Facultad de Educación

Concepciones acerca del conocimiento del infinito como componente para la enseñanza de las matemáticas. Un estudio de casos con docentes de secundaria.

Ana María Valderrama Gutiérrez

Asesora

Ana Celi Tamayo Acevedo

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín

2017

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Las concepciones y el conocimiento del infinito como componente para la enseñanza de las matemáticas. Un estudio de casos con docentes de secundaria.

Ana Maria Valderrama Gutiérrez

Asesora: *Ana Celi Tamayo Acevedo*

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEMESTRE II / 2017

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Facultad de Educación

Resumen.

Autor: Ana María Valderrama

anamaria1152@gmail.com

Esta investigación es de corte cualitativo, tuvo como objetivo analizar las concepciones que tienen los profesores de secundaria acerca del infinito y la forma como lo dan a entender a los estudiantes, durante el proceso de enseñanza de conceptos matemáticos tales como: conjunto numérico, variable, función, serie, límite, derivada, entre otros. El estudio se desarrolló bajo la modalidad de estudio de casos donde participaron tres docentes de dos instituciones educativas de la ciudad de Medellín de los grados noveno, décimo y once, quienes contaban con estudios en formación y Educación Matemática y dos de ellos con maestría en Educación Matemática.

El estudio se basó en una metodología de investigación de la Socioepistemología de la Educación Matemática, donde se indagó sobre concepciones acerca del conocimiento del infinito como componente para la enseñanza de las matemáticas. Se realizó bajo este enfoque debido al cuestionamiento que se da desde la Socioepistemología que tiene en cuenta el entorno sociocultural del estudiante y el contexto en el que se encuentra para que de esta manera se dé un aprendizaje significativo.

Se logró, luego de observar, analizar y entrevistar a los tres profesores escogidos para el estudio de casos, las creencias y las concepciones que tienen los profesores sobre el concepto de infinito y como lo utilizan en sus clases para la enseñanza de conceptos asociados como función, límite o sistemas de ecuaciones.

Palabras Clave: Infinito Potencial, Infinito actual, Historia de la matemática, Transfinito, Infinitesimal.

Abstract

This qualitative research aimed at analyzing the concepts secondary school teachers have regarding the infinite, and the way they introduce it to their students during the teaching processes of mathematical concepts such as variable, function, series, limit and derivative, among others.

This is a case study in which three teachers from two educational institutions from Medellín, Colombia, were observed. They teach in Ninth, Tenth and Eleventh grades, and hold teaching, mathematics and, in the case of two of the teachers, master degrees in Mathematics Education

The study is based on a research methodology from the Mathematics Education Socio-epistemology. In it, concepts and knowledge about the infinite as a component of the mathematics education were researched. This process was carried out observing such approach based on the questioning generated from the socio-epistemology. There it is considered that the sociocultural context the student belongs to, as well as the context the student lives in have to be taken into account so the learning process turns to be meaningful.

After observing, analyzing and interviewing the three aforementioned teachers, the beliefs and concepts they have regarding the infinite and how they use them in their classes for the teaching of linked concepts like function, limit and systems of equations were identified.

Tabla de contenido.

Índice de Tablas.

Índice de Ilustraciones.

Índice de Anexos.

Introducción.

El principal motivo para indagar sobre el infinito, es la relación que existe entre él y otros conceptos fundamentales de las matemáticas, como lo son: límites, funciones, variables, sistemas de ecuaciones, entre otros. Al encontrarse de manera subyacente en estos y otros conceptos, merece ser estudiado con igual rigurosidad como se ha hecho con los demás conceptos matemáticos.

El Infinito matemático es un concepto difícil de comprender porque no es tangible ante el ojo y pensamiento humano, porque en la actualidad no se ha definido ni se ha llegado a un concenso sobre lo que es y lo que no es el infinito. Estas razones llevan a cuestionarse sobre su complejidad y a preguntas que tal vez no tienen respuestas; múltiples pensadores como Euclides (325 a.C.-265 a.C.), Aristóteles (384 a.C- 322 a.C.), Cantor (1.845-1.918), Newton (1.643-1.727), y Leibniz (1.646-1.716), entre otros, han dedicado parte de sus estudios a la comprensión del Infinito, lo cual resulta ser una motivación para que hoy en día continuemos con su legado y sigamos pensando e intentando avanzar en el campo del infinito.

Desde los años primarios cuando se habla de los conjuntos numéricos Naturales, Enteros, Primos, se utiliza la palabra infinito; cuando se explican elementos geométricos como el segmento, la recta, el punto de manera implícita, se hace alusión al hablar de un segmento de recta que no tiene fin o de la mínima marca dejada por el lápiz sobre el papel para describir la noción de punto. ¿Qué pasa si un estudiante se pregunta por el tipo de lápiz que usa? y ¿la dimensión de su punta? O ¿si decide intentar llegar al fin del segmento? Por otro lado, en la secundaria que es el espacio en el que se centra esta investigación se habla de funciones, de noción de límite, derivada, solución de sistemas de ecuaciones y al igual que en los conceptos de la primaria se vuelvan a utilizar en las definiciones el concepto de Infinito.

Es por estas razones que decido aceptar la invitación de grandes pensadores para reflexionar y tratar de entender un poco el Infinito y al mismo tiempo que se avanza en su comprensión, que sirva para la comprensión y enseñanza de los conceptos ligados al infinito que resultan fundamentales en Educación Matemática.

A continuación, se realiza una breve descripción de la estructura del documento:

En el Capítulo I se plantea de manera formal la problemática de la cual surge la investigación evidenciando el problema de estudio, los objetivos a alcanzar por medio de unas preguntas orientadoras, los antecedentes e investigaciones pasadas, todo esto con el fin de mostrar la importancia de la investigación.

En el Capítulo II se presenta el marco referencial, el cual se exponen considerando: investigaciones recientes sobre concepción del infinito en la educación matemática; el infinito matemático en la historia; elementos socioepistemológicos para entender en el infinito.

* **Metodológico:** Se describe el tipo de metodología que se va a utilizar que es de tipo cualitativo con un estudio de casos realizado con tres profesores de dos instituciones diferentes. Se describe cómo se desarrolla la investigación en tres fases:

Primera fase: Apropiación de conceptos relacionados con el infinito.

Segunda fase: Observación de las clases de los profesores y análisis sobre sus prácticas educativas.

Tercera fase: Organización, explicación y análisis de datos.

Finalmente se explica cómo se van a analizar las entrevistas hechas a los profesores por medio de una categorización que se realiza de la información recolectada. Por último, está el capítulo de conclusiones donde se muestran los aportes y limitaciones que tiene el trabajo y unas reflexiones finales y aportes del trabajo de grado para la autora.

1. Capítulo I: formulación de la investigación.

1.1 Justificación del problema.

Debido al conocimiento y a las concepciones que tienen sobre el concepto de infinito los docentes de secundaria, se pueden presentar dificultades en el proceso de enseñanza- aprendizaje de conceptos asociados a éste, tales como: funciones, series, límites, etc.

Para la enseñanza de las matemáticas básicas o superiores, es importante comprender el concepto matemático infinito, debido a la relación que tiene con otros conceptos matemáticos como conjuntos numéricos, límites, funciones, series, entre otros. Al estar el infinito ligado a estos conceptos que están presentes en las clases de matemáticas, es necesario conocer las implicaciones que tiene dicho concepto en la comprensión de estos. Es por ello que algunos pensadores de la filosofía matemática se han cuestionado sobre este concepto en diferentes momentos históricos. Al respecto Lestón (2011) afirma:

> El infinito es un concepto que a lo largo de la historia atrajo a pensadores de diversas áreas del conocimiento por las dificultades en su tratamiento y abordaje científico y didáctico. Al incluirlo en la ciencia provocó numerosas paradojas y contradicciones que hicieron que durante siglos no fuera posible un tratamiento formal del mismo, Sin embargo, difícilmente podríamos en la actualidad trabajar ciertos contenidos en el aula de los distintos niveles educativos, si no habláramos de este concepto (Lestón, 2011, p.6).

En este sentido es importante reconocer que no ha sido fácil la construcción del concepto matemático infinito a través de la historia y, por consiguiente, no será tarea fácil para el estudiante el comprenderlo y utilizarlo en los conceptos matemáticos que directa o indirectamente estan relacionados con éste.

El trabajo que se propone en este documento, se lleva a cabo después de analizar diferentes situaciones en las cuales, por falta de claridad de los docentes acerca del concepto de infinito, quedan vacíos en los estudiantes o se presentan dificultades en el aprendizaje de diversos temas de la matemática, por ejemplo: en el reconocimiento de los números irracionales, en la concepción de recta numérica, en la comprensión de series, funciones y límites. Todos estos son conceptos matemáticos donde se evidencia la existencia del infinito, pero en los procesos de enseñanza se pasa por alto su importancia y el docente deja de lado la reflexión conceptual, epistemológica e histórica que ha dado pie a la construcción del concepto de infinito, tal como se conoce en la actualidad.

Para estudiar y comprender los diferentes conceptos matemáticos que se ven en la escuela, es necesario tomarse un momento para reflexionar sobre el infinito y, es en este sentido en el que los profesores de matemáticas deben estar preparados para responder a los interrogantes que surjan en los estudiantes. Debido a que el infinito es un concepto que reúne a grandes pensadores de las diferentes ciencias a través de la historia, es necesario que los profesores de matemáticas comprendan cómo se desarrolló este concepto a través de la historia y lo analicen crítica y analíticamente, con la intención de que sea un componente más para la preparación de sus clases y así incidir de mejor manera en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

Es importante dejar claro que hacer una revisión histórico- epistemológica critica del infinito, no es una tarea fácil de realizar, debido a la complejidad del concepto mismo dentro del mundo de las matemáticas, sin embargo, no por eso deja de ser importante comprender la relevancia que tiene para profesores, en ejercicio y en formación, conocer la historia y la epistemología del concepto de infinito matemático y buscar estrategias para presentarlo dentro del aula de matemáticas de una manera acertada, que motive la reflexión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos que están en relación con éste.

Uno de los logros más grandes de la matemática como lenguaje ha sido su propio coraje imaginativo para enfrentar el concepto más inaccesible y paradójico que haya podido pretender la fragilidad temporal del intelecto humano: el concepto de infinito. Casi podríamos decir que la matemática es el lenguaje que pretende hablar del infinito, o la ciencia que pretende medir el infinito. (José Ramón Ortiz, 1994)

Durante la elaboración de la pregunta orientadora de esta investigación, surgieron varios interrogantes, tales como: ¿Qué tanto se piensan los profesores de matemáticas el concepto de infinito? ¿Qué nivel de conocimiento tienen los profesores sobre el concepto de infinito? ¿Existe motivación entre profesores actuales y futuros profesores por el conocimiento del infinito? Éstos y muchos más condujeron a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo las concepciónes y el conocimiento de los docentes acerca del infinito inciden en la enseñanza de conceptos matemáticos relacionados con dicho concepto, tales como: conjunto numérico, variable, función, serie, límite, derivada, entre otros?

1.2 Antecedentes.

En los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) se tiene que en los niveles de noveno a undécimo, los estudiantes deben comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos. En este estándar se evidencia la necesidad de que los estudiantes en los últimos grados de escolaridad comprendan los conjuntos numéricos y así mismo las propiedades y relaciones que se establecen entre dichos conjuntos. En las propiedades existe la magnitud y el tamaño. Para comprender un conjunto numérico resulta fundamental comprender su densidad, su tamaño y el orden dentro de él, por lo tanto, es necesario traer a colación el concepto de infinito y con él una comprensión del mismo.

Por otro lado, se muestra de manera explícita la necesidad de que los estudiantes desarrollen una comprensión más profunda de los números muy grandes y de los muy pequeños como aparece allí textualmente, y de sus diversas maneras de representarlos; en este estándar queda evidenciado cómo se reconoce la necesidad de comprender y analizar tanto números muy pequeños como números muy grandes, reconociendo así la importancia de pensar el infinito en sus dos extremos de grandeza y de cantidades muy pequeñas.

En los estándares de competencias en Educación Matemática para Colombia, que están en relación con los estándares internacionales, se manifiesta la necesidad de reconocer el infinito como un factor importante en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, el siguiente estándar para grado noveno lo ratifica. "*Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales, volviendo al concepto de conjuntos numéricos y al número como tal* *donde se encuentra explícito el concepto que nos reúne en esta investigación, el infinito*." (NCTM, 2000).

En sí, desde los estándares y lineamientos nacionales e internacionales se evidencia la necesidad de tratar en la escuela el concepto matemático del infinito, lo cual va a contribuir a la comprensión de las matemáticas en general. Para cumplir con los mencionados estándares, es necesario que los profesores de matemáticas, de todos los niveles escolares, reconozcan y reflexionen acerca del infinito para que sea posible llevarlo a las clases. Es necesario comprender lo que se enseña y, por tal motivo, es una prioridad el estudio juicioso de este y cualquier concepto para incorporarlo en las prácticas de enseñanza.

1.3 Pregunta de investigación.

¿Cuáles son las concepciónes y el conocimiento de los docentes acerca del infinito, durante la enseñanza de conceptos matemáticos relacionados con dicho concepto, tales como: conjunto numérico, variable, función, serie, límite, derivada, entre otros?

1.3.1 Preguntas Secundarias.

¿Qué tanto se piensan los profesores de matemáticas el concepto de infinito?

¿Qué nivel de conocimiento tienen los profesores de matemáticas sobre el concepto de infinito?

¿Existe motivación entre profesores y futuros profesores por el conocimiento del infinito?

1.4 Objetivos de la investigación.

1.4.1 Objetivo General:

Analizar las concepciones que tienen los profesores de secundaria acerca del infinito y la forma como lo dan a entender a los estudiantes, durante el proceso de enseñanza de conceptos matemáticos tales como: conjunto numérico, variable, función, serie, límite, derivada, entre otros.

1.4.2 Objetivos Específicos:

- Presentar brevemente la historia del concepto infinito matemático, donde se muestren las diferentes concepciones que han surgido sobre el mismo.

- Indagar sobre el conocimiento que tienen los profesores de matemáticas sobre el infinito, sus percepciones y como estas se relacionan con la enseñanza de diferentes conceptos matemáticos.

2. Capitulo II: Marco Referencial.

2.1 Investigaciones recientes sobre concepción del infinito en la educación matemática.

Diferentes investigaciones han surgido en torno al concepto del infinito con referencia a la educación matemática. Se puede hablar por ejemplo de los trabajos realizados por (Arriago, D'Amore y Sbaragli, 2011). y sus colaboradores, donde muestra como personas de diferentes países de distintos niveles educativos conciben el infinito de distintas maneras, tales como: divinidad, propiedad de un conjunto, una especie de cardinal para el que no existe símbolo, un número grandísimo, entre otras apreciaciones que dan al respecto. Otro tipo de investigaciones que trata él mismo D'Amore (1994-1996) tienen referencia a los obstáculos epistemológicos que se dan en la búsqueda de la comprensión del infinito, allí se explican cómo resulta necesario que en la escuela se tenga en cuenta el entorno social que tiene el estudiante para que no se pierda la naturalidad y espontaneidad con la que se llega a la educación formal. Tener estos aspectos en cuenta trae como beneficio que la enseñanza de las matemáticas tenga más sentido para los estudiantes ya que se da una enseñanza situada en situaciones cotidianas y con sentido por lo que posiblemente trascenderá en el conocimiento y proceso de educación de los estudiantes.

Por otro lado, Montes Navarro (2015), analiza el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso. Allí devela la importancia y el compromiso que deben tener los profesores a la hora de enseñar una ciencia o disciplina por comprender y dominar los diferentes conceptos que se están enseñando. Especifica como un profesor de matemáticas para enseñar conceptos como función derivada o límite debe apoyarse en el concepto de infinito y resulta fundamental la comprensión del concepto a enseñar, tanto como la del concepto matemático del infinito.

Para Lestón (2011) cuyo foco de estudio es el infinito en el aula de matemática, realizó un estudio de sus representaciones sociales desde la Socioepistemología, allí se defiende la importancia de estudiar los diferentes conceptos desde su historia, cualquier concepto matemático que se piense debe ser enseñado desde su historia para así comprender su proceso e importancia. Igual que la historia es importante analizar como un concepto influye sobre otros conceptos y de qué manera lo hace. Otro aspecto importante que ella señala es el reconocimiento de los conceptos como tal, desde la individualidad del concepto para posteriormente asociarlo con las matemáticas como ciencia. En esta investigación al igual que en la de Montes Navarro (2015) son de nivel Doctoral y bastante reciente. Durante la investigación se encuentra que son mínimas los estudios que se encuentran sobre este tema y los alcances obtenidos muy pocos, motivo por el cual el trabajo que aquí se presenta se torna pertinente para la Educación Matemática.

Otra investigación es la de Waldegg (1993) quien trabaja sobre la correspondencia biunívoca de los conjuntos infinitos y Tsamir y Tirosh (1994) cuyo artículo se centra en "un juego con los conjuntos infinitos". Las dos investigaciones destinadas a comprender las relaciones y correspondencias que existen entre los conjuntos infinitos al igual que los diferentes significados y complejidades de conceptos como: densidad, ilimitado, dependencia, cardinalidad, etc. muestran la importancia de comprender el concepto de manera independiente y con estrategias diversas que señalan su importancia y al mismo tiempo la forma en cómo es posible llevarlo a las aulas como concepto individual o como complemento de otros conceptos. En este caso se usan las relaciones y correspondencias entre conjuntos numéricos.

2.2 El Infinito matemático en la historia.

La historia y epistemología del concepto de infinito devela la relevancia que éste ha tenido y tiene en la consolidación de conceptos y teorías de la matemática. Ubiquémonos aproximadamente en los años 624 y 545 A.C con Tales de Mileto, quien fue considerado el primer filósofo y matemático de la historia. Su alumno Anaximandro de Mileto empezó a hablar conceptos como cualitativamente indefinidos para referirse al *arjé*, palabra griega que tiene como significado el inicio del universo. Se dice que inventó un nuevo término llamado *ápeiron* traducido como "sin límite".

Continuando con la historia, se encuentra la Escuela Pitagórica en los años 580-504 a.C. A Pitágoras se le reconoce como un finitista que habla de magnitudes inconmensurables las cuales no son convenientes para sus fundamentos filosóficos porque todo objeto o fenómeno de la naturaleza debía ser representado por una razón de cantidades que conducía a magnitudes conmensurables. También existían controversias con sus reconocidos átomos los cuales se consideraban corpúsculos unitarios con un tamaño tan pequeño que resultan indivisibles, refiriéndose así a una contradicción con su filosofía finitista. (Arriago, D'Amore y Sbaragli, 2011).

De la Escuela Eleática situamos a Parménides en el 540 quien encuentra en su filosofía una manera de concebir el infinito como un ser con características de eterno, único y perfecto y de estos pensamientos provienen las conocidas paradojas de Zenón.

…Aquiles, "el de los pies ligeros", personaje de la Ilíada de Homero, acepta el reto de la Tortuga, notoriamente lenta, para competir en una carrera; acuerdan que partirán al mismo tiempo, pero la Tortuga contará con 100 metros de ventaja; Aquiles ganará la carrera si logra alcanzar a la Tortuga.

Toda la experiencia sensorial de este mundo asegura a Aquiles como el favorito de esta increíble carrera; sin embargo, un razonamiento (paradójico) demostrará que la victoria es para la Tortuga, pues Aquiles no logrará alcanzarla en un tiempo finito. Supongamos que Aquiles cubre los 100 metros de la desventaja inicial, la Tortuga habrá cubierto otros 10 metros. Mientras Aquiles corre otros 10 metros, la Tortuga todavía avanzará 1 metro; mientras que Aquiles corre el metro que lo separa de la Tortuga, esta corre 0,1 metros, y así sucesivamente. Mientras Aquiles recupera una desventaja, la Tortuga recorre una distancia no nula por lo que siempre estará delante de Aquiles, quien perderá inexorablemente la carrera.

En oposición a esta filosofía llega Anaxágoras de Clazomene (499-428 a.C.) quien habla de números infinitamente pequeños por medio del estudio de la materia y de sus componentes; en sus apreciaciones sobre la naturaleza halla similar lo muy pequeño a lo muy grande encontrando siempre un valor antes y un valor siguiente, refiriéndose al tema de las partículas. Para los atomistas, pensar el infinito requería diferenciar la matemática abstracta ya que todo elemento puede dividirse en más partes desde el punto de vista físico, la materia llega a un último punto, siendo físicamente imposible dividirlo, este punto se concibe como átomo según Demócrito (460-360 A.C). Para Aristóteles (384-322 A.C.) no existía ninguna cantidad infinita debido a que el universo era limitado puesto que si no fuera así existiría algo más grande que el cielo lo cual resultaba imposible. Paradójicamente es Aristóteles quien descubre que el infinito se puede ver de dos formas en acto y en potencia. (Arriago, D'Amore y Sbaragli, 2011).

Posteriormente, Aristóteles prohíbe la utilización del infinito en acto reduciéndolo solo al infinito en potencia. Bajo una mirada similar sobre el infinito matemático, encontramos a Euclides en el siglo IV y III quien no hizo mención, ni parece haber tenido en cuenta, en ninguno de sus estudios el infinito declarado, sin embargo, escribió sus postulados allí forma implícita reconoce el infinito. Por ejemplo, en su quinto postulado dice: "Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado". (Trigo, sf) Esta definición demuestra la concepción que tenía Platón acerca del infinito quien sostenía que no existe un infinito en acto, existe siempre en potencia evitando lo más posible utilizar el infinito como un todo, usaba expresiones como sin límite, prologando continuamente o línea terminada.

Más adelante encontramos a Arquímedes (287-212 A.C.) quien se aleja del problema filosófico del infinito que se debatía en ese momento y procede a usar el método de exhaución de Eudoxo (390-337), dividiendo figuras geométricas en partes infinitesimales llegando a grandes y precisos descubrimientos. Posteriormente se vive un momento donde el infinito no es objeto de pensamiento ni ningún tema abstracto de las matemáticas, debido a muchos factores, entre ellos, políticos y religiosos. Por parte de la religión llegan grandes pensadores como San Agustín (354-430 D.C) y Santo Tomás de Aquino (1224-1274) quienes empiezan a tener consideraciones referentes a temas relacionados en el infinito, se puede evidenciar el gran periodo de tiempo que transcurre desde Arquímedes y San Agustín y después entre San Agustín y Santo Tomás de Aquino sin avances significativos del concepto infinito.

Después de este silencioso y largo momento del Medioevo, llega el Renacimiento con grandes avances artísticos, científicos y matemáticos, se vuelve a abrir la discusión sobre el infinito con Girolamo Cardano (1501-1576). “Aumentando continuamente una magnitud finita sobrepasaré cualquiera magnitud limitada, y substrayéndole tendré igualmente una menor que cualquier otra” Aquí se puede apreciar cómo surge nuevamente el debate sobre el infinito y la potencialidad con que lo interpreta Cardano. Para este momento se da un gran debate protagonizado por Cardano (1582), Candalla (1566) y Clavio (1574) que tienen como tema principal el infinito, acreciente y reductivo y las magnitudes indivisibles.

De allí pasamos a Galileo Galilei (1564-1642) quien a partir de objetos geométricos como las líneas, hace referencia al infinito actual teniendo en cuenta cada uno de los elementos que lo conforman y a su vez la posibilidad de dividirlos en sí mismos. Sus razonamientos sirvieron para debatir el argumento de Euclides quien explicaba como la parte no podría ser mayor que el todo y Galileo muestra desde un razonamiento del infinito actual como si puede ser mayor la parte que el todo debido a su imposibilidad de compararse. (Arriago, D’Amore y Sbaragli, 2011).

Posteriormente, se encuentran los estudios filosóficos y matemáticos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que se vale de los infinitesimales para desarrollar su obra maestra acerca del cálculo dejando de lado el escepticismo que se mantenía sobre el infinito. Contemporáneamente se encuentra Isaac Newton (1642-1727) a partir de razonamientos diferentes y sin tener en cuenta los infinitesimales por considerarlos razonablemente cuestionables, obtiene los mismos resultados de Leibniz en sus hallazgos de lo que se conoce como cálculo. Por tales motivos son considerados los precursores del análisis infinitesimal o cálculo sublime. (Arriago, D'Amore y Sbaragli, 2011).

Más adelante con Leonhard Euler (1707-1783) se empiezan a estudiar las series infinitas sin tocar con tanto rigor ni entrar en contradicciones con el infinito. Junto con los Bernoulli se convierten en precursores del cálculo Leibniziano. En contra parte de los anteriormente mencionados, nace una ola de matemáticos que rechazaban o ignoraban el concepto matemático del infinito debido a su falta de significancia y su sentido ambiguo antes demostrado. Entre ellos se encuentran Karl Friedrich Gauss, George Berkeley (1685-1753), Immanuel Kant (1724-1804). De otro modo, se tiene la sistematización que da Karl Weierstrass (1815-1897) quien trabaja con los números a partir de agregados finitos, August Cauchy (1789-1857) se caracteriza por un manejo extremadamente riguroso del infinito matemático, tratando temas cono límite, continuidad y funciones. Finalmente, llegamos al mayor contribuyente en términos de definición y sistematización rigurosa del infinito matemático, Georg Cantor (1845-1918), quien logra las definiciones más acertadas y concisas hasta la actualidad sobre infinito potencial, actual, magnitud infinitesimal, jerarquización entre conjuntos numéricos infinitos, etc. (Arriago, D'Amore y Sbaragli, 2011).

2.3 Elementos socioepistemológicos para entender en el infinito.

La teoría de la Socioepistemología en Educación Matemática tiene como tarea pensarse las matemáticas desde diferentes puntos de vista analizando como aprenden los estudiantes, que cambios se llevan a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los diferentes conceptos, qué posición asume el profesor frente a su saber y este como afecta su quehacer. Por otro lado, la Socioepistemología (Cantoral, 2013) muestra la importancia de reconocer factores como la historia de los diferentes conceptos, en particular de los conceptos matemáticos y su proceso de aceptación o institucionalización en la disciplina como tal. Es por este motivo que este trabajo se realiza desde la teoría socioepistemológica, dándole gran importancia al enfoque sistémico según Cantoral (2013), el cual muestra cómo se desarrolla un concepto y la influencia de factores externos sobre él. A continuación, se presenta un esquema que muestra los diversos elementos que se tienen presentes en la construcción social del conocimiento desde el enfoque socioepistemológico.

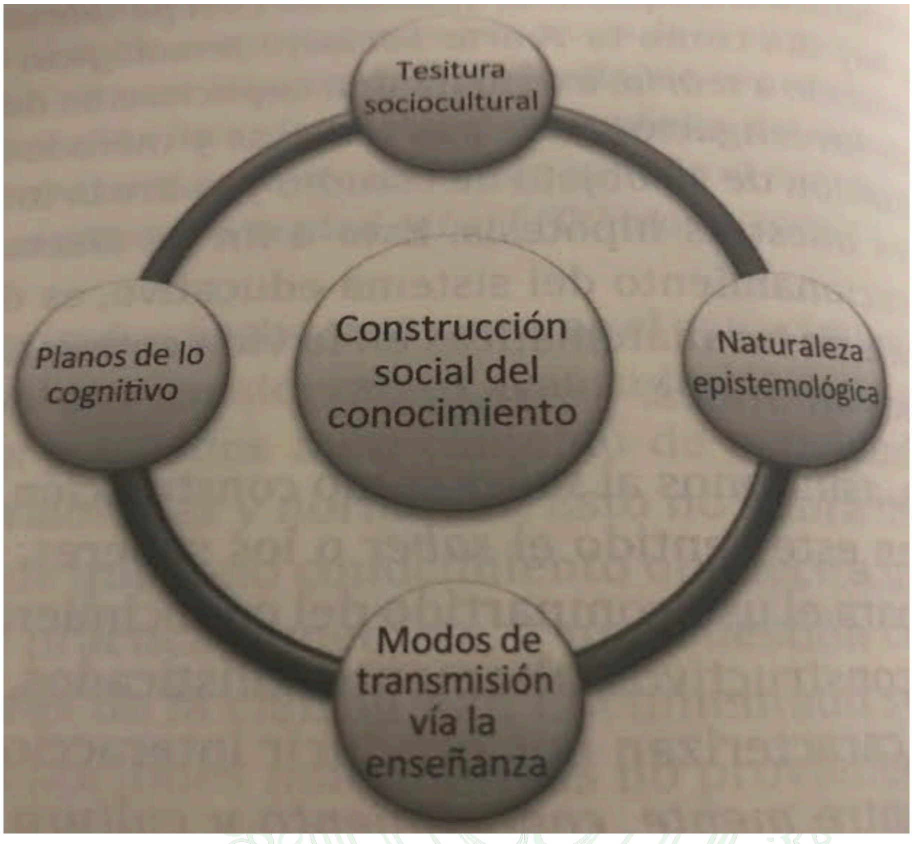


Ilustración 1 Construcción Social del Conocimiento. Cantoral, (2013)

A continuación, se explican brevemente, los elementos que se relacionan en la imagen anterior.

La naturaleza epistemológica del conocimiento hace referencia a la construcción social de los diferentes conceptos que se llevan a la escuela de acuerdo con las vivencias y el contexto que tienen los estudiantes. Así, se sitúan los conocimientos desde los entornos sociales de quien lo aprende. Cuando se le da sentido a las prácticas teóricas que se lleva a la escuela desde los entornos sociales, hace alusión a la naturaleza epistemología que se muestra en este esquema.

Los modos de transmisión vía la enseñanza: se refiere a la herencia cultural que tiene cada entorno social, dentro de esta transmisión se destaca como se comunica generacionalmente el conocimiento, tanto social como científico, que se desarrolla en cada cultura, esto se hace con el fin de que no se pierdan las costumbres que han permitido el desarrollo de la identidad de las diferentes culturas.

Los Planos de lo cognitivo consisten en adaptar los planes de estudio que se tienen en los programas y en los lineamientos de curso, de acuerdo a las necesidades de cada entorno, de la proyección que se hace al futuro, tanto lejano como cercano, para así realizar una construcción del conocimiento que tenga mayor sentido para todos. Se trata de no repetir por repetir los programas de estudio año por año, colegio por colegio y país por país, sino adaptar y personalizar cada plan de acuerdo a las necesidades específicas de cada institución dependiendo del contexto en el que se encuentre sumergida.

La tesitura sociocultural hace referencia a que el conocimiento que se adquiere requiere ser usado por quienes lo aprenden. De este modo, las culturas son un reflejo de lo que conocen debido a que ese conocimiento es utilizado en su propio desarrollo desde los diferentes ámbitos sociales.

Debido a que la intención de este trabajo es problematizar acerca del conocimiento del concepto infinito, de la visión o concepción que tienen los profesores de matemáticas acerca de éste y la influencia que tiene sobre otros conceptos matemáticos tales como función, derivada o integral en el momento de ser enseñados, se hace una apuesta socioepistemólogica que tiene en cuenta como el contexto social y cultural de los profesores incide en su concepción acerca de dicho concepto. La socioepistemología intenta en este sentido situar el conocimiento como parte de un todo y así contextualizarlo y darle sentido en la realidad de los profesores.

Sin lugar a dudas el concepto del infinito se hace necesario a la hora de enseñar matemáticas y la socioepistemología invita al pensamiento crítico y abierto frente a la educación, lo cual permite hacerse camino frente a la discusión sobre su comprensión y debida utilización en las clases de matemáticas. Tal como lo expresa Cantoral, al afirmar: "*debemos interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye*" (Cantoral, 2013), pues éstas, en una primera instancia, son un reflejo de las concepciones de quien le enseña. Si bien el alumno construye por él mismo ciertas reflexiones y formulaciones, es indispensable el papel que juega el profesor en este proceso, por lo que sus explicaciones y razones deben ser claras y verídicas para no confundir ni mostrarse como un obstáculo, para que el estudiante construya sus propias representaciones de los conceptos. Para este trabajo es necesario que el profesor conozca y haya reflexionado sobre todos los conceptos en general.

Después de comprender y situar la teoría socioepistemológica dentro del contexto de este trabajo de grado, se toma como apoyo para dar validez a la necesidad de comprender y reflexionar sobre la enseñanza del concepto del infinito para la comprensión de otros conceptos matemáticos. Así la teoría Socioepistemológica se vuelve una base teórica que ayuda a reflexionar sobre las prácticas de enseñanza que tienen los profesores de matemáticas en sus aulas de clase, teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes, los conocimientos previos y el cumplimiento de los estándares en Educación Matemática.

3. Capítulo III: Metodología y Análisis.

La metodología utilizada en este trabajo de grado es de tipo cualitativa, que se logra por medio de la observación de las prácticas de los docentes y por medio de entrevistas semiestructuradas realizadas a los mismos. Tal como lo mencionan Sampieri, Callado & Lucio, (2010), la investigación cualitativa se desarrolla en diferentes momentos, primero se da una inmersión en el campo, interpretación del contexto que implica flexibilidad, preguntas y recolección de datos.

Para este trabajo, el método usado fue el estudio de casos, el cual va en correspondencia con lo cualitativo. La selección se hizo debido a su pertinencia para poder dar respuesta a la pregunta propuesta en este trabajo. Aquí, el estudio de casos es tomado como: "*una investigación que mediante los procesos cuantitativo, cualitativo y/o mixto; se analiza profundamente una unidad integral para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar teoría"* (Sampieri, Callado & Lucio, 2010). Inicialmente se pensó en un estudio de un solo caso, pero rápidamente se desistió de esta idea por que como lo explica Hernández, Fernández y Sampieri resulta peligroso y poco objetivo un tipo de estudio donde solo se base toda la toma de información y los resultados en un solo caso. Si bien este tipo de metodología se da en los estudios cualitativos, en este estudio la información se basa en la experiencia de tres profesores.

Siguiendo los parámetros del estudio de casos, el estudio se realiza con tres profesores de diferentes instituciones educativas, que enseñen en los siguientes niveles: noveno, decimo, undécimo, ya que en estos niveles se enseñan con las detenimiento los conceptos: irracionales, variable, límite, etc., que llevan asociados el termino infinito. La recolección de información se hace durante las clases de los profesores por medio de grabaciones (audio) consentidas por los docentes observados, la toma de datos se finaliza con una entrevista de la cual queda registro en una grabación de audio. Posteriormente la información se analiza y de allí surgen los resultados del trabajo de grado.

En sí, para lograr lo propuesto en este trabajo de corte cualitativo y así llegar a darle respuesta a la pregunta que se plantea, se llevan a cabo las siguientes fases:

Primera fase, el autor de este trabajo hace una apropiación de conceptos relacionados con el infinito, analiza un panorama histórico del concepto y diferentes investigaciones que se utilizan como base para fundamentar lo teórico, lo referencial y lo conceptual.

Segunda fase, se realiza un trabajo de observación en el aula a tres profesores de grado noveno, decimo y undécimo de dos instituciones educativas, con la intención de verificar si los resultados de las investigaciones utilizadas como antecedentes se cumplían o no en el contexto escogido. Lo anterior se hace siguiendo las recomendaciones de algunos asesores y expertos en temas de investigación en Educación Matemática. Se decide tomar como muestra a los tres profesores de los últimos grados de secundaria para realizar un estudio de casos con ellos, y así simplificar la información recolectada teniendo en cuenta que el tiempo para desarrollar el trabajo de grado es poco. Las observaciones se hacen durante las clases de matemáticas en los tres grados seleccionados para seguir la secuencia de clases e identificar la comprensión y las concepciones que los docentes tienen del concepto matemático infinito. Se intenta crear una relación amistosa con los profesores para que esto ayude a que la investigación se realice de una forma natural y objetiva. Después de la observación de clase se hace con los docentes una entrevista semiestructurada donde se les informa los objetivos de la investigación y el propósito de la misma.

Tercera fase: Organización y análisis de datos. Los datos que se van a organizar y analizar resultan de las observaciones, recogidas en un diario de campo, que se hacen en el interior de las clases de los tres grados en los cuales se desarrolla la investigación. Para la obtención de los datos se utilizan diferentes métodos de recolección tales como, grabaciones de audio, fotografías y observaciones. Los datos se organizan siguiendo los elementos básicos de la estadística descriptiva. Además, para el análisis de la información se establecen categorías las cuales se formulan a partir de las preguntas realizadas en la entrevista. El análisis se realizará de manera comparativo entre lo que se vio durante las observaciones con los profesores y la información que suministraron en las entrevistas que se realizaron, de esta manera se compara la coherencia y la conexión que existe entre las dos formas de recolectar información.

3.1 Contexto.

La investigación se desarrolla en dos ambientes, que aunque son diferentes tienen varias similitudes. La primera es la Institución Educativa Las Nieves, está ubicada en el barrio Manrique de la ciudad de Medellín, comuna 3, el cual se encuentra en un estrato económico de nivel 2. La institución Las Nieves está en medio de una comunidad que se ha desarrollado en medio de conflictos urbanos generando fronteras invisibles, esto trae como consecuencia una población escolar flotante, la cual inicia procesos que no terminan por cambio de domicilio. Cuentan con una escuela de música anexa y disfrutan de varios programas del Ministerio de Educación Nacional, como: plan de lectura, numerario, escuelas de iniciación deportiva, entre otros, de esta institución se escogieron los profesores de grado décimo y undécimo.

Por otro lado, tenemos la Institución Educativa República de Venezuela, ubicada en el barrio Belén las violetas, donde se ofrece educación formal desde preescolar hasta once. Actualmente la institución se encuentra en un programa de mejoramiento a través de la estrategia GESTIÓN A LA CALIDAD, proceso asesorado por la Secretaria de Educación de Medellín, Bancolombia y Pro-Antioquia, donde se realizaron las actividades de observación con la profesora de noveno grado.

Se escogió este grupo de profesores, debido a la intención de relacionar el concepto matemático del infinito con otros conceptos como irracionales, función y límite. Estos conceptos son enseñados en los últimos grados de escolaridad y por tal motivo se consideró que era el grupo de docentes indicados. Los tres profesores tienen estudios relacionados con las matemáticas y su enseñanza, dos de las profesoras tienen maestría en Educación Matemática y son licenciadas en Matemáticas y Física, mientras que el profesor solo tiene formación de pregrado: licenciado en Matemáticas y Física.

3.2 Análisis y discusión de resultados.

A continuación, se presenta la organización y análisis de las entrevistas usando las categorías, fruto de las pregunatas realizadas las cuales surgen de la reflexion durante las observaciones. Con las categorias se compendian las entrevistas realizadas a los tres profesores. Cada categoría da cuenta de la forma de pensar y enseñar de los profesores que fueron objeto de estudio, en sus clases de matemáticas. Las categorías son tenidas en cuenta de acuerdo a las respuestas reiteradas que se evidencian en los tres profesores, sin embargo, existen puntos enfáticos donde los profesores no coinciden en igual forma de pensar, respetándose cada punto de vista ya que en este trabajo no se pretende un proceso de generalización sobre las concepciones y modos de enseñanza del concepto infinito.

Tabla 1 Organización de las entrevistas según las categorías

Categoría	Respuestas asociadas a la categoría	Observaciones
Aspectos particulares para la enseñanza de un concepto matemático	Aproximación o acercamiento al concepto de manera intuitiva. Situaciones problema o en contextos cotidianos. Problemas concretos. Definir el concepto.	Los profesores manifiestan que para la enseñanza de un concepto matemático es necesario empezar por un acercamiento intuitivo antes de definirlo formalmente, cabe en esta metodología pensar que el infinito matemático no es una excepción y es un concepto válido para trabajarlo en el aula de clases. Por otro lado, los problemas o las situaciones problemáticas se pueden restringir en cierto

Categoría	Respuestas asociadas a la categoría	Observaciones
		sentido ya que en la cotidianidad no es tan común este tipo de situaciones donde se involucra el infinito matemático, aunque si existen.
Términos relacionados con el infinito en la enseñanza	Periodicidad Siguiente número Asíntotas Variable Acercamiento Tan pequeño como es posible Fracciones más y más pequeñas Indeterminado Dividir por 0	Aunque no necesariamente se utilice la palabra infinito para referirnos a él, existen muchos términos matemáticos relacionados con él en el discurso que utilizan los profesores cotidianamente. Pensar en la relación existente entre los términos mencionados y el concepto infinito le da una importancia en la construcción de tales conceptos matemáticos ya que su reiterada presencia muestra su estrecha relación
Concepciones sobre el infinito	Concepto muy abstracto No se ve en la realidad No es práctico No es natural El infinito no es un número, es una tendencia Se queda en una noción	Existe una tendencia a identificar el infinito matemático por su nivel de abstracción y su intangibilidad, sin embargo no es el único concepto matemático que presenta estas particularidades y no por eso se deja fuera de la enseñanza en las aulas de clases, conceptos tales como: los números irracionales que son de difícil comprensión o los números imaginarios que pueden surgir cuando surge una ecuación de segundo grado, los cuales

Categoría	Respuestas asociadas a la categoría	Observaciones
		fueron de difícil comprensión para grandes matemáticos, según cuenta la historia
Llevar o no el infinito matemático a las clases	Es posible en grado once pero no antes por falta de curiosidad de los estudiantes. Es posible pero solo se queda en una noción. Es necesario debido a que hace parte de la construcción de conceptos matemáticos y eso permite familiarizarse con él.	Aunque no se lleve formalmente el concepto de infinito a las aulas de matemáticas, desde los primeros grados escolares se está trabajando con este en nociones básicas como: recta, conjuntos numéricos, etc., por tal razón se debería aprovechar esa familiaridad que ya tiene el estudiante con el concepto para así naturalizarlo. En grados de noveno, décimo y undécimo, se enseñan conceptos que involucran el infinito tales como: irracionalidad, variable, limite, entre otros.

A continuación, se analizan las observaciones realizadas por la autora de este trabajo, las cuales consistieron en una presentación formal del trabajo que iba a realizar, posterior a la aceptación del trabajo por parte de los profesores ingresar a sus clases, grabarlos y tomar nota sobre la forma en cómo dictaban sus clases los maestros, contrastándose con la información que dieron en la entrevista.

Tabla 2 Organización y análisis de las observaciones realizadas en clase

Profesor	Observaciones	Análisis
Julio Grado Décimo	Las actividades del profesor fueron enfocadas en la clasificación de triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos y lados, para posteriormente pasar a las conocidas identidades trigonométricas construidas desde los lados de los triángulos, tema en el que el profesor pretendía enseñar. Cuando empiezan a graficar las identidades trigonométricas como función $(f(x))$ de una variable x, explican solo tramos de la función y no la función en su totalidad, sin embargo, en algunas ocasiones señala que estas funciones siguen hasta el infinito. También, el profesor da una breve explicación sobre asíntotas, indicando que el grafico de la función no la corta así se prolongue en el infinito	El profesor desarrolló su trabajo muy enfocado en el análisis de situaciones concretas que le permitían trabajar los conceptos que estaba enseñando y esta metodología es bastante utilizada por él, lo cual puede ser un impedimento para llevar a sus clases el infinito bajo los problemas en contexto y las situaciones problema. Cuando pasa a una explicación gráfica de las identidades como función se ve en la necesidad de mencionar el infinito en un discurso "natural" al hablar de función y asíntotas
Sandra Grado Undécimo	Iniciando las observaciones con la profesora definió junto con los estudiantes la función polinómica, haciendo la restricción de que en ningún caso podría hacerse 0 el denominador, porque esto se	Queda evidenciado en las observaciones que la profesora recurre reiterativamente al concepto del infinito en sus explicaciones sin detenerse en él ya que no es objeto de interés en esos casos. En todos los

Profesor	Observaciones	Análisis
	convierte en una indeterminación, el resultado de la indeterminación es un símbolo de infinito. Cuando se definen las asíntotas son restricciones que tiene la función por donde no está determinada y son líneas rectas que van al infinito; puede verse también como la gráfica de una constante (según la profesora). Posteriormente se habla de límites desde la explicación y desarrollo de una actividad donde se divide un cuadrado en dos triángulos rectángulos y se sigue dividiendo hasta donde es físicamente posible seguir doblando el papel, en palabras de la profesora se podría seguir dividiendo en partes más pequeñas, más pequeñas hasta el infinito, pero en este caso es hasta donde es físicamente posible. Y vuelve a aparecer el infinito cuando el límite tiende al infinito en los casos donde esta es la solución.	conceptos trabajados durante las clases se menciona el infinito, pero en el caso en el que más me cuestiono es cuando se habla de una indeterminación y se relaciona inmediatamente con el infinito
Adriana Grado Noveno	Al igual que el profesor Julio, la profesora enfoca mucho sus explicaciones en situaciones cotidianas para los estudiantes,	En este caso se perciben los estudiantes conectados con la metodología de la profesora de una manera especial. Se

Profesor	Observaciones	Análisis
	la resolución de sistemas de ecuaciones la encamino a situaciones como ir a la tienda y comprar diferentes artículos y hallarle los diferentes valores a cada artículo. Los estudiantes acogieron de muy buena manera esta estrategia y de este modo se les hizo familiar el tema, para las posibles soluciones de los sistemas fue interesante ver como en el caso de tener como respuesta la ecuación de la línea recta, la profesora concluyo que coinciden las respuestas en infinitos puntos y sirven infinitas parejas ordenadas para dar solución al sistema. En uno de los ejercicios que se resolvieron el software geogebra el sistema no tenía solución, la profesora pregunta: - ¿Que obtuvieron en la gráfica?, los estudiantes responden: -son rectas infinitas -No!!! ¿Qué son? -Paralelas -Eso	perciben estudiantes participativos e interesados en aprender. Resulta un poco sorprenderte ver la respuesta de la profesora y la manera como encamina a los estudiantes a responder lo que ella espera. Cuando ellos responden que las dos líneas rectas que aparecen en el software son infinitas, se puede observar la negación que existe de la profesora sobre el infinito y como ni siquiera se piensa la posibilidad del hecho de que sean infinitas una respuesta válida En la entrevista la profesora señala la importancia de llevar el concepto a las clases, pero cuando tiene la oportunidad prefiere omitirlo por completo

3.3 Resultados y análisis de resultados.

Los resultados encontrados en las actividades que realicé durante los cursos de práctica pedagógica, muestran como los maestros de los diferentes grados de escolaridad manifiestan un rechazo consciente o inconsciente del concepto infinito. En general coinciden en que es un concepto bastante abstracto y, por tal motivo, es complicado llevarlo a las aulas de clase, sin embargo, una de las maestras apuesta por trabajarlo desde los primeros años de escolaridad, con el propósito de ir familiarizando a los estudiantes con el concepto de infinito y, así, les sea más natural tratarlo y usarlo al momento de enseñar los contenidos matemáticos, asociados con el infinito como: la variación, el límite, la función, la irracionalidad, entre otros conceptos.

Coinciden en todas las clases de los diferentes niveles en que los estudiantes a parte de los profesores, por lo menos mencionan el infinito en su vocabulario cotidiano, por ejemplo cuando hablan de límites y en la descripción de gráficos de los estudiantes de los 3 niveles escolares. Por tal motivo se debería de aprovechar que ellos ya manejan algún tipo de noción al respecto del concepto para que sirva como inicio para conversaciones, reflexiones y debates acerca del mismo, sin embargo, es considerado más fácil simplemente omitirlo y desaprovechar la oportunidad que los mismos estudiantes dan para abordarlo y darle un trato formal al igual que a los demás conceptos.

4. Capítulo IV: Consideraciones Finales.

4.1 Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se evidencia que existen muy pocas investigaciones acerca del trabajo del infinito matemático en las aulas de clase, lo que reafirma lo sucedido en la historia donde se ha preferido ignorar el concepto por su alto nivel de abstracción. Si bien, a partir del año 2000 han aumentado el número de investigaciones y de personas deseosas por conocer y problematizar el concepto del infinito matemático no es suficiente ya que se queda corto el avance con respecto a otros temas, los cuales han sido estudiados a profundidad como temas geométricos, numéricos tales como fraccionarios, algebraicos como resolución de polinomios, etc. Sin embargo, un concepto que se encuentra estrechamente relacionado con conceptos fundamentales de las matemáticas, tales como: funciones, límites, irracionales y resolución de sistemas de ecuaciones no se estudia a profundidad por expertos en Educación Matemática como se debería.

Las investigaciones en Educación Matemática en torno al concepto de infinito son pocas, lo cual muestra que existe mínimo interés en comprender tal concepto, quizás esto se deba al nivel de complejidad que éste encierra, lo cual ha impedido que avancen las investigaciones en este tema, evitando de esta manera el hecho de problematizar alrededor de este concepto.

Durante las entrevistas con los profesores queda claro que en los programas de formación de maestros, hace falta enfatizar en cursos que amplíen el espectro referente al concepto del infinito, pudiéndose articular con asignaturas como: cálculo, teoría de la medida y otras, en las cuales existen los conceptos que se enseñan, ya que estas tienen relación con el infinito. De este modo, los futuros maestros tendrán buenos argumentos sobre el concepto infinito, que les permita llevarlo a las aulas de clase, vinculándolo de manera natural con otras temáticas.

4.2 Reflexiones y consideraciones finales.

Este trabajo abre una puerta para que futuros maestros o maestras en ejercicio puedan reflexionar acerca de la importancia de vincular el infinito en sus clases de matemáticas, articularlo con algunas de las temáticas que se enseñan. Podemos atrevernos a conjeturar que no existe un nivel inicial para llevar el infinito a las clases ya que desde que se enseñan las primeras nociones matemáticas de conjunto o se definen los elementos básicos de la geometría se hace alusión a este concepto.

Es una invitación para que su enseñanza se dé en las aulas, aunque parezca un concepto complejo y abstracto. El concepto del infinito es igual que los conceptos intangibles, como: conjuntos numéricos, objetos geométricos, entre otros, que se enseñan en las clases. Solo hace falta abrir un poco la mente y de esta manera encontrar la relación existente entre el infinito y los demás conceptos. Esta visión permite ver las matemáticas como una disciplina universal que se debe mirar desde su completitud y desde una mirada amplia y total de todas las posibilidades que en dicho universo existen. Llevar a las aulas de clase las paradojas acerca del infinito o reflexiones de situaciones donde se vea inmerso este, conjeturar acerca de episodios concretos que permitan ir más allá con respecto a los temas y conceptos que se llevan cotidianamente a las aulas de clase, servirá como inicio para un cambio acerca de los conceptos poco tratados en las clases de matemáticas .

En repetidas ocasiones se percibe que el infinito es tratado como el “Dios” de las matemáticas, al igual que en las diferentes religiones se le atribuye a cada dios unas características de divinidad y cuando ocurren sucesos naturales o inexplicables se atribuyen estos sucesos a ese ser divino. Cuando en matemáticas encontramos una indeterminación, magnitud o tendencia que no es explicable para nuestra mente humana la relacionamos inmediatamente con el infinito. Por ejemplo, cuando nos referimos a los números irracionales inmediatamente pensamos en un número infinito de decimales, pero en realidad ¿hemos reflexionado tanto al respecto cómo para afirmar que es una cantidad infinita? y cuando lo hacemos comprendemos qué implicaciones tiene este hecho para la construcción de los diferentes conceptos asociados a este tema. Las divisiones por cero que son indeterminaciones matemáticas, usualmente se simbolizan con el símbolo de infinito y acaso ¿será que en realidad una división por 0 tiene como respuesta un infinito?

De la misma manera pasa con algunas situaciones a las que nos enfrentamos en la cotidianidad, donde pensar en cosas como el universo, las estrellas o el tamaño del mar se convierte para nuestros sentidos en infinitos. Si el mar o la arena están delimitados por un espacio finito, ¿cómo podemos hablar de cantidades o tamaños infinitos? El infinito no puede ser mediado por nuestros sentidos, por lo cual hay que reflexionar sobre la importancia de pensar el infinito matemático a la hora de preparar los currículos que se llevan a las aulas de clase.

Por otro lado, el concepto matemático infinito se puede asumir en algunas ocasiones como una "propiedad", es el caso de los conjuntos numéricos, el número de decimales que tienen un número racional o el valor que se le da a magnitudes muy grandes o muy pequeñas. Normalmente el infinito no es concebido como un concepto en sí mismo, sino que es el acompañante que tienen otros conceptos. Si bien en la actualidad no se ha logrado dar una definición de lo que es o puede llegar a ser el infinito, cuando intentamos definir conceptos como línea recta, segmento, conjunto numérico, o sucesión, necesariamente se utiliza la noción de infinito y, es así como, surge el cuestionamiento de cómo definir conceptos por medio de otros conceptos que no se han definido como es el caso del infinito. Podemos acercarnos desde las teorías matemáticas que se tienen en la actualidad a una definición y de este modo avanzar en el desarrollo de nuevas teorías y continuar en el proceso de las que ya existen acerca del infinito.

Es verdad que el infinito es un concepto abstracto, pero ha sido mencionado desde los primeros años de escolaridad, así que puede hacerse familiar para cualquier estudiante. Si hay situaciones en las que es más fácil dejarlo de lado y continuar con la construcción de otros conceptos, resulta cómodo obviarlo en algunos casos en los que no se conocen respuestas y la intención no es encontrarlas, pero ¿quién dijo que cuando se encuentra un tema abstracto en matemáticas simplemente se obvia?, ¿cuándo ha sido el nivel de abstracción de un concepto un motivo fuerte para no pensarlo?, ¿cuándo se han necesitado objetos tangibles para construir matemáticas?, ¿solo entonces los conceptos "tradicionales" son los que se llevan a las aulas de clases?. Esta es una invitación para reflexionar sobre las razones para pensar los conceptos y una invitación a llevar temas diferentes a las clases, porque todos los conceptos son importantes y despiertan diferentes intereses en los estudiantes y abren nuevas perspectivas y formas de pensar para los profesores.

Si bien es un momento difícil por el que está pasando la educación, puede ser el abrir de una nueva puerta para enseñar conceptos diferentes a los que se llevan tradicionalmente a las aulas y de esta manera devolverles a los estudiantes la ilusión y el asombro que sintieron los grandes pensadores por el saber matemático. Estamos en una nueva era, en la que vale la pena apostarle a la educación revolucionaria, a saberes con sentido, a nuevas formas de pensar, a motivar a los estudiantes a construir conceptos desde su experiencia, sin dejar claro está el formalismo que requieren todas las ciencias y la estructuración que permite avanzar en ellas, puede verse como un reto para profesionales en educación matemática y matemáticos, la construcción de nuevas teorías basadas en el desarrollo del concepto matemático del infinito.

Finalmente, es importante cuestionarse sobre el punto de vista amplio, acerca de que tenemos un Universo a nuestro alrededor. Nuestro planeta, mal llamado TIERRA, teniendo tres cuartas partes de agua, es casi nada dentro del Espacio Sideral. Este entorno, ¿Donde comienza? ¿Donde termina? ¿Cuál es su Centro de Gravedad?. Las interrogantes no tienen actualmente respuestas, y son motivo de continuo análisis por parte de estudiosos de la Física y Astronomía ante este infinito.

En sentido restringido: vayamos a lo infinitesimal. Gracias a instrumentos como microscopios, nos hemos podido percatar de la presencia de enormes cantidades diminutAs organismos, no apreciables a simple vista, como bacterias, viruses, algas, hongos, etc., que también sin darnos cuenta afectan nuestra vida, y su medida no la podemos obtener. La interfase de las matemáticas con la biología, medicina y otras disciplinas relacionadas con este infinito, tampoco han ofrecido resultados cuantitativos.

A nivel cotidiano: ¿Cuántas actividades en las cuales magnitudes inconmesurables (difíciles de medir) nos encontramos en la vida real? Como ejemplos, ¿Cuánto dinero se gana o se gasta en presupuestos gubernamentales de muchos países? ¿Cuántos desechos sólidos o líquidos están siendo dejados al ambiente, contaminando el medio donde vivimos? Las cifras relacionadas a estas preguntas, difíciles de calcular o estimar, van hacia un límite que tiende al infinito, y por ello, la necesidad de tratar de definir donde estamos, hacia donde vamos, y que podemos hacer para manejar esta magnitud no definida.

Por todo lo anteriormente citado, unido al trabajo realizado, se puede ver que hay que ponerle mayor atención al concepto de infinito, y contribuir a que las nuevas generaciones de graduandos de ciencias y humanidades, así como los docentes, perciban su importante relevancia. El presente trabajo se basó en opiniones dadas por un grupo de docentes muy limitado, por lo que el tamaño de la muestra no es necesariamente el más representativo. Sin embargo, considero que las ideas presentadas constituyen un buen punto de partida para que otros estudiosos del infinito, puedan continuar con esta labor, aportando una contribución adicional a la lograda en el presente proyecto final de grado.

Bibliografía.

Arrigo, G., D'Amore, B., & y Sbaragli. (2011). *Infinitos Infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático*. Primera edición. Magisterio. Colombia

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Editorial Gedisa SA, Barcelona*.

SAEM Thales (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. *Sevilla, SAEM Thales*.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología* (Disertación Doctoral). Mexico D.F., Instituto Politécnico Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Magisterio.

Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (Disertación Doctoral). Universidad de Huelva. Huelva.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2010). Metodología de la investigación. Quinta edición. México: McGraw-Hill.

Tsamir, P., y Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. En *Proceedings of the XVIII PME* (Vol. 2, pp. 345-352)

Trigo, V, A. (sf). El quinto postulado de Euclides y la geometría del universo. Recuperado el 10 de septiembre de 2017 de : www.acta.es/medios/articulos/matematicas/019035.pdf.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. En *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* (Vol. 5, pp. 19-36).

Anexos.

Anexo 1 Observación de Clase.

Observación Clase Profesora Adriana Arango Noveno

Fecha	Observación de la Clase
	En esta sesión se desarrollaron explicaciones sobre los sistemas de ecuaciones con ejemplos prácticos como el siguiente: "Si mi mamá me envía a la tienda a comprar 5 pasteles de pollo y 3 gaseosas con 30.000 pesos y me devuelven 12.500, ¿cuánto costaban los pasteles si eran al doble de las gaseosas?" Los estudiantes se mostraron con una actitud participativa durante toda la clase.
21/9/16	La profesora propone el desarrollo de la clase en el aula de tecnología y desarrolla la sesión a través del software Geogebra, primero la profesora da una explicación sobre el software, como se puede usar y una pequeña reseña histórica. Posteriormente invita a los estudiantes a que resuelvan uno de los sistemas de ecuaciones que tienen en el cuaderno y que comprueben la solución que obtuvieron y si coincide con el del programa. En el transcurso de la sesión surgieron preguntas como: ¿Qué significa que las dos rectas se intercepten en un punto?¿Qué pasa si las dos rectas no se interceptan? La profesora pregunta a unos estudiantes que tienen un sistema de ecuaciones sin solución. **-"¿Cómo son esas rectas?"** **-Son infinitas**

Fecha	Observación de la Clase
	-No, son paralelas. Así termina la clase.
19/10/16	Se presenta a los estudiantes un taller donde ejercitan los diferentes métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones.
26/10/16	Durante la sesión se continuó con el trabajo de resolución de sistemas de ecuaciones 3x3 por medio del determinante y se realizaron 2 ejercicios para afianzar la aplicación del método. (ver fotos)

Observación Clase Profesor Julio Grado Décimo

Fecha	Observación de la Clase
	El trabajo que se desarrolló durante esta sesión fue enfocado en el reconocimiento y la clasificación de triángulos dependiendo del tamaño de sus lados y de sus ángulos. El profesor comienza su clase con una reflexión sobre los sueños y las aspiraciones que tienen las personas frente a su futuro. Posteriormente los estudiantes trabajan en la guía que el profesor les entrega sobre clasificación de triángulos.
21/9/16	Los estudiantes tienen evaluación sobre clasificación de triángulos.
28/9/16	El trabajo que se desarrolló durante esta sesión fue enfocado en el reconocimiento de las identidades trigonométricas a partir de los diferentes tipos de triángulos. Para desarrollar está explicación se recordaron conceptos como catetos, ángulos internos, hipotenusa.
19/10/16	El trabajo que se desarrolló durante esta sesión fue enfocado en la resolución de ejercicios

Fecha	Observación de la Clase
	utilizando las identidades trigonométricas. (Ver fotos adjuntas)

Observación Clase Profesora Sandra Grado Once

Fecha	Observación de la Clase
	Durante esta sesión se empieza la clase recordando que es una función racional: “La cual tiene un polinomio tanto en la parte de arriba como en la parte de debajo de la fracción” Noción de asíntotas tanto verticales como horizontales desde la función racional, mediante las restricciones que se hacen en una función racional y por medio de los grados del polinomio. Posteriormente se trabajan ejemplos para determinar si existen o no asíntotas en diferentes funciones racionales. La profesora define la asíntota como: “Una restricción por donde no pasa la función y la función va a rodear la asíntota sin pasar por ella”. “Una recta o mejor una gráfica de una constante”. (Escuchar audio)
21/9/16	La clase comienza con un taller donde los estudiantes reconocen si en una función hay o no asíntotas horizontales, verticales u oblicuas. Se hace énfasis en la división de polinomios.
28/9/16	Durante esta sesión la profesora entrega a los estudiantes una guía que envían desde la secretaría de educación por medio de una tutora. En la guía se debe dividir un cuadrado en un triángulo rectángulo isósceles y seguir doblándolo

Fecha	Observación de la Clase
	indefinidamente hasta que sea posible, siguiendo las indicaciones que allí se presentaban y posteriormente escribir cual es la proporción del cuadrado inicial respecto al triangulo más pequeño que resulto. A través de los dobleces se llega a la conclusión que al seguir dividiendo los triángulos se está acercando al número 0 y se reflexiona sobre si tiene sentido decir esto. Posteriormente la profesora responde que si tiene sentido y que aunque en este caso no es posible se pueden hacer dobleces milimétricos y más pequeños que eso para "acercarse a la nulidad del papel haciendo un acercamiento a un límite que es 0" Se analizan los tipos de triángulo que se obtuvieron, para llegar al análisis de un triángulo rectángulo de lado 1 y de hipotenusa raíz de 2. La profesora pregunta por la hipotenusa y los catetos para identificar las partes del triángulo. Luego se busca el valor de la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras y llegando a la conclusión de que la hipotenusa es igual a raíz de 2. Surge la pregunta por el número de decimales que tiene el número raíz de 2 y se pide que lo ingresen en la calculadora y algunas de las respuestas son: Que tiene decimales periódicos; Que es un número racional; Que es un infinito periódico; Que son decimales pero no periódicos Que tiene infinitos decimales Que es un infinito no periódico (Profesora)
26/10/16	Durante la sesión se mostraron las propiedades para solucionar límites, como sustitución directa,

Fecha	Observación de la Clase
	conjugada, límite de un cociente, límite de un radical. (ver fotos)

Anexo 2 Entrevista profesores.

ENTREVISTA PROFESORA SANDRA, GRADO ONCE

15 Marzo 2017

-Estamos con la profesora Sandra del grado once, de matemáticas y vamos a proceder con las preguntas de investigación.

¿Qué considera que es lo más importante para explicar la noción de límite?

-Lo más importante para enseñar la noción de límite… primero un acercamiento intuitivo, es decir no entregar el concepto, ni siquiera en su forma más simple, si no a partir de situaciones problema que el chico vaya llegando a esa noción intuitivamente, ¿Qué será el límite? Y de pronto lo que hicimos un poco en la clase de tratar de asemejarlo a situaciones muy contextuales ¿Cierto? Del cotidiano, ¿En que aplicamos el límite? Por ejemplo, yo hablaba en momentos con ellos ¿Por qué son deportes al extremo? O sea ¿Por qué son deportes al límite? ¿Por qué una cosa limita con otra? Cosas que de pronto ellos saben que están en su contexto y que no le ven relación con el concepto matemático. Entonces en esa parte un acercamiento intuitivo, el concepto en su forma más simple, porque a veces por ejemplo los libros de texto lo entregan de una vez con la definición formal, digamos exilon delta algo así, más porque si no se comprende en sí cual es el objeto del límit, ¿Por qué se llama así? ¿Por qué tenemos que irnos por un lado, por el otro acercándonos a un valor determinado?, ellos no van a entender que hay otro valor que me permite llegar a esa frontera.

- ¿Qué conceptos matemáticos encuentra con relación al límite?

-Lo trabajamos con relación a los cambios momentáneos, lo trabajamos por ejemplo, las velocidades instantáneas, cuando se trabaja desde la noción de límite para ellos es más fácil definir porque en ese punto por ejemplo existe la recta tangente, mira que una de las formas iniciales de derivada tiene que ver con la noción de límite y lo trabajamos con las áreas en la guía que nosotros trabajamos cuando tu estuviste con respecto a la fracción, es decir, si yo empiezo a acercarme tanto, a aumentar tanto el denominador, a hacerlo tan pequeño ¿a qué me estoy aproximando?, eso puede ser otra noción y de las sucesiones, es otra forma de trabajarlo.

-¿Cuándo hablamos de fracciones más pequeñas, más pequeñas, podríamos hablar por ejemplo de un tipo de infinito?

-Sí, incluso o bueno, si y no. Porque mira que la fracción que nosotros estábamos trabajando con relación a los triángulos y a los dobleces que se hacían eran entre más amplio se hace el número, si yo estoy haciendo una proyección a un número infinito, pero cuando yo estoy haciendo una proyección a un número infinito estoy acercándome a un número que es 0. Entonces ahí de pronto habría esa relación, de que entre yo más amplío el denominador de esa fracción pues más me voy a ir acercando a un límite, que me voy a acercar también en algún momento siempre voy a encontrar un siguiente número. Ahora para ellos también fue muy importante, antes de trabajar lo del límite lo que habíamos trabajado ya de asíntotas, la función y me aproximaba tanto como era posible pero nunca pasaba exactamente por el punto , entonces ellos también hicieron claramente la relación con el límite, ¿cierto? Yo me puedo aproximar tanto como sea posible pero se me va a crecer o decrecer indefinidamente, entonces para ellos también fue muy importante haber trabajado lo de las asíntotas.

-Cuándo decimos decrecer indefinidamente entonces también podríamos tener relación con el infinito pequeño cuando me aproximo a cantidades muy pequeñas y también podríamos hablar de cantidades muy muy grandes cuando crece o decrece y tendría también relación.

Bueno profe mi trabajo es sobre el infinito y la relación que tiene con los conceptos matemáticos que se enseñan en la escuela. Entonces la idea es saber si usted considera pertinente por ejemplo definir el infinito o hablar de infinito en las clases de matemáticas como herramienta para la enseñanza de otros conceptos.

-es que definir el infinito pienso yo que siempre se queda en una noción, porque uno sabe que es una tendencia a crecer hacia algo que no puedo, que es inconmensurable, es decir yo siempre veo el infinito como algo tan grande o como algo tan pequeño pero que yo no puedo seguir trabajando con el de la forma en que yo quiera, entonces para mi definirlo no, pero si tenerlo en cuenta como tú dices dentro del trabajo de los conceptos matemáticos. De hecho porque considerar por ejemplo en las operaciones cuando hacemos operaciones con el infinito, que el chico sepa que sumar o restar o multiplicar el infinito no le va a hacer un número exacto, sigue siendo dentro de su espacio algo muy grande, algo que no se puede encerrar.

Algo pasaba así pero con un estudiante en otro 11 que tuve. ¿Cómo así que sumarle al infinito…? ¿Cómo será sumar a un número demasiado grande, será más infinito o menos infinito? Entonces me dice no eso es sumarle a algo muchísimo más grande de lo que usted se puede imaginar y no tiene fin, es precisamente eso la capacidad que ellos tienen de decir yo puedo irme hasta donde yo quiera y sin embargo yo voy a tener que hacer es una aproximación yo nunca voy a decir infinito es esto. Pues para mi es eso pero no, no creo que sea algo definible, más bien trabajable así como herramienta.

ENTREVISTA PROFESOR JULIO, GRADO DECIMO

-Buenas tardes Profesor, le quería preguntar por el concepto de función, ¿Qué cree que es lo más importante para enseñar el concepto de función?

-Concepto de función…. Pues haber ¿Cuál es bien la pregunta?

-¿Cuándo va a enseñar el concepto de función, que tiene en cuenta? O ¿Qué concepto piensa que debe tener en cuenta o qué los estudiantes deben saber?

-La relación dentro de variables, lo que uno llama, bueno si uno está analizando dos variables o variables, las cuales dependen unas de otras, definir el conceptos de función.

-Después de ya tener claro las variables, ¿qué otros conceptos se relacionan con la función? Por ejemplo, cuando se gráfica.

-Bueno… eh la manera como se identifica la función, a partir a partir de la gráfica, a partir de la tabla, a partir de la forma, son cosas que le dicen a uno si hay o no hay función.

-Cuando estamos analizando la gráfica por ejemplo. Que vemos su comportamiento, ¿Qué otros conceptos relacionamos cuando nos centramos en el análisis de la gráfica?

-De la gráfica… No muchos, la gráfica te da la información de todo lo que tiene que ver con la función, si es par, si es impar, el concepto de periodicidad, de creciente o decreciente, la gráfica brinda todo este tipo de elementos.

-Considera que el infinito podría ayudar en la interpretación del concepto de función? A comprender mejor que es una función o no necesariamente?

-El concepto de infinito…. Lo que pasa es que cuando uno trabaja las funciones, se apoya mucho en la parte real, en problemas más concretos y en la vida real, el concepto de infinito es muy abstracto, entonces vislumbra o facilita el comportamiento, más no lo veo en la realidad, pues pienso yo. Por ejemplo una función que tenga una asíntota, cierto en un punto. En la vida real que significa que se acerque a ese punto, más en realidad como que no lo vería como práctico, más como el comportamiento de la parte de la función como tal sí, el concepto por ejemplo de acercamiento.

-Mi trabajo era en realidad sobre el infinito, sobre si podría servir como herramienta para la enseñanza de otros conceptos, si en la escuela se habla de infinito, si estamos viendo el tema de funciones en este caso, límites en once, si el profesor usa el infinito en sus explicaciones o no era necesario.

-No en once se puede, a veces uno en los grados de once pa abajo medio lo menciona hasta ahí, un pelao a veces lo… pero en once ya que tienen más capacidad de análisis ya uno les menciona el infinito y trata de darle una interpretación más a la que es el infinito ¿cierto? Por ejemplo un intervalo de los mayores que dos ¿cierto? El infinito no es un número, es una tendencia, ¿cierto? ¿Una recta es una cuerva de radio infinito? ¿Cierto? Ese tipo de cosas que a veces son como salidas de la mente para uno enseñarles a los estudiantes, una división por cero no es infinito, eso es indeterminado, eso no existe. El pelao se queda a veces ahí, muy poquitos son los que se sienten, ve profe como así, ¿qué es el infinito?

Para uno ver el interés y profundizar en el tema, pero más que todo es como eso, como la tendencia o el acercamiento o el concepto como más abstracto, porque en la práctica, analizar una función por decir algo en economía y que esa función demanda que es una función en línea recta o la función oferta en realidad ya en otros campos como la física cuántica, con la teoría de la relatividad que pasa cuando toque con el infinito, cuando la velocidad se acerca al infinito, por ejemplo un concepto como la velocidad de la luz, que pasa con la dilatación, con la masa y con el infinito de pronto ahí le podría encontrar sentido en campos diferentes a los de la matemática.

ENTREVISTA PROFESORA ADRIANA, GRADO NOVENO

-Estamos con la profesora Adriana del grado noveno, de matemáticas y vamos a proceder con las preguntas de investigación.

¿Qué considera que es lo más importante para explicar los sistemas de ecuaciones?

-Lo más importante para enseñar sistemas de ecuaciones… primero que los estudiantes sepan resolver ecuaciones con una y dos variables inicialmente, posteriormente saber graficar y reconocer la ecuación de una recta, cual es la pendiente, el intersepto, cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o se cortan en un punto.

- ¿Qué conceptos matemáticos encuentra relacionados con la enseñanza de los sistemas de ecuaciones?

-Se trabajo con ejemplos de la vida de real donde por ejemplo los estudiantes tenian que ir a comprar a la tienda un encargo de sus madres les pedian y necesitaban comprar gaseosas y pasteles con determinada cantidad de dinero y al regresar con el dinero del cambio saber cuantos pasteles y gaseosas podrian comprar.

-¿Encuentra relación con la resolución de sistemas de ecuaciones y el infinito?

-Claro que si, cuando un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones o no tiene solución, se puede ver como esta estrechamente relacionado con el infinito.

-¿Considera que es importante llevar el infinito a las aulas de clase por la relación que existe con otros conceptos como en este caso los sistemas de ecuaciones?

-Si ya que desde la primaria estan familiarizados con el infinito y para ellos es común preguntar sobre el y hasta hablar de el en muchos casos.

PREGUNTAS DE LAS ENTREVISTAS

Se resalta que no fueron entrevistas estructuradas de preguntas cerradas, por el contrario se pretendia escuchar con naturalidad a los profesores.

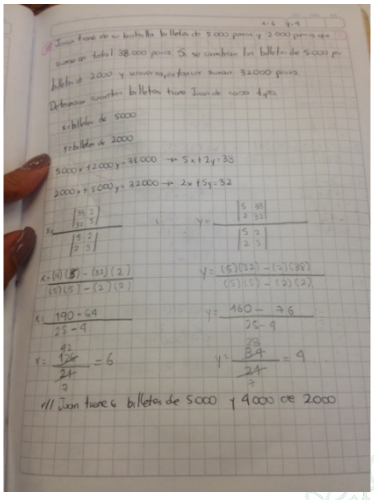
1¿Qué cree que es lo más importante para enseñar el concepto de? (Según el profesor se pregunta por el tema trabajado en clase)

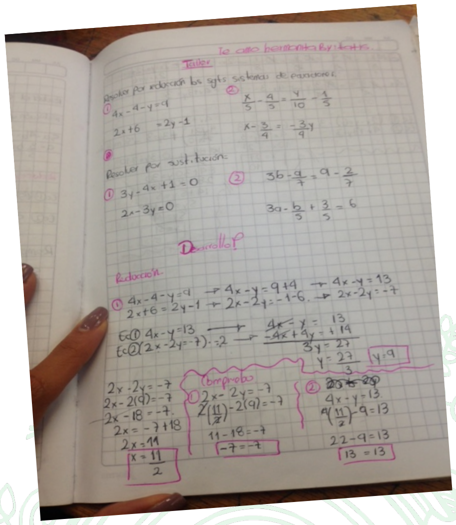
2 ¿Qué conceptos matemáticos encuentra con relación al …?

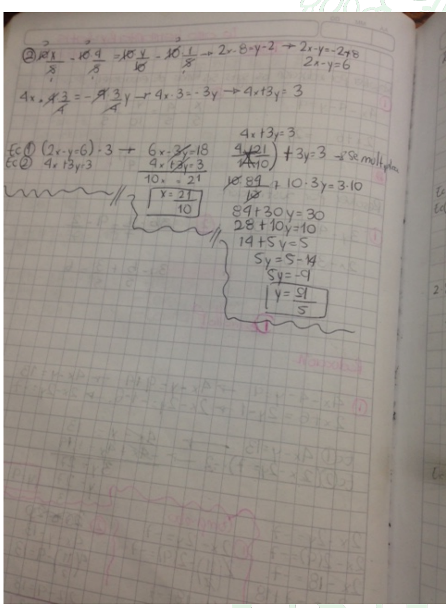
3 -¿Cuándo hablamos de fracciones más pequeñas, más pequeñas, podríamos hablar por ejemplo de un tipo de infinito?

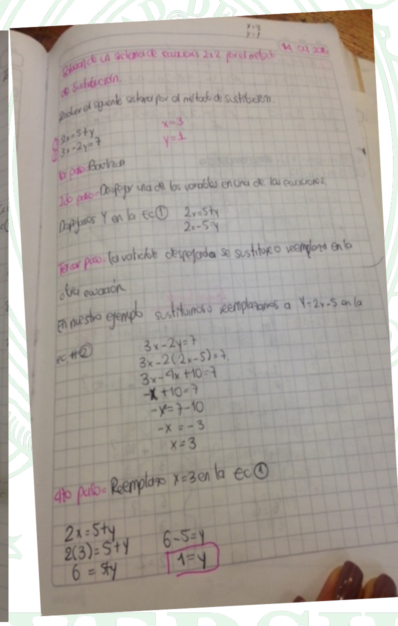
4 ¿Qué otros conceptos relacionamos cuando nos centramos en el análisis de la gráfica?

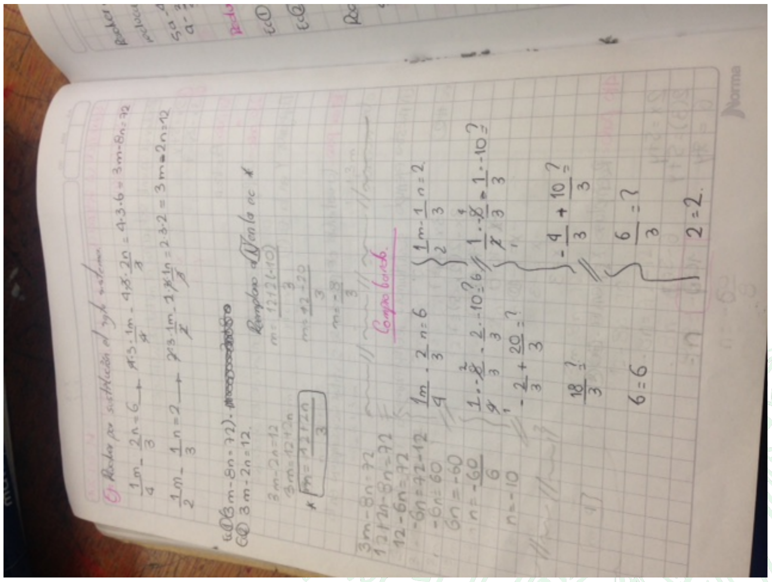
FOTOS PROFESORA ADRIANA GRADO NOVENO











FOTOS PROFESOR JULIO GRADO DECIMO