de medir.

Se proponen tareas donde lo más importante es que el estudiante domine las reglas de conversión de unidades del Sistema Métrico Decimal, haciendo que la magnitud sea abordada de forma aislada y totalmente algorítmica. Además, no se propician en el aula situaciones donde los estudiantes experimenten por sí mismos la necesidad de medir. Es decir, no hay “una relación clara entre las demandas

sociales y culturales relativas a la medida y la transposición didáctica que se hace de la misma en la enseñanza” (Chamorro, 2003, p 223)

Reflexionando sobre lo anterior, se hace necesario generar en el aula de clase espacios donde se dé la medición real de objetos presentes en el entorno cotidiano del estudiante, permitiendo así que éste logre la comprensión y el descubrimiento de las relaciones entre magnitudes; que logre la adquisición de criterios que le permitan saber cuándo dos longitudes, dos superficies, dos masas o dos volúmenes son equivalentes, lo cual sólo es logrado de manera más significativa, recurriendo a comparaciones de medidas relativas y reales.

Con relación a la práctica pedagógica cuando aún no se había pensado la pregunta de investigación, la medida surgió en la actividad matemática de las estudiantes como una necesidad para el desarrollo de las tareas propuestas tales como: jugando con agua, coloreado de superficies, jugando con el tangram, entre otras (ver anexo 1-6). Fue a partir de la comparación entre la capacidad de diferentes vasos y de la comparación entre áreas de figuras planas, que las estudiantes establecieron unidades de medida no convencionales y sobre ellas establecieron sistemas de medidas iniciales que les permitieron dar solución a los problemas presentados en las tareas.

Es preciso recordar, que éstas tareas buscaban que las estudiantes ampliaran los significados construidos con los números naturales y que entraran a un nuevo “mundo matemático” donde pudieran familiarizarse con nuevos símbolos y nuevas exigencias cognitivas, los números racionales; que aparecen con sus nuevos énfasis donde se resalta la naturaleza de la unidad como simple o compuesta y el tipo de magnitud sobre el cual se establece la comparación como continua o discreta.

Se propusieron tareas, que evidenciaron como a partir de procesos de medición las niñas cuantificaron la parte y el todo, reconociendo la fracción como una relación parte-todo y como una relación multiplicativa; retomemos como en la tarea jugando con agua, se les preguntaba a las estudiantes por la medida de los

vasos **A**, **B** y **C** medidos con el vaso **D**, una estudiante (equipo 2) dice (para el vaso **A**): “profe mire es un dieciseisavo, porque mire el vaso **A** cabe 16 veces en el vaso **D**, pero como yo sólo estoy preguntando por un vaso **A** entonces es un dieciseisavo”.

Las tareas que se llevaron al aula, orientaron a las estudiantes para que ampliaran la comprensión de la fracción como una relación cuantitativa entre la parte y el todo, y no como ha sido entendida como dos números naturales separados con una línea (denominador partes en que divido la unidad y el numerador partes que tomo) o como el nombre de la parte sombreada. Esta nueva mirada de los números racionales (como medida) es importante porque permite darle identidad al conjunto numérico.

Tareas como “jugando con agua” posibilitaron que las estudiantes establecieran relaciones de comparación entre las cantidades, a partir de la pregunta ¿Cuánto es un vaso pequeño de uno grande y cuánto es ese grande del pequeño? Allí, tal como se evidenció en el capítulo 2 las niñas lograban decir con sus palabras la medida de cada uno de los vasos, por ejemplo expresaban que para el vaso **B** necesitaban dos vasos **A** o que el vaso **C** medido con el vaso **D** representa un cuarto. Además encontraron diferencias entre esas relaciones, es decir lograron comprender desde la experimentación lo que ocurre si se mide un vaso pequeño con uno grande y uno grande con uno pequeño, tal como se ilustró en el análisis de la tarea jugando con agua donde la estudiante del equipo 1, concluye en medio de la socialización diciendo “profe mire, encontré que si yo miro por ejemplo el vaso **C** comparado con el vaso **D** encuentro que **C** representa un cuarto del vaso **D**, pero si hago lo contrario, comparo el vaso **D** con el **C** encuentro que el vaso **D** es cuatro veces **C**....entonces es diferente las dos miradas”

Ésta tarea y la de coloreado de superficie (ver anexo 6) a través de la medida, permitieron que las estudiantes reconocieran y dotaran de sentido las fracciones unitarias y a su vez estudiaran las relaciones de orden entre las fracciones encontradas. En la primera tarea se evidencia lo anterior, cuando en el diálogo 1

se retoma la intervención de una niña, la cual le dice a su maestra luego de haber medido el vaso **D** con el vaso **C** que la cantidad de gaseosa que debe repartir con el vaso **D** es un cuarto y expresa que porque “en el vaso echamos cuatro veces y como necesitamos una vez, por eso es un cuarto”. En la segunda tarea, se reflejan estos elementos cuando las estudiantes logran comprender por medio del coloreado la fracción  $\frac{1}{2}$ , ellas expresan “profe la unidad es el cuadrado completo, pero solamente debo colorear la mitad porque es un medio.” También en esta tarea, se evidencia como las estudiantes de una forma muy natural logran comprender por qué  $\frac{1}{2}$  es mayor que  $\frac{1}{3}$ , ellas colorean primero la mitad del cuadrado y luego en otra hoja se les pide que dividan el mismo cuadrado en tres partes iguales y que colorean una porción, en medio de la socialización donde cada niña mostraba su trabajo, se les interroga cuál fracción es más grande, la estudiante del equipo 3 expresa “ $\frac{1}{2}$  porque coloreamos un pedazo más grande que en la otra” mientras que la estudiante del equipo 2 completa “profe es que no porque el número de abajo sea más grande quiere decir que la fracción es más grande”.

La medida también apareció como mediador en la actividad matemática de las estudiantes, al enfrentarse a tareas donde se buscaba el aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa. En agua azucarada, cuando las maestras en formación preguntaron por la cantidad de azúcar que se necesitaba para cada vaso, las estudiantes se apoyaron en la comparación, en la medida de los vasos para distribuir el azúcar; para el vaso **B**, una estudiante del equipo 3 inmediatamente expresó que “como el vaso **B** cabe dos veces en el vaso **C** entonces necesitamos medio cubo de azúcar”, allí las maestras en formación indagan el por qué y ella responde “porque el vaso **C** tiene un cubo y el vaso **B** al caber dos veces en **C** nos toca partir el cubo en dos partes, entonces por eso es la mitad”.

En cada situación, las estudiantes apoyaban sus ideas desde la comprobación con los instrumentos, relacionaban los diferentes sistemas de cantidades para dar

solución a las tareas y establecían razones. El desarrollo de estas tareas, estuvo mediado por procesos de medición que proponían las estudiantes como estrategia para comprobar la veracidad de sus suposiciones, para resolver los problemas que se les presentaban a lo largo de la solución de las tareas y también para explicar y mostrar a sus compañeras porque era como ellas afirmaban.

Se reconoce como en la preparación del refrigerio cuando las estudiantes establecieron como unidad un pan tajado, la libra de mortadela o la botella de gaseosa y pensaron en la distribución de estos ingredientes para compartir el refrigerio con todas sus compañeras de clase, para los panes y las mortadelas fue sencillo porque averiguaron la cantidad de panes y mortadelas que trae cada paquete, pero para la gaseosa, aunque conocían los litros que está traía fue difícil pensar en su repartición, ellas se apoyaron en la capacidad de los vasos; enfrentándose así a magnitudes continuas y discretas.

En tareas como “Agua azucarada” se evidencia como el paso del tanteo a la medición, favoreció el proceso de comparación entre dos espacios de medida, es decir, la necesidad que surgió en ellas para dar solución a la tarea y a partir de las interacciones con las demás compañeras y con las maestras en formación las estudiantes lograron encontrar que la medida de los vasos estaba relacionada con la cantidad de azúcar a utilizar. Cuando las estudiantes reconocieron la medida de cada vaso, lograron establecer la cantidad de azúcar que se necesitaba poner en cada uno, para que estuviera en correspondencia con la receta presentada por las maestras en formación; se reconoce en la ilustración 22 cómo las estudiantes para hacer la correspondencia entre la cantidad de agua con la cantidad de azúcar, hacen uso de las fracciones, ellas expresan que como son nueve vasos **B** y en cada vaso cabe  $\frac{1}{2}$  de cubo de azúcar y entonces serían nueve veces  $\frac{1}{2}$  por tanto escriben  $\frac{9}{2}$ .

| Ensayo     | Cantidad de agua | Cantidad de azúcar |
|------------|------------------|--------------------|
| Ensayo 1   | Vaso D 1 vaso    | 4 cubos            |
| Ensayo 2   | VASO C 3/2 Vaso  | 3 cubos 1/2        |
| * Ensayo 3 | Vaso B 9 vasos   | 9/2                |
| Ensayo 4   | Vaso A 17 vasos  | 17/9               |

En conclusión, se observa como a través de procesos de medición las estudiantes lograron alcanzar mayor reflexión y comprensión de la tarea, lograron pensar multiplicativamente y además consiguieron reflexionar sobre su actividad y la de sus compañeras. Por tanto, se considera que para que las estudiantes logren adquirir y asumir la multiplicación desde la proporcionalidad, se hace necesario propiciar en el aula espacios donde las estudiantes en interacción con las compañeras refuten o comprueben sus ideas desde los procesos de medición, espacios donde ellas mismas lleguen a conjeturas y las comprueben con los instrumentos.

## DE LAS RELACIONES CUALITATIVAS A LAS RELACIONES CUANTITATIVAS

Considerando que una de las condiciones necesarias para que el estudiante pueda pensar multiplicativamente es el establecimiento de una proporcionalidad directa entre dos diferentes espacios de medida, lo cual surge desde los análisis de las propiedades, de los patrones y los cambios que se establecen en la variación, es decir, se hace una aproximación descriptiva o cualitativa de la situación; éste análisis permite que el estudiante pueda cuantificar o establecer los factores y los sentidos en los que se dan las variaciones simultáneamente en cada espacio de medida. Lo anterior, se puede evidenciar en el análisis que hacen las estudiantes cuando se enfrentan a problemas de proporcionalidad directa, puesto que inicialmente hacen un análisis descriptivo y explicativo de la situación (cualitativo) el cual es representado y visualizado a partir de diferentes instrumentos simbólicos tales como: dibujos, tablas, esquemas, expresiones retóricas, entre otras; estas representaciones le exigen a las estudiantes establecer cuantitativamente los cambios para dar solución a la tarea propuesta. Lo que evidencia que la cuantificación está precedida por un momento descriptivo, el cual se hace fundamental en el momento que el estudiante quiera *comunicar* su interpretación de la tarea.

En la actividad matemática de las estudiantes se observa como ellas establecen relaciones cualitativas cuando hacen un análisis de la razón en términos comparativos más agua, menos azúcar. Se establece una transformación en la medida en que se cuestionan por la cantidad de azúcar que deben utilizar, ahora piensan la razón en términos cuantitativos, cuando dicen que el azúcar es la mitad del agua y que el agua es el doble del azúcar; para ilustrar mejor lo mencionado, se trae a colación lo que dice la estudiante del equipo 1 cuando se le pregunta por la cantidad de agua y azúcar que se necesitan para dos recipientes **A**, ella dice: “para dos recipientes sería el doble de la cantidad de **A**, entonces sería de agua ocho y cuatro de azúcar”. También se ve reflejado en la preparación del refrigerio donde una estudiante del equipo 3 expresa a su equipo “yo creo que con dos

paquetes de mortadela nos alcanza, ya que con una alcanza para medio grupo, creo” de inmediato expresa otra integrante del equipo “el algo es para 45 personas, entonces yo creo que un paquete trae 20 mortadelas, entonces necesitamos tres paquetes, no importa que sobre”. Esto muestra la importancia del paso de las relaciones cualitativas a las relaciones cuantitativas en la comprensión de la multiplicación desde la proporcionalidad directa.

Las estudiantes, en la medida en que logran establecer relaciones cualitativas reflejan cómo en cada una de sus intervenciones aparece el reconocimiento de esos espacios de medida que varían y aquellos que se conservan; logran expresar con sus palabras la relación que se establece entre ambos espacios de medida, tal como se evidenció en la tarea de agua azucarada (diálogo 2) donde la estudiante del equipo 1 expresaba al final de la socialización que siempre se mantenía el sabor, ella decía “a medida que vamos echando vamos echando lo que es de azúcar entonces así sigue siendo la misma agua azucarada, no se endulza ni se hace simple”.

Asimismo en la tarea rectángulos y más rectángulos donde las estudiantes expresaban luego de que encontraban varios rectángulos con diferente perímetro “profe si se deja el área igual el perímetro es diferente o al contrario si dejamos el perímetro igual para todos el área no es la misma”. O en la tarea presupuesto y preparación de refrigerio donde ellas expresaban relaciones tales como: Estudiante equipo 3 “Entre más gente quiera comer más ingredientes vamos a necesitar”, Estudiante equipo 2 “si con un paquete de panes alcanza más o menos para ocho sandwich, entonces para 16 sandwich necesitamos esa cantidad dos veces”

En otras palabras, se reconoce como durante el proceso registrado en este trabajo, las estudiantes logran primero establecer relaciones de proporcionalidad de una forma cualitativa, luego gracias a las intervenciones de las compañeras y de las maestras en formación logra organizar dichas ideas y establecer las relaciones cuantitativamente. Tal como lo expresan (Piaget e Inhelder, 1972 citados por Ruiz y Valdemoros, 2006) “el niño adquiere la identidad cualitativa

antes que la conservación cuantitativa y hacen una distinción entre las comparaciones cualitativas y la verdadera cuantificación”.

Partiendo de la actividad matemática de las estudiantes, se observa el avance que lograron adquirir no sólo en la utilización de la multiplicación para la resolución de diversas situaciones, dejando de lado como única vía de solución la suma de sumandos iguales. Se evidencia el progreso que tuvieron en la forma como argumentan sus ideas desde la utilización de los instrumentos y desde las mismas vivencias, cómo lograron adquirir luego desde la mirada de la multiplicación un pensamiento proporcional cuantitativo, el cual es adquirido por el estudiante cuando

Puede hacer uso de las razones y proporciones y maneja indistintamente razones internas y externas para enfrentar problemas matemáticos. Al respecto, Freudenthal (1983) define a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud (distancia con distancia, tiempo con tiempo, precio con precio), y a las segundas como vínculos entre valores de diferentes magnitudes (por ejemplo, tiempo con distancia o litros de leche con precio (Ruiz y Valdemoros , 2006)

Al respecto, se observa como en la tarea de agua azucarada las niñas en un primer momento reconocían dos espacios de medida totalmente separados cantidad de azúcar y cantidad de agua, luego gracias a los instrumentos mediadores logran comprender y hacer evidente de una forma cualitativa esa relación que se establece entre el agua y el azúcar, ellas expresaban que por cada vaso **D** de agua se necesita cierta cantidad de azúcar, pero ven que esta idea no les es suficiente para dar solución a la tarea propuesta, por tanto dentro de su misma necesidad llegan a la cuantificación que por cada vaso **D** de agua necesitan 6 cubos de azúcar.

Por su parte, se reconoce también como en la preparación del refrigerio, las estudiantes para calcular la cantidad de dinero que debía dar cada persona expresaban “como somos 45 personas si damos de a mil pesos recogeríamos

cuarenta y cinco mil” y de acuerdo con esto aumentaban o disminuían el dinero que cada uno debía dar; por ejemplo la receta de un equipo en total eran \$48.000 entonces las niñas decían “dando de a mil serían cuarenta y cinco mil, y más o menos nos toca dar de más 200 a cada una”

En conclusión, las relaciones que lograron establecer las estudiantes de lo cualitativo a lo cuantitativo permitió que se acercaran de una manera más significativa a la multiplicación desde la proporcionalidad directa y por ende lograron dotar de sentido y significado las correspondencias multivocas que definen la correlación entre los dos sistemas de cantidades.

El razonamiento multiplicativo logrado por ellas, permitió que nombraran cualitativamente las relaciones entre las cantidades de los dos espacios de medida dados en las diversas tareas, pero que dentro de su actividad matemática llegan a identificar y relacionar hasta llegar a la cuantificación numérica. Tal como lo expresa Torres, 2013 “La necesidad de conocer la cuantificación de la relación entre las cantidades variables lleva a los estudiantes a que se determine un número o una cuantificación numérica y así continuar con la solución del problema planteado” (p.97)

A modo de cierre, prevalece como desde un inicio las estudiantes veían y asumían dentro de su actividad matemática la multiplicación de una forma totalmente algorítmica y utilizada bajo la comprensión de que ésta es una suma repetida, por tanto no lograban relacionar las cantidades de los dos espacios de medida y asumirla como una situación de proporcionalidad. Sin embargo, gracias a las tareas llevadas por las maestras en formación, las interacciones que se establecieron en el aula y los interrogantes que surgieron al interior de la tarea, lograron que las estudiantes empezaran a establecer dentro de su actividad matemática esas relaciones entre los dos espacios de medida, a reconocer aquello que varía o se conserva dentro de la situación, entre otros elementos que hoy permiten decir con propiedad que las estudiantes hoy piensan multiplicativamente, inicialmente de una forma cualitativa pero que luego logran

formalizar su actividad matemática y establecer dichas relaciones cuantitativamente. Tal como lo expresa Torres, 2013

El paso de establecer las relaciones de diferentes espacios de medida de forma cualitativa y luego nombrar dicha relación de forma cuantitativa, es uno de los procesos ejecutado por los estudiantes para objetivar la multiplicación, es decir, nombrar la multiplicaciones desde las relaciones que se guardan entre las cantidades de forma covariacional, especialmente la de tipo función. (p.101)

## **LAS TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN**

Al comprender que la multiplicación va más allá de la suma de sumandos iguales y de su asimilación a partir de un proceso totalmente algorítmico, permite visualizarla desde una nueva mirada, donde se busca que el estudiante sea capaz de pensar multiplicativamente, lo cual se puede asumir como la habilidad de establecer relaciones, razones y proporciones entre dos espacios de medida; permite además que los docentes reconozcan tal como lo expresa Torres 2013 que

El razonamiento aditivo es utilizado en problemas donde las cantidades son de la misma naturaleza, éstas pueden ser unidades comparadas o separadas. Respecto al razonamiento multiplicativo es importante aclarar que éste es utilizado en problemas en los que se presentan dos variables, donde sus cantidades están correlacionadas. (p.14)

Lo que se quiere señalar, es que la multiplicación es más que sumar, es más que una asimilación de un algoritmo, pues está permite tal como se ha expresado durante todo el trabajo, relacionar dos espacios de medida, permite que el estudiante comprenda que en ella aparece una correspondencia que se establece entre las cantidades, que hay una correlación positiva y lineal y por tanto hay una proporcionalidad directa; elementos que desde la suma es imposible comprender e interiorizar.

Por lo tanto, el interés de la investigación tal como se visualizó en el capítulo 2 se centró en el aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa, estableciéndose como elemento fundamental para la enseñanza de la misma, tareas de proporcionalidad directa. La mirada de las maestras en formación, estaba centrada en analizar cómo las tareas llevadas al aula lograban que las estudiantes comprendieran la multiplicación de una forma diferente a como les ha sido enseñada, es decir como suma de sumandos iguales y totalmente algorítmica. Por tanto, la investigación no sólo estaba enfocaba en analizar la

actividad matemática de las niñas, sino también en analizar todos los elementos que se originaban alrededor de la tarea propuesta.

Las tres tareas analizadas: jugando con agua, agua azucarada y aprendiendo juntos, dejan ver el camino que siguieron las estudiantes en este nuevo reconocimiento de la multiplicación, pero son las dos últimas las que muestran cómo la actividad matemática de las estudiantes se encaminó hacia la proporcionalidad directa. Es necesario recordar, que en la tarea agua azucarada las estudiantes debían preparar la misma agua azucarada que la preparada por las maestras en formación, pero en recipientes más pequeños. Mientras que en la tarea aprendiendo juntos, las maestras en formación propusieron la preparación de un refrigerio, donde las estudiantes organizadas en equipos debían presentar sus propuestas, incluyendo los precios y cantidades de cada producto. Si bien ambas tareas son diferentes en actividad, las dos permitieron evidenciar cómo las niñas lograron establecer relaciones entre los dos espacios de medida de forma cualitativa y cuantitativa, lograron pensar multiplicativamente y además se acercaron al conjunto de los números racionales a través de procesos de medición.

Allí, las tareas de proporcionalidad directa aparecieron inicialmente como instrumentos para las maestras en formación, pero cuando se llevaron al aula y las estudiantes lograron dotarla de sentido, se convirtieron en un instrumento que medió su aprendizaje; puesto que el instrumento se constituye cuando la estudiante le confiere importancia y uso específico a un artefacto y es ahí donde se puede valorar que ese objeto es relevante y que forma parte de un instrumento útil que media su actividad.

Con todo lo anterior, se observa como las tareas seleccionadas y presentadas en este trabajo muestran un posible camino para llevar a los estudiantes de quinto grado a pensar multiplicativamente. Reconociendo en ella lo que Davidov en palabras de Montealegre expresa “la principal diferencia entre ésta y otras tareas consiste en que su finalidad y resultado es la transformación del propio sujeto actuante y no la transformación de las cosas con las que actúa el sujeto”

(Montealegre, 2005, p. 41) es decir, se observa en el desarrollo del capítulo dos, como los vasos, los cubos de azúcar, el agua, entre otros instrumentos no tuvieron como tal una transformación en términos físicos, pero las estudiantes si lograron transformar su actividad; como por ejemplo, en la tarea jugando con agua las estudiantes lograron ampliar el conjunto de los números naturales, ellas asimilaron con facilidad la identificación de los números racionales, comprendieron la diferencia que se da al escoger una unidad de medida, así mismo se acercaron a mediciones no convencionales. Tareas como Agua azucarada y aprendiendo juntos permitieron que las estudiantes lograran comprender la multiplicación de forma diferente, ellas a través de procesos de medición establecieron relaciones entre los dos espacios de medida, además a través de la interacción con las compañeras y con las maestras en formación y a través de su misma actividad lograron pensar multiplicativamente.

Por consiguiente, las tareas llevadas al aula fueron un instrumento potente que generó en las estudiantes una necesidad, y a partir de ésta se desencadenaron una serie de acciones que terminaron poniendo en evidencia la posesión del pensamiento multiplicativo y con él la posibilidad de que las estudiantes visualizaran una nueva mirada de la multiplicación.

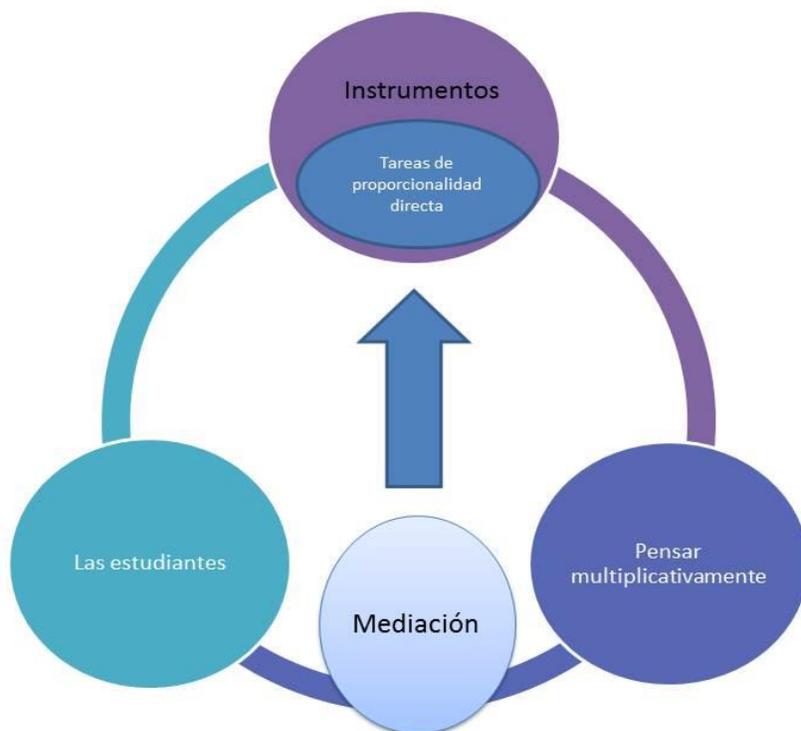
Se genera así, un sistema complejo en el que la tarea actúa como instrumento desencadenador de la actividad matemática de las estudiantes, pero en el que convergen múltiples instrumentos que median su aprendizaje, resaltando la importancia de cada uno de los artefactos que se involucraron en el aula a partir de la necesidad generada por la tarea. Concluyendo así, que no es posible explicar la actividad de las niñas si en esa explicación no se incorporan los instrumentos a través de los cuales desarrollan su actividad.

En conclusión, se considera en este proceso, como las tareas de proporcionalidad directa fueron instrumentos que permitieron mediar la actividad matemática de las niñas, a través de ellas, las estudiantes modificaron su idea inicial sobre multiplicación, construyeron un conocimiento y además orientaron sus acciones

iniciales en procesos de reflexión y comprensión. Por tanto, se reconoce como “todo aprendizaje de una noción matemática se encuentra mediado por instrumentos y que dicha mediación influye en la naturaleza transpuesta del saber matemático, las acciones del profesor, la construcción del conocimiento por parte del estudiante y la organización particular de la clase (...)” (Moreno y Waldegg, 2002)

### **Finalmente...**

Al narrar estas tres categorías se reconoce como durante todo el proceso de la práctica se analizó la actividad matemática de las estudiantes a través de tareas de proporcionalidad directa. Allí, se evidenció tal como lo expresa Obando 2013 que si hay una relación entre sujeto-objeto hay un instrumento que media, por tanto no es posible ubicar el sujeto sin los dos; para el caso específico se estaría mostrando cómo las tareas de proporcionalidad directa y otros instrumentos que hicieron parte del movimiento, mediaron para que las estudiantes llegaran a pensar multiplicativamente y por ende aprendieran la multiplicación de otra manera. Palabras que se resumen en el siguiente esquema:



Finalmente, es importante reconocer como los procesos de medición, las interacciones entre los sujetos, las relaciones que se establecieron a partir de ideas expresadas de forma cualitativa y cuantitativamente, las tareas llevadas al aula y las socializaciones que allí se lograron entablar, permitieron que la multiplicación para las estudiantes de 5B ya no sea vista como suma de sumandos iguales, ahora son más consciente que los problemas o situaciones que involucran dicha operación, necesariamente llevan de forma implícita una correlación entre dos colecciones de conjuntos con igual número de elementos, de tal manera que a cada conjunto de una de las colecciones le corresponde uno y sólo un conjunto de la otra colección, estableciéndose a partir de esas correspondencias una relación de proporcionalidad entre cantidades (Torres Jaramillo, 2013)

## CONSIDERACIONES FINALES

A lo largo de este trabajo se reconoce como el aprendizaje de la multiplicación en la escuela no sólo se debe centrar en el algoritmo, las sumas repetidas y las tablas de multiplicar, se hace necesario proponer tareas que permitan que los estudiantes reconozcan los dos espacios de medida, las relaciones entre las cantidades de los dos espacios y las razones y proporciones que se originan al establecer estas correspondencias; y así puedan comprender el real sentido de pensar multiplicativamente.

Durante la investigación se hace evidente que si bien la suma puede ser una forma inicial de acercar a los estudiantes a la multiplicación, es fundamental que el docente trascienda esta mirada y genere espacios donde el estudiante logre pensar multiplicativamente. Por tanto, este trabajo propone y expone dos tareas de proporcionalidad directa que pueden ser llevadas al aula para lograr espacios donde los estudiantes piensen multiplicativamente, pero lo más importante es que deja abierta la invitación para que maestros en ejercicio y en formación diseñen nuevas tareas que cumplan con las características resaltadas, y se genere así un sistema de tareas que compartidas en el aula de clase amplíen la concepción de la multiplicación.

También se hace evidente, como al pensar las tareas desde un enfoque sociocultural se amplía el campo de posibilidades para pensar las clases, puesto que reconoce a cada estudiante como sujeto que está inmerso en la cultura y que aprende en interacción con sus compañeros y ubica al maestro como orientador de la actividad matemática. Asimismo, se reconoce la importancia de los procesos de mediación entre los instrumentos y el objeto de conocimiento, enriquece el saber del maestro en la medida en que puede comprender la dinámica del aprendizaje y a partir de esto puede pensar mejor su quehacer docente.

El surgimiento de nuevas preguntas, las intervenciones de cada una de las estudiantes, los razonamientos que allí se generaron tanto desde una mirada cualitativa como cuantitativa, los procesos de medición que surgieron por la misma necesidad de dar solución a la tarea, las interacción entre las maestras y las estudiantes y entre ellas mismas, y las interacciones entre sujeto-objeto. Todo ello, permitió promover en la actividad matemática de las niñas procesos de reflexión y análisis frente a la tarea, generó en el aula un espacio donde las estudiantes por si mismas confrontaron sus conjeturas y más aún se acercaron a nuevas miradas no sólo de la multiplicación sino también de los otros elementos matemáticos.

Se reconoce cómo durante todo el proceso narrado en este trabajo y a partir de los objetivos desarrollados y alcanzados, las maestras en formación pudieron corroborar y vivenciar que el aprendizaje de un objeto matemático por parte de un sujeto se logra a partir de la interacción con los instrumentos, lo cual se pudo evidenciar en el hecho de que las estudiantes concibieron la multiplicación desde la proporcionalidad directa, la cual fue asumida como instrumento simbólico que medió en la actividad matemática de las estudiantes.

Finalmente se consideran como las experiencias que se comparten en este trabajo, los elementos que se retomaron de otras investigaciones y los objetos de conocimiento que se dejaron entrever durante toda la investigación; ofrecen una mirada de la multiplicación desde las tareas de proporcionalidad directa, donde se lograron procesos significativos no sólo para las estudiantes sino también para las maestras en formación. Es de aclarar, que no es la única mirada que se le puede dar a este objeto de conocimiento, aún quedan muchos caminos por explorar, que lleven a los estudiantes a desarrollar el pensamiento multiplicativo y a los maestros a reflexionar sobre su enseñanza, ampliando así la concepción de la multiplicación.

## REFERENCIAS

- Ballestero Alfaro, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos . *Cuadernos en Educación Matemática* , 125-137.
- Botero Hernandez , O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la varición*. Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Chamorro, M. D. (2003). *Didáctica de las matemáticas* . España: Pearson.
- Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogía*. España: Paidós.
- Galeano Marín , M. E. (2007). *Estrategias de investigación social cualitativa (El giro en la mirada)*. Medellín : La carreta Editores.
- Institución Educativa Antonio Ricaurte . (2004). Proyecto Educativo Institucional (P.E.I). Medellín .
- Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. (G. Sánchez Barberán, Trad.) Barcelona: Paidós.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencia en Matemáticas*.
- Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología historico cultural. *Avances en psicología latinoamerica*, 33-42.
- Moreno , L., & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas . *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia*, (págs. 40-66). Bogotá .
- Obando Zapata , G. (2012). *Filosofía, matemáticas y Educación: Por un enfoque Histórico-cultural en Educación matemática*. Manuscrito en preparación .
- Obando Zapata, G., Vanegas, D., & Vásquez , N. (2006). Módulo 1: Pensamiento numerico y sistemas numericos. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (s.f.). *Razón, Proporción, proporcionalidad: Configuraciones Epistémicas para la educación Básica*. Manuscrito sometido para publicación .
- Posada Balvin, F., & otros . (2006). *Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Posada Balvin, F., & otros. (2006). *Módulo 3: Pensamiento Métrico y sistema de medidas*. Medellín: Artes y Letras Ltda.

- Posada Balvin, F., & Otros. (2006). *Módulo 3: Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida*. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Ruiz , E., & Valdemoros , M. (Julio de 2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*.
- Ruiz Vahos , M. (2011). *Génesis Instrumental en el estudio de la Elipse desde una perspectiva variacional: el caso de Geogebra* . Medellín .
- Sandoval Casilimas , C. A. (2002). *Investigación cualitativa*. Bogotá : ARFO.
- Stare Pravo , A. R. (2010). *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino*. Tesis de grado de Doctorado. Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Torres Jaramillo, M. C. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en terminos del análisis relacional*. Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Vergel Causado , R. (s.f.). Perspectiva Sociocultural del aprendizaje de la multiplicación. *Memorias XIV Encuentro de geometría y II de Aritmetica* , 494.

## **ANEXOS**

### **ANEXO 1: VISITA AL ZOOLOGICO**

#### **OBJETIVO:**

Analizar cómo las estudiantes resuelven problemas de tipo multiplicativo a través de situaciones planteadas en un contexto determinado.

#### **MOMENTOS DE LA CLASE:**

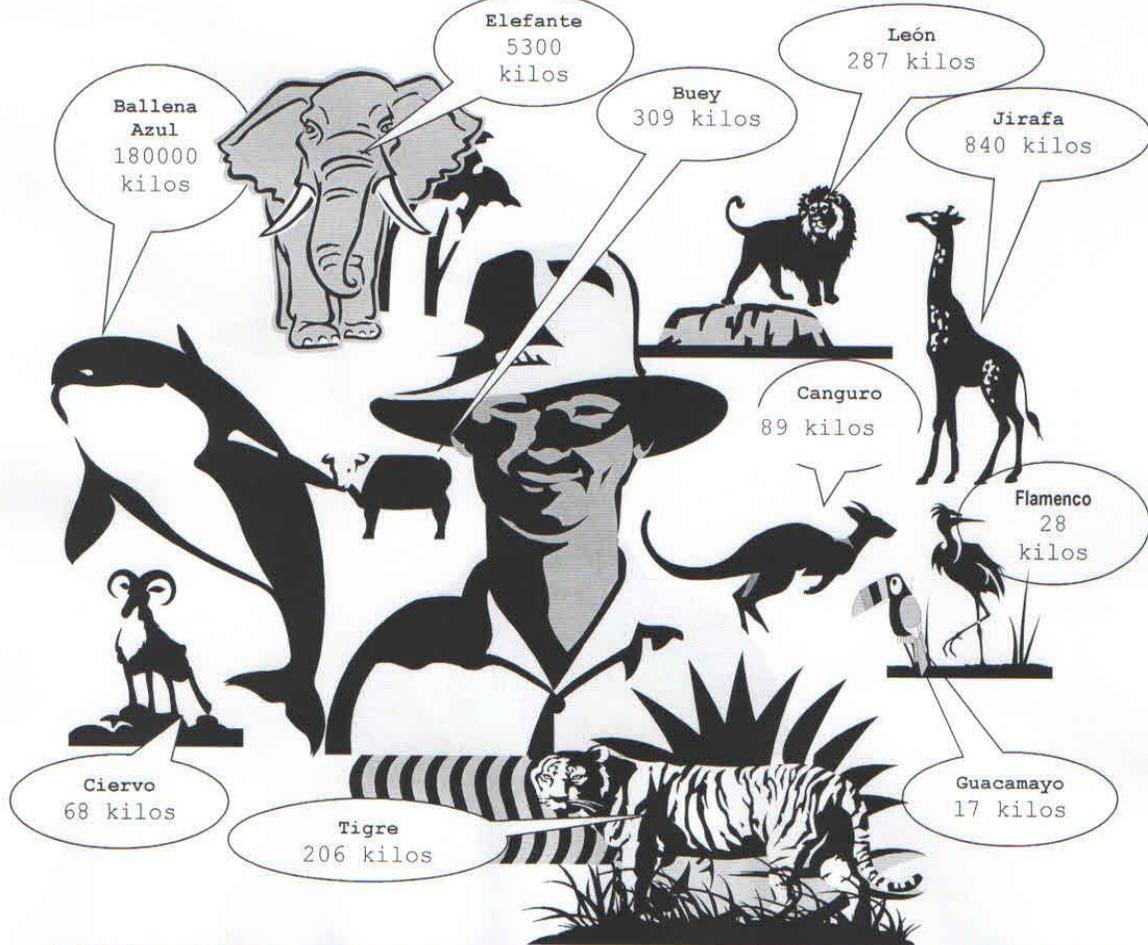
En un primer momento, las niñas se reunirán en parejas y se les entregará la guía del zoológico. La idea es observar la actividad matemática de las niñas, es decir, la manera en que ellas se acercan a un problema de multiplicación, qué estrategias utilizan para llegar a la solución, qué tipo de razonamientos hacen, entre otros elementos que nos permitan tener una idea global sobre lo que las niñas saben de la multiplicación.

En un segundo momento, estableceremos un diálogo con cada una de las parejas de trabajo, para que nos cuenten como resolvieron cada uno de los problemas y a su vez orientarlas para que continúen resolviendo los problemas.

# GUÍA EL ZOOLOGICO

## RESOLUCIÓN PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Observa la siguiente información y soluciona los problemas que se presentan a continuación

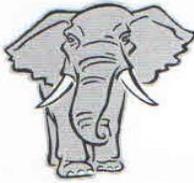


1 Diariamente el  come 6 kilos de carne. ¿Cuántos kilos comerá al término de un año?

**Cálculos**

**Respuesta:**

2 El



es un animal herbívoro, que se alimenta de hierbas, hojas, ramas, raíces, frutos y cortezas, según la zona y la época del año. Debido a su gran tamaño, un ejemplar adulto puede ingerir 1120 kilos de alimento en 8 días en la época de sequía, y más de 1600 kilos en la época húmeda, entonces, ¿cuántos kilos de comida consume en un día de época de sequía? y ¿cuántos kilos de comida consume en un día de época húmeda?

**Cálculos**

**Respuestas:**

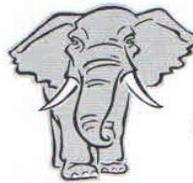
3 Los elefantes también necesitan mucha agua: unos 98 litros por día, que suelen ingerir de una sola vez, incluso en época de abundancia. En las regiones áridas donde el agua escasea, excavan el lecho de los ríos secos hasta alcanzar capas húmedas. ¿Cuántos litros de agua consumen al mes?

**Cálculos**

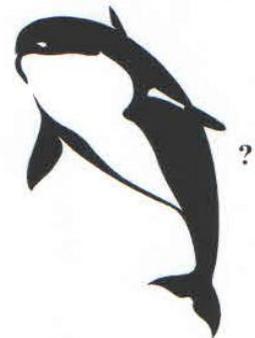
**Respuestas:**

4 ¿Cuál es la diferencia entre el peso del

**Cálculos**



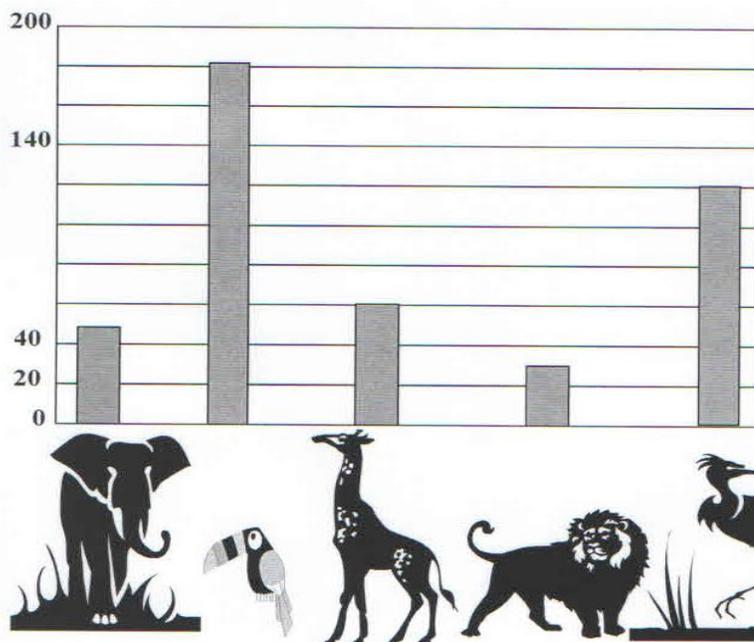
y de la



?

**Respuestas:**

Las preguntas 5 y 6 contéstales teniendo en cuenta la siguiente información:



En todos los zoológicos de Colombia, se ha investigado, como lo muestran las gráficas, la cantidad de animales salvajes que ahí habitan para conservar su especie.

5 ¿Cuántos animales hay aproximadamente en los zoológicos de Colombia?

6 Establece las relaciones que existen en la gráfica anterior, justifica tu respuesta.

- |  |   |
|--|---|
| <p>✓ Entre la cantidad de leones y jirafas se establece una relación de:</p> <p>A. El doble</p> <p>B. El triple</p> <p>C. La cuarta parte</p> <p>D. El cuádruplo</p>       | <p>✓ Entre la cantidad de guacamayos y jirafas se establece una relación de:</p> <p>A. El óctuplo</p> <p>B. El triple</p> <p>C. La mitad más 10</p> <p>D. La mitad</p>          |
| <p>✓ Entre la cantidad de guacamayos y leones se establece una relación de:</p> <p>A. El séxtuplo</p> <p>B. El triple</p> <p>C. La quinta parte</p> <p>D. El cuádruplo</p> | <p>✓ Entre la cantidad de elefantes y flamencos se establece una relación de:</p> <p>A. El doble más 20</p> <p>B. El quíntuplo</p> <p>C. La octava parte</p> <p>D. La mitad</p> |

8 La dieta de un tucán altera entre Frutas y verduras variadas: Naranja, toronja, mandarina, sandía, melón, pera, manzana, papaya, piña, mango, durazno, etc., picados finamente en trozos pequeños. Los veterinarios han comprobado que come aproximadamente 27 trozos al día. ¿Cuántos trozos de frutas comerán todos los tucanes de los zoológicos colombianos?

**Cálculos**

**Respuestas:**

9 Elabora un problema **multiplicativo** usando la información estadística del punto 5.  
(Información, pregunta, cálculo y respuesta)

## ANEXO 2: PLANEACIÓN JUGANDO CON AGUA

### OBJETIVO:

Favorecer el estudio de las fracciones como una relación cuantitativa resultado de un proceso de comparación en un espacio de medida: la capacidad de los vasos, a través de la medición de volúmenes.

### DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Para iniciar la clase empezaremos contándoles a las estudiantes los materiales que se van a utilizar en la clase, tales como: cinco vasos desechables de 1 onza, 2 onzas, 4 onzas, 8 onzas, y 16 onzas, el líquido o sólido medido y la guía. Así mismo, se explicará la actividad a desarrollar la cual se hará en equipos de cuatro integrantes.

Para iniciar se les propone a las niñas la siguiente situación:

En una reunión familiar se está repartiendo gaseosas usando el vaso **C** y se acaban. Se desea seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa a cada uno de los invitados, usando vasos de otros tamaños. ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

En esta primera parte se espera que las estudiantes hagan comparaciones entre los volúmenes de los vasos, y por tanto enfatizan en las relaciones “n veces...” y “n-ésima parte de...” como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra.

Posteriormente se hará una socialización con todo el grupo donde además de indagarles sobre cómo les pareció la actividad nos centraremos en escuchar las soluciones que cada grupo le dio a la situación. También haremos unas preguntas auxiliares tales como:

- Si quiero servirme la misma cantidad de gaseosa que contiene el vaso **B**, utilizando el vaso **A** ¿Cuántos vasos **A** necesito?
- Si un señor desea gaseosa en el vaso **C** utilizando el vaso **D** ¿Qué cantidad de gaseosa del vaso **D** se le debe dar?

Se harán más preguntas de este tipo con la finalidad de completar en el tablero la siguiente tabla de registro

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| Medir    | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> |
| Con      |          |          |          |          |
| <b>A</b> |          |          |          |          |
| <b>B</b> |          |          |          |          |
| <b>C</b> |          |          |          |          |
| <b>D</b> |          |          |          |          |

Luego de lo anterior se les propone a las niñas la siguiente situación

Luciana decide hacer un postre para el cumpleaños de su mamá y encuentra la siguiente receta:

- a) 2 vasos **D** de harina
- b) 2 vasos **C** de azúcar
- c) 8 vasos **B** de jugo de limón
- d) 10 vasos **A** de agua.

- Ahora escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **B**.
- Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **D**.

Como último momento tendremos un espacio de conceptualización donde busquemos aclarar y formalizar las ideas matemáticas encontradas en la realización de la actividad.

## **ANEXO 3: PLANEACIÓN EL JUEGO DE LA RANA**

### **OBJETIVO DE LA CLASE**

Identificar los procesos matemáticos que realizan las estudiantes del grado cuarto, a través de la actividad lúdica llamada el juego de la rana, donde las niñas deberán llevar registro de los puntos obtenidos.

### **MOMENTOS DE LA CLASE:**

Iniciaremos la clase presentándonos y contándoles a las niñas como será nuestro acompañamiento; en qué días y cuáles serán nuestras funciones, dejándoles claro que esos días seremos las profesoras. Luego de esto comentaremos en qué consiste la actividad a realizar, su nombre y sus reglas, las discutiremos con todas las niñas para verificar que queden claras y también por si ellas quieren incluir una nueva al juego. Después, organizaremos el grupo haciéndolas numerarse de 1 a 8, y que se agrupen con las otras niñas que tenga el mismo número, nos ubicaremos en el corredor, al salir del salón a cada grupo se le entregará el material para jugar, se les limitara con un tiempo de 20 minutos.

Estaremos acompañando todo el tiempo la competencia y responder posibles preguntas que le surjan a las niñas al llenar la tabla de puntos, pasado el tiempo estimado, nos reuniremos de nuevo en el salón para saber quiénes fueron las ganadoras en cada equipo, las premiaremos con un dulce, escucharemos una vocera de cada grupo para que nos cuenten cómo llevaron el conteo de los puntos, si lo hicieron sumando, multiplicando o si usaron otra estrategia diferente a estas dos operaciones.

Luego de esto iniciaremos con las actividades de reflexión, si se presenta alguna disputa por errores al anotar los puntos o alguna trampa, sería muy bueno para resolver el asunto con todas las niñas, se podría hacer la tabla en el tablero. Pero si no hay ninguna situación que se pueda aprovechar, seguiremos con las propuestas por nosotras, la idea es que las actividades sean pensadas por parejas y socializadas con todo el grupo.

Para finalizar habrá un cierre por parte de nosotras donde resaltaremos las ideas matemáticas que hayan tenido relevancia a lo largo del desarrollo del juego y de la actividad de reflexión.

Esperamos que en el saludo y presentación de la actividad se vallan unos 15 minutos, luego tendrán 20 para jugar, otros 5 para organizar puntajes y 15 minutos para el cierre. Por eso estimamos que la actividad en su totalidad se desarrolla en 2 horas de clase del colegio, porque 15 minutos no son suficientes para socializar lo ocurrido en el juego y hacer las actividades de reflexión.

## GUÍA

# EL JUEGO DE LA RANA



### MATERIALES:

Tapas, cajas de huevos pintadas, tabla de registro de puntos y Lápiz.

### INSTRUCCIONES DEL JUEGO:

Reúnete con 5 compañeras, luego cada jugador tendrá la posibilidad de lanzar 4 fichas en cada turno y deberá anotar en su tabla la cantidad de fichas caídas en cada color. Es decir cada jugador tendrá la posibilidad de lanzar 12 fichas en todo el juego.

Ganará el jugador que más puntaje obtenga al final de los tres turnos, para dar cuenta de ello cada color tiene los siguientes valores

- Espacio azul da 6 puntos
- Espacio verde da 7 puntos
- Espacio amarillo 8 puntos
- Espacio rojo 9 puntos

### TABLA DE REGISTRO INDIVIDUAL:

|              | Cantidad de fichas en el <b>espacio azul</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio verde</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio amarillo</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio rojo</b> | Puntaje total |
|--------------|--|---|--|--|---------------|
| 1er Turno    |  |   |  |  |               |
| 2do Turno    |  |   |  |  |               |
| 3er Turno    |  |   |  |  |               |
| <b>TOTAL</b> |  |   |  |  |               |

## ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR

1. Andrés obtuvo 72 puntos en total. Si se sabe que solamente lanzó fichas en el espacio amarillo ¿Cuántas fichas fueron lanzadas?  
\_\_\_\_\_
2. Si Sofía quiere obtener 27 puntos lanzando fichas solamente en el espacio rojo ¿Cuántos fichas debe lanzar allí? \_\_\_\_\_
3. En el equipo de Santiago, Andrea y Patricia llenaron la siguiente tabla de registro grupal, pero por descuido faltaron algunos datos. Ayúdales a completarla.

|              | Cantidad de fichas en el <b>espacio azul</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio verde</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio amarillo</b> | Cantidad de fichas en el <b>espacio rojo</b> | Puntaje total |
|--------------|--|---|--|--|---------------|
| 1er Turno    | 0  | 3   | 1  | 0  |               |
| 2 do Turno   | 2  |   | 1  |  | 36            |
| 3er Turno    | 0  |   |  |  | 27            |
| <b>TOTAL</b> |  |   |  |  |               |

## **ANEXO 4: PLANEACIÓN AGUA AZUCARADA**

### **Objetivo del maestro**

Observar cómo las niñas asumen el problema del agua azucarada, qué preguntas se hacen y cómo logran diferenciar las magnitudes que cambian y aquella que permanece igual.

Analizar la forma cómo las niñas manejan las dos cantidades que varían para conseguir un agua azucarada de igual concentración a la presentada por las profesoras.

### **Objetivo de la clase**

Iniciar en el camino de situaciones que involucran la proporcionalidad directa para el aprendizaje de la multiplicación.

### **Tarea**

¿Cómo lograr preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

### **Momentos de la clase**

#### **Primer momento**

Se les explicará a las niñas que la actividad a realizar consiste en preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño. Sólo se les dará como datos importantes la cantidad de vasos de agua y de cubos de azúcar con la que fue preparada.

Para la realización de dicha actividad se les pedirá a las niñas que se organicen en grupos de 4 personas, a cada equipo se les entregará una botella plástica que será distinta para cada equipo, un vaso de 16 onzas, un vaso de 4 onzas, un vaso de 2 onzas y uno de 1 onza, los cuales servirán para medir la cantidad de agua que las niñas pondrán en sus botellas. Además se les dará cierta cantidad de cubos de azúcar.

Es de aclarar que las niñas deberán llevar un registro de los ensayos que hacen en busca de su agua azucarada, a través de la siguiente tabla:

| <b>Ensayo</b> | <b>Cantidad de agua</b> | <b>Cantidad de azúcar</b> |
|---------------|-------------------------|---------------------------|
| Ensayo 1      |                         |                           |
| Ensayo 2      |                         |                           |
| Ensayo 3      |                         |                           |
| Ensayo 4      |                         |                           |

Después de los 4 ensayos deberán decidir cuál es el ensayo que más se aproximó o que logro el mismo sabor del agua azucarada.

### **Segundo momento**

Se hará la socialización para conocer los resultados que obtuvieron los grupos de trabajo, se aprovechará el momento para ver si las estudiantes lograron diferenciar las magnitudes presentes en el problema y cómo manipularon las cantidades que allí aparecen.

### **Tercer momento**

Se presentará una situación hipotética donde ya no tomarán el agua y el azúcar, pero que podrán pensar desde la experiencia anterior a través de una guía de trabajo (ver anexo 1).

### **Cuarto momento**

En un tercer encuentro socializaremos las respuestas que cada grupo dio a las preguntas planteadas en la guía, se propondrá llenar las siguientes tablas, para que las estudiantes teniendo la información organizada, puedan pensar en una regla general que les permita calcular la cantidad de agua y azúcar que se necesitan para preparar cualquier cantidad de recipientes.

| <b>N° de recipientes A</b> | <b>N° de vasos de agua</b> | <b>N° de cucharadas de azúcar</b> |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 2                          |                            |                                   |
| 4                          |                            |                                   |
| 10                         |                            |                                   |
| 20                         |                            |                                   |

| N° de recipientes B | N° de vasos de agua | N° de cucharadas de azúcar |
|---------------------|---------------------|----------------------------|
| 2                   |                     |                            |
| 4                   |                     |                            |
| 10                  |                     |                            |
| 20                  |                     |                            |

## **ANEXO 5: PLANEACIÓN APRIENDIENDO JUNTOS**

### **Objetivo del maestro**

Observar cómo las niñas asumen el problema de la preparación de un pequeño refrigerio para todo el grupo, qué preguntas se hacen y cómo logran diferenciar las magnitudes que cambian y aquellas que permanecen iguales.

Analizar la manera cómo las niñas relacionan las cantidades que varían en la preparación del algo con el dinero recolectado.

### **Objetivo de la clase**

Iniciar en el camino de situaciones que involucran la proporcionalidad directa para el aprendizaje de la multiplicación a través de la preparación de un pequeño refrigerio.

### **Situación**

¿Cómo lograr preparar un algo para todas las compañeras con la cantidad de dinero reunido en el grupo?

### **Momentos de la clase**

En un primer momento, se les propone a las niñas la idea de preparar un refrigerio para la próxima semana, explicándoles que necesitamos la ayuda de todas para definir qué vamos a comer, cuánto cuestan los ingredientes, cuánto dinero necesitamos y si nos alcanza con el dinero recolectado.

Para ello, las estudiantes deberán organizarse en grupos y elegir una opción de algo para proponerla a todo el grupo. En esta parte del trabajo, quedará como tarea que las niñas en compañía de sus padres indaguen sobre los precios de cada ingrediente, para que en la clase siguiente cada equipo tome decisiones.

En un segundo momento, las niñas se reunirán en sus equipos de trabajo y compartirán la lista de precios que trajo cada una y tomarán la decisión sobre la cantidad de ingredientes que utilizarán, los precios que tendrá cada producto y el valor total del dinero que se requiere para hacer el refrigerio.

Luego, una vocera de cada equipo le contará a todo el grupo por qué su propuesta es la más adecuada, además explicará la cantidad de ingredientes que se necesitan y el valor total para realizar el refrigerio, así como la cantidad de dinero que debería de dar cada persona. De todas las propuestas se hará una votación para elegir una.

## ANEXO 6: PLANEACIÓN COLOREADO DE SUPERFICIES

### Objetivo de la clase:

Afianzar en el reconocimiento de las fracciones en un contexto de medida de superficies, para establecer comparaciones a partir del coloreado de superficies de una hoja de papel cuadriculado.

### Momentos de la clase:

A cada niña se le entregará una hoja de papel cuadriculado y se les indicará que deben elegir un color y colorear un medio de la hoja, pero cumpliendo con algunas condiciones tales como: las divisiones que hagan de la hoja deben ser diferente a la representación por las diagonales y a la de las alturas. Además la representación de cada niña debe ser original, no se puede copiar de las compañeras.

Luego de que todas las estudiantes hayan terminado se reunirán en parejas para intercambiar trabajos y revisar lo cada compañera hizo. Posteriormente socializaremos y las niñas deberán justificar por qué el trabajo de sus compañeras cumple o no las condiciones establecidas desde el principio, a través de las siguientes preguntas:

- ¿cuáles son las características principales para que el coloreado si represente un medio de la hoja?
- ¿se representa de la misma manera un medio que la mitad?
- ¿Qué superficie es más grande la hoja completa o un medio de la hoja?

Es de aclarar que estas preguntas son solamente para iniciar la reflexión con las estudiantes, puesto que a medida que éstas socialicen sus representaciones saldrán otro tipo de preguntas que les permitirán comprender de manera significativa las fracciones unitarias.

Después de hacer algunas precisiones con las chicas acerca de lo observado y discutido en la socialización, un tercio de la hoja. Finalmente socializaremos todo el trabajo hecho.

## ANEXO 7: PERMISOS DE LOS PADRES DE LAS NIÑAS

Medellín, Octubre 30 de 2012

Señores Padres de Familia

Institución Educativa Antonio Ricaurte

Asunto: Consentimiento para participar en el proceso de práctica y en la investigación sobre "las estructuras multiplicativas". Para los grados 3º, 4º y 5º.

Cordial saludo

Como es de su conocimiento, el colegio viene adelantando diferentes esfuerzos con el fin de asegurar la calidad académica del servicio educativo que presta. Parte de estos esfuerzos están orientados a los procesos de formación de sus docentes, de seguimiento y evaluación a los procesos curriculares adelantados, y por supuesto, al rediseño curricular permanente en las áreas básicas de formación. En el marco de las estrategias adelantadas para lograr tales fines, la investigación educativa se presenta como un baluarte importante en la consolidación de las metas propuestas por el colegio. Es por eso que durante el presente año lectivo y el siguiente (2012-2013), conjuntamente con la coordinación del colegio, hemos decidido participar en el desarrollo de la investigación sobre "estructuras multiplicativas". La cual realizarán los estudiantes de la Universidad de Antioquia: Jéssica Tapias, Liliana Quintero López, Sara María Mejía Vasco, Duvan Ernesto Restrepo, Jhonatan Restrepo, Susana Betancur, en el marco de su proceso de práctica y de su trabajo de grado para optar el título de licenciados en Básica con énfasis en Matemáticas.

Esta investigación, en el área de las matemáticas, se adelantará en los grados de tercero a quinto

La siguiente comunicación tiene como objetivo solicitar su consentimiento que su hija tome parte en tal estudio. Es importante que sean consentientes que ustedes son libres de permitir o no la participación de su hija en el estudio, o incluso de retirarse en cualquier momento sin afectar su relación, y la de su hija con los estudiantes de la Universidad, el docente del curso, o el Colegio.

El propósito de este estudio es comprender los procesos cognitivos y matemáticos implicados en el desarrollo del aprendizaje de las estructuras multiplicativas en niños en edad escolar comprendida entre los grados tercero a quinto de la educación básica, y sobre dichas comprensiones, realizar procesos de intervención pedagógica y didáctica que permite el diseño y ejecución de currículos acordes con estos procesos. El procedimiento será un diseño de estudio de caso, donde se hará seguimiento al trabajo de los estudiantes de estos grados, en los grupos de trabajo en que están organizados en el aula de clase.

Los datos serán recogidos a partir de las situaciones de aula que los estudiantes de la Universidad proponen a los estudiantes en el desarrollo normal del currículo de matemáticas de dichos grados, durante el presente año lectivo y el 2013. La recolección de datos involucrará documentos (las anotaciones en el cuaderno, o en las hojas de trabajo hechas por los estudiantes y el docente, las evaluaciones de los estudiantes y la situaciones de aula propuestas por el docente), material audiovisual (grabaciones de audio, y videograbaciones de algunas de las clases), entrevistas (transcripciones de las entrevistas a algunos estudiantes), y notas de campo de observación de aula (al trabajo realizado por los docentes y los estudiantes). Por lo tanto, las personas involucradas en la recolección de datos serán tanto el docente, como los estudiantes de las clases de matemáticas de los grados antes mencionados.

No sobra decir que estaremos atentos a responder cualquier inquietud o pregunta sobre el estudio antes de permitir la participación de su hija en el mismo, o en el momento que usted lo considere necesario.

Es importante resaltar que la información recogida en el proceso de investigación sólo será ~~utilizada~~ con fines académicos en relación con las metas propuestas por la investigación, y los resultados o conclusiones de la misma bajo ninguna circunstancia serán utilizados con fines de evaluación y promoción. Este tipo de procesos serán adelantados por los docentes titulares de los cursos, bajo los parámetros y normas determinadas por la institución. Adicionalmente, la identidad de los participantes será protegida en el desarrollo de la investigación y no se permitirá que personas individuales sean relacionadas directamente con las conclusiones de la investigación, y la identidad de su hijo(a) como un participante será conocida por los investigadores, y con fines analíticos.

Igualmente debemos resaltar que no hay riesgos potenciales conocidos y/o malestar relacionado con este tipo de estudio.

Los beneficios esperados relacionados con la participación de su hija es una mejor comprensión de los procesos de pensamiento matemático de los niños en edad escolar, y en relación con esta comprensión, la reconceptualización de los procesos curriculares y didácticos que orientan el trabajo institucional en el área de matemáticas. Cualquier publicación o divulgación de los resultados reconocerá la participación de la institución y sus estudiantes en el presente estudio.

Muchas gracias por su colaboración,

Gilberto Obando Zapata

Asesor de práctica U de A

María Denis Vanegas Vasco

Asesora de práctica U de A

Liliana Quintero, Jéssica Tapias, Jhonatan Gallego, Sara Mejia, Susana Betancur, Duban Restrepo.

Estudiantes de Práctica U de A

Por favor firme su consentimiento con pleno conocimiento de la naturaleza y el propósito de los procedimientos. Una copia de este consentimiento será remitida al archivo de la institución, y otra al archivo de los estudiantes de práctica (investigadores)

Nombre del alumno: Sara Marcela C. Grado: 4-B

Firma Padre de Familia

Nombre Padre de Familia: Joime C. Fecha: 13-11-12

Firma Madre de Familia

Nombre Madre de Familia: ADRIANA S. Fecha: 13-11-12