

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Pregrado en Matemáticas

Trabajo de Grado

Fibraciones de Hopf

Jáider Luis Cogollo Correa

Asesor: Carlos Alberto Marín Arango
Profesor instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia

Agradecimientos

En el camino recorrido hasta la realización de este trabajo de grado, debo agradecer la voluntad de apoyarme y guiarme de quienes se vieron involucrados en el proceso. Una mención especial merece mi familia, siempre incondicional conmigo, asimismo, el docente Carlos Marín, mi asesor de trabajo, quien con su experiencia y paciencia me llevó de la mano para poder comprender las matemáticas necesarias, su enorme soporte fue fundamental para la realización de este proyecto.

Índice de figuras

1.1. Plano de Fano	12
2.1. Homotopía de caminos $\alpha \sim \beta$	23
2.2. Ilustración prueba de la Proposición (2.2.11)	26
2.3. Ilustración correspondencia del levantamiento	27

Índice general

1. Los cuaternios y los octonios	3
1.1. Un poco de historia	3
1.2. Álgebras de división y la función de Hurwitz-Radon	5
1.3. Los cuaternios	8
1.4. Los Octonios	12
1.4.1. Sobre el método de Cayley-Dickson	14
2. Un poco de topología	17
2.1. Topología general	17
2.2. El grupo fundamental y espacios de recubrimiento	22
3. Las Fibraciones de Hopf	31
3.1. Acciones de grupo	31
3.2. Espacios proyectivos	37
3.3. Las Fibraciones de Hopf	40
3.3.1. La fibración de Hopf para S^1, S^3 y S^7	40
3.4. La fibración de Hopf para S^{15}	42
3.4.1. Espacios proyectivos sobre los octonios	44
4. Comentarios y observaciones finales	45
4.1. Grupos de homotopía	45
4.2. Comentarios sobre la homotopía de esferas	46
4.3. Secuencia larga en homotopía para fibraciones	48
4.3.1. Aplicaciones	48

Introducción

La *fibración de Hopf*, llamada así por el trabajo de Heinz Hopf, quien la estudió y describió en su artículo de 1931 titulado *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, [17], es una función que brinda una conexión entre las esferas de dimensión 2 y 3. En el sentido que se expresa la esfera S^3 como una unión disjunta de esferas uno-dimensionales, la cual es indexada sobre la esfera de dimensión dos, S^2 . Esto se entiende como la existencia de una función continua y sobreyectiva, $\rho : S^3 \rightarrow S^2$ que entre otras cosas, verifica que para cada $x \in S^2$, se tiene $\rho^{-1}(x) = S^1$.

Al igual que todo haz de fibras, la fibración de Hopf posee la propiedad que el espacio total (en este caso S^3) es localmente un producto de un abierto de la base (en este caso S^2) por la fibra (en este caso S^1). Sin embargo, es una fibración no trivial, o sea, el espacio S^3 no es en sentido global un producto de S^2 y S^1 , aunque, como ya mencionamos, a nivel local es indistinguible de este.

Esta fibración se tornó importante en matemáticas pues es uno de los ejemplos más tempranos de fibraciones no triviales; igualmente, su descubrimiento impulsó el estudio de este tipo de construcciones, especialmente motivado por la clásica *conjetura de Blaschke de geometría diferencial*, [26]. Asimismo, por la clasificación de fibraciones de esferas y otros espacios por grandes esferas salvo difeomorfismo, ver [10, 11, 12] y [33]. También esta fibración tiene una amplia variedad de aplicaciones en física, una descripción detallada de tales aplicaciones es presentada en el trabajo titulado, *The Hopf fibration seven times in physics* [36], ver también [28]. Trabajos recientes relacionados con fibraciones similares a las de Hopf, estudian el problema de las fibraciones de Hopf afines, el cual consiste en determinar para cuáles pares de enteros (p, n) se puede tener una función continua $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de modo que para cada $x \in \mathbb{R}^{n-p}$ se tiene $\rho^{-1}(x) = \mathbb{R}^p$; y además que todos estos hiperplanos sean alabeados, estos es, no se cruzan y no son paralelos, ver [29, 30].

En cierto sentido, la topología algebraica contemporánea ha crecido con las fibraciones de Hopf: el desarrollo de la teoría de las clases características, la teoría de la homotopía y la K -teoría han estado muy influenciadas por el estudio de los fibraciones de Hopf; ver [3, 4, 6, 20, 21].

El trabajo de Hopf presentado en [17] se ha extendido a otras dimensiones. Dando lugar al plural en la terminología, *fibraciones de Hopf*, empleado ya en párrafos anteriores, se trata de otras fibraciones, en los cuales tanto el espacio total como la base y la fibra son esferas.

$$\begin{array}{cccc}
 S^0 \hookrightarrow S^1 & S^1 \hookrightarrow S^3 & S^3 \hookrightarrow S^7 & S^7 \hookrightarrow S^{15} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 S^1 & S^2 & S^4 & S^8
 \end{array}$$

La topología algebraica impuso restricciones en las posibles dimensiones de las esferas y en las fibras, el listado en el diagrama anterior contiene todos los casos posibles. Esta unicidad se ha estudiado en el contexto de la topología diferencial y la topología algebraica, dando lugar al término conocido como *invariante de Hopf*, ver [1, 2].

Infortunadamente, las fibraciones de Hopf son poco conocidas en el plan de estudios de pregrado, en parte porque las presentaciones generalmente asumen antecedentes en álgebra abstracta o teoría de las variedades suaves. Sin embargo, esto no es una restricción necesaria. Es por esto que

nos proponemos en este trabajo presentar una introducción a la fibración de Hopf que requiere solo álgebra lineal, un poco de geometría analítica y topología elemental. Nuestro enfoque utiliza el álgebra de los cuaternios, e ilustra algunas de las propiedades algebraicas y geométricas de la fibración de Hopf. Explicamos la conexión íntima de esta fibración con las rotaciones del espacio \mathbb{R}^3 que es la base de su natural aplicación a la física. También describiremos de forma simple la construcción de las demás fibraciones extendiendo el razonamiento anterior, a las demás *álgebras normadas de división con unidad* existentes, los reales \mathbb{R} , los complejos \mathbb{C} y los octonios \mathbb{O} . Finalmente, empleando algunas herramientas de topología describiremos el resultado de Adams, [1] sobre la unicidad de las fibraciones anteriores.

En la medida de lo posible trataremos de exponer las curiosidades entorno a los números 1, 2, 4, 8. Por ejemplo, cualquier álgebra de división tiene dimensión 1, 2, 4 u 8, ver [22, 27]. También las únicas álgebras de división normadas con unidad, son el álgebra de los reales \mathbb{R} , de los complejos \mathbb{C} , de los cuaternios \mathbb{H} y de los octonios \mathbb{O} , [18]. Con relación a las fibraciones de Hopf, estos números constituyen respectivamente las dimensiones de los espacios que contienen las esferas

$$S^0 \subset \mathbb{R}, S^1 \subset \mathbb{C}, S^3 \subset \mathbb{H}, S^7 \subset \mathbb{O};$$

de las cuales S^0, S^1, S^3 son las únicas esferas que admiten estructuras de grupos de Lie, S^7 es un pseudo grupo dado que su producto no es asociativo, no obstante, todas son las únicas esferas paralelizables y son precisamente las fibras en todas las fibraciones de Hopf posibles. Finalmente, cabe mencionar que tales números constituyen los cuatro primeros términos de *la sucesión de Hurwitz-Radon*, obtenida por la evaluación en potencias de 2 de la función que lleva el mismo nombre, ver [30].

Capítulo 1

Los cuaternios y los octonios

1.1. Un poco de historia

Hay exactamente cuatro álgebras de división normadas: los números reales (\mathbb{R}), números complejos (\mathbb{C}), cuaternios (\mathbb{H}) y octonios (\mathbb{O}). Los números reales son la base confiable de la familia, el campo ordenado completo con el que todos contamos. Los números complejos son un hermano menor un poco menos conocido pero aún respetable: no es ordenado, pero es algebraicamente completo. Los cuaternios, al no ser conmutativos, son los primos excéntricos que son rechazados en importantes reuniones familiares. Pero los octonios son el viejo tío loco que nadie deja salir del ático: no son conmutativos, ni son asociativos.

La mayoría de los matemáticos han escuchado la historia de cómo Hamilton inventó los cuaternios. En 1835, a la edad de 30 años, descubrió cómo tratar los números complejos como pares de números reales. Fascinado por la relación entre \mathbb{C} y la geometría bidimensional, intentó durante muchos años inventar un álgebra más grande que desempeñara un papel similar en la geometría tridimensional. En el lenguaje moderno, parece que estaba buscando un álgebra de división normada tridimensional. Su búsqueda llegó a su punto culminante en octubre de 1843. Al notar que realmente necesitaba un álgebra de 4 dimensiones.

Finalmente, el 16 de octubre de 1843, mientras caminaba con su esposa por el canal real, hizo su descubrimiento trascendental. *“Es decir, en ese momento sentí como un corto circuito de pensamientos; y las chispas que cayeron de él fueron las ecuaciones fundamentales entre i, j, k ; exactamente como las he usado desde entonces”*. Y en un famoso acto de vandalismo matemático, talló estas ecuaciones en una piedra del Puente Brougham:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Una razón por la que esta historia es tan conocida es que Hamilton pasó el resto de su vida obsesionado con los cuaternios y sus aplicaciones a la geometría [13, 15]. Y por un tiempo, los cuaternios estuvieron de moda. Se les hizo un tema de examen obligatorio en Dublín, y en algunas universidades estadounidenses fueron las únicas matemáticas avanzadas que se enseñaron. Gran parte de lo que ahora hacemos con escalares y vectores en \mathbb{R}^3 se hizo usando cuaternios reales e imaginarios. Se desarrolló una escuela de “cuaternionistas”, que fue dirigida después de la muerte de Hamilton por Peter Tait de Edimburgo y Benjamin Peirce de Harvard. Tait escribió 8 libros sobre los cuaternios, enfatizando sus aplicaciones a la física. Cuando Gibbs inventó la notación moderna para el producto escalar y el producto cruzado, Tait lo condenó como una “monstruosidad hermafrodita”. Se produjo una guerra de polémicas, con luminarias de cada lado. Finalmente, los cuaternios perdieron, y adquirieron una ligera mancha de desgracia de la que nunca se recuperaron por completo, esta historia más detallada aparece en [8].

Menos conocido es el descubrimiento de los octonios por John T. Graves, amigo de Hamilton de la universidad. Fue el interés de Graves en el álgebra lo que hizo que Hamilton pensara en

números complejos y trillizos en primer lugar. El mismo día después de la caminata con su esposa, Hamilton envió una carta de 8 páginas describiendo los cuaternios a Graves. Éste respondió el 26 de octubre, felicitando a Hamilton por la audacia de la idea, pero agregando: “Todavía hay algo en el sistema que me molesta. Todavía no tengo ninguna visión clara de hasta qué punto estamos en libertad de crear arbitrariamente imaginarios, y dotarlos de propiedades sobrenaturales”. Graves se puso a trabajar en esto y el 26 de diciembre, escribió a Hamilton describiendo un nuevo álgebra de 8 dimensiones, que llamó las “octavas”. Mostró que eran un álgebra de división normada, y usó esto para expresar el producto de dos sumas de ocho cuadrados perfectos como otra suma de ocho cuadrados perfectos: *el teorema de los ocho cuadrados*, ver [14]. En enero de 1844, Graves envió tres cartas a Hamilton para ampliar su descubrimiento. Consideró la idea de una teoría general, e intentó construir un álgebra de división normada de dimensión 16, pero se encontró con un error inesperado y llegó a dudar de que esto fuera posible. Hamilton en julio le escribió a Graves señalando que los octoniones no eran asociativos: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$, si A, B, C son cuaternios, pero no así, generalmente, con sus octavas. Hamilton inventó por primera vez el término *asociativo* aproximadamente en este momento, por lo que los octonios pueden haber jugado un papel en aclarar la importancia de este concepto. Hamilton ocupado en su trabajo con los cuaternios postergó una posible publicación de los avances realizados por Graves.

Mientras tanto, el joven Arthur Cayley, recién salido de Cambridge, había estado pensando en los cuaternios desde que Hamilton anunció su existencia. Parecía estar buscando relaciones entre los cuaternios y las funciones hiperelípticas. En marzo de 1845, publicó un artículo en la revista *Philosophical Magazine* titulado *Sobre las funciones elípticas de Jacobi*. La mayor parte de este documento fue un intento de refutar un artículo que señalaba errores en el trabajo de Cayley sobre funciones elípticas. Aparentemente como una ocurrencia tardía, añadió una breve descripción de los octonios. De hecho, este documento estaba tan lleno de errores que se omitió de sus trabajos recopilatorios, excepto la parte sobre los octonios [7].

Molesto por haber sido tan retrasada su publicación, Graves adjuntó una posdata a su propio artículo que debía aparecer en el siguiente número de la misma revista, diciendo que había sabido de los octonios desde la Navidad de 1843. El 14 de junio de 1847, Hamilton contribuyó con una breve nota a la revista de la Real Academia Irlandesa, garantizando la prioridad de Graves. Pero ya era demasiado tarde: los octonios se conocían como números de Cayley. Aún peor, Graves luego descubrió que su teorema de los ocho cuadrados ya había sido descubierto por C. F. Degen en 1818.

¿Por qué languidecen los octoniones en tanta oscuridad en comparación con los cuaterniones? Además de su nacimiento poco glorioso, una razón es que carecían de un defensor incansable como Hamilton. Pero seguramente, una razón fundamental para esto es que carecían de una aplicación clara a la geometría y la física. Los cuaternios unitarios forman el grupo $SU(2)$, que es la doble cubierta del grupo de rotaciones $SO(3)$. Esto los hace muy adecuados para el estudio de las rotaciones. Los octonios, por otro lado, no. Su relevancia para la geometría era bastante oscura hasta 1925, cuando Élie Cartan describió la simetría entre vectores y espinores en el espacio euclidiano de 8 dimensiones. Su potencial relevancia para la física se notó en un artículo de 1934 de Jordan, von Neumann y Wigner sobre los fundamentos de la mecánica cuántica. Varios intentos de aplicar la mecánica cuántica octoniónica a la física nuclear y de partículas tuvieron poco éxito. El trabajo en este sentido continuó bastante lento hasta la década de 1980, cuando se presenta la forma en que los octonios explican algunas características curiosas de la teoría de cuerdas, [23].

1.2. Álgebras de división y la función de Hurwitz-Radon

Tanto en la introducción de este trabajo, como en la sección anterior, para permitirnos describir un poco tanto el objetivo de este texto como la historia de los cuaternios y los octonios, hemos empleado algunos términos matemáticos sobre los cuales diremos un poco a seguir.

Un espacio vectorial será un módulo de dimensión finita sobre el campo de los números reales. Un álgebra A será un espacio vectorial equipado con un mapa bilineal $m : A \times A \rightarrow A$ llamado la multiplicación y un elemento distinto de cero $1 \in A$ llamado la unidad tal que $m(1, a) = m(a, 1) = a$, para cada $a \in A$. Como es usual, escribimos ab en lugar de $m(a, b)$. Dado un álgebra A , es posible pensar libremente en los números reales como elementos de A a través del mapa $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \alpha \cdot 1 \in A$.

Un álgebra A es un álgebra de división, si para cada par $a, b \in A$ con $ab \neq 0$, se verifica que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. De manera equivalente, A es un álgebra de división si las operaciones de multiplicación a izquierda y a derecha por cualquier elemento distinto de cero son invertibles. Un álgebra normada es un álgebra A que también es un espacio vectorial normado con $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. Esto implica que A es un álgebra de división y que $\|1\| = 1$.

Decimos que un álgebra A admite inversos multiplicativos si para cualquier elemento no cero $a \in A$ hay un elemento $a^{-1} \in A$ con $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Un álgebra asociativa tiene inversos multiplicativos, si y solo si, es un álgebra de división. Sin embargo, esto falla para álgebras no asociativas. Existen álgebras que admiten inversos multiplicativos, pero no son álgebras de división, estas álgebras obedecen la construcción de Cayley-Dickson, ver [5, Sección 2.2]. Por otro lado, es posible construir un álgebra de división sin inversos multiplicativos. Basta considerar los cuaternios con una modificación en su producto. Haciendo $i^2 = -1 + \epsilon j$ para algún número real suficientemente pequeño ϵ . El elemento i tiene ambos inversos a derecha e izquierda, pero éstos no coinciden.

Hay tres niveles o conceptos de asociatividad. Un álgebra es asociativa por potencias si la subálgebra (aquí subálgebra es entendida conteniendo la unidad) generada por cualquier elemento es asociativa. Más concretamente, si $a \in A$, entonces si se realiza la multiplicación a por sí mismo, sin importar la cantidad de veces, entonces el orden en que se realizan las operaciones no importa, así por ejemplo

$$a(a(aa)) = (a(aa))a = (aa)(aa).$$

Claramente toda álgebra asociativa, es asociativa por potencias. Pero no al revés. Los octonios se presentan como ejemplo para esto. Asimismo, se dice que un álgebra es alternativa si la subálgebra generada por cualquiera dos elementos es asociativa. Gracias a un teorema no trivial de Emil Artin [34, 38], la condición anterior es equivalente al requerir que dos de las fórmulas

$$a(bb) = (ab)b, (aa)b = a(ab), a(ba) = (ab)a.$$

se verifiquen para cualesquier dos elementos $a, b \in A$.

Es claro que toda álgebra asociativa, es alternativa. Pero no al revés. Los octonios son un álgebra alternativa que no es asociativa. Note que cualquiera par de las igualdades anteriores, implica la restante, por lo que las personas generalmente toman la primera y la última como la definición de álgebra alternativa.

Para ver este hecho, tenga en cuenta que cualquier álgebra tiene un mapa trilineal

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A^3 \rightarrow A$$

llamado el asociador definido por $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$. El cual mide el fallo de la asociatividad de A . Del mismo modo que el conmutador $[a, b] = ab - ba$ mide el fallo de la conmutatividad. Ahora, el conmutador es un mapa bilineal antisimétrico, lo que significa que cambia de signo cada vez que se intercambian dos argumentos $[a, b] = -[b, a]$, para cada $a, b \in A$. O de forma equivalente, $[a, a] = 0$, para cada $a \in A$.

De lo anterior, es natural preguntar si el asociador también es antisimétrico (o alternado). De hecho, esto se cumple precisamente cuando A es un álgebra alternativa. La razón es que cada ecuación que caracteriza este concepto dice que el asociador se anula cuando hay un par de argumentos que son iguales, o de manera equivalente, que cambia de signo cuando se cambia ese par de argumentos. Para ver esto basta notar que $0 = [a - b, a - b, c] = [-b, a, c] + [a, -b, c]$. Sin embargo, tenga en cuenta que si el asociador cambia de signo cuando cambiamos los argumentos i -ésimo y j -ésimo, asimismo cuando cambiamos los argumentos j -ésimo y k -ésimo, debe cambiar el signo cuando cambiamos el argumento i -ésimo y k -ésimo. Por lo tanto, cualquiera dos de las igualdades que definen el concepto de álgebra alternativa implica la tercera.

Si la subálgebra generada por cualquier tres elementos es asociativa, *el álgebra es asociativa*.

Volviendo con lo antes comentado sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ tenemos:

Teorema 1.2.1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ son las únicas álgebras reales de división normadas.

Teorema 1.2.2. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ son las únicas álgebras reales de división alternativas.

El teorema 1.2.1 se remonta a un artículo de 1898 de Hurwitz [18]. Posteriormente se generalizó en muchas direcciones, por ejemplo, sobre álgebras sobre otros campos. Una versión del teorema 1.2.2 aparece en un artículo de 1930 de Zorn [38]. Para ver pruebas modernas de ambos teoremas, consulte el excelente libro de Schafer sobre álgebras no asociativas [34].

Observamos que no declaramos que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ son las únicas álgebras de división. Esto no es verdad. Por ejemplo, al estudiar los cuaternios veremos una forma de obtener un álgebra de división de dimensión 4 la cual no tienen inversos multiplicativos. Sin embargo, tenemos este hecho:

Teorema 1.2.3. Todas las álgebras de división tienen dimensión 1, 2, 4 u 8.

Esto fue demostrado independientemente por Kervaire [22] y Bott-Milnor [27] en 1958. Sin embargo, en lo que sigue, nuestro enfoque principal no estará en los resultados generales sobre las álgebras de división. En cambio, nos concentramos en las características especiales de los cuaternios y los octonions.

Para finalizar esta sección hablemos un poco sobre la función de Hurwitz-Radon. Esta es una función $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como sigue. Cada número natural N puede escribirse de la forma $N = 2^n(2m + 1)$, y la función ρ depende solamente de la parte diádica para N , así $\rho(N) = \rho(2^n)$.

$$\rho(N) = \begin{cases} 2n + 1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ 2n, & n \equiv 1, 2 \pmod{4}; \\ 2n + 2, & n \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases}$$

A modo ejemplo calculamos algunos valores en la siguiente tabla

N	(n, m)	$\rho(N)$	N	(n, m)	$\rho(N)$	N	(n, m)	$\rho(N)$	N	(n, m)	$\rho(N)$
1	(0, 0)	1	5	(0, 2)	1	9	(0, 4)	1	13	(0, 6)	1
2	(1, 0)	2	6	(1, 1)	2	10	(1, 2)	2	14	(1, 3)	2
3	(0, 1)	1	7	(0, 3)	1	11	(0, 5)	1	15	(0, 7)	1
4	(2, 0)	4	8	(3, 0)	8	12	(2, 1)	4	16	(4, 0)	9

Los números $N = 1, 2, 4, 8$ son los únicos valores para los cuales se verifica $\rho(N) = N$. Notemos que al evaluar la función de Hurwitz-Radon en las potencias de 2 resulta la sucesión de Hurwitz-Radon

$$1, 2, 4, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24, 25, 26, \dots$$

cuyos primeros términos son 1, 2, 4, 8.

La función de Hurwitz-Radon fue descubierta entorno de 1920 de forma independiente por Adolf Hurwitz, [19] y Jean Radon [32]. Ambos trabajaban en el problema de composición de formas cuadráticas, estas son identidades del tipo

$$(x_1^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + \cdots + y_s^2) = z_1^2 + \cdots + z_N^2$$

en que z_1, \dots, z_N son formas bilineales con coeficientes reales en $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$. Es decir, cada z es una combinación bilineal de términos de la forma $x_i y_j$. La identidad anterior se dice de tamaño $[r, s, N]$. Encontrar este tipo de relaciones multiplicativas entre formas cuadráticas fue motivado por el deseo de generalizar algunas relaciones de este tipo bien conocidas en ese momento. Por ejemplo,

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$$

conocida como la *identidad de Brahmagupta-Fibonacci*. La cual es equivalente a la multiplicatividad de la norma en los números complejos. Esto es, si $z = a + bi, w = c + di$ son números complejos, entonces

$$\|z\| \cdot \|w\| = \|a + bi\| \cdot \|c + di\| = \|(a + bi)(c + di)\| = \|z \cdot w\|.$$

Lo cual es inmediato expandiendo el lado derecho y elevando al cuadrado en ambos lados.

$$\|a + bi\|^2 \cdot \|c + di\|^2 = \|(ac - bd) + i(ad + bc)\|^2,$$

se sigue por definición de la norma de números complejos que esto es equivalente con

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

También se conocía la *identidad de los cuatro cuadrados de Euler* equivalente a la multiplicatividad de la norma de los cuaternios, y que es dada por

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = & (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 \\ & + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 \\ & + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 \\ & + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

esta identidad fue descubierta por Euler en 1748, casi cien años antes del descubrimiento de los cuaternios por Hamilton. También la *identidad de los ocho cuadrados de Degen*, descubierta por éste en 1818, la cual corresponde con la multiplicatividad de la norma en los octonios.

Casos triviales suceden para ternas de la forma $[r, s, rs]$. En 1898, Hurwitz resuelve el problema para el caso $r = s = N$. Dando lugar al famoso teorema 1, 2, 4, 8, que establece que una identidad cuadrática de tamaño $[N, N, N]$ existe solo para $N \in \{1, 2, 4, 8\}$. Este resultado es equivalente al enunciado en el teorema 1.2.1, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ son las únicas álgebras reales de división normadas. Hurwitz y Radon probaron que una identidad de tamaño $[r, N, N]$ existe si, y solamente si, $r \leq \rho(N)$. En particular, para $r = s = N$ se tiene la existencia si $\rho(N) = N$, es decir para $N \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Hurwitz planteó el problema de caracterizar todas las tripletas $r, s, N \in \mathbb{N}$ para los cuales existe una identidad cuadrática de tamaño $[r, s, N]$. Este problema permanece abierto y ha tenido algunas soluciones parciales, y extensiones a composición de formas cuadráticas en campos de característica diferente de dos, ver [35].

1.3. Los cuaternios

El espacio de los cuaternios \mathbb{H} , es el \mathbb{R} -espacio vectorial de base $\{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Esto es, \mathbb{H} es el espacio constituido de los vectores de la forma $q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$, donde $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Los cuaternios $1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son llamados los *cuaternios básicos o unitarios*. Queda subentendido de lo anterior, que sobre los cuaternios la operación de suma se realiza componente por componente; igual que el producto escalar. Más precisamente,

$$(x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}) + (x' + y'\hat{i} + z'\hat{j} + w'\hat{k}) = x + x' + (y + y')\hat{i} + (z + z')\hat{j} + (w + w')\hat{k},$$

$$\lambda \cdot (x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}) = \lambda x + (\lambda y)\hat{i} + (\lambda z)\hat{j} + (\lambda w)\hat{k}.$$

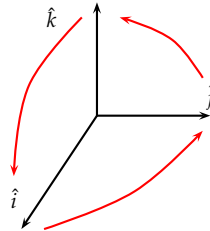
Como \mathbb{R} espacio vectorial de dimensión 4, este espacio es naturalmente identificado con \mathbb{R}^4 por medio de la prescripción:

$$\mathbb{H} \ni q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k} \longleftrightarrow (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

En este espacio, destacamos dos subespacios: el subespacio de los *cuaternios reales u escalares* constituido de los cuaternios de la forma $x = x + 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ naturalmente identificado con \mathbb{R} ; por otro lado está el subespacio de los *cuaternios imaginarios puros*, constituido de los cuaternios de la forma $y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$ identificado con el espacio \mathbb{R}^3 . Claramente respecto al producto interno usual en \mathbb{R}^4 estos subespacios son ortogonales. De lo anterior, bajo un cierto abuso de notación, es claro que para cada cuaternio $q \in \mathbb{H}$ se tiene $q = a + b$, en que $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^3$.

Sobre los cuaternios se tiene definido un producto (\cdot) , con el cual \mathbb{H} es un álgebra no conmutativa. El producto (\cdot) se ejecuta de forma análoga al producto de polinomios considerando que el producto de los cuaternios unitarios se establece por las relaciones dadas en la siguiente tabla

\cdot	1	\hat{i}	\hat{j}	\hat{k}
1	1	\hat{i}	\hat{j}	\hat{k}
\hat{i}	\hat{i}	-1	$-\hat{k}$	$-\hat{j}$
\hat{j}	\hat{j}	$-\hat{k}$	-1	$-\hat{i}$
\hat{k}	\hat{k}	\hat{j}	$-\hat{i}$	-1



La conjugación de cuaternios es análoga a la conjugación de números complejos. El *conjugado* para $q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$ se define por $\bar{q} := x - y\hat{i} - z\hat{j} - w\hat{k}$. La conjugación es una anti-involución, es decir, al conjugar dos veces un elemento se retorna al elemento original; y además, el conjugado del producto de dos cuaternios es el producto de sus conjugados en orden inverso. Esto es, si $p, q \in \mathbb{H}$, entonces $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$.

La conjugación puede ser empleada para expresar la parte real e imaginaria de un cuaternio. La parte real de $q \in \mathbb{H}$ es $\frac{q+\bar{q}}{2}$, y la parte imaginaria de q es $\frac{q-\bar{q}}{2}$.

La raíz cuadrada del producto de un cuaternio con su conjugado es llamada su *norma* y es denotada por:

$$\|q\| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

Este siempre es un número real no negativo, y coincide con la norma euclidiana usual de \mathbb{R}^4 .

Igual que para los complejos, para un cuaternio $q \neq 0$, el *inverso multiplicativo* se define por la prescripción

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

En particular, si el cuaternio $q \neq 0$ es *unitario*, es decir, tiene norma 1 entonces su inverso multiplicativo es su conjugado, es decir, $q^{-1} = \bar{q}$.

Corolario 1.3.1. *Los cuaternios constituyen un álgebra de división normada no conmutativa.*

La norma para los cuaternios hace posible definir la distancia, $d(p, q) = \|p - q\|$ y otorgar a \mathbb{H} una estructura de espacio métrico. Respecto de la topología inducida por la métrica, las operaciones de multiplicación y adición son continuas.

Al multiplicar un cuaternio por un número real, su norma coincide con el valor absoluto del real por la norma del cuaternio. Esto es, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{H}$ entonces

$$\|\lambda q\| = |\lambda| \|q\|.$$

Este es un caso particular de que la norma en los cuaternios es multiplicativa, es decir dados $p = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k} \in \mathbb{H}$, se verifica:

$$\|p \cdot q\| = \|p\| \|q\|.$$

La igualdad anterior en las coordenadas de p y q es simplemente la igualdad en 1.1,

$$\begin{aligned} \|p\|^2 \|q\|^2 &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = (ax - by - cz - dw)^2 \\ &\quad + (ay + bx + cw - dz)^2 \\ &\quad + (az - dw + cx + dy)^2 \\ &\quad + (aw + bz - cy + dx)^2 \\ &= \|p \cdot q\|^2. \end{aligned}$$

Para su verificación basta considerar la representación de los cuaternios sobre las matrices 2×2 con entradas complejas:

$$\mathbb{H} \rightarrow M(2, \mathbb{C}), p = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k} \mapsto \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

Bajo esta representación notamos que si $p = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, entonces

$$\|p\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \det \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Por la propiedad multiplicativa de los determinantes, si $p = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$

$$\begin{aligned} \|p\|^2 \|q\|^2 &= \det \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x + yi & z + wi \\ -z + wi & x - yi \end{pmatrix} \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + yi & z + wi \\ -z + wi & x - yi \end{pmatrix} \right] \\ &= \|p \cdot q\|^2. \end{aligned}$$

Esta representación tiene las siguientes propiedades adicionales:

- (1) Por restricción sobre el grupo de los cuaternios no nulos, \mathbb{H}^* , la anterior representación es un homomorfismo de grupos sobre el grupo de las matrices complejas con determinante no nulo, $GL(2, \mathbb{C})$.
- (2) La sustitución de dos de las componentes b, c, d por cero produce una representación de los números complejos. Por ejemplo, si hacemos $c = d = 0$ se produce una representación de los complejos por matrices diagonales de números complejos, y establecer $b = d = 0$ produce una representación de los números complejos por matrices reales.
- (3) El conjugado de un cuaternio corresponde a la transposición conjugada de la matriz.
- (4) El conjunto de los cuaternios de norma 1, topológicamente es la esfera unitaria $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Dados cuaternios q_1, q_2 de norma uno se tiene $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \|q_2\| = 1$. Es decir, $q_1 \cdot q_2$ es un cuaternio unitario. Luego el producto (\cdot) define una operación binaria sobre el conjunto de los cuaternios unitarios, que dotado de este producto (continuo) se torna un grupo topológico no conmutativo.

Por restricción, la representación sobre las matrices complejas produce un isomorfismo entre el subgrupo de los cuaternios de norma 1 y su imagen $SU(2)$. Como topológicamente los cuaternios unitarios son la 3 esfera, el espacio subyacente de $SU(2)$ también es una 3 esfera.

Lema 1.3.2. *Si un cuaternio q conmuta con todos los cuaternios imaginarios puros, entonces q es un cuaternio real. En particular, si $q \in \mathbb{S}^3$, entonces $q = \pm 1$.*

Demostración. Si $q = x + y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$, empleando la definición $\hat{i}q = -y + x\hat{i} - w\hat{j} + z\hat{k}$. Por otro lado, $q\hat{i} = -y + x\hat{i} + w\hat{j} - z\hat{k}$. La condición $iq = qi$ implica que $z = w = 0$. Esto es $q = x + y\hat{i}$. Procediendo del mismo modo, para $\hat{j}q = q\hat{j}$ resulta $y = 0$. En consecuencia $q = x \in \mathbb{R}$. Note que si $q \in \mathbb{S}^3$, entonces $x^2 = 1$; consecuentemente $x = \pm 1$. \square

Corolario 1.3.3. *El centro del álgebra de los cuaternios es el campo de los cuaternios reales.*

Como los cuaternios forman un álgebra de división no conmutativa. La no conmutatividad de la multiplicación es la única propiedad que hace a los cuaternios diferentes de un campo.

La no conmutatividad de la multiplicación tiene algunas consecuencias inesperadas. Notemos que si $q = y\hat{i} + z\hat{j} + w\hat{k}$ es un cuaternio imaginario puro, entonces $q^2 = -(y^2 + z^2 + w^2) = -\|q\|^2$ es un cuaternio real. En particular, si $q \in \mathbb{R}^3 \cap \mathbb{S}^3$, entonces $q^2 = -1$. Es decir, cuando tratamos los cuaternios, encontramos infinitas raíces cuadradas para -1 .

Para dos cuaternios imaginarios puros $p = b_1\hat{i} + c_1\hat{j} + d_1\hat{k}$ y $q = b_2\hat{i} + c_2\hat{j} + d_2\hat{k}$, su producto interno, análogo al de vectores en \mathbb{R}^3 , es $p \cdot q = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$, que también puede escribirse como:

$$p \cdot q = \frac{1}{2}(\bar{p}q + \bar{q}p) = \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p})$$

que es igual a la parte real de los productos $p\bar{q}, q\bar{p}, \bar{p}q$, y $\bar{q}p$.

El producto cruz de dos cuaternios imaginarios puros, vistos como vectores de \mathbb{R}^3 , con orientación relativa a la base ordenada $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es:

$$p \times q = (c_1d_2 - d_1c_2)\hat{i} + (d_1b_2 - b_1d_2)\hat{j} + (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{k}$$

que es igual a la parte imaginaria pura del producto pq y $-\bar{q}\bar{p}$ como cuaternios. También tiene la fórmula:

$$p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp) = \frac{1}{2}[p, q]$$

en que $[p, q] = pq - qp$ es el conmutador de p y q .

Observación 1.3.4. Por otro lado, es posible construir un álgebra de división sin inversos multiplicativos. Considerando los cuaternios con una modificación en su producto. Haciendo $i^2 = -1 + \epsilon j$ para algún número real suficientemente pequeño ϵ . Denotemos por $\overline{\mathbb{H}}$ el álgebra obtenida del espacio de los cuaternios equipado de este nuevo producto. Atendiendo la definición del producto es claro que $\overline{\mathbb{H}}$ es un álgebra de división. No obstante no se tienen inversos multiplicativos. A saber, haciendo $q = -i - \epsilon k$ se verifica que

$$iq = i(-i - \epsilon k) = -i^2 - \epsilon ik = -(-1 + \epsilon j) - \epsilon j = 1.$$

Por otro lado para $p = -i + \epsilon k$ se tiene

$$pi = (-i + \epsilon k)i = -i^2 + \epsilon ki = -(-1 + \epsilon j) + \epsilon j = 1.$$

El elemento i tiene ambos inveros, a derecha e izquierda, pero éstos no coinciden.

1.4. Los Octonios

Los octonios son otra de las álgebras mencionadas en el teorema 1.2.1. Para su construcción, pensemos en 8-tuplas de números reales. Podemos equiparlos de una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial con base $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, donde 1 es el elemento escalar identificado con el real 1. Luego cada octonio x puede escribirse en la forma:

$$x = x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 := (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

donde cada coeficiente x_i es un número real. La suma de octonios se puede definir componente a componente. También podemos equipar a los octonios de un producto, el cual los torna un álgebra de dimensión 8 con base $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$; para esto, basta definir la multiplicación en los elementos de la base conforme se indica en la tabla:

\cdot	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Infortunadamente, esta tabla es poco esclarecedora y a simple vista sólo se nota fácilmente:

- (a) e_1, \dots, e_7 son raíces cuadradas de -1 , i.e., $e_i e_i = -1$;
- (b) e_i y e_j anti-conmutan siempre que $i \neq j$, i.e., $e_i e_j = -e_j e_i$;
- (c) $e_i e_j = e_k \implies e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$; en que los índices son pensado como elementos en \mathbb{Z}_7 ;
- (d) $e_i e_j = e_k \implies e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$.

Estas condiciones, junto con alguna condición no trivial como $e_1 e_2 = e_4$, resultan datos son suficientes para recuperar toda la tabla de multiplicar.

Un recursos mnemotécnico para familiarizarse con el producto en los octonios es el plano de Fano. El cual se ilustra a seguir:

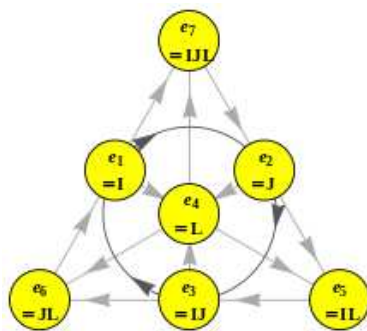


Figura 1.1: Plano de Fano

Pasemos a construir de forma sucinta los octonios. La idea es ilustrar la *construcción de Cayley-Dickson*. Para las álgebras de división normadas $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ la cual nos explica por qué cada una de éstas encaja perfectamente dentro de la siguiente. Además, aclara por qué \mathbb{H} no es conmutativa y \mathbb{O} no es asociativa. Obtendremos una secuencia infinita de álgebras, duplicando su dimensión cada vez, con las álgebras de división normadas como las primeras cuatro de tal secuencia.

Gracias a Hamilton, el número complejo $a + bi$ puede considerarse como un par (a, b) de números reales. La adición se realiza por componentes, y la multiplicación es así:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb).$$

Se puede definir el conjugado de un número complejo como:

$$\overline{(a, b)} = (a, -b).$$

Esta operación de conjugación es una *anti-involución*, i.e., para cada par de complejos w, z verifica:

$$\overline{\overline{z}} = z, \overline{wz} = \overline{z}\overline{w};$$

asimismo tiene la siguiente propiedad $z\overline{z} = \|z\|^2$.

Ahora que tenemos los números complejos, podemos definir los cuaternios de manera similar. Un cuaternio q puede considerarse como un par de números complejos, así, $q = (a, b)$. La adición se realiza por componentes, y la multiplicación es así:

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\overline{b}, \overline{a}d + cb)$$

Esta fórmula es similar a la empleada para la multiplicación de números complejos, pero con un par de conjugados. Note que si incluimos estos conjugados en la fórmula para multiplicar complejos, nada cambiaría, ya que el conjugado de un número real es él mismo. También es posible definir el conjugado de un cuaternión por:

$$\overline{(a, b)} = (\overline{a}, -b).$$

Esta definición es similar a la empleada para la conjugación de números complejos, pero con un conjugado. Si incluimos este conjugado en la expresión para conjugar complejos, nada cambiaría, ya que el conjugado de un número real es él mismo. Se verifica de forma inmediata que la conjugación en los cuaternios es una anti-involución; y además $q\overline{q} = \|q\|^2$. A saber,

$$\overline{\overline{(a, b)}} = \overline{(\overline{a}, -b)} = (\overline{\overline{a}}, b) = (a, b).$$

Igualmente, si $q = (a, b) \in \mathbb{H}$ entonces:

$$q\overline{q} = (a, b)\overline{(a, b)} = (a, b)(\overline{a}, -b) = (a\overline{a} + b\overline{b}, -\overline{a}b + \overline{a}b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|q\|^2.$$

Ahora podemos definir los octonios a partir de los cuaternios. Consideramos un octonio como un par de cuaternios, $q = (a, b)$. La suma se realiza por componentes y multiplicamos usando la misma fórmula que la de los cuaternios. Es decir:

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\overline{b}, \overline{a}d + cb)$$

También se tiene la noción de conjugado de un octonio dada por:

$$\overline{(a, b)} = (\overline{a}, -b).$$

Se verifica sin ninguna dificultad que la conjugación en los octonios es una anti-involución; además ésta puede ser empleada para expresar la parte real e imaginaria de un octonio. La parte real de $q \in \mathbb{O}$ es $\frac{q+\bar{q}}{2}$, y la parte imaginaria de q es $\frac{q-\bar{q}}{2}$.

La raíz cuadrada del producto de un octonio con su conjugado es su *norma* y es denotada por:

$$\|q\| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\bar{q} \cdot q}.$$

Este siempre es un número real no negativo, y coincide con la norma euclidiana usual de \mathbb{R}^8 .

Igual que para los complejos y los cuaternios, para cada octonio $q \neq 0$, el *inverso multiplicativo*, se define por la prescripción:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

En particular, si el octonio $q \neq 0$ es *unitario*, es decir, tiene norma 1 entonces su inverso multiplicativo es su conjugado, es decir, $q^{-1} = \bar{q}$.

Los octonios son fuertemente no asociativos, esto es:

Teorema 1.4.1. Si $x(ry) = (xr)y$ para todo par de octonios x, y , entonces r es real.

Demostración. Dado que $(e_2e_1)e_3 = -e_2(e_1e_3)$, aplicando la hipótesis $(e_2r)e_3 = e_2(re_3)$, se tiene que el coeficiente de e_1 en r debe ser nulo, como el de e_n ($2 \leq n \leq 7$), usando el hecho de que $(e_{n+1}e_n)e_{n+2} = -e_{n+1}(e_n e_{n+2})$. \square

Debido a su no asociatividad, los octoniones no tienen representación matricial, como sí la tenían los cuaternios, pues, de representar las unidades en matrices, sabemos que el producto de matrices es asociativo, pero en la tabla se ha mostrado que el producto de las unidades no es asociativo, por lo que es imposible representar \mathbb{O} matricialmente. No obstante, se verifica si dificultad que

$$\|pq\| = \|p\|\|q\|$$

para octonios p, q . Propiedad que veremos no poseen las álgebras de dimensiones superiores definidas por Cayley-Dickson.

En el espacio de los octonios, aquellos cuya norma sea la unidad, conforman la esfera unitaria S^7 , la cual, debido a la no asociatividad del producto de octonios, no es un grupo.

Teorema 1.4.2. Los octonios constituyen un álgebra alternativa.

Demostración. Esto es consecuencia del apartado (4) en la proposición 1.4.3. Considerando que \mathbb{H} es un álgebra bien normada y asociativa. \square

1.4.1. Sobre el método de Cayley-Dickson

En la construcción de los octonios, se evidenció un proceso de obtener nuevas álgebras a partir de otras, este es el conocido *método de Cayley-Dickson*. El cual se puede enunciar como sigue: Sea $(A, *)$ un álgebra real con conjugación $*$. Luego $*$: $A \rightarrow A, a \mapsto a^*$ es un mapa \mathbb{R} -lineal que una anti-involución, i.e., $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$. Entonces en el espacio vectorial A^2 es posible definir una estructura de álgebra real con conjugación como sigue:

- (1) El producto es dado por: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$,
- (2) La conjugación es dada por: $(a, b)^* = (a^*, -b)$.

Se verifica que estas operaciones tornan A^2 en un álgebra real normada con conjugación, cuya dimensión es el doble que la dimensión de A . Desde luego, cada vez que aplicamos la construcción anterior, el álgebra obtenida A^2 empeora un poco respecto de A en el sentido que pierde algunas propiedades. Por ejemplo:

- (a) Los números reales son un álgebra de división asociativa, conmutativa y tienen la propiedad adicional de que la conjugación es la identidad. Aplicando la construcción de Cayley-Dickson, se obtienen los números complejos que siguen siendo un álgebra de división asociativa y conmutativa, pero la conjugación ya no es trivial: es la conjugación compleja habitual, es decir una $\overline{(a, b)} = (a, -b)$.
- (b) Al pasar de \mathbb{C} a \mathbb{H} , por medio de la misma construcción perdemos la propiedad de la conmutatividad: \mathbb{H} es solo un álgebra de división asociativa.
- (c) Aplicando la construcción de Cayley-Dickson a \mathbb{H} , obtenemos los octoniones \mathbb{O} , que no son asociativos, pero siguen siendo un álgebra de división y alternativa como se comentó anteriormente.
- (d) Aplicando la construcción Cayley-Dickson a \mathbb{O} , se obtiene un álgebra real de dimensión 16 llamada los *sedeniones*. Los sedeniones tienen divisores de cero, por lo tanto no son un álgebra de división y a pesar de tener una norma ésta no es multiplicativa, es decir no constituyen un álgebra normada. Estas condiciones se pierden para las álgebras de la secuencia así obtenida desde \mathbb{O} .
- (e) Los números reales, los números complejos, los cuaternios y los octonios tienen inversos multiplicativos. Esto es obvio para los números reales. Para los números complejos, los cuaternios y los octonios se verifica que:

$$(a, b)\overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}(a, b) = \lambda(1, 0)$$

donde $\lambda = \|(a, b)\|^2$ es un número real, el cuadrado de la norma de (a, b) . Esto significa que siempre que $q = (a, b)$ no sea nulo, su inverso multiplicativo es $\frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$. En general, si $(A, *)$ tiene definida una norma. El álgebra obtenida A^2 también es equipada de una norma y los elementos no nulos admiten inversos multiplicativos.

Para ser un poco más formales. Si $(A, *)$ es un álgebra con conjugación, $*$: $A \rightarrow A, a \mapsto a^*$, decimos que A es *real pura* si $a = a^*$ para cada elemento $a \in A$. Es inmediato que toda álgebra real pura es conmutativa. Decimos que A está bien normada si $a + a^* \in \mathbb{R}$ y $aa^* = a^*a > 0$ para cada $0 \neq a \in A$. Si A es bien normada, se definen la *parte real e imaginaria* de $a \in A$ como:

$$\operatorname{Re}(a) = \frac{a + a^*}{2} \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(a) = \frac{a - a^*}{2}$$

asimismo, se define una norma en A por:

$$\|a\| = \sqrt{aa^*}.$$

Luego si A es bien normada, hay inversos multiplicativos dados por:

$$a^{-1} = \frac{a^*}{\|a\|^2}, a \neq 0.$$

Si A es bien normada y alternativa, entonces A es un álgebra de división normada. Para ver esto, tenga en cuenta que para cualquier $a, b \in A$, los 4 elementos a, b, a^*, b^* se encuentran en el álgebra asociativa generada por $\text{Im}(a), \text{Im}(b)$, (subálgebra siempre se asume que contiene a 1)

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = (ab)(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^2\|b\|^2.$$

La siguiente proposición ilustra el efecto de aplicar repetidamente la construcción Cayley-Dickson:

Proposición 1.4.3. *Suponiendo que $(A, *)$ es un álgebra real con conjugación $*$: $A \rightarrow A$. Sea $(A^2, *)$ el álgebra obtenida tras aplicar a A el proceso de Cayley-Dickson.*

- (1) *Si A es real pura, entonces A^2 nunca es real pura;*
- (2) *A es real pura y por lo tanto conmutativa, si y solo si, A^2 es conmutativa;*
- (3) *A es conmutativa y asociativa si y solo si, A^2 es asociativa;*
- (4) *A es asociativa y es bien normada si y solo si, A^2 es alternativa y es bien normada;*
- (5) *A es bien normada si y solo si, A^2 es bien normada.*

Todos estos enunciados se desprende de cálculos sencillos; probarlos aquí simplemente privaría al lector del placer de hacerlo. De esta proposición se desprende que: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, y \mathbb{O} son álgebras de división normadas. También se deduce que los cuaternios no son reales puros ni conmutativos; los octoniones no son reales puros, ni conmutativos, ni asociativos.

Capítulo 2

Un poco de topología

2.1. Topología general

Recordemos que una *topología* en un conjunto X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X la cual contiene a \emptyset y a X , además es cerrada bajo uniones arbitrarias de sus elementos y para la intersección de cualquier dos de sus elementos. Un *espacio topológico* es un par (X, \mathcal{T}) , en que X es un conjunto y \mathcal{T} es una topología en X . Cuando no es necesario especificar \mathcal{T} , decimos que X es un espacio topológico. Los elementos de X son llamados *puntos*, y los miembros de \mathcal{T} *conjuntos abiertos*. Sobre X se pueden definir muchas topologías, dos destacadas son la colección de sus *partes* $\mathcal{P}(X)$ llamada la *topología discreta*; asimismo, $\mathcal{T}_{\text{ind}} = \{\emptyset, X\}$ define la *topología indiscreta*.

Un conjunto $F \subset (X, \mathcal{T})$ es *cerrado* si $X \setminus F$ es abierto. Claramente, X y \emptyset son cerrados, la intersección arbitraria de cerrados es cerrado y la unión finita de cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplos importantes de topologías son las inducidas por métricas. Más precisamente, si X un conjunto equipado con una métrica d .¹ En este caso, si $x \in X$ y $r > 0$, la *bola de centro en x y radio r* es definida por $B(x; r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ y la prescripción $U \subset (X, \mathcal{T}_d)$ es abierto si, y solo si, para cada $x \in U$, existe $r > 0$ de modo que $B(x; r) \subset U$, caracteriza los abiertos de la topología en X inducida por la métrica d .

En el espacio \mathbb{R}^n , la *topología usual o euclidiana* es precisamente la inducida por la métrica que lleva el mismo nombre $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|$.

Dados espacios topológicos X, Y , una función $f : X \rightarrow Y$ es *continua*, si la imagen inversa de cada conjunto abierto en Y , es abierto en X ; o de forma equivalente, la imagen inversa de cada conjunto cerrado en Y es un conjunto cerrado en X . Note que toda función cuyo dominio es un espacio discreto es continua. Igualmente son continuas las funciones constantes.

Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierto* (resp, *cerrada*) si la imagen de cada abierto (resp, cerrado) en X es abierto (resp, cerrado) en Y . Los conceptos de función continua, función abierta y cerrada son independientes. Sin embargo, si la función $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva, las condiciones de ser abierta y cerrada son equivalentes. Basta observar que $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$.

Una función $f : X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo*, si es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son funciones continuas. Cuando este es el caso, X y Y se dicen espacios homeomorfos. Obviamente todo homeomorfismo es una función abierta y cerrada. Igualmente, una función biyectiva y abierta (resp, cerrada) es un homeomorfismo.

¹una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que asocia a cada par $x, y \in X$ un real no negativo llamado la *distancia entre x y y* , de modo que $d(x, y) = 0$, si, y solo si, $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$, y $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada $x, y, z \in X$

Una *base* para una topología \mathcal{T} en X es una colección de abiertos \mathcal{B} tal que cada abierto puede escribirse como unión de elementos de \mathcal{B} . Por ejemplo, la colección de todas las bolas $B(x; r)$, constituye una base en un espacio métrico.

Algunos espacios topológicos importantes se obtienen a partir de otros.

- (1) *Subespacios*: Dado $A \subset (X, \mathcal{T})$, a partir de la topología de X podemos dotar al conjunto A de una topología llamada la *topología inducida o subespacio*. Definida la prescripción

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}.$$

El par (A, \mathcal{T}_A) se dice es un *subespacio topológico* de (X, \mathcal{T}) .

- (2) *Productos*: Dados espacios no vacíos $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$. En $X_1 \times X_2$ la *topología producto* \mathcal{T}_p es definida como la generada por la base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

De este modo, $O \subset X_1 \times X_2$ es abierto, si y sólo si, para cada $x = (x_1, x_2) \in O$, hay abiertos $U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2$ tales que $x = (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset O$.

Para $i = 1, 2$, la *proyección sobre la i -ésima coordenada* es definida como la función:

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i : (x_1, x_2) \mapsto x_i.$$

Se prueba sin dificultad que para $i = 1, 2$, la proyección $\pi_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_p) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es una función continua y abierta.

Si Y es un espacio topológico, dada una función $f : Y \rightarrow X_1 \times X_2$. Para $i = 1, 2$, la *i -ésima función componente para f* , se define por $f_i = \pi_i \circ f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$. De este modo, se suele escribir $f = (f_1, f_2)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \swarrow f_1 & \downarrow f & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \end{array}$$

Un resultado importante es: $f : Y \rightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_p)$ es continua si, y sólo si, para cada $i = 1, 2$, la función componente $f_i = \pi_i \circ f : Y \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua.

- (3) *Cocientes*: Si (X, \mathcal{T}_X) es un espacio topológico, Y un conjunto y $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ una función sobreyectiva, la colección $\mathcal{T}_f = \{U \subset Y : q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ define la *topología co-inducida por f sobre Y* . El par (Y, \mathcal{T}_f) es llamado un *espacio cociente* de X . Al dotar a Y de la topología cociente, $f : X \rightarrow Y$ es continua.

Hay una correspondencia uno a uno entre las relaciones de equivalencia en el espacio X y los espacios cocientes de X . Definida como sigue, a la relación \sim le corresponde el espacio cociente X/\sim constituido de las clases de equivalencia de X por \sim y equipado con la topología co-inducida por $q : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$. Recíprocamente, al espacio cociente Y co-inducido por $f : X \rightarrow Y$, corresponde la relación $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$. Así, toda descomposición del espacio X en clases de equivalencia es un espacio cociente de X ; todo espacio cociente de X es homeomorfo a una descomposición de X en clases de equivalencia.

²el conjunto vacío \emptyset , es la unión de una colección vacía de elementos de \mathcal{B} .

Una función $f : X \rightarrow Z$ es *compatible con la relación* \sim en X , si f es constante en las clases de equivalencia; es decir, $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. En este caso, $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$, $[x] \mapsto f(x)$ bien define una función inyectiva tal que $\bar{f} \circ q = f$. Además, f es continua si, y sólo si, \bar{f} es continua. La función \bar{f} se dice obtenida *por paso al cociente* a partir de f , ver el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow q & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array}$$

Ejemplo 2.1.1. En el espacio \mathbb{R}^{n+1} , considere la esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ como subespacio. Los puntos $\mathfrak{s} = (0, \dots, 0, -1)$, $\mathfrak{n} = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ se llaman *el polo sur y el polo norte* respectivamente. Si $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \mathfrak{n}$, la recta determinada por \mathfrak{n} y x es,

$$l_x = \{(tx_1, \dots, tx_n, tx_{n+1} + (1-t)), t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

El punto de intersección de l_x con $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ corresponde al parámetro $t \in \mathbb{R}$ para el cual

$$tx_{n+1} + (1-t) = 0 \iff t = \frac{1}{1-x_{n+1}}.$$

Lo anterior sugiere definir *la proyección estereográfica*:

$$\varphi : S^n \setminus \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right),$$

esta función es inyectiva y continua porque sus componentes lo son.

Por otro lado, si $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la recta determinada por x y \mathfrak{n} es

$$l_x = \{(tx_1, \dots, tx_n, 1-t), t \in \mathbb{R}\}.$$

La intersección de esta recta con $S^n \setminus \mathfrak{n}$ es el punto que corresponde al parámetro t tal que

$$(tx_1, \dots, tx_n, 1-t) \in S^n \setminus \mathfrak{n} \iff t^2 x_1^2 + \dots + t^2 x_n^2 + (1-t)^2 = 1 \iff t = \frac{2}{1+\|x\|^2}.$$

Al emplear este valor, encontramos

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \mathfrak{n} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2} \right)$$

expresión continua que inversa para φ . Por lo tanto, φ es un homeomorfismo.

Un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de X y Y ; así como una correspondencia uno a uno entre los abiertos en X y los abiertos en Y . Desde el punto de vista topológico esto significa que X y Y son idénticos. No es fácil responder si dos espacios topológicos X, Y son homeomorfos. Pues esto implica exhibir una función $f : X \rightarrow Y$ biyectiva, continua y con inversa también continua. Concluir que dos espacios topológicos no son homeomorfos es un problema diferente al anterior cuya solución pasa por recurrir a los *invariantes topológicos*. Concepto que referencia propiedades que si son válidas en un espacio topológico X , también se verifican en todo espacio que sea homeomorfo a X . En consecuencia, si un invariante topológico se verifica por un espacio pero no se verifica por un otro espacio, los espacios no pueden ser homeomorfos y el problema queda resuelto.

Algunos de los invariantes topológicos más simples son los siguientes.

Un espacio topológico X se dice:

- (a) *Segundo contable*, si admite una base enumerable para su topología;
- (b) *Hausdorff*, si dados $x \neq y \in X$, existen conjuntos abiertos y disjuntos $U, V \subset X$ con $x \in U$, $y \in V$;
- (c) *Conexo*, si no existe dos conjuntos abiertos y disjuntos U, V tales que $X = U \cup V$;
- (d) *Conexo por caminos*, si dados $x, y \in X$ existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$;
- (e) *Compacto*, si cualquier cubrimiento por conjuntos abiertos para X admite un subcubrimiento finito.³

Las conexidad, la conexidad por caminos y la compacidad son propiedades que se preservan bajo funciones continuas. Es decir, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y X es conexo, conexo por caminos o compacto, entonces $f(X) \subset Y$ es conexo, conexo por caminos o compacto.

Es bien sabido que en un espacio compacto todo conjunto cerrado es compacto. Asimismo, si un espacio es de Hausdorff entonces sus conjuntos compactos son cerrados. Entonces dada una función continua $f : K \rightarrow Y$ con K compacto y Y de Hausdorff, si $F \subset K$ es cerrado entonces es compacto luego $f(F) \subset Y$ es compacto y necesariamente es cerrado. Es decir, f es una función cerrada. En particular si f es una biyección continua definida en un espacio compacto a valores en un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Los espacios compactos de Hausdorff poseen propiedades deseables, por lo tanto, es de interés estudiar el proceso de *compactación de un espacio topológico*, el cual consiste en embeber un espacio dado como subespacio denso de algún espacio compacto de Hausdorff.

1. Atendiendo un proceso básico del curso de cálculo, la prescripción

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} (-1, 1) \hookrightarrow [-1, 1] : x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$$

define un homeomorfismo de \mathbb{R} sobre $(-1, 1)$;

2. Asimismo, la proyección estereográfica

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^1 \setminus \{n\} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right),$$

define un homeomorfismo de \mathbb{R} sobre $\mathbb{S}^1 \setminus \{n\}$.

En el primer caso, la recta que no es compacto se identifica con un subespacio de un espacio compacto. Al considerar la inclusión $(-1, 1) \hookrightarrow [-1, 1]$, el intervalo $[-1, 1]$ se torna una compactación de la recta por la adición de dos puntos; asimismo, en el segundo caso, la esfera \mathbb{S}^1 es una compactación de la recta por la adición del polo norte n .

Estudiemos el segundo caso. De las compactaciones por un punto para un espacio se destaca la conocida como la *compactación de Alexandrov* presentada a seguir.

Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico y un punto $\infty \notin X$. En el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ se define una topología declarando como abiertos los conjuntos:

1. $U \subset X^*$, en que U es abierto en X ;
2. $U \subset X^*$, en que $\infty \in U$ y $X^* \setminus U$ es un subconjunto cerrado y compacto de X .

³si $X = \cup_{i \in \Lambda} U_i$ con cada U_i abierto, existen $i_1, \dots, i_k \in \Lambda$ tales que $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

Se verifica sin dificultad que equipado de la topología antes descrita, el espacio (X^*, \mathcal{T}^*) es compacto. En efecto, si $\mathcal{H} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento por abiertos para X^* . Sea $U_\beta \in \mathcal{H}$ tal que $\infty \in U_\beta$. Luego $K = X^* \setminus U_\beta$ es un subconjunto compacto en X y claramente $\mathcal{H} \setminus \{U_\beta\}$ es un cubrimiento por abiertos para K . Por compacidad existen $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ en \mathcal{H} tales que $K \subset \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Por lo tanto $\{U_\beta, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ es un subcubrimiento finito de \mathcal{H} para X^* . Asimismo, si X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto, (cada punto admite una vecindad compacta), entonces el espacio X^* es compacto.

Asimismo, si X y Y son espacios homeomorfos, sus compactaciones de Alexandrov X^*, Y^* son espacios homeomorfos. Pues si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, la extensión $\bar{f} : X \cup \{\infty_X\} \rightarrow Y \cup \{\infty_Y\}$ definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X; \\ \infty_Y, & x = \infty_X \end{cases}$$

es una función biyectiva y continua. A saber, \bar{f} es biyectiva porque f lo es. Si $V \subset Y^*$ es un abierto del primer tipo, entonces $\bar{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ es un abierto del primer tipo en X^* . Si V es un abierto del segundo tipo, el conjunto $Y^* \setminus V$ es cerrado y compacto en Y . Como f es un homeomorfismo,

$$X^* \setminus \bar{f}^{-1}(V) = \bar{f}^{-1}(Y^* \setminus V) = f^{-1}(Y^* \setminus V) = X^* \setminus f^{-1}(V)$$

es cerrado y compacto en X ; es decir, $\bar{f}^{-1}(V)$ es un abierto. Un razonamiento similar prueba que \bar{f}^{-1} es continua. Lo que prueba que \bar{f} es un homeomorfismo.

Corolario 2.1.2. *Para cada $n \geq 0$ se tiene $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.*

Demostración. La proyección estereográfica define un homeomorfismo entre $S^n \setminus \{n\}$ y el espacio \mathbb{R}^n . Por lo anterior, la compactación de Alexandrov para \mathbb{R}^n , que es $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ es un espacio homeomorfo a la esfera S^n que es la compactación del espacio $S^n \setminus \{n\}$. \square

2.2. El grupo fundamental y espacios de recubrimiento

La compacidad es un invariante topológico el cual nos permite garantizar que el intervalo cerrado unitario $I = [0, 1]$ y la recta usual \mathbb{R} no son espacios homeomorfos; pues el intervalo I es compacto y la recta no lo es. El mismo argumento nos permite concluir que para cada $n \geq 1$, la esfera n -dimensional S^n y el espacio euclidiano \mathbb{R}^n no son homeomorfos. No obstante, la compacidad no nos permite decidir sobre la misma cuestión si consideramos la esfera unitaria S^1 y el intervalo unitario I ya que ambos espacios son compactos. En este caso, la conexidad como invariante topológico puede darnos una mano. Porque al retirar un punto arbitrarios de la esfera unitaria S^1 el espacio resultante sigue siendo conexo, mientras que en general no sucede igual con el intervalo unitario. El mismo argumento nos permite concluir que los espacios euclidianos \mathbb{R} y \mathbb{R}^n , $n > 1$ no son homeomorfos, pues al retirar un punto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n la conexidad se mantiene.

La idea de la *topología algebraica* es asociar de forma unívoca a un espacio topológico X , un objeto algebraico $\mathcal{F}(X)$, de modo que si Y es un espacio homeomorfo a X , entonces $\mathcal{F}(Y)$ es isomorfo a $\mathcal{F}(X)$. De este modo, estos objetos algebraicos son invariantes topológicos y como ya hemos comentado nos permiten detectar cuando dos espacios topológicos no son homeomorfos. El *grupo fundamental*, descrito de forma sucinta a seguir, hace parte de estos invariantes de naturaleza algebraica. Para efectos de notación, terminología y consulta recomendamos [9].

Definición 2.2.1. Un *camino* en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Los puntos $\alpha(0), \alpha(1)$ son llamados los *extremos del camino*. En particular $\alpha(0)$ se dice es el *punto inicial u origen* del camino, y $\alpha(1)$ se dice es el *punto final* del camino. Cuando el punto inicial coincide con el punto final, es decir, cuando $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, se dice que α es un *camino cerrado o un lazo* en X con *punto base* x_0 .

Hay un par de *operaciones* con caminos. Si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ son caminos tales que el punto final de α coincide con el punto inicial de β , es decir $\alpha(1) = \beta(0)$. Entonces la prescripción:

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

define el *camino producto* de los caminos α y β ; para éste el punto inicial es $\alpha(0)$ y el punto final es $\beta(1)$. Asimismo el *camino inverso* para α es definido por $\alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow X : s \mapsto \alpha(1 - s)$, $s \in I$. Note que el camino α^{-1} realiza el mismo recorrido que α pero en sentido contrario; esto es, el punto inicial (resp. final) de α^{-1} es el punto final (resp. inicial) de α .

Definición 2.2.2. Diremos que $\alpha, \beta : I = [0, 1] \rightarrow X$ son *caminos homotópicos o equivalentes*, lo que denotamos por $\alpha \sim \beta$, si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ llamada *homotopía* tal que:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), \quad H(s, 1) = \beta(s), \quad \text{para cada } s \in [0, 1]; \\ H(0, t) &= \alpha(0) = \beta(0), \quad H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1), \quad \text{para cada } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Para que tenga sentido afirmar que $\alpha \sim \beta$, es necesario que los caminos α y β coincidan en los puntos iniciales y en los puntos finales.

En particular, si α y β son lazos con base en x_0 , entonces $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que:

$$H(s, 0) = \alpha(s), \quad H(s, 1) = \beta(s), \quad H(0, t) = H(1, t) = x_0, \quad \text{para cada } s, t \in [0, 1].$$

La relación anterior es compatible con el producto de caminos, más precisamente tenemos

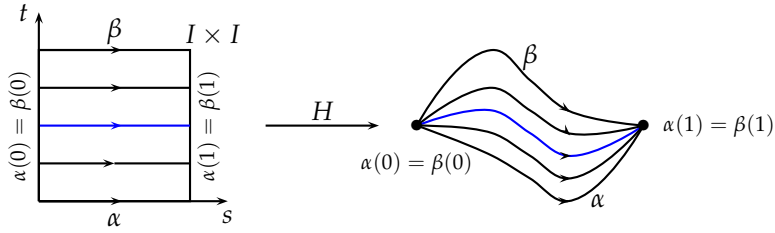


Figura 2.1: Homotopía de caminos $\alpha \sim \beta$

Proposición 2.2.3. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 : I \rightarrow X$ caminos en X con $\alpha_0 \sim \alpha_1$ y $\beta_0 \sim \beta_1$. Si $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = \beta_0(0) = \beta_1(0)$, entonces

$$\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1.$$

Demostración. Si $F : \alpha_0 \sim \alpha_1$ y $G : \beta_0 \sim \beta_1$. En virtud del lema del pegado, la función $H : I \times I \rightarrow X$ definida por

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & s \in [0, \frac{1}{2}], t \in I \\ G(2s - 1, t), & s \in [\frac{1}{2}, 1], t \in I \end{cases}$$

es continua pues las funciones que la definen son continuas y coinciden en $(\{\frac{1}{2}\} \times I)$; además,

$$H(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, 0), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha_0(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta_0(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\alpha_0 * \beta_0)(s), s \in I.$$

Del mismo modo,

$$H(s, 1) = (\alpha_1 * \beta_1)(s), s \in I.$$

Por otro lado, para cada $t \in I$ se tiene

$$H(0, t) = F(0, t) = \alpha_0(0) = \alpha_1(0) = (\alpha_0 * \beta_0)(0) = (\alpha_1 * \beta_1)(0).$$

$$H(1, t) = G(1, t) = \beta_0(1) = \beta_1(1) = (\alpha_0 * \beta_0)(1) = (\alpha_1 * \beta_1)(1).$$

Todo lo anterior muestra que $\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1$. □

Un resultado bien conocido es que \sim es una relación de equivalencia. En este caso, la clase de equivalencia del camino $\alpha : I \rightarrow X$ es denotada por $[\alpha]$. Con base en esta notación, la proposición (2.2.3) establece que si $[\alpha_0] = [\alpha_1]$, $[\beta_0] = [\beta_1]$, y además, $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$, entonces $[\alpha_0 * \beta_0] = [\alpha_1 * \beta_1]$.

Luego si α y β son caminos en X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, se define el *producto de las clases de equivalencia* de caminos por

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

La proposición (2.2.3) garantiza que este producto está bien definido en el sentido que no depende de la elección de los representantes de cada clase.

El producto de clases de equivalencia goza de las siguientes propiedades:

- (a) Es asociativo; es decir, $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$, siempre y cuando la expresión tenga sentido, esto es, si $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$;

(b) Posee neutros laterales, si $x_0 \in X$, la clase de equivalencia del camino constante $c_{x_0}(t) = x_0$ se comporta como un elemento neutro tanto a izquierda como a derecha; es decir,

$$[\alpha] \cdot [c_{x_1}] = [\alpha] \text{ y } [c_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha],$$

siempre que $\alpha : I \rightarrow X$ sea un camino con punto inicial x_0 y punto final x_1 ;

(c) hay inversos laterales, la clase del camino α^{-1} actúa como inverso de la clase de α ; es decir,

$$[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [c_{x_0}], \quad [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = [c_{x_1}];$$

para cada camino $\alpha : I \rightarrow X$ con punto inicial x_0 y punto final x_1 .

Si X es un espacio topológico, el conjunto de las clases de equivalencia de caminos dotado de la operación (no siempre definida) $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ constituye un sistema algebraico llamado *grupoides*. Dos aspectos puntuales impiden que sea un grupo, el producto de clases no está definida para cualesquiera dos clases; y el elemento identidad no es único. En consecuencia, a fin de tener una estructura de grupo se restringe la atención al estudio de caminos cerrados.

Definición 2.2.4. El grupo fundamental de X con punto base x_0 es definido y denotado por

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \text{ lazo con base en } x_0\}$$

con operación binaria

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Es claro que si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, el producto $[\alpha] \cdot [\beta]$ siempre está definido; pues el punto final de α coincide con el punto inicial de β que es x_0 . Además, el inverso $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ está bien definido; finalmente, el camino constante c_{x_0} es el único elemento identidad. De este modo, $\pi_1(X, x_0)$ es efectivamente un grupo.

Ejemplo 2.2.5. En \mathbb{R}^n , todos los caminos son homotópicos; basta considerar homotopías lineales. En particular, los caminos cerrados con base en x_0 son homotópicos al camino constante c_{x_0} ; luego $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ es un grupo trivial.

Definición 2.2.6. Un espacio topológico X se dice *simplemente conexo* si para cada $x \in X$ el grupo $\pi_1(X, x)$ es trivial.

Una pregunta natural de la definición del grupo fundamental es: Dados $x_0, x_1 \in X$, ¿qué relación hay entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$? Si existe un camino en X de x_0 a x_1 , entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos. A saber, si $\gamma : I \rightarrow X$ es tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$, para cada lazo α con base en x_0 , se tiene que $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ es un lazo con base en x_1 . Luego

$$\Phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) : [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

define un homomorfismo de grupos cuyo inverso es $\Phi_\gamma^{-1} = \Phi_{\gamma^{-1}}$, consecuentemente Φ_γ es un isomorfismo.

Corolario 2.2.7. Si X es un espacio topológico conexo por caminos, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ para cada par de puntos $x_0, x_1 \in X$.

Si X, Y son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua. Si α es un lazo con base en x_0 , $f \circ \alpha$ es un lazo en Y con base en $f(x_0)$. Además si $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ son tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ y cuando $\alpha \sim \beta$ en X , entonces $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Por lo tanto, para cada $x_0 \in X$ se es bien definida la aplicación

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) : [\alpha] \longmapsto f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha].$$

Notamos que si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] \cdot [\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) \\ &= [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \\ &= f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta]), \end{aligned}$$

por lo tanto, f_* es un homomorfismo de grupos, llamado el *homomorfismo inducido* por f . En particular, si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces para cada $x_0 \in X$, el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

Atendiendo en lo anterior, vemos que si dos espacios topológicos poseen grupos fundamentales no isomorfos, ellos no pueden ser espacios homeomorfos.

Ejemplo 2.2.8. Utilizando la proyección estereográfica sabemos que $S^n \setminus \{p\}$ es homeomorfo al espacio \mathbb{R}^n , en consecuencia $\pi_1(S^n \setminus \{p\}, p_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{0\}$.

Recubrimientos y el grupo fundamental

Si \tilde{X}, X son espacios topológicos, una función continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un *recubrimiento* para X , si p es sobreyectiva; y cada $x \in X$, posee una vecindad abierta (distinguida) $U \subset X$ con

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \Gamma} V_i;$$

donde $V_i \subset \tilde{X}$ es un conjunto abierto tal que $V_i \cap V_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ y, además $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo para cada $i \in \Gamma$. Cuando este es el caso, \tilde{X} será llamado un *espacio recubridor* para X ; asimismo, para cada $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ se llama la *fibra* de p sobre x .

Ejemplo 2.2.9. Todo homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ es un recubrimiento. Destacamos que los recubrimientos son homeomorfismos locales, no necesariamente son homeomorfismos.

Ejemplo 2.2.10. La aplicación

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{it} := (\cos(t), \sin(t))$$

es un recubrimiento. Por ejemplo, si $U = S^1 \setminus \{\mathbf{e}\}$, en que $\mathbf{e} = (1, 0)$, entonces

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ((2n)\pi, (2n+2)\pi).$$

Notemos que $p^{-1}(\mathbf{e}) = \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Por otro lado, es claro que la restricción $p|_I$ no es un recubrimiento puesto que esta aplicación no es un homeomorfismo local.

Las aplicaciones de recubrimiento poseen propiedades importantes; estudiarlas en detalle no es nuestro propósito. Solamente nos enfocaremos en su relación con el concepto de grupo fundamental. Tratamos a seguir la *propiedad de levantamiento de caminos*.

Proposición 2.2.11. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento y supongamos que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Entonces cualquier camino $\alpha : I \rightarrow X$ con punto inicial x_0 , admite un único levantamiento a un camino $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ con punto inicial \tilde{x}_0 . i.e., Al fijar $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ hay un único camino $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ con punto inicial \tilde{x}_0 y tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Demostración. Cubramos X por vecindades distinguidas $\{U_l\}_{l \in \Lambda}$. Como α es continua

$$\{\alpha^{-1}(U_l) : l \in \Lambda\} = \{(a_l, b_l) \cap [0, 1] : l \in \Lambda\}$$

constituye un cubrimiento por abiertos para $I = [0, 1]$. Por la compacidad de I , este cubrimiento se puede refinar a un subcubrimiento finito

$$\{J_1 = (a_1, b_1) \cap [0, 1], \dots, J_k = (a_k, b_k) \cap [0, 1]\}$$

tal que $\alpha(J_l) \subset U_l$, para cada l . Es posible encontrar un natural n tal que el intervalo $E_{i+1} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ está contenido totalmente en alguno de los abiertos J_1, \dots, J_k , para cada $i = 0, \dots, n-1$. Así, $I = E_1 \cup \dots \cup E_n$ es una unión de intervalos consecutivos, de modo que $\alpha(E_i) \subset U_l$. Asumiendo que $\alpha(I) \subset U$, en que U es una vecindad distinguida para p . Dado que $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(U)$, existe un conjunto abierto $V \subset \tilde{X}$ tal que $\tilde{x}_0 \in V$ y además $p|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo. En este caso definimos

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X} : s \mapsto (p|_V)^{-1}(\alpha(s)).$$

Es claro que de este modo definida la aplicación $\tilde{\alpha}$ satisface las condiciones del enunciado.

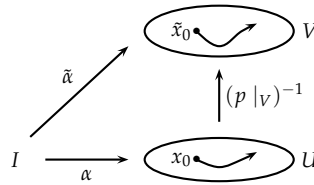


Figura 2.2: Ilustración prueba de la Proposición (2.2.11)

Consideremos ahora el caso en el cual $I = E_1 \cup E_2$ es la unión de dos intervalos compactos con un punto en común s_* de modo tanto $\alpha(E_1)$ como $\alpha(E_2)$ están contenidos totalmente en alguna vecindad distinguida para p . Si escribimos $\alpha_1 = \alpha|_{E_1}$, empleando el procedimiento anterior, podemos encontrar una curva $\tilde{\alpha}_1 : E_1 \rightarrow \tilde{X}$ de modo que $p \circ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ y $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{x}_0$. Del mismo modo, si $\alpha_2 = \alpha|_{E_2}$, podemos encontrar una curva $\tilde{\alpha}_2 : E_2 \rightarrow \tilde{X}$ de modo que $p \circ \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2$ y $\tilde{\alpha}_2(s_*) = \tilde{\alpha}_1(s_*)$. Lo cual es posible dado que $p(\tilde{\alpha}_1(s_*)) = \alpha_1(s_*) = \alpha_2(s_*)$. En este caso definimos

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X} : s \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(s), & s \in E_1 \\ \tilde{\alpha}_2(s), & s \in E_2 \end{cases}$$

Es claro que de este modo definida la aplicación $\tilde{\alpha}$ satisface las condiciones del enunciado. La existencia de $\tilde{\alpha}$ en el caso general se sigue de estos casos particulares que hemos demostrado pues inicialmente mostramos que $I = E_1 \cup \dots \cup E_n$ de modo que $\alpha(E_i)$ está contenido totalmente en alguna vecindad distinguida. \square

Con un poco de trabajo similar al hecho en la prueba anterior, se puede mostrar que también el mismo resultado para homotopías entre caminos. En particular, se tiene el siguiente resultado, ver [9].

Proposición 2.2.12. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento. Supongamos que $p(\tilde{x}_0) = x_0 \in X$. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dos caminos en X con punto inicial x_0 y punto final x_1 . Si $\alpha \sim \beta$, sus respectivos levantamientos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ que empiezan en \tilde{x}_0 , terminan en el mismo punto y son homotópicos; i.e., $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$.*

Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ con $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Si $\alpha : I \rightarrow X$ es lazo en X con punto base x_0 , y $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ es el único levantamiento de α que empieza en \tilde{x}_0 , como $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = x_0$, entonces $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$. En consecuencia hay definida una aplicación

$$\rho_{\tilde{x}_0} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) : [\alpha] \mapsto \rho_{\tilde{x}_0}([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$$

en que para $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ denota el único levantamiento de α a \tilde{X} que empieza en \tilde{x}_0 .

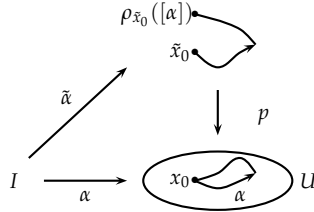


Figura 2.3: Ilustración correspondencia del levantamiento

Atendiendo la proposición 2.2.12, la aplicación $\rho_{\tilde{x}_0}$ la cual denominamos *la correspondencia del levantamiento* está bien definida en el siguiente sentido: si α, β son dos caminos cerrados en X con base en el punto x_0 , tales que $[\alpha] = [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces sus respectivos levantamientos que empiezan en \tilde{x}_0 terminan en el mismo punto; esto es, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$; y en consecuencia $\rho_{\tilde{x}_0}([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \rho_{\tilde{x}_0}([\beta])$.

Si \tilde{X} es conexo por caminos, dado un punto $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, hay un camino $\tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ con punto inicial \tilde{x}_0 y punto final \tilde{x}_1 tal que la composición $\beta = p \circ \tilde{\beta} : I \rightarrow X$ define un lazo en X con base en x_0 . Se sigue de la definición que $\rho_{\tilde{x}_0}([\beta]) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_1$; es decir, en este caso, la correspondencia del levantamiento es una aplicación sobreyectiva.

Por otro lado, si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ son tales que $\rho_{\tilde{x}_0}([\alpha]) = \rho_{\tilde{x}_0}([\beta])$, sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \tilde{X}$ los respectivos levantamientos para α y β comenzando en \tilde{x}_0 . Nuestro supuesto significa que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, es decir, $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}$ define lazo en \tilde{X} con base en \tilde{x}_0 . Luego existe $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que

$$[\alpha * \beta^{-1}] = p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}].$$

Luego si $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{0\}$, en particular si \tilde{X} es simplemente conexo, obtenemos que

$$[\alpha * \beta^{-1}] = [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = 1$$

o equivalentemente $[\alpha] = [\beta]$. Es decir, cuando el espacio \tilde{X} es simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento define una aplicación inyectiva. Todo lo anterior se resume en el siguiente resultado

Teorema 2.2.13. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento. Si el espacio recubridor \tilde{X} es conexo por caminos, entonces para cada $x_0 \in X$, la correspondencia del levantamiento*

$$\rho_{\tilde{x}_0} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

es sobreyectiva. Si \tilde{X} es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

Ejemplo 2.2.14. Para cada $x_0 \in S^1$ el grupo fundamental $\pi_1(S^1, x_0)$ es isomorfo al grupo aditivo de los enteros. A saber, $S^1 \subset \mathbb{C}$ como subconjunto del plano complejo es un grupo topológico conexo por caminos. Por lo tanto, basta considerar el caso $x_0 = \mathbf{e} = (1, 0)$. Consideremos el recubrimiento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{it}$; sea $\tilde{x}_0 = 0 \in \mathbb{R}$ es claro que $p(0) = \mathbf{e}$. Como \mathbb{R} es un espacio simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\varphi := \rho_0 : \pi_1(S^1, \mathbf{e}) \rightarrow p^{-1}(\mathbf{e}) = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

es una biyección. Veamos que φ es un homomorfismo de grupos. Para esto debemos demostrar que, para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, \mathbf{e})$, se verifica que

$$\varphi([\alpha] \cdot [\beta]) = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta]).$$

A saber, si $[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}]$ denotan los respectivos levantamientos para α y β comenzando en 0, dado que α y β son caminos cerrados tenemos que $\tilde{\alpha}(1), \tilde{\beta}(1) \in p^{-1}(\mathbf{e}) = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Escribamos $\tilde{\alpha}(1) = 2\pi m$ y $\tilde{\beta}(1) = 2\pi n$, y consideremos el camino

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{\beta}(2s-1) + \tilde{\alpha}(1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Notamos que el camino γ está bien definido en $s = 1/2$. Además,

$$p \circ \gamma : I \rightarrow S^1 : s \mapsto \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(2s)), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(\tilde{\beta}(2s-1) + 2\pi m), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (\alpha * \beta)(s).$$

Se sigue de la unicidad de los levantamientos que el camino γ es precisamente el levantamiento sobre \mathbb{R} comenzando en 0 para el camino $\alpha * \beta$. En consecuencia

$$\varphi([\alpha] \cdot [\beta]) = \varphi([\alpha * \beta]) = \gamma(1) = \tilde{\beta}(1) + \tilde{\alpha}(1) = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta]).$$

Del isomorfismo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ se desprenden diversas consecuencias importantes. Destacamos entre otras,

- (1) Para el toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ se tiene $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En consecuencia el toro no puede ser homeomorfo a la esfera S^2 , y en general a ninguna esfera.
- (2) La esfera S^1 no es simplemente conexo, por lo tanto, no existe un homeomorfismo entre S^n y S^1 para cada entero $n > 1$.

- (3) Se puede mostrar el Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2. Toda función continua $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ admite un punto fijo. Es decir, un punto $z \in \mathbb{B}^2$ tal que $f(z) = z$. En que \mathbb{B}^2 denota la bola cerrada unitaria en el plano.
- (4) El teorema de Borsuk - Ulam en dimensión 2. Para toda función continua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto $z \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(z) = f(-z)$.
- (5) El teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio no constante de grado n con coeficientes en el cuerpo de los números complejos posee exactamente n raíces contadas con multiplicidades.

Capítulo 3

Las Fibraciones de Hopf

3.1. Acciones de grupo

Fijemos un grupo G con elemento unidad e .

Definición 3.1.1. Una *acción a izquierda* de G sobre un conjunto M , es una aplicación:

$$\begin{aligned}\phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto \phi((g, p)) = g \cdot p\end{aligned}$$

que satisface las condiciones:

1. $e \cdot p = p$,
2. $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$.

para cada $p \in M$, y cada $g, h \in G$.

Dada una acción de G en M . Para cada $g \in G$, la aplicación $\gamma_g : M \rightarrow M, p \mapsto g \cdot p$ es biyectiva y su inversa es $\gamma_g^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$. Si $\text{Bij}(M)$ denota el grupo de las biyecciones de $f : M \rightarrow M$ unido de la operación de composición, obtenemos un homomorfismo de grupos

$$\bar{\phi} : G \rightarrow \text{Bij}(M), g \mapsto \gamma_g.$$

Observación 3.1.2. Una *acción a derecha* de G en M es una función $\phi : M \times G \rightarrow M, (p, g) \mapsto p \cdot g$ que satisface:

1. $p \cdot e = p$,
2. $p \cdot (hg) = (p \cdot h) \cdot g$.

para cada $p \in M$, y cada $g, h \in G$.

Si $\phi : M \times G \rightarrow M$ es una acción a derecha de G en M , la prescripción $\phi' : G \times M \rightarrow M : (g, p) \mapsto \phi(p, g^{-1})$ define una acción a izquierda de G sobre M . Por esta razón sólo nos centramos en este apartado en la descripción de los conceptos desde el estudio de acciones a izquierda.

Dada una acción de G en M . Asociado a cada $p \in M$, se tienen dos conjuntos.

(1) El subgrupo de isotropía o el estabilizador del punto p definido por:

$$\text{St}(p) := \{g \in G : gp = p\}.$$

(2) La órbita del punto p definido por:

$$O(p) = \{gp \in M : g \in G\}.$$

Es fácil verificar que $\text{St}(p)$ es de hecho un subgrupo de G . Cuando $\text{St}(p) = \{e\}$ para cada $p \in M$, decimos que la acción de G en M es libre o sin puntos fijos. Observe que

$$\text{Ker}(\bar{\phi}) = \bigcap_{p \in M} \text{St}(p),$$

y por lo tanto $\text{Ker}(\bar{\phi})$ es un subgrupo normal de G . En el caso en el cual, $\text{Ker}(\bar{\phi}) = \{e\}$ se dice que la acción es efectiva. En este caso, G es isomorfo a un subgrupo de biyecciones de M .

Asociada a una acción $\phi : G \times M \rightarrow M$ hay un relación

$$p \sim q \iff \text{existe } g \in G, \text{ con } gp = q \iff O(p) = O(q).$$

Se verifica sin dificultad que \sim es una relación de equivalencia en M . La clase de equivalencia de un punto p es precisamente su órbita. Denotamos por M/G el conjunto cociente determinado por esta relación. Se tiene

$$M/G = \{O(p) : p \in M\}.$$

Asimismo denotamos por $\eta : M \rightarrow M/G, p \mapsto O(p)$ la proyección canónica que asigna a cada punto de M su respectiva órbita.

Atendiendo en lo anterior, si G actúa sobre M , para cada $p \in M$ es natural definir la función sobreyectiva $\beta_p : G \rightarrow O(p), g \mapsto gp$ inducida por la acción de G sobre el punto $p \in M$. Es claro que $\beta_p^{-1}(p) = \text{St}(p)$, entonces si p posee isotropía trivial, i.e., $\text{St}(p) = \{e\}$ se tiene que β_p es también inyectiva. En efecto, la igualdad $gp = hp$ implica que $g^{-1}h \in \text{St}(p) = \{e\}$.

La acción de G en M se dice *transitiva* si posee solamente una órbita, esto es, si son dados $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $p = gq$, o de forma equivalente $O(p) = M$ para cada $p \in M$.

Si M es un espacio topológico o una variedad suave, es más natural estudiar acciones de grupos compatibles con la estructura topológica o con la estructura diferenciable de M .

Definición 3.1.3. Sea G un grupo y sea M un espacio topológico. Una acción por transformaciones continuas de G en M es una acción $\phi : G \times M \rightarrow M$ tal que para todo $g \in G$ la biyección $\gamma_g : M \rightarrow M$ es continua. Del mismo modo, si M es una variedad suave decimos que la acción es por transformaciones suaves si la biyección γ_g es diferenciable para todo $g \in G$.

Como $\gamma_g^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$, tenemos que si ϕ es una acción por transformaciones continuas entonces γ_g es un homeomorfismo de M , para todo $g \in G$; similarmente, si ϕ es una acción por transformaciones suaves, entonces γ_g es un difeomorfismo de M , para todo $g \in G$. En particular, si ϕ es una acción por transformaciones continuas y si $U \subset M$ es un conjunto abierto, $gU := \{gp : p \in U\}$ también es un abierto en M .

Si M es un espacio topológico entonces el conjunto $\text{Hom}(M)$ de los homeomorfismos de X es un subgrupo de $\text{Bij}(M)$; luego ϕ es una acción por transformaciones continuas si y solamente si, el homomorfismo asociado $\bar{\phi}(G)$ toma valores en $\text{Hom}(M)$. Si M es una variedad suave, el conjunto $\text{Dif}(M)$ de los difeomorfismos X es un subgrupo de $\text{Hom}(M)$; tenemos entonces que ϕ es una acción por transformaciones suaves si y solamente si $\bar{\phi}$ toma valores en $\text{Dif}(M)$.

Lema 3.1.4. Sean G un grupo, M un espacio topológico y supongamos que sea dada una acción de G en M por transformaciones continuas. Si M/G es unido de la topología cociente entonces la aplicación cociente $q : M \rightarrow M/G$ es abierta.

Demostración. Sea $U \subset M$ un conjunto abierto. Para mostrar que $q(U)$ es abierto en M/G debemos verificar que $q^{-1}(q(U))$ es abierto en M . Note que si $p \in q^{-1}(q(U))$, entonces $q(p) = q(x)$ con $x \in U$, de forma equivalente, $p = gx \in gU$ existe algún $g \in G$. Consecuentemente

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Como $gU \subset M$ es abierto cualquiera sea $g \in G$, entonces $q^{-1}(q(U))$ también es abierto en M . \square

Lema 3.1.5. Sean G un grupo, M un espacio topológico y supongamos que sea dada una acción de G en M por transformaciones continuas. El espacio cociente M/G es de Hausdorff si y solamente si, para todos $x, p \in M$ con $x \notin O(p)$, existen abiertos $U, V \subset M$ con $p \in U$, $x \in V$ y $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$.

Demostración. Suponiendo que M/G es un espacio de Hausdorff, sean $p, x \in M$ de modo que $x \notin O(p)$. Como M/G es un espacio de Hausdorff, hay abiertos disjuntos $\bar{U}, \bar{V} \subset M/G$ de modo que $q(p) \in \bar{U}$ y $q(x) \in \bar{V}$. Los conjuntos $U = q^{-1}(\bar{U})$, $V = q^{-1}(\bar{V})$ son abiertos, disjuntos y necesariamente contienen a p y x respectivamente. Note que si $gU \cap V \neq \emptyset$ con $g \in G$, entonces $ga = b \in V$ para algún $a \in U$ y $q(a) = q(b) \in q(U) \cap q(V) \subset \bar{U} \cap \bar{V}$ lo cual contradice que $\bar{U}, \bar{V} \subset M/G$ son abiertos disjuntos. Recíprocamente supongamos que se verifica la condición en el enunciado. Si $\bar{p} \neq \bar{x} \in M/G$ sean $p, x \in M$ tales que $q(p) = \bar{p}$, $q(x) = \bar{x}$. Luego p y x no son equivalente por lo supuesto existen abiertos $U, V \subset M$ con $p \in U$, $x \in V$ y $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$. Como q es abierta, los conjuntos $\bar{U} = q(U)$, $\bar{V} = q(V)$ son abiertos y disjuntos en M/G , además $\bar{p} \in \bar{U}$, $\bar{x} \in \bar{V}$. Esto muestra que M/G es un espacio de Hausdorff. \square

Corolario 3.1.6. Si M es un espacio topológico de Hausdorff y G es un grupo finito entonces toda acción libre por transformaciones continuas de G en M verifica la condición en el enunciado anterior, y por consiguiente M/G es un espacio de Hausdorff.

Demostración. A saber, si $p, x \in M$ son tales que $x \notin O(p)$, es decir, $x \neq gp$ para cada $g \in G$. Como M es un espacio de Hausdorff existen conjunto abiertos y disjuntos $U_g, V_g \subset M$ tales que $gp \in U_g$, $x \in V_g$. De este modo, definiendo

$$U = \bigcap_{g \in G} g^{-1}U_g, \quad V = \bigcap_{g \in G} V_g,$$

se tiene que U, V son abiertos en M con $p \in U$, $x \in V$ y para cada $g \in G$ tenemos $gU \subset U_g$ y $V \subset V_g$. Por lo tanto $gU \cap V = \emptyset$. \square

Lema 3.1.7. Sean G un grupo, M un espacio topológico equipado con una acción de G por transformaciones continuas cuya aplicación cociente es $q : M \rightarrow M/G$. Si $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una base para la topología en M , entonces sus imágenes $\{q(B_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ bajo q constituye una base para M/G . En particular, si M verifica el segundo axioma de enumerabilidad, entonces M/G también verifica tal axioma.

Demostración. Dado que q es una función abierta, $\{q(B_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de conjuntos abiertos en M/G . Sean \bar{U} un abierto en M/G y $\bar{p} \in \bar{U}$. De este modo $U = q^{-1}(\bar{U})$ es un abierto en M . Luego existe un básico $B_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_\alpha \subset U$. Consecuentemente, $\bar{p} \in q(B_\alpha) \subset q(U) \subset \bar{U}$. Esto muestra que $\{q(B_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ constituye una base para la topología de M/G . \square

Ejemplo 3.1.8. Sea G un grupo equipado con una topología para la cual la ley de composición y la inversión son funciones continuas. En este caso, para cada $g \in G$, la aplicación $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto xg^{-1}$ es una biyección continua pues se puede ver como la restricción de la ley de composición sobre $G \times \{g^{-1}\}$. Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de G . La prescripción:

$$H \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto gh^{-1},$$

define una acción por transformaciones continuas en G . Si el conjunto $G/H = \{gH : g \in G\}$ es equipado con la topología cociente, la proyección $q : G \rightarrow G/H$ es una aplicación continua y abierta. Además, si G es segundo contable, de 3.1.7 G/H también lo es. Asimismo, G/H es un espacio de Hausdorff. A saber, considerando el conjunto:

$$R = \{(g, g') \in G : (g')^{-1}g \in H\} = \{(g, g') \in G : g \sim g'\}.$$

R es cerrado en el espacio producto $G \times G$ porque $R = f^{-1}(H)$, en que $f : G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto (g')^{-1}g$. Si $g, g' \in G$ son tales que $g' \notin O(g)$, entonces (g, g') es un elemento del abierto $G \times G \setminus \{R\}$. De este modo es posible encontrar conjuntos abiertos $U, V \subset G$ tales que $g \in U, g' \in V$ de modo que $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Esto es, para cada $h \in H$ se tiene que $hU \cap V = \emptyset$. Caso contrario, si $z \in hU \cap V$ entonces $xh = z$ con $x \in U$, luego $(x, z) \in (U \times V) \cap R$ lo cual contradice que $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Del lema 3.1.5 se sigue que G/H es un espacio de Hausdorff.¹

Observación 3.1.9. Si G es un grupo de Lie, es posible equipar el espacio G/H de una estructura suave de modo que la proyección $q : G \rightarrow G/H$ es suave, asimismo, para cada $gH \in G/H$, el conjunto $q^{-1}(gH) = O(g) \subset G$ es una subvariedad; y es posible encontrar una vecindad abierta W de gH y un difeomorfismo $\psi : q^{-1}(W) \rightarrow W \times H$ de modo que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(W) & \xrightarrow{\psi} & W \times H \\ q \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ W & \xrightarrow{1_W} & W \end{array}$$

conmuta, y la restricción a $O(g)$, $\psi|_{O(g)} : O(g) \rightarrow \{gH\} \times H$ verifica $\psi(gh) = (gH, h)$.

Este es un caso particular de una estructura conocida como *fibrado principal*, detalles al respecto pueden ser consultados en [31].

Observación 3.1.10. Sea G un grupo de Lie que actúa por transformaciones suaves en una variedad suave M . Para cada $p \in M$ la aplicación $\beta_p : G \rightarrow O(p), g \mapsto gp$ inducida por la acción de G en p es suave pues puede escribirse como la composición de funciones suaves

$$G \cong G \times \{p\} \subset G \times M \xrightarrow{\phi} M.$$

Como $St(p) = \beta_p^{-1}(p)$ es un subgrupo cerrado de G , el espacio cociente $G/St(p)$ admite una estructura diferenciable de modo que la aplicación inducida en el cociente por la acción de G sobre el elemento $p \in M$, $\bar{\beta}_p : G/St(p) \rightarrow O(p)$ es un difeomorfismo. En particular, cuando la acción de G en M es transitiva, para $p \in M$, se tiene que $\bar{\beta}_p : G/St(p) \rightarrow M$ es un difeomorfismo.

¹Atendiendo en este razonamiento, otro criterio para saber que el espacio cociente M/G es de Hausdorff consiste en verificar que la relación $R \subset M \times M$ es un conjunto cerrado

Describamos a seguir algunos ejemplos de acciones de grupos.

Ejemplo 3.1.11. Sea $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = \text{Id}\}$. Es claro que, $O(n)$ es un grupo respecto al producto de matrices y actúa por conjugación sobre las matrices simétricas $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$. Es decir,

$$\phi : O(n) \times \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}) : (O, A) \mapsto OAO^t$$

define una acción de $O(n)$ sobre $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$. Para $A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{St}(A) &= \{O \in O(n) : OAO^t = A\}, \\ O(A) &= \{OAO^T : O \in O(n)\}. \end{aligned}$$

Si $B \in O(A)$ entonces $A = OBO^T$ con $O \in O(n)$. Luego

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = \det(OBO^T - \lambda \text{Id}) = \det(B - \lambda \text{Id}),$$

es decir A y B tienen el mismo polinomio característico y por ende los mismos valores propios. Recíprocamente, si A y B son matrices simétricas con los mismos valores propios, del teorema de la descomposición espectral sabemos que $A = ODO^T$ y $B = C\bar{D}C^T$, en que D y \bar{D} son matrices diagonales en cuya diagonal aparecen los valores propios de A y B respectivamente, y $O, C \in O(n)$. Como A y B poseen los mismos valores propios, entonces (conjugando por matrices de permutación si fuese necesario) $D = \bar{D}$. Reemplazando $D = C^TBC$ en A , obtenemos $A = QBQ^T$, con $Q = OC^T \in O(n)$, esto es $B \in O(A)$.

Así, A y B están en la misma órbita si y sólo si tienen los mismos valores propios.

Ejemplo 3.1.12. Consideremos el grupo ortogonal especial de orden 2,

$$\text{SO}(2) = \left\{ g_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

$\text{SO}(2)$ actúa a izquierda en el espacio \mathbb{R}^2 por multiplicación,

$$\rho : \text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 : (g_\theta, x) \mapsto g_\theta \cdot x.$$

Geoméricamente, la acción de g_θ sobre el vector x es una rotación por un ángulo θ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Para $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$, el grupo de isotropía es $\text{St}(x) = \{g_\theta \in \text{SO}(2) : g_\theta \cdot x = x\}$. Es decir, $g_\theta \in \text{SO}(2)_x$, si y sólo si x es un vector propio para g_θ asociado al valor propio $\lambda = 1$. Como el polinomio característico es:

$$P_{g_\theta}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos(\theta) + 1$$

luego, $0 = P_{g_\theta}(1) = 2(1 - \cos(\theta))$; en consecuencia, $\theta = 0$ y necesariamente $g_\theta = 1_{\text{SO}(2)}$. Así,

$$\text{St}(x) = \begin{cases} \{1_{\text{SO}(2)}\}, & x \neq 0, \\ \text{SO}(2), & x = 0. \end{cases}$$

Por otro lado, $(x, y) \sim (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si existe $g_\theta \in \text{SO}(2)$ de modo que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

de donde $x_1 = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$, $y_1 = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$. Luego,

$$(x, y) \sim (\bar{x}, \bar{y}) \iff \|(x, y)\|^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = x^2 + y^2 = \|(\bar{x}, \bar{y})\|^2.$$

Así, para $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la órbita $O(p)$ está constituida de todos los vectores con igual norma que p ; esto es, $O(p)$ es la circunferencia con centro en el origen y radio $\|p\|$.

Note que la función sobreyectiva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|^2$ es constante en las órbitas de esta acción. Por paso al cociente hay función biyección y continua $\bar{f} : \mathbb{R}^2/\text{SO}(2) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \\ \downarrow q & \searrow f & \\ \mathbb{R}^2/\text{SO}(2) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{array}$$

es conmutativo. Así, el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\text{SO}(2)$ se identifica con el espacio $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

3.2. Espacios proyectivos

A forma de ejemplo construimos a seguir los espacios proyectivos sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{H} .

Ejemplo 3.2.1. El grupo de dos elementos $G = S^0 = \{-1, 1\}$ actúa sobre la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por transformaciones suaves haciendo:

$$g \cdot x = \begin{cases} x, & \text{si } g = 1; \\ -x, & \text{si } g = -1. \end{cases}$$

Para cada $x \in S^n$, se tiene:

$$O(x) = \{-x, x\}, \text{St}(x) = \{1\}.$$

El espacio S^n/G es denotado por $\mathbb{R}P^n$ y es llamado el *espacio proyectivo real*. Como la acción es libre y S^n verifica el segundo axioma de enumerabilidad, se sigue de 3.1.6 y de 3.1.7 que $\mathbb{R}P^n$ es un espacio de Hausdorff y verifica el segundo axioma de enumerabilidad. Asimismo, la continuidad de la proyección $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ nos permite concluir que $\mathbb{R}P^n$ es un espacio conexo y compacto.

Si $U \subset S^n$ denotamos por $-U$ el conjunto $-1U = \{-x : x \in U\}$. Note que cada $x \in S^n$ admite una vecindad U de modo que $U \cap (-U) = \emptyset$. Si $q(U) := \bar{U}$, entonces $q^{-1}(\bar{U}) = U \cup (-U)$ y las restricciones $q|_U : U \rightarrow \bar{U}$, $q|_{-U} : -U \rightarrow \bar{U}$ son biyecciones continuas y abiertas, por tanto son homeomorfismos.

De lo anterior concluimos:

- (1) $\mathbb{R}P^n$ es localmente homeomorfo al espacio \mathbb{R}^n , es un espacio de Hausdorff, segundo contable y por tanto es una variedad topológica;²
- (2) La proyección $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es un recubrimiento, de modo que para $n \geq 2$ la esfera S^n es un espacio simplemente conexo.

Generalicemos lo realizado en el ejemplo anterior.

Ejemplo 3.2.2. Supongamos que \mathbb{K} es uno de los espacios $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$, así, $d \in \{1, 2, 4\}$. De la estructura de álgebra normada en \mathbb{K} , la esfera unitaria $S^{d-1} \subset \mathbb{K}$ admite una estructura de grupo de Lie y actúa por transformaciones suaves sobre la esfera $S^{d(n+1)-1} \subset \mathbb{K}^{n+1}$, $n \geq 1$ como sigue:

$$\phi : S^{d(n+1)-1} \times S^{d-1} \rightarrow S^{d(n+1)-1} : ((x_1, \dots, x_{n+1}), g) \mapsto (x_1 \cdot g, \dots, x_{n+1} \cdot g); \quad (3.1)$$

de modo que para $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^{d(n+1)-1}$, se tiene:

$$O(x) = \{x \cdot g : g \in S^{d-1}\}, \text{St}(x) = \{e\};$$

en que e denota el elemento neutro de G . Luego $S^{d-1}/\{e\} \cong O(x)$, es decir,

$$O(x) \cong S^{d-1}, \text{ para } x \in S^{d(n+1)-1}.$$

El espacio de órbitas $S^{d(n+1)-1}/S^{d-1}$ denotado por $\mathbb{K}P^n$ se llama el n -espacio proyectivo sobre \mathbb{K} .

Esta acción es libre y por transformaciones suaves, luego la proyección canónica

$$q : S^{d(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{K}P^n : x \mapsto [x],$$

²se verifica sin dificultad que $\mathbb{R}P^n$ es una variedad suave de dimensión n , y que todas las aplicaciones mencionadas son suaves, [37].

es continua y abierta. Dado que la esfera es un espacio de Hausdorff, segundo contable, compacto y conexo, el espacio $\mathbb{K}P^n$ también tiene todos estos atributos, ver 3.1.4, 3.1.6 y 3.1.7.

Vemos que para cada $[x] \in \mathbb{K}P^n$, se tiene $q^{-1}([x]) \cong \mathbb{S}^{d-1}$. Esto brinda una descomposición para la esfera $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ como una unión disjunta de esferas \mathbb{S}^{d-1} cada una de las cuales corresponde a un punto en el espacio $\mathbb{K}P^n$. Es decir,

$$\mathbb{S}^{d(n+1)-1} = \bigcup_{[x] \in \mathbb{K}P^n} q^{-1}([x]).$$

La descomposición de $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ en esferas admite una estructura, llamada *fibración*, la cual ocurre en diversas situaciones geométricas. Definamos este concepto a seguir.

Definición 3.2.3. Una fibración localmente trivial, con espacio total M , base B y fibra típica F , es una función continua $\pi : M \rightarrow B$ con la siguiente propiedad, para cada $x \in B$ existe una vecindad $U \subset B$ y un homeomorfismo $\psi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ de modo que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\psi} & \pi^{-1}(U) \\ \mathfrak{Pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{1_U} & U \end{array}$$

conmuta. En que $\mathfrak{Pr}_1 : U \times F \rightarrow U$ denota la proyección sobre la primera componente.

Cada una de las vecindades U en la definición anterior se llaman *vecindades distinguidas* y los homeomorfismos $\psi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ *trivializaciones locales*. La igualdad $\pi(\psi(x, f)) = x$ significa que para $x \in U$ la restricción de ψ al conjunto $\{x\} \times F$ es un homeomorfismo sobre $\pi^{-1}(x)$. Es decir, para cada $x \in B$, $\pi^{-1}(x)$ es homeomorfo a la fibra F .

Ejemplos de fibraciones son dadas por las proyecciones $B \times F \rightarrow B, (b, f) \mapsto b$. Llamadas *fibraciones triviales*. Es por este ejemplo, que las fibraciones se dicen localmente triviales, porque localmente son así, más precisamente, lucen como un fibrado trivial sobre cada vecindad distinguida U , así, $\pi^{-1}(U) \cong U \times F \rightarrow U$.

Un ejemplo importante sucede cuando G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado que actúa en G por multiplicación, ver la observación 3.1.9.

Proposición 3.2.4. Con la notación y terminología anteriores, la proyección canónica

$$q : \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{K}P^n : x \mapsto [x],$$

es una fibración localmente trivial.

Demostración. Para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ el conjunto $V_j := \{x \in \mathbb{S}^{d(n+1)-1} : x_j \neq 0\}$ es abierto en la esfera $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$, ya que es la imagen inversa del abierto $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bajo la proyección j -ésima. Por lo tanto $q(V_j) = U_j$ es abierto en el espacio $\mathbb{K}P^n$. La colección $\{U_j\}$ es un cubrimiento por abiertos para $\mathbb{K}P^n$ y además $q^{-1}(U_j) = V_j$. Defina las funciones continuas

$$\rho_j : V_j \rightarrow U_j \times \mathbb{S}^{d-1} : x \mapsto \left(q(x), \frac{x_j}{\|x_j\|} \right), j \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Note que si $x \in V_j$, entonces $u \frac{x_j}{\|x_j\|} \in \mathbb{S}^{d-1}$, para $u \in \mathbb{S}^{d-1}$. Esto permite definir la respectiva inversa para ρ_j ,

$$\psi_j : U_j \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow V_j : (q(x), u) \mapsto \phi \left(x, u \frac{x_j}{\|x_j\|} \right) = xu \frac{x_j}{\|x_j\|}.$$

En que ϕ es la acción definida en 3.1. Esta función es bien definida pues su valor no cambia al sustituir x por xg con $g \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\psi_j(xg, u) = (xg)u \frac{\bar{x}_j \bar{g}}{\|x_j\|} = \left(xu \frac{\bar{x}_j}{\|x_j\|}\right) g \bar{g} = xu \frac{\bar{x}_j}{\|x_j\|},$$

es continua pues ϕ lo es, finalmente,

$$\mathfrak{q}(\psi_j(\mathfrak{q}(x), u)) = \mathfrak{q}\left(xu \frac{\bar{x}_j}{\|x_j\|}\right) = \mathfrak{q}(x).$$

En consecuencia, para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$ la función

$$\psi_j : U_j \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathfrak{q}^{-1}(U_j)$$

es una trivialización local para $\mathfrak{q} : \mathbb{S}^{d(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{K}P^n$. □

Atendiendo en lo anterior, para cada $n \geq 1$, cuando \mathbb{K} cambia entre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ obtenemos tres familias de fibraciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^n & \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} & \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^{4n+3} \\ \downarrow \mathfrak{q} & \downarrow \mathfrak{q} & \downarrow \mathfrak{q} \\ \mathbb{R}P^n & \mathbb{C}P^n & \mathbb{H}P^n \end{array}$$

De estas fibraciones estamos interesados en las conocidas como *fibraciones de Hopf*, presentadas en la siguiente sección.

Observación 3.2.5. En $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ se puede definir la relación de equivalencia

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (x_1 \cdot \lambda, \dots, x_{n+1} \cdot \lambda), \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}.$$

dada por la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sobre $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. El espacio de órbitas por esta acción es precisamente $\mathbb{K}P^n$. En este caso los puntos del espacio proyectivo corresponden con las direcciones o las rectas en el espacio \mathbb{K}^{n+1} que pasan por el origen. Entendiendo por una recta una copia de \mathbb{K}

La construcción presentada en el ejemplo 3.2.2 se sigue de la anterior, proyectando primero sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ dentro de \mathbb{K}^{n+1} , podemos entender $\mathbb{K}P^n$ como el espacio de órbitas de $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ por la acción del grupo \mathbb{S}^{d-1} . De este modo, para $x \in \mathbb{S}^{d(n+1)-1}$, su órbita $[x] \in \mathbb{K}P^n$ es dada por la intersección de la recta por el origen pasando por x (identificada con \mathbb{K}) con la esfera $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$, la cual es la esfera unitaria en \mathbb{K} cuya dimensión es $d-1$.

De manera más general, para un espacio vectorial V (sobre algún cuerpo, o incluso más generalmente un módulo V sobre algún anillo de división), $P(V)$ se define como el espacio cociente de $V \setminus \{0\}$, donde dos vectores distintos de cero v, w en V son equivalentes si difieren por medio de un escalar no nulo λ , i.e., $v = \lambda w$. El espacio vectorial V no necesariamente es de dimensión finita.

3.3. Las Fibraciones de Hopf

3.3.1. La fibración de Hopf para S^1, S^3 y S^7

Atendiendo el ejemplo 3.2.2, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tenemos una familia de recubrimientos o fibraciones con fibra discreta,

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \hookrightarrow & S^n \\ & & \downarrow q \\ & & \mathbb{R}P^n \end{array} \quad (3.2)$$

Teorema 3.3.1. $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

Demostración. Consideremos la aplicación continua y sobreyectiva $f : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$, ($z = e^{i\theta}$), luego, si $x = e^{i\theta_1}, y = e^{i\theta_2}$ entonces

$$x \sim y \iff x = \pm y \iff \theta_2 = \theta_1 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff f(x) = f(y).$$

Por paso al cociente, existe una aplicación biyectiva y continua $\tilde{f} : \mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$. Como $\mathbb{R}P^1$ y S^1 son compactos y de Hausdorff, entonces \tilde{f} es un homeomorfismo. \square

Atendiendo el lema anterior, obtenemos la fibración de Hopf para S^1 .

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \hookrightarrow & S^1 \\ & & \downarrow q \\ & & S^1 \end{array}$$

Ésta describe una fibración donde, tanto la fibra, el espacio total y el espacio base son todas esferas.

Teorema 3.3.2. Para cada $n \geq 2$, el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ es un grupo de orden 2.

Demostración. Para el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ la proyección canónica $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es un recubrimiento. Como S^n es un espacio simplemente conexo, la correspondencia del levantamiento

$$\varphi : \pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) \rightarrow q^{-1}([x]) = \{x, -x\} \in S^n$$

es una biyección entre $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x])$ y la fibra $q^{-1}([x]) = \{x, -x\}$. En consecuencia, $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x])$ es un grupo de orden 2; el cual es isomorfo al grupo \mathbb{Z}_2 , de los enteros módulo 2. \square

Corolario 3.3.3. Para cada $n, m \geq 2$, no existe un homeomorfismo entre la esfera S^m y el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$.

Demostración. Esto se sigue de notar que para cada $n \geq 2$ la esfera S^n tiene grupo fundamental trivial, mientras que el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ tiene grupo fundamental isomorfo a \mathbb{Z}_2 . \square

En consecuencia de la familia de fibraciones dadas en (3.2), la única que es una fibración de Hopf es la que corresponde a $n = 1$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, para $n = 1$ tenemos las fibraciones,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 & & \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^7 \\ & \downarrow q & \downarrow q \\ & \mathbb{C}P^1 & \mathbb{H}P^1 \end{array}$$

con fibras típicas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ respectivamente. Veamos que de las familias de fibraciones del ejemplo 3.2.2, estas son fibraciones de esferas por esferas.

Lema 3.3.4. *Supongamos que \mathbb{K} es uno de los espacios \mathbb{C}, \mathbb{H}^3 y $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$, así, $d \in \{2, 4\}$. Entonces $\mathbb{K}P^1 \cong \mathbb{S}^d$.*

Demostración. Del corolario 2.1.2, para obtener el resultado basta verificar que $\mathbb{K}P^1 \cong \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Consideremos la fibración $q : \mathbb{S}^{2d-1} \subset \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}P^1$ y sea $A := \{(x, y) \in \mathbb{S}^{2d-1} : y \neq 0\}$. Claramente A es un conjunto abierto porque $A = \pi_2^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$, en que $\pi_2 : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto y$ denota la proyección sobre la segunda coordenada. Definamos la función continua (diferenciable)

$$g : A \subset \mathbb{S}^{2d-1} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy^{-1}.$$

Note que g es sobreyectiva, pues si $z \in \mathbb{K}$, basta tomar $x = \frac{z}{\sqrt{\|z\|^2+1}}, y = \frac{1}{\sqrt{\|z\|^2+1}}$ de este modo $g(x, y) = z$. Además, g es compatible con la acción de \mathbb{S}^{d-1} ya que

$$g(x \cdot h, y \cdot h) = (x \cdot h)(h^{-1} \cdot y^{-1}) = xy^{-1},$$

para cada $(x, y) \in A, h \in \mathbb{S}^{d-1}$. La función $f : \mathbb{S}^{2d-1} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \in A; \\ \infty, & y = 0 \end{cases}$$

es una extensión continua de g y es compatible con la acción de \mathbb{S}^{d-1} . La compatibilidad es clara, para ver la continuidad, tomemos un cerrado $F \subset \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Si $\infty \notin F$, el complemento de F es un abierto que contiene a ∞ (del segundo tipo en la compactación de \mathbb{K}) luego $F \subset \mathbb{K}$ es cerrado y compacto en \mathbb{K} y portanto $f^{-1}(F) = g^{-1}(F)$ es cerrado en \mathbb{S}^{2d-1} . Caso contrario, si $\infty \in F$, su complemento es un abierto en \mathbb{K} . De este modo $F = \{\infty\} \cup \tilde{F}$, en que \tilde{F} es cerrado en \mathbb{K} . En consecuencia, $f^{-1}(F) = f^{-1}(\{\infty\}) \cup f^{-1}(\tilde{F}) = \mathbb{S}^{d-1} \cup g^{-1}(\tilde{F})$. Es un cerrado en \mathbb{S}^{2d-1} por ser la unión de dos conjuntos cerrados. Finalmente por la propiedad de paso al cociente, existe una función continua y biyectiva $\bar{f} : \mathbb{K}P^1 \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Como $\mathbb{K}P^1$ es un espacio compacto y $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ es un espacio de Hausdorff entonces \bar{f} es un homeomorfismo. \square

Atendiendo el lema anterior tenemos las fibraciones de Hopf, para $\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 & & \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^7 \\ & \downarrow q & \downarrow q \\ & \mathbb{S}^2 & \mathbb{S}^4 \end{array}$$

con fibras típicas \mathbb{S}^1 y \mathbb{S}^3 respectivamente.

³Este resultado también incluye el caso en el cual $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya visto antes.

3.4. La fibración de Hopf para \mathbb{S}^{15}

El método empleado para construir los espacios proyectivos sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ en la sección 3.2 no incluyó a los octonios pues en este caso la esfera \mathbb{S}^7 no es un grupo, ya que su producto heredado de los octonios no es asociativo. Asimismo, la idea de identificar puntos en \mathbb{O}^2 mediante una relación de equivalencia, dando lugar a la recta proyectiva sobre los octonios tampoco funciona al no tener asociatividad.

Presentamos a seguir una forma de construir el espacio $\mathbb{O}P^1$.

En $\mathbb{S}^{15} \subset \mathbb{O}^2$ consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y) \sim (w, z) \iff x\bar{x} = w\bar{w}, y\bar{y} = z\bar{z}, x\bar{y} = w\bar{z}.$$

Denotamos por $\mathbb{O}P^1$ el espacio cociente \mathbb{S}^{15} / \sim . Este espacio equipado de la topología cociente torna continua la proyección canónica $q : \mathbb{S}^{15} \rightarrow \mathbb{O}P^1$ y por lo tanto, el espacio $\mathbb{O}P^1$ es conexo, conexo por caminos y compacto.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fijos. Notemos que si $(x, y) \sim (w, z)$, entonces:

$$(\alpha x + \beta y)\overline{(\alpha x + \beta y)} = (\alpha x + \beta y)(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = (\alpha w + \beta z)(\alpha\bar{w} + \beta\bar{z}) = (\alpha w + \beta z)\overline{(\alpha w + \beta z)},$$

en particular, $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha w + \beta z\|^2$; luego

$$\alpha x + \beta y = 0 \iff \alpha w + \beta z = 0.$$

En consecuencia, para cada par de reales (α, β) es bien definido el conjunto

$$U_{(\alpha, \beta)} := \{[(x, y)] \in \mathbb{O}P^1 : \alpha x + \beta y \neq 0\}$$

el cual es abierto ya que $q^{-1}(U_{(\alpha, \beta)}) = \{(x, y) \in \mathbb{S}^{15} : \alpha x + \beta y \neq 0\} := V_{(\alpha, \beta)}$ es abierto en la esfera.

Si $\beta \neq 0$. Consideremos la función continua

$$\phi_{(\alpha, \beta)} : V_{(\alpha, \beta)} \rightarrow \mathbb{O}, (x, y) \mapsto \frac{x(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})}{\|\alpha x + \beta y\|^2}.$$

Si $x \in \mathbb{O}$, para $r = \sqrt{\|x\|^2 + \frac{1}{\beta^2}\|1 - \alpha x\|^2}$ se verifica sin dificultad que $\left(\frac{x}{r}, \frac{1 - \alpha x}{\beta r}\right) \in V_{(\alpha, \beta)}$; y además

$$\phi_{(\alpha, \beta)}\left(\frac{x}{r}, \frac{1 - \alpha x}{\beta r}\right) = x,$$

esto prueba que la función $\phi_{(\alpha, \beta)}$ es sobreyectiva. Notemos que

$$(x, y) \sim (w, z) \iff \phi_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \phi_{(\alpha, \beta)}(w, z).$$

Por paso al cociente, existe una función biyectiva y continua

$$\bar{\phi}_{(\alpha, \beta)} : U_{(\alpha, \beta)} \rightarrow \mathbb{O}$$

la cual es un homeomorfismo, pues la prescripción $x \mapsto \left[\left(\frac{x}{r}, \frac{1 - \alpha x}{\beta r}\right)\right]$ define una inversa continua.

Estos homeomorfismos pueden ser vistos como sistemas de coordenadas en $\mathbb{O}P^1$ sobre \mathbb{O} .

En lo anterior mostramos que $\mathbb{O}P^1$ es un espacio localmente euclidiano. El mismo razonamiento puede efectuarse si $\alpha \neq 0$, es decir, lo anterior se verifica para cualquier par de reales $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Notamos que $\mathbb{O}P^1$ puede ser cubierto con los abiertos $U_{(1,0)}$ y $U_{(0,1)}$; ambos homeomorfos con $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$, luego ambos son espacios de Hausdorff y segundo contables. Necesariamente $\mathbb{O}P^1$ es un espacio segundo contable.

Lema 3.4.1. $\mathbb{O}P^1$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Si consideramos $(x, y) \neq (x', y') \in \mathbb{S}^{15}$ es posible encontrar un par de reales $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ de modo que $\alpha x + \beta y \neq 0$ y $\alpha x' + \beta y' \neq 0$. De ser así, $[(x, y)], [(x', y')] \in U_{(\alpha, \beta)}$, el cual sabemos es un espacio de Hausdorff. Para encontrar (α, β) que verifican la afirmación note que las soluciones de la ecuación $\alpha x + \beta y = 0$ constituyen un subespacio de \mathbb{R}^2 con dimensión a lo sumo 1 y lo mismo sucede para la ecuación $\alpha x' + \beta y' = 0$. Dado que la unión de dos de tales subespacios no es todo el plano, siempre es posible encontrar un punto que falla en satisfacer ambas ecuaciones. \square

Corolario 3.4.2. $\mathbb{O}P^1$ es una variedad suave de dimensión 8.

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{O}P^1$ es un espacio localmente euclidiano, de Hausdorff y segundo contable. Veamos que es una variedad. Podemos cubrir $\mathbb{O}P^1$ con dos abiertos $U_{(1,0)}$ y $U_{(0,1)}$ que son los dominios de los sistemas de coordenadas $\overline{\phi_{(1,0)}} : U_{(1,0)} \rightarrow \mathbb{O}$ y $\overline{\phi_{(0,1)}} : U_{(0,1)} \rightarrow \mathbb{O}$ antes definidos. Es fácil verificar que

$$\overline{\phi_{(1,0)}} \left(\overline{\phi_{(0,1)}}^{-1}(x) \right) = x^{-1},$$

por lo que la función de transición del primer conjunto al segundo es el dada por $x \mapsto x^{-1}$. Dado que esta función y su inversa son suaves, $\mathbb{O}P^1$ es una variedad suave. \square

Veamos ahora que la proyección canónica $q : \mathbb{S}^{15} \rightarrow \mathbb{O}P^1$ es una fibración localmente trivial con fibra típica \mathbb{S}^7 . La colección $\{U_{(1,0)}, U_{(0,1)}\}$ es un cubrimiento por abiertos para $\mathbb{O}P^1$. Definamos las funciones continuas

$$\begin{aligned} \rho_{10} : V_{(1,0)} &\rightarrow U_{(1,0)} \times \mathbb{S}^7 : (x, y) \mapsto \left(q(x, y), \frac{x}{\|x\|} \right), \\ \rho_{01} : V_{(0,1)} &\rightarrow U_{(0,1)} \times \mathbb{S}^7 : (x, y) \mapsto \left(q(x, y), \frac{y}{\|y\|} \right), \end{aligned}$$

Note que si $(x, y) \in V_{(1,0)}$ (resp, $V_{(0,1)}$), entonces $\frac{x}{\|x\|}u \in \mathbb{S}^7$, (resp, $\frac{y}{\|y\|}u$) para cada $u \in \mathbb{S}^7$. Esto permite definir las respectivas inversas

$$\begin{aligned} \psi_{10} : U_{(1,0)} \times \mathbb{S}^7 &\rightarrow V_{(1,0)} : (q(x, y), u) \mapsto (xg, yg), \quad g = \frac{\bar{x}}{\|x\|}u \\ \psi_{01} : U_{(0,1)} \times \mathbb{S}^7 &\rightarrow V_{(0,1)} : (q(x, y), u) \mapsto (xg, yg), \quad g = \frac{\bar{y}}{\|y\|}u. \end{aligned}$$

Lema 3.4.3. $\mathbb{O}P^1 \cong \mathbb{S}^8$.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Consideremos la compactación de Alexandrov $\mathbb{O}^* = \mathbb{O} \cup \{\infty\}$ para \mathbb{O} . Siguiendo el procedimiento empleado en 3.3.4 se verifica sin dificultad que la función $g : \mathbb{S}^{15} \rightarrow \mathbb{O} \cup \{\infty\}$ definida por:

$$g(x, y) = \begin{cases} \phi_{(\alpha, \beta)}(x, y), & \text{si } \alpha x + \beta y \neq 0; \\ \infty, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es continua y sobreyectiva. Además es compatible con la relación de equivalencia \sim . Por paso al cociente, hay una biyección continua $\bar{g} : \mathbb{O}P^1 \rightarrow \mathbb{O} \cup \{\infty\}$. La cual es un homeomorfismo ya que $\mathbb{O}P^1$ es un espacio compacto y $\mathbb{O} \cup \{\infty\}$ es un espacio de Hausdorff. El resultado se sigue notando que \mathbb{S}^8 es homeomorfo a la compactación de Alexandrov para \mathbb{O} . \square

Atendiendo lo anterior tenemos las fibrición de Hopf, para S^{15}

$$\begin{array}{ccc} S^7 & \hookrightarrow & S^{15} \\ & & \downarrow q \\ & & S^8 \end{array}$$

3.4.1. Espacios proyectivos sobre los octonios

El método empleado para construir la recta proyectiva sobre los octonios, OP^1 puede imitarse con algunas modificaciones para construir el plano proyectivo sobre los octonios, OP^2 .

En la esfera $S^{23} \subset \mathbb{O}^3 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{24} \setminus \{0\}$ considere el siguiente conjunto:

$$A = \{(x, y, z) \in S^{23} : x, y, z \text{ generan una subálgebra asociativa}\}$$

En A consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y, z) \sim (a, b, c) \iff x\bar{x} = a\bar{a}, y\bar{y} = b\bar{b}, z\bar{z} = c\bar{c}, x\bar{y} = a\bar{b}, x\bar{z} = a\bar{c}, y\bar{z} = b\bar{c}.$$

Las tres relaciones similares se siguen de las anteriores por las propiedades de la conjugación. Denotamos por OP^2 el espacio cociente obtenido por la relación anterior. Equipado de la topología cociente, la proyección canónica $q : A \rightarrow OP^2$ es continua. Note que A no es compacto y por lo tanto, el espacio OP^2 no necesariamente es compacto.

Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fijos. Análogo a como se hizo antes, se tiene que si $(x, y, z) \sim (a, b, c)$, entonces, $\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \|\alpha a + \beta b + \gamma c\|^2$; luego

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \iff \alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

En consecuencia, para cada terna de reales (α, β, γ) es bien definido el conjunto abierto:

$$U_{(\alpha, \beta, \gamma)} := \{(x, y, z) \in OP^2 : \alpha x + \beta y + \gamma z \neq 0\}.$$

Además, si $\gamma \neq 0$, la función continua:

$$\phi_{(\alpha, \beta, \gamma)} : q^{-1}(U_{(\alpha, \beta, \gamma)}) \rightarrow \mathbb{O}^2, (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z})}{\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2}, \frac{y(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z})}{\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2} \right)$$

es sobreyectiva y compatible con la relación de equivalencia. Por lo tanto por paso al cociente induce una biyección continua:

$$\overline{\phi_{(\alpha, \beta, \gamma)}} : U_{(\alpha, \beta, \gamma)} \rightarrow \mathbb{O}^2$$

la cual es un homeomorfismo. De este modo OP^2 es un espacio localmente euclidiano el cual puede ser cubierto por abiertos $U_{(1,0,0)}, U_{(0,1,0)}, U_{(0,0,1)}$ que son espacio de Hausdorff y segundo contables. Necesariamente OP^2 también es un espacio de Hausdorff y segundo contable. Se verifica que los cambios de coordenadas entre estos abiertos coordenados son suaves y en consecuencia OP^2 es una variedad suave de dimensión real 16.

La aplicación continua:

$$f : OP^1 \rightarrow OP^2, [x, y] \mapsto [x, y, 0]$$

es una biyección sobre el subespacio cerrado $F = \{[x, y, 0] \in OP^2 : x, y \in A\}$. Como OP^1 es un espacio compacto y OP^2 es un espacio de hausdorff resulta que f es un homeomorfismo.

Observación 3.4.4. La construcción del espacio proyectivo sobre los octonios OP^2 no generaliza a espacios proyectivos de dimensiones superiores ya que hemos utilizado intensamente el hecho de que todos los cálculos se realizan en subálgebras asociativas de \mathbb{O} . Hay razones conceptuales que soportan esta afirmación desde de la topología algebraica (avanzada) los cuales están fuera del alcance de este trabajo.

Capítulo 4

Comentarios y observaciones finales

Atendiendo en lo realizado en los capítulos previos, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ construimos familias de fibraciones

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^n & \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} & \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^{4n+3} & \mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{S}^{8n+7} \\ \downarrow q & \downarrow q & \downarrow q & \downarrow q \\ \mathbb{R}P^n & \mathbb{C}P^n & \mathbb{H}P^n & \mathbb{O}P^n \end{array} \quad (4.1)$$

en que para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ solo se tiene opción para $n \in \{1, 2\}$.

De todas las familias anteriores, verificamos que para el caso real, de todas las fibraciones solo es posible tener una fibración de Hopf, i.e., una fibración de una esfera por esferas, sobre otra esfera, cuando $n = 1$, ver (3.3.1) y (3.3.3). De este modo, tenemos la fibración de Hopf para \mathbb{S}^1 :

$$\begin{array}{c} \mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \downarrow q \\ \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Para los demás casos, se puede verificar lo mismo, es decir, solo es posible tener una fibración de Hopf cuando $n = 1$.

4.1. Grupos de homotopía

Para tratar el problema anterior, en el caso complejo se puede imitar lo realizado para el caso real empleando algunas herramientas de la topología algebraica que describimos a seguir de forma sucinta.

El grupo fundamental es el grupo de homotopía más simple, recibe este nombre especial porque de todos los grupos de homotopía es el único que no necesariamente es abeliano. Para definir n -ésimo grupo de homotopía, asumiremos que estamos trabajando con espacios conexos en cada uno con un punto distinguido x_0 . Una aplicación entre espacios con punto distinguido, es una función continua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f(x_0) = y_0$. La noción de homotopía puede ser extendida a este tipo de funciones. Así, dadas aplicaciones entre espacios con puntos distinguidos $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una homotopía es una aplicación continua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que para cada $t \in I$ la aplicación $H_t: X \times \{t\} \rightarrow Y$ es una aplicación entre espacios con puntos distinguidos. Esta definición desde luego define una relación de equivalencia.

Para continuar, consideramos el cubo I^n , el cual tendrá el papel que tenía el intervalo I en la definición de homotopía de caminos. En I^n consideramos el punto base $0 := (0, \dots, 0)$ y su frontera se denotará ∂I^n y consiste de n -tuplas (t_1, \dots, t_n) con $t_i \in [0, 1]$ de modo que al menos una coordenada es 0 ó 1.

Se define $\pi_n(X, x_0)$ como siendo el conjunto de todas las clases de homotopía de funciones $f: ([0, 1]^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ de $[0, 1]^n$ sobre X que mapean la frontera del cubo sobre el punto distinguido x_0 . Note que para $n = 1$, esta definición coincide con la definición del grupo fundamental, en el cual $\partial I = \{0, 1\}$.

Vamos a ver la estructura de grupo. Para $n = 1$ esto se hace por medio de la concatenación de caminos, y su buen comportamiento con las relación de homotopía. Del mismo modo puede hacerse para el caso general. El concepto de concatenar funciones se puede extender como sigue:

$$f \star g : [0, 1]^n \rightarrow X : (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta forma de concatenar caminos se comporta bien con la relación de homotopía, en el sentido que si f es homotópica a f' y g es homotópica con g' , entonces $f \star g$ es homotópica con $f' \star g'$. Por lo tanto, la función $f \star g: I^n \rightarrow X$ representa el producto de clases $[f \star g] = [f] \cdot [g] \in \pi_n(X, x_0)$. Para cada $n \geq 2$, el grupo de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano. Asimismo, para espacios conexos por caminos, cualesquier dos puntos bases diferentes dan lugar a grupos de homotopía isomorfos. Además, cada aplicación entre espacios con puntos fijos $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce un homomorfismo de grupos $h_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. De modo que se cumple $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$ y $(1_X)_*$ es el homomorfismo identidad en $\pi_n(X, x_0)$ para cada $n \geq 1$. En particular, espacios con puntos distinguidos homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos, detalles al respecto de los grupos de homotopía puede ser consultados en [16].

Ejemplo 4.1.1. El espacio euclidiano \mathbb{R}^n tiene el mismo tipo de homotopía que un punto pues cada función $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ y la función constante c_0 son homotópicas. Entonces, $H_i(\mathbb{R}^n) = 0$ para cada $i, n \geq 1$.

Una par de descripciones alternativas para π_n se describen a seguir. Claramente la esfera es un cociente del cubo identificando su frontera a un punto, $S^n = I^n / \partial I^n$. Luego una aplicación preservando puntos base $S^n \rightarrow X$ es lo mismo que una aplicación $I^n \rightarrow X$ que mapea ∂I^n al punto base x_0 de X . Note que el punto base de de S^n es la imagen de ∂I^n por la aplicación cociente $I^n \rightarrow I^n / \partial I^n$. Luego una definición alternativa es $\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n); (X, x_0)] = [S^n, X]$. Por otro lado, la esfera puede ser vista también como el cociente $S^n = \mathbb{D}^n / \partial \mathbb{D}^n$ en que $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ denota el disco cerrado n -dimensional. Entonces una aplicación preservando punto base $\mathbb{D}^n \rightarrow X$ mapea $\partial \mathbb{D}^n \cong S^{n-1}$ al punto base x_0 de X . Equivalentemente, se tiene $\pi_n(X) = [(\mathbb{D}^n, S^{n-1}); (X, x_0)]$.

4.2. Comentarios sobre la homotopía de esferas

La última descripción descripción sugiere la esfera S^n con una estructura de CW-complejo. Esta estructura es útil para calcular los grupos $\pi_i(S^n)$ ($i < n$). Para ser más precisos, hay una construcción muy común en topología bajo la cual un espacio es pegado a otro a lo largo de la imagen de una función. Dados X y Y espacios topológicos, sea $A \subset Y$ un subespacio. Sea $f: A \rightarrow X$ una función continua, conocida como *la función de pegado*. El espacio $X \cup_f Y$ se define identificando a con $f(a)$. Formalmente, $X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \sim$ donde definimos $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. Un ejemplo común sucede cuando Y es el disco cerrado \mathbb{D}^n ; y A es su frontera, la esfera S^{n-1} , y $X = e^0$

es un punto. Entonces la función de pegado es la única posible, la aplicación de valor constante e^0 . Así el espacio resultante es la esfera S^n , se identifica la frontera del disco con un punto.

El pegado inductivo de células a lo largo de sus fronteras resulta ser un ejemplo de CW complejo. En que una n -célula cerrada es la imagen del disco cerrado D^n bajo una aplicación de pegado. una n -célula abierta es un espacio topológico homeomorfo al disco abierto de dimensión n . Luego un CW complejo es un espacio de Hausdorff junto con una partición en células abiertas que satisface las siguientes propiedades:

- (1) Para cada célula abierta n -dimensional C en la partición de X , hay una función continua $f: D^n \rightarrow X$ tal que la restricción de f al interior de D^n es un homeomorfismo sobre C , y la imagen de S^{n-1} es contenida en la unión de un número finito de elementos de la partición, todos con dimensión menor que n .
- (2) Un subconjunto de X es cerrado si y solo si, su intersección con la clausura de cada célula es un conjunto cerrado.

Para construir un CW complex, inicialmente se toma un CW complejo de dimensión 0, es decir, un espacio discreto X^0 . Pegando algunas 1-células a X^0 obtenemos un CW complejo de dimensión 1, X^1 . Pegando 2 células a X^1 obtenemos un CW complejo de dimensión 2, X^2 . Continuando de este modo se obtiene una secuencia encajada de CW complejos $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$. El espacio X^i se dice el i -esqueleto del CW complejo. Salvo isomorfismo, cada CW complejo de dimensión n puede ser obtenido a partir de su $(n-1)$ -esqueleto via pegado de n -células, luego cada CW complejo de dimensión finita se puede construir como en el proceso anterior, see [24].

Una *aplicación celular* es una función $f: X \rightarrow Y$ entre CW complejos la cual verifica $f(X^n) \subset Y^n$ para cada n . Un resultado importante y bien conocido es el *teorema de aproximación celular* cuya prueba es bastante técnica, ver [16, Section 4.1].

Teorema 4.2.1. *Cualquier aplicación continua entre CW complejos es homotópicamente equivalente a una aplicación celular.*

Teorema 4.2.2. $\pi_i(S^n) = 0$, para cada $i < n$.

Demostración. Necesitamos verificar que cualquier función continua $f: S^i \rightarrow S^n$, en que $i < n$ es homotópica a una constante. Como las esferas tienen una estructura de CW complejo, $S^n = e^n \cup e^0$ con una célula de dimensión n , e^n y una célula de dimensión cero. El teorema de aproximación celular nos dice que sin perder generalidad podemos asumir que f es celular. Como $i < n$, la imagen de $f(S^i)$ está incluida en el i -esqueleto de $f(S^n)$. Sin embargo, dado que $i < n$ este es sólo un punto, luego f es homotópica a una constante. Concluimos que $\pi_i(S^n) = [S^i, S^n] = 0$. \square

Por otro lado, el caso $i = n$ es una consecuencia del *Teorema de Hurewicz* el cual establece un link entre los grupos de homotopía y los grupos de homología, los cuales son generalmente fáciles de calcular; en particular, afirma que para un espacio simplemente conexo X , el primer grupo de homotopía no trivial $\pi_k(X)$, es isomorfo al primer grupo no trivial de homología $H_k(X)$. Para la n -esfera, este resultado implica que para $n \geq 2$, $\pi_n(S^n) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Un abordaje diferente para el caso $i = n$, es via el concepto de *grado*. cada función continua de S^n sobre sí mismo tiene un grado que calcula la cantidad de veces que la esfera se envuelve en sí misma. Este grado identifica el grupo de homotopía $\pi_n(S^n)$ con el grupo de los enteros.

Los casos más interesantes se presentan cuando $i > n$. Porque los grupos de homotopía $H_i(S^n)$, no son triviales en general. La primera de estas sorpresas se descubrió gracias a la *fibración de Hopf* sobre los complejos en dimensión $n = 1$. Es decir la aplicación $S^3 \rightarrow S^2 \cong CP^1$. Esta función envuelve la 3-esfera S^3 alrededor de la esfera S^2 de un modo no trivial, y por lo tanto no es equivalente a una mapa constante. En general, los grupos de homotopía en dimensiones altas $\pi_i(S^n)$, for $i > n$, son sorprendentemente complejos.

4.3. Secuencia larga en homotopía para fibraciones

Una herramienta importante en el cálculo de grupos de homotopía es la secuencia larga en homotopía asociada a una fibración. Recordemos que *secuencia exacta* es una noción que aparece definida en varias áreas, especialmente en la teoría de grupos, anillos y módulos.

En el contexto de la teoría de grupos, una secuencia como

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \rightarrow G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1}$$

es *exacta* si es exacta en cada grupo; i.e., si la imagen de cada homomorfismo es igual al núcleo del siguiente.

$$\text{Im}(f_k) = \text{Ker}(f_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Por ejemplo, si H es un subgrupo normal de G la secuencia $H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H$ es exacta. En que ι es la inclusión y π la proyección canónica.

Lema 4.3.1. Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

- (a) $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2$ es exacta sii la función $f : G_1 \rightarrow G_2$ tiene núcleo trivial $\{0\}$; i.e., sii f es un monomorfismo.
- (b) $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \rightarrow 0$ es exacta sii la imagen de $f : G_1 \rightarrow G_2$ es todo G_2 ; i.e., sii f es un epimorfismo.
- (c) $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f} G_2 \rightarrow 0$ es exacta sii $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un isomorfismo.

Ejemplo 4.3.2. Una *secuencia exacta corta*, es una secuencia de la forma

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

Asociada con una fibración localmente trivial, se tiene una secuencia larga en homotopía, este es el contenido del siguiente resultado, ver [16].

Proposición 4.3.3. Sea $\pi : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ una fibración sobre un espacio conexo por caminos B cuya fibra es $\iota : (F, e_0) \rightarrow (E, e_0)$. Entonces existe una secuencia exacta de grupos de homotopía:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_2(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_1(F, e_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, b_0) \end{aligned}$$

4.3.1. Aplicaciones

Como aplicación del resultado (no trivial) en 4.3.3 estudiamos la secuencias largas en homotopía de las fibraciones sobre los espacios proyectivos e inferimos algunas consecuencias importantes.

- (1) Consideremos el caso en el cual $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en (4.1). En este caso para cada $n \geq 1$ tenemos la fibración:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^0 & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ & & \downarrow q \\ & & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

obtenida por la acción de $G = \{-1, 1\} \cong S^0$ en la esfera S^n . Como ya mencionamos, el espacio cociente, $\mathbb{R}P^n$ es el *espacio proyectivo real n-dimensional*. En este caso, la fibra es G

Como $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, (3.3.1); entonces $\pi_i(\mathbb{R}P^1) = \pi_i(S^1)$, para cada $i \geq 1$. Por otro lado para cada $n \geq 2$ la esfera S^n es un espacio simplemente conexo, (4.2.2) entonces $\pi_1(S^n) = \{0\}$, para cada $n \geq 2$; asimismo, $\pi_i(G) = 0$ para cada i ; de este modo la secuencia exacta larga en homotopía para $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{l_*} \pi_n(S^n) \xrightarrow{q_*} \pi_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} 0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_2(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{l_*} \pi_1(S^n) = 0 \xrightarrow{q_*} \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Concluimos que los grupos de homotopía para el espacio proyectivo real son:

$$\pi_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}; & i = 1, n = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & i = 1, n > 1 \\ \pi_i(S^n) & i > 1, n > 0. \end{cases}$$

Note que para cada $n, m \geq 2$ el espacio $\mathbb{R}P^n$ no puede ser homeomorfo a la esfera S^m . Pues sus grupos fundamentales son diferentes. $\pi_1(S^n) = \{0\} \neq \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Reestablecemos el hecho de que sobre los reales, la única fibración de Hopf sucede cuando $n = 1$.

(2) Consideremos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en (4.1). En este caso para cada $n \geq 1$ tenemos la fibración:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \downarrow q \\ & & \mathbb{C}P^n \end{array} \quad (4.2)$$

dada por la acción del grupo S^1 sobre la esfera S^{2n+1} . El espacio cociente $\mathbb{C}P^n$ es el *espacio proyectivo complejo n-dimensional*. En este caso la fibra es S^1 .

Note que en este caso la aplicación inducida en homotopía $q_* : \pi_1(S^{2n+1}, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^n, z)$ es sobreyectiva. Pues si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}P^n$ es un lazo con base en z , existe un levantamiento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow S^{2n+1}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = x$ y $\tilde{\alpha}(1) \in q^{-1}(z) \cong S^1$. Se obtiene un camino β contenido en $q^{-1}(z)$ conectando $\tilde{\alpha}(1)$ con x . El camino $\beta \star \tilde{\alpha}$ es cerrado con base en x y $q_*([\beta \star \tilde{\alpha}]) = [\alpha]$. En consecuencia, para cada $n \geq 1$, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ es simplemente conexo. Pues la esfera lo es.

Del lema (3.3.4) sabemos que $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$; luego $\pi_i(\mathbb{C}P^1) = \pi_i(S^2)$ para cada $i \geq 1$. Como $\pi_i(S^1) = 0$ para cada $i \geq 2$, (4.2.2) entonces la secuencia exacta larga en homotopía para $q : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ es:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{l_*} \pi_n(S^{2n+1}) \xrightarrow{q_*} \pi_n(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\delta} 0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\delta} \pi_1(S^1) \xrightarrow{l_*} \pi_1(S^{2n+1}) = 0 \xrightarrow{q_*} \pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que los grupos de homotopía para el espacio proyectivo real son:

$$\pi_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \pi_i(\mathbb{S}^2); & i > 0, n = 1, \\ \mathbb{Z}; & i = 2, n > 1, \\ \pi_i(\mathbb{S}^{2n+1}); & i > 2, n > 1. \end{cases}$$

Note que para cada $n, m \geq 3$ el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ no puede ser homeomorfo con la esfera \mathbb{S}^m . Pues ellos no tienen sus grupos de homotopía isomorfos, $\pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z} \neq \{0\} = \pi_2(\mathbb{S}^m)$, para cada $n, m \geq 3$.

De este modo, verificamos que en la familia de fibraciones (4.2), cuando $n = 1$ se obtiene una fibración de Hopf que corresponde a la aplicación originalmente etiquetada por el nombre *fibración de Hopf*.

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{q} \mathbb{S}^2.$$

Pero para $n \geq 3$ no se tiene una fibración de Hopf. Descartar el caso $n = 2$, requiere descartar que $\mathbb{C}P^2$ sea homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^4 . Lo cual se sigue de saber que sus grupos de homología son diferentes, [16].

Notemos que esta fibración describe la 3-esfera en términos de esferas unitarias a lo largo de una 2-esfera. En este caso la secuencia larga en homotopía es:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{t_*} \pi_n(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{q_*} \pi_n(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\delta} 0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_3(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{q_*} \pi_3(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\delta} 0 \rightarrow \pi_2(\mathbb{S}^3) = 0 \xrightarrow{q_*} \pi_2(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\delta} \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y obtenemos el siguiente resultado debido a Hopf:

$$\pi_i(\mathbb{S}^3) \cong \pi_i(\mathbb{S}^2), \quad i \geq 3.$$

En particular, $\pi_3(\mathbb{S}^2) \cong \pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}$, es generado por la aplicación de Hopf $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Conclusión 4.3.4. *Atendiendo en todo lo anterior, resaltamos que verificar cuáles de las familias de fibraciones en (4.1) corresponden a fibraciones de Hopf requiere bastante trabajo. Aquí hemos mostrado esto para el caso de las álgebras \mathbb{R} y \mathbb{C} por el estudio de invariantes de naturaleza algebraica como son los grupos de homotopía, homología y la secuencia exacta larga en homotopía asociada a una fibración. Para las álgebras \mathbb{H} y \mathbb{O} esto demanda un esfuerzo mayor que está por fuera de los alcances de este trabajo. Estos casos, se resuelven vía otro invariante, conocido como el invariante de Hopf; el cual permite resolver no solamente estas cuestiones, también algunos de los problemas mencionados previamente en este trabajo relacionados a la función de Hurwitz. Este se define y expone en detalle en [1, 2], y es sin duda un excelente tópico de estudio para continuar desarrollando las ideas planteadas en este trabajo.*

Bibliografía

- [1] Adams, J. F. (1960). On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 20-104.
- [2] Adams, J. F. (1962). Vector fields on spheres. *Annals of Mathematics*, 603-632.
- [3] Adams, J. F., & Atiyah, M. F. (1966). K-theory and the Hopf invariant. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 17(1), 31-38.
- [4] Atiyah, M. (1988). *Michael Atiyah Collected Works: Volume 2: K-Theory (Vol. 2)*. Oxford University Press.
- [5] Baez, J. (2002). The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2), 145-205.
- [6] Bott, R. (1969). *Lectures on $K(X)$* . WA Benjamin Advanced Book Program.
- [7] Cayley, A. (1863). On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin, and on quaternions (appendix only). *The collected mathematical Papers*, Johnson reprint Co, 127.
- [8] Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
- [9] Lima, E. L. (2003). *Fundamental groups and covering spaces (Vol. 63)*. AK Peters.
- [10] Gluck, H., & Warner, F. W. (1983). Great circle fibrations of the three-sphere. *Duke Mathematical Journal*, 50(1), 107-132.
- [11] Gluck, H., Warner, F., & Yang, C. T. (1983). Division algebras, fibrations of spheres by great spheres and the topological determination of space by the gross behavior of its geodesics. *Duke mathematical journal*, 50(4), 1041-1076.
- [12] Gluck, H., Warner, F., & Ziller, W. (1986). The geometry of the Hopf fibrations. *Enseign. Math.*(2), 32(3-4), 173-198.
- [13] Graves (RP). (1882). *Life of Sir William Rowan Hamilton*. Hodges.
- [14] Hamilton, W. R. (1931). *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (Vol. 3)*. CUP Archive.
- [15] Hankins, T. L. (1983). *Sir William Rowan Hamilton*.
- [16] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. (2005).
- [17] Hopf, H. (1964). Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. In *Selecta Heinz Hopf* (pp. 38-63). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [18] Hurwitz, A. (1898). Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1898, 309-316.

- [19] Hurwitz, A. (1922). Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen*, 88(1-2), 1-25.
- [20] Husemoller, D. (1966). *Fibre bundles* (Vol. 5). New York: McGraw-Hill.
- [21] Karoubi, M. (2008). *K-theory: An introduction* (Vol. 226). Springer Science & Business Media.
- [22] Kervaire, M. A. (1958). Non-parallelizability of the n -sphere for $n \geq 7$. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 44(3), 280.
- [23] Kugo, T., & Townsend, P. (1982). Supersymmetry and the division algebras. *Nucl. Phys. B*, 221(CERN-TH-3459), 357-380.
- [24] Lee, John. *Introduction to topological manifolds*. Vol. 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [25] Marsden, J. E., & Ratiu, T. S. (1995). *Introduction to mechanics and symmetry*. *Physics Today*, 48(12), 65.
- [26] McKay, B. (2004). The Blaschke conjecture and great circle fibrations of spheres. *American journal of mathematics*, 126(5), 1155-1191.
- [27] Bott, R., & Milnor, J. (1958). On the parallelizability of the spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(3), 87-89.
- [28] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC Press.
- [29] Ovsienko, V., & Tabachnikov, S. (2013). On fibrations with flat fibres. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 45(3), 625-632.
- [30] Ovsienko, V., & Tabachnikov, S. (2016). Hopf fibrations and hurwitz-radon numbers. *The Mathematical Intelligencer*, 38(4), 11-18.
- [31] Piccione, P., & Tausk, D. V. . *The theory of connections and G-structures: applications to affine and isometric immersions*. *Publicaciones IMPA* (2006).
- [32] Radon, J. (1922, December). Lineare scharen orthogonaler matrizen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (Vol. 1, No. 1, pp. 1-14). Springer-Verlag.
- [33] Salvai, M. (2009). Global smooth fibrations of \mathbb{R}^3 by oriented lines. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(1), 155-163.
- [34] Schafer, R. D. (2017). *An introduction to nonassociative algebras*. Courier Dover Publications.
- [35] Shiu, P. (1995). *Squares*, (London Mathematical Society Lecture Note Series: 171), by AR Rajwade. Pp 286. £ 27-50. 1993. ISBN 0-521-42668-5 (Cambridge University Press). *The Mathematical Gazette*, 79(484), 212-213.
- [36] Urbantke, H. K. (2003). The Hopf fibration—seven times in physics. *Journal of geometry and physics*, 46(2), 125-150.
- [37] Lee, J. M. (2013). *Smooth manifolds*. In *Introduction to Smooth Manifolds* (pp. 1-31). Springer, New York, NY.
- [38] Zorn, M. (1931, December). Theorie der alternativen Ringe. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (Vol. 8, No. 1, pp. 123-147). Springer-Verlag.