

Los Medios Semióticos Culturales en la Objetivación de Nociones Fundamentales
de la Enseñanza y Aprendizaje de la Magnitud Volumen.



1 8 0 3

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica: Matemáticas

Angie Vanessa Llano-Zapata

Jonathan Sánchez-Cardona

Luis Daniel Osorio-Franco

Asesor

Jesús María Gutiérrez Mesa

Magister En Educación: Docencia de Las Matemáticas

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
MEDELLÍN
2015

Agradecimientos

El presente trabajo se pudo desarrollar gracias al apoyo, acompañamiento, reflexiones y críticas de las siguientes personas, por esta razón agradecemos:

A Dios por permitirnos la vida y la salud.

A nuestras familias y seres queridos por su apoyo en este proceso formativo.

A nuestro asesor, Jesús María Gutiérrez Mesa por su constante acompañamiento y dirección.

A nuestros compañeros de práctica por su apoyo, críticas y consejos que permitieron consolidar principios conceptuales para nuestro trabajo de investigación.

A aquellas personas que leyeron las diversas versiones de este trabajo e hicieron comentarios.

A nuestros Maestros cooperadores de la Institución Educativa Santos Ángeles Custodios por cedernos los espacios en sus clases.

A la Institución Educativa Santos Ángeles Custodios por recibirnos y por el trato dado.

Y sobre todo a las estudiantes de la Institución Educativa Santos Ángeles Custodios a quienes acompañamos en su proceso de formación a lo largo de dos años

Resumen

La presente investigación se preocupó por dar respuesta a la pregunta ¿Cuál es el papel de los medios semióticos culturales en relación con la objetivación de nociones fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de la magnitud volumen con estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Santos Ángeles Custodios? Para el desarrollo de la investigación se asumió un enfoque de tipo cualitativo, el cual permitió evidenciar los procesos de interacción entre las estudiantes en el aula de clase, además, conllevó al investigador a tomar una posición reflexiva y crítica dispuesto a escuchar, a dialogar e interactuar con sus investigados. La metodología que se llevó a cabo es la de Estudio de Casos, centrando la atención en entender la particularidad y singularidad de cada caso específico.

La investigación tiene como horizonte teórico la Teoría de la Objetivación de L. Radford y el tratamiento didáctico de la magnitud volumen por autores como W. Kula, M. Chamorro, M. del Olmo y J. Godino, que nos permitió centrar el interés en analizar el papel que juegan los medios semióticos culturales en relación con la objetivación de nociones fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen.

Se plantearon tres tareas en relación a la percepción, comparación y medición de dicha magnitud, con el fin de realizar una triangulación entre las producciones de las estudiantes, el horizonte teórico y las reflexiones de los investigadores. Finalmente gracias a los hallazgos obtenidos en la realización por parte de las estudiantes de las tareas antes mencionadas y la triangulación elaborada, planteamos una serie de conclusiones en relación con el papel que juegan los medios semióticos de objetivación en la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen.

Índice de contenido

Resumen	¡Error! Marcador no definido.
1. Introducción.....	1
2. Descubriendo el centro de práctica.	3
3. Hallazgos Iniciales.	5
3.1. Manual de convivencia.	5
3.2. Plan de Estudio	5
3.3. Problema de investigación.....	9
4. Estado del Arte.	11
5. Diseño de la investigación.....	13
5.1. Diseño Metodológico.....	13
5.2. Enfoque.....	14
5.3. Estrategia.	15
5.3.1. Estudio de casos.	15
5.4. Técnicas de recolección de la información.....	18
5.4.1. Entrevistas.	19
5.4.2. Tareas.	20
5.4.3. Diarios de Campo Pedagógicos.....	20
6. Horizonte teórico: Una mirada a los conceptos.....	21

6.1. Teoría histórico cultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: Teoría de la Objetivación	22
6.2. Tratamiento Escolar y Didáctico de la Magnitud Volumen.	26
6.2.1 Un poco de historia al concepto de medida.....	26
6.2.2 Tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen.....	28
7. Tareas.	37
8. Análisis.....	39
8.1. El volumen como “Conteo de cubitos”.	40
8.2. El volumen como “largo por ancho por alto”.....	48
8.3. El volumen como “lleno de”.....	56
9. Conclusiones.	62
10. Bibliografía.....	65
11. Anexos.....	67
11.1. Anexo 1	67
11.2. Anexo 2	73
11.3. Anexo 3	75
11.3. Anexo 4	77

Índice de infogramas

Infograma 1: Elementos del Contexto.....	3
Infograma 2: Triangulación de los datos con estudio de casos.	18
Infograma 3: Proceso de Objetivación.	23
Infograma 4: Proceso de triangulación.....	39

Índice de tablas

Tabla 1: Ilustración de autores en torno a las teorías trabajadas.	22
---	----

Índice de imágenes

Imagen 1: Resultados de las pruebas saber ICFES, Institución educativa Santos Ángeles Custodios. 2012.	7
Imagen 2: Pregunta número 3, simulacro prueba saber, anexo 1.....	9
Imagen 3: Pregunta número tres de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	41
Imagen 4: Parte de la Tarea 2, realizada por las estudiantes.	42
Imagen 5: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	42
Imagen 6: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	43
Imagen 7: Parte de la Tarea 2, realizada por las estudiantes.	45
Imagen 8: Parte de la Tarea 2 realizada por las estudiantes.	47
Imagen 9: Construcción con policubos realizada por las estudiantes.	47
Imagen 10: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	49
Imagen 11: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	50
Imagen 12: Midiendo el salón, acciones de las niñas.....	53
Imagen 13: Imágenes de la tarea 3, Midiendo el salón de clases, acciones de las estudiantes.	54
Imagen 14: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.	58
Imagen 15: Parte de la Tarea 1 realizada por las estudiantes.	60
Imagen 16: Construcciones con policubos realizada por las estudiantes.	61

1. Introducción.

El presente trabajo de investigación se ha realizado con el objetivo de optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en el marco del programa de Licenciatura Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, que a su vez tuvo como objetivo que los maestros en formación pasen por un proceso de investigación y reflexión a partir de sus prácticas docentes.

A partir de dichas prácticas de las cuales fuimos partícipes en la Institución Educativa Santos Ángeles Custodios, las cuales iniciaron en el segundo semestre del año 2013 con un proceso de observación de la clase de los diferentes profesores cooperadores, paralelo a ello se realizó una caracterización de la institución. Posteriormente, en el primer y segundo semestre del año 2014 se realizaron las intervenciones directas con las estudiantes, tomando el rol de docente con una intensidad de 6 horas por semana, gracias a ello se realizaron diferentes hallazgos y posteriores análisis de las situaciones vividas con las estudiantes de la institución, surge así como pregunta problematizadora ¿Cuál es el papel que juegan los medios semióticos culturales en la objetivación de la magnitud volumen? para darle respuesta se definieron tanto el tipo de investigación y metodología, como el marco teórico que permitió dar respuesta a dicha pregunta.

La investigación se desarrolló bajo un enfoque de tipo cualitativo, con metodología de estudio de casos, y la selección adecuada de las técnicas de recolección de la información que permitieron un posterior análisis y reflexión por parte de los maestros investigadores. Posteriormente se presentó una mirada a los conceptos teóricos que aportan y fundamentan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen, planteándose como procesos que están mediados por unos Medios Semióticos Culturales, partiendo de esto, se desarrolló una serie

de tareas que permitió evidenciar las decisiones y acciones que toman las estudiantes al enfrentarse a diferentes representaciones propuestas en dichas tareas.

Finalmente se desarrolló el análisis de la información recolectada a partir de tres categorías, para dicho análisis se realizó una triangulación en relación con la teoría de la objetivación, el tratamiento didáctico de la magnitud volumen, y las producciones de las estudiantes, con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación propuesta inicialmente, es así como logramos presentar una serie de reflexiones producto del proceso de investigación, en relación a la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen.

2. Descubriendo el centro de práctica.

Este trabajo de investigación se desarrolló en el marco de las prácticas docentes realizadas en la Institución Educativa Santos Ángeles custodios, estas prácticas se desarrollaron a partir de unos procesos de observación y contextualización, de intervención en el aula y terminan con los procesos de reflexión y sistematización de los mismos. En relación con los procesos de observación se inician con una serie de visitas a la Institución, durante las cuales se realizó en primera instancia un rastreo al contexto, como se aprecia en el siguiente infograma (*infograma 1*), involucrando el Proyecto Educativo Institucional (PEI), la infraestructura de la institución y la comunidad educativa, todo con el interés de tener un primer acercamiento a elementos que ayudaron al planteamiento y desarrollo de la investigación.



Infograma 1: Elementos del Contexto.

La institución es de carácter oficial y atiende población femenina de la comuna 15 o Guayabal de Medellín, son estudiantes de estratos socio-económicos 1, 2, y 3. La convivencia de las estudiantes, maestros y directivos está acompañada de diversas realidades, formas de pensar y

ver el mundo. Para esto, el manual de convivencia busca promover valores y principios que permitan un ambiente de convivencia para formar ciudadanas con valores éticos y morales, por tanto, en las clases fue posible observar cómo los docentes resaltan valores como el respeto, la escucha y la tolerancia.

El espacio físico de la institución se asemeja a un entorno hogareño gracias a la vegetación y diseño arquitectónico que posee, esto permite que el ambiente escolar posibilite la integración entre maestros, directivos y estudiantes. Condición que permitió el desarrollo de las actividades propias de la investigación como diálogos, grabaciones y entrevistas.

En esta investigación se reconoció la importancia que tiene el entorno social en el que se encuentran las estudiantes, como hogares disfuncionales, situaciones de violencia en los barrios donde viven y condiciones de vulnerabilidad, factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje en el sentido de continuas interrupciones en los procesos de aula, además, de la desmotivación frente a la producción del conocimiento. Por tanto, las actividades desarrolladas en los procesos de intervención fueron pensadas de tal manera que resultaran pertinentes y motivadoras para las estudiantes.

De otro lado, se encontró un PEI que fomenta la integración y el diálogo de la comunidad educativa, reconociéndolos como sujetos diversos y socialmente constituidos a partir de las condiciones propias del entorno. En éste, se centra la atención en el análisis del manual de convivencia y el plan de estudios, permitiendo caracterizar las relaciones que se tejen entre estudiantes, profesores y los saberes, en particular, el saber matemático.

3. Hallazgos Iniciales.

3.1. Manual de convivencia.

Desde el lema “Dulzura en los medios y firmeza en el fin” la institución se propone en su fundamento filosófico formar mujeres cristianas, dignas y buenas ciudadanas, con valores tales como lo son: el respeto, responsabilidad, honestidad, solidaridad, entre otros, para lograr así su misión, en la cual se propone consolidar procesos educativos de excelente calidad para la formación de estudiantes en principios, valores y competencias, que les permita desenvolverse eficazmente en el ámbito académico, social, cultural y laboral. Con esto busca para el 2015 ser gestora y actora en el desarrollo de procesos educativos de alta calidad, para consolidarse en el ámbito local, regional y nacional como una institución de excelencia con los más altos estándares académicos.

El manual de Convivencia define unas relaciones maestros-estudiantes mediada por un lenguaje, formas de actuar, en el que se fomenta y resalta la importancia del respeto, la escucha, el buen comportamiento y el buen trato con el otro, pero en este mismo sentido, demanda una exigencia académica en la que se cumplen unos objetivos propuestos y potencializa aptitudes y actitudes para un buen desempeño en la sociedad por parte de las estudiantes. Estos tipos de escenarios generan un ambiente propicio que invita a las estudiantes a conocer e indagar sobre los conceptos propios de la matemática, incentivando la creatividad e investigación, partiendo de esto, se define el perfil del maestro y su intervención en el aula de clase.

3.2. Plan de Estudio

En la lectura del plan de estudio se centró la atención en observar en particular el plan de área de matemáticas y en este se analizaron las relaciones que se tejen entre las estudiantes y el

conocimiento propio del saber matemático y uno de los elementos significativos tuvo que ver con el objetivo general, el cual señala que el propósito fundamental del área es:

El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos. (Santos Ángeles Custodios, 2012, p. 10)

Este objetivo nos indica que el saber matemático propuesto para la institución está centrado especialmente en torno a aspectos del cálculo numérico y procedimientos lógicos, haciendo énfasis en situaciones aritméticas y a la resolución de problemas enfocados en el cálculo, dejando de lado, diferentes tópicos para el desarrollo del pensamiento matemático, como lo es el pensamiento métrico, el aleatorio y el variacional.

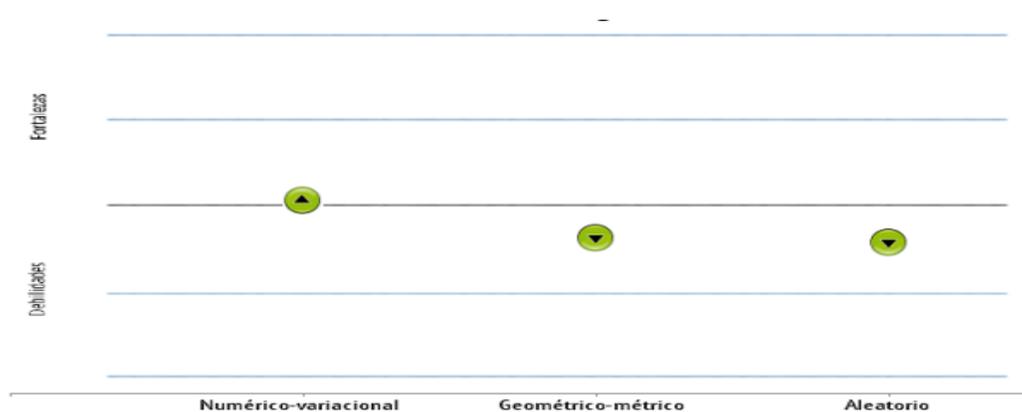
Gracias a las observaciones de clase se logró identificar unas prácticas docentes, que fueron plasmadas en el diario de campo pedagógico y que nos permitieron identificar unas propuestas de intervención centradas en procesos numéricos y solución de problemas de carácter aritmético y fundamentalmente en situaciones de estructuras aditivas en contextos numéricos y con miras a fortalecer procesos algorítmicos.

En consecuencia, surge el interés de realizar un contraste entre lo que está planteado en el plan de área de matemáticas y las prácticas docentes en la institución (currículo desarrollado), lo propuesto por los estándares básico de matemáticas y Lineamientos curriculares (Currículo propuesto) y los resultados en pruebas estandarizadas como lo son las “Pruebas Saber” (Currículo alcanzado), encontrando ciertas diferencias en lo observado en cada una de las propuestas.

Los Estándares Básicos de Matemáticas y los Lineamientos Curriculares plantean la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en relación a 5 tópicos los cuales son (i) el pensamiento numérico y sistemas numéricos, (ii) pensamiento espacial y sistemas geométricos, (iii) pensamiento métrico y sistemas de medidas, (iv) pensamiento aleatorio y los sistemas de datos,

(v) pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Sin embargo tanto el plan de área como las prácticas de los docentes, se centran en trabajar el área de matemáticas más desde lo aritmético y desde el cálculo numérico, dejando de lado las situaciones propias del pensamiento métrico, variacional, y aleatorio.

Uno de los hallazgos de este contraste se evidencia en los resultados de la “Prueba Saber” en el área de matemáticas presentadas en el año 2012, en estos se muestran tanto las fortalezas como las debilidades que presentaron las estudiantes, en relación con los tópicos propuestos en los estándares y los evaluados, encontrando que las estudiantes se encontraban fuertes en el componente Numérico-Variacional, débil en el componente Geométrico-Métrico y débil en el componente Aleatorio, como se puede ver la imagen 1.



Lectura de resultados

En comparación con los establecimientos educativos con puntajes promedio similares en el área y grado, su establecimiento es, relativamente:

- Fuerte en el componente Numérico-variacional
- Débil en el componente Geométrico-métrico
- Débil en el componente Aleatorio

Imagen 1: Resultados de las pruebas saber ICFES, Institución educativa Santos Ángeles Custodios. 2012.

Relacionando lo antes ya mencionado en el plan de área de la institución y el resultado dado por las “Pruebas Saber”, dan cuenta, no sólo del objetivo del área sino también de las prácticas

docentes, puesto que se logra leer lo mismo, ya que el componente numérico es fuerte mientras que los componentes métrico y aleatorio presentan debilidad (*Imagen 1*).

Por lo anterior, se toma la decisión de centrar la observación en relación con el pensamiento métrico y más específicamente indagar por las magnitudes involucradas en la prueba, conceptos, procesos evaluados y las formas como fueron planteadas las preguntas en relación con la temática, a pesar de que los resultados proporcionados por la Pruebas Saber, aporta información específica y relevante para la investigación, no expone las diferentes razones por las que a las estudiantes se les dificultan estos conceptos matemáticos, es por esto, que fue necesario realizar un simulacro de prueba saber, buscando delimitar y comprender con más detalle las debilidades que presentaron las estudiantes.

El simulacro consistió en realizar una prueba escrita a las estudiantes, las preguntas que esta contenía buscaban indagar por saberes específicos del pensamiento métrico, al analizar las respuestas de las estudiantes fue posible re-afirmar lo que arrojó la evaluación de las pruebas saber, sin embargo, a pesar de realizar dicho simulacro, las respuestas escritas dadas por las estudiantes a cada pregunta no permitieron reconocer cuales eran las debilidades expuestas por el ICFES en torno al pensamiento métrico por lo que se requiere realizar un trabajo mucho más cercano con ellas, por esta razón, se realizó una socialización que permitiera recolectar información más específica y cercana a la problemática ya encontrada, éste consistió en dialogar e interactuar con las estudiantes alrededor de las preguntas propuestas.

La socialización del simulacro permitió que las estudiantes expresaran oralmente lo que comprendieron en las preguntas y el porqué de sus respuestas, sus explicaciones y razones no solo estaban cargadas de significados particulares en relación con las preguntas sino que además estaban acompañadas de gestos, movimientos y expresiones corporales que les fueron de ayuda para

explicar lo que en su momento estaban comprendiendo. Gracias a dicha socialización se identificó que una pregunta en específico, que se puede ver en la siguiente imagen (*imagen 2*), presentó mayores dificultades que las otras, esta pregunta indaga por la concepción de volumen que tiene las estudiantes, cuando ellas tratan de explicar el porqué de su respuesta con respecto a la pregunta sobre el volumen, demostraron tener desconocimiento y poca claridad en los conceptos relacionados con la magnitud volumen.

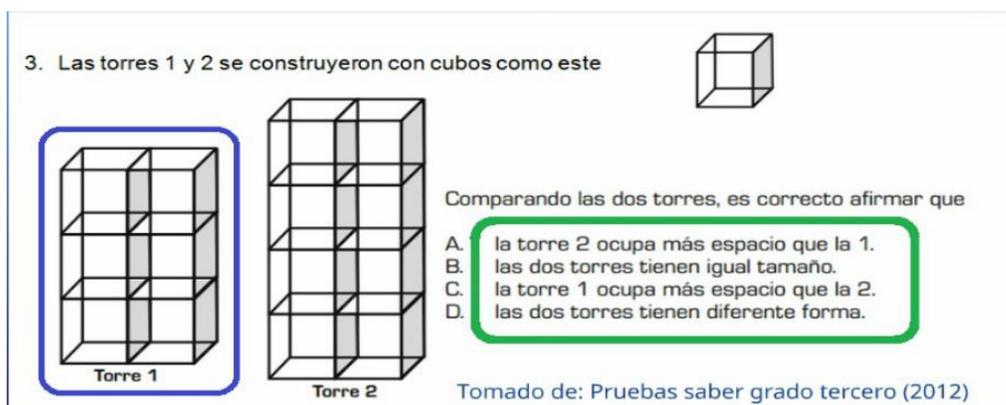


Imagen 2: Pregunta número 3, simulacro prueba saber, anexo 1.

Estas observaciones permitieron una primera decisión con relación al tema de investigación: **El pensamiento métrico en relación con la magnitud Volumen.**

3.3. Problema de investigación.

Partiendo de las observaciones realizadas se toma como **objetivo** analizar el papel de algunos medios semióticos culturales en relación con la objetivación de nociones fundamentales en la enseñanza-aprendizaje de la magnitud volumen con estudiantes de sexto grado de la institución educativa santos ángeles custodios. Para lo cual nos planteamos la siguiente **pregunta de investigación** ¿Cuál es el papel de los medios semióticos culturales en relación con la objetivación

de nociones fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen con estudiantes de la institución educativa santos ángeles custodios?

4. Estado del Arte.

En esta investigación se reconoce la importancia que tienen los trabajos realizados dentro del campo académico de la educación matemática, por ello, se realizó un rastreo de las investigaciones que abordan la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen en los últimos diez años en la base de datos de la Universidad de Antioquia. En este rastreo, se encontró un trabajo de grado del año 2006 de la facultad de educación de la Universidad de Antioquia, realizado por: Maritza Agudelo Dávila, Elizabeth Estrada Betancur, Lehidly M. Posada Medina, Lorena M. Rodríguez Rave, Monly C. Torres Jaramillo y Miriam C. Santa Quintero. titulado: “Situaciones Didácticas para la Enseñanza del Volumen Proyecto de Práctica Profesional” el cual tiene objetivo “que el alumno pueda entender el trasfondo social que encierran las magnitudes volumen y capacidad a partir de situaciones problema” (Agudelo et al. 2006, p 76)

En este trabajo de investigación, se propone una serie de actividades para la enseñanza de la magnitud volumen a partir de “Situaciones problemas” para estudiantes de grado noveno, donde el estudiante a través de estas experiencias relaciona dicha magnitud con el contexto social, en este sentido, se plantea que

“La importancia de los procesos de medición no corresponde únicamente a una necesidad propia de la enseñanza de la matemática, sino también a la necesidad misma de aprender a medir como herramienta útil para la solución de problemas en nuestro entorno.” (Agudelo et al, 2006, p.115)

Es así, que se afirma la importancia de enseñar las magnitudes volumen y capacidad a través de las situaciones problemas, permitiendo el desarrollo de los procesos de medición, estimación, aproximación y la selección de unidades propias para esta magnitud, siendo útil para la enseñanza del pensamiento métrico en la escuela, puesto que brinda la posibilidad de reconocer las dificultades que se pueden enfrentar los estudiantes como los proceso memorístico de las

fórmulas que son usadas para medir las magnitudes dejando de lado los procesos argumentativos y propositivos.

A continuación se presenta una de las conclusiones explícitas del trabajo de grado:

Con el desarrollo de situaciones problema enmarcadas en contextos económicos y en procesos de medida, los estudiantes logran acceder y desarrollar de manera más apropiada los conceptos de volumen y capacidad. (p. 117)

Gracias a esta búsqueda realizada en las bases de datos del centro de documentación de la universidad de Antioquia en la facultad de educación, se logra identificar que hay muy pocas investigaciones en educación relacionadas con la magnitud volumen. La investigación hallada, se centra su atención en la enseñanza de la magnitud volumen desde las situaciones problemas, dejando a un lado el proceso de aprendizaje de dicha magnitud, esto cuestiona y nos reta a poner el interés en la enseñanza aprendizaje de la magnitud volumen.

Otro de los trabajos encontrados en relación con el tema de investigación fue “Los medios culturales semióticos: una posibilidad para aproximarse a la multiplicación” por Jhonathan A. Gallego Cerón, Duvan E. Restrepo Martínez, Susana Betancur Peláez y Jessica Tapias Vásquez, en este trabajo, una de sus conclusiones tiene que ver con que:

“A la hora de enfrentarse con una tarea las estudiantes se valen de gestos, palabras, esquemas y otros medios cargados de significados culturales para comprender lo que deben hacer y proceder a llevarlo a cabo. Estos medios están dotados de sentidos culturales que determinan sus formas y sus usos en los sujetos.” (p. 60)

En este sentido, el proceso de objetivación está mediado por un conjunto de elementos, como un lenguaje verbal y escrito, acompañado de unos gestos y acciones kinestésicas, que permiten evidenciar cómo las estudiantes toman conciencia y se apropian de los objetos matemáticos, proporcionando información que es útil para esta investigación.

5. Diseño de la investigación.

Para la presente investigación, fue necesario hacer una reflexión en torno a lo que es el diseño de la investigación ya que, desde lo expuesto por Cerda (1995), esta “(...) *sirve para designar el esbozo, esquema, prototipo, modelo o estructura que indica el conjunto de decisiones, pasos, fases y actividades por realizar en el curso de una investigación.*” (p. 128) es así como se puso la mirada en torno a dos aspectos en la investigación que se llevó a cabo. El primero tiene que ver con el tipo de enfoque en el que se basa la investigación a la luz de Sandoval (1996) en su texto *Investigación cualitativa*. El segundo corresponde a la metodología, la cual es guiada a partir de lo propuesto por Robert Stake (1998) apoyado en el trabajo *Investigación con Estudio de Casos*.

5.1. Diseño Metodológico.

Es primordial para toda investigación tener claro el **diseño metodológico** que se llevará a cabo durante el transcurso de la misma. Por ello, es de resaltar que en ningún momento se tuvo la intención de llevar un problema de investigación a la institución, por el contrario lo ideal era que dicho problema surgiera del contexto y de las necesidades de la misma, a partir de las observaciones realizadas en la institución por parte de los investigadores a los procesos de enseñanza y aprendizaje entorno a objetos matemáticos, dicha observación se evidenció en los “**Hallazgos Iniciales**” y a partir de las situaciones encontradas, realizar una mirada a lo propuesto por el Ministerio de Educación (MEN) en los Estándares y los Lineamientos Curriculares, para con ello hacer un contraste con lo encontrado en el PEI de la institución.

De igual manera se realiza “**Una mirada a los conceptos**” presentes en la problemática hallada, teniendo en cuenta que los factores sociales y culturales intervienen en el proceso de

aprendizaje de las matemáticas por parte de las estudiantes. Además, se realizará un “**Estado del Arte**” sobre las últimas investigaciones en educación, con relación a la problemática de la presente investigación.

5.2. Enfoque.

En esta investigación toma importancia la interacción dada entre los investigadores y las estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático, debido a esto, se decide enfocarse en una investigación de tipo cualitativo y no de tipo cuantitativo, dado que, con lo planteado por Sandoval (1996), las investigaciones de tipo cuantitativo no permiten una interacción entre los investigadores y los investigados, por lo que aquí no habría posibilidad para la apropiación de un saber a partir de esas interacciones. Además, los hallazgos que se generan parten del proceso de investigación *a través del diálogo, de la interacción y la convivencia*.

El aula de clase como escenario que posibilita la interacción entre sujetos diferentes, con costumbres y diversas maneras de percibir la realidad, conlleva a que el trabajo del investigador, con un enfoque cualitativo, tenga una postura constantemente reflexiva constantemente, dispuesto a escuchar, a dialogar e interactuar con sus investigados para así identificar prácticas cotidianas y entender aspectos comunes que ayuden a responder la pregunta de investigación.

Los significados construidos a partir de dichas interacciones se convierte en un componente importante para el desarrollo de la investigación ya que es útil para reconocer e interpretar los elementos que intervienen en la enseñanza de los aprendizajes, sin olvidar que existen factores sociales y familiares que interfieren en este proceso, permitiendo comprender la realidad, los

contextos en los que las estudiantes permanecen y se forman, por lo que dichos factores son elementos que puede ser tenidos en cuenta para los análisis.

En consecuencia la investigación que se propone, se fundamenta en la interacción y la importancia de trabajar con lo humano, reconocer sus subjetividades y a partir de esa intersubjetividad construir saberes que nos permita conocer un poco la realidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen en dicho contexto, partiendo de ese diálogo, escucha y acercamiento a las actitudes y aptitudes de las estudiantes.

De esta manera, se tiene en cuenta diversos factores a la hora de analizar y plantear una pregunta de investigación por lo que consideramos que el estudio de casos podrá ser de ayuda para el desarrollo propicio de ésta, debido a que este tipo de investigaciones ha sido pensada desde contextos particulares como el aula de clase, es en este escenario nos podremos centrar en casos específicos que llamen nuestro interés con la intención de indagar sus procesos y dar respuesta a la pregunta de investigación por medio de la recolección de los datos con su respectivo análisis e interpretación.

5.3. Estrategia.

5.3.1. Estudio de casos.

Como ya se mencionó, para nuestra investigación resultó conveniente utilizar el estudio de casos, ya que nos acercó más a fondo a lo que se pretendió investigar, puesto que el interés está puesto sobre el papel que juegan los medios semióticos en la toma de conciencia de los objetos matemáticos por las estudiantes y la forma como se apropian de ese saber. Se usa el estudio de casos, ya que a partir de las interacciones que se tuvieron con las estudiantes de grado 6° de la

institución se pudieron notar actitudes que llamaron nuestra atención desde la forma en cómo se expresan con su lenguaje y gestos hasta la forma en cómo plantean sus dudas e interrogantes.

El interés de esta estrategia reside en comprender e interpretar el caso desde su singularidad y particularidad, sus procesos específicos únicos que no pueden corresponder a otros casos. En estos, los investigadores pueden poner toda la atención e interés por investigar (Stake, 1998), cada caso habla de la realidad objeto de estudio desde su aporte de peculiaridad. De Stake (1998) se pueden leer tres tipos de casos: (i) el estudio de casos Intrínseco, (ii) instrumental y el (iii) estudio de casos colectivo:

En la presente investigación resulta conveniente utilizar el estudio de casos intrínseco dado que el caso llama la atención por las especificidades propias que tienen un valor en sí mismo y pretenden alcanzar una mejor comprensión del caso concreto a estudiar.

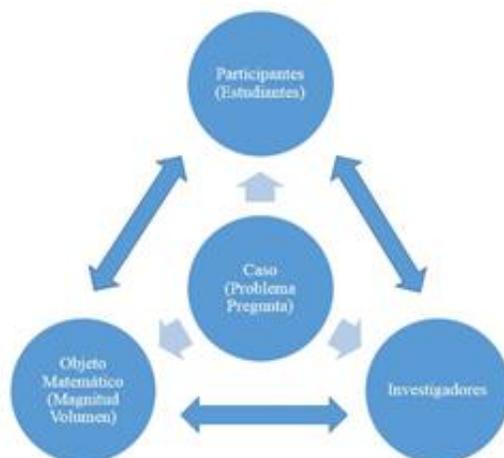
Para la selección de los casos en una investigación cualitativa es importante seguir una serie de recomendaciones para la acertada selección de estos, tales como lo es que cada caso seleccionado debe tener *la máxima rentabilidad de aquello que aprendemos*, es decir ya establecido los objetivos, se deben seleccionar casos que ayuden al acertado desarrollo de la investigación; ya que no todos los casos se desarrollan correctamente. También, se debe tener en cuenta que es importante *la valoración del progreso en los primeros momentos*.

En el desarrollo de la investigación se seleccionó un grupo de estudiantes que se destacan por su responsabilidad y compromiso con la clase de matemáticas, por la motivación que demuestran por aprender cosas nuevas, por ser estudiantes espontáneas que constantemente se inquietan por lo que se les dice y se les muestra, sobresaliendo en la forma como tratan de entender con sus propias palabras como si realizaran una traducción de lo que se les plantea a su propio lenguaje, permitiendo así, que se apropien de los conceptos y relacionen la matemática con la vida

diaria. Consideramos que ellas nos serán de ayuda para encontrar aspectos importantes que puedan aportar a nuestra investigación ya que estamos buscando en detalle las interacciones de las estudiantes con su entorno y con su contexto.

El estudio de casos nos facilita analizar e interpretar las acciones, decisiones, lenguaje o interacción entre las estudiantes en el aula de clase. Además, los participantes que conforman este estudio de caso, nos ayudaran a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación ya que implica una lectura exhaustiva del contexto de cada estudiante, de la forma en cómo relaciona los objetos matemáticos con su entorno y sus necesidades, de cómo el sujeto con base en las experiencias vividas, la forma en que se les pregunta toman decisiones frente a lo que se le plantea y surge en la escuela. Por esta razón, se reafirma que el estudio de caso permite realizar dicha lectura, aproximándonos a una interpretación adecuada de cada una de las actuaciones de las participantes del caso.

De otro lado, los investigadores se constituyen como personas que conocen y manejan el tema que se está investigando, pues son ellos los encargados o responsables de describir e interpretar, es decir, dar las explicaciones, a la luz de las teorías de referencia, de lo que se observa de los casos en cada una de las interacciones que se dan con las participantes. Esto nos permitirá realizar una triangulación (*infograma 2*) la cual consiste en poner como centro de atención cada uno de los casos de la investigación y realizar los análisis y las relaciones con las teorías a partir de cómo se presenta en las participantes de la investigación. Por lo que el investigador toma un papel fundamental de la investigación, como plantea Stake (1999) “(...) *la función del investigador cualitativo en el proceso de recogida de datos es mantener con claridad una interpretación fundamentada. Los investigadores sacan sus conclusiones a partir de las observaciones y de otros datos*” (p. 21)



Infograma 2: Triangulación de los datos con estudio de casos.

5.4. Técnicas de recolección de la información.

En el desarrollo de la investigación se hizo uso de diferentes técnicas para la recolección y el registro de la información, la cual fue obtenida de las diversas tareas, y de la misma labor conjunta en el aula de clase, entre estudiantes y maestro, permitiendo caracterizar y describir el proceso de objetivación y subjetivación en la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen.

A continuación, se presenta cada una de las técnicas utilizadas.

- Las Tareas
- Las Entrevistas
- Los Diarios de Campo Pedagógicos
- Registros Fotográficos

5.4.1. Entrevistas.

Son usadas con frecuencia en las investigaciones sociales con enfoques cualitativos debidos a que estas permiten una interacción con el entrevistado y una descripción en torno a sus acciones, en este sentido, “*La comunicación interpersonal establecida entre el investigador y el sujeto de estudio a fin de obtener respuestas verbales a los interrogantes planteados sobre el problema propuesto*” (Canales, citado por Díaz-Bravo, Torruco-García, Martínez-Hernández, & Varela-Ruiz, 2013). Al ser la comunicación su principal herramienta, la entrevista debe ser preparada y detallada en las que se evadan respuestas simples, como un sí o un no, con la intención de obtener la mayor descripción y claridad en las respuesta dadas por parte del entrevistado.

También en la realización de la entrevista se requiere que el investigador escuche con atención y tenga un plan de registro de la información, es así que el “*(...) el entrevistador sobre todo debe escuchar, quizá tomar algunas notas, pocas o muchas, según requiera la ocasión, pero sin dejar de controlar la recogida de datos*” (Stake, 1999, p. 64). A partir de las tareas propuestas en la investigación se hizo necesario realizar entrevistas para darle claridad y profundidad a los productos realizados por las participantes. De esta manera, se realizarán entrevistas con cada participante de la investigación, con la intención de que dichas entrevistas no sean muy formales, por el contrario la intención es que las niñas se sientan en confianza y puedan desarrollar un diálogo desde lo que ellas han realizado, piensan, observan y saben acerca de las preguntas que se les plantean, estas entrevistas arrojaron información para el análisis en la investigación.

5.4.2. Tareas.

En esta investigación se entiende como tarea a las elaboraciones propuestas por los maestros que promueve en las estudiantes el uso de los sentidos, lenguaje, gestos, acciones, signos, y artefactos con el fin de dar sentido a diferentes conceptos matemáticos. El diseño de las tareas cuenta, por un lado, con el motivo del docente que pretende analizar cómo estos medios semióticos intervienen en la *toma de conciencia* de los objetos matemáticos. Por otro lado, se encuentra el motivo que le da cada estudiante con respecto a los objetos matemático y su proceso de aprendizaje.

5.4.3. Diarios de Campo Pedagógicos.

Esta técnica asume la tarea de resolver problemas prácticos y reflexionar dichos los elementos para modificar las prácticas. (Bell, 2002). Los diarios de campo permiten hacer un registro y descripción detallada en torno a las observaciones que hace el investigador sobre las acciones y decisiones de las estudiantes cuando se enfrentan a una tarea, de esta manera, se convierten en una técnica realizada en cada visita a los centros de práctica que aporta a la reflexión del proceso de enseñanza y aprendizaje, el ambiente escolar, las acciones y procesos de las estudiantes.

Los diarios de campo pedagógicos parten de la observación y las experiencias dadas en el aula de clase, puesto que en este se plasma de manera reflexiva aquellos aspectos que resultan fundamentales para el interés de la investigación a partir de la interacción con las estudiantes, por este motivo, para el diseño de los diarios de campo pedagógicos se propuso que contenga: número y fecha de diario de realización, objetivos de la intervención, palabras claves, descripción general de lo desarrollado, y finalmente la reflexión y análisis a luz del horizonte teórico en el marco del proyecto.

6. Horizonte teórico: Una mirada a los conceptos

En el desarrollo de la investigación se consideró fundamental cómo diversos medios como lo son, el lenguaje, las acciones kinestésicas, las formas de preguntar a las estudiantes, las interacciones en el aula de clase, se encuentran inmersos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, evidenciando a través de ellos, la toma de conciencia de los objetos matemáticos por parte de las estudiantes. Por lo tanto, en este capítulo se presentan elementos teóricos asociados con los intereses de la investigación en relación con la Teoría histórico cultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: Teoría de la Objetivación, así como la importancia de los Medios Culturales Semióticos, planteados por Luis Radford, en ella se encuentra como estos medios están dotados de sentidos culturales que determinan sus formas y sus usos dados por los sujetos en el momento de enfrentarse a las tareas propuestas por el maestro.

Uno de los aspectos fundamentales de la investigación es la Magnitud Volumen y su Medida, que al igual que los anteriores conceptos harán parte de nuestra investigación y requieren ser abordados desde una mirada histórica, social, y su tratamiento escolar, por esto, nos remitimos al carácter histórico, pensando en cómo el hombre ha venido dándoles sentido a esta magnitud, también, como se ha venido planteando su enseñanza, y como es visto el aprendizaje de dicho concepto matemático desde autores como Witold Kula, María del Carmen Chamorro, María Ángeles del Olmo Romero y Juan Díaz Godino. En la siguiente tabla (*Tabla 1*) se presenta el horizonte teórico que orienta la investigación.

Teoría de la objetivación	Magnitud Volumen
<ul style="list-style-type: none"> • Labor • Saber • Objetivación • Subjetivación • Conocimiento • Conciencia • Medios semióticos de objetivación 	<ul style="list-style-type: none"> • Carácter Histórico • Enseñanza y aprendizaje
Radford	Chamorro <u>Godino</u> <u>Kula</u> Olmo

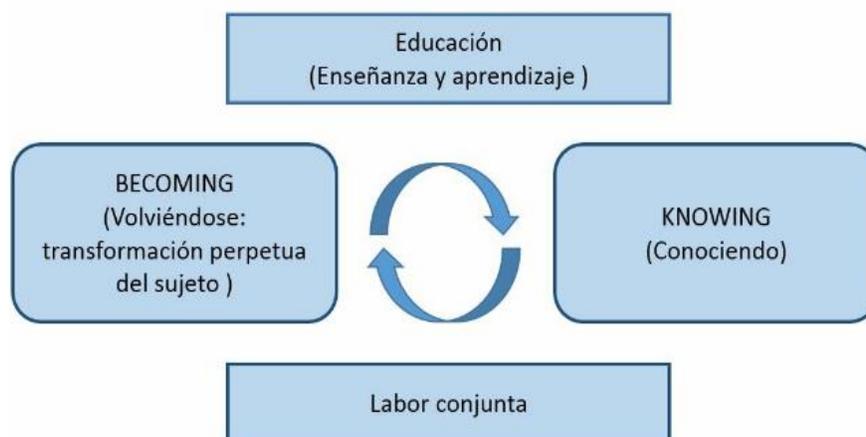
Tabla 1: Ilustración de autores en torno a las teorías trabajadas.

6.1. Teoría histórico cultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

Teoría de la Objetivación

La teoría de la objetivación expuesta por Luis Radford da cuenta de los procesos de enseñanza y aprendizaje como procesos históricos-culturales, para ello propone una re-definición del papel de la educación matemática, en la que su objetivo no es solamente que los sujetos aprendan un objeto matemático sino también que se conviertan en alguien, en seres críticos, reflexivos y éticos, de esta manera, la teoría de la objetivación propone que la educación matemática se articula alrededor de dos ejes, como se ve en el siguiente infograma (*infograma 3*) el primero de ellos, es el concepto de *saber* que hace referencia al acto de *conocer* (*knowing*), el segundo es el *ser*, es decir, la transformación perpetua del sujeto (*becoming*), los cuales no son procesos paralelos sino por el

contrario una labor conjunta entre alumnos y profesores, y es a través de esta labor que se producen saberes matemáticos, pero al mismo tiempo subjetividades, donde el ser y el saber se constituye simultáneamente, es decir, ocurre la transformación del sujeto a medida de que conoce pero al mismo tiempo el saber está siendo constituido (Radford. 2014).



Infograma 3: Proceso de Objetivación.

Para entender el proceso de enseñanza y aprendizaje en la presentes investigación, Radford propone la *lógica cultural de producción*, la cual reposa en los conceptos del saber y el ser, a partir, de la producción de la vida material (artefactos, saberes cultural), y la producción del existencia humana, en el caso de la escuela, está mediatizada por las formas de producción del conocimiento (nociones de saber, de adquirir y probar) y las formas de cooperación entre los individuos (tipos de interacción).

De esta manera, la Teoría de la Objetivación al proponer la redefinición del objetivo de la educación matemática, sugiere unos conceptos fundamentales, que proporciona en la investigación bases para entender el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, como lo es el concepto de saber el cual es considerado como *“una síntesis evolutiva culturalmente codificada*

de acción y reflexión” (Radford, 2014, 13) es así, como el saber se mueve a lo largo de los planos de la interacción y de la acción mediatizada. Otro de los conceptos propuestos, es la idea de Labor, que ha sido considerada como una “(...) *forma social de acción conjunta (...) es a través de esta que los individuos se desarrollan y se transforman continuamente.*” (Radford, 2014, p. 137), En sentido, la labor entre maestros y estudiantes juega un papel fundamental para la toma de conciencia de los objetos matemáticos.

Al interior de la idea de labor, se encuentran inmersos los ejes mencionados con anterioridad, como primero de ellos es el concepto de “conociendo” (Knowing), el cual, queda definido como “*toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.)*.” (Radford, 2014, p. 142). De esta manera, se centra la atención en esta investigación en el papel que juegan los Medios Semióticos Culturales en la enseñanza y aprendizaje, entendiendo estos como el conjunto de acciones, lenguaje, tanto escrito como verbal, gestos, signos y artefactos que permiten evidenciar cómo los estudiantes toman conciencia de los objetos matemáticos.

El segundo eje que está inmerso en el concepto de labor, es el de volviéndose (becoming) “(...) *como la formación del alumno en tanto que sujeto humano (es decir, volviéndose o becoming, esto es, la transformación perpetua del ser)*” (Radford, 2014, 135). En este sentido, al mismo tiempo en el que el estudiante toma conciencia de los conceptos, mediado por la cultura material, la subjetividad de este se está transformando, cambiando sus acciones y sus formas de concebir los objetos.

Para entender e investigar un poco más estos conceptos de conociendo y volviéndose se hizo necesario desarrollar otros que abarcarán su sentido histórico, cultural y social,

encontrándonos así, con los elementos de Objetivación y Subjetivación. La Objetivación hace referencia a “(...) *el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión constituidas histórica y culturalmente.*” (Radford, 2014, p. 141). Y la subjetivación “*consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo.*” (Radford, 2014, p. 142) Donde el estudiante toma posición como agente importante de una comunidad donde participa, reflexiona e interactúa, mediante su lenguaje, gestos, acciones kinestésicas en torno a los objetos matemáticos.

Como sujetos que pertenecemos a una sociedad, con costumbres, creencias culturales históricamente construidas, no podemos olvidar que estamos mediatizados por unos Medios Semióticos Culturales, así que, cuando nos enfrentamos a las vivencias en un espacio en el que se genere una confluencia de culturas y creencias como lo es el salón de clases, nuestra historia, lenguaje, acciones kinestésicas, gestos, artefactos, van a mediar para definir la forma como tomamos conciencia del conocimiento. Por esta razón, es que reafirmamos que en el proceso de objetivación, existen factores que son fundamentales, como lo son los Medios Semióticos Culturales.

Por ende, desde esta perspectiva el aula de clase aparece como un escenario donde se entrelazan formas culturales de pensamiento y de ser, en este espacio aprender no es simplemente obtener un conocimiento, por el contrario es un proceso donde el ser se forma y se transforma, ya que para esta teoría tanto el ser como el saber están siendo simultáneamente constituidos, estando presente lo social y lo cultural que trae el sujeto consigo, donde juegan un rol importante el lenguaje, los signos y los artefactos, además, se abre la posibilidad de la interacción entre los

individuos, todas estas acciones que se dan mediatizadas en el aula de clase para llegar a la objetivación del saber, es lo que se desea indagar desde la teoría de la objetivación.

6.2. Tratamiento Escolar y Didáctico de la Magnitud Volumen.

6.2.1 Un poco de historia al concepto de medida

La historia da cuenta de siglos y siglos de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y la naturaleza de las matemáticas; es decir, sobre si las matemáticas existen fuera de la mente humana o si son una creación suya; si son exactas e infalibles o si son falibles, corregibles, evolutivas y provistas de significado como las demás ciencias.

(MEN, Lineamiento Curriculares, 1998, p. 10).

En el transcurso de la historia ha venido tomando fuerza la importancia de la enseñanza de las matemáticas adquiriendo sentido en el momento que se reconoce su historia y su función. A través del tiempo surgían nuevas necesidades sociales, culturales, políticas y económicas. El hombre con la intención de dar respuesta a estas necesidades hizo uso de algunos aspectos de lo que hoy conocemos como *matemáticas*, así, fue desarrollando poco a poco diferentes concepciones que transformaron las prácticas de una sociedad, por lo tanto, resulta fundamental tener presente la historia en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que, es a través de ella que se comprenden fenómenos y situaciones diarias, siendo una ciencia que nos permite tomar decisiones y cambiar nuestra manera de ver y actuar en el mundo. De esta manera, se busca que el estudiante aprenda y

se apropie de los objetos matemáticos reconociendo su importancia, la aplicabilidad en su diario vivir, así como de su proceso histórico.

En este sentido, es importante dedicar parte de la presente investigación a rescatar la importancia de lo histórico y social de la *medida*, presentando una serie de reflexiones y transformaciones, puesto que, desde la antigüedad medir es una necesidad vital para el hombre, Durante siglos el hombre fue perfeccionando los sistemas de medida usados, hasta el punto de llegar a lo que hoy en día conocemos como Sistema Métrico, un sistema que fuera coherente y cumpliera su cometido, es decir, que permitiera la satisfacción de las actividades diarias, pero que el mismo tiempo tuviera legitimidad y credibilidad.

Al dar significado a las magnitudes desde una mirada histórico-epistemológico es necesario afirmar que la medición es una construcción cultural, es decir, que surgen de la necesidad de comunicar cantidades respecto actividades cotidianas de caza y recolección reconociendo que las medidas antiguas poseen un sentido social definido, el surgimiento de estas partieron de las necesidades del hombre, como plantea Kula (1970), “*El trasfondo social de cada sistema de medición ha sido el origen de su inercia*” (p. 6), como por ejemplo cada medida servía para cada caso, el pie para distanciar las plantas de patatas, el paso para la longitud, el tiempo que transcurría para la recolección de la siembra, de esta manera, cada vez que para el hombre surgían nuevas necesidades se transforman estas medidas.

En los siglos XVI y XVII el hombre era considerado como la medida del universo, (Protágoras, citado por Kula, 1970) pues las partes del cuerpo se utilizaban para medir el mundo, pero la gran desventaja de las medidas antropométricas era la falta de múltiplos y submúltiplos, por ejemplo, el paso no tenía por qué dividirse en un número exacto de codos, esto causó todo un proceso de cambios que a través de los tiempos nos llevó a lo que ahora llamamos unificación de

las unidades de medida; es así, como se reafirma la importancia del entrelazamiento entre el carácter histórico-social y el pensamiento métrico, como lo diría Anacona (2003) *“Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural”* (p. 33).

En este sentido, es posible observar cómo el sistema de medidas se origina en las actividades que el hombre desempeñaba en su cotidianidad, por lo que cada magnitud tiene todo un significado, toda una utilidad, es por esto que a la hora de trabajar en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento métrico resulta fundamental relacionar los conceptos que hoy en día conocemos, con todo el proceso histórico y social por lo que tuvo que pasar para que se constituyera en lo que hoy conocemos, por lo tanto, no se pueden desprender los aspectos históricos que sustentan los conceptos a la hora de trabajarlos en las aulas de clase permitiendo así comprender su aplicabilidad en la cotidianidad y su importancia para el desarrollo social.

6.2.2 Tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen.

Para el tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen la investigación se apoya en autores como María Ángeles del Olmo Romero, María del Carmen Chamorro y Juan Díaz Godino. Estos autores aportaron desde sus reflexiones escritas, diferentes conceptos y el tratamientos que debe de ser tenido en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de las magnitudes, más específicamente de la magnitud volumen. Además de trabajar bajo la mirada de los autores antes mencionados se tendrán en cuenta los Estándares Básicos en Matemáticas y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, ambos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

La magnitud volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio y puede ser tratada de dos formas, una como magnitud unidimensional (*proceso aditivo*) y la otra como una magnitud “multilineal” o derivada y por ende como producto de medidas lineales (*proceso multiplicativo*). Según los planteamientos de Chamorro (2002) el volumen puede ser tratado como *medida de tipo directa*, donde se compara, evalúa una medida u el número de veces que corresponde a una cantidad de magnitud, aquí se usa un número real positivo que correspondería a esa cantidad de veces que está contenida la unidad u . lo que significa que una longitud se compara con otra longitud, una superficie se compara con una superficie, en este sentido, se utilizaría un volumen para rellenar otro volumen, haciendo uso de un proceso aditivo donde se realiza un conteo del número de veces que se ha utilizado el *patrón* con el que se ha comparado. El volumen como producto de dos medidas tiene que ver con la multiplicación de sus lados, ya no se trata revisar cuantas veces está contenido un volumen en otro volumen, sino que se realiza un proceso indirecto, en donde se toman las medidas del *largo*, *ancho* y *alto*, es decir sus tres dimensiones, para determinar el volumen de la figura, haciendo uso de procesos multiplicativos, por ejemplo para hallar el volumen de un paralelepípedo se deben de multiplicar las medidas de sus tres dimensiones, por eso su tridimensionalidad.

Desde los planteamientos de autores como Chamorro y Olmo, el tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen se debe de realizar desde los dos aspectos mencionados anteriormente (Carácter aditivo y carácter multiplicativo), pues ambos ayudan a desarrollar diferentes aspectos teóricos de la magnitud volumen en los estudiantes. De este modo en la presente investigación se realizan las tareas propuestas a las estudiantes utilizando ambos aspectos.

Elementos conceptuales

Con el fin de facilitar la comprensión de diferentes conceptos relacionados con la magnitud volumen, a continuación se presentan nociones fundamentales: Magnitud, Cantidad de Magnitud, Unidad de Medida, Patrón de Medida, Sistema de Medida e Instrumento de Medida.

Magnitud: Es un atributo susceptible de ser cuantificable, es decir, asignar un número de acuerdo a una unidad de medida, permite además ser comparables sus cantidades, puesto que nos permite determinar cuánto más o cuanto menos. Como se dijo anteriormente, la magnitud volumen como atributo, se usa para designar la característica de los cuerpos para ocupar un espacio.

Algebraicamente se define la magnitud volumen (al igual que otras magnitudes) como un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades de magnitud (cantidades de volumen o volúmenes).

Así, que la magnitud volumen forma el conjunto V , no vacío, dado que contiene como elementos del conjunto que son las cantidades de magnitud que denotamos como v_1, v_2, \dots y que se constituye en una magnitud, pues en ella puede definirse la relación de equivalencia ($=$) y la operación ($+$), con las siguientes propiedades:

Para la relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $\forall a \in A \rightarrow v_n = v_n$
- Es simétrica: $\forall v_1, v_2, \in V \rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow v_2 = v_1$
- Es transitiva: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \rightarrow v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3 \Rightarrow v_1 = v_3.$

Para la operación interna ($+$):

- Clausurativa: $\forall v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$
- Uniforme: $\forall v_1, v_2 \in A \wedge \forall v_3, v_4 \in V \rightarrow (v_1 = v_2) \wedge (v_3 = v_4) \Rightarrow (v_1 + v_3 = v_2 + v_4)$

Nota: Esta propiedad da cuenta de la compatibilidad de la suma con respecto a la relación de equivalencia.

Otras propiedades de la operación: (+)

- Asociativa: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \rightarrow (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- Conmutativa: $\forall v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- Modulativa: $\exists v_0 \in V / \forall v \in V \rightarrow v + v_0 = v_0 + v = v$

Si en el conjunto V se ha definido la relación de equivalencia y la operación (+) con las condiciones para cada una, decimos, que “los elementos de V definen una magnitud” (Luengo, 1990, p.48) entendiendo ésta, por la cualidad común que hace que los elementos a_1, a_2, a_3 , de V sean igualables. Téngase en cuenta que los elementos de V no son los objetos en sí, sino clases de equivalencia de V . Quedando definida la magnitud $(V,+)$ como un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Cantidad de Magnitud: se refiere a aquello que tienen en común los elementos que son iguales entre sí. De esta manera, todos los objetos que tienen la misma cantidad de magnitud forman una clase de equivalencia.

Algebraicamente Las cantidades de magnitud se pueden comparar entre sí, significa que en los elementos de V puede definirse una relación de orden; esto es, dados los elementos de V , al compararlos bajo la relación \leq , puede suceder que, sean iguales, mayores o menores, así

$\forall v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 \leq v_2 \vee v_2 < v_1$, y con las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $\forall v_1, \in V \rightarrow v_1 \leq v_1$
- Antisimétrica: $\forall v_1, v_2 \in V \rightarrow (v_1 \leq v_2 \wedge v_2 \leq v_1) \Rightarrow (v_1 = v_2)$
- Transitiva: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \rightarrow (v_1 \leq v_2 \wedge v_2 \leq v_3) \Rightarrow (v_1 \leq v_3)$

Unidad de Medida: Cantidad de magnitud cualquiera que sirve para comparar (es algo abstracto, no es tangible).

Patrón de medida: Se caracteriza por ser físico, único y tener un carácter convencional. En el libro “*las medidas y los hombres*” de W. Kula, se encuentra que a través de la historia y el desarrollo de las sociedades se hacía necesario la inmutabilidad (imposibilidad de ser modificado) de los patrones de medida puesto que debido a su fragilidad muchos de los ya construidos se habían deformado, por esto, se establecieron las garantías de inmutabilidad, que se clasificaban en tres grupos: control social, supervisión de las autoridades y sanción eclesiástica.

La garantía de inmutabilidad estaba en relación con el material de fabricación, era necesario que fueran caros, además guardados por la autoridad del pueblo, por ejemplo entre los Judíos los patrones eran conservados en el templo sagrado, en este mismo sentido, los romanos lo guardaban en el capitolio, continuamente la garantía estatal en la aplicación del sistema métrico, cada país aseguraba con seguridad de alarmas los patrones. Todas las garantías no fueron suficientes para brindar la seguridad, por tanto, la fórmula propuesta en 1961, propone por ejemplo, al *metro* equivalente a 1.650.763,73 longitudes de ondas en el vacío, al ser esta medida se extinguen los problemas con respecto a la mutación y el fraude.

Instrumento de medida: Objeto material donde están representadas las unidades de medida, en el caso del volumen los instrumentos que se utilizan cuando el carácter de la magnitud es directa son: pipeta, probeta, cubos. La magnitud volumen derivada en términos de la longitud (Carácter multiplicativo).

Sistema: *Para el caso nuestro se trata de un sistema métrico decimal:* Conjunto de unidades conmensurables entre sí y cuya razón entre las unidades contiguas es constante de 1 a 10. Un sistema de unidades posee: (i) los patrones de medida, (ii) un método para formar unidades mayores y menores y (iii) las definiciones de las magnitudes derivadas. Gettys, (1991, p, 5)

Elementos procedimentales

Dentro de la medición del volumen se reconocen como fundamentales los siguientes procesos: Exactitud, Precisión, Percepción, Medición, Cálculo y Estimación.

Exactitud: Depende del sujeto y de las técnicas que él emplea para medir. Es decir, tanto de las formas como hace uso del instrumento como la calibración del instrumento, esto puede deberse a defectos en su fabricación o la forma como hacen uso del objeto patrón. Por ejemplo cuando se trabaja con la magnitud volumen la *exactitud* depende en gran medida del instrumento que se utiliza para medir y de la persona que está midiendo pues la forma en cómo utiliza el instrumento es determinante para el resultado que logra obtener.

Precisión: Es una característica propia del instrumento de medida, puesto que la precisión depende de la última escala con la cual está calibrado, por ejemplo, una cinta métrica lo máximo que puede expresar es en milímetros, en el caso de la magnitud volumen de manera general la última escala con la que se trabaja en la cotidianidad es centímetros cúbicos, ya que el pensar en milímetros cúbicos y cantidades menores se requiere de instrumentos calibrados con esas unidades y el hombre no los manipula tan fácil.

Medir: Comparar cantidades de magnitud tomando una de ellas como *unidad de medida* (medidor) y la otra como cantidad a *ser medida*.

Percibir: Conocimiento adquirido a través de la experiencia o adquirir una idea a través de los sentidos.

Estimar: “Medir a ojo”, asignar una medida sin hacer uso de un instrumento de medida.

Calcular: Dar la medida de algo mediante operaciones matemáticas, ya sea de tipo algebraico-aritmético. Para el caso del volumen se puede hacer uso de un carácter aditivo o multiplicativo, depende del objeto que se desea medir y de la persona que está midiendo.

En correspondencia a los planteamientos de María A. del Olmo, los conceptos de volumen son complejos y difíciles de aprender, por esto resulta necesario pensar en unas orientaciones didácticas que ayuden a estar atentos a la evoluciones de los conceptos y destrezas por parte de los estudiantes, Olmo, et al (1994) plantea unas indicaciones para la enseñanza del volumen, allí se encuentran una serie de fases en la que se pueden trabajar diferentes aproximaciones a la magnitud volumen sin tener que utilizar una construcción formal con los estudiantes, trabajando elementos básicos que faciliten la comprensión de la magnitud. A continuación se presentan las fases de Percepción, Comparación y Medida, propuestas por Olmo, et al (1994).

Percepción

Inicialmente para el tratamiento didáctico del volumen, se aclara que “*el proceso de medida de una magnitud comienza con la percepción de la cualidad que se va a medir*” (Olmo, et al, 1994, p. 47). En este sentido, percibir es distinguir una cualidad de otras que tiene el mismo objeto, es aislar la cualidad en la que estoy colocando mi atención, este proceso para los adultos se vuelve obvio e inconsciente, sin embargo, es fundamental que el maestro ayude a que los niños perciban atributos medibles.

La percepción del volumen de un cuerpo no es algo sencillo, es inclusive más complejo que la percepción del área, ya que a través del sentido de la vista es posible captar en su globalidad la cualidad del área, mientras que para el volumen se deben elaborar representaciones mentales a partir de información que se recibe mediante los sentido, como la vista y el tacto. Actividades táctiles, de llenado, de empaquetado, de visualización espacial y del comportamiento del volumen, pueden ayudar a la percepción del concepto de volumen.

Comparación:

Para realizar procesos de comparación con la magnitud volumen, estos autores proponen tres tipos, el *primero* es utilizando líquidos o granos trabajar la capacidad (“Capacidad-capacidad”), un *segundo* tiene que ver con el “recuento” de cubos, en el caso de que el cuerpo este construido por cubos (“Volumen-volumen”), finalmente el *tercero* es lo que ellos llaman comparación del complementario de un volumen sumergido y el líquido que cabe en el recipiente (“Capacidad-volumen”). A modo orientativo los autores proponen actividades como comparar capacidades, comparar volúmenes y compara volúmenes con capacidades.

Medida:

En algunas actividades de comparación y percepción se han presentado diferentes necesidades de comunicar información, es por esto que resulta fundamental la medición de una magnitud, ya que en términos de una comunicación entre un grupo social se hace más fluida y eficaz si se hace uso de aspectos cuantitativos en vez de cualitativos.

En cuanto al proceso de medida de la magnitud volumen, es necesario utilizar expresiones con los estudiantes tales como “lo que cabe en el hueco de la mano”, “lo que cabe en la boca”, “una cuchara”, esto con el fin de que los estudiantes comiencen a trabajar con una unidad de medida, en un comienzo convencional, que ellos sientan ese instrumento cercana a su entorno, a lo que a diario se enfrentan cuando realizan procesos de medición.

En la fase de medición Olmo, et al (1993) plantean diferentes actividades que pueden ayudar al desarrollo de la misma, entre sus propuestas están, *la elección de la unidad*, en esta es importante trabajar con la necesidad de la adopción de medidas comunes, es decir, objetos con los que los estudiantes estén relacionados, como vaso de plástico, una canica, un cubo (un dado). Otra actividad que proponen es *sistemas de medida* en esta actividad la idea es mostrar diferentes recipientes que alberguen un litro, realizar divisiones de la cantidad, como dividir la cantidad de

un litro en dos partes iguales o en cuatro partes. Esto con miras a que el estudiante pueda determinar la unidad más adecuada para medir el volumen ya sea de una piscina, de un balón o de una copa de vino. Finalmente plantean trabajar con *Instrumento de medida*, para esto, plantean construir un metro cúbico con palos y vértices, centímetros cúbicos, contenedores para volcar líquidos y medir, y sólidos de plástico distintos y con el mismo volumen.

7. Tareas.

Las tareas planteadas en el aula de clase se realizaron en correspondencia al tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen, a la luz de autores como Juan Díaz Godino, María del Carmen Chamorro y María Ángeles del Olmo. Uno de los aspectos que guiaron el diseño de las tareas fueron las fases i) Percepción ii) Comparación y iii) Medida, propuestas por María de los Ángeles Olmo. Se decide utilizar estas fases ya que para la comprensión de la magnitud volumen es necesario el proceso de percepción de la cualidad que se va a medir, luego se comparan los objetos utilizando relaciones como “más que”, “menos que” y “tanto como”, además se debe realizar un reconocimiento de la unidad de medida reiterándola sobre el objeto a medir, asignando así el número de veces que sea iterado. Olmo (1993)

Las tareas que fueron propuestas se diseñaron en correspondencia a cada una de las fases, sin embargo, se reconoce que las estudiantes daban uso de la percepción, comparación y medición en las diferentes tareas propuestas, yendo más allá de la intención del maestro, es así, como en la fase de comparación las estudiantes hacen uso de la percepción y la medición de los objetos, e igual manera en la de fase de medición comparaban los objetos, no siendo un proceso lineal, por el contrario, en cada una de las tareas es posible ver cómo la estudiantes transversalizan las fases de percepción, comparación y medición.

Para las fases de “percepción y comparación” se diseñaron la “Tarea 1: compartiendo nuestros conocimientos” (ver Anexo 2) esta Tarea estaba enfocada a indagar sobre las percepciones y conocimientos previos que tenían las estudiantes en torno a la magnitud volumen se hicieron preguntas tales como: ¿Qué es para ti el volumen?, esta pregunta nace de la idea de analizar que acercamientos han tenido las estudiantes con dicha magnitud y que atributos reconocen de ésta. Otra pregunta fue ¿A qué se le puede hallar el volumen? Con la intención de reconocer que objetos

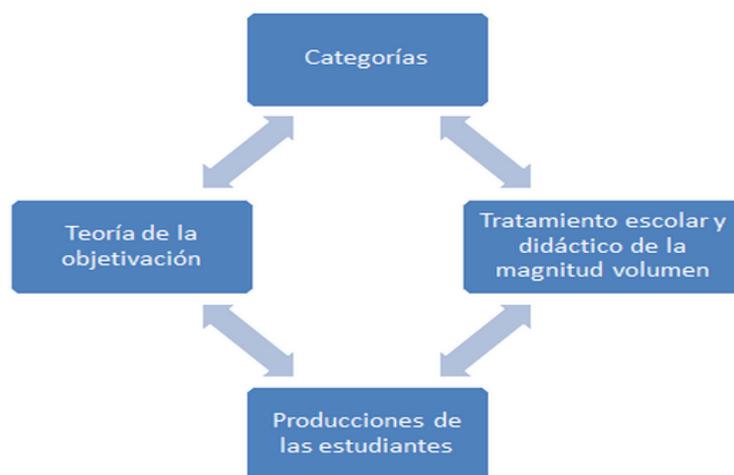
para las estudiantes son susceptibles de medirle el volumen, proponiendo imágenes de objetos tanto de la cotidianidad de las estudiantes (libro), como representaciones comunes de la enseñanza de la matemática (Paralelepípedos). Entre otras preguntas que aportaron información para posteriores análisis.

También se diseñó la Tarea 2: “*Componiendo y descomponiendo objetos con policubos*” (ver Anexo 3) en ésta, la intención de los investigadores inicialmente era que las estudiantes compararan el volumen de diferentes imágenes propuestas, luego, eran ellas quienes construían dichas imágenes utilizando los policubos, llevando estas representaciones bidimensionales a objetos tridimensionales, de esta manera las estudiantes podrán comparar qué figura tiene mayor o menor volumen y verificar el volumen dado inicialmente a las imágenes.

Posterior a las fases de percepción y comparación se pasó a una tercera fase propuesta por María Á. del Olmo, la de medición, por lo que en la “Tarea 3: *Midiendo mi salón*” cuenta las reflexiones que se habían logrado realizar en las tareas anteriores mediante una pequeña discusión con las estudiantes en donde eran ellas quienes expresaban las diferentes formas posibles de encontrarle el volumen al salón de clase. La intención que tenían los investigadores al plantear esta tarea, era caracterizar las diferentes estrategias que utilizaban las estudiantes cuando se enfrentaban a medirle el volumen a objetos de su cotidianidad, como el aula de clase.

8. Análisis.

El análisis se realizó a partir de la sistematización y clasificación de la información recolectada por medio de tareas y a través de otras técnicas, como, diarios de campo pedagógico, grabaciones de audio, video y entrevistas que permitieron caracterizar y describir las acciones, expresiones tanto figúrales como verbales y simbólicas, que las estudiantes utilizaron en el desarrollo de las tareas. Con lo anterior se realizó un proceso de triangulación, como se ve en la figura siguiente, entre las producciones de las estudiantes, las interpretaciones de los investigadores y los referentes teóricos que son la Teoría de la Objetivación (T.O) de Luis Radford, el tratamiento escolar y didáctico de la Magnitud Volumen a partir de María del Olmo, María del Carmen Chamorro, Juan Díaz Godino, y Witold Kula.



Infograma 4: Proceso de triangulación.

En este sentido, Coffey & Atkinson (2003) plantea que “(...) *l análisis es el proceso de descomponer los datos en sus componentes constituyentes para revelar sus temas y patrones característicos*” (p, 10). Con la intención de clasificar y categorizar de manera detallada y reiterativa la información, se revisaron las producciones de las estudiantes en el desarrollo de las

tareas, realizando un proceso de lectura, relacionando lo que realizan las estudiantes con los referentes teóricos, el tratamiento escolar de la magnitud volumen y la Teoría de la Objetivación. Para clasificar la información obtenida gracias a las tareas, se organizaron las respuestas similares de las estudiantes en carpetas, con el fin de identificar una serie de categorías que abarcarán las similitudes en las respuestas, con esto, se encontró unos patrones que permitieron identificar una posible categorización.

En la clasificación se encontraron unas formas de representación que en el marco de la Teoría de la Objetivación de L. Radford se constituyen en elementos fundamentales para los procesos de la objetivación, entendida esta como “(...) *es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente.*” (Radford, 2014, p. 141) además, se hace visible que los medios semióticos, como el lenguaje, tanto verbal como natural y los gestos juegan un papel en este proceso de objetivación.

A partir de lo anterior, se logra identificar las siguientes categorías:

- El volumen como “Conteo de Cubitos”.
- El volumen como “largo por ancho por alto”.
- El volumen como “lleno de”.

8.1. El volumen como “Conteo de cubitos”.

Partiendo de las fases propuestas por Olmo, et al (1994), en referencia al tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen, se decidió plantear una serie de preguntas en relación con la *Percepción y Comparación*, de esta manera, la intención del maestro se centró en dos aspectos, uno era indagar por las percepciones que tenían las estudiantes en torno a la magnitud volumen. Y en el otro, se trató de identificar las posibles acciones y formas de expresión que se desencadenan

al *Componer* y *Descomponer* figuras tridimensionales, haciendo uso de policubos y mallas isométricas.

En este sentido, parte de la primera tarea buscaba que las estudiantes explicaran la forma en como le hallaban el volumen a determinadas figuras, las cuales eran una representación bidimensional de un objeto tridimensional, la siguiente imagen (imagen 3) muestra una sección de la tarea realizada por las estudiantes.

3. Explique: ¿cómo se hallaría el volumen de las siguientes figuras?

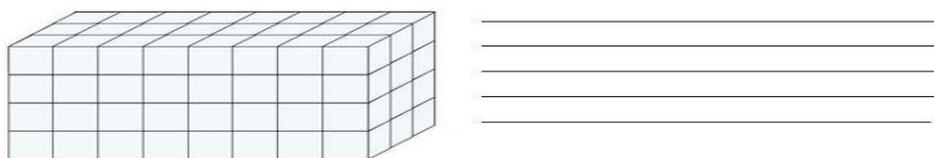


Imagen 3: Pregunta número tres de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

En la segunda tarea (*anexo 3*), la primera pregunta se les propuso a las estudiantes, que construyeran las figuras tridimensionales correspondientes a las imágenes propuestas con los policubos suministrados, la intención del maestro en esta tarea era que las estudiantes se enfrentaran a la *Composición* y *Descomposición* de figuras, en donde deberían reconocer la cantidad de cubos con los que podrían construirlas, permitir además el reconocimiento de la unidad de medida con el fin de determinar el volumen de la figura construida. A continuación se muestra parte de la tarea entregada a las estudiantes, que en el marco de la teoría de la objetivación se entiende ésta como, se mencionó anteriormente, las elaboraciones propuestas por los maestros que promueve en las estudiantes el uso de los sentidos, lenguaje, gestos, acciones, signos y artefactos.

Observa las siguientes imágenes, constrúyelas con los cubos dados y responde las preguntas.

1. ¿Cuántos cubos componen la figura? 2. ¿Qué volumen tiene la figura?

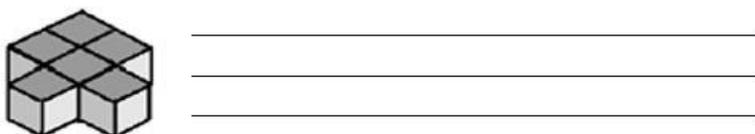
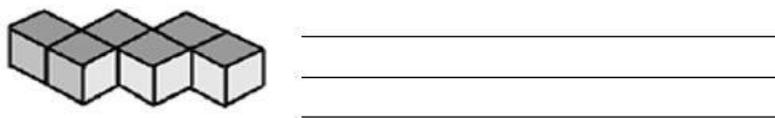


Imagen 4: Parte de la Tarea 2, realizada por las estudiantes.

Las producciones escritas de las estudiantes, las entrevistas y discusiones de clase permitieron identificar una primera categoría en relación con la noción de volumen. En las respuestas tanto escritas como verbales de las estudiantes a la pregunta número tres (*Imagen 5*) de la primera tarea (*Anexo 3*), se hace reiterativa la expresión “contar los cubitos” como un proceso

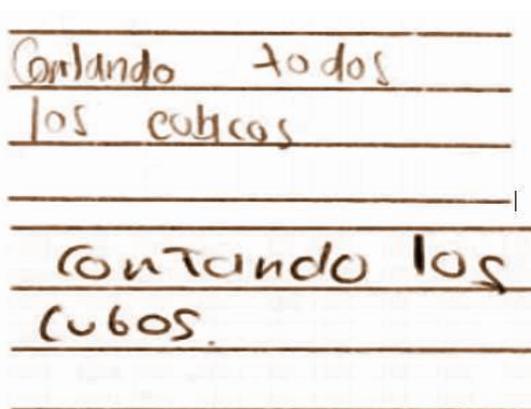


Imagen 5: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

válido para determinar el volumen de una de las figuras propuestas, en estas expresiones las estudiantes usaron un carácter aditivo para hallar el volumen, ya que se referían a contar cada uno de los cubos que componían la figura, identificando el cubo más pequeño como la *unidad de medida*, en este sentido, Chamorro (2003) plantea que la superficie y el volumen pueden ser tratadas como *unidimensionales*, es decir, donde

realizan una medición directa, que implica el uso de estructuras aditivas, ya sea por comparación, división o evaluación, facilitando el reconocimiento de las unidades de medida.

Es importante destacar aquí el papel que juega el uso de diferentes sistemas semióticos tanto por parte del maestro como por parte del estudiante: el maestro hace uso de un lenguaje determinado para facilitar al estudiante la *toma de conciencia* de la situación propuesta, por ejemplo, hace referencia a la “*figura*”, para designar los cuerpos que deben medir, además, hacía uso de gestos, movimientos y preguntas que orientaba a las estudiantes hacia la reflexión de los objetos matemáticos, es así, como los docentes también están siendo formados en la interacción con los estudiantes. Por otra parte, las estudiantes al enfrentarse a la tarea también hacen uso de unos sistemas semióticos, que dan cuenta de cómo *toman conciencia* de las nociones o conceptos propuesto en la intención del maestro, desencadenando en ellas unas acciones y decisiones mediadas por unas formas de expresión como se ve en la pregunta número tres de la tarea uno, en la que dadas las formas de expresión propuestas y las formas de intervención permitió que las estudiantes se valieran del conteo de las unidades cúbicas para determinar el volumen de una figura, como se puede ver en la siguiente entrevista:

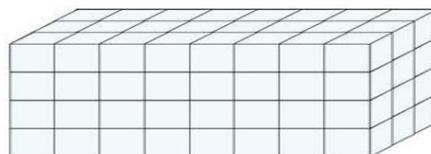


Imagen 6: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

Investigador: ¿Cómo le hallaríamos el volumen a esta figura?, señalándole a la estudiante la figura anterior (*Imagen 6*)

Estudiante: Por los cubitos, Contando como cada cubito

Investigador: Dame un ejemplo de ¿Cómo lo harías?

Estudiante: Mire así, uno, dos, tres... pues así los contaría... los cubitos que tiene el cubo. Señalando con sus dedos los cubitos y utilizando un tono de voz convincente, dando a entender que se trata de algo muy evidente

La estudiante para referirse a la forma en cómo determinaba el volumen de la figura, usó la expresión “*contando los cubitos*”, dado que, la representación de la figura les estaba mostrando un sólido que estaba compuesto por unidades cúbicas, y si estas eran contadas una por una, haciendo una correspondencia entre dos cantidades, podrían hallar el volumen total de la figura. En la entrevista, cuando hace mención de “*uno, dos, tres...*” la estudiante reconoce los cubitos tantas veces como sea necesario para rellenar la cantidad del cubo, haciendo así, una comparación entre la unidad de medida fijada siendo unitaria (cubitos) y la cantidad que se quiere medir (volumen de la figura). En este sentido es posible afirmar que la estudiante al realizar la tarea antes mencionada objetiva la medición del volumen utilizando un proceso de tipo aditivo. De esta manera, Castro, Olmo, Castro (2002) plantean que:

“Medir una magnitud es asignar un número a cada una de sus cantidades, o estados particulares, de forma que puedan ser dichas cantidades representadas por dicho número. Esto exige que a cada cantidad ha de corresponder un número, y recíprocamente, a cada número una cantidad de magnitud” (p. 103).

En las expresiones y gestos de la niña es posible inferir que cuando usa la palabra “cubito” para referirse al cubo más pequeño lo está tomando como su *unidad de medida* y el cubo mayor al que se refiere como “*cubo*” sería el objeto al que le está hallando el volumen, dejando ver que está fijando una unidad de referencia, permitiendo una comprensión de la unidad de medida, como expresa Chamorro (2003) “*(...) la aplicación de la medida u, que hace corresponder a una cantidad de magnitud un número real positivo, (...) usamos una superficie como unidad para pavimentar una superficie, un volumen para rellenar otro volumen*” (p. 246), en este sentido, es posible determinar que la estudiante está tomando conciencia de los atributos de la magnitud volumen, pues está haciendo uso de su propio lenguaje para expresar y explicar un concepto matemático, es decir la estudiante realizó un proceso de subjetivación de un concepto matemático

Radford (2014). De esta manera, a partir de los Estándares Básicos de competencias en matemática se hace énfasis que para la comprensión general de la magnitud volumen son importantes unos conceptos y procedimientos, entre ellos “*La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.*” (p. 63) así desde los planteamientos de Radford, chamorro, y los procedimientos relacionados con el pensamiento métrico expuestos en los estándares, reafirmamos que las estudiantes están siendo conscientes de los atributos de la magnitud volumen.

Asimismo, en la tonalidad de la voz de la estudiante se evidenciaba que el conteo de las unidades para hallar el volumen era natural y evidente, debido a que en la pregunta tres de la tarea uno (*Imagen 7*), la misma figura estaba compuesta o dividida por esas unidades, la forma en cómo

Explica: Contando los
cuadritos.

Imagen 7: Parte de la Tarea 2, realizada por las estudiantes.

se pregunta y la representación utilizada daba seguridad en la respuesta de las estudiantes. Si bien, las respuestas de las estudiantes dejan leer una comprensión de la magnitud volumen “al contar los cubitos”, determinando así su magnitud, una de las estudiantes no lo planteaban con expresiones tales como “cubitos” sino que hacen uso de la palabra “cuadritos”, evidenciando que la representación bidimensional de un objeto tridimensional juega un papel en las respuestas de la estudiante. De expresiones como estas es posible evidenciar que la estudiantes no es conscientes de las tres dimensiones que posee la figura siendo esto una característica necesario para hallar el volumen de una figura.

En este sentido, es importante utilizar en las tareas y diálogos de clase más de una forma de representación, con el fin de evitar que las estudiantes asocien un concepto matemático a una única forma de representación, como plantean Olmo et al (1993) en el caso del volumen deben realizarse estudios integrales que permitan comparar objetos respecto a su medida, plantear la necesidad del uso de la unidad de medida, conocer y usar diferentes unidades, estimar la medida

de diferentes objetos, para finalmente, aplicar estos conceptos a situaciones de la vida diaria, a problemas cotidianos. De esta manera, la forma en que se pregunta y las representaciones que son utilizadas, fueron un aspecto fundamental que incidió en la forma como las estudiantes respondieron a las tareas y diálogos de clase.

Al asignar la palabra “cubito” a cada una de las divisiones del cubo, la estudiante no solo reconoce el objeto que debe medir, sino que también hace un reconocimiento de *la unidad de medida*, como plantean Olmo, et al (1994). Para realizar un estudio integral de la cualidad y su medida es fundamental plantear la necesidad de utilizar una unidad de medida y de comparar diferentes objetos con esta.

En correspondencia a las fases propuesta por Olmo, et al (1994), para el tratamiento a la magnitud volumen, la pregunta cuatro de la tarea dos, (*Anexo 3*) hacía referencia a la *Composición y Descomposición* de figuras, utilizando los policubos para la construcción de las representaciones gráficas propuestas de manera tridimensional, de modo de que las estudiantes logren realizar diferentes comparaciones entre los objetos construidos (imagen 8). Inicialmente, de diversas imágenes irregulares, se les preguntó por ¿Cuál era su volumen? y ¿cuál de las figuras tenían mayor volumen?, las estudiantes utilizaban el conteo para dar la respuesta, al tener el volumen de cada una de las figuras expresaron “Esta es mayor porque contiene más cubitos” y “Esta tiene menos que todas” dando respuesta así a qué figura tenía mayor volumen. De esta manera, se muestra que las estudiantes estaban tomando conciencia de la magnitud, con esto, reafirmamos lo planteado por Olmo, et al (1994). al comparar las figuras, las estudiantes estaban cuantificando los objetos, siendo esto, un elemento importante al momento de la percepción de las magnitudes, puesto que esta última verdaderamente se constituye al comparar qué tanto más o qué tanto menos.

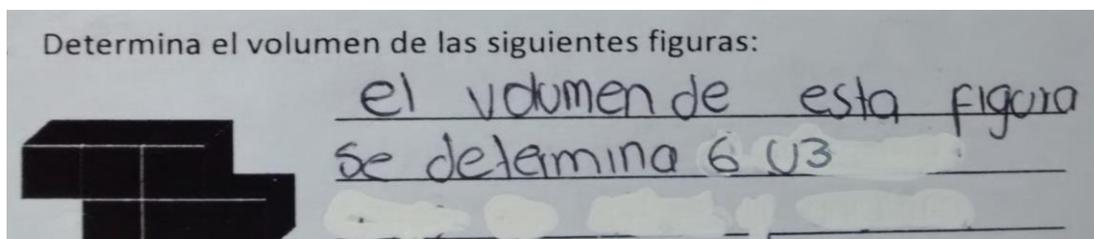


Imagen 8: Parte de la Tarea 2 realizada por las estudiantes.

Con el objetivo de que esas representaciones bidimensionales pasarán a ser representaciones tridimensionales se les hizo entrega a las estudiantes los policubos con la

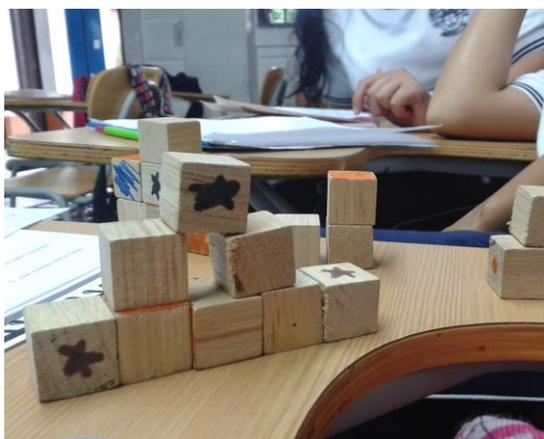


Imagen 9: Construcción con policubos realizada por las estudiantes.

intención, que las estudiantes reconocieran que el volumen se mide en objetos de tres dimensiones y además, realizaran una comparación con el fin de establecer relaciones entre figuras que tenía mayor, menor o igual volumen. Con base en los aportes de Kula (1970) los sujetos pueden tener un aprendizaje significativo del volumen, cuando la enseñanza parte

de la manipulación de su magnitud, en este caso haciendo

uso de objetos físicos.

En este sentido, lo que se buscó en esta tarea es que las estudiantes, siguiendo una serie de preguntas se familiaricen con los objetos, comiencen a manipularlos y tomen conciencia en torno a la magnitud volumen como atributo, al presentar a las estudiantes objetos físicos como los policubos, es posible observar, como la manipulación de estos, motiva el trabajo de las estudiantes, y permite interactuar con las demás compañeras, debido a esto, se evidenció que se apropiaban cada vez más del objeto matemático, identificando el cubo de madera como una unidad cúbica con la que debían componer o “construir” en palabras de las estudiantes, cada una de las figuras, a

través de la práctica, verbalizaban la importancia de la unidad, para construir de manera aditiva las figuras, como se evidencia en la siguiente entrevista,

Investigador: Muéstrame cómo construyes la figura de 10 unidades cúbicas

Estudiante; Profe, esta tiene 8 porque tiene uno, dos, tres, cuatro... ocho cubos, con sus dedos contaba, señalando cada cubo y si yo le pongo 2 más queda 10

A partir de la interacción dada en la entrevista, tomó conciencia de la magnitud volumen recurriendo a su carácter aditivo cada vez que se les presentaba una tarea nueva se evidenciaba por medio de lenguaje escrito, diálogos, gestos e interacciones sociales propias del salón de clase en la que participan tanto los investigadores como sus compañeras, que reconocieron la unidad de medida, siendo esto, una labor conjunta donde tanto maestros como estudiantes pueden comprender la producción de saberes y subjetividades (Radford, 2014). En este sentido, es importante que las diferentes tareas que se llevan al aula de clase, fomenten en las estudiantes diferentes formas de abordar un concepto matemático, permitiendo que ellas utilicen conocimientos adquiridos social y culturalmente. De igual modo la participación e interacción por parte del investigador es fundamental, ya que es por medio de ella que las estudiantes logran tomar conciencia de los objetos matemáticos.

8.2. El volumen como “largo por ancho por alto”.

Esta categoría emergió de las respuestas de las estudiantes en las diferentes tareas presentadas, propuestas a partir de las fases en base al tratamiento escolar y didáctico de la magnitud volumen, al igual que en la categoría anterior, la fase de *“percepción y comparación”* tenía como objetivo indagar sobre la percepción de las estudiantes alrededor del concepto de la magnitud volumen, como lo plantea Godino (2002) *“La medición comienza con la percepción de lo que debe ser*

medido” (p. 639), además, se evidenció en la fase de medición, haciendo uso del carácter convencional e histórico de las unidades, reconociéndose la necesidad del mismo.

De esta manera, a la luz de la fase de “percepción y comparación” se planteó la pregunta tres en la tarea uno, el motivo del maestro en esta pregunta era indagar sobre qué tipo de acciones y decisiones tomaba la estudiantes cuando se veía enfrentada a preguntas como la de la siguiente imagen (imagen 10) en la que se presenta a las estudiantes una imagen de una caja (paralelepípedo) y se le pregunta *¿cómo se hallaría el volumen de las siguientes figuras?*

3. Explique: *¿cómo se hallaría el volumen de las siguientes figuras?*

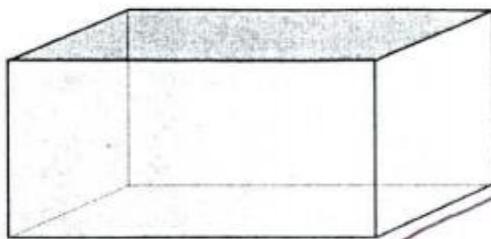


Imagen 10: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

Cuando se les presentan figuras a las estudiantes, como la anterior, en la que por medio de una imagen se representa una caja sin marcas de división, se evidencia que ya no hacen uso del carácter aditivo de la magnitud, sino que utilizan estrategias de carácter multiplicativos, esto se evidencia en los diálogos realizados en clase, a continuación se presenta un pequeño fragmento.

Investigador: *¿Cómo crees que se le puede hallar el volumen a esta imagen? se señala la imagen anterior.*

Estudiante: *“Profé, mmm, hay que medir el ancho, el largo y el alto”*

En este sentido, *“Las medidas de volumen se utilizan para objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas”* (Godino, 2002, p. 624). Con este tipo de representación, las estudiantes no dieron respuesta utilizando el carácter aditivo de la magnitud,

sino que, lo hacían por medio del carácter multiplicativo, es decir, como *producto de medidas*, en la siguiente imagen (imagen 11) seleccionada se puede ver como las estudiantes en las aristas de la caja señalan por medio de líneas a cada una de las dimensiones mencionadas, haciendo énfasis y reafirmando las dimensiones necesarias para hallar el volumen. En este sentido el volumen como producto de medidas, resulta de multiplicar la medida de sus lados, “(...) *para hallar el volumen de un paralelepípedo multiplicamos las medidas de sus tres dimensiones (de ahí el nombre de tridimensional)*” (Chamorro, 2002, p. 246). A continuación, se presentan las respuestas escritas de dos estudiantes.

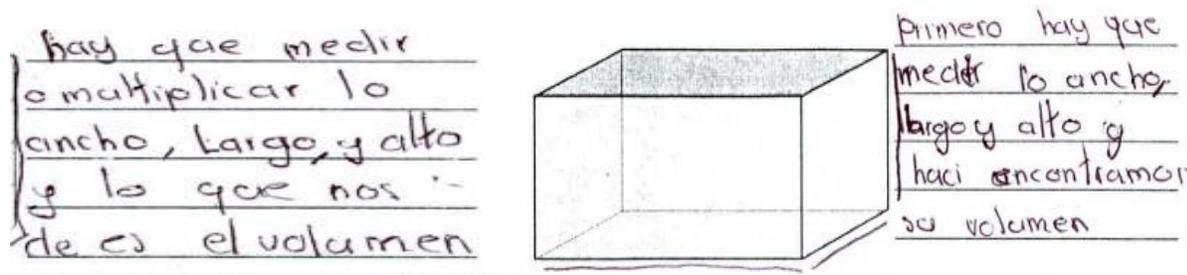


Imagen 11: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

En las respuestas, se identifica que cuando las estudiantes ven la representación bidimensional de un prisma rectangular sin divisiones para encontrar su volumen tienden a hacer uso de un carácter multiplicativo, las estudiantes expresan que deben medir su alto, largo y ancho para luego multiplicar estas medidas y así encontrar el volumen de la figura, inclusive en la imagen anterior (imagen 11), se ve como una de las niñas señala con unas líneas paralelas a los lados de la figura y luego hace referencia a ellas como largo, ancho y alto, dejando ver que selecciona esos lados de la figuras para hallar el volumen a la figura.

De igual manera, se realizó una socialización de las tareas, allí, se discutió sobre los diferente conceptos y su aplicabilidad, reflexionando que los objetos que utilizamos en la vida cotidiana se les puedes medir el volumen, (pelota, tarros de gaseosa) en este punto, los conceptos

fueron concebidos como reflexiones que reflejan el mundo (Radford, 2014), como se evidenció en el siguiente diálogo:

Investigador: Miren estos objetos (Cubos, botella vacía, botella con agua, piedra, esfera) ¿es posible hallarle el volumen a este objeto (se mostraba el objeto a las estudiantes)?

Estudiante: sí, respondía con seguridad

Investigador: ¿cómo lo harías?

Estudiante: préstemelo profe, tomó el cubo (le pide el objeto al investigador) mmm yo le mediría los lados y los multiplico. (Pasando sus manos por los lados que mediría)

El maestro se ayudó de objetos físicos para tratar de ejemplificar las diferentes preguntas que surgían y plantear otras, en este momento, por un lado se le presentaba a las estudiantes otro tipo de figuras no comunes en la enseñanza del volumen en las aulas, como son los cubos, también estos objetos permite que las estudiantes fueran conscientes de los lados que eran necesarios medir para luego multiplicar, hallando el volumen de una manera multiplicativa. En términos de Olmo, Moreno, Gil (1993) el tratamiento al volumen con modelos multiplicativos se puede ver obstaculizado por modelos aditivos, es por eso que resulta necesario realizar un estudio más profundo donde se trabaje la tridimensionalidad, por lo que el trabajo con el volumen es muy rico y difícil de captar por los estudiantes.

Cuando la estudiante respondía que sí es posible hallarle el volumen, se le era necesario tomar el objeto y por medio de sus mano lo palpaban, recorrían sus lados, su contorno, para así ir mostrando al investigador, al maestro y demás estudiantes la manera en cómo hallarían el volumen , en su lenguaje utilizaban palabras como un ancho, un alto y un largo, esto refleja que, la objetivación de un concepto “(...) *es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, [entre otros]) los sentidos y el cuerpo (a través de gestos y acciones kinestésicas, [entre otros])* (Radford, 2014, p. 142) para las estudiantes era necesario hacer uso del objeto material, para que las demás personas fueran conscientes y entendieran su estrategia,

también daba uso del lenguaje, de sus sentidos al tocar y del cuerpo para comunicar y expresar una idea a través de gestos y movimientos, se hace notorio, que todos estos elementos que encontramos en la cultura median entre las estudiantes y el saber matemático, y por medio de estos, se evidenciaba como la estudiante objetivaba el objeto matemático, midiendo el volumen utilizando estrategias de carácter multiplicativo.

Esta categoría “*largo por ancho por alto*”, no solo se hizo visible en las tareas escritas, y en los diálogos con las estudiantes, sino también, cuando se les pidió hallar el volumen a un lugar o espacio determinado, como el salón de clase, para el desarrollo de esta tarea se organizaron en pequeños grupos de estudiantes y se les pidió que diseñaran estrategias para dar solución al problema, ellas lo primero que realizaron fue buscar un instrumento de medida como la cinta métrica y sus reglas, luego comenzaron a superponer dicho instrumento sobre las paredes del salón de clase, es importante mencionar que no le tomaron la medida a todas las paredes del salón, solo midieron las que ellas consideraban que eran al largo, el ancho y el alto, como lo expresó una de las niñas .

Investigador: “cuéntame ¿qué paredes o muros midieron para encontrar el volumen del salón?”

Estudiante: “profe, solo medimos esa pared de allá (señala con su mano) porque es el alto del salón, también está (toca uno de las paredes) y el suelo porque es el ancho”

Uno de los grupos al explicar cuál sería su estrategia, tomaba su cuaderno y decía: “*este es el salón, tengo que medir su largo y su ancho y además su altura y multiplicarlo*”. Las estudiantes utilizaban el cuaderno para representar la forma del salón y explicar que tenía unas dimensiones que eran necesarias hallarlas para medir el volumen, haciendo uso de una mirada multiplicativa de la magnitud. En este punto, se observa como diferentes objetos que rodean a las estudiantes se convierten medios que ayudan a evidenciar la forma como las estudiantes toman conciencia del

proceso de medición de la magnitud. Según lo expresa otra niña, en uno de los grupos, no le era suficiente una sola cinta métrica, sino que utilizaban cuantas cintas métricas necesitaban para medir la longitud de las paredes, uniéndolas una tras otra (*Imagen 12*).



Imagen 12: Midiendo el salón, acciones de las niñas.

En este sentido es posible observar cómo cada grupo de estudiantes utiliza diferentes estrategias para lograr cumplir la tarea que se les había propuesto, dejando evidenciar a través de las decisiones que tomaban la forma en cómo estaba siendo conscientes la magnitud.

De esta manera, Radford (2014) plantea que el *Knowing* o el *conociendo* de un objeto matemáticos es un proceso que es mediatizado por una cultura material, como lo son, los signos, artefactos, y el lenguaje, las estudiantes daban uso de esa cultura material como lo es la cinta métrica, el cuaderno, reglas y sus expresiones como estrategias para desarrollar la tarea. Todas estas estrategias nos muestran la forma como las niñas están objetivando la magnitud volumen, como la están concibiendo, visualizando que muchas de las nociones que hay alrededor de ella son construcciones culturales, debido a que, las estudiantes destacaron la importancia de la utilización del metro puesto que era mucho más fácil que utilizar una regla o los codos para medir, ellas expresaban que era una buena estrategia debido a que se convertía la medición mucho más exacta, pero además de esto, se necesita comunicación y trabajo en equipo, y según ellas se delegaron roles

para la realización de la tarea, quienes sostenía los metros, quien anotaba, destacando la colaboración e interacción entre sus compañeros ya que las ideas del otro, fortalece la de los demás. En el siguiente diálogo realizado con una de las niñas es posible ejemplificar parte de lo antes mencionado.

Investigador: En tu equipo de trabajo, ¿cómo hicieron el proceso de medición?

Estudiante: Pues normal, medimos y encontramos el volumen del salón.

Investigador: ¿Cómo así que midieron?, ¿Quién midió?, ¿Todas?

Estudiante: mmmm primero miramos y vimos que esta pared era el alto, ese el ancho y ese el alto (señalando algunos de los muros del salón), ya después (Ana) cogió su regla y empezó a medir, pero pues se demoraría mucho entonces mejor fuimos a coger uno de los metros y así fue más fácil y rápido.

Investigador: entonces todas midieron, o ¿cómo hicieron?

Estudiante: No profe, yo por ejemplo estaba pendiente de lo que ellas hacían pero en vez de medir, anotaba lo que nos iba dando y así.



Imagen 13: Imágenes de la tarea 3, Midiendo el salón de clases, acciones de las estudiantes.

En las imágenes anteriores, es posible observar cómo las estudiantes con sus pares y los diferentes instrumentos y objetos se ayudan para dar respuesta a las tareas que se les presentan, ellas se apropian de las tareas propuestas y relacionan los saberes que socialmente han construido con los discutidos en clase, dando respuesta a diferentes interrogantes, siendo esto, una misma labor, en el que gracias a los acontecimientos anteriores, la estudiante es consciente o de la

magnitud como un atributo y toma decisiones acertadas, como por ejemplo, utilizar la cinta métrica en vez de la regla por comodidad y exactitud, es así, que se evidencia que en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al mismo tiempo en que el sujeto aprende, está transformando la manera de pensar la magnitud evidenciándose en las acciones y lenguaje que adquiere. En este sentido, la subjetivación de la estudiante ha sido transformada, siendo un *“procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo.”* (Radford, 2014, p. 142).

Otro aspecto importante en el marco de la Teoría de la Objetivación, es el aprendizaje colectivo este permite que las estudiantes elaboren reflexiones por medio de la interacción, considerando esta, no como una manera de adaptación en el entorno escolar, adicionalmente, es fundamental en la toma de conciencia de los objetos matemáticos, con esto reafirmamos lo que Radford (2006) plantea sobre la interacción

“(…) las acciones que los individuos realizan están sumergidas en modos culturales de actividad. Es por eso, que el salón de clase no puede verse como un espacio cerrado, replegado en sí mismo, en el cual se negocian las normas del saber, pues esas normas tienen toda una historia cultural y como tal pre-existen a la interacción que ocurre en el salón de clases.” (p. 114)

En los diferentes diálogos que se realizaron al interior del aula de clase, fue posible leer como las estudiantes identifican diferentes objetos que se convirtieron en instrumentos útiles para hallar el volumen del salón, ellas expresan, que la cinta métrica, las baldosas del salón de clase y la interacción que tuvieron como grupo de trabajo, fueron determinantes para llevar a cabo la tarea propuesta, en esta línea, Radford (2006) plantea que la enseñanza y el aprendizaje es una labor conjunta entre los individuos, en el que es fundamental esa interacción, lenguaje, acciones, gestos, artefactos que se da en el aula de clase, permitiendo estos medios semióticos una toma de

conciencia por parte de las estudiantes de los objetos matemáticos, en este caso, la magnitud volumen.

8.3. El volumen como “lleno de”.

En las fases de Percepción-Comparación y Medición de Volúmenes, los investigadores pudieron observar en las sesiones de trabajo, el desarrollo de las tareas uno, dos (*anexos 2 y 3 respectivamente*) y tres que fueron propuestas, y las entrevistas realizadas, como las estudiantes confunden la noción de capacidad con el concepto de volumen, siendo esto, uno de los errores más comunes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la magnitud, de esta manera, Olmo (1993) plantea “(...) *puede llamar la atención el hecho de que el volumen y la capacidad parezcan sinónimos, cuando usualmente se suelen entender el volumen como el espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado*” (p. 98).

En una de las discusiones con las estudiantes, se encontró que ellas han tenido diferentes acercamientos con la palabra volumen, por ejemplo, en los diálogos realizados al interior del hogar y en la institución educativa, cuando en diferentes clases utilizan la palabra volumen para referirse al contenido de un recipiente, es así, cuando las estudiantes en el momento que llegan al aula están determinadas por una cultura, que les permite tener unas percepciones y unas concepciones sobre la magnitud volumen, gracias a diferentes experiencias vividas fuera del aula de clase que median en la forma como las estudiantes se apropian de los conceptos haciendo usos de expresiones y acciones, a continuación se presentan los diálogos realizados con dos estudiantes, allí ellas señalan el acercamiento que han tenido con la palabra volumen.

Investigador: Y aparte del colegio, en que otra parte has escuchado la palabra volumen, o que hayan utilizado la palabra volumen

Estudiante A: Volumen, ahh mmm, eeee, yo estaba haciendo, yo estaba con mi tío y él, a él le dieron como una reglita que tiene como en la mitad, como un juguito verde y él me dijo que con eso se medía el volumen.

Estudiante S: Mmmm profe, pues una vez el profe de ciencias naturales hablo del volumen, pero no recuerdo lo que dijo,

Investigador: Trate de recordar, o dime más o menos que fue lo que le entendiste.

Estudiante S: mmm haber, era algo. Como que era eso que podía estar en una cosita, como en una coquita, en un frasquito y uno lo vaciaba.

La estudiante S ha escuchado la palabra volumen, en la clase de ciencias naturales cuando su profesor hace referencia al volumen de una sustancia que tiene un recipiente, siendo esto determinante para la forma en que la estudiante define y hace consciente del concepto trabajado, por otro lado la Estudiante A se ha acercado al concepto cuando se relaciona con los integrantes de su familia, en este caso, con la práctica laboral de su tío, con esto afirmamos que las formas de pensar la magnitud volumen están preconcebidas a partir de las situaciones vividas por la estudiante, y por tanto la enseñanza y el aprendizaje en el aula de clase está mediado por unos conocimientos previos que han sido adquiridos culturalmente, o en el medio familiar como lo evidencia el anterior diálogo, de esta manera, el proceso de objetivación de un objeto matemático cuenta con este componente cultural, en el que la estudiante es “*un sujeto que piensa y siente dentro de un trasfondo cultural*” (Radford, 2011, p. 43).

En la fase de *Percepción y Comparación*, en la tarea uno se planteó, una pregunta (*Imagen 14*) en la que, las figuras representadas tuvieran las características de estar llenas o vacías de algo, con la intención de analizar, si este tipo de representación influye en las respuestas de las estudiantes sobre si le puede hallar el volumen a los objetos presentados. Es así, como dentro de una serie de objetos que dan la noción de tener algo por dentro o por el contrario, no tener nada, se les pide indicar cuáles de esos objetos son susceptibles de hallarle el volumen.

2. De las siguientes figuras señale con una X: ¿cuáles de ellas se les puede medir el volumen?

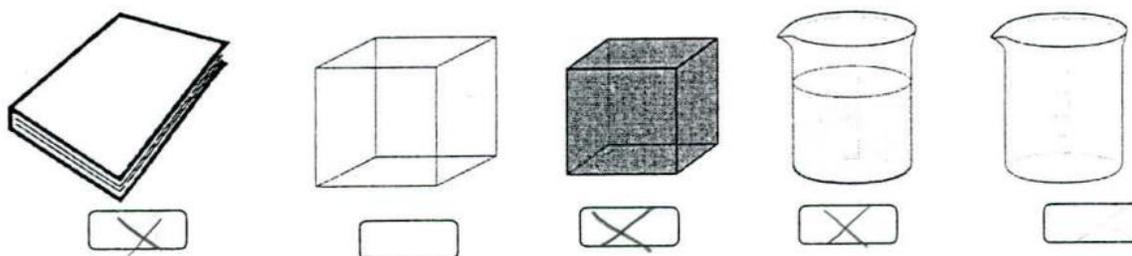


Imagen 14: Parte de la Tarea 1, realizada por las estudiantes.

Al analizar las respuestas dadas a esta pregunta se pudo evidenciar, que para las estudiantes las figuras que tenían volumen eran las que por medio de la representación bidimensional, parecían tener la característica de estar llena, como se pueden ver en la *imagen 14*, reflejándose que suele confundirse el volumen con el concepto de capacidad.

“El término volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3). Se usa la palabra capacidad para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereal, etc.).” (Godino, 2002, p. 622).

En este sentido, se entiende que el volumen y capacidad son magnitudes diferentes y resulta fundamental analizar cómo las estudiantes al observar diferentes recipientes y objetos dejan ver la confusión que tienen entre capacidad y volumen.

Una de las estudiante señala que los objetos a los que se les puede hallar el volumen es el primero (libro), el tercero (cubo sombreado) y el cuarto (pipeta con líquido), la niña al señalar solo estos objetos da a entender que el volumen se le puede hallar a objetos que contienen algo, en cambio, a los que aparentemente están vacíos no se les puede hallar el volumen, por ejemplo, el cubo sombreado y la pipeta que aparenta contener un líquido, por lo que la estudiante de manera inmediata lo señala y confía en su respuesta, estos aspecto no sólo se observaron en las respuestas escritas de las estudiantes, sino también en una de las entrevistas que se le realizó, a continuación

se presenta un fragmento de la entrevista.

Investigador: ¿Cuál de las siguientes figuras se les puede medir el volumen?

Estudiante: Este (libro), este (cubo sombreado) y este (pipeta con líquido), tocando cada objeto con sus dedos

Investigador: ¿solo a estos tres?

Estudiante: sí

Investigador: Y ¿Porque crees que a este (cubo sin sombra) y a este (pipeta que aparenta no tener líquido) no se les puede medir el volumen? señalando las figuras con los dedos de su manos.

Estudiante: porque no tiene como nada, parece estar vacía.

Cuando la estudiante justifica que el cubo y la pipeta no tienen volumen, con la expresión “*porque no tiene como nada, parece estar vacía*”, se afirma lo expuesto anteriormente por Olmo, puesto que, en el proceso de aprendizaje se suele confundir el volumen con la capacidad que tiene un objeto. La estudiante hace uso de su mano al tocar la representación del objeto para mostrarle al investigador que la figura está llena o vacía, esta acción kinestésica media y ayuda a la estudiante a mostrar la magnitud volumen como un “llenado de”, lo que evidencia la forma cómo se hace consciente de la magnitud y la manera como las representaciones figúrales desencadenan unas formas de objetivar dicho saber, de igual manera, el investigador hace uso del mismo lenguaje de la estudiante al no nombrar los objetos por sus nombre, sino etiquetarlos con la palabra “este” y utilizando sus dedos para señalar a qué imagen se está haciendo referencia.

En las respuestas de las estudiantes se evidencia que seleccionan las figuras oscuras (el cubo), llenas (la pipeta) o con la característica de tener *muchas hojas* para el caso del libro, así las representaciones figúrales que hacen parte de la vida cotidiana de las estudiantes desencadenaron unas acciones kinestésicas, como el tocar la figura, unos lenguajes tanto escritos como verbales que permitieron evidenciar la forma en cómo las estudiantes estaban tomando consciencia de la magnitud volumen, de esta manera, cobran importancia, estos signos en la reflexión de los objetos matemáticos determinando la manera como objetivan las estudiantes, porque a través de estas

representaciones es que van tomando de una u otra forma conciencia de los objetos matemáticos, en este sentido Radford (2004) plantea que “*La mediación semiótica va también más allá de adjudicarle a los signos el simple rol de representación del conocimiento. Desde el punto de vista cognitivo, la semiótica desempeña un papel de objetivación del saber*” (p. 13). Una evidencia de ello son las respuestas a una de las preguntas (imagen 15)

3. Explique: ¿cómo se hallaría el volumen de las siguientes figuras?

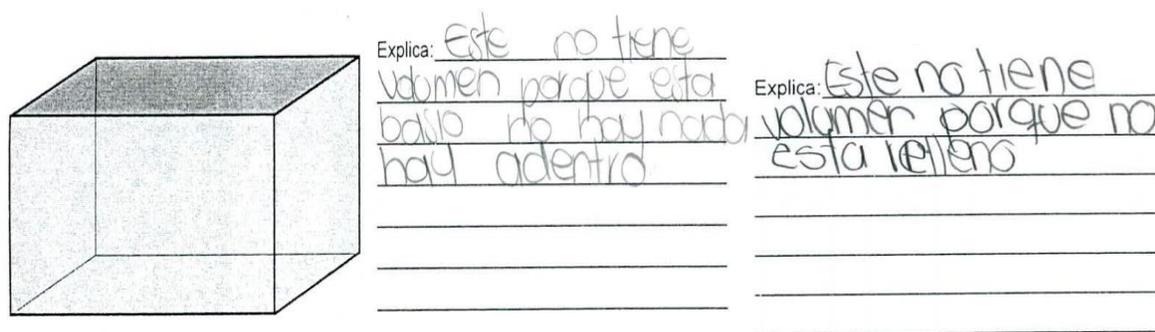


Imagen 15: Parte de la Tarea 1 realizada por las estudiantes.

En una de las tareas realizadas tuvo que ver con la composición y descomposición de figuras tridimensionales, se pretendía que las estudiantes relacionarán nociones de la magnitud volumen utilizando la composición y descomposición como se puede ver en la imagen 1 se les propuso a las estudiantes construir figuras con un determinado volumen con el uso de policubos, de esta manera, las estudiantes componían y descomponían las figuras, al empezar a construirlas se acomodaron en el suelo del salón, a medida que construían las figuras, encontraban relación que entre mayor número de unidades cúbicas utilizaban mayor espacio ocupaba, ahora, lo que en un principio definían como capacidad, comenzaba hacerse visible que “*El término volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio*” (Godino, 2002, p. 622), a partir de las tareas realizadas en el aula de clase, las diferentes representaciones utilizadas,

la interacción y la verbalización aportaron significativamente a la objetivación de la magnitud volumen.



Imagen 16: Construcciones con policubos realizada por las estudiantes.

9. Conclusiones.

En el desarrollo del presente trabajo se resalta la importancia que tuvo el Enfoque: Cualitativo y la Metodología: Estudio de Casos, la Teoría de la Objetivación de L. Radford, y el Tratamiento Didácticos de las Magnitudes por parte de autores como M. Olmo, J. Godino y M. Chamorro, para darle respuesta a la pregunta de investigación ¿Cuál es el papel de los medios semióticos culturales en relación con la objetivación de nociones fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen con estudiantes de la institución educativa santos ángeles custodios?

La metodología y el enfoque utilizado para el análisis de los datos, y el desarrollo de las diferentes intervenciones en el aula de clase, fue un aspecto fundamental que orientó el desarrollo de la investigación, seleccionando las técnicas de recolección de datos adecuadas para la caracterización y descripción de las experiencias vividas, que posibilitó evidenciar y reflexionar sobre el papel de las representaciones, interacciones, diálogos, signos, acciones e instrumentos que ayudaron hacer visible un objeto matemático. Además, nos permitió la selección del caso, puesto que, como plantea Stake (1999) el estudio de caso permite poner nuestra atención en eso que queremos investigar, lo que nos ayuda a no perder de vista elementos importantes en las diferentes interacciones que se dan al interior de clase.

Por su parte la Teoría de la Objetivación permitió dar cuenta de los procesos de enseñanza y aprendizaje reconociéndolos como procesos que no están alejados del contexto social de los estudiantes, y en el que los Medios Semióticos Culturales juegan un papel como mediadores entre el objeto matemático y la objetivación de estos, entendida, como la toma de conciencia en términos de acciones y además la subjetivación, en estos procesos no solamente se aprende sino que se transforma el sujeto. Los elementos teóricos permitieron analizar las interacciones, lenguaje, gestos, acciones kinestésicas, signos, artefactos, que daban uso las estudiantes cuando se

enfrentaban a las tareas que se planteaban en el aula de clase desencadenando unas acciones que nos permitieron como investigadores evidenciar cómo dependiendo de las representaciones propuestas las estudiantes tomaron conciencia de las nociones de la magnitud volumen.

Dichas tareas de clase se realizaron a la luz de los planteamientos de Olmo, Godino y Chamorro, quienes con sus investigaciones aportaron al trabajo con las magnitudes en el aula de clase. Resultaron fundamentales las fases propuestas por Olmo en cuanto al tratamiento didáctico de la magnitud en grados básicos de la educación ya que posibilitaron la comparación de objetos, plantear la necesidad de una unidad de medida, selección de instrumentos, la diferencia entre la unidad y los patrones de medición, la asignación numérica, entre otros procesos propios del pensamiento métrico.

Realizando un contraste con el simulacro de prueba saber y las tareas que realizamos con las estudiantes, es importante resaltar que las diferentes representaciones que se utilizan cuando se está trabajando la enseñanza y aprendizaje de la magnitud volumen tiene todo un significado, pues si solo trabajamos representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales los estudiantes solo relacionan el volumen con los objetos bidimensionales, o si solo se utilizan figuras y/o representaciones como cubos, prismas, esferas y pirámides, los estudiantes terminan relacionando el volumen con esas *“figuras típicas de las matemáticas”*. En este sentido es importante resaltar que en los procesos de enseñanza y aprendizaje del volumen se deben utilizar diferentes representaciones, figuras y objetos, (objetos físicos del entorno de los estudiantes) de modo que no solo queden con una idea o percepción de lo que es el volumen y a lo que se le puede encontrar o medir el volumen.

Todos los aspectos de la investigación expuestos con anterioridad y las experiencias en el aula de clase, se reafirma que en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto el *saber* cómo el *ser*

se están constituyendo a través de una misma labor, en que tanto estudiantes como maestros interactúan, dialogan y reflexionan alrededor de las nociones de los objetos matemáticos. Por lo tanto, la objetivación de la magnitud volumen es un proceso mediatizado por unos medios semióticos culturales (signos, representaciones, artefactos, lenguaje verbal y escrito) que desencadena unas acciones con los sentidos y el cuerpo (gestos, acciones) que permitieron evidenciar tres nociones de la magnitud volumen que las estudiantes estaban siendo conscientes, las cuales son: *conteo de cubitos*, *ancho por alto por largo* y finalmente como *de llenado de*.

Como una segunda fase para la investigación, se pensaría en avanzar hacia los procesos de aritmetización y estimación, puesto que en la investigación no se logra abordar estas fases del tratamiento didáctico de la magnitud, ya que, consideramos que estas son de gran importancia para la comprensión de los procedimientos y nociones de la magnitud volumen, e indagando como los diversos medios semióticos culturales median en la toma de conciencia del carácter de estos procesos.

Al concluir la investigación se identificaron unas posibles líneas de trabajo, que podrían ser trabajadas en futuras investigaciones, una de ellas es, la confusión del volumen, capacidad y masa, esta confusión la logramos identificar en la realización de las tareas, pues con frecuencia las estudiantes utilizaban estos términos para referirse al volumen. Otra posible línea de investigación está en relación a cómo intervienen las conceptualizaciones culturales dadas a estas magnitudes en el aula de clase.

10. Bibliografía.

- Agudelo Dávila, M., Estrada Betancur, E., Posada Medina, L. M., Rodríguez Rave, L. M., Torres Jaramillo, M., & Santa Quintero, M. C. (2006). *Situaciones Didácticas para la Enseñanza del Volumen Proyecto de Práctica Profesional*. Tesis de grado obtenido no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema*, 8(1), 30-46.
- Bell, J. (2002). *¿Cómo hacer tu primer trabajo de Investigación?* Barcelona: Ediciones Gedisa.
- Betancur, S., Gallego, J., Restrepo, D., & Tapias, J. (2013). Los medios culturales semióticos: una posibilidad para aproximarse a la multiplicación. Tesis de grado obtenido no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Cerda Gutiérrez, H. (1995). *Los Elementos de la Investigación*. Bogotá, D. f: EL BÚHO.
- Chamorro, M. D. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Pearson Educación.
- Coffey, A., & Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos: estrategias complementarias de investigación*. Medellín: Universidad de Antioquia.

- Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (16 de Abril de 2013). *La entrevista, recurso flexible y dinámico*. Obtenido de Investigación en Educación Médica: <http://riem.facmed.unam.mx/node/47>
- E. Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: EDICIONES MORATA S. L.
- Gallego Cerón, J., Restrepo Martínez, D., Betancur Peláez, S., & Tapias Vásquez, J. (2013). *Los medios culturales semióticos: una posibilidad para aproximarse a la multiplicación*. Tesis de grado obtenido no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Kula, W. (1980). *Las medidas y los Hombres*. Madrid: SIGLO XXI.
- Martínez, E. C., del Olmo Romero, M. A., & Martínez E. C. (2002) *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*, Santafé de Bogotá.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, Santafé de Bogotá
- Radford-Hernández, L. (2011). *La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas*. Ontario, Canadá: Université Laurentienne.
- Radford, L. (2004). Semiótica Cultural y Cognición. *Decima Octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1-21). Tuxta Gutiérrez: Université Laurentienne.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, número especial*, 103-129.
- Radford, L. (2014). *De la teoría de la objetivación*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132-150.
- Sandoval Casilimas, C., (). *Especialización en teoría, métodos y técnicas de investigación social. Investigación Cualitativa* (p. 27-92).
- Santos Ángeles Custodios (2012), *PEI*, Medellín, Antioquia.

11. Anexos.

11.1. Anexo 1

Simulacro de prueba saber

SIMULACRO PRUEBAS SABER*
PARA EL GRADO 3°- 2013
MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
SANTOS ANGELES CUSTODIOS

A continuación encontraras unas preguntas relacionadas con las medidas. Las preguntas constan de un enunciado y de cuatro opciones de respuesta, entre las cuales debes escoger la que considere correcta.

*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero. **1**

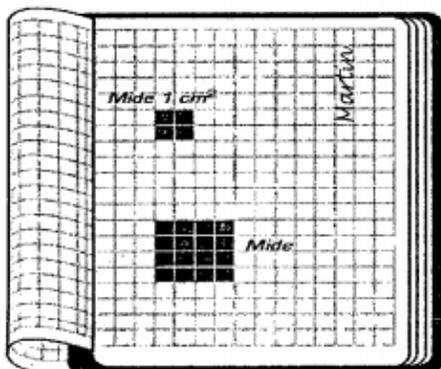
1. El tiempo que tardan cuatro amigos para llegar de su casa al parque se muestra en el dibujo.



¿Quiénes tardan el mismo tiempo?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

2. Este es el cuaderno de matemáticas de Martín

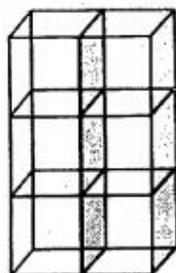


¿Cuál es la medida del cuadrado más grande que dibujó Martín?

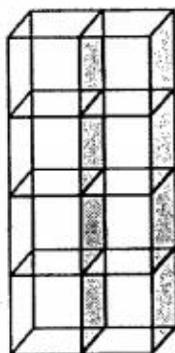
- A. 1 cm².
- B. 2 cm².
- C. 4 cm².
- D. 8 cm².

*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero.

3. Las torres 1 y 2 se construyeron con cubos como este



Torre 1



Torre 2

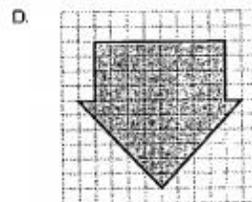
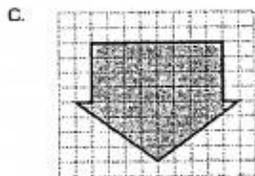
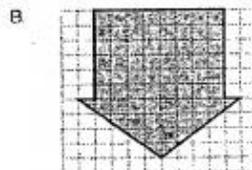
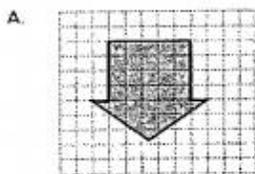
Comparando las dos torres, es correcto afirmar que

- A. la torre 2 ocupa más espacio que la 1.
- B. las dos torres tienen igual tamaño.
- C. la torre 1 ocupa más espacio que la 2.
- D. las dos torres tienen diferente forma.

4. Esta es una flecha que indica hacia arriba

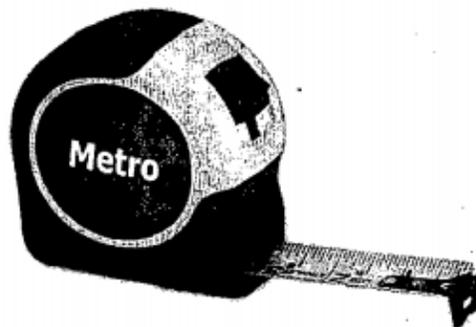


¿Cómo se verá esta flecha si ahora indica hacia abajo?



*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero.

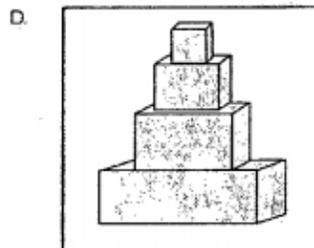
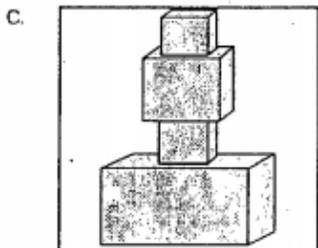
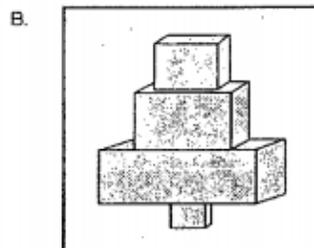
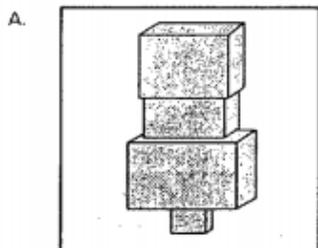
5. Don Pablo tiene el metro de la figura:



Este metro es el más adecuado para medir

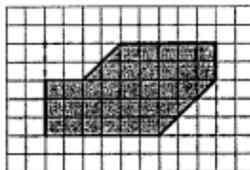
- A. la distancia entre una ciudad y otra.
- B. el ancho de la pared de una habitación.
- C. el tamaño de una bacteria.
- D. la altura de un edificio.

6. Se armó una torre con bloques, empezando con el más grande. Cada bloque es más pequeño que el anterior. ¿Cuál torre se armó?

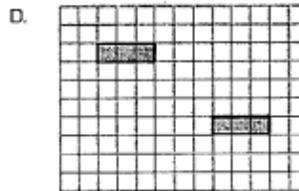
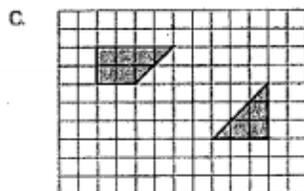
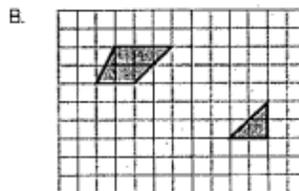
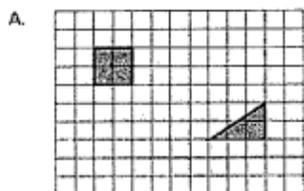


*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero.

7. Karina está armando un rectángulo y le faltaron dos piezas



¿Cuáles piezas le faltaron?



*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero.

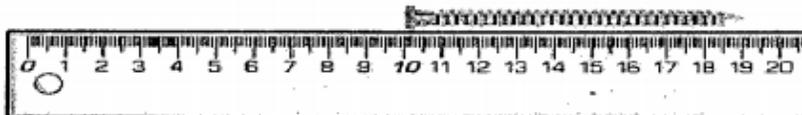
8.

¡Necesito un tornillo de 100 milímetros!

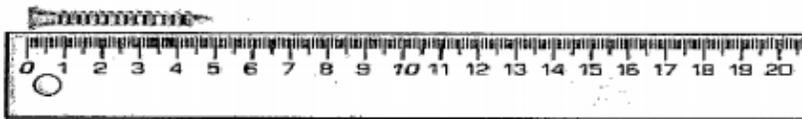


¿Cuál de estos tornillos le sirve al mecánico?

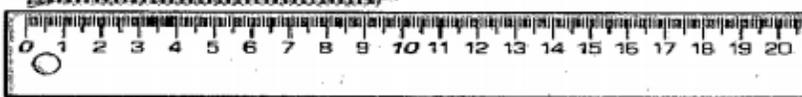
A.



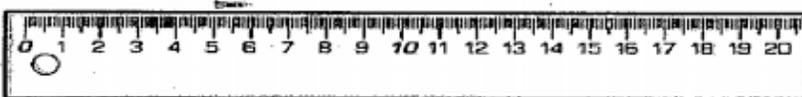
B.



C.



D.

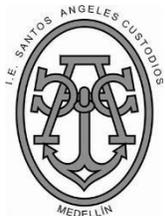


*Estas preguntas son tomadas de las Pruebas Saber realizadas en Octubre de 2012 y se aplica con el propósito de conocer las tendencias en las respuestas dadas por las estudiantes del grado tercero.



11.2. Anexo 2

Tarea 1. Compartiendo nuestros conocimientos



INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTOS ÁNGELES
CUSTODIOS

“Dulzura en los medios y firmeza en el fin”

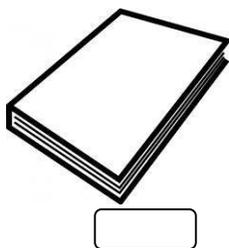
PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA

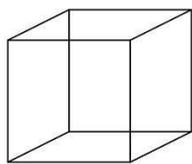
TAREA 1: compartiendo nuestros conocimientos

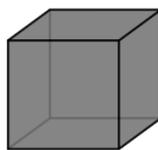


1. ¿Qué es para ti el volumen?

2. De las siguientes figuras señale con una X: ¿cuáles de ellas se les puede medir el volumen?





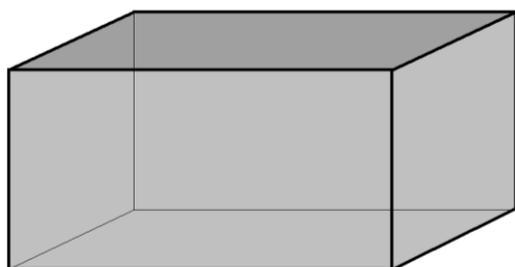


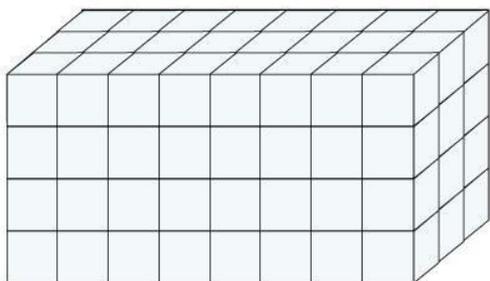




3. de la siguiente figura?

Explique: ¿cómo se hallaría el volumen



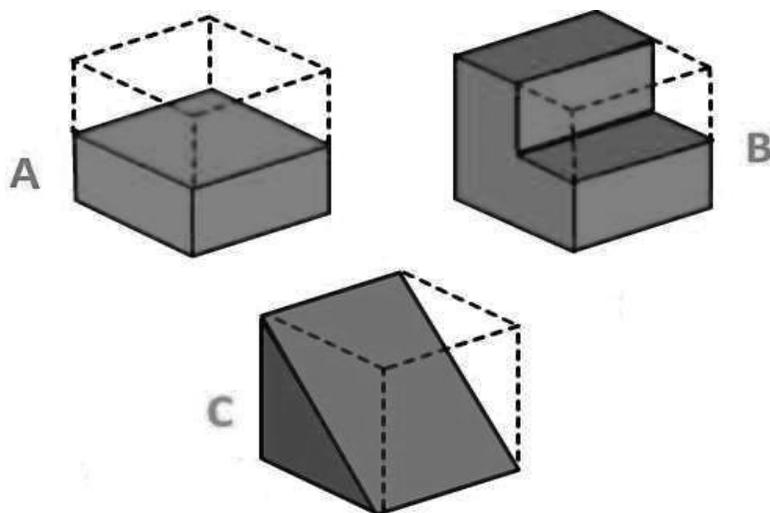


4.

Responde:

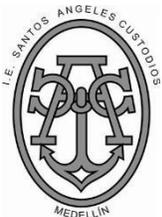
¿Cuál de los siguientes sólidos tiene mayor volumen? Y ¿Por qué?

¿Cuál de los siguientes sólidos tiene menor volumen? Y ¿Por qué?

5. ¿Qué es para ti cm^3 ?

11.3. Anexo 3

Tarea 2. Composición y descomposición de figuras tridimensionales



INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTOS ÁNGELES
CUSTODIOS

“Dulzura en los medios y firmeza en el fin”

PENSAMIENTO METRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA

TAREA 2: Composición y descomposición de figuras
tridimensionales



Nombre: _____ Grado: _____

Materiales:

* Cubos * Lápiz * Malla Isométrica

Propósito:

- Identificar mediante verbalizaciones, representaciones situaciones y objetos a los cuales se les puede medir el volumen.
- Armado de figuras tridimensional mediante cubos y representaciones bidimensionales utilizando mallas isométricas.
- Reconocimiento de la magnitud volumen.

Momento 1:

Menciona 5 objetos que se les pueda medir el volumen.

Ahora, realiza algunas figuras con los cubos dados utilizando las siguientes cantidades, para cada cantidad debes hacer como mínimo 3 figuras diferentes.

* 3 cubos * 5 cubos * 7 cubos * 8 cubos

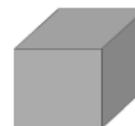
Momento 2:

Representa cuatro figuras realizadas en el momento anterior, en la siguiente malla isométrica



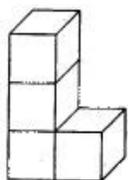
Momento 3:

Trabajaremos con una unidad cúbica (U^3) la cual representaremos con un cubo:



Observa las siguientes imágenes, constrúyelas con los cubos dados y responde las preguntas.

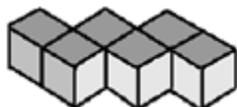
1. ¿Cuántos cubos componen la figura?
2. ¿Qué volumen tiene la figura?

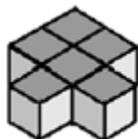


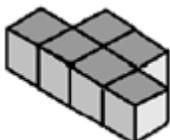
Ejemplo:

Esta figura está compuesta de 4 cubos y su

Volumen es de 4 unidades cúbicas, ($4 U^3$)







11.3. Anexo 4

Carta de aprobacion de los padres de familia, para publicar registros de las estudiantes en esta investigación

Medellín, Septiembre de 2014.

Señor (a)

Lenner Moreno Rúa. ~ Papá.

Reciba un cordial Saludo

En la clase de matemáticas del grado 6°A, orientada por la profesora Yanet Moscote, en la cual participa su hija Laura Moreno González, hemos estado desarrollando un proyecto de investigación de la Universidad de Antioquia llamado: "Los medios semióticos culturales en la objetivación de la magnitud volumen". El objetivo de dicho proyecto es describir el papel que juegan los medios semióticos culturales en la objetivación de la magnitud volumen.

Es por este motivo queremos solicitar de manera formal permiso para que su hija Laura Moreno González, haga parte de la investigación como protagonista de la misma y así presentarla en la publicación de los resultados.

Esta autorización se hace extensiva para tener acceso a algunos de los registros de su hija, a través de grabaciones tanto de audio como de video, fotografías, trabajos de clase, apuntes del cuaderno, entre otros. Además de poder referirnos en nuestro trabajo a sus elaboraciones en este proceso.

Agradecemos su atención y colaboración.

ANGIE VANESSA LLANO ZAPATA

Estudiante investigador

Lic. Bas. Matemáticas UdeA

JONATHAN SÁNCHEZ CARDONA

Estudiante investigador

Lic. Bas. Matemáticas UdeA.

LUIS DANIEL OSORIO FRANCO

Estudiante investigador

Lic. Bas. Matemáticas UdeA

YANET MOSCOTE MARULANDA

Maestra cooperadora

IE Santos Ángeles Custodios

LAURA MORENO GONZÁLEZ

Estudiante grado 6°A

CC:

70002687

Acudiente