



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**COCINANDO EL CAMBIO**

**UN PROYECTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN CON  
ENFOQUE EN EL PENSAMIENTO VARIACIONAL**

Autor(es)

**Verónica María Gallego Patiño**

**Johan Andrés García Muñoz**

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2021



Cocinando el cambio

Un proyecto para la enseñanza de la división con enfoque en el pensamiento variacional

**Verónica María Gallego Patiño**

**Johan Andrés García Muñoz**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de: **Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática**

Asesores (a):

Mg. Verónica Valderrama Gómez

Dr. Christian Fernney Giraldo Macías

Línea de Investigación:

Pensamiento Variacional en la básica primaria apoyado en el Aprendizaje Basado en Proyectos  
(ABPy)

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2021

*A mi mamá, hermana y amigas, a las mujeres que siempre están para sostenerme y apoyarme.*  
*A mis amados asesores, que con su paciencia acompañaron todo este proceso.*  
*Al Colegio Calasanz de Medellín, que abrió sus puertas y me brindó tantos aprendizajes.*  
*Al Congreso de los Pueblos, donde aprendí que todo lo que hagamos aporta a las transformaciones, sobretodo, si lo hacemos en la escuela.*  
*A la Región de los 2 Ríos que es mi segundo hogar, la familia que elegí.*  
*Al Proyecto de Educación Popular Estanislao Zuleta, dónde día a día materializamos sueños de acceso a la Universidad Pública como otra forma de defenderla.*  
*Y en general a todas las que hacen algo, así nadie vea o aplauda, vamos a vencer y será hermoso.*

*Quiero agradecer a Dios por darme la fortuna de tener buena salud.*

*A mis padres, porque siempre han estado pendientes de mi bienestar, apoyándome con sus sabios consejos, sus acciones y oraciones.*

*A mis hermanos, primos, abuela y pareja, por acompañarme en este proceso de crecimiento personal y profesional, por creer en mí y en mi plan de vida.*

*A mis asesores, gracias por su inmenso compromiso, constancia y pasión con la que me brindaron el apoyo y las herramientas necesarias para la consecución de los objetivos trazados.*

*Al colegio Calasanz de Medellín por abrirme las puertas, a la maestra cooperadora y los estudiantes del grado segundo que participaron a lo largo de todo el proceso del trabajo.*

*A los docentes de la institución donde realicé mi bachillerato, por crear esperanza, enseñarme valores y orientarme a perseguir mis sueños.*

*A mis amigos, que sin ellos la vida seguramente tendría un color gris, por compartir mis gustos, mis aficiones y este gran sueño de ser docente, por estar dispuestos a hacer pruebas y responder entrevistas.*

*A la Universidad de Antioquia y la Facultad de Educación, por permitirme formar como profesional.*

## Tabla de contenido

<b>Resumen.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Planteamiento y justificación del problema .....</b>	<b>8</b>
<b>2. Objetivos .....</b>	<b>15</b>
2.1. Objetivo General	15
2.2. Objetivos específicos	15
<b>3. Revisión de literatura .....</b>	<b>16</b>
<b>4. Marco conceptual.....</b>	<b>23</b>
4.1 Estructuras multiplicativas.	23
4.2 Enseñanza del concepto de división	24
4.3 Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy)	28
<b>5. Metodología .....</b>	<b>34</b>
5.1. Metodología de investigación	34
5.1.1. <i>Instrumentos de recolección de información</i> .....	35
5.1.3. <i>Consideraciones Éticas</i> .....	37
5.2 Metodología de enseñanza	38
<b>6. Resultados y Análisis .....</b>	<b>47</b>
6.1 Fase 1 Observación no participante.	48
6.2 Fase 2 Diseño del proyecto	62
6.3 Fase 3 Valoración del proyecto	63
<b>7. Conclusiones .....</b>	<b>65</b>
<b>8. Referencias.....</b>	<b>67</b>
<b>9. Anexos .....</b>	<b>75</b>
Anexo A. Formato de observación no participante.	75
Anexo B. Test de actitudes	77
Anexo C. Formato de acuerdo de confidencialidad	78
Anexo D. Formato de carta de invitación a los profesores	79
Anexo E. Formato de valoración del proyecto.	80
Anexo F. Link directo a la cartilla “Cocinando el cambio”	85

## Tablas

Tabla 1. Criterios de búsqueda.....	17.
Tabla 2. Revistas Nacionales e internacionales, unidades de análisis.....	18.
Tabla 3. Unidades de análisis y autor/es.....	20.
Tabla 4: Contenidos que constituyen el desarrollo de la cartilla.....	40.
Tabla 5: Consideraciones en el marco del ABPy.....	43.
Tabla 6. Desarrollo del proyecto por fases.....	45.
Tabla 7. Explicaciones de los estudiantes.....	51.
Tabla 8. Interacciones docente-estudiante.....	54.
Tabla 9. Expresiones.....	58.
Tabla 10. Recursos y frecuencia.....	61.

## Figuras

Figura 1. Artículos encontrados en las revistas por unidades de análisis. ....	19.
Figura 2. Base conceptual de la estructura de la multiplicación y la división.....	27.
Figura 3. Características esenciales para el diseño de proyectos. Estándares de oro ABPy...	30.
Figura 4. Personaje Panguí.....	39.
Figura 5. Análisis por fases.....	48.
Figura 6. Relaciones analíticas.....	49.
Figura 7. Operación inversa a la multiplicación .....	50.
Figura 8. División por repartos.....	53.
Figura 9. Diagrama Sankey.....	57.

## Resumen

Incorporar la apropiación conceptual y simbólica de las operaciones básicas y en especial el de la operación división se ha configurado, en los últimos años, en una necesidad apremiante para trascender, en la educación básica primaria, el carácter procedimental centrado casi de manera exclusiva en métodos de cálculo.

Para tal fin, la presente investigación realizada en el marco de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, presenta desde un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, el análisis de elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales involucrados en la enseñanza de la operación división con estudiantes del grado segundo del Colegio Calasanz de Medellín, para el diseño de un proyecto que involucra razones y proporciones con enfoque en la covariación, es decir, involucra el pensamiento variacional, a partir de bases teóricas sobre las estructuras multiplicativas y su relación con la división. Como técnicas de recolección de información se utilizó la observación no participante y el test de actitudes.

En consecuencia, se diseñó una cartilla para los docentes denominada “Cocinando el cambio” la cual integra diversos elementos para aplicar un proyecto y enseñar la operación división desde una perspectiva centrada en la variación y el cambio. Dicha cartilla fue validada por 8 docentes de matemáticas en ejercicio, los cuales encontraron en el proyecto un valioso insumo para fortalecer la comprensión del algoritmo de la división y acentuar sus bases conceptuales por medio de las razones y las proporciones en el ambiente de la cocina.

*Palabras clave: pensamiento variacional, división, aprendizaje basado en proyectos, razones, proporciones.*

## 1. Planteamiento y justificación del problema

La enseñanza de las matemáticas es un tema que ha ocupado el interés en numerosas investigaciones, Segovia y Rico (2011); Vásquez et al (2014); Moura (2020) que abordan desde diferentes perspectivas las dificultades y tensiones propias de este campo del conocimiento, como por ejemplo: la aparente mecanización de procedimientos, debido a que no hay un aparente enfoque en enseñar con base en lo conceptual, sino, de forma procedimental, es decir una serie de pasos a seguir, lo cual sin dejar de ser importante, podría invisibilizar otras formas alternativas; también, el poco uso de situaciones problema y actividades cotidianas para el aprendizaje que vuelven ajenos algunos conocimientos para los sujetos.

En este sentido, es notoria la especial importancia que reciben en las anteriores investigaciones, el desarrollo de los pensamientos matemáticos, sobre todo el numérico, espacial, aleatorio, y métrico, en las edades tempranas, siendo bastante reciente la atención que se brinda al desarrollo del pensamiento variacional, Carpenter et al. (2003) sostienen que este pensamiento por lo general no se trabaja en la educación primaria, debido a que su desarrollo se suele priorizar en grados superiores, donde se realiza el tránsito desde la aritmética al álgebra; lo cual trae diferentes problemas de conceptualización y estructura de algunas operaciones para los y las estudiantes.

Por lo anterior, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (*NCTM*, por sus siglas en inglés) defiende que los programas de enseñanza desde preescolar deben incluir y trabajar en diferentes niveles el pensamiento variacional, para que los y las estudiantes estén en capacidad de, por ejemplo, comprender patrones, relaciones y funciones, sin embargo, es algo que al parecer no se aplica realmente en las aulas, esto podría deberse a que los docentes se basan en los



libros de texto, los cuales están llenos de ejercicios que fragmentan de la aritmética y el álgebra y, por lo tanto, los docentes siguen privilegiando la ejercitación sobre la conceptualización, lo que puede generar obstáculos en niveles superiores.

Por consiguiente, este trabajo se interesa por aquellas dificultades asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación primaria de las operaciones básicas, específicamente la operación división, una enseñanza que no suele contemplar un enfoque en el pensamiento variacional como una posibilidad para la apropiación conceptual de la estructura interna del algoritmo, dichas dificultades podrían estar condicionados por cómo se aborden y se desarrollen los contenidos para lograr una comprensión conceptual y simbólica de la operación, más allá del cálculo, este énfasis puede dejar de lado la conceptualización de la operación y según Botero (2006), se está “desconociendo que el concepto y el algoritmo constituyen dos elementos diferentes que se llevan a cabo durante el proceso de conceptualización de cada una de las operaciones” (p.44). por lo cual se hace complicado llegar al reconocimiento de propiedades y sobre todo a la generalización

Esta investigación en particular, se centra en la operación de la división, siendo esta una de las que mayor dificultad suele representar para los y las estudiantes, esto puede ser causado por que la enseñanza se lleva a cabo de manera procedimental, donde simplemente se presenta la división como la operación inversa de la multiplicación, se enfatizan una serie de pasos y no se presentan problemas que conlleven a indagar y analizar, como lo reafirma Fonnegra (2013):

La enseñanza del algoritmo de la división suele centrarse en la adquisición y dominio de la secuencia de reglas que deben efectuarse una y otra vez para obtener el resultado, privilegiando la adquisición de la destreza para resolver divisiones más que la comprensión del proceso y de las diferentes reglas que rigen éste. (p. 652)

Ahora bien, es válido reconocer que el algoritmo de la división, que históricamente se ha trabajado en las aulas desde el componente numérico, podría ser enseñado con estrategias diferentes a las tradicionales, donde se involucren las estructuras multiplicativas, situaciones problema y material concreto, con un énfasis mayor en el componente variacional, ya que esta operación, en su estructura interna, conlleva procesos de generalización y abstracción que permite el tránsito de los objetos matemáticos a los símbolos y el cálculo numérico, Castro y Castro (2019). Específicamente se considera que se puede realizar con base a las razones y proporciones, desde la perspectiva del pensamiento variacional, ya que, según Obando et al (2013), “la conservación proporcional de la relación entre las partes y el todo permite definir una proporcionalidad directa entre la serie de cantidades que puede tomar el todo en su variación, y la serie de variaciones que puede tomar cualquiera de las partes a medida que el todo va tomando sus valores respectivos” (p.984).

De hecho, son muchas otras las dificultades que podrían estar relacionadas con los problemas asociados al aprendizaje de la operación división, sin embargo, es importante resaltar, además, la poca importancia que se le brinda a las concepciones y procedimientos alternativos que utilizan las y los estudiantes para realizar divisiones, al respecto, Reyes et al. (1999) citado por Barrera et al. (2018) consideran que:

Un estudiante con sentido numérico es capaz de comparar cantidades, estimar o aproximar resultados y proponer procedimientos para llevar a cabo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de maneras alternativas a los algoritmos estándar, al igual que juzgar la pertinencia de los resultados obtenidos al ejecutar operaciones numéricas.  
(p. 125)

Además, sin dejar de lado que los estudiantes tienen ideas propias para interpretar el mundo que les rodea; en algunos casos, esas concepciones concuerdan con lo que enseña la escuela, pero en otras se producen contradicciones entre sus creencias y las ideas aceptadas como correctas en la escuela. Estas representaciones incorrectas de los alumnos, es decir, lo que ellos creen correcto, influyen en cómo se aprende el nuevo conocimiento, Mahmud y Gutiérrez (2010); Moreira y Greca (2003).

Por cierto, en lo concerniente al proceso llevado a cabo durante la práctica pedagógica se pudo verificar por medio de la revisión del plan de departamento del área de matemáticas, los registros escritos de planeación y las observaciones participantes de los espacios de clase, que la operación división se trabaja desde la sustracción repetida y la repartición de cantidades como los modelos de aprendizaje de la multiplicación y de la división respectivamente y aunque se dispusieron de algunas estrategias en el área de matemáticas como proyectos de área denominados: “calendarios matemáticos” como una práctica continua de los algoritmos, se presentaron algunas dificultades, que tal vez pueden ser las mismas que afrontan diferentes instituciones educativas para la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas, las cuales posiblemente determinen condiciones para el posterior aprendizaje y comprensión de las operaciones y los diferentes procesos.

En general, estas dificultades pueden relacionarse con factores como: la manera en la que se brindan las instrucciones para realizar actividades, poca claridad sobre la intención que busca la resolución de un problema y la no comprensión conceptual sobre la operación que se está aprendiendo, además de un enfoque de enseñanza tradicional, que parece seguir primando en las aulas de clase.

Además, en relación con el rol del maestro, pareciera no tenerse en cuenta, la relación entre la multiplicación y los conceptos de razón y proporción con la operación de la división, tampoco incluye un enfoque en el que se le dé importancia a la variación y covariación como eje para la construcción de las estructuras multiplicativas, las que para Botero (2006), son aquellas que “involucran la realización de situaciones que ponen en juego no sólo la realización de multiplicaciones y divisiones, sino que favorecen el establecimiento de relaciones entre estas operaciones y otros conceptos asociados”. (p. 59). Lo cual puede trabajarse desde los conceptos de razones y proporciones, sobre todo, teniendo en cuenta que desde la perspectiva curricular se ha buscado que en la escuela se cambien las maneras de enseñarlas, implicando un desarrollo conceptual más amplio al que permite el trabajo de ejercitación.

Por otro lado, se suele enseñar las temáticas del área centrándose en el contenido que presentan los libros de texto y no se evidencia participación activa de los estudiantes; estos métodos de enseñanza ocasionan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que este enfoque podría no generar motivación por parte de los estudiantes, ni los dirigirlos a ser gestores de su conocimiento, es por lo anterior, que este inconveniente que se presenta en el aula obedece al desarrollo del ejercicio docente, puesto que “los profesores suelen ignorar otras propuestas de enseñanza más flexibles, dado que están acostumbrados a reproducir un modelo metodológico en el que se sienten cómodos, porque es aquél con el que ellos aprendieron” (Gómez, s.f. p. 9).

En este sentido, la metodología del ABPy, el cual es definido Pérez (2008) como:

Una estrategia educativa integral (holística), que deja de lado la enseñanza mecánica y memorística para enfocarse en un trabajo más completo y complejo; utiliza un enfoque

interdisciplinario en lugar de uno por área o asignatura y estimula el trabajo cooperativo, toma en cuenta el que los estudiantes tienen diferentes estilos de aprendizaje, antecedentes étnicos y culturales y niveles de habilidad. (p. 162)

Cobra relevancia para nuestra investigación, ya que nos permite generar una propuesta que dinamice los conocimientos, las habilidades de los estudiantes y, a su vez, fomente el pensamiento crítico al presentar situaciones en las que sea necesaria la exploración, investigación y argumentación, siendo así los conceptos de razón y proporción, que se relacionan con actividades cotidianas como la que se realiza en la cocina de los hogares, los que brindarán oportunidad de diseñar un proyecto que permita la enseñanza de la operación de la división con énfasis en lo conceptual para favorecer y alentar a trabajar el pensamiento variacional desde las operaciones básicas a temprana edad.

Cabe mencionar, que este referente metodológico puede ayudar a afianzar conceptos específicos de las matemáticas, dado que Domènech-Casal (2018), define el ABPy como: “un enfoque metodológico que promueve el aprendizaje de los conceptos científicos mediante su instrumentalización en la resolución de un problema o elaboración de un producto” (p. 29). Es por esto, que se puede conseguir una mejor comprensión de la estructura y del concepto como tal de la división; además, se pueden proponer otras formas de realizar esta operación, específicamente desde el pensamiento variacional, lo cual podría contribuir a promoverlo como un campo que facilita la comprensión de las matemáticas, en lugar de ser un obstáculo para aprenderlas, Godino et al. (2015), haciendo eco a las propuestas educativas que han buscado cambios curriculares para trabajar este pensamiento en el aula desde los primeros niveles de escolaridad y así poder encontrar relaciones, patrones y finalmente generalizar, una manera de pensar, que fortalece y desarrolla habilidades matemáticas.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, esta investigación se plantea responder la siguiente pregunta; ¿Cuáles son los elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales que se deben considerar para el diseño de un proyecto que involucra razones y proporciones con enfoque en la covariación para la enseñanza de la división con estudiantes de grado segundo del Colegio Calasanz de Medellín?

## 2. Objetivos

### 2.1. Objetivo General

- Analizar los elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales involucrados en la enseñanza de la operación división con estudiantes del grado segundo del Colegio Calasanz de Medellín para el diseño de un proyecto que involucra razones y proporciones con enfoque en la covariación.

### 2.2. Objetivos específicos

- Identificar estrategias de enseñanza que se suelen utilizar para acercar a los estudiantes de la básica primaria a la comprensión de la operación división.
- Diseñar un proyecto que involucra las razones y proporciones para la enseñanza de la operación división con estudiantes del grado segundo del colegio Calasanz Medellín.
- Valorar el diseño de un proyecto que involucra las razones y proporciones para la enseñanza de la operación división con estudiantes del grado segundo del colegio Calasanz Medellín.

### 3. Revisión de literatura

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al realizar la revisión de literatura, cuyo propósito fue elaborar una búsqueda de información acerca de la enseñanza de la operación de la división; centrándonos en el desarrollo y construcción del algoritmo de la división con base en razones y proporciones, con un enfoque en el pensamiento variacional y tomando como referente metodológico el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy). Además, realizamos un rastreo frente a aspectos generales de la enseñanza matemática, como insumo para afianzar el planteamiento del problema. En este sentido, la información recopilada nos sirve como base teórica para la elaboración del planteamiento del problema y justificación dentro del desarrollo del trabajo de grado.

Para la recolección de la información, nos guiamos por los planteamientos propuestos por Hoyos (2000), quien presenta de manera general un modelo para la realización de una investigación documental y hemos abordado el proceso general de búsqueda atendiendo a las fases que la autora propone y que inician con la fase preparatoria hasta la extensión y publicación. En este sentido, se presentan en la tabla 1 los criterios considerados para esta búsqueda.



**Tabla 1***Crterios de búsqueda*

<b>CRITERIOS</b>						
Descripción	Delimitación temática	Delimitación temporal	Contexto	Colectivo de análisis	Unidades de análisis	Núcleos temáticos
	ABPy en la educación matemática en básica primaria.	2010 / 2021.	Ámbito Nacional e internacional	Revistas nacionales e internacionales	Artículos	Enseñanza del concepto de la división
						Aprendizaje Basado en Proyectos en educación matemática
Asuntos teóricos considerados en la búsqueda	<p><b>Núcleo 1:</b> Concepciones alternativas, estrategias para abordar la enseñanza del concepto división, razones y proporciones ligados a la operación división, elementos históricos asociados a las formas de enseñanza del concepto división.</p> <p><b>Núcleo 2:</b> Definición y características, diseño de proyectos, Aprendizaje Basado en Proyectos en la básica primaria y con énfasis en la educación matemática.</p>					

Después de concretar lo anterior, Hoyos sugiere definir “unidades de análisis”, entendidas como aquel material documental que será revisado; ya sean artículos, trabajos de maestría, trabajos de grado, libros o tesis, aunque para nuestro caso definimos los artículos como fuente principal de revisión. En este sentido, se tuvieron en cuenta las revistas de educación matemática y educación en general y la búsqueda se realizó utilizando la base de datos dispuesta por Colciencias - Publindex. Al culminar la selección de las revistas, se procedió a una segunda revisión, esta vez, enfocada en la selección de unidades de análisis, buscando identificar publicaciones relacionadas con los núcleos temáticos ya definidos. En la tabla 2, se presentan los resultados obtenidos.

**Tabla 2***Revistas Nacionales e internacionales, unidades de análisis.*

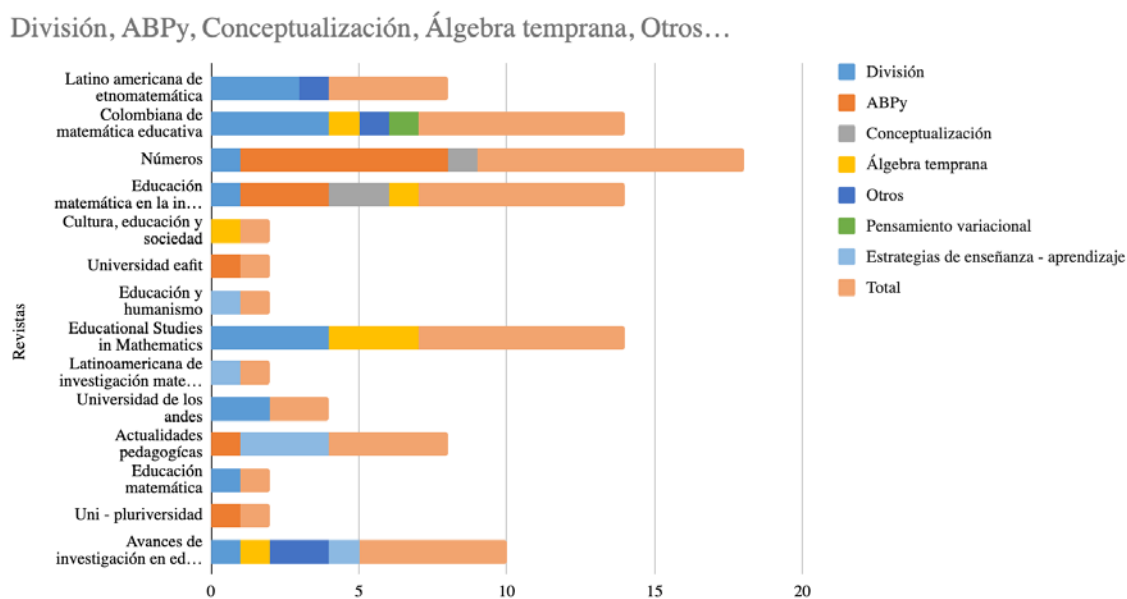
ISSN	REVISTAS NACIONALES	CATEGORÍA COLCIENCIAS 2021		UNIDADES DE ANÁLISIS
2011-5474, 2011-5474	Revista latinoamericana de etnomatemática	C/2020		4
2500-5251	Revista colombiana de matemática educativa	C		7
0124-2121, 2665-2420	Revista educación y humanismo	B		1
0120-1700, 2389-8755	Actualidades pedagógicas	C		4
1657-4249, 2665-2730	Uni-pluriversidad	C/2020		1
0123-885X	Revista universidad de los andes	NA		2
0120-341X	Revista universidad EAFIT	NA		1
1887-1984	Revista números	NA		9
2254-8351	Educación matemática en la infancia	NA		7
2145-9258	Revista cultura, educación y sociedad	NA		1
		<b>TOTAL</b>		37
	<b>REVISTAS INTERNACIONALES</b>			
0013-1954; 1573-0816	Educational Studies in Mathematics	A1	Países bajos	7
1665-2436	Revista latinoamericana de investigación matemática RELIME	C	México	1
2448-8089	Revista educación matemática	C	México	1

2254-4313	Avances de investigación en educación matemática	C	España	5
		<b>TOTAL</b>		14

Ahora bien, exponemos en el gráfico 1 algunos hallazgos que permiten enfocar la búsqueda de antecedentes en relación con los referentes conceptuales más cercanos al tema que se aborda; las investigaciones y artículos revisados, representan avances en la fundamentación de la importancia y originalidad del tema abordado.

### Figura 1

*Artículos encontrados en las revistas por unidades de análisis.*



Adicionalmente se consideraron otras unidades de análisis que fueron halladas en bases de datos como tesis, trabajos de grado y documentos que consideramos en esta revisión y las cuales se presentan en la tabla 3.

**Tabla 3***Unidades de análisis y autor/es*

Unidad de análisis	Autor/es
Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica	Carlos Eduardo Vasco; Luis Carlos Arboleda
Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.	Obando, G., Vasco, C., Arboleda, L. C. (2014).
Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones Epistémicas para la Educación Básica.	Obando, G., Vasco, C. E., Arboleda, L. C. (2013).
Profesora, ¿Qué es multiplicar?	Obando, Gilberto (2015).

Inicialmente, citamos los trabajos relacionados con el Early Algebra, Medrano y Flores-Macias (2018); Ferrara y Sinclair (2016); Alsina (2019); Rojas y Vergel (2018); Heuvel et al. (2013). En estos reportes, se destaca su importancia para la solución de problemas y el fortalecimiento del álgebra desde temprana edad; estos estudios concuerdan, en que las formas tradicionales de enseñanza usadas para denominar los conocimientos de naturaleza algebraica (lógica, lógica matemática o razonamiento lógico-matemático), al igual que la matemática moderna, han provocado, al parecer, la ausencia de un bloque de contenidos de álgebra en los primeros niveles educativos.

En este mismo sentido, Chimoni et al. (2018), relatan en su investigación, la importancia de comprender la noción de pensamiento algebraico temprano, en este caso realizaron una prueba que involucró la aritmética generalizada, el pensamiento funcional y las tareas de modelación, esta investigación, de corte cuantitativo se realizó con un total de 684 estudiantes.

Ahora bien, en relación con los trabajos asociados con la División. Scandiuzzi (2010); Romero y Marulanda (2015); Rojas y Ariza (2019); Gómez et al. (2016); Obando et al. (2013) se presenta esta operación como un problema que podría estar asociado a la formación docente y se resalta la necesidad de realizar procesos de investigación en los niveles educativos iniciales.

En lo referente al cálculo mental, se hace énfasis en la importancia de reconocer, aceptar y tener una nueva postura sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes y los diferentes algoritmos que ellos generan, ya que, al parecer rara vez utilizan los algoritmos que se les dan y muestran un gran interés en relación con la creación de sus propias estrategias, además, en estas investigaciones encontramos elementos que muestran el proceso de evolución de la operación división a lo largo de la historia y sus implicaciones para la enseñanza.

Por consiguiente, en cuanto a el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy), se han rastreado múltiples investigaciones que definen el ABPy como un enfoque metodológico que promueve el aprendizaje de los conceptos científicos mediante la resolución de problemas que involucran contextos y contenidos, Martí (2010); Manso y Ezquerro (2014); Langbeheim (2015); Fernández y Cabezas (2017); Domènech-Casal (2018).

En el ámbito matemático, se destacan trabajos que relacionan el ABPy y las matemáticas Escorial y de castro (2011); Rupérez y García (2012); López et al. (2013); Morales y García (2015); Flores et al. (2019). Estos proyectos se desarrollan en relación con diferentes conceptos matemáticos y apuntan al uso del ABPy como una alternativa para la resolución de problemas.

Además, encontramos el trabajo de Ogliari y Bello (2017), que trata sobre las prácticas de cocina en la escuela, donde se trabaja por medio de situaciones problema, destacando las transformaciones de proporciones y medidas recurrentes, dándole sentido al conocimiento

matemático. Este es un referente importante para nuestro trabajo, ya que, nuestro diseño de proyecto involucra las razones y las proporciones con enfoque en la covariación para la enseñanza de la división en el contexto de una actividad cotidiana como la manipulación y preparación de alimentos en la cocina.

En síntesis, los artículos encontrados hacen énfasis en la importancia de integrar la aritmética y el álgebra temprana, mostrando esta última como una herramienta de análisis y comprensión de problemas aritméticos en la básica primaria vinculados a situaciones cotidianas, además, es alentador ver artículos que muestran la importancia que tiene la articulación del ABPy en la escuela, siendo vista como estrategia que mejora el proceso de enseñanza - aprendizaje en el aula de clase y conlleva tanto a los docentes como a los estudiantes hacia unas matemáticas dinámicas. Además, en cuanto a la división, los trabajos se encuentran enfocados en los métodos de cálculo utilizados, dejando de lado el desarrollo conceptual de las operaciones básicas, incluida la división.

## **4. Marco conceptual**

En este apartado se presentan los referentes teóricos y conceptuales que fundamentan nuestro trabajo investigativo en correspondencia con los dos núcleos temáticos propuestos en la revisión de literatura. En primer lugar, exponemos algunos elementos de la estructura multiplicativa como campo conceptual para conectarlo posteriormente con la propuesta curricular y las formas de enseñar y aprender la operación división, relacionando dicha complejidad semántica, con las razones y proporciones como un posible camino para fortalecer desde los primeros años el componente numérico-variacional. Finalmente, se presenta el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) como estrategia metodológica de enseñanza.

### **4.1 Estructuras multiplicativas.**

El estudio de las operaciones básicas de la multiplicación y la división suelen ser trabajadas como una suma o resta reiterada, lo que puede dejar de lado la comprensión de la operación en su generalidad que es la que posibilita la conexión con el pensamiento variacional. En este sentido, Brosseau (1986) menciona que los niños y las niñas buscan dentro del problema que deben resolver aquellas palabras que por ausencia o presencia pueden ayudar a resolver el problema y que el valor que los niños le imprimen a estas palabras se hace mayor cuando se enfatiza en la operación de forma automática y no en el razonamiento del problema.

Según Obando (2015) esta interpretación tradicional de las operaciones como abreviación no permite ver el trasfondo conceptual de las mismas, por lo mismo se hace imperante trabajarlas bajo la concepción de estructuras multiplicativas, idea que introduce Vergnaud (1983) como un conjunto de problemas que para su solución hacen necesario el uso de operaciones aditivas y multiplicativas en las cuales se ve involucrada, por ejemplo, la división como razón.

A partir de ahora entenderemos las estructuras multiplicativas como un campo conceptual que debe ser construido. Al respecto Moreira (2002) plantea que estas estructuras son todas aquellas situaciones que son susceptibles de ser analizadas como proporciones simples o múltiples en las que se necesita aplicar las operaciones básicas, incluso combinadas, lo que hace evidente que varios desarrollos conceptuales matemáticos están relacionados con las estructuras multiplicativas, por ejemplo, el de fracción, proporción, función, división entre otros que están presentes, además, en el contexto y la vida cotidiana.

Bajo esta misma perspectiva, Botero (2006), define que las estructuras multiplicativas “hacen referencia al conjunto de situaciones que pueden ser resueltas empleando divisiones y/o multiplicaciones y es necesario abordarlas desde la perspectiva de la proporcionalidad” (p.24). Asimismo, la autora refiere la existencia de variaciones simultáneas y comparaciones múltiples cuando se consideran operaciones como la multiplicación y la división, por lo que se podría afirmar que, si estas variaciones múltiples se establecen a través de un modelo lineal que integra dos variables, se puede determinar una proporcionalidad directa simple; asunto que desde la mirada de la autora es clave para el desarrollo de la aritmética con un enfoque variacional.

Atendiendo a lo anterior, presentamos a continuación algunas consideraciones conceptuales alrededor de la enseñanza de la operación división como objeto de estudio, realizando una aproximación a las relaciones multiplicativas desde las razones y proporciones.

#### **4.2 Enseñanza del concepto de división**

Desde las propuestas del Ministerio de Educación Nacional (MEN) con respecto a las operaciones aritméticas básicas de la suma, resta, multiplicación y división, se resalta la importancia de poder trabajarlas con sentido de estructura, es decir, más allá de la adición y la



sustracción (MEN,1998)<sup>1</sup>, lo cual en concordancia con autores como Vergnaud (1983); Botero (2006); Obando (2015), implica poder darles una perspectiva desde la comprensión de estructura multiplicativa, con énfasis especial en la comprensión de las generalidades que se pueden observar al desarrollar sobretodo conceptualmente el algoritmo como un patrón.

Como complemento a lo anterior, Nunes (1997) y Bryant (1998), refieren que la operación división no aparece relacionada a la multiplicación, sino que aparece asociada a la idea de reparto, asunto que aunque aparece como una opción al trabajo de divisiones no debe limitarse al concepto de dividir únicamente por este medio; puesto que es prudente que los estudiantes busquen estrategias de resolución distintas que favorezcan la construcción de esquemas multiplicativos, incluso se propende por favorecer ambientes donde logren resolver problemas por medio de estrategias que utilizan de manera empírica; todo esto con el ánimo de generar un indicador de creatividad y facilitar los cálculos para resolver un problema bajo el entendimiento real de las operaciones y sus algoritmos, pues tal y como lo afirman Yáñez y González (1993), “un algoritmo aritmético tiene sentido cuando la operación que se pretende abreviar ha sido comprendida en su estructura por el usuario” (p.38).

Con respecto a la forma como puede ser posible la enseñanza de la operación división teniendo en cuenta los anteriores planteamientos, se propone las razones y proporciones desde la siguiente perspectiva.

---

<sup>1</sup> – Repartir: problemas de la forma Juan tiene 6 carritos y quiere guardarlos en 2 cajas. ¿Cuántos van en cada caja? En este tipo de problemas, se parte del conocimiento del tamaño total de la colección y la cantidad de grupos de igual tamaño que se debe formar con dicha colección, y, por lo tanto, se busca determinar el tamaño de cada grupo. En este sentido, se trata de repartir una determinada colección en N grupos iguales.  
– Agrupamiento o sustracción repetida: problemas de la forma Juan tiene 6 carritos y quiere organizarlos de a 2 en cada estante. ¿Cuántos estantes ocupa la colección completa? En este caso, se plantea la cantidad de elementos que deben ir en cada grupo y se pregunta por el número de grupos resultantes, es decir, se pregunta por la cantidad de unidades (grupos) que se pueden formar.

#### *4.2.1 Razones y proporciones*

Como se mencionó en párrafos precedentes, se ha privilegiado en el aula de clase el método de cálculo para resolver la operación de la división con base en repartos y particiones así como en agrupaciones y sustracciones, lo cual no implica que no existan otras formas de construir y comprender la lógica interna del algoritmo, tal y como lo señalan Ojeda y Hurtado (2018), cuando afirman que “en los problemas de tipo multiplicativo hay más que multiplicaciones y divisiones, y que, por tanto, en su enseñanza es fundamental atender a la complejidad semántica que estos proponen, la relación entre las cantidades, su estrecha relación con la proporcionalidad, las razones, y proporciones”(p.98), lo cual es punto de partida para el desarrollo del pensamiento variacional en edades tempranas.

Al respecto entenderemos el pensamiento variacional como “una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2003, p. 6).

Por tanto, al hacer referencia a procesos de covariación, el razonamiento proporcional<sup>2</sup> está estrechamente relacionado con el pensamiento variacional, lo que en un sentido más estricto evidencia que la covariación implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las variables están correlacionadas (Botero,2006).

---

<sup>2</sup>Se entiende el razonamiento proporcional en un sentido más amplio, ligado al reconocimiento de las variables, de las relaciones entre las variables y de los invariantes operatorios que ligan dicho proceso de variación (Obando, 2014, pág. 18).

Atendiendo a lo anterior, resaltamos la perspectiva propuesta por Obando (2018) cuando enuncia que los eventos o fenómenos que permiten desplegar o generar problemas multiplicativos son aquellos donde están presentes al menos dos cantidades que varían y donde la variación de una sobre la otra se muestra como condición ineludible. Por tanto, desde nuestro interés particular en el trabajo con la división como objeto de estudio, apostamos por el proceso simultáneo de enseñanza de la multiplicación y la división a través de la base conceptual del estudio de familias de razones que, al ser ordenadas conservan una regularidad que pueden ser de la forma  $2n$  veces,  $1/2n$  parte de o de la forma  $3n$  veces,  $1/3n$  parte de,  $4n$  veces,  $1/4n$  parte de ...etc. (ver figura 2).

## Figura 2

*Base conceptual de la estructura de la multiplicación y la división.*



*Nota.* Adaptado de Obando (2018)

La figura 2 expone el esquema conceptual que se pueden establecer desde la perspectiva de parte - todo entre las relaciones proporcionales directas e inversas; en la multiplicación

hablamos de  $n$ -veces de... es decir, una cantidad exactamente mayor que la cantidad más pequeña (todo en partes) mientras que en la división hablamos de la  $n$ -ésima parte de... es decir, que la cantidad más pequeña es una parte exacta de la cantidad mayor (las partes del todo), sobretodo conservando regularidades, como: doble- mitad, tercio-triple...(Obando, 2018). Visto desde esta perspectiva, se amplía la concepción de la multiplicación y la división como sumas o restas reiteradas, como un proceso de relacionar cantidades, observar patrones y reconocer el cambio.

### **4.3 Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy)**

Desde hace varios años se han generado múltiples reflexiones en relación con las dificultades asociadas a la adopción del enfoque tradicional como una opción que se continúa privilegiando en la escuela. Al respecto, se ha buscado diversificar las estrategias de enseñanza que permitan a los estudiantes a partir de sus intereses, encontrar motivación en las diferentes opciones didácticas que se presenten en la escuela; por este motivo, es necesario recalcar la importancia de las diferentes metodologías activas, entre las cuales, puntualmente, esta investigación retoma como referente el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) y sus características.

Existen diferentes definiciones y concepciones en torno al ABPy, pues los autores han llegado a clasificarlo de varias maneras con similitudes en algunos casos y marcadas diferencias en otros. Se realiza entonces un breve recorrido histórico sobre su evolución, con lo cual se busca presentar algunas de sus características y potencialidades.

Por ejemplo, Benítez y García (2012) señalan que el ABPy es: “una metodología que tiene sus raíces en el enfoque constructivista, en cuyo escenario el aprendizaje implica; un proceso constructivo interno a partir de sus conocimientos previos y reconstrucción de saberes

culturales” (p. 23). Bajo esta definición, el docente es un mediador del conocimiento que realiza constantemente reflexiones sobre su práctica para realizar las transformaciones necesarias en su metodología de enseñanza.

Por otro lado, López et al (2017) señalan que el ABPy puede ser un mediador del proceso de enseñanza, ya que:

Se basa en unas dinámicas de aula bastante diferentes a las habituales. Por esta razón, el docente debe cambiar su modo de actuar para poder gestionarlas de forma adecuada. Su trabajo deja de consistir mayoritariamente en la exposición de unos contenidos y adquiere más importancia su papel como gestor de grupos humanos. (p. 32)

Es así como los estudiantes a partir de sus intereses pueden renovar su motivación por aprender matemáticas. Por este motivo, es necesario recalcar la importancia del docente en relación con la necesidad de otorgar protagonismo a los estudiantes durante el proceso de enseñanza, característica que se encuentra dentro del ABPy y se relaciona con los procesos de voz y voto del estudiante e investigación continua, en las cuales debe ser clara la participación de los estudiantes.

Además, Domènech-Casal (2018) lo define como un enfoque metodológico que potencia el aprendizaje de conceptos científicos, siendo así una estrategia que resulta ser muy atractiva para los alumnos y si se utiliza de forma adecuada, puede ofrecer multitud de beneficios, entre los cuales se encuentra la posibilidad de relacionar la matemática con las ciencias como algo cautivador para observar también una conexión de lo que se enseña con el mundo real.

Asumiendo el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) como una estrategia integradora que pretende potenciar los conocimientos y habilidades de los estudiantes, para dar respuesta a los requerimientos de una sociedad que continuamente transforma sus prácticas y escenarios, acudimos a la propuesta del Buck Institute for Education (BIE)<sup>3</sup> el cual presenta ocho características esenciales bajo el nombre de “estándares de oro” para el diseño de proyectos con el ánimo de que las escuelas y distintas organizaciones puedan medir, calibrar y mejorar sus prácticas. A continuación, se detallan cada una de las características esenciales para el diseño de proyectos.<sup>4</sup> (Ver figura 3)

### Figura 3

*Características esenciales para el diseño de proyectos. Estándares de oro para el ABPy.*



*Nota.* Tomado de Larmer, Mergendoller y Boss (2015)

<sup>3</sup> Instituto de investigación ubicado en Estados Unidos que busca desarrollar la capacidad de los maestros para diseñar y facilitar el aprendizaje basado en proyectos de calidad y la capacidad de los líderes escolares y del sistema para establecer las condiciones para que los maestros implementen grandes proyectos con todos los estudiantes

<sup>4</sup> Adaptado y traducido de "Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction, por John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss (ASCD 2015).

Con base en las características descritas en la figura anterior, se presentan a continuación algunos elementos asociados a cada una de las características:

### ***Conocimientos y habilidades***

Una de las principales características de un proyecto bajo la metodología ABPy es que los estudiantes logren aprender los contenidos y conceptos esenciales de cada materia. Esta metodología de aprendizaje permite que los alumnos sean capaces de aplicar estos conocimientos en el mundo real, usando todos sus aprendizajes como medio para resolver problemas, responder preguntas y crear productos de gran calidad.

### ***Problema o pregunta orientadora***

El motor de un proyecto es poder tratar un problema a resolver o una pregunta a analizar, esta pregunta debe ser diseñada de modo que sea motivadora e interesante, lo cual puede hacer que los estudiantes vean sentido a lo que están aprendiendo, se dirijan a estudiar para adquirir conocimientos y así, logren resolver problemas o responder preguntas que les interesan.

### ***Investigación continua***

El proceso activo y permanente de la investigación, nos garantiza poder tener profundidad y encontrar los recursos para abordar los problemas y responder las preguntas; el ABPy parte de la investigación activa y participativa, lo cual se debe convertir en un proceso cíclico y reiterativo hasta llegar a una respuesta final que sea completa y satisfactoria.

### ***Conexión con el mundo real***

Todo proyecto debe involucrar la vida cotidiana con situaciones auténticas, situaciones que se nos hacen familiares y que nos interesan, esta característica es fundamental para la motivación y el proceso de aprendizaje en el desarrollo del mismo, por esto, al concluirlo se espera un resultado que genere transformaciones positivas en los contextos en los cuales se aplique el proyecto.

### ***Voz y voto de los estudiantes***

Involucrar a los estudiantes en el desarrollo del proyecto es primordial, por lo cual, brindar espacios donde puedan tener voz y tomar decisiones para definir tareas, diseñar productos o socializar sus avances es fundamental para que sientan la propuesta como propia y de esta manera, trabajen y se involucren más en él.

### ***Reflexión***

Para el desarrollo de todo el proyecto se deben realizar procesos de reflexión que estén asociados con lo que se está aprendiendo, cómo se está aprendiendo y por qué se está aprendiendo, esta puede darse por medio de diálogos, diarios de aprendizaje o hitos de reflexión, también puede ser un apartado específico del proyecto planteado, ya que, permite a la vez realizar ajustes y cambios, revisar errores y proponer soluciones.

### ***Critica y revisión***

Una de las principales características del trabajo bajo la metodología ABPy es la alta calidad de las tareas, la cual se consigue bajo la revisión reflexiva y el análisis crítico constante, este proceso implica no solo a los profesores, sino que también implica a los alumnos, quienes de esta manera se retroalimentan y evalúan su aprendizaje, lo cual permite mejorar sus proyectos.



### ***Producto para un público***

Poder generar un producto auténtico, concreto y tangible para un público, claramente, acrecienta la motivación y así mismo, ocasiona que los alumnos lleven a cabo un trabajo de aprendizaje de gran calidad, donde está sintetizado el desarrollo del proyecto, además, es la culminación de las fases del ABPy.

Los anteriores supuestos conceptuales son nuestra base teórica para el desarrollo del presente trabajo, para comprender la relación del pensamiento numérico-variacional con el concepto de la división a partir de las razones y proporciones como una propuesta alternativa para la enseñanza de la operación, que nos permitió fundamentar metodológicamente el proyecto propuesto y ubicar los referentes teóricos que han investigado en relación a nuestras temáticas; en conjunto con los principios del ABPy son las consideraciones a tener en cuenta en el siguiente apartado.

## **5. Metodología**

Este capítulo se divide en dos partes; la primera relacionada con el referente metodológico que sustentó el proceso de investigación, el cual se enfoca, principalmente, desde el paradigma cualitativo, Moreira (2002), descriptivo e interpretativo Serrano (1994); además, se describen los instrumentos para la recolección de la información; En la segunda parte, se detalla la metodología de enseñanza orientada desde el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) y estructurada a partir del diseño una cartilla para docentes: “Cocinando el cambio”, pensado para la enseñanza de la operación de la división en el grado segundo.

### **5.1. Metodología de investigación**

Esta investigación está orientada esencialmente por el paradigma cualitativo, tanto para su estructuración como para el análisis de la información; la selección de este enfoque se enmarca en la necesidad de describir e interpretar la información. Según Moreira (2002) el interés central de la investigación cualitativa está en la interpretación de los significados atribuidos por los sujetos a sus acciones en una realidad socialmente construida.

Adicionalmente, este trabajo es descriptivo e interpretativo. Desde la perspectiva de Serrano (1994), se afirma que es necesario presentar un informe detallado del fenómeno objeto de estudio, con el propósito de no guiarse por hipótesis preestablecidas. Ahora bien, en relación con lo interpretativo, se refiere a la importancia de realizar descripciones ricas y densas, con el propósito de identificar categorías conceptuales que permitan, en nuestro caso, atender a los objetivos de investigación definidos.

### ***5.1.1. Instrumentos de recolección de información***

A continuación, se describen los instrumentos de recolección de información, utilizados para el diseño del proyecto y que han aportado información valiosa para la identificación de categorías de análisis.

**Observación.** Según Stake (1998) “los significados de los datos cualitativos o interpretativos son los que directamente reconoce el observador” (p.60). En este sentido, la observación permite al investigador tener una mayor comprensión respecto al caso que se estudia. Conforme al grado de participación del observador, Anguera (1982) citado por Gil-Pascual (2011) la clasifica en observación no participante, participante y auto-observación.

Esta investigación, asume la observación no participante, según la cual, se registra solo lo preparado por un plan previamente construido y se puede observar sin contacto directo con el fenómeno o conducta. En el anexo A, se expone el formato utilizado.

**Escala de actitudes.** Es utilizada específicamente en nuestra investigación para indagar por las preconcepciones de los estudiantes de grado segundo frente a la operación de la división, una escala de actitudes es la selección de varios ítems que puedan constituirse en criterios fiables y válidos para medir fenómenos sociales. Pinedo (1982).

También, desde este paradigma, las descripciones y el material de análisis se pueden presentar utilizando diferentes formatos, entrevistas, narraciones, transcripciones de audio y video, imágenes, notas de campo, entre otros. En el anexo B, se expone el formato utilizado.

### ***5.1.2. Descripción del contexto***

Nuestra investigación se llevó a cabo en el Colegio Calasanz de Medellín, el cual pertenece a la orden religiosa de las Escuelas Pías o Escolapios, que tienen presencia en aproximadamente 30 países, su fundador, San José de Calasanz, comprometido con la formación integral de las y los seres humanos desde su infancia: es quien inspira el mayor principio que tiene la institución “Educación en Piedad y Letras”, la base de su modelo educativo.

Aprender a Ser, Aprender a Convivir, Aprender a Hacer y Aprender a Conocer son los pilares que fundamentan el modelo educativo del Colegio Calasanz, los cuales definen los procesos académicos y los procesos de acompañamiento, el currículo, la evaluación, la didáctica, el proyecto social, la convivencia escolar y el crecimiento personal; son reflejo de una profunda creencia en la excelencia académica y la rigurosidad del proceso de aprendizaje científico, investigativo y serio; un compromiso ético que impulsa la formación basada en el amor; una educación vocacional que desarrolla y potencia las aptitudes de los y las niñas y jóvenes y una educación espiritual que reconoce la importancia de la construcción y fortalecimiento de una identidad y personalidad propia.<sup>5</sup>

En cuanto al área de las matemáticas, la estructuración de contenidos y la definición de niveles de desempeño, de competencias, ejes temáticos y de criterios de evaluación se establecen a través del Plan General del Departamento de Matemáticas, que reconoce el estudio de la importancia de su enseñanza, puesto que brinda a los y las estudiantes posibilidades para superar dificultades y proponer soluciones, además que potencia el desarrollo de habilidades del pensamiento y de comunicación y contribuye a la comprensión del mundo.

---

<sup>5</sup> Proyecto Educativo Institucional Colegio Calasanz Medellín; Orden Religiosa de las Escuelas Pías; Provincia Nazaret, Medellín 2019

La población objeto de estudio fueron los estudiantes del grado segundo, en total 103 estudiantes de tres grupos de 34 a 36 estudiantes, con edades que oscilan entre siete y ocho años, la intensidad horaria era de 6 horas semanales en cada grupo.

### ***5.1.3. Consideraciones Éticas***

En el desarrollo de este proyecto se tendrán en cuenta los criterios éticos propuestos por Galeano (2004) los cuales están orientados a la protección de los derechos de los participantes y al mantenimiento de la confidencialidad de la información suministrada por los distintos agentes escolares. Estos criterios se resumen en los siguientes elementos:

- Selección equitativa de los sujetos: las personas para participar en el estudio serán seleccionados por razones relacionadas estrictamente con los interrogantes científicos.
- Proporción favorable del riesgo-beneficio: los investigadores se comprometen a minimizar los riesgos potenciales y maximizar los beneficios potenciales a los sujetos y a la sociedad; los beneficios potenciales son proporcionales o exceden a los riesgos. Se trabajará con el principio de no-maleficencia y beneficencia.
- Condiciones de diálogo auténtico: a investigación se asumirá como un espacio de participación en el que los agentes escolares podrán deliberar sobre sus asuntos comunes y no comunes en una interacción discursiva abierta sin ejercer ningún tipo de presión por la toma de posición alguna.
- Evaluación independiente: se acudirá a la evaluación independiente, es decir, a la revisión de la investigación por personas conocedoras apropiadas que no estén afiliadas al estudio y que tengan autoridad para aprobar, corregir o, dado el caso, suspender la investigación.

Se asumirá también la evaluación independiente por responsabilidad social, toda vez que las personas-sujetos serán tratadas éticamente y no como medios u objetos.

- Consentimiento informado: se entiende por consentimiento informado el proceso de explicitación por escrito de aquellos asuntos que conciernen al sujeto participante.

Para esta investigación se tuvieron en cuenta los siguientes documentos: acuerdo de confidencialidad y la carta de invitación a los profesores. En los anexos C y D respectivamente, se exponen los formatos utilizados.

## **5.2 Metodología de enseñanza**

El referente metodológico para diseñar el proyecto es el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) y por ende la cartilla para el docente “Cocinando el cambio” es una propuesta de enseñanza para trabajar el concepto de la división en grado segundo, que esperamos se constituya en un aporte significativo para la enseñanza de la operación, que tradicionalmente se ha enfocado en el pensamiento numérico, alejada de contextos reales y de la concepción de estructuras multiplicativas, es por lo anterior, que este proyecto se propone trabajar a partir de razones y proporciones, con un enfoque en el pensamiento variacional e involucrando una tarea cotidiana, la de cocinar, como una oportunidad para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la división.

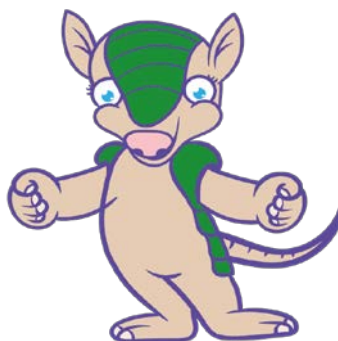
A continuación, se presentan las principales características de la cartilla diseñada para el docente; el proyecto toma su nombre de “Cocinando el cambio” porque recoge el enfoque de tres principales aspectos:

- El pensamiento variacional, el cual es necesario para la comprensión de la variación, el cambio y la generalización de patrones.
- Las razones y proporciones como una propuesta alternativa de la enseñanza de la operación división en la tarea cotidiana de cocinar.
- La reflexión y la crítica sobre la enseñanza de la operación división, para poder aportar en propuestas que contribuyan a transformaciones concretas en el aula.

Por su parte el personaje que acompaña a el docente en el desarrollo del proyecto es “Pangui” (ver figura 4) se elige debido a que los pangolines son el animal que representa en el año 2021 el proyecto ambiental del Colegio Calasanz de Medellín, como una posibilidad para trabajar y complementar el proyecto de forma interdisciplinar; adicionalmente, el desarrollo del proyecto siempre tiene presente la cocina como el espacio donde se trabajaría y por lo mismo se realiza en el marco de una constante relación con la acción de cocinar.

#### **Figura 4**

*Personaje Pangui*



*Nota.* El pangolín es un armadillo que personifica a Pangui en la cartilla, elaboración

propia

Por último, el diseño de la cartilla se reconoce además como un material que puede utilizar el docente para trabajar en el aula los siguientes Derechos Básicos de Aprendizaje definidos por el MEN en 2016:

- Interpreta, propone y resuelve problemas aditivos (de composición, transformación y relación) que involucran la cantidad en una colección y la medida de magnitudes (longitud, peso, capacidad y duración de eventos) y problemas multiplicativos sencillos.
- Utiliza diferentes estrategias para calcular (agrupar, representar elementos en colecciones, etc.) o estimar el resultado de una suma, resta, multiplicación o reparto equitativo.
- Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas.




La cartilla “cocinado el cambio” se compone de los siguientes “ingredientes” (ver tabla 4) que son los aspectos y contenidos que involucra el desarrollo de la actividad que se propone en el marco del proyecto. A continuación, detallamos cada uno:




**Tabla 4**

*Contenidos que constituyen el desarrollo de la cartilla*

<b>Ingredientes</b>		
<b>Ingrediente /nominación</b>	<b>Descripción</b>	<b>Desarrollo</b>










<p>Aspectos críticos y reflexivos</p> <p>Gramo de reflexión</p> 	<p>En este apartado se busca que el docente pueda generar reflexiones en relación con la enseñanza de la división y concepciones alternativas.</p>	<p>A partir de preguntas, datos y lecturas que puedan generar reflexiones sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fragmentación de la aritmética y el álgebra.</li> <li>- Ausencia de la enseñanza enfocada en el pensamiento variacional en los primeros grados.</li> <li>- Énfasis en el algoritmo tradicional.</li> <li>- Concepciones alternativas.</li> <li>- Actitudes de los estudiantes.</li> <li>- Enseñanza alejada de situaciones reales como cocinar.</li> </ul>
<p>Aspectos epistemológicos</p> <p>Tazón de Historia</p> 	<p>En este apartado se presentarán datos históricos que pueden contribuir a entender la construcción del concepto división a través del tiempo.</p>	<p>Datos históricos sobre:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Signos de la división</li> <li>- Números fraccionarios</li> <li>- La división antigua (Egipcios)</li> </ul>
<p>Aspectos metodológicos</p> <p>Mezcla de metodología</p> 	<p>En este apartado se busca ofrecer alternativas y orientaciones para el desarrollo del proyecto</p>	<p>Por medio de:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Activación de saberes previos</li> <li>- Presentación de conceptos</li> <li>- Ejemplos.</li> </ul>


<p>Contenido matemático</p> <p>Cucharada matemática</p> 	<p>Este apartado desarrolla conceptualmente desde el enfoque del pensamiento variacional el contenido de la cartilla</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Razones</li> <li>- Proporciones</li> <li>- Variación</li> <li>- Operación de la división</li> </ul> <p>A través de ejemplos en la cocina.</p>
<p>Contenido complementario</p> <p>Gólicas de aderezo</p> 	<p>En este apartado se busca complementar el desarrollo del proyecto con actividades que no son estrictamente matemáticas.</p>	<p>Este material está enfocado en el trabajo en la cocina y en complementar actividades. Manipulación de alimentos en la cocina</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vestirnos como chefs</li> <li>- Describir los ingredientes y sus beneficios nutricionales.</li> </ul>
<p>Voz y decisión del docente</p> <p>Pizca de tu gusto</p> 	<p>Este apartado busca generar un espacio para que el docente que desarrolla el proyecto participe de forma activa, proponiéndole como proceder o qué herramientas puede usar.</p>	<p>Se sugieren lecturas, videos, canciones y actividades que pueden ser desarrolladas por el docente.</p>

Ahora, teniendo en cuenta los estándares que constituyen la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos, detallamos (ver tabla 5) la “preparación” de cada momento en el que se desarrolla el proyecto en la cartilla del docente.

**Tabla 5***Consideraciones en el marco del ABPy.*

<b>Preparación</b>		
<b>Preparación</b>	<b>Nominación</b>	<b>Descripción</b>
Conocimiento y habilidades	Pela tus conocimientos 	En los espacios donde aparezca este componente, el trabajo involucra los conocimientos y concepciones previas de los estudiantes, sus habilidades y capacidad para solucionar situaciones de la vida real, teniendo en cuenta, además, el DBA asociado.
Problema o pregunta orientadora	¿Qué quieres cocinar? 	En los espacios donde aparezca este componente, se está planteando o dando solución a las preguntas orientadoras que guían el desarrollo del proyecto.
Conexión con el mundo real	Afila tu experiencia 	En los espacios donde aparezca este componente se involucran contenidos relacionados a la vida cotidiana.

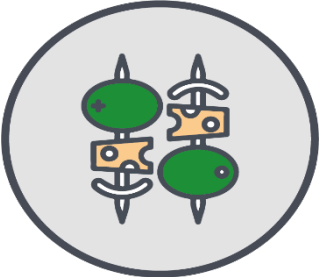
Crítica y revisión	<p>Cocción</p> 	<p>En los espacios donde aparezca este componente se presentará un espacio para generar crítica y revisión reflexiva para retroalimentar, evaluar y mejorar.</p>
Reflexión	<p>Lava tus herramientas</p> 	<p>En los espacios donde aparezca este componente se viabiliza poder realizar reflexión también realizar ajustes y cambios, revisar errores y proponer soluciones.</p>
Investigación continua	<p>Busca tu receta</p> 	<p>En los espacios donde aparezca este componente se propone realizar consultas, buscar fuentes para poder desarrollar el proyecto.</p>
Producto para un público	<p>Sirve tu plato</p> 	<p>En los espacios donde aparezca este componente se estará trabajando sobre el producto.</p>



<p>Voz y voto del estudiante</p>	<p>Degustación</p> 	<p>En los espacios donde aparezca este componente se brindarán espacios donde puedan tener voz y tomar decisiones para definir el desarrollo del proyecto.</p>
----------------------------------	--	--

Por último, se presentan los “platos” que componen el proyecto (ver tabla 6) en los que se desarrollan las fases que se proponen a partir de explicaciones y guías que el docente debe brindar a sus estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas, estas deben ser consignadas en una bitácora que será el producto entregable que se presenta a un público.

**Tabla 6**

*Desarrollo del proyecto por fases*

<p><b>Platos</b></p>	
<p><b>Plato de Entrada</b></p> 	<p>En este apartado se trabajan las formas alternativas de resolver situaciones que involucran la división, los saberes previos de los y las estudiantes y las actitudes para abordar la operación de la división.</p>
<p><b>Plato Fuerte</b></p>	<p>En este apartado se brindan las herramientas para abordar conceptualmente las razones, proporciones y covariación</p>

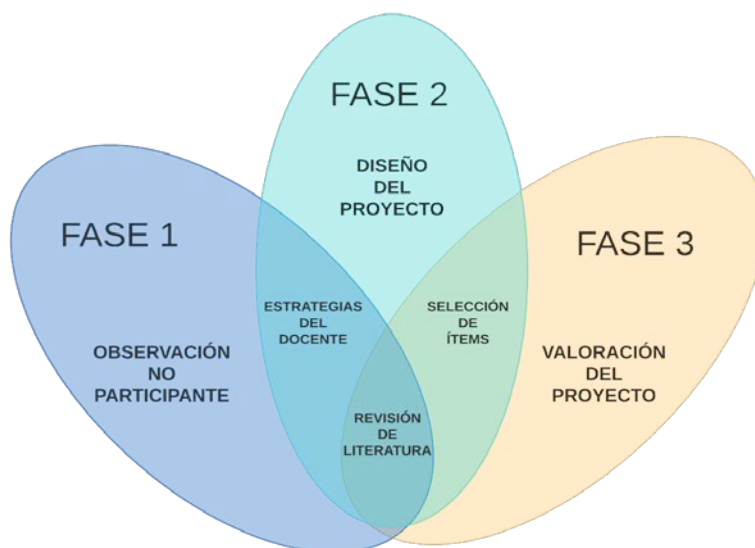
	<p>ligados a la operación de la división y a la actividad de cocinar.</p>
<p><b>Postre</b></p> 	<p>En este apartado se termina de construir el producto para un público donde el docente guía a sus estudiantes a la creación de recetas.</p>

## 6. Resultados y Análisis

En este apartado se presentan los principales resultados producto del proceso de observación y del posterior diseño de un proyecto para la enseñanza de la operación división, el cual involucró un conjunto de actividades en el contexto del trabajo en la cocina y se basó en la identificación de problemáticas asociadas con la enseñanza de la división en la básica primaria, específicamente, para grado segundo. La estrategia de análisis se centró en la identificación de información que sirviera como sustento para el diseño de una cartilla para maestros.

Los objetivos de la cartilla “Cocinando el cambio” están en concordancia con los objetivos específicos de esta investigación y, en su conjunto, permitieron dar respuesta al objetivo general.

Ahora, para el proceso de categorización y codificación que permitieron el posterior análisis e interpretación de los datos cualitativos, se utilizaron diferentes categorías atendiendo a los temas principales planteados en este estudio en relación con la operación división y se realizaron procesos de triangulación con los referentes teóricos rastreados en la revisión de literatura. El proceso de análisis se llevó a cabo atendiendo a una secuencia de fases que se definen (ver figura 5) y fue un proceso de retroalimentación constante entre las tres fases.

**Figura 5***Análisis por fases*

### 6.1 Fase 1 Observación no participante.

En esta fase se pretendía identificar estrategias de enseñanza que se suelen utilizar para acercarse a los estudiantes de la básica primaria, específicamente, en el colegio Calasanz de Medellín, grado segundo, a la comprensión de la operación división, lo cual se relaciona con los objetivos específicos. Para lo anterior, se utilizó el software Atlas. Ti (V9.0) y se siguió el proceso que se describe a continuación:

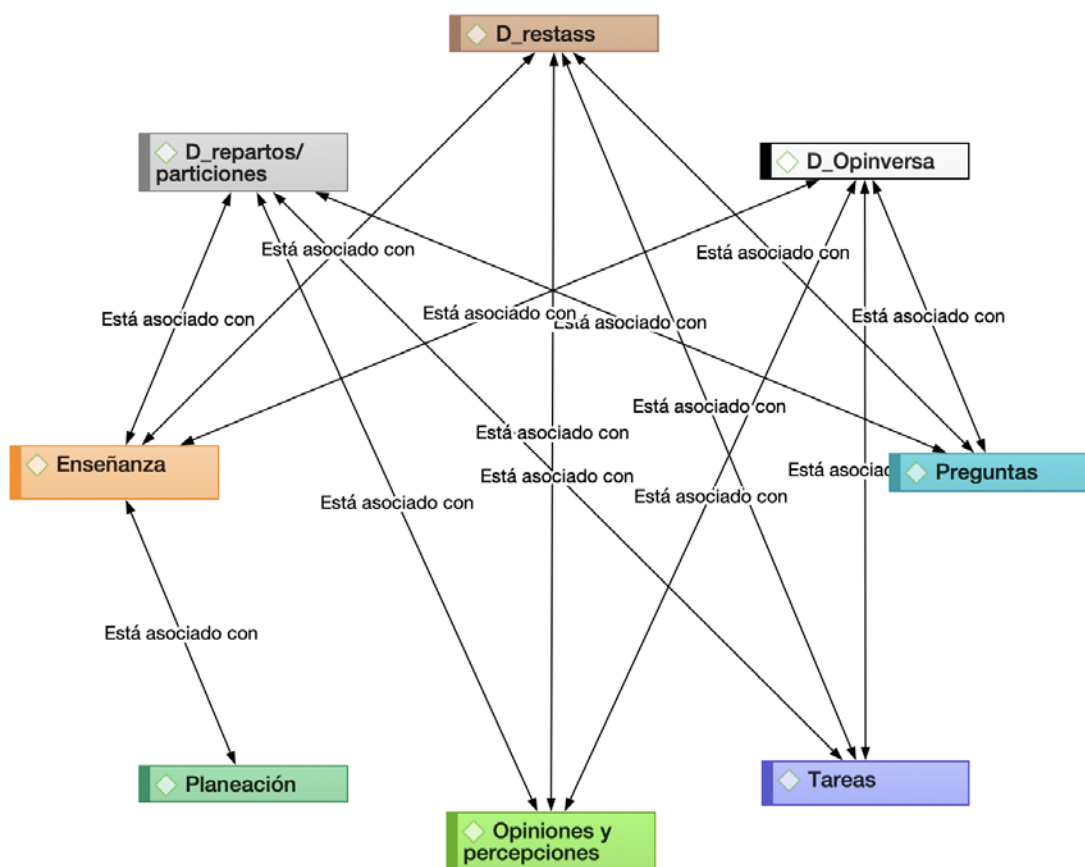
- Organización de los documentos en el Software: formato de observación, transcripción de entrevistas, bitácoras y transcripción de las clases.
- Codificación abierta donde se ubican las correspondientes citas y códigos.
- Codificación axial, donde a partir de la codificación abierta se organizaron grupos de códigos, memos, grupos de memos y redes.
- Se establecieron relaciones entre el enfoque analítico y la experiencia de los participantes.



En la siguiente red (ver figura 6), se presentan los códigos que orientan y son utilizados para el proceso analítico.

**Figura 6**

*Relaciones analíticas.*



En relación con el proceso de enseñanza se presentan a continuación los hallazgos obtenidos para tres categorías emergentes durante el proceso de observación: la enseñanza de la división como operación inversa, como repartos y particiones y como restas sucesivas.

Adicionalmente, se detallan algunos elementos asociados a la planeación, algunas opiniones, percepciones y preguntas por parte de los estudiantes y la docente y tipos de tareas implementadas durante el proceso. A continuación, se detallan estos elementos.

### ***Enseñanza de la división como operación inversa.***

La primera estrategia identificada durante el proceso de observación se relaciona con la enseñanza de la división como operación inversa de la multiplicación, lo cual está en correspondencia con lo expuesto por Botero (2006) quien afirma que “esta se presenta al finalizar la unidad correspondiente a la multiplicación, informando a los estudiantes que es la operación inversa a la que acaban de estudiar y aplicándola en ejercicios de repartición, para enseñar luego el algoritmo, y a continuación, resolver problemas que implican una división” (p.37).

Al respecto, durante el proceso de enseñanza de la docente cooperadora, se pudo identificar mediante el proceso de observación en el aula de clase, expresiones como:

- *“El que sabe muy bien las tablas de multiplicar, aprende a dividir muy bien, vamos a trabajar a la par la multiplicación y la división, la división es la operación inversa de la multiplicación”.*
- *“La operación contraria o inversa a la división es la multiplicación, para encontrar el resultado de una división debemos multiplicar y realizar las divisiones encontrando el resultado con la multiplicación”*

### **Figura 7**

#### *Operación inversa a la multiplicación*

Realizar las divisiones encontrando el resultado con la multiplicación.

Ejemplo:

$$12 \div 4 = 3 \quad \text{porque} \quad 3 \times 4 = 12$$

$$8 \div 2 = 4 \quad \text{porque} \quad 4 \times 2 = 8$$

*Nota.* Tomado de grabación de clase

Lo anterior, se corresponde con acciones concretas del proceso de aprendizaje de los y las estudiantes, quienes manifestaron explicaciones asociadas a esta forma de comprender la división en diálogos con la docente y para diferentes situaciones de enseñanza.

En la tabla 7, se presentan algunas situaciones y su descripción, las cuales se presentan y están asociadas a una letra que indica la intervención de alguno de los estudiantes en particular.

**Tabla 7**

*Explicaciones de los estudiantes*

<b>Situación</b>	<b>Descripción</b>
<p>16 / _ _ = 4, buscamos un número que multiplicado por 4 sea igual a 16 ¿cuál es este número?:</p>	<p><b>Alumno O:</b> “Profe, yo le respondí, en la tabla del 4, 4 por 4 sería 16, lo mismo que sería el 4 por 4”.</p>
<p>24 / _ _ = 8, buscamos un número que multiplicado por 8 sea igual a 24. ¿Cuál es este número?:</p>	<p><b>Alumno R:</b> “Mira, yo lo primero que hice, vi que 24 dividido X era 8, entonces empecé a buscar todos los dígitos (múltiplos) con 8 que me dieran algún número para dividirlo en 24, así que me dio 3, porque 8 por 3 es 24”.</p> <p><b>Alumno S:</b> “Profe, cuando yo vi que la respuesta era 8, yo hice 8 por 3 que me daba 24, entonces supe que era el 3.”</p> <p><b>Alumno T:</b> “Profe, yo lo hice, yo estaba con la tabla del 8, entonces yo dije en mi mente 8, 16, 24 entonces le di ahí y era correcto”.</p>
<p>Salome tiene 17 dulces para dar a 2 niños ¿cuántos dulces le puede dar a cada uno?</p>	<p><b>Alumno F:</b> “Profe, mira, primero vi todas las respuestas, no sé porque hice eso, pero primero vi todas las respuestas, una decía que me sobraba 1 y daba 16, la pregunta decía le puedo dar a cada niño 8</p>

	<p>dulces, si tiene 17 dulces y se los tiene que dar a dos niños, entonces 8 más 8 es 16, ¿va a sobrar 1?, sí, entonces así lo hice”.</p> <p><b>Alumno B:</b> “Yo como lo hice, primero hice como el compañero que miro todas las respuestas y después hice 4 por 4 es 8, entonces si 4 por 4 es 8 sobra 1.</p> <p><b>Profesor:</b> 4 por 4 no es 8”.</p> <p><b>Alumno B:</b> “Perdón 4 por 2 es 8 entonces así.”</p> <p><b>Profesor:</b> B, pero, ¿por qué hiciste 4 por 2?</p>
<p>Si Jerónimo reparte 10 manzanas entre Andrés, Celeste y María, ¿cuántas manzanas reciben cada uno? ¿sobran manzanas?</p>	<p><b>Alumno D:</b> “Profe, yo ahí me di cuenta que eran 3 niños y como yo sé mucho la tabla del 3, empecé a averiguar 3 por 1 es 3 y así, hasta llegar que hay 3 niños y 3 por 3 es 9, así que a cada niño le da 3 y queda 1 manzana.”</p> <p><b>Alumno S:</b> “Profe, yo lo primero que hice fue que vi que el primer problema era 10 cosas entre 3, porque había 3 niños y 10 manzanas, así que hice casi lo mismo que D empecé a multiplicar 3 por 3 y me daba 9, sobraba 1, entonces empecé a ver los otros resultados a ver si sobraba 1, a ver si sobraba 1 y en ninguna sobraba 1, en la única que si sobraba era la última, entonces 3 por 3 es 9 y sobra una manzana, son 10.”</p>

En este sentido, en los procedimientos realizados, descritos y explicados por los estudiantes para resolver los diferentes problemas propuestos, podemos evidenciar que logran desarrollar técnicas de división como operación inversa, tal y como lo afirma Andonegui (2006) “si en la multiplicación  $4 \times 6 = 24$  ocultamos uno de los factores:  $4 \times ? = 24$  y deseamos obtener su valor, procedemos a la división  $24: 4 = 6$ . Análogamente, la interrogante  $24: ? = 6$  nos remite

para su respuesta al conocimiento de la multiplicación  $4 \times 6 = 24$ . En este sentido, ambas operaciones “funcionan” como inversas una de la otra” (p.8).

Ahora, recordamos a continuación la aparición de un ejemplo concreto relacionado con la mezcla de factores cuando se divide que pudo ser evidenciada en las observaciones que tiene concordancia con lo planteado por el autor:

$$\text{Ejemplo: } 28 / 7 = 4 \text{ porque } 7 * 4 = 28$$

Esta fue la principal estrategia utilizada por la docente para la enseñanza de la división, donde atribuye el resultado y la explicación directamente a la operación de la multiplicación., (Ver gráfico Sankey)

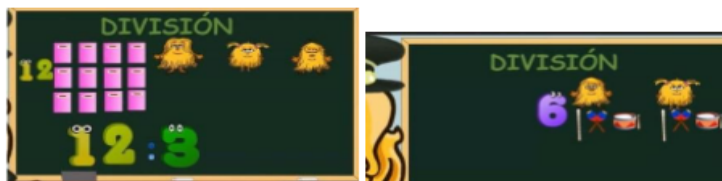
***Enseñanza de la división como repartos y particiones.*** Durante el proceso de enseñanza se detectaron expresiones que ponen de manifiesto que la división se enseña con base en procesos de reparto y partición:

- *“dividir es lo mismo que repartir las cantidades por partes iguales” o “repartir una cantidad dada entre cierto número de personas”*

### **Figura 8.**

#### *División por repartos*

- **Ejercicio:** 12 entre 3 es igual a 4. (Para dividir solo se deben repartir los objetos)



En este sentido, en la tabla 8, se recogen algunos ejemplos a modo de evidencia de las interacciones entre la docente y los estudiantes, al abordar la división desde esta perspectiva.

**Tabla 8**

*Interacción docente-estudiante.*

Situación	Descripción
<p>Javi tiene 27 fotos en cada página de su álbum le caben 3 fotos ¿cuántas páginas puede llenar?:</p>	<p><b>Alumno C:</b> “Yo me di cuenta de la respuesta porque, yo vi la división y empecé a ver en cuál de las tres respuestas era como tenía la división. El 27 en el dividendo y el 3 en el divisor, entonces ahí me di cuenta que era la primera”.</p> <p><b>Alumno D:</b> “Pues yo me di cuenta que era la primera porque si tú sabías la tabla que era, sabías cual era la respuesta correcta, porque a la primera no le sobra nada”.</p> <p><b>Alumno E:</b> “Mira, yo lo hice así, primero hice la operación de arriba que era 27 dividido entre 3 y vi que cada una (opciones de respuesta) no tenía ese coso (dividendo y divisor) y esa cosa (la división) me dio 9 y entonces Javi puede llenar 9 páginas de su álbum en todas, la tercera estaba descartada porque salían 7 y además daba un número casi mayor que el dividendo de la primera, lo mismo con el otro, así que la única que me quedaba era la primera, así que la hice”.</p>
<p>Manuela tiene 18 peces para repartir en 3 peceras, ¿cuántos peces quedarán en cada pecera?:</p>	<p><b>Alumno A:</b> “Profe, literalmente, yo el truco que hice con el problema pasado, literalmente usé el mismo truco de ver el divisor y el dividendo y ahí mismo supe cuál era la respuesta”.</p> <p><b>Profesor:</b> “No lo llames truco, porque no es un truco, llámalo procedimiento, porque es el procedimiento que tú estás utilizando para resolver las diferentes preguntas”.</p> <p><b>Alumno F:</b> “Profe, yo lo hice, o sea, 18 dividido en 3 y de la tabla del 3 para llegar a 18 es 6, entonces yo puse el 6 y así lo resolví”.</p> <p><b>Alumno G:</b> “Profe, en la tabla del 3, si uno multiplica 3 por 6 a uno le da 18, entonces 18 menos 18 da 0, entonces ya podíamos saber que era la última, porque las otras no coincidían”.</p> <p><b>Alumno H:</b> “Profe, yo lo resolví como si 18 peces (Dividendo), ese sería, entonces yo puse, vi en cada cuadrito que dijera 18 dividido entre 3, porque el primero no daría, el</p>

	<p>segundo tampoco y el tercero sí. Entonces, yo vi, es este, porque dice 18 entre 3 y la pregunta dice, Manuela tiene 18 peces para repartir entre tres peceras”.  <b>Alumno B:</b> “Eso fue lo que yo hice”.</p>
<p>Juana tiene 20 bolas de cristal y las reparte en partes iguales en 5 recipientes ¿cuántas bolas de cristal coloca en cada recipiente?:</p>	<p><b>Alumno B:</b> “Profe, la hice mal, me equivoqué”.  Profesor: “¿por qué te equivocaste?”.  <b>Alumno B:</b> “Es que empecé a contar y yo contando pensé que eran como 5 bolas (Cociente), así que le di”.  Alumno D: “Profe, allá el compañero dijo 20, entonces yo me acordé que 5 por 4 es 20, entonces así fue que la hice”.  <b>Alumno I:</b> “Yo la hice, 20 dividido 5 y me daba 5 por 4 entonces hice y me dió y ya luego me dio fue con el 20 que hay ahí 4, lo resté, me dieron 2 y ahí me quedan 20 porque con él de ahí me queda 0, entonces serían 20 y como 5 por 4 me da 20, entonces me queda cero”.  <b>Alumno J:</b> “Profe, yo vi que decía que lo repartía (Dividendo) en 5 partes iguales (Divisor) y en la tabla del 5 para llegar a 20 es 4 (Cociente), entonces me di cuenta que había que poner 4, entonces que eran 4 los que repartió”.</p>
<p>Santiago tiene 15 estrellas y le quiere dar 3 estrellas a cada niño, ¿para cuántos niños le alcanza?:</p>	<p><b>Alumno L:</b> Profe, es que yo hago la operación y nada, es que yo lo hago con las rayitas y los baldes, entonces empiezo a repartir y como yo tengo que contar para ver cuántos me da, pues, cuántos repartí, no me dejó, se me acabó el tiempo”.  <b>Profesora:</b> “Pero recuerda que con las tablas de multiplicar si te las sabes ya no tienes necesidad de repartir”.  <b>Alumno L:</b> “Profe, si te sabes las tablas es muy fácil”.</p>

En la tabla anterior, podemos observar que el propósito de la docente es que los estudiantes resuelvan los ejercicios por medio de repartos, lo cual solamente se presenta en una ocasión, en donde vemos claramente que el estudiante comprende esta estrategia y hace utilidad de ella, aunque también deja claro que hacerla de esta manera conlleva mayor duración.

Por lo tanto, aunque la idea era que resolvieran por medio de repartos, muy pocos lo hacían por esta vía, ya que, la mayoría prefería utilizar las tablas de multiplicar para llegar a la respuesta de una manera más rápida, incluso, en una situación, la profesora dice: *“pero recuerda*

*que con las tablas de multiplicar si te las sabes ya no tienes necesidad de repartir”* atribuyendo de esta manera un reconocimiento más relevante a la división como operación inversa.

Cabe destacar que, esta fue la segunda estrategia más usada por la docente, en la cual encontramos resultados satisfactorios y algunas respuestas que evidencian el desarrollo del procedimiento correctamente.

***Enseñanza de la división como restas sucesivas.*** Durante este proceso de enseñanza se detectaron expresiones que ponen de manifiesto esta forma de enseñar la división, por ejemplo:

- *“Las restas sucesivas son la segunda forma como aprendimos a resolver divisiones, contamos las veces que restamos hasta llegar a cero y ese es el resultado”.*
- *“Recuerden que es restando hasta llegar a cero”.*
- *“¿Cuántas veces restamos 4 a 32? Restamos 8 veces, entonces 32 dividido 4 nos da 8 o 32 repartido entre 4 es 8”.*

Podemos resaltar que, aunque esta es una alternativa trascendental, no tomó mucha relevancia, puesto que, al abordar la división desde esta perspectiva solo se evidenció interacción con un estudiante, del cual identificamos expresiones como:

- *“Profe, yo resté 10 menos 3 es igual a 7, 7 menos 3 es igual a 4 y 4 menos 3 es igual a 1, entonces son 3 y sobra 1”.*

En relación con lo anterior, notamos que el estudiante aplica este procedimiento de manera clara y efectiva, por lo cual logra buenos resultados, pero no era una tendencia general, ya que, se veía más preferencia por las alternativas que no necesitan de la repetición constante del mismo proceso, eligiendo así procedimientos que privilegian la división como operación inversa.

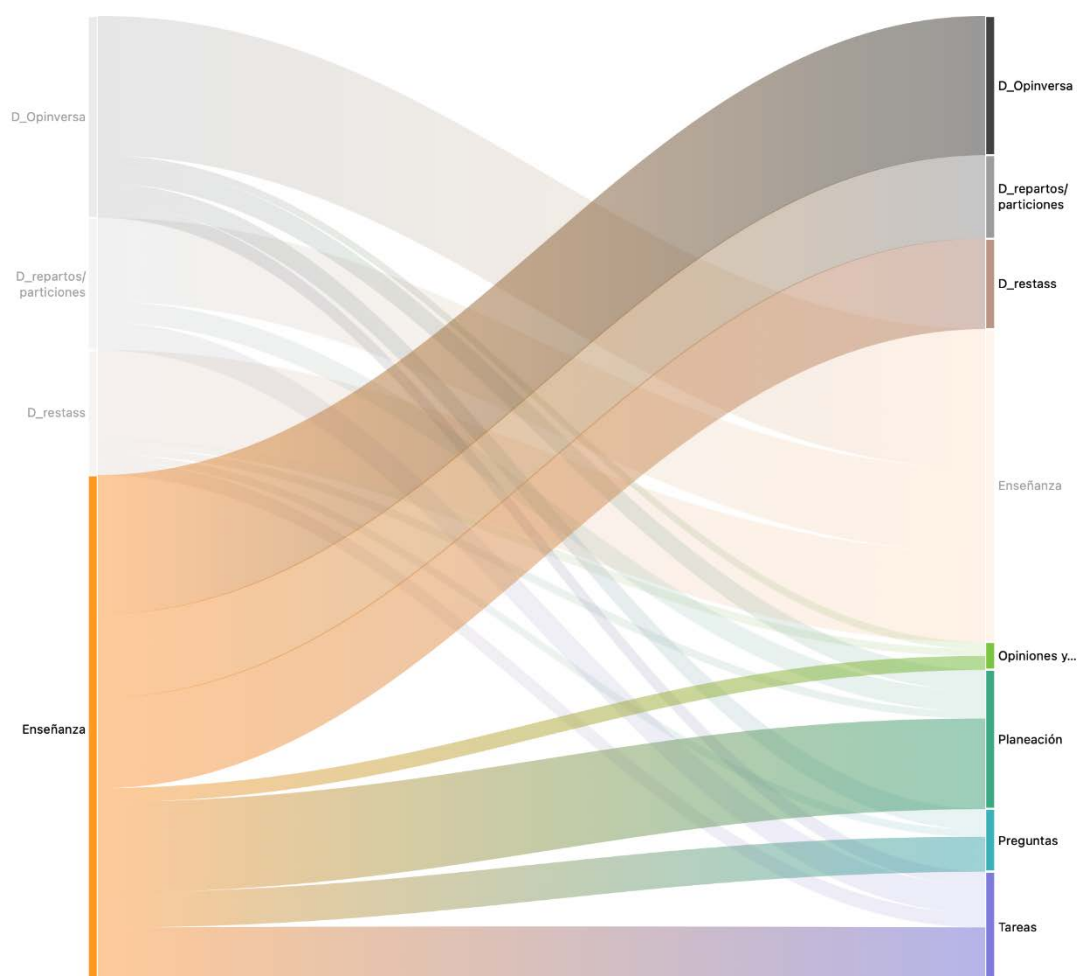


A manera de conclusión, de acuerdo con el diagrama Sankey (Ver Figura 9) podemos observar que la estrategia más utilizada fue la división como operación inversa a la multiplicación, así mismo, podemos identificar que para la planeación se privilegiaron los videos, los libros de texto y las imágenes de Word.

Por último, en la categoría de tareas se evidencia la prioridad dada al libro de texto, donde para la enseñanza de la división, los estudiantes simplemente son dirigidos a páginas concretas de este y, además, reciben instrucciones precisas para resolver ejercicios sin brindar la posibilidad de interactuar o discutir los ejercicios resueltos.

## Figura 9

*Diagrama Sankey*



Conviene destacar, que de acuerdo a las expresiones utilizadas por la maestra durante el proceso de enseñanza (ver tabla 9) se evidencia una centralización en el aprendizaje mecánico de la multiplicación como estrategia que prevalece para el aprendizaje de la operación división, se puede decir que la enseñanza de la división tiene como objetivo adquirir y dominar una serie de pasos que se deben repetir hasta llegar al resultado, privilegiando la mecanización y convirtiéndose más en una habilidad que en comprender el proceso y sus diferentes reglas.

**Tabla 9**

*Expresiones*

<b>Descripción</b>	
<p>“El que sabe muy bien las tablas de multiplicar, aprende a dividir muy bien, vamos a trabajar a la par la multiplicación y la división, la división es la operación inversa de la multiplicación”.</p>	<p>La profesora empieza a resolver cada una de las divisiones para que los alumnos revisen cuales tienen buenas y cuales tienen malas para que las rectifiquen.</p>
<p>En relación con la simbología utilizada para representar la división:</p> <p>“El símbolo más utilizado en Colombia es (<math>\div</math>), además, que este otro símbolo se utiliza en otros países (<math>:</math>) y el último es el que más vamos a utilizar (<math>\_</math>)”.</p>	<p>Para hacer la primera división, tengo que buscar un número que multiplicado por 2 me de 16, entonces ponemos 8, porque <math>2 \times 8</math> es igual a 16 y restamos <math>16 - 16</math> es igual a 0. Ahora, ponemos el 16 como dividendo, el 2 como divisor, el 8 como cociente y el 0 como residuo.</p>
<p>"Aquí nos presentan el X como un *, en otros países el * significa ``X”.</p> <p>El símbolo de la división es llamado “cajita” y en otras ocasiones “casita”, procedimiento que podría causar algo de confusión en los alumnos.</p>	<p>Repaso de las tablas de multiplicar.</p> <p>Repaso de las tablas (6, 7, 8, 9). (2da clase)</p> <p>Vamos a repasar las tablas (3era clase)</p> <p>Se presentan los vídeos de las tablas del (6, 7, 8, 9) donde todas se resuelven por medio de canciones y rimas. (4ta clase consecutiva).</p>
<p>Siempre que queramos calcular la mitad de un número, debemos dividir ese número entre 2. Si queremos sacar un tercio, debemos dividir</p>	<p>Aquí nos dan las divisiones de forma vertical, las vamos a organizar de forma horizontal y las vamos a resolver en el cuaderno haciendo</p>

el número entre 3 y si queremos sacar un cuarto, debemos dividir el número entre 4.	la "casita" no con el signo $\div$ .
---	--------------------------------------

De igual manera, en la categoría de opiniones y percepciones encontramos diversos enunciados sobre la operación división que se fueron creando a través del desarrollo de las clases y sobre todo de las estrategias que utilizó la profesora durante las mismas.

Por ejemplo, durante el desarrollo de una de las clases de matemáticas, se presentó un ejercicio, en el cual debían desarrollar una división como resta sucesiva, cuando la profesora se aseguró de que todos habían terminado, prosiguió a resolver el ejercicio y un estudiante al observar la forma en que la docente había desarrollado la operación comentó: *“profe, es que yo lo hice diferente a ti”*, esto debido a que el estudiante realizó las restas de manera vertical y no horizontal como la profesora lo hace habitualmente, finalmente la clase concluyó con una opinión personal en la que ella aseguraba que: *“en segundo y tercero van a dividir por medio de la resta, en cuarto ya les van a quitar la resta”*.

De la misma, se encontraron algunas expresiones negativas referente a las diferentes reacciones causadas en los estudiantes debido a las estrategias utilizadas por la profesora, donde encontramos expresiones como:

- *“Profe, ya me había preocupado, ya me tiene con dolor de cabeza tanta matemática”*.
- *“Profe, yo no quería esta clase”*.
- *“Profe le voy a decir una cosa, yo aprendo más matemáticas porque tengo una profesora que me enseña más, viene todos los días a las 5”*.

Para concluir lo referente a esta categoría, también traemos a colación una afirmación de la docente en la que menciona que: *“la división como operación inversa de la multiplicación es la*

*que van a utilizar siempre, hasta en la universidad*” lo cual podría significar una predisposición a la hora de enfrentarse a problemas que involucren la división que desplacen los otros procedimientos aprendidos o aquellos que se generan de forma alternativa.

Con respecto a la planeación, actividad que podría considerarse como una de las más importantes, teniendo en cuenta que planear significa: elegir, definir opciones y, sobre todo, proveer los medios necesarios para que los estudiantes alcancen los objetivos propuestos durante el desarrollo de las clases, considerando que, esto genera un ambiente más dinámico para el aprendizaje.

Por este mismo motivo, Moreira (2005) menciona que “la utilización de materiales diversificados, y cuidadosamente seleccionados, en lugar de la centralización en libros de texto, es también un principio facilitador del aprendizaje significativo crítico” (p.90.) En nuestro ejercicio lo mencionado anteriormente no se percibe, debido a que encontramos una serie de estrategias y recursos repetitivos, ligados al libro de texto, imágenes y sobre todo a los videos, donde el libro de texto de manera especial, era la herramienta con la que se guiaba cada clase, las imágenes en algunas ocasiones eran simplemente adornos y los videos utilizados, presentan información descontextualizada y algunos personajes (vampiros y burros) y objetos (cerebros, ojos y esqueletos) con los cuales ejemplifican los ejercicios y presentan las tablas de multiplicar, donde encontramos expresiones que generan miedo por ejemplo: *“hoy le voy a enseñar la tabla más difícil (tabla del 9)”*, *“¿Cuánto nos darían 9 ojos por 1 cerebro?”* .

A continuación, en la tabla 10, se hacen explícitos algunos de los recursos utilizados por la profesora durante la planeación y el desarrollo de las clases y su frecuencia de uso en relación con las doce observaciones registradas.

**Tabla 10***Recursos y frecuencia.*

<b>Recursos utilizados</b>	<b>Frecuencia de uso</b>
Libros de texto	<b>6</b>
Imágenes / Editor de texto Word	<b>7</b>
Video.	<b>9</b>
Quizziz	<b>1</b>

Retomando todo lo anterior, la profesora, se basa la mayoría de ocasiones en el libro de texto y solamente hace utilidad del Quizziz en una ocasión aislada, lo que deja en evidencia que hace falta diversificar las estrategias de enseñanza, lo cual va en contravía de lo que plantea Moreira (2005), que defiende que la diversificación de materiales instruccionales que puedan sustituir al libro de texto puede ser una ventaja en el aula, lo cual no significa excluir el libro, sino entenderlo como uno de tantos materiales, además como se argumentó en el planteamiento de problema del presente trabajo puede ser una de las razones por las cuales existen algunas dificultades en la enseñanza.

Diversificar las metodologías de enseñanza, en este caso específico, por medio del ABPy puede ser entonces la forma para generar espacios de participación y de comunicación entre estudiantes y docentes, donde se logre guiar la investigación continua, motivados por el interés, para encontrar respuesta a las preguntas y solución a las necesidades.

Por otra parte, las preguntas son muy importantes durante el proceso de enseñanza, ya que, según Muñoz et al. (1996) “las preguntas actúan como generadores y organizadoras del

saber escolar. Así, éstas despiertan nuestro deseo de conocer cosas nuevas, nos ayudan a reflexionar sobre el propio saber y el proceso de aprendizaje. Las preguntas, en definitiva, dan sentido a la educación escolar” (p.73). Por esto, en nuestro ejercicio de observación se le ha dado importancia a la siguiente lista de preguntas que son generadoras de conocimiento y guían el aprendizaje del estudiante.

- *¿Sí era así?*
- *¿Qué es realizar plagio?*
- *¿Cierto que esta manera es la manera más rápida de resolver una división?*
- *¿De qué me sirve hacer el dividendo?*
- *¿Qué debemos hacer para saber cuánto es un tercio de quince?*
- *¿Cómo vamos a saber cuál es la división que debemos hacer?”.*
- *¿Cuántas veces restamos 4 a 32?*
- *¿Quién recuerda los términos de la multiplicación?*
- *¿Entonces sabes cómo hacer las divisiones?*

Finalmente, en la categoría de tareas, identificamos que esta se reduce a repetir un conocimiento que ya fue adquirido con el único fin de que el estudiante no lo olvide, esto se debe a que no se aprecian tareas enmarcadas en un problema o situaciones contextualizadas, además, todas las actividades se centraron en desarrollar ejercicios y resolver páginas del libro de texto.

## **6.2 Fase 2 Diseño del proyecto**

Con base a los hallazgos encontrados y analizados anteriormente se retoman las principales dificultades, preguntas, opiniones, actitudes y procedimientos evidenciados en las interacciones en clase entre estudiantes y docentes, se recogen los insumos para iniciar el diseño

de la cartilla para el docente “Cocinando el cambio”, la cual se proyecta como un material válido y alternativo que pueda ser usado para la enseñanza de la división en el grado segundo, proponiendo, además, con base en el ABPy introducir nuevas estrategias en el aula que puedan traducirse en transformaciones concretas en los procesos educativos.

La cartilla se diseña con el personaje, los ingredientes y la preparación descritas en el apartado de la metodología, es construcción propia y maneja un lenguaje cercano para el docente, se utiliza la plataforma de publicación digital de acceso libre Joomag para alojar la cartilla en un dominio de internet de fácil ingreso, los contenidos complementarios de la cartilla remiten también a páginas online de libre circulación, en el Anexo F se adjunta link directo al material.

### **6.3 Fase 3 Valoración del proyecto**

En cuanto a la valoración del proyecto, se toma como fuente a Escobar et al (2008) para la construcción de una rúbrica, también la escala Likert, la cual parte de los criterios de claridad, coherencia y relevancia, para determinar si la cartilla se comprende, tiene relación con el objetivo que se plantea y si es un material pertinente para ser trabajado en el aula, tienen como finalidad indicar por medio de niveles que van desde 1: “no cumple con el criterio” hasta 4: “Alto nivel” la valoración, luego se realiza una rúbrica de los ítems, en donde se pretende responder marcando con una equis (x) de acuerdo a la inclusión y comprensión, o no, de cada uno de ellos.

Por consiguiente, construida la rúbrica de valoración para la cartilla “Cocinando el cambio” se propone un equipo de expertos para darles a conocer el material y solicitarles valorar y consignar observaciones, dicho equipo consta de 8 docentes del área de matemáticas desde el

grado 1° hasta 11° actualmente vinculados al Colegio Calasanz de Medellín, quienes en medio de una reunión general del Departamento de Matemáticas, luego de la contextualización de cómo se construye y se estructura el trabajo de grado que arroja como resultado la propuesta de enseñanza y una detallada explicación de la rúbrica de valoración, reciben finalmente la cartilla para su análisis.

Posteriormente, se recibe la retroalimentación a la cartilla por parte de los evaluadores, como resultado podemos resaltar que todos los ítems son valorados en un nivel 3 y 4, lo cual traduce que cumple con todos los criterios y por lo tanto el material es claro, coherente y relevante, se reciben comentarios sumamente positivos sobre el cómo el proyecto puede aportar, específicamente, en el colegio y una disposición para ser aplicado, además, se expresa un deseo de profundizar sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos y por último se recogen observaciones puntuales de redacción y corrección gramatical.



## 7. Conclusiones

En este apartado se enuncian algunas de las conclusiones que se recogen y se consideran importantes con el fin de poder dar respuesta a la pregunta que orienta la presente investigación, para lo cual se concluye que se alcanzan los objetivos específicos y el objetivo general.

En cuanto al primer objetivo específico de identificar estrategias de enseñanza que se suelen utilizar para acercar a los estudiantes de la básica primaria a la comprensión de la operación división, se logra especialmente en las observaciones no participantes que se realizan en el aula en el marco de la primera fase, se logra también diseñar la cartilla del docente “Cocinando el cambio” para orientar al docente en la implementación de un proyecto para la enseñanza de la operación de la división con base en razones y proporciones en el ambiente de la cartilla y el tercer objetivo es también alcanzado al poder poner en manos de expertos el producto de la cartilla para su valoración, la cual es muy positiva.

Respecto al objetivo general que apuntaba a : analizar los elementos conceptuales, procedimentales y actitudinales involucrados en la enseñanza de la operación división con estudiantes del grado segundo del Colegio Calasanz de Medellín para el diseño de un proyecto que involucra razones y proporciones con enfoque en la covariación, se logra y es precisamente por esto que se puede materializar una cartilla para el docente que recoge el análisis de los aspectos involucrados que deben ser tenidos en cuenta en el diseño del proyecto que pueda ser una alternativa de enseñanza de la operación de la división.

El desarrollo de esta investigación al poder estar relacionado con otros aspectos institucionales como lo es personaje del proyecto ambiental que se incorpora en la cartilla y al ser validado en el Departamento de Matemáticas del Colegio Calasanz de Medellín representa

también una oportunidad real de que el material creado sea llevado al aula para cumplir con su objetivo de enseñanza de la operación de la división por medio de razones y proporciones en la actividad de cocinar, generando reflexiones, llevando a los docentes a conocer nuevas estrategias como lo es el ABPy para la planeación de sus clases y aportando en posibles transformaciones concretas en la educación al poder enseñar con base en situaciones problemas, necesidades o intereses de los y las estudiantes.

En correspondencia con lo anterior esta investigación sirve también para reafirmar el llamado a trabajar el pensamiento variacional en edades tempranas, como una necesidad de poder materializar lo se orienta desde los documentos rectores, pero también como un camino, una posibilidad pedagógica y didáctica que abre oportunidades de enseñanza y aprendizaje que podrían facilitar el tránsito en grados superiores entre la aritmética y el álgebra.

En general la Práctica Pedagógica representó un proceso fundamental en nuestra formación como docentes en la que pudimos observar, reflexionar, crear experiencias significativas, aprender y sobretodo, enfrentarnos a un escenario para aplicar lo aprendido durante la carrera profesional, por lo que también se debe mencionar que fue todo un reto poder terminarla en las situaciones que impuso la pandemia debido al COVID-19 y la enseñanza que se tuvo que adaptar a la virtualidad, lo que implicó también una serie de aprendizajes sobre la tecnología y la urgencia por innovar en un aula que cambia constantemente.

Por último, consideramos que es un trabajo investigativo que aporta a los escenarios educativos y presenta nuevas discusiones, confrontaciones y reflexiones que pueden ser abordadas con el ánimo de aportar al ejercicio de los y las maestras, vale la pena preguntarse entonces ¿Cómo se puede profundizar la comprensión de otros conceptos matemáticos que se trabajan en los primeros grados a través del pensamiento variacional?

## 8. Referencias

- Alsina y Pastells. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación matemática en la Infancia* (pp. 1 – 14).
- Alsina, Ángel. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, Vol. 8, No. 1 (pp. 1-19).
- Alsina y Coronata. (2020). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, Vol. 3, No. 2 (pp. 23-36).
- Andonegui Zabala, M. (2006). División. Serie desarrollo del pensamiento matemático, 2006/07, Caracas: UNESCO. Recuperado de <http://scioteca.caf.com/handle/123456789/535>
- Barrera-Mora, F., Reyes-Rodríguez, A., & Mendoza-Hernández, J. G. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación matemática*, 30(3), 122-150.
- Berga Espona, Marta. (2020). El juego con materiales manipulativos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 3 a 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, Vol. 2, No. 2 (pp. 63-93).
- Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D. & Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7 (pp. 73 – 93).
- Botero, Olga (2006). Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación. Universidad de Antioquia.
- Bryant, P. (1997). Mathematics understanding in the nursery school years. En Nunes & Bryant

- (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics*, 53-67. Psychology Press.
- Carpenter, T., Frankle, M. & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, England: Heinemann.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educ Stud Math* 98 (pp. 57–76).
- Compañ, Agut, Romero y Tintoré, (2019). Nuevas tecnologías y aprendizaje basado en proyectos aplicado a la Geometría. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas* (pp. 179 – 191)
- Contreras Gelvez, A. (2018). Fortalecer la competencia de interpretación matemática a través de la implementación de una estrategia pedagógica. *Actualidades Pedagógicas*, (71) (pp. 13 34).
- Domènech-Casal, J. (2018). Aprendizaje Basado en Proyectos en el marco STEM: componentes didácticas para la Competencia Científica. *Ápice. Revista de Educación Científica*, 21(2), 29-42.
- Evely S. y Rico, P. (2018). Caracterización de habilidades del Pensamiento Variacional. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*. Vol. 3. No. 1. (pp. 10 – 20).
- Ferrara, F, y Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educ Stud Math* 92 (pp. 1–19).
- Flórez Ochoa, R. (2013). Estrategias de enseñanza y pedagogía. *Actualidades Pedagógicas*, (61), (pp. 15-26).
- Fregona, D. (2012). Enseñar la división en la escuela primaria: Un problema de investigación y de formación docente. *Revista De Educación Matemática*.
- Fonnegra, C. A. D., Mogollón, O. L. P., & Mogollón, L. V. P. (2013). Dotando de sentido el algoritmo de la división a partir de una trayectoria de aprendizaje que parte de lo concreto

- para llegar a lo simbólico. *Revista Científica*, 650-654.
- Galeano, M. (2004). *Diseño de Proyectos en la investigación cualitativa*. Fondo editorial Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
- Gil-Pascual. (2011). *Técnicas e instrumentos para la recogida de información*. España. Universidad Nacional de Educación a Distancia – UNED.
- Guarumo, I. (2018). Didáctica del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en instituciones indígenas del resguardo Escopetera y Pirza, Riosucio - Caldas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2) (pp. 76-97).
- Giraldo Macías C. F., Caballero Sahelices M. C., & Meneses Villagrà J. Ángel., (2020). Una experiencia de práctica pedagógica con docentes en formación en ciencias naturales apoyada en el aprendizaje basado en proyectos (ABPy). *Uni-Pluriversidad*, 20(1).
- Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, No. 8 (pp. 117 – 142).
- Gómez, Montpeller y Rincón. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de investigación en Educación Matemática*. No. 9 (pp. 43 – 63).
- González y Hernández, (2011). La gran torre: Matemáticas en la Educación Infantil a través de un proyecto de construcción. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*. (pp. 135-156).
- Hernández y Castellanos. (2015). Desarrollo del razonamiento algebraico vía la generalización de patrones gráficos- icónicos en estudiantes de la educación básica primaria. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, Vol. 1. No. 1. (pp. 83 – 87).
- Heuvel-Panhuizen, Kolovou y Robitzsch. (2013). Primary school students' strategies in early

- algebra problem solving supported by an online game. *Educ Stud Math*.
- Botero, C. H. (2000). Un modelo para investigación documental: guía teórico-práctica sobre construcción de Estados del Arte con importantes reflexiones sobre la investigación. Señal Editora.
- Larmer, J., Mergendoller, J., Boss, S. (2015). Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction. ASCD, Alexandria.
- Lee, Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educ Stud Math*.
- López, Lugo, Déniz, Quintero y Cáceres, (2017). Evaluación del proyecto Newton. "Matemáticas para la vida" de 3° a 6° de educación primaria. Números: *Revista de didáctica de las matemáticas*. p.p 43-59.
- López, M., Guerrero, C., Carrillo, J. & Contreras, C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, (pp. 73 – 94).
- Luque Enciso, D., C.A. Quintero Díaz, y F. Villalobos Gaitán. (2012). Desarrollo de competencias investigativas básicas mediante el aprendizaje basado en proyectos como estrategia de enseñanza. *Actualidades Pedagógicas*, (60) (pp. 29-49).
- Martí, Heydrich, Rojas y Hernández (2010). Aprendizaje basado en proyectos: una experiencia de innovación docente. *Universidad EAFIT*, Vol. 46. No. 158 (pp. 11 – 21).
- Martín y Piquet. (2018). La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa. Números: *Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 99 (pp. 105 – 126).
- Maure y Marimón, (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de

- undécimo grado. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (pp. 21 – 30).
- Medrano y Flores-Macías, (2018). Álgebra Temprana como herramienta de análisis y comprensión de problemas aritméticos en primaria. *Cultura, educación y sociedad*. 9(1) (pp. 9-26).
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Matemáticas, lineamientos curriculares. Bogotá. Recuperado de <https://www.mineducacion.gov.co/>.
- Moreira, M. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*. 7 (1). (pp. 1 – 28).
- Moreira, M. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, 6, 83-101.
- Moura, M. O. de. (2020). Atividade de formação de professores de matemática mediada pela Atividade Orientadora de Ensino. *Obutchénie: Revista De Didática E Psicologia Pedagógica*, 4(2), 355-381. <https://doi.org/10.14393/OBv4n2.a2020-57487>
- Muñoz, D. Sbert, C. y Sbert M. (1996) “La importancia de las preguntas”. Cuaderno de pedagogía, 243. 73-77.
- Nunes Ogliari, L. y López Bello, S. (2017). Práticas da cozinha de merendeiras escolares: Textos de contextos etnomatemáticos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 10(3) (pp. 19 38).
- Stake, R.E. (1998). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.
- Obando, Vasco y Arboleda. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*

- Obando, Gilberto, Vasco, Carlos Eduardo, & Arboleda, Luis Carlos. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1) (pp. 59-81).
- Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la educación básica (Doctoral dissertation, Universidad del Valle).
- Obando Zapata, Gilberto (2018). PROFESORA, ¿QUÉ ES MULTIPLICAR? *Universidad de Antioquia*, 10.
- Olmedo P., Gómez, J., Zermeño, M., & Pintor, M. (2014). Estrategias innovadoras en el aula: implementación de un objeto virtual de aprendizaje. *Revista Educación y Humanismo*, 16(26) (pp. 58-72).
- Ordóñez, A. y Hurtado, C. (2018). Un análisis de las estrategias empleadas por un grupo de estudiantes de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*. Vol. 3, No. 1(pp. 96 – 99).
- Oviedo, P., Cárdenas, F., Zapata, F., Rendón, M., Rojas, Y., y Figueroa, L. (2010). Estilos de enseñanza y estilos de aprendizaje: implicaciones para la educación por ciclos. *Actualidades Pedagógicas*, (55) (pp. 31-43).
- Peck y Matassa. (2016). Reinventing fractions and division as they are used in algebra: the power of preformal productions. *Educ Stud Math*.
- Pérez, M. M. (2008). *Aprendizaje basado en proyectos colaborativos. Una experiencia en educación superior*. *Laurus*, 14(28), 158-180.
- Pinedo, I. F. (1982). NTP 15: Construcción de una escala de actitudes tipo Likert.
- Piñeiro, Castro-Rodriguez y Castro. (2019). Concepciones y creencias de profesores de primaria



- sobre problemas matemáticos, su resolución y enseñanza. *Avances de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 57 – 72).
- Quintero y López. (2019). Estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria: El caso de Luisa. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 102 (pp. 67 – 81).
- Rada Cimorra, Marta, (2013). Experimentación de una propuesta didáctica para el aprendizaje funcional del número natural en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, Vol. 2, No. 1, p.p 57-81.
- Robinson y LeFevre. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educ Stud Math*. (pp. 409–428).
- Rojas y Ariza. (2018). Constitución de la fracción como relación parte-todo: reporte de una experiencia con estudiantes de grado cuarto. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, Vol. 3. No. 1 (pp. 86 – 88).
- Rojas y Vergel, (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*. Vol. 3, No. 1. (pp. 19 – 31).
- Romero y Marulanda. (2015). Comprensión del concepto de divisibilidad en estudiantes de cuarto y quinto grado de educación básica primaria de Escuela Nueva. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa* (pp. 502 – 507).
- Sánchez Bracho, M., Fernández, M., & Díaz, J. (2021). Técnicas e instrumentos de recolección de información: análisis y procesamiento realizado por el investigador cualitativo. *Revista Científica UISRAEL*, 8(1) (pp. 107–121).
- Sánchez Ordoñez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo

- influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2) (pp. 44-60).
- Scanduzzi, P. (2010). Accepting the Other: Different Division Expression. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(1) (pp. 67-78).
- Segovia y Rico. (2011) Matemáticas para maestros en Educación Primaria/*Educatio siglo XXI*, vol 30, n° 1, 2012.(pp.469-471)
- Somoza y Portugal. (2012). Competencia matemática en niños de 4 años. *Edma 0-6: Educación matemática en la Infancia*, (pp. 54 – 62).
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicativestructures. In Lesch R., Landau, M. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press.
- Xuhua Sun. (2010). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educ Stud Math* (pp. 65–85).
- Yáñez, J. y González, L. (1993). Los algoritmos en el contexto escolar. Algunos ejemplos para la obtención de la raíz cuadrada. *Números*. (pp. 39 – 58).
- Zamorano y Alsina, (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de Educación Primaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas* (pp. 81 – 102).

## 9. Anexos

### Anexo A. Formato de observación no participante.

**Universidad de Antioquia**

**Facultad de Educación**

**Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**

#### **GUÍA DE OBSERVACIÓN**

##### **ANTES**

1. ¿En qué aspectos de la planeación podríamos proponer un cambio?
2. ¿Cuenta la planeación con actividades propias del pensamiento numérico?
3. ¿Cuenta la planeación con actividades propias del pensamiento variacional?
4. ¿Las actividades planteadas tienen ejemplos tomados de la realidad?

##### **DURANTE**

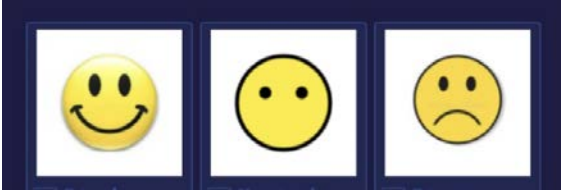
1. ¿Qué opiniones realizan los estudiantes en el chat/audio antes de iniciar la clase?
2. ¿Cuáles son las dudas que se presentan a medida que se desarrollan las actividades?
3. ¿Cuáles son las explicaciones (del docente o del estudiante) que se dan durante el desarrollo de la clase?
4. ¿Los estudiantes pueden preguntar al interior de la clase? ¿Sobre qué preguntan?
5. ¿Se sigue con lo propuesto en la planeación?
6. ¿La profesora utiliza exclusivamente conceptos, ejemplos o procesos descritos en los libros de texto?
7. ¿Se utiliza la tecnología de forma creativa y eficiente?

##### **DESPUÉS**

1. ¿Qué sucede al finalizar la clase por medio del chat/audio?
2. ¿Qué opiniones se hacen al terminar una clase?
3. ¿Qué compromisos, tareas o recursos disponibles quedan al finalizar la clase?
4. ¿Hay algún aspecto de la clase que nos interese profundizar en una entrevista?
5. ¿Que podríamos incluir en el proyecto para resolver una duda presentada en clase?

<b>Proyecto de Investigación</b>		
Razones y Proporciones: Un proyecto para la enseñanza de la división con enfoque en el pensamiento variacional		
<b>Técnica</b>	Observación no participante.	
<b>Instrumento</b>	Ficha de Observación.	
<b>Tema central</b>	DIVISIÓN	
<b>Fecha</b>		<b>Hora de inicio:</b> <b>Fin:</b>
<b>Descripción Observación</b>		
<b>Comentarios</b>		

## Anexo B. Test de actitudes

Item	Escala
Me gusta aprender y practicar las operaciones matemáticas.	
Soy capaz de resolver problemas que involucran la multiplicación.	Estoy de acuerdo; No estoy de acuerdo ni en desacuerdo; Estoy en desacuerdo.
Me gustaría que la profe me proponga resolver problemas matemáticos que involucran divisiones.	
Aprender la operación de la división me causa temor.	
Creo que aprender la operación división me puede ayudar a resolver problemas matemáticos.	
Si la profe me pide repartir 6 balones entre dos amigos. ¿Soy capaz de hacerlo?.	
Me siento motivado y motivada para aprender a dividir en este cuarto período.	
Me siento motivado y motivada para aprender a dividir en este cuarto período.	
Aprender a dividir sería un logro importante para mí.	

## Anexo C. Formato de acuerdo de confidencialidad

### ACUERDO DE CONFIDENCIALIDAD

**PROYECTO: “Razones y Proporciones: Un proyecto para la enseñanza de la división con enfoque en el pensamiento variacional”.**

Nosotros Verónica María Gallego identificada con Cédula de Ciudadanía N° 1036952663 y Johan Andrés García identificado con Cédula de Ciudadanía N° 1007417967, aseguramos mediante esta declaración que, para la realización de nuestras funciones en calidad de investigadores, actuamos libremente, sin estar sometidos a presiones o influencias externas o internas para asumir los compromisos que en este documento se establecen. En estas condiciones, nos comprometemos a:

1. Reservar la información que reciba del Colegio o relativa a los documentos generados u obtenidos para y durante el proyecto, salvo autorización expresa del Colegio u orden de autoridad competente. En particular, mantener en reserva información privilegiada relacionada con:
  - La información obtenida de las observaciones, entrevistas, encuestas u otros instrumentos de recolección de información aplicados a empleados, estudiantes o padres de familia del Colegio Calasanz Medellín.
  - La información contenida en documentos del Colegio y a la cual tenga acceso como investigadora del proyecto o maestra del Colegio.
2. No divulgar información confidencial a la que hayamos tenido acceso por nuestra participación en el proyecto, a ninguna persona natural o jurídica que no esté oficialmente incluida en el equipo del proyecto o autorizada por el Colegio.
3. No usar la información confidencial con propósitos comerciales, ni utilizarla de ninguna manera que pudiere causar perjuicio directo o indirecto al Colegio.
4. No permitir que la información confidencial sea accesible, copiada, reproducida, distribuida o transmitida por ningún medio conocido o por conocer, en todo o en parte, sin el previo y escrito consentimiento del Colegio.

Aceptamos que, durante la vigencia y una vez finalizado el proyecto, siempre y cuando se respete la propiedad intelectual de terceros, el Colegio podrá hacer uso de la información recogida y procesada en desarrollo del proyecto para realizar análisis y publicaciones exclusivamente académicas, así como utilizar la información y documentos resultantes del proyecto con fines de investigación y como material de apoyo a la formación de estudiantes, docentes, funcionarios y padres de familia.

Aceptamos que la publicación de toda información y escrito que se produzca en el contexto o como resultado del proyecto, deberá tener la autorización previa del Colegio. En tales publicaciones, el Colegio podrá solicitar los respectivos créditos por su participación en el proyecto.

Se entiende que dentro de la información confidencial no se incluye aquella que sea del dominio público. Además, la obligación de confidencialidad aplicará durante la duración del proyecto y 25 (veinticinco) años calendario adicionales a partir de la expiración del plazo del mismo; también cesará por el consentimiento expreso y escrito del representante legal del Colegio; porque la información se haya hecho pública por medio diferente a la acción u omisión de las partes; por mandato de autoridad judicial o administrativa competente; o por ministerio de la ley.

Manifestamos, así mismo, que no nos encontramos inhabilitados para vincularnos al presente proyecto, por no encontrarnos incurso en las causales establecidas para ello en la normatividad vigente. En caso que me encontrase incurso en causal de inhabilidad o incompatibilidad, de inmediato pondré tal situación en conocimiento del Colegio, con el fin de que se tomen las medidas necesarias para preservar la integridad y transparencia del proceso de vinculación.

Dado en la ciudad de Medellín, el día 15 del mes de septiembre del año 2020.

## Anexo D. Formato de carta de invitación a los profesores

### CARTA DE INVITACIÓN A LOS PROFESORES

Medellín, septiembre de 2020

APRECIADO MAESTRO

Por medio de esta invitación queremos hacerlo conocedor(a) de un estudio que es llevado a cabo en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Colombia) en el marco de la tesis de grado de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Este contará con la participación del Colegio Calasanz Medellín y los estudiantes VERÓNICA MARÍA GALLEGO y JOHAN ANDRÉS GARCÍA

El estudio se denomina: “Razones y Proporciones: Un proyecto para la enseñanza de la división con enfoque en el pensamiento variacional”, y quisiéramos invitarlo(a) a ser partícipe de ello.

Este estudio busca indagar sobre las formas de enseñanza en el aula de clase, las percepciones que tienen los estudiantes sobre la operación división y describir porque es necesario brindar importancia a las concepciones y procedimientos alternativos que utilizan los estudiantes para la realización de divisiones en el grado segundo del Colegio Calasanz Medellín.

La sesión tendrá una duración estimada de 1 hora y se llevará a cabo en las instalaciones del colegio. Si está de acuerdo en participar en esta etapa del proceso, le solicitamos leer y firmar el consentimiento informado.

Es importante aclarar que se puede retirar de la participación del estudio en cualquier momento sin ninguna penalidad o pérdida de incentivos. La participación en este estudio es voluntaria y nos ayudarán a comprender y analizar las formas de enseñanza en el aula de clase y qué incidencias tienen estas en el desarrollo y construcción de los diferentes algoritmos de la división.

Gracias por tomarse el tiempo para leer estos materiales. Esperamos que pueda ser parte de este estudio.

Atentamente,

---

VERÓNICA MARÍA GALLEGO

JOHAN ANDRÉS GARCÍA

Investigadores

## Anexo E. Formato de valoración del proyecto.

### CRITERIOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN PARA EL PROYECTO “COCINANDO EL CAMBIO”

Verónica María Gallego  
Johan Andrés García



Categoría /criterio	Calificación	Indicador
<b>CLARIDAD</b>  El proyecto se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	1. No cumple con el criterio	El proyecto no es claro.
	2. Bajo Nivel	El proyecto requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas.
	3. Moderado nivel	Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del proyecto.
	4. Alto nivel	El proyecto es claro, tiene semántica y sintaxis adecuada.
<b>COHERENCIA</b>  El proyecto tiene relación lógica con el objetivo y propósito de enseñanza que se plantea	1. No cumple con el criterio	El proyecto no tiene relación lógica con el objetivo y propósito de enseñanza
	2. Bajo Nivel	El proyecto tiene una relación tangencial con el objetivo y propósito de enseñanza.
	3. Moderado nivel	El proyecto tiene una relación moderada con el objetivo y propósito de enseñanza.
	4. Alto nivel	El proyecto se encuentra completamente relacionado con el objetivo y propósito de enseñanza.
<b>RELEVANCIA</b>	1. No cumple con el criterio	El proyecto no es pertinente
	2. Bajo Nivel	El proyecto tiene alguna relevancia.









	<p>Se nota claramente la relación del concepto división desde la perspectiva del pensamiento variacional.</p>																					
	<p>Le han resultado útiles las ideas presentadas para abordar la operación división en grado segundo y se podría adaptar a otros grados escolares.</p>																					
	<p>El material de apoyo es pertinente y viable para trabajar la operación de la división de una forma alternativa.</p>																					



## Anexo F. Link directo a la cartilla “Cocinando el cambio”

El siguiente es el link que dirige a la cartilla del docente: <https://joom.ag/de9I>

El siguiente es el código QR con el cuál se accede a la cartilla en los dispositivos móviles.

