Comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos mediante el uso de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA

Liset Xiomara Giraldo Muñoz

Tesis de maestría presentada para optar al título de Magíster en Educación

Asesora
Luz Estela Mejía Aristizábal, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación
Medellín, Antioquia, Colombia
2021

Dedicatoria

A mi madre, hermanos, abuelo, y sobrinos por ser mi motor para continuar creciendo como profesional en educación.

A mi pareja, por su paciencia y cariño durante el tiempo de confinamiento, que fue crucial para el desarrollo de gran parte de este trabajo de investigación.

Agradecimientos

A la profesora Luz Estella Mejía por su constante acompañamiento, profesionalismo, paciencia y dedicación a lo largo de esta investigación.

A los cuatro casos que de manera dispuesta y atenta brindaron información valiosa para la realización de esta investigación.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de gráficas

Resumen

A partir de una revisión de literatura sobre la comprensión en matemáticas, se identificaron dificultades relacionadas con la comprensión en el componente geométrico-métrico, específicamente, en los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, por ello, se analizan los niveles de comprensión que alcanzan cuatro estudiantes de grado octavo de un colegio privado de la ciudad de Medellín en esta temática, de acuerdo con los planteamientos del modelo de Van Hiele. A nivel metodológico, esta investigación se ubica dentro de un paradigma cualitativo, donde se propone un estudio de caso colectivo que posibilita implementar la geometría del doblado de papel, para la construcción de rectas y puntos notables en triángulos, esto enmarcado en el enfoque CPA del método Singapur, que desarrolla el uso de representaciones concretas, pasando por ayudas pictóricas, hasta llegar a lo abstracto. Se aplican seis instrumentos, diseñados según las fases propuestas en el modelo de Van Hiele, que permiten describir la evolución de los procesos de pensamiento y comprensión de los casos. Se concluye que el doblado de papel permite alcanzar niveles de comprensión superiores, con respecto al nivel inicial de los casos, además, se reconoce que la integración de la geometría del doblado de papel con el enfoque CPA del método Singapur, se constituye como una ruta pertinente para la enseñanza de conceptos geométricos.

Palabras clave: Geometría, puntos y rectas notables en triángulos, Modelo de Van Hiele, Enfoque CPA, Geometría del doblado de papel.

Abstract

From literature review on mathematics comprehension, difficulties related to understanding were identified in the metric geometry component, specifically, in the concepts of remarkable points and lines of triangles, therefore, the levels of understanding reached by four eighth-grade students from a private school in the city of Medellín are analyzed on this topic, in accordance with the approaches of the Van Hiele model. At a methodological level, this research is conducted in a qualitative paradigm, where a collective case study that makes possible to implement the geometry of paper folding is proposed, for the construction of remarkable points and lines of triangles, framed in the CPA approach of the Singapore method, which develops the use of concrete representations, through pictorial aids, until reaching the abstract level. Six instruments designed according to the phases proposed in the Van Hiele model are used, which allow to describe the evolution of thinking processes and understanding of cases. It is concluded that paper folding allows to reach higher levels of understanding, with respect to the initial level of the cases, in addition, it is recognized that the integration of the geometry of paper folding with the CPA approach of the Singapore method becomes a relevant plan for teaching geometric concepts.

*Keywords***:** geometry, remarkable points and lines of triangles, Van Hiele model, CPA approach, geometry of paper folding.

Introducción

La educación del siglo XXI demanda la apropiación de nuevos enfoques para la enseñanza de las matemáticas, puesto que ello permite mejorar las prácticas educativas. Estrategias de enseñanza como la geometría del doblado de papel, desde el enfoque CPA del método Singapur, que desarrolla el uso de representaciones concretas, pasando por ayudas pictóricas, hasta llegar a lo abstracto, puede vigorizar la comprensión de los conceptos matemáticos, particularmente en el componente geométrico-métrico, a partir de procesos de visualización y manipulación y, de este modo, alcanzar niveles superiores de comprensión en los estudiantes.

En la literatura se reporta que uno de los componentes de las matemáticas que cobra relevancia en la formación escolar, es la comprensión de los conceptos vinculados con el componente geométrico-métrico, mediante procesos de visualización, argumentación y formalización. Por lo cual, el escenario del aprendizaje de las matemáticas en la escuela plantea un interés de carácter investigativo, al reconocer las dificultades que conllevan la escasa comprensión en dicho componente, principalmente, en la temática de puntos y rectas notables en los triángulos. En este sentido, la forma de enseñanza, el poco tiempo destinado en el currículo y la estrategia de enseñanza de estos tópicos, puede tener repercusiones en la comprensión de dichos conceptos.

Con esta investigación se espera que al analizar la comprensión, en el marco de Van Hiele, que alcanzan estudiantes de grado 8° sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, en el contexto de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA; se puedan mejorar las prácticas educativas desde el reconocimiento de las dificultades en el abordaje de los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

Analizar

En tal sentido, el asumir el modelo de Van Hiele como marco teórico posibilitó, en primer lugar, describir la evolución de los procesos de pensamiento y comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos en cuestión y, en segundo lugar, a partir de la aplicación de sus fases, hace posible la adquisición de nuevas habilidades de comprensión que favorecen los procesos de aprendizaje y de razonamiento de dichos conceptos. Lo anterior, motivó la pregunta

¿cuál es el nivel de comprensión, en el marco de Van Hiele, que alcanzan estudiantes de grado 8° sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, en el contexto de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA?

El trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos:

En el capítulo uno se presenta el planteamiento del problema, donde se presentan algunos datos sobre los bajos desempeños en las pruebas externas e internas, que dan cuenta de que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos. Asimismo, se presentan algunos antecedentes, la justificación, la pregunta de investigación y los objetivos.

El capítulo dos, el marco referencial, está compuesto por un marco de antecedentes, donde se realizó la revisión de algunas investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría; el uso de estrategias de aprendizaje de la geometría y algunas investigaciones sobre el modelo de Van Hiele a nivel nacional e internacional; un marco legal, donde se abordan las normas técnicas curriculares emitidas por el Ministerio de Educación Nacional sobre el aprendizaje de la geometría; un marco conceptual, donde se desarrollan algunas teorías de la comprensión en matemáticas, centrando la atención en el modelo de Van Hiele; asimismo, se desarrolla la axiomática de doblado de papel para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. Finalmente, se plantea un marco metodológico donde se expone el método Singapur en matemáticas, enfocando la mirada en el enfoque CPA de este, siendo este último un gran insumo para la realización de los instrumentos de recolección de la información.

En el capítulo tres, se desarrolla la metodología donde se especifica que esta investigación se ubica dentro de un paradigma cualitativo, se propone un estudio de caso colectivo que posibilita implementar la geometría del doblado de papel, para la construcción de rectas y puntos notables en triángulos, esto enmarcado en el enfoque CPA del método Singapur. Se aplicaron seis instrumentos, diseñados según las fases propuestas en el modelo de Van Hiele, que permiten describir la evolución de los procesos de pensamiento y comprensión de cuatro casos de un colegio privado de la ciudad de Medellín.

En el capítulo cuatro, se presentan los hallazgos derivados del análisis de la información proporcionada por cada uno de los casos. Allí, se presenta el proceso de comprensión de cada caso con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos a partir de la ejecución de los instrumentos.

Finalmente, en el capítulo cinco, se presentan las conclusiones que surgieron a partir de los hallazgos, producto del trabajo de campo. Allí, se desarrollan los objetivos específicos y el general; de la misma manera, se plantean los aportes que esta investigación deja tanto a la educación matemática, como al contexto donde se desarrolló la implementación de los instrumentos;

finalmente, se presentan algunas posibles líneas de investigación que pueden surgir a partir de este estudio.

1. Planteamiento del problema

1.1. Descripción del Problema de Investigación

Una de las dificultades relacionada con el bajo desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas, específicamente en el componente de geometría, es la escasa comprensión de conceptos geométricos, de acuerdo con el análisis de los resultados derivados de pruebas externas tales como *Programme for International Student Assessment* (PISA), —que se aplican en Colombia desde el año 2006— y, las pruebas Saber Once[1], así como también las pruebas internas como las pruebas Pensar que se realizan cada año en el colegio, donde se lleva a cabo esta investigación.

Las pruebas PISA (*Programme for International Student Assessment*) son una de las pruebas externas en la que participa Colombia, cuyo objetivo "es evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años" (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2007, p. 3). De acuerdo con la OCDE las pruebas PISA se diseñaron para reconocer las habilidades, las competencias, las aptitudes y la pericia de los estudiantes al momento de resolver y analizar problemas, así como para manejar información que les permita enfrentar situaciones del mundo real en las que se requieren tales habilidades.

En particular en la prueba PISA de matemáticas, se evalúan componentes tales como cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones de probabilidad, además, para su calificación se establecen seis niveles de competencia (ver tabla 1), que están en estrecha relación con; "la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas" (OCDE 2007, p. 12).

[1] Entendidas como esa evaluación del nivel de la Educación Media, que proporciona información a la comunidad educativa, respecto a las competencias que "debe desarrollar un estudiante durante el paso por la vida escolar" (ICFES, 2018).

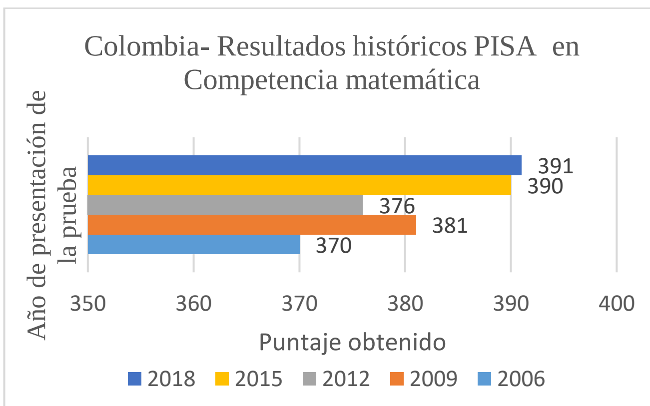
Tabla 1. *Niveles y rangos de competencias en las pruebas PISA para matemáticas.*

Nivel	**Por debajo del nivel 1**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Nivel 5**	**Nivel 6**
Puntaje	menos de 358 puntos	De 358 a 420 puntos	De 421 a 482 puntos	De 483 a 544 puntos	De 545 a 606 puntos	De 607 a 668 puntos	Mayor de 668 puntos

Al revisar el desempeño de Colombia en estas pruebas en el año 2018, el país se encuentra en el nivel 1: en comprensión lectora (412 puntos); matemáticas (391 puntos) y ciencias (413 puntos). Así mismo, otros países latinoamericanos como Chile, Perú y Brasil se ubicaron en el mismo nivel de desempeño.

Del mismo modo, cuando se revisan los resultados de matemáticas desde el año 2006 hasta el año 2018, se puede observar que los puntajes de los estudiantes colombianos están entre 370 y 391 puntos (ver Gráfica 1), lo que quiere decir que, si bien ha habido un aumento en cuanto a puntaje en algunos años, aun no se ha logrado mejorar el nivel en esta competencia.

Gráfica 1. *Resultados históricos PISA en competencia matemática Colombia.*



Ahora bien, de acuerdo con la OCDE (2007) el nivel 1, se caracteriza porque:

> Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo. (p. 16)

Sin embargo, encontrarse en este nivel de desempeño, implica que los estudiantes presentan dificultades para interpretar, modelar, argumentar, integrar diferentes tipos de representaciones, construir explicaciones y asociar los problemas directamente con el mundo real (OCDE 2007).

En Colombia se realizan las pruebas Saber 11° a cargo del ICFES (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación) que tienen como objetivo, por un lado, comprobar en qué nivel de competencia están los estudiantes cuando se gradúan de undécimo grado y, por otro lado, brindar información a las instituciones de educación superior sobre las competencias de los graduados, con el fin de que estas diseñen programas de nivelación y que prevengan la deserción temprana de los programas (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES], 2018).

Según la estructura del examen, se evalúan 5 componentes: lectura crítica, matemáticas, ciencias sociales y ciudadanas, ciencias naturales e inglés. Particularmente en matemáticas, se evalúan tres competencias: interpretación y representación, formulación y ejecución y argumentación las cuales describen los elementos de los procesos de pensamiento planteados por los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional [MEN] 2006a). A su vez, estas competencias se dividen en las categorías de álgebra y cálculo, geometría y estadística, además, se subdividen según el tipo de contenido así:

> 1) *genéricos*, que corresponden a los elementos fundamentales de las matemáticas necesarios para que todo ciudadano pueda interactuar de manera crítica en la sociedad actual, y 2) *no genéricos*, que corresponden a los que son considerados específicos o propios del quehacer matemático que es aprendido en la etapa escolar.(ICFES 2018, p. 23)

Según lo anterior, en relación con el componente matemático, el ICFES evalúa no solo conocimientos específicos como lo son varianza, percentiles (estadística), sólidos y figuras geométricas (geometría), expresiones algebraicas (algebra y cálculo), entre otras; sino que también se enfoca en evaluar aquellas competencias que le permite al estudiante enfrentarse a las matemáticas en el ámbito cotidiano, tal es el caso de noción de población y muestra en estadística, triángulos y sistemas de coordenadas en geometría, números racionales expresados como fracción en álgebra y cálculo, entre otros.

Por otro lado, las pruebas Saber establecieron cuatro niveles de desempeño que permiten agrupar a los estudiantes como lo muestra la tabla 2.

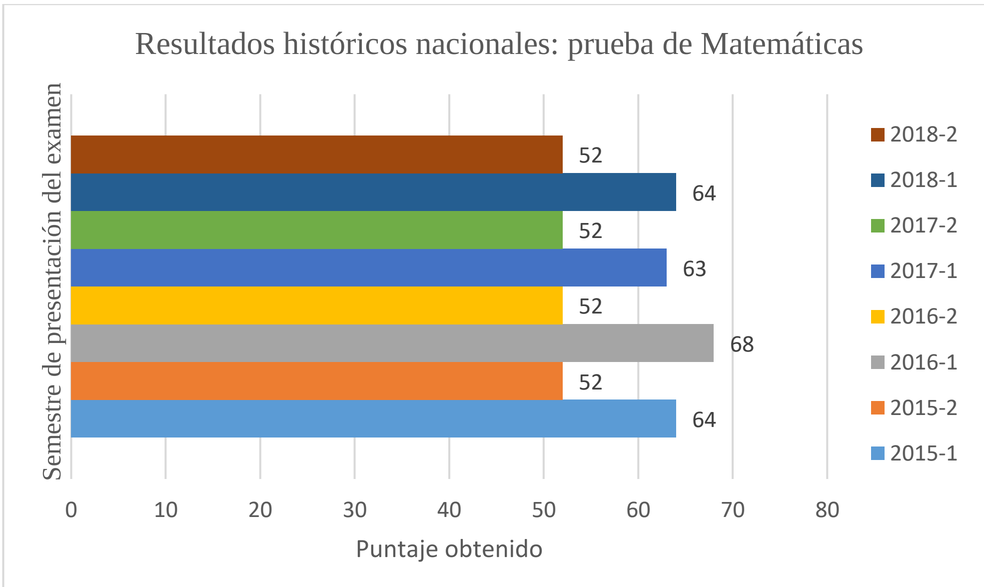
.

Tabla 2. *Niveles de desempeño del ICFES.*

Nivel	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Puntaje	0 a 35 puntos	36 a 50 puntos	51 a 70 puntos	71 a 100 puntos

A continuación, en la gráfica 2 se muestran los puntajes en matemáticas de los estudiantes de undécimo grado que presentaron la prueba Saber entre los años 2015 y 2018.

Gráfica 2. *Resultados históricos nacionales prueba Saber en el componente de matemáticas.*



De la anterior gráfica, se puede concluir que, según los niveles de desempeño mencionados anteriormente, los estudiantes aún no han alcanzado en matemáticas el nivel 4, esto es, que los estudiantes no resuelven problemas justificando la veracidad o falsedad de afirmaciones que son necesarias para la utilización de los conceptos de probabilidad, relaciones trigonométricas, propiedades algebraicas y características de funciones reales en contextos matemáticos o abstractos (ICFES 2018).

Finalmente, en el colegio donde se pretende llevar a cabo la propuesta de investigación, se realizan las pruebas Pensar[2], cuyos resultados, específicamente en 8° grado son los siguientes: en

[2] Estas pruebas son realizadas por una empresa externa y evalúan los procesos de los estudiantes en función de sus competencias y habilidades. Del mismo modo, involucra los procesos contemplados en los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional (Ochoa, 2020).

los componentes de álgebra y cálculo con un puntaje de 55, 15 puntos; estadística con 42.12 puntos y geometría con 40.88 puntos. Cabe aclarar, que dichas pruebas, son calificadas de 1 a 100. Así, se evidencia una dificultad notable en el componente geométrico métrico evaluado en el año 2019, donde los estudiantes alcanzaron desempeños inferiores con respecto a los demás componentes del área evaluados.

Estos resultados son contrarios a las intenciones que se plantean desde los documentos orientadores como: Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN,1998), Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006a) y los Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas (MEN 2016a), en los que se espera que el estudiante sea matemáticamente competente, es decir, que esté en la capacidad de reconocer, relacionar, organizar y utilizar de forma eficaz el conocimiento en la resolución de problemas "que requieran el tratamiento de la cantidad, de la forma, de la variación y de la información" (MEN 2016b, p. 33).

Por lo tanto, se puede apreciar que, tanto en las pruebas internacionales como en las pruebas nacionales, los resultados de los estudiantes no son los esperados respecto a lo que significa ser matemáticamente competente, lo que posiblemente incide en el desarrollo de habilidades interpretativas, argumentativas, de modelación y de resolución de problemas.

Ahora bien, a partir de la necesidad latente derivada de los bajos desempeños en las pruebas externas e internas, que dan cuenta de que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos, se hace necesario investigar sobre las posibilidades de enseñanza de la geometría, para motivar escenarios de aprendizaje que coadyuven con la comprensión de conceptos matemáticos y específicamente de conceptos de la geometría.

Por otro lado, desde la experiencia como profesora en el área de matemáticas, en básica primaria y en los grados 7° y 8°, en colegios de carácter privado de la ciudad de Medellín, se han identificado algunas dificultades en los estudiantes con respecto al desarrollo del pensamiento matemático, específicamente, en la comprensión de conceptos geométricos.

En tal sentido, es importante resaltar que una de las mayores preocupaciones como investigadora en educación básica, ha estado asociada al desarrollo y la conceptualización de los conceptos geométricos, por mencionar algunos, tal es el caso de la comprensión de los conceptos de volumen, de área y de perímetro, los Teoremas de Tales y de Pitágoras, semejanza y congruencia de figuras geométricas, clasificación de ángulos, entre otros; sin embargo, los conceptos relacionados con las propiedades de los triángulos, así como de sus puntos y rectas notables llama la atención particularmente, por la variedad de relaciones que se derivan de las propiedades y características que resultan de dichos conceptos.

1.2. Antecedentes

Con respecto a la revisión de literatura, se logró establecer que uno de los componentes de las matemáticas que cobra relevancia en la formación escolar, es la comprensión de los conceptos vinculados con el componente geométrico-métrico, mediante procesos de visualización, argumentación y formalización. Por lo cual, el escenario del aprendizaje de las matemáticas en la escuela plantea un interés de carácter investigativo, al reconocer las dificultades que conllevan la escasa comprensión en dicho componente, principalmente, en la temática de puntos y rectas notables en los triángulos.

Resulta oportuno entonces, preguntarse por las causas que dan lugar al bajo desempeño de los estudiantes a nivel general en el área de matemáticas desde el componente geométrico-métrico. Al respecto, Quintero (2014) sostiene que “el enfoque de la enseñanza de la geometría en muchos casos la presenta como un producto final obtenido de la creación matemática” (p. 5) y no como un proceso, lo cual, puede resultar problemático, ya que, al asumir la geometría en estos términos, se deja de lado los procesos de razonamiento, tanto inductivo como deductivo que la geometría desarrolla.

En consonancia con lo anterior, Mazo y Suárez (2009), plantean que “en el contexto colombiano, la enseñanza de la geometría, en la educación básica primaria se ha reducido a un listado de contenidos, centrados en definiciones y propiedades, carentes de toda articulación con las actividades planteadas” (p. 5). En este sentido, el aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación básica está limitada a seguir una serie de contenidos y solución de problemas que se reducen a la operación aritmética, donde posiblemente los maestros se ocupan más de cumplir con estipulaciones curriculares, que de lograr un aprendizaje y un desarrollo de competencias y habilidades en los estudiantes.

Otra dificultad que posiblemente se presenta en la comprensión de la geometría, es el tiempo dedicado al aprendizaje de conceptos geométricos dentro del currículo escolar, debido a la existencia de una variedad de temáticas por abordar en esta área, se dejan de lado propiedades de los objetos geométricos o en algunos casos no se enseñan (Rico y Vaquero, 2009). Por ejemplo, el tema vinculado a los triángulos, de acuerdo con los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN 2016a) se deben enseñar desde los primeros grados de escolaridad, sin embargo, su abordaje se centra en sus clasificaciones, relaciones de semejanza, cálculo de áreas, entre otras, dejando en algunos casos "a un lado la identificación de las rectas notables y sus puntos de intersección" (Rico y Vaquero, 2009, p. 1).

Puede interpretarse entonces, que, aun siendo el tópico de triángulos un tema que se trabaja tanto en la educación básica como en la media se destina poco tiempo a la enseñanza curricular de los conceptos de puntos y rectas notables, lo cual conlleva a que los estudiantes de 7° y 8° presenten dificultades en la comprensión de conceptos involucrados en los procesos de demostraciones formales, lo que además puede tener consecuencias en los procesos de educación superior.

Abordar las propiedades de los triángulos en la escuela sin detenimiento en sus aplicaciones y su relación con la vida real, así como el aprendizaje de las líneas y puntos notables solo en triángulos equiláteros e isósceles, parece resultar problemático, pues, cuando el estudiante se enfrenta a problemas que involucran otro tipo de triángulos, presentan cierta dificultad al momento de demostrar apropiación y aplicación conceptual, lo anterior se puede ver reflejado en algunos de los planteamientos de Reyes y Rodríguez (2014), cuando indican que:

> Específicamente en el contenido rectas y puntos notables del triángulo, las dificultades y errores que presentan algunos estudiantes son: con el trazo de las mediatrices o alturas en triángulos obtusángulos o rectángulos, en la suposición de que todas las rectas notables son siempre interiores al triángulo, en creer que el triángulo tiene una sola altura. (p. 544)

A nivel metodológico, Miranda (2011), destaca que "se necesita más que lápiz y papel para deducir los conceptos geométricos, y mucho más aún cuando se abordan las líneas y puntos notables en un triángulo" (p. 40), ya que estos conceptos, según la autora, son de difícil comprensión, por las estrategias metodológicas empleadas por los maestros, las cuales no permiten la apropiación y el dominio de dichos conceptos, por otro lado, porque el tiempo en las instituciones es insuficiente para profundizar temáticamente al respecto.

Al mismo tiempo, Sánchez (2017) plantea que los maestros se ocupan de enseñar el trazo de las alturas, medianas y mediatrices con el lápiz, la regla y el compás; lo que podría llegar a ser una dificultad para la comprensión, ya que mediante esta estrategia de enseñanza se asumen las propiedades de los triángulos a partir de un aprendizaje estático, es decir, sin que el estudiante pueda establecer una relación entre las mismas, pues carece de la posibilidad dinámica y visual, para manipular objetos que le permita visualizar las propiedades de los triángulos desde diferentes perspectivas y llegar a realizar conjeturas con respecto a dichas propiedades.

Por su parte, Cano, Flórez y Zapata (2017) refieren que la regla y el compás son los instrumentos más usuales para la construcción de figuras planas y el reconocimiento de sus elementos. De acuerdo con las autoras, los estudiantes poseen escaso dominio en la utilización de dichos instrumentos y cuando se enseña la construcción de alturas, medianas, bisectrices y mediatrices con estos elementos, sus construcciones son mal elaboradas y no les permite inferir las respectivas propiedades.

Las investigaciones anteriores presentan un panorama sobre la geometría, puntualizando en los conceptos de puntos y rectas notables en la enseñanza, refiriendo algunas dificultades. En este sentido, se hace necesario indagar por estrategias de enseñanza que permitan hacer frente a dichas dificultades a partir de un enfoque de enseñanza donde prime el desarrollo de la comprensión en geometría.

1.3. Justificación

La educación del siglo XXI demanda la apropiación de nuevos enfoques para la enseñanza de las matemáticas, analizar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes en una parte de estas como lo es la geometría, puede permitir mejorar las prácticas educativas al reconocer las dificultades para abordar los conceptos geométricos, en este caso, puntos y rectas notables en triángulos. Estrategias de enseñanza como la geometría del doblado de papel, desde el enfoque CPA[3] del método Singapur, puede vigorizar la comprensión de los conceptos matemáticos, particularmente en el componente geométrico-métrico, a partir de los procesos de visualización y de este modo alcanzar niveles superiores de comprensión en los estudiantes.

Se considera que este trabajo de investigación permite desarrollar estrategias educativas acordes al modelo pedagógico del colegio donde se lleva a cabo la investigación, orientado a implementar diversas estrategias metodológicas en pro del desarrollo de las competencias del siglo XXI. En este sentido, implementar el enfoque CPA del método Singapur en geometría, puede ser

[3] Abordaje de los conceptos a partir de lo Concreto, pasando por lo Pictórico hasta llegar a los Abstracto.

un aporte metodológico para dicho contexto, en tanto que permite el abordaje de la geometría como un saber fundamental para el desarrollo de habilidades en los estudiantes y no como una parte "minúscula" en el currículo. Asimismo, puede ser un aporte a la literatura en educación matemática, ya que se han encontrado pocas investigaciones que aborden el enfoque CPA del método Singapur para la enseñanza de la geometría.

Además, el método Singapur es una alternativa para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que ha sido difundido e implementado en varios países del mundo. Dado que, por sus exitosos resultados se ha posicionado como uno de los mejores en el mundo, en el ámbito educativo. La efectividad de Singapur en pruebas internacionales como PISA, expone la alta capacidad que han alcanzado sus estudiantes para interpretar y resolver problemas auténticos en diferentes áreas del conocimiento como matemáticas, lectura y ciencias naturales. Según Angulo, castillo y Niño (2016), este modelo educativo permitió que Singapur se destacara en los años 1995, 1999 y 2003, en las pruebas internacionales, donde un porcentaje considerable de estudiantes demostraron el nivel más avanzado en el área de matemáticas.

Es así como en esta investigación, se parte de la necesidad de desarrollar una propuesta que procure implementar un método que incluye el doblado de papel como posibilidad para la comprensión de los conceptos geométricos. Para ello, resulta pertinente, abordar el modelo de Van Hiele pues, en primer lugar, porque permite describir la evolución de los procesos de pensamiento y comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos en cuestión y, en segundo lugar, a partir de la aplicación de sus fases, se espera la adquisición de nuevas habilidades de comprensión que favorezcan los procesos de aprendizaje y de razonamiento de dichos conceptos.

En este sentido, el Modelo de Van Hiele es pertinente "por su carácter visual geométrico que facilita la comprensión de definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación" (Santa, 2011, p. 48), lo cual cobra relevancia en los conceptos de puntos y rectas notables, pues es preciso que haya un acercamiento visual, para que los estudiantes puedan analizar sus propiedades y aplicarlas en situaciones problema.

Se plantea la geometría del doblado de papel como una alternativa de enseñanza, que coadyuve a la comprensión de dichos conceptos, ya que al ser una técnica innovadora para los estudiantes "les permite construir objetos mediante el plegado del papel, y de esta manera comprender y visualizar de manera palpable los conceptos de la geometría plana" (Martínez, 2017, p. 86).

Monsalve y Jaramillo (2002), señalan que cuando el maestro utiliza la herramienta del doblado de papel para resolución de problemas matemáticos, los estudiantes se enfrentan a dichas situaciones problema con entusiasmo e interés. En este sentido, refieren que:

> La hoja de papel hace parte de todo un arsenal de ayudas educativas funcionales y económicas que un profesor puede incorporar al quehacer docente dentro de un aula de clase en cualquiera de los niveles escolares. Como cualquier ayuda pedagógica, ella sólo tiene una limitación: la imaginación o la creatividad de quien la use. (p. 11)

En consecuencia, se puede decir que, el uso del doblado de papel es una alternativa que le permite al estudiante, por un lado, motivarse en lo que se refiere a las matemáticas y, por otro lado, asimilar conceptos que son necesarios para acceder posteriormente a conocimientos avanzados de las matemáticas.

No obstante, con el fin de brindar una alternativa al problema de la comprensión de los conceptos geométricos es preciso preguntarse, en el ejercicio maestro, por aquellas prácticas que influyen en que estas dificultades se mantengan año tras año, con el fin de autoevaluar el quehacer y con ello, retroalimentar las prácticas metodologías con alternativas de enseñanza que favorezcan la comprensión de los conceptos, así como también de enriquecerla de modelos como el de Van Hiele, que aborden los niveles de comprensión, lo cual permite un avanzado nivel comprensión de los conceptos geométricos. En este orden de ideas, es importante, asumir la enseñanza como una actividad que no está supeditada a un manual o a una única forma de hacerse, por el contrario, es una actividad rica en sus discursos y en sus medios, es por esto, que la utilización del doblado de papel, se convierte para esta investigación, en una herramienta que pretende mostrar la geometría que se esconde detrás del doblez de papel y que puede llegar a permitir que los estudiantes visualicen las propiedades de los conceptos de puntos y rectas notables en los distintos triángulos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar la comprensión, en el marco de Van Hiele, que alcanzan estudiantes de grado 8° sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, en el contexto de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA.

1.4.2. Objetivos específicos

Establecer el nivel de comprensión inicial que tienen los estudiantes sobre los conceptos puntos y rectas notables de triángulos.

Identificar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes sobre los conceptos de puntos y rectas notables según el modelo de Van Hiele.

Describir las posibilidades que ofrece la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA, para la comprensión de conceptos geométricos.

1.5. Pregunta de investigación

Considerando el panorama presentado en el planteamiento del problema, resulta oportuno plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el nivel de comprensión, en el marco de Van Hiele, que alcanzan estudiantes de grado 8° sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, en el contexto de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA?

2. Marco Referencial

A partir de la revisión de literatura se conformó el marco referencial, donde se revisaron algunas investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría; el uso de estrategias de aprendizaje de la geometría y algunas investigaciones sobre el modelo de Van Hiele a nivel nacional e internacional, componiendo esto, el marco de antecedentes. De la misma manera, se aborda toda la normativa legal a partir de las normas técnicas curriculares emitidas por el Ministerio de Educación Nacional sobre el aprendizaje de la geometría.

Asimismo, se presenta un marco conceptual, donde se desarrollan algunas teorías de la comprensión en matemáticas, centrando la atención en el modelo de Van Hiele; asimismo, se desarrolla, la axiomática de doblado de papel para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. Finalmente, se plantea un marco metodológico, donde se expone el método Singapur en matemáticas, enfocando la mirada en el enfoque CPA de este, siendo este último un gran insumo para la realización de los instrumentos de recolección de la información.

2.1. Marco de antecedentes

Para dar cuenta del estado de la cuestión, se realizó una revisión de investigaciones sobre la comprensión de conceptos geométricos y estrategias de aprendizaje que coadyuven a la comprensión de estos. El rastreo de la información se llevó a cabo en artículos de investigación, tesis de grado y memorias de eventos, proporcionados por las siguientes bases de datos: Descubridor UdeA, Google Académico, EBSCO, Redalyc y Dialnet. Para efectos de realizar un rastreo minucioso, las palabras clave que se han utilizado son: “aprendizaje de la geometría”, “razonamiento geométrico”, “comprensión de la geometría” y “estrategias de aprendizaje de la geometría”, entre otras.

2.1.1. Investigaciones sobre el aprendizaje de conceptos en geometría

Con respecto al aprendizaje de la geometría, se encontraron diferentes investigaciones como las de: Lastra (2005); Quintero (2014); Araya y Alfaro (2010); Martínez (2017); Barrantes, Balletbo y Fernández (2014); Galeano (2015); y Gamboa y Ballesteros (2009); quienes lo asumen como una actividad que está mediada por conocimientos previos, como una construcción que el estudiante estructura con respecto al espacio que lo rodea o como un aprendizaje estructurado por niveles de comprensión.

Lastra (2005) en su investigación titulada "Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas" plantea que el aprendizaje es una actividad que le permite al estudiante realizar descubrimientos personales, pues, es una actividad enriquecedora y creativa, donde se puede apreciar cómo el estudiante integra en su estructura lógica y cognoscitiva aquellos datos que surgen de la realidad exterior, a partir de su proceso personal de exploración, de avances y de retrocesos. Esta investigación, presenta un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría desde el modelo propuesto por Van Hiele (1990), quien propone un modo de estratificación del conocimiento en niveles, con el fin de categorizar los diferentes grados de representación del espacio. Asimismo, expone que es importante integrar los conocimientos previos de los estudiantes para que el aprendizaje sea significativo.

En concordancia con lo anterior, Quintero (2014) en su trabajo titulado: "Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana" considera que el aprendizaje debe ser significativo, con el fin de que los nuevos conocimientos se incorporen en la estructura cognitiva del estudiante, ya que, desde los primeros cursos, dicha estructura se va construyendo "especialmente por representaciones concretas que en el caso de la matemática son apoyadas por el uso de figuras geométricas" (p. 10).

Del mismo modo Araya y Alfaro (2010) en su investigación "La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes", abordan el concepto de aprendizaje de la geometría como un elemento que implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación, planteando que para lograr un aprendizaje significativo se debe construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, "de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido" (p. 130). Además, considera que el aprendizaje se da a partir del descubrimiento, donde el estudiante es quien motiva y propicia la investigación, la reflexión y la búsqueda del conocimiento.

Asimismo, Martínez (2017) considera el aprendizaje, citando a Ausubel (1983), cuando expresa que el estudiante relaciona los conocimientos previos con la nueva información, con el fin de obtener significados y éstos se integran a su estructura cognitiva de una manera firme. Así pues, la "teoría permite entender la importancia de conocer los conceptos y proposiciones que el estudiante maneja, así como su estructura cognitiva, para orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia el aprovechamiento de todas las experiencias y conocimientos que posee" (p. 24).

Por su parte, Quintero (2014), considera que los maestros deben proveer al estudiante situaciones de aprendizaje que le permitan comprender la naturaleza de los sistemas axiomáticos para que posteriormente desarrolle, pruebe y provea justificaciones basadas ya sea en el método inductivo o en el deductivo, y así, pueda establecer conjeturas que involucren conceptos geométricos.

Barrantes, Balletbo y Fernández (2014), plantean el aprendizaje en términos constructivistas, es decir, donde los conocimientos construidos por los estudiantes son realmente operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos, a diferencia de aquellos conocimientos que son transmitidos, esto es, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y sólo se pueden aplicar a situaciones particulares.

Mientras que Galeano (2015); Araya y Alfaro (2010), hablan del aprendizaje en términos de una serie de transformaciones que involucran el uso de múltiples y diversos sistemas de representación, que le permiten a los estudiantes pasar de un discurso informal a un discurso formal, para construir un razonamiento. En otras palabras, lo que los autores aducen, es que el aprendizaje no se basa en la simple descripción de una figura geométrica, sino que esta descripción requiere estar apoyada por una visualización, para que ésta a su vez permita el acceso a los objetos matemáticos.

Finalmente, Gamboa y Ballesteros (2009), en su investigación, abordan el concepto de aprendizaje a partir de Báez e Iglesias (2007), quienes señalan unos principios didácticos que son fundamentales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría: *Principio globalizador* o interdisciplinar, se trata de un acercamiento a la realidad, allí se integra el conocimiento, el cual no está fragmentado, del mismo modo, se integran los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación. *Contextualización del conocimiento*, en este proceso, es preciso adaptara los conocimientos a las necesidades y particularidades de cada estudiante mediante la implementación de hechos concreto, todo esto, sin perder de vista el logro de los objetivos propuestos. *Aprendizaje por descubrimiento*, en este punto, todo el proceso debe considerar el estudiante como sujeto activo que motive la reflexión, la investigación y la búsqueda del conocimiento. *Innovación de estrategias metodológicas*, en este proceso, el maestro debe buscar e implementar estrategias metodológicas que motiven tanto la investigación, la construcción y el descubrimiento del aprendizaje.

Según lo anterior, para que el aprendizaje de la geometría sea significativo —en términos de Ausubel— en el contexto de educación secundaria es preciso, promover el desarrollo de habilidades en el estudiante que posibiliten el desarrollo de competencias tanto geométricas como matemáticas, para ello, el constructivismo brinda las herramientas que permiten el acceso a los objetos matemáticos y la modificación de la estructura cognitiva del estudiante. De igual manera, resulta pertinente preguntarse por la manera como el aprendizaje significativo aporta a la comprensión de los objetos geométricos, para ello, es preciso indagar por teorías de comprensión relacionadas con el aprendizaje de la geometría.

2.1.2 Algunas investigaciones realizadas en el marco del modelo de Van Hiele

2.1.2.1 En el contexto nacional.

En el artículo titulado "Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele" realizado por Jaramillo y Esteban (2006) , se analizan las características de las estructuras matemáticas y la importancia de implementar actividades concretas como lo son, la elaboración de mapas conceptuales que evidencien la red de relaciones que los estudiantes poseen en su mente, todo esto, con el propósito de diseñar módulos de instrucción en concordancia con las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

A partir de los planteamientos propuestos inicialmente por Jaramillo y Esteban (2006), se concluye, por un lado, que es necesario encontrar alternativas que contribuyan con el fortalecimiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría y su relación con otras áreas de las matemáticas, ya que esto permite el planteamiento y solución de problemas complejos en dicha área. Por otro lado, que los estudiantes adquieren estructuras mentales de la red de relaciones de un concepto matemático y éstas se pueden fortalecer con el empleo de técnicas de mapas conceptuales, pues, mediante esta representación concreta, el estudiante puede poner de manifiesto "su estructura de pensamiento y darse cuenta por sí mismo de los aspectos que debe mejorar para adquirir un nivel avanzado de razonamiento" (Jaramillo y Esteban, 2006, p. 117).

Por su parte Fuentes, Portillo, y Robles, (2015) en su artículo "desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje”, se propusieron como objetivo, evaluar la eficacia del modelo en el avance de los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado 7° de una institución educativa oficial en Córdoba (Colombia) y su relación con los estilos de aprendizaje. La metodología utilizada fue con un enfoque cualitativo de tipo cuasiexperimental, es decir, donde existe una exposición, una respuesta y una hipótesis para contrastar. Como instrumentos se incluyeron un test con el fin de identificar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes antes y después de la intervención; una secuencia didáctica acerca de polígonos en la cual se tuvo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y un test para identificar estilos de aprendizaje. Esta investigación concluyó que:

> Los estudiantes lograron mejoras significativas en cuanto a los grados de adquisición de los niveles 1 y 2 de Van Hiele, luego de la intervención con la secuencia didáctica. Se encontró que el estilo predominante en los grupos fue el reflexivo; sin embargo, no se encontraron diferencias significativas entre los estilos de aprendizaje y la mejora en los niveles de razonamiento. (Fuentes, Portillo, y Robles, 2015, p. 44)

También se concluyó que el modelo de Van Hiele fue eficaz para la mayoría de los estudiantes, independientemente de su estilo de aprendizaje (Fuentes et al., 2015). En “extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área” de Fuster y Villar (2015), se detallan los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento propios del modelo de Van Hiele para el área de una figura plana, éstos se pueden definir como las principales características que permiten reconocer cada uno de los niveles de razonamiento matemático. Dichos descriptores son obtenidos por medio de entrevistas socráticas semiestructuradas. Del mismo modo, en este artículo, se relaciona el modelo de Van Hiele con otras teorías como las imágenes conceptuales de Vinner.

Fuster y Villar (2015), establecen las siguientes conclusiones: por un lado, que el modelo a partir del modelo de Van Hiele, se puede describir el proceso de razonamiento en algunos pilares del cálculo, así como también del análisis matemático. Por otro lado, se concluyó que algunas rutinas presentes en los sistemas educativos no favorecen un correcto aprendizaje, pues, hay muchos estudiantes que no han alcanzado el nivel III de Van Hiele “aun habiendo superado un nivel académico que casi lo exigiría si hubiese un énfasis en estas cuestiones, en detrimento de las puramente mecánicas o algebraicas” (Fuster y Villar, 2015, p. 121).

Ávila (2019) en el artículo, “El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello" planteó como objetivo desarrollar la competencia razonamiento matemático desde el aprendizaje del teorema de Pitágoras, enmarcado en el modelo de Van Hiele con los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello Hogar Santa Rosa de Lima (en adelante: AV-HSRL).

Según lo anterior, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué nivel de razonamiento matemático están en los estudiantes de noveno grado de la institución educativa AV-HSRL para el aprendizaje del teorema de Pitágoras? (Ávila, 2019, pp. 36-37).

La metodología utilizada para dicha investigación fue investigación-acción, que utilizó como instrumentos, una prueba diagnóstica, siete sesiones de clase y una prueba final, todo esto aplicando los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), asimismo, implementando estrategias con base en el modelo de Van Hiele. Después de la investigación, se halló la necesidad de implementar la formación de competencias matemáticas por medio de actividades colaborativas, donde el estudiante se motive y así se involucre en el desarrollo de su razonamiento geométrico (Ávila, 2019). Finalmente, se concluyó que, "la aplicación del modelo de Van Hiele y la manipulación de figuras van de la mano y su accionar didáctico conduce a los estudiantes hacia el descubrimiento de las características de los triángulos" (Ávila, 2019, p. 58).

La tesis de maestría de Santa (2011), titulada "La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele", se propuso como pregunta de investigación: ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele? En este sentido, el objetivo general planteado fue analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la geometría del doblado de papel. La investigación utilizó una metodología de corte cualitativo, con estudio de casos múltiple; los instrumentos de recolección de la información fueron los siguientes: observaciones, encuestas, entrevistas grupales, revisión material y entrevistas individuales.

Finalmente, Santa (2011), a partir de la investigación pudo llegar a las siguientes conclusiones:

- En un primer momento, la autora expone que, efectivamente se diseñó, se evaluó y se refinó un guion de entrevista de carácter socrático con preguntas inquisitivas basadas en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel.

- La entrevista de carácter socrático se constituyó como una experiencia de aprendizaje, pues, los estudiantes pudieron avanzar en su nivel de razonamiento

- La entrevista permitió caracterizar y analizar el proceso de comprensión de cada caso, donde cuatro de ellos, quedaron en el nivel III y uno, en el nivel II (Santa, 2011).

A continuación, se presentan algunas investigaciones que se han desarrollado en el marco del modelo de Van Hiele a nivel internacional.

2.1.2.2. A nivel internacional.

Vargas y Gamboa (2013), en el artículo titulado “El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría” abordan la aplicación del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele y la enseñanza de la geometría, además, reflexionan sobre la importancia del estudio de la geometría y las implicaciones de su estudio para la sociedad moderna; del mismo modo, analizan las concepciones y dificultades que se dan en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En este sentido, introducen el modelo de Van Hiele teniendo en cuenta la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles, finalmente, realizan una comparación entre el modelo de Van Hiele y la teoría de desarrollo de Piaget.

Concluyen que, “el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento” (Vargas y Gamboa, 2013, p. 91). Allí el maestro debe realizar una evaluación inicial que le permita identificar el nivel inicial de cada estudiante, posteriormente, esto le permitirá describir el avance de razonamiento de cada uno, después de aplicar las actividades programadas. Además, concluyen que el modelo de Van Hiele brinda relevancia al desarrollo del lenguaje, ya que éste es crucial para el paso de un nivel a otro.

Por su parte, Wang y Kinzel (2014) en el artículo titulado *“How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3"*, (¿Cómo saben que es un paralelogramo? Analizando el discurso geométrico en el nivel 3 de Van Hiele) presentan el marco discursivo de Sfard (2000), el cual usan para investigar el discurso geométrico de los futuros maestros en el contexto de los cuadriláteros. En particular, se enfocan en describir y analizar el uso de palabras matemáticas de dos participantes relacionadas con paralelogramos y sus propiedades, en el nivel 3 de pensamiento de Van Hiele.

Concluyen que, un solo nivel de pensamiento de Van Hiele abarca un rango de complejidad de razonamiento y diferencias en el discurso y, por lo tanto, se justifica una investigación más profunda del pensamiento matemático de los estudiantes dentro de los niveles asignados de Van Hiele. Además, se concluye que hay diferencias en los discursos geométricos en el Nivel 3 de Van Hiele. Con respecto a la palabra paralelogramo y su uso, se observó que tenía diferentes significados para los estudiantes dependiendo de cómo lo definieran (Wang & Kinzel, 2014).

A su vez, Fernández (2016) en su investigación titulada "Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por maestros de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos" se propuso responder a los siguientes interrogantes: ¿Cuáles son las estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría? y ¿Qué propuesta metodológica se puede generar para enseñar los contenidos de geometría? Se realizó bajo un paradigma cualitativo y se obtuvieron los siguientes resultados:

En un primer momento, el autor logró que los maestros involucrados realizaran actividades de definición de conceptos y dibujos para trabajar los contenidos conceptuales, en este sentido, los procedimientos eran desarrollados por medio de una enseñanza tradicional, donde predominaban las clases expositivas, explicaciones de ejercicios; además se evidenció la ausencia de variedad de materiales concretos y actividades lúdicas y algunos maestros señalaron no conocer el modelo de Van Hiele (Fernández, 2016).

Se concluye, que, aunque algunos maestros conocen los niveles de pensamiento de geométrico, no conocen en qué nivel se encuentran sus estudiantes, por lo que sus actividades no se desarrollan en correspondencia con un nivel u otro. Finalmente, "los docentes, al utilizar la fase 1 del modelo de Van Hiele, activan los conocimientos previos de los educandos, cumpliendo con el paradigma que señalan utilizar en sus prácticas pedagógicas, siendo éste el constructivismo". (Fernández, 2016, p. 103).

George (2017) en su artículo *"Bringing Van Hiele and Piaget Together: A Case for Topology in Early Mathematics Learning"* (unión de Van Hiele y Piaget: Un caso para la topología en el aprendizaje de la matemática inicial), parte de la premisa de que los conceptos topológicos surgen naturalmente en el razonamiento espacial de los niños pequeños, pero la topología no es parte de nuestra educación actual. En este artículo, se amplía el modelo de razonamiento espacial de Van Hiele utilizando la teoría del espacio de representación de Piaget. Al fusionar estas dos teorías existentes, podemos ubicar los conceptos topológicos en un contexto apropiado para la edad (George, 2017). Así, se dice que la topología es un tema desconocido para los estudiantes, ya que el plan de estudios no lo incluye, sin embargo, desde una edad muy temprana, los niños tienen una comprensión topológica.

Así, la extensión del modelo de van Hiele que se aborda en este artículo, ofrece un marco coherente e integral para describir el desarrollo de la intuición y comprensión geométrica y topográfica en los estudiantes jóvenes, con el fin de ayudar a los educadores a fomentar el desarrollo del razonamiento espacial y la comprensión. Finalmente, concluyen que usar las fases de aprendizaje de Van Hiele en el Nivel 0, ayuda a los estudiantes a realizar una transición exitosa al Nivel 1. Además, al construir una sólida base de Nivel 0, los estudiantes estarán preparados para el Nivel 1 ya que los objetos de este nivel son extensiones desde el nivel 0 (George, 2017).

Por otro lado, Tieng y Eu (2018) en el artículo titulado *‘‘Effect of Phase-based Instruction Using Geometer's Sketchpad on Geometric Thinking Regarding Angles*" parten de que enseñar y aprender geometría no se trata simplemente de memorizar propiedades, sino que el interés se centra en comprender la parte conceptual de ésta. Además, plantean que los estudiantes enfrentan desafíos en el aula tratando de desarrollar su pensamiento geométrico. En este sentido, se proponen como objetivo, identificar si la instrucción basada en fases usando el Sketchpad de Geometría ayuda a los alumnos de primaria a desarrollar sus niveles de pensamiento geométrico con respecto a los ángulos (Tieng y Eu, 2018). Concluyen que, la instrucción basada en fases utilizando el Sketchpad de Geometría ayuda a los estudiantes de cuarto año de este estudio a adquirir niveles de Van Hiele, con respecto al pensamiento geométrico, significativamente más altos en el tema de los ángulos (Tieng y Eu, 2018). Concluyen que, la instrucción basada en fases utilizando el Sketchpad de Geometría ayuda a los estudiantes de cuarto año de este estudio a adquirir niveles de Van Hiele, con respecto al pensamiento geométrico, significativamente más altos en el tema de los ángulos (Tieng y Eu, 2018).

Sarrín (2019) presenta en el artículo “Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia” los resultados de una investigación realizada en el marco de un enfoque cualitativo de diseño etnográfico. Se planteó como objetivo conocer el desarrollo del pensamiento geométrico en el tema de rotaciones, según el modelo de Van Hiele. Como instrumentos de recolección utilizó, la prueba formativa de respuestas abiertas y la entrevista mixta. Concluyen que, la mayoría de los estudiantes se ubicaron en el nivel 2- nivel de análisis.

Consideraron que se dio cumplimiento al objetivo, pues, se establecieron elementos necesarios para alcanzar la comprensión de los ejercicios planteados (Sarrín, 2019, p. 155).

A partir de los elementos proporcionados por estudios desarrollados por los autores mencionados, con respecto al aprendizaje y la comprensión de la geometría, resulta relevante indagar por la manera como razonan los estudiantes frente a ciertos conceptos de la geometría, a través de mecanismos o herramientas como el Geogebra, el CABRI y el doblado de papel, que permitan ampliar su nivel de comprensión.

2.1.3. Investigaciones sobre el uso de estrategias o herramientas para el aprendizaje de la geometría

2.1.3.1. Software matemático interactivo GeoGebra.

Ezquerro (2014), en su investigación titulada “Uso de GeoGebra en la enseñanza de geometría analítica en 4to de la ESO”, propone el uso de la aplicación GeoGebra para la enseñanza de geometría analítica, considerando que este recurso tecnológico cuenta con diversas alternativas para la enseñanza, pues, aparte de ser libre, cuenta con variedad de herramientas, permite realizar una gama de acciones como lo son demostraciones, supuestos, deducciones, análisis, etc. Además, combina las matemáticas, la geometría, el álgebra y el cálculo.

Por su parte, Gutiérrez (2017), en su trabajo: “Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de conceptos de geometría utilizando la herramienta GeoGebra”, expone una propuesta metodológica para abordar conceptos básicos de geometría por medio de la utilización de herramientas TIC, en este caso, GeoGebra. El trabajo se realizó con estudiantes de grado 5° de una institución educativa de la ciudad de Neiva y fundamentó su estudio con la teoría de la zona de desarrollo próximo de Vygotsky, plantea que el aprendizaje no es solo un proceso de realización individual, sino que el aprendizaje es una actividad social, donde el niño es un sujeto activo y consciente (Gutiérrez, 2017).

De esta investigación, Gutiérrez (2017) concluye que la metodología propuesta motivó a que los estudiantes mejoraran sus aprendizajes sobre algunos conceptos básicos de la geometría, del mismo modo, concluye que es posible el diseño de un modelo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizando el software GeoGebra.

Rasmussen (2016) en “*Thinking Creatively about Teaching Geometry A Teacher’s Guide to Using GeoGebra in Elementary School*” propone un tutorial que explora las estrategias y perspectivas pedagógicas necesarias que ayudan de una forma efectiva a los maestros de escuela primaria a usar el software GeoGebra. Aduce que, la implementación de este tipo de herramientas ofrece nuevas posibilidades a los docentes para explorar la geometría con niños de primaria, además, de la incorporación de estas ideas en la práctica habitual del aula.

Torres y Racedo (2014), en su trabajo: “Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria”, investigan el impacto que tiene el recurso multimedia GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de un grupo de estudiantes de 9° de educación secundaria. Para ello, se tuvo en cuenta un diseño cuasi- experimental, donde se tomaron 64 estudiantes, a los cuales se les aplicaron pre-test y post-test. De esta investigación, los autores concluyen que, para el segundo período académico los temas que estuvieron apoyados por el software GeoGebra en el grupo experimental, mostraron mejores resultados con respecto a los demás estudiantes, los cuales desarrollaron dichos temas bajo un enfoque tradicional. Además, de este estudio se puede concluir que GeoGebra es una herramienta para el maestro que le permite interactuar dinámicamente con los contenidos en diferentes áreas como lo son la geometría, las matemáticas, la estadística, el cálculo, etc.

Fernández, Gamboa, Rodríguez y Díaz (2016), en el libro titulado “La Geometría asistida por GeoGebra”, presentan unas recomendaciones de tipo metodológico a los maestros con respecto a algunas actividades diseñadas para realizarse con la aplicación del software GeoGebra, lo cual, puede transformar, en gran medida, el proceso didáctico de la geometría. Plantean, que el programa GeoGebra posibilita transformar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría, lo cual permite alcanzar resultados efectivos y contribuir a que los estudiantes se acerquen al quehacer propio de las matemáticas.

2.1.3.2. Software CABRI.

La investigación titulada “Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas” de Lastra (2005), aborda desde esta perspectiva los procesos que se desarrollan en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el tema “Cuadriláteros” en seis cursos de 4º año de Enseñanza Básica de escuelas críticas del área sur. Esta experiencia aplicada en aula, aproximadamente durante dos meses, busca dar cuenta de las transferencias que realizan los maestros de la metodología propuesta (Modelo de Van Hiele y el uso del software CABRI) y de los niveles de rendimiento escolar que se obtienen por los alumnos en el logro del aprendizaje geométrico, analizando el nivel de impacto que la metodología, el rol del maestro, el rol del alumno y el uso de la tecnología tienen en la enseñanza y el aprendizaje geométrico (Lastra, 2005).

Barrantes, Balletbo y Fernández (2014), en el artículo “Enseñar Geometría en Secundaria”, se plantean como objetivo, lograr que las concepciones y creencias de los maestros en ejercicio evolucionen a tendencias constructiuvistas. En este sentido, proponen el programa CABRI como una alternativa que conlleve a que los maestros sientan la necesidad de utilizar este tipo de metodologías en la enseñanza de la geometría. Asimismo, plantean que con la utilización de este software de geometría intentan que los estudiantes redescubran los teoremas ya conocidos, con el fin de que pasen de ser receptores de conocimiento a desarrollar una creatividad científica.

Por su parte, Marcos y Meza (2015), presentan una investigación orientada a explicar los efectos en el aprendizaje de la geometría plana y la geometría del espacio en estudiantes de Educación Básica Regular, mediante la aplicación del software CABRI Geometry 2D y 3D. Dicha investigación es de tipo cuasi-experimental, en la cual se aplicaron algunas pruebas en un grupo de control. Así, concluyen que la implementación de este tipo de Software influye notablemente en el aprendizaje de los estudiantes tanto de la geometría plana como la geometría del espacio. Además, afirman que esta estrategia influye en la capacidad de razonamiento, aprendizaje y demostración, a su vez que influye en la capacidad de la comunicación matemática y en la capacidad de resolución de problemas.

El artículo de Etcheverry, Reid y Botta (2009) “Animándonos a la enseñanza de la geometría con CABRI” presenta el diseño y propuesta para la utilización del software CABRI II Plus en los procesos de enseñanza y aprendizaje de algunas propiedades de los triángulos (lados, puntos notables). Esta experiencia se llevó a cabo con maestros y estudiantes de una institución de la ciudad de Santa Rosa provincia de La Pampa. Se concluye que, el uso del programa CABRI II Plus, fue motivador para el trabajo de los estudiantes, pues, brinda dinamismo y permite una buena exploración de las temáticas que se abordan en clase.

Bohórquez (2004) y Águila (2012), coinciden en resaltar que uno de los retos que enfrenta la educación en matemáticas es la búsqueda de nuevas estrategias de aprendizaje y diseños pedagógicos que llevan al estudiante a resolver problemas en ambientes propicios de aprendizaje, para ello, proponen la utilización de recursos tecnológicos en el aula. Así, acuden al software CABRI, como una estrategia de apoyo para las actividades académicas, siendo éste un recurso que puede potenciar el grado de comprensión y aprendizaje de los estudiantes.

También, la investigación de Rodríguez y Hoyos (2009), presenta los resultados de un estudio realizado con el fin de indagar la influencia de la implementación de ambientes de aprendizaje alternativos como lo son los juegos virtuales cuando son incluidos en las clases de matemáticas. La investigación se realizó con estudiantes de 12 y 13 años de una escuela secundaria pública de México, aplicando el software CABRI Géomètre II y un juego virtual o electrónico de estrategia matemática. Concluyen que, el juego permite que los estudiantes apliquen su creatividad en la resolución de problemas, por ende, que logren adquirir un aprendizaje y transformar las nociones del tema a trabajar.

2.1.3.3. El doblado de papel como una estrategia metodológica para el aprendizaje de la geometría.

A continuación, se presentan algunas investigaciones en las que se sustenta el doblado de papel como una herramienta de aprendizaje de la geometría.

Wares (2014), en su artículo titulado “Problem solving through paper folding” (Resolución de problemas mediante el plegado de papel), tiene como objetivo ilustrar cómo una simple hoja rectangular o tira de papel puede usarse para involucrar a los estudiantes en un rico pensamiento matemático en el contexto de la geometría, por lo tanto, plantea que, el doblado de papel contribuye a que algunas de las ideas matemáticas abstractas sean relativamente concretas. Además, sustenta que cuando se implementa el doblado de papel de manera adecuada, estas actividades tienen el potencial de abordar variadas habilidades matemáticas. En este sentido, el autor resalta que el hecho de comprender que en diferentes situaciones puede intervenir un solo proceso matemático, contribuye a que los estudiantes sean conscientes de las conexiones entre las diferentes áreas de estudio, lo cual fomenta la transferencia de conocimiento.

Asimismo, Wares (2014), sustenta que las ideas matemáticas como la bisección angular, la bisectriz perpendicular, la congruencia de formas y segmentos, las propiedades de los triángulos rectángulos, los triángulos similares, la reflexión y la rotación se vuelven tangibles y vívidos en el contexto del plegado de papel.

Por su parte, Santa y Jaramillo (2014), en su artículo “Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico” se plantean el siguiente interrogante: “¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele?” (p. 46), para dar respuesta a dicho interrogante, utilizan una entrevista de carácter socrático “para analizar el proceso de comprensión de un estudiante frente a un concepto matemático determinado” (p. 47). Concluyen, por un lado, que el proceso investigativo permitió establecer las características de los procesos de razonamiento con respecto a un conjunto de descriptores propuestos sobre el modelo de Van Hiele, por otro lado, que las construcciones geométricas realizadas mediante el doblado de papel permitieron un razonamiento de tipo visual-geométrico que es inherente a la geometría de papel, lo cual fue novedoso para los estudiantes y lograron conclusiones acerca de cómo el doblado de papel es una herramienta alternativa en el aprendizaje de la geometría.

Taylor (2015), analiza el papel de las operaciones y las estrategias cognitivas en la resolución de problemas a partir de la comprensión de textos e imágenes, particularmente en el dominio espacial, en el artículo titulado “*Conceptual Transformation and Cognitive Processes in Origami Paper Folding*” (Transformación conceptual y procesos cognitivos en el plegado de papel origami), proponen a los participantes el doblado de una figura de origami con el fin de que éstos verbalicen el proceso que llevan a cabo. Además, establece que las verbalizaciones de los participantes reflejan procesos creativos de resolución de problemas más allá de leer o reformular y expresar repetitivamente la ejecución de una actividad. Luego, se enfocan en el proceso de reconceptualización (entendido como la generación de nuevos conceptos) como un componente principal de la compleja resolución de problemas mediante el doblado de papel del origami.

Santa, Jaramillo y de Carvalho (2015), plantean que las visualizaciones que se producen de las construcciones hechas por medio del doblado de papel podrían “posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros” (p. 156). Además, concluyen que, efectivamente, el doblado de papel posibilita la comprensión, pues, propicia espacios como la visualización, procesos de experimentación, procesos de argumentación, entre otros.

Martínez (2017) y Atnafu (2018) coinciden en resaltar que el doblado de papel es una herramienta que genera interés y motivación por el área de matemáticas. Martínez (2017), por su parte, resalta, además, que el doblado de papel favorece el aprendizaje significativo de los contenidos geométricos, dando sentido al conocimiento de las matemáticas. Atnafu (2018), plantea, que el doblado de papel promueve la autoestima y brinda a los estudiantes una oportunidad de diversión, ya que proporciona un sentimiento de logro y bienestar, esto último entra en concordancia con lo planteado por De la Torre y Prada (2008), cuando expresan que, “a través del doblado, los alumnos utilizan sus manos para seguir un conjunto específico de pasos en secuencia, produciendo un resultado visible que es al mismo tiempo llamativo y satisfactorio” (p. 2), finalmente, Cano, Flórez y Zapata (2017), hablan del doblado de papel como un método alternativo de aprendizaje que propicia de una manera fácil y amena la comprensión de los procedimientos geométricos.

En consecuencia, se puede entonces, evidenciar que el campo investigativo sobre el aprendizaje y la comprensión de conceptos de la geometría es amplio en sus planteamientos y presenta una variedad de estrategias significativas, que pueden servir de referente conceptual para nuevas investigaciones en el marco de la educación matemática. En este sentido, se pretende plantear un estudio que indague sobre la naturaleza de la comprensión de conceptos geométricos de los estudiantes de los grados séptimo y octavo de escolaridad mediante la geometría del doblado de papel.

2.2. Marco legal

Es posible observar que, en la Ley General de Educación, las matemáticas se asumen como una asignatura obligatoria (Ley 115, 1994), ya que estas se reconocen como un saber fundamental, puesto que permiten el desarrollo de ciertas competencias en el estudiante. Así, en las normas técnicas curriculares, específicamente en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), se espera que los estudiantes desarrollen competencias como: formulación y resolución de problemas, modelación de procesos, comunicación, razonamiento, así como formulación, comparación y ejercitación procesos algorítmicos (MEN, 2006a).

En este sentido, en los Lineamientos curriculares en matemáticas, el pensamiento matemático se subdivide en cinco pensamientos, el numérico que hace referencia al desarrollo de técnicas de cálculo y las relaciones entre los números; el pensamiento métrico que corresponde a la comprensión sobre magnitudes y cantidades; el aleatorio que permite tomar decisiones en situaciones de azar por falta de información confiable el variacional que tiene que ver con la modelación, representación y descripción en diferentes sistemas simbólicos; finalmente, también se puede inferir que, el pensamiento espacial considera la múltiple interacción del sujeto con los objetos situados en el espacio, generando nuevas representaciones mentales, por medio del acercamiento conceptual (MEN, 1998).

2.2.1. La Geometría según las normas técnicas curriculares

La geometría es una rama de las matemáticas visual e intuitiva, considerada como una "herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico" (MEN, 1998, p. 17), además, la geometría al permitir procesos de visualización, argumentación y formalización es un componente importante del currículo colombiano ya que permite un proceso de lo concreto a lo abstracto (Santa, Jaramillo y de Carvalho, 2015). En este sentido, los Lineamientos Curriculares en Matemática enfatizan en el desarrollo de la percepción espacial y las intuiciones, no solo, de las figuras bidimensionales, sino también tridimensionales, pues, "a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales" (MEN, 1998, p. 39), conllevando esto al reconocimiento de propiedades y al análisis posterior de situaciones problema.

Asimismo, los Estándares de matemática, mencionan que a partir del grado 6°, se puede "pensar con la geometría", donde se examinan y analizan las propiedades de los espacios en dos y tres dimensiones y las formas que estos contienen (MEN, 2006b).

La serie de Lineamientos Curriculares en Matemática mencionan una evolución lenta de la geometría desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales (MEN, 1998), no obstante, considera que las formas deductivas finales a las que hacen referencia corresponden a niveles escolares bastante avanzados. En este sentido, menciona el modelo de los Van Hiele como una alternativa para la descripción de esta evolución, ya que "Van Hiele propone 5 niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría" (p. 38).

Por su parte, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) se mencionan las interacciones geométricas como constituyentes de espacios de exploración y modelación, tanto para objetos en reposo como para objetos en movimiento, lo que permite un proceso cognitivo que avanza desde un espacio intuitivo a un espacio conceptual o abstracto (MEN, 2016).

A partir de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, se puede concluir la importancia de la geometría en el currículo, y así lo sustenta Camargo y Acosta (2012) cuando expresan que “la geometría es una de las ramas de la matemática que debe ocupar un lugar privilegiado en los currículos escolares, debido a su aporte a la formación del individuo, desde sus diferentes dimensiones” (p. 6), tanto espaciales como argumentativas.

2.3. Marco teórico

Esta investigación, se sustenta a partir de una teoría para la comprensión en geometría y una estrategia que coadyuva a la comprensión de conceptos geométricos; por esta razón, se presentan algunas de dichas teorías, siendo el modelo de Van Hiele el soporte teórico utilizado. De la misma manera, se desarrolla la geometría del doblado de papel como esa estrategia que permite el desarrollo de niveles de comprensión superiores, para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

2.3.1. Algunas teorías sobre la comprensión

2.3.1.1. Modelo de Pirie y Kieren.

Para Pirie y Kieren, (1989), la comprensión matemática es un proceso compuesto de varios niveles, no lineal y recursivo con características fractales. En este sentido, el desarrollo de la comprensión está directamente relacionado con la construcción y la reorganización de las estructuras de conocimiento de la persona, así, el movimiento entre dichos estratos de comprensión es producto de la generalización y va más allá del nivel previo y la reconstrucción de estratos más bajos, este movimiento se produce mediante el re-doblado (Meel, 2003).

Según García (2014), el proceso dinámico de re-doblar “consiste en doblarse hacia un estrato anterior para revisar y reorganizar los conceptos, de modo que al afrontar un problema haya mejores elementos para solucionarlo” (p. 20). El modelo de Pirie y Kieren (1989) postula 8 niveles que componen su aspecto descriptivo. Estos ocho niveles permiten la descripción de la evolución en la comprensión de conceptos matemáticos en cuanto a conceptos o relaciones entre los mismos. Dichos niveles son:

Primitive Knowing (PK) o conocimiento primitivo, todas las ideas intuitivas que afloran de la mente del estudiante relacionadas con el objeto de estudio. *Image-Making (IM)* el estudiante está en la capacidad de realizar comparaciones entre los conocimientos anteriores y los nuevos conocimientos. *Image-Having (IH)* en este nivel el estudiante reemplaza "las imágenes asociadas a una sola actividad, por imágenes mentales"(Londoño, 2017, p. 120). *Property Noticing (PN)* aquí, el estudiante determina diferentes atributos de una imagen, sus propiedades internas. *Formalising (F)* en este nivel, el estudiante a partir de las propiedades abstrae las cualidades comunes de las imágenes, para producir definiciones matemáticas. *Observing (O)*, el estudiante está en la capacidad de producir verbalizaciones relacionadas con la comprensión del concepto formalizado; de combinar ejemplos, definiciones, demostraciones y teoremas. *Structuring (S)* en este nivel, el estudiante pasa a la comprensión, generando interrelaciones entre dichas observaciones, por medio de un sistema axiomático. *Inventising (I)* o invención, el estudiante formula preguntas nuevas que permitirán el desarrollo de un concepto nuevo (Londoño, 2017).

2.3.1.2. Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) Dubinsky.

Para la teoría APOE Dubinsky (2002), la comprensión matemática requiere de varias construcciones especificadas por la abstracción reflexiva, la cual es entendida como un mecanismo de construcción de esquemas. En esta teoría, la comprensión empieza con la manipulación de objetos, los cuales, a su vez se convierten en acciones, dichas acciones se interiorizan para formar procesos que, a su vez, se encapsulan para formar objetos (Meel, 2003).

En este sentido, el desarrollo de la comprensión es un proceso continuo, pero no lineal, además, en esta teoría se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de manifiesto las construcciones cognitivas de dichos conceptos que pueden ser indispensables en su aprendizaje. Este análisis es conocido como descomposición genética del concepto (Trigueros, 2005). Más específicamente, Trigreros (2005) describe la teoría APOE en los siguientes términos:

> En la teoría APOE se hace una construcción, o modelo, para hablar únicamente de la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos, en particular los que corresponden a la matemática que se introduce en la educación superior. (p. 7)

La construcción del conocimiento matemático, en el contexto de la teoría APOE pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. Lo anterior, maneja una estrecha relación con la abstracción reflexiva que plantea Piaget, pues, es un proceso que permite, a partir de las acciones sobre objetos, inferir sus propiedades o relacionar objetos en un cierto nivel de pensamiento, ello implica insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Trigueros, 2005).

2.3.1.3. La comprensión matemática como generador de imágenes del concepto y definiciones de Tall y Vinner.

La teoría "imagen del concepto-definición del concepto" de Tall y Vinner (1981) sustentan que el cerebro humano no es una entidad puramente lógica, la forma compleja en que funciona a menudo está en desacuerdo con la lógica de las matemáticas, es por esto que no siempre es la lógica pura la que nos da una idea, ni es la casualidad la que nos hace cometer errores. Para comprender cómo ocurren estos procesos, tanto con éxito como erróneamente, se debe formular una distinción entre los conceptos matemáticos tal como se definen formalmente y los procesos cognitivos por los cuales se conciben.

Sustentan que es preciso conocer las imágenes conceptuales para evitar imágenes erróneas de los conceptos y proponen mejoras para la enseñanza, "el estudiante adquiere un concepto cuando construye una imagen del concepto (la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto)" (Meel, 2003, p. 228). En este sentido, la imagen del concepto implica distintas relaciones del concepto con otras estructuras del conocimiento.

Así, en ciertas circunstancias las definiciones son presentadas a los estudiantes, pero éstos no necesariamente utilizan dicha definición cuando deben diferenciar si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, por el contrario, en muchos casos, toman una decisión de acuerdo con la imagen del concepto, que corresponde con el conjunto de todas aquellas imágenes mentales asociadas a su pensamiento (Turégano, 2006). En esta teoría, obtener un concepto, significa, obtener un mecanismo mediante el cual es posible identificar o construir ejemplos del concepto tal y como es abordado en la comunidad matemática (Turégano, 2006).

2.3.1.4. Teoría de los conceptos figurales Fishbein.

La teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993), afirma que los conceptos geométricos son entidades mentales que tienen características conceptuales y también figurales. Enfatiza en el predominio de la definición sobre la imagen, "las figuras geométricas constituyen una clase especial de conceptos a los que denomina "conceptos figurales", porque poseen una doble naturaleza, conceptual y figural" (Moriena y Scaglia, 2003, p.7).

Según esta teoría, las figuras geométricas no son conceptos puros, pero tampoco son meras imágenes comunes, ya que constituyen una clase especial de conceptos denominados "conceptos figurales", pues, poseen una doble naturaleza, por un lado, la naturaleza conceptual y por otro, la naturaleza figural. Al respecto, en la componente conceptual, se expresan las propiedades de una cierta clase de objetos, ésta se da a partir del lenguaje escrito o hablado y su grado de formalismo es de acuerdo a un nivel de axiomatización, por otro lado, la componente figural, hace referencia a la imagen mental que se tiene del concepto (Mazo y Suárez, 2009).

Por su parte Moriena y Scaglia (2003), plantean que, en lo concerniente a lo conceptual, una figura geométrica, por ejemplo, una circunferencia, integra un concepto genuino "una entidad ideal abstracta, que se define formalmente (la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo denominado centro)" (p.7), pero en lo concerniente a lo figural, una figura geométrica posee propiedades espaciales, como forma, posición y magnitud. En este sentido, la componente figural de la figura se limita a permanecer sujeta a las formalizaciones impuestas por la definición.

2.3.1.5. Modelo de Van Hiele.

El modelo de Van Hiele (1990) explica que el aprendizaje de la geometría se construye a partir de unos niveles de pensamiento (visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor), los que a su vez establecen unas fases de aprendizaje que le van permitiendo al estudiante pasar desde un nivel de comprensión al siguiente.

El Modelo de Van Hiele está formado por dos aspectos: el primero de ellos es el aspecto descriptivo que tiene que ver con los niveles de comprensión "a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo" (Jaime y Gutiérrez, 1990,

p. 305); el segundo es el aspecto prescriptivo que tiene que ver con las fases de aprendizaje que van dirigidas al profesor, y se trata de la organización de las actividades de tal forma que lleven al estudiante a un nivel superior de comprensión.

En este sentido, este modelo "por su carácter visual geométrico que facilita la comprensión de definiciones formales a partir del reconocimiento visual, el análisis y la clasificación" (Santa, 2011, p. 48), cobra relevancia en los conceptos de puntos y rectas notables, pues es preciso que haya un acercamiento visual, para que los estudiantes puedan analizar sus propiedades y aplicarlas en situaciones problema. Según lo anterior, se hace necesario abordar el concepto de comprensión, el cual se plantea a continuación, a partir de los esposos Van Hiele (1990).

Según Londoño (2017), tal y como se utiliza actualmente el modelo de Van Hiele, puede enunciarse de la siguiente manera:

> Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento. El proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida. (p. 115)

Además, hace hincapié en que el proceso de enseñanza debe orientarse a "facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz" (Londoño, 2017, p. 115).

2.3.1.5.1. Concepto de comprensión.

Van Hiele (1990), plantea que una persona tiene comprensión en un campo determinado de la geometría cuando es capaz de utilizar los datos y las relaciones geométricas que le son suministradas en situaciones puntuales a situaciones totalmente diferentes y realizar conclusiones de estas. Así pues, se plantea que existe comprensión cuando el estudiante está en la capacidad de "actuar de manera adecuada ante situaciones que todavía no habían aparecido en su proceso de aprendizaje" (p. 3).

En este sentido, la comprensión guarda estrecha relación con las situaciones de aprendizaje y la forma en que estas son presentadas a los estudiantes. Por ejemplo, la transversalización entre saberes, puede enfrentar al estudiante a situaciones novedosas que lo lleven a relacionar las propiedades geométricas abordadas, en otros campos del conocimiento, asimismo, “la tarea del educador es buscar los medios para desarrollar la comprensión que le permita al alumno manejar una asignatura en terrenos distintos”(Van Hiele, 1990, p. 4), es por esto que el modelo propone unas fases de aprendizaje que le permiten al maestro situar los contenidos de tal manera que los estudiantes pasen a través de los diferentes niveles de comprensión, tal como se muestra a continuación.

2.3.1.5.2. Niveles de comprensión según el modelo de Van Hiele.

Los niveles de comprensión de Van Hiele, se presentan a partir de (Jaime y Gutiérrez, 2015):

Nivel 1. Reconocimiento. En este nivel, los estudiantes reconocen las figuras a partir de

sus características físicas globales, como el aspecto, el tamaño de los elementos, la posición, el color, etc., en este sentido, no son capaces de generalizar características que reconocen en una figura con otra de su misma clase, por lo tanto, no reconocen explícitamente las propiedades matemáticas que componen las figuras. Por ejemplo, cuando se introducen las figuras geométricas, en este caso los triángulos, se puede observar que los estudiantes reconocen a partir de la figura el nombre o a partir del nombre la figura, si se les entrega un grupo de figuras de triángulos, estos podrán seleccionar cada tipo de triángulo: isósceles, equiláteros, escalenos.

Nivel 2. Análisis. En este nivel, los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están formadas por elementos que tienen unas propiedades matemáticas, prestan atención a dichas propiedades, pero, al leer o establecer definiciones, tienen problemas con algunas particularidades lógicas de las figuras, esto es, no pueden relacionar unas propiedades con otras. Por ejemplo, para un estudiante que se encuentre en el nivel 2, el triángulo no es reconocible solo por su determinada forma, sino que ya reconoce el triángulo como un polígono de 3 lados y tres ángulos.

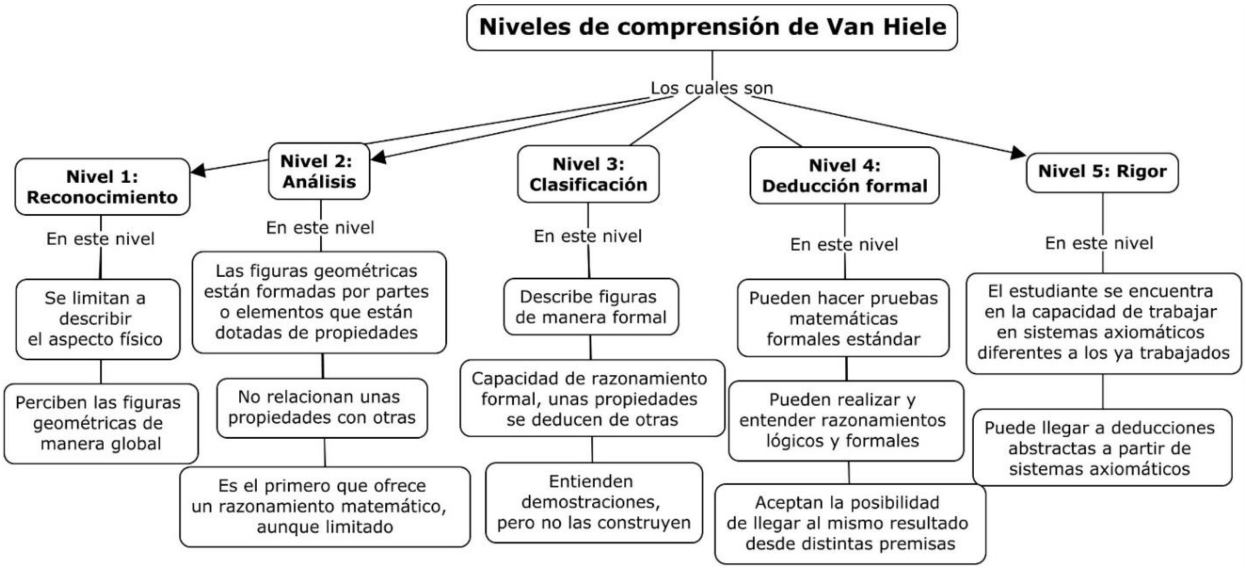
Nivel 3. Clasificación. A partir de este nivel, el estudiante está en la capacidad de reconocer implicaciones entre las propiedades, así como la forma en que unas se deducen de otras y describir de manera formal las figuras, proporcionando definiciones matemáticas, conscientes de que se necesita un conjunto de propiedades y que no necesariamente agregar más propiedades da como resultado una mejor definición. Los estudiantes pueden hacer clasificaciones inclusivas, basadas en las propiedades establecidas en las definiciones dadas de los conceptos, pueden cambiar de opinión cuando se dan nuevas definiciones de un concepto. En el caso del estudio de los triángulos, los estudiantes podrán entender que, si dos lados de un triángulo tienen la misma medida, entonces los ángulos opuestos también son de igual medida, podrán seguir la demostración de esta propiedad, pero no estarán en la capacidad de realizar una demostración de otra propiedad de los triángulos. En el caso del estudio de los triángulos, los estudiantes podrán entender que, si dos lados de un triángulo tienen la misma medida, entonces los ángulos opuestos también son de igual medida, podrán seguir la demostración de esta propiedad, pero no estarán en la capacidad de realizar una demostración de otra propiedad de los triángulos.

Nivel 4. Deducción formal. El progreso de la comprensión de nivel 3 consiste en una mejor comprensión de las definiciones y la capacidad de probar la equivalencia de diferentes definiciones del mismo concepto. Los estudiantes en este nivel pueden hacer pruebas matemáticas formales estándar, es decir, realizar razonamientos lógicos formales, comprendiendo la estructura axiomática de las matemáticas, adoptando varias formas de llegar al resultado, son conscientes de que una figura es solo un caso y que para probar una propiedad es necesario hacer una secuencia de implicaciones basadas en propiedades ya probadas.

Nivel 5. Rigor. En este último nivel de razonamiento, el estudiante se encuentra en la capacidad de trabajar en sistemas axiomáticos diferentes a los ya trabajados, puede llegar a deducciones abstractas a partir de sistemas axiomáticos comparándolos y comprendiendo la importancia de relacionar las estructuras matemáticas.

A continuación, en la gráfica 3, se sintetizan aspectos puntuales de cada nivel de comprensión de Van Hiele.

Gráfica 3. *Niveles de comprensión de Van Hiele (1990).*



Es importante aclarar que en este trabajo de investigación sólo se contemplará los tres primeros niveles de comprensión, ya que el objeto de enseñanza, en este caso, es el de puntos y rectas notables en triángulos abordado en el grado 8° de educación secundaria, por lo cual no se espera que los estudiantes razonen en el nivel 4 y 5.

Los niveles de comprensión poseen las siguientes características:

- Jerarquización y secuencialidad de los niveles, esto es, no es posible alcanzar un nivel de comprensión sin antes haber superado un nivel inferior. Según Corberán et al. (1994), esta característica se refiere a que hay determinadas habilidades que utilizan los estudiantes de forma implícita y que producen el paso de un nivel a otro, cuando son expresadas de manera explícita.

- Estrecha relación entre el lenguaje y los niveles de comprensión, es decir, a cada nivel de comprensión le corresponde un tipo de lenguaje específico.

- Localidad de los niveles de comprensión, el paso de un nivel a otro se produce de manera continua y gradual.

A continuación, se presentan las fases de aprendizaje de Van Hiele, las cuales le permiten al maestro orientar y organizar la enseñanza buscando favorecer la comprensión para que los estudiantes puedan pasar a través de los distintos niveles.

2.3.1.5.3. Fases de aprendizaje.

Las fases del modelo de Van Hiele, en esta investigación, son parte fundamental del diseño metodológico, puesto que, a partir de ellas, se realiza el montaje de los instrumentos, procurando que los casos pasen por los distintos niveles y alcancen un nivel de comprensión mayor.

A continuación, se presentan las cinco fases a partir de los planteamientos de Jaime (1993):
1era fase. Información: en esta fase el maestro informa sobre el campo de estudio, es decir

las temáticas que se van a abordar, por ejemplo, el tema de triángulos y sus propiedades; el tipo de problemas y los materiales que se van a utilizar. Asimismo, en esta fase el profesor identifica los saberes previos sobre el tema a trabajar.

2da fase. Orientación dirigida: aquí se empieza a explorar el campo de estudio, basado en el material ya proporcionado, con el objetivo de que los estudiantes comprendan, descubran y aprendan las propiedades y conceptos básicos de la red de conocimientos que deben formar.

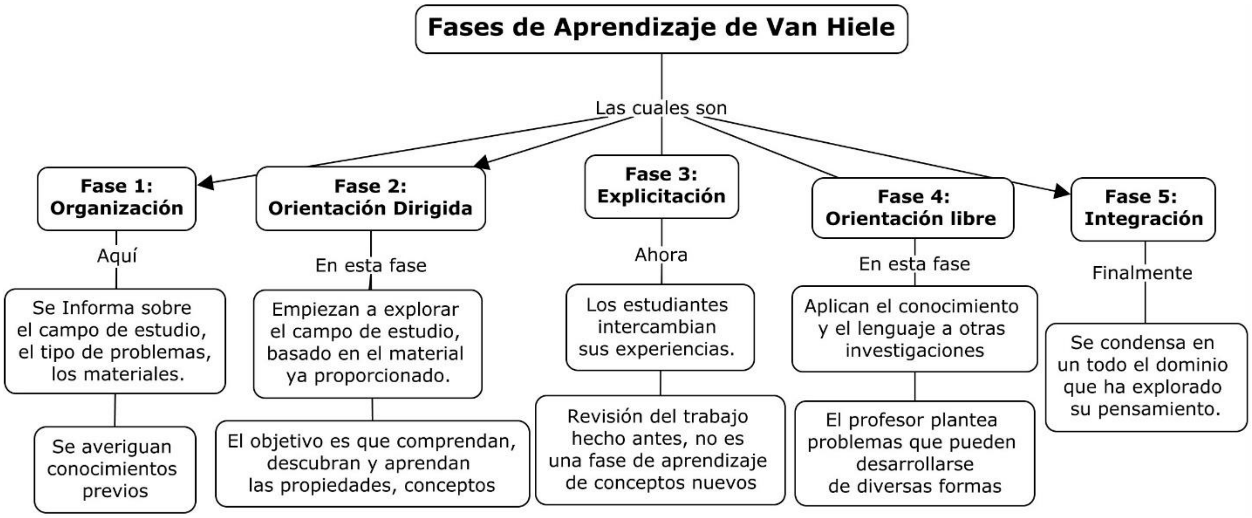
3era fase. Explicitación: los estudiantes intercambian sus experiencias tanto con el profesor como con los compañeros, con el propósito de que afiancen el lenguaje propio del nivel. En esta fase se revisa el trabajo hecho antes, no es una fase de aprendizaje de conceptos nuevos.

4ta fase. Orientación libre: en esta fase los estudiantes aplican el conocimiento y el lenguaje adquirido a otras situaciones. El profesor plantea problemas que pueden desarrollarse de diversas formas y que permitan plantear nuevas relaciones o propiedades.

5ta fase. Integración: en esta fase los estudiantes condensan en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento, integrando conocimientos nuevos. El maestro puede fomentar ese trabajo proporcionando comprensiones globales, por medio de resúmenes y de recopilaciones que le permitan al estudiante realizar dicha integración.

A continuación, en la gráfica 4, se sintetizan aspectos puntuales de cada fase de aprendizaje:

Gráfica 4. *Fases de aprendizaje de Van Hiele (1990).*



Para efectos de este trabajo de investigación, los niveles de comprensión que se proponen en el Modelo de Van Hiele permitirán describir el nivel de comprensión geométrico de los estudiantes sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, tanto inicial como final, este último analizado a partir de la implementación de algunas estrategias de enseñanza y aprendizaje, elaboradas atendiendo a las fases que proponen los mismos autores, pues proporcionan algunas pautas para fomentar el alcance de dichos niveles de comprensión. En este sentido, se propone la geometría de doblado de papel, como una estrategia que permite la evolución de los niveles de comprensión con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

2.3.2. Axiomática del doblado de papel

Se plantea la geometría del doblado de papel como una alternativa de enseñanza, que coadyuva con la comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, al ser una técnica innovadora para los estudiantes, que "les permite construir objetos mediante el plegado del papel, y de esta manera comprender y visualizar de manera palpable los conceptos de la geometría plana" (Martínez, 2017, p. 86).

Santa y Jaramillo (2010) plantean que, a nivel educativo, el doblado de papel se ha consolidado como una forma para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, principalmente por su carácter experimental y visual, que permite a los estudiantes manipular la hoja de papel realizando dobleces determinados, visualizar conceptos geométricos y "justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático" (p. 340). En consecuencia, se puede considerar que el uso del doblado de papel es una alternativa que permite al estudiante, por un lado, motivarse en lo que se refiere a las matemáticas y, por otro lado, asimilar conceptos que son necesarios para acceder posteriormente a conocimientos avanzados en el área.

De igual manera, en esta investigación, se considera que el método Singapur puede posibilitar la enseñanza de la geometría desde el doblado de papel, pues, la enseñanza de lo concreto es posible desde el acto de doblar y desdoblar papel, lo pictórico hace referencia a la forma como el estudiante transcribe las visualizaciones alcanzadas en el acto de doblar y, finalmente, lo abstracto es esa forma en que el estudiante puede matematizar y ver la geometría que hay detrás de los dobleces realizados.

2.3.3.1. Geometría del doblado de papel.

El ejercicio de doblar papel, mejor conocido como papiroflexia, se refiere al arte de hacer figuras utilizando papel plegado (Royo, 2002). Según Santa y Jaramillo (2010), el doblado de papel, por su carácter visual y experimental, se ha consolidado como una alternativa que permite mejorar el razonamiento en geometría, pues, el estudiante no solo manipula la hoja de papel cuando realiza los dobleces, sino también visualiza algunos conceptos geométricos, lo cual le ayuda a formalizar las construcciones a partir de sistemas axiomáticos. En este sentido, la geometría del doblado de papel es una estrategia que se puede utilizar con fines pedagógicos, ya que permite estudiar e ilustrar la geometría plana elemental (Royo, 2002).

Según Royo (2002), la papiroflexia se relaciona con las matemáticas a partir de tres aspectos: el primero, denominado "papiroflexia modular" que hace referencia a la representación de poliedros y figuras geométricas a partir del doblado de papel; el segundo llamado "axiomas de constructibilidad", que se refiere a la teoría de puntos análoga a la existente con regla y compás y, finalmente, el "diseño de figuras" que son los métodos matemáticos para la creación de figuras doblando papel.

En esta perspectiva, se asume la geometría de doblado de papel a partir de Santa y Jaramillo (2010), quienes afirman:

> Dado que el doblado de papel permite hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás, en los últimos años se ha venido fundamentando un

sistema axiomático, paralelo al de la geometría euclidiana, que permite justificar las construcciones hechas con papel. Esta nueva geometría, denominada geometría del doblado de papel, tiene sus raíces en los seis axiomas postulados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita. (p. 340)

Para efectos del desarrollo del presente trabajo de investigación y teniendo en cuenta que el objeto geométrico de estudio son los puntos y rectas notables de los triángulos, se aborda la relación de axiomas de constructibilidad, puesto que la intencionalidad es realizar por medio de doblado de papel construcciones realizables también con regla y compás con el fin de involucrar su carácter visual.

2.3.3.2. Conceptos primitivos de la geometría del doblado de papel.

Santa y Jaramillo (2010), establecen una correspondencia entre los conceptos básicos de la geometría Euclidiana (el punto, la recta y el plano) y los conceptos "primitivos" del doblado de papel (el doblez, el punto y la hoja de papel) como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. *Conceptos Primitivos de la Geometría de doblado de papel.*

Conceptos básicos de la Geometría Euclidiana	**El punto**	**La recta**	**El plano**
Conceptos primitivos de la Geometría del doblado de papel	**El punto:** Se puede relacionar con la intersección de dos dobleces o con las esquinas de una hoja de papel.	**Doblez:** Representa de forma abstracta una recta, puesto que, al hacer un doblez, éste aparece tanto en el reverso como en el anverso del papel, siendo este último limitado.	**Hoja de papel:** Representa de forma abstracta un plano infinito, ya que se puede tomar como una porción del plano, una cara de la hoja de papel.

Nota: Esta tabla se elabora con relación a los planteamientos de Santa (2010).

2.3.3.3. Axiomas de Huzita.

En 1985, un matemático japonés llamado Humiaki Huzita presentó un conjunto de seis axiomas que determinan lo que se puede construir a través de pliegues de origami (doblado de papel). Los axiomas son ampliamente conocidos como los axiomas Huzita-Hatori (Palamakumbura, 2013).

Lang (2004), presenta los axiomas de Huzita de la siguiente forma:

Axioma 1. Dados dos puntos p_1 y p_2, podemos doblar una línea que los conecta (figura 1a).

Axioma 2. Dados dos puntos p_1 y p_2, existe un doblez que pone el punto p_1 sobre el punto p_2 (figura 1b).

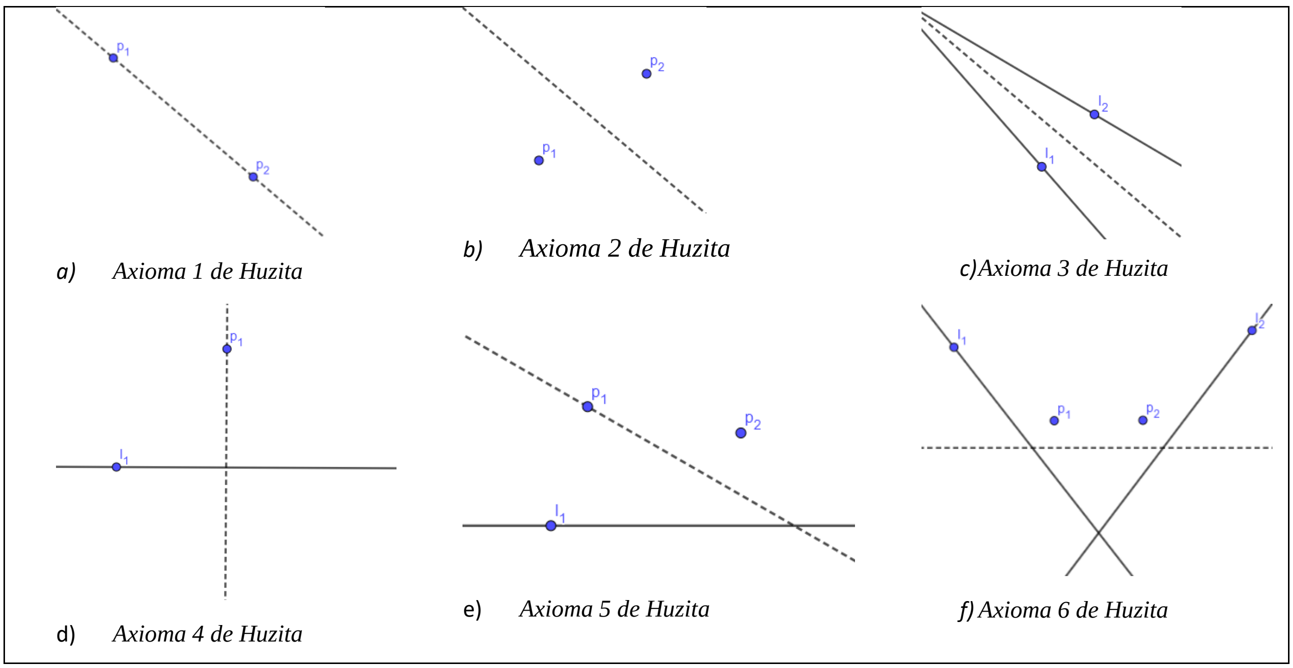
Axioma 3. Dadas dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que ponga l_1 sobre l_2 (figura 1c).

Axioma 4. Dado un punto p_1 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que ponga a l_1 sobre sí misma y pase por p_1 (figura 1d).

Axioma 5. Dados dos puntos p_1 y p_2 y una línea l_1, se puede hacer un doblez que ponga a p_1 sobre l_1 y pase por p_2 (figura 1e).

Axioma 6. Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos líneas l_1 y l_2, se puede hacer un doblez que ponga a p_1 sobre l_1 y a p_2 sobre l_2 (figura 1f).

Figura 1[4]**.** *Axiomas de Huzita.*



a) *Axioma 1 de Huzita*
b) *Axioma 2 de Huzita*
c) *Axioma 3 de Huzita*
d) *Axioma 4 de Huzita*
e) *Axioma 5 de Huzita*
f) *Axioma 6 de Huzita*

Nota: Las líneas punteadas son el doblez resultante

2.3.3.4. Construcción de líneas notables en triángulos mediante el doblado de papel.

A continuación, se propone la construcción de los puntos y rectas notables en triángulos a partir de su definición, basado en la axiomática de doblado de papel.

[4] Construcciones realizadas con el software geométrico GeoGebra.

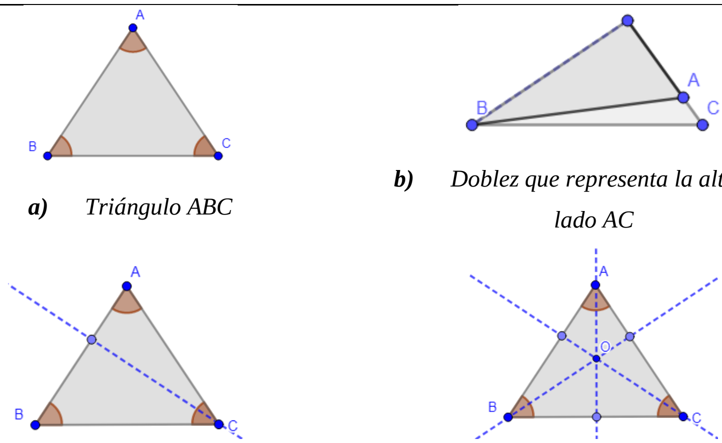
2.3.3.4.1. Alturas.

Las alturas de un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 2a) son definidas como los segmentos perpendiculares trazados desde los vértices a los lados opuestos.

Para trazar alturas por medio del doblado de papel:

- Se realiza un doblez a partir del vértice $\boldsymbol{B}$ que sitúe el lado $\boldsymbol{AC}$ sobre sí mismo. El doblez generado es la altura del lado $\boldsymbol{AC}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 2b y 2c)
- Luego, se realiza el doblez anterior a partir de los vértices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ (Figura 2d)
- El punto de intersección de los tres dobleces recibe el nombre de *ortocentro*.

Figura 2. *Alturas del triángulo ABC mediante doblado de papel.*



a) *Triángulo ABC*

b) *Doblez que representa la altura del lado AC*

c) *Altura del lado AC, la línea punteada representa el doblez*

d) *Alturas del triángulo ABC y su intersección (ortocentro)*

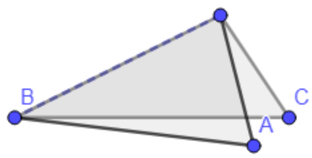
2.3.3.4.2. Medianas.

Las medianas de un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 2a) son definidas como los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

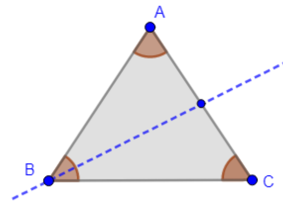
Para trazar medianas por medio del doblado de papel:

- Se realiza un doblez a partir del punto medio del lado $\boldsymbol{AC}$ que pase por el vértice $\boldsymbol{B}$. El doblez generado es la altura del lado $\boldsymbol{AC}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 3a y 3b)
- Luego, se realiza el doblez anterior a partir del punto medio de los lados $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{BC}$ (Figura 3c)
- El punto de intersección de los tres dobleces recibe el nombre de *Baricentro.*

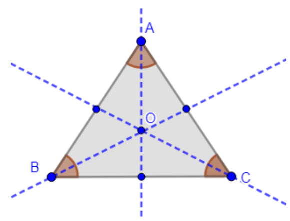
***Figura 3**. Trazado de medianas mediante doblado de papel.*



a) *Doblez a partir del punto medio del lado AC, que pasa por el vértice B*



b) *Mediana del lado AC por medio de doblado de papel (línea punteada)*



c)*Medianas del triángulo ABC, con intersección en el punto O.*

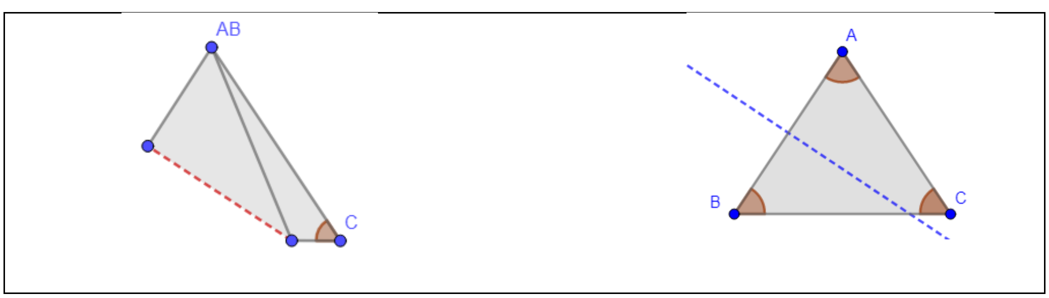
2.3.3.4.3. Mediatrices.

Las mediatrices de un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 2a) son definidas como las perpendiculares trazadas desde el punto medio de cada lado del triángulo.

Para trazar mediatrices por medio del doblado de papel:

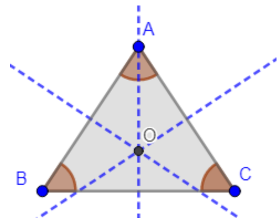
- Se realiza un doblez que sitúe a $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$. El doblez generado es la mediatriz del lado $\boldsymbol{AB}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 4a y 4b)
- Luego, se realiza el doblez anterior para los lados $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{BC}$ (Figura 4c)
- El punto de intersección de los tres dobleces recibe el nombre de *circuncentro* y es el centro del círculo circunscrito (Figura 4d)

Figura 4. *Mediatrices del triángulo ABC mediante doblado de papel.*

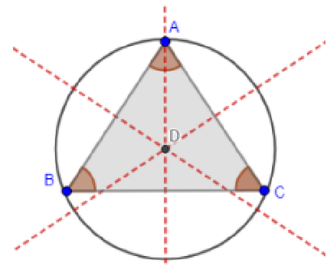


a) *Doblez que sitúa A sobre B.*

b) *La línea punteada que resulta del doblez anterior.*



c) *Mediatrices del triángulo ABC. Los dobleces resultantes son las líneas punteadas.*



d) *Círculo circunscrito.*

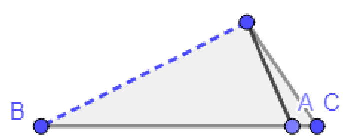
2.3.3.4.4. Bisectrices.

Las bisectrices de un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ (Figura 2a) son definidas como las semirrectas que pasan por cada vértice y divide los ángulos en dos iguales.

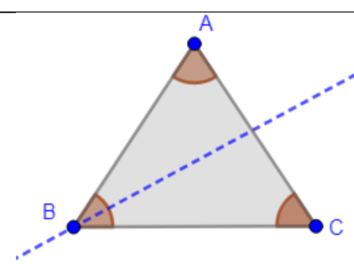
Para trazar bisectrices por medio del doblado de papel:

- Se realiza un doblez que sitúe el lado $\boldsymbol{AB}$ sobre el lado $\boldsymbol{BC}$ (Figura 5a)
- El doblez realizado es la recta que divide el ángulo $\boldsymbol{B}$ en dos ángulos iguales (Figura 5b)
- Luego se realiza el doblez anterior para los lados $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{BC}$ (Figura 5c)
- El punto de intersección de los tres dobleces recibe el nombre de *incentro* y es el centro del círculo inscrito en el triángulo (Figura 5d)

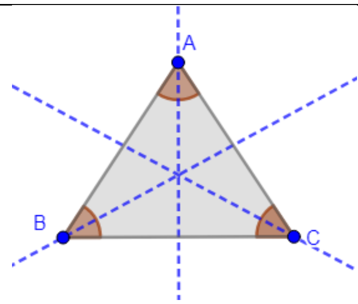
Figura 5. *Bisectrices del triángulo ABC mediante doblado de papel.*



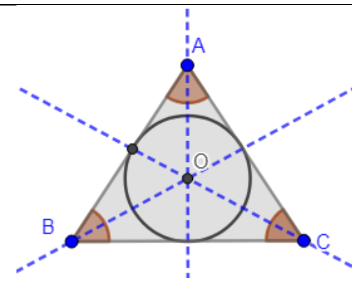
a) *Bisectriz del ángulo B, mediante el doblado de papel.*



b) *Doblez resultante (línea punteada) de la bisectriz del ángulo B.*



c) *Bisectrices de los ángulos A, B y C. Dobleces resultantes (líneas punteadas).*



d) *Punto de intersección de las bisectrices incentro.*

2.4. Marco Metodológico

A partir de las fases de aprendizaje de Van Hiele, surge una ruta metodológica que permite la integración del enfoque CPA del método Singapur y la geometría del doblado de papel, para la elaboración de estrategias de aprendizaje que permiten la evolución de los niveles de comprensión con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

2.4.1. Método Singapur para el Aprendizaje de las Matemáticas

2.4.1.1. Características del Método según el Ministerio de Educación de Singapur.

El método Singapur es una propuesta de enseñanza para las matemáticas que debe su nombre al país en el cual se diseñó y tiene como eje fundamental la resolución de problemas. Según el Ministerio de Educación de Singapur (2012), el plan de estudios tiene como objetivo garantizar que todos los estudiantes alcancen un nivel de dominio de las matemáticas que a su vez les sirva para la vida.

El Ministerio de Educación de Singapur (2012), establece que el enfoque central del método es la resolución de problemas matemáticos, es decir, el uso de las matemáticas para resolver problemas. Dicho método establece la dirección y proporciona orientación en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas en todos los niveles, desde el primario hasta el preuniversitario, enfatizando la comprensión conceptual, el dominio de habilidades y procesos matemáticos, dando el debido énfasis a las actitudes y la metacognición. En este sentido, el método Singapur contempla cinco componentes que están interrelacionados entre sí:

En primer lugar, *los conceptos* se pueden agrupar en numéricos, algebraicos, geométricos, estadísticos, probabilísticos y analíticos. Dichas categorías de contenido están conectadas y son interdependientes en diferentes etapas de aprendizaje y diversos programas de estudio, así mismo, la amplitud y profundidad del contenido varían. De ahí que para desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y dar sentido a varias ideas matemáticas, así como a sus conexiones y aplicaciones, los estudiantes deben estar expuestos a una variedad de experiencias de aprendizaje para ayudarlos a relacionar los conceptos matemáticos con experiencias concretas.

En segundo lugar, *las habilidades* son importantes en el aprendizaje y la aplicación de las matemáticas. Así, para desarrollar competencias en habilidades matemáticas, los estudiantes deben tener oportunidades para usar y practicar las habilidades. Estas habilidades deben enseñarse con una comprensión de los principios matemáticos subyacentes y no simplemente como procedimientos (Ministerio de Educación de Singapur, 2012).

En tercer lugar, *los procesos* matemáticos se refieren a las habilidades de proceso involucradas en el proceso de adquisición y aplicación de conocimiento matemático. Al respecto, el razonamiento matemático se refiere a la capacidad de analizar situaciones matemáticas y construir argumentos lógicos. Es un hábito mental que se puede desarrollar mediante la aplicación de las matemáticas en diferentes contextos; el razonamiento comunicativo, se refiere a la capacidad de usar lenguaje matemático para expresar ideas y argumentos matemáticos de manera precisa, concisa y lógica. Ayuda a los estudiantes a desarrollar su comprensión de las matemáticas y agudizar su pensamiento matemático; y las conexiones se refieren a la capacidad de ver y establecer vínculos entre ideas matemáticas, entre matemáticas y otras materias, y entre las matemáticas y el mundo real. Esto ayuda a los estudiantes a entender lo que aprenden en matemáticas.

Por su parte, *la metacognición*, se refiere a la conciencia y la capacidad de controlar los procesos de pensamiento, en particular la selección y el uso de estrategias de resolución de problemas. Incluye la autorregulación del aprendizaje.

Finalmente, *las actitudes* hacen referencia a los aspectos afectivos del aprendizaje de las matemáticas, tales como: creencias sobre las matemáticas y su utilidad; interés y disfrute en el aprendizaje de las matemáticas; apreciación de la belleza y el poder de las matemáticas; confianza en el uso de las matemáticas y perseverancia para resolver un problema

.

2.4.1.2. Enfoque CPA (Concreto Pictórico Abstracto).

Este enfoque obedece a aspectos metodológicos implementados desde el año 1992 en el método Singapur que aborda la indagación de los conceptos matemáticos a partir de lo Concreto, lo Pictórico y lo Abstracto (CPA), esto es, pasar de una fase manipulativa a una fase abstracta (Fonseca, et al., 2017).

Así, lo *Concreto* hace referencia a aquellas actividades que permiten un primer acercamiento a los conceptos matemáticos a través del uso manipulativo de material; después de esto se pasa a lo *Pictórico*, donde los estudiantes representan mediante dibujos las cantidades matemáticas, las cuales posteriormente son comparadas en un problema; finalmente, lo *Abstracto* alude al momento en que el estudiante estructura algoritmos matemáticos utilizando signos y símbolos que, a su vez, traducen la experiencia concreta y pictórica (Fonseca et al., 2017).

En este sentido, en el método Singapur es preciso profundizar el conjunto de conocimientos atendiendo al desarrollo cognitivo del estudiante, teniendo en cuenta que, si por ejemplo un estudiante se va a enfrentar a un concepto geométrico como el triángulo, primero debe entrar en contacto directo con una figura concreta que lo represente, después mediante un dibujo o una representación gráfica que debe hacer referencia a dicho objeto y finalmente, mediante una definición formal de triangulo. Lo anterior, hace referencia al currículo que según Guilar (2009):

> Debe organizarse de forma espiral, es decir, se deben trabajar los mismos contenidos, ideas o conceptos, cada vez con mayor profundidad. Los niños y niñas irán modificando sus representaciones mentales a medida que se desarrolla su cognición o capacidad de categorizar, conceptualizar y representar el mundo. (p. 238)

En el currículo en espiral se adapta a las necesidades de cada estudiante, pues, aborda los conceptos de tal forma que favorezca el aprendizaje continuo, lo cual permite que el aprendizaje inicial proporcione los fundamentos de los aprendizajes posteriores.

Lo anterior, surge a partir de las ideas de Bruner (1980), quien plantea que el aprendizaje es activo, por ende, es muy importante la experiencia con el mundo y la forma en que ésta es representada. En este sentido, plantea tres maneras en que estas representaciones pueden adquirirse:

> Al principio, el bebé conoce el mundo principalmente por las acciones habituales que realiza para enfrentarse a él. Con el tiempo se le añade una técnica de representación a través de imágenes que son relativamente independientes con la anterior. Gradualmente va

ampliando un nuevo y poderoso método de traslación de acciones e imágenes al lenguaje, propiciando un tercer sistema de representación. (p. 23)

Estos tres tipos de representación, Bruner (1980), los denominó respectivamente, enactivo, icónico, simbólico; empleados por el método Singapur como los principios subyacentes del enfoque CPA. A continuación, en la tabla 4, se presentan:

Tabla 4. *Tipos representaciones según Bruner (1980), asociados al CPA.*

Representación Enactiva	**Representación Icónica**	**Representación Simbólica**
Se conoce el mundo (objetos) por medio de la interacción con él.	Representación del mundo (objetos) por medio de imágenes y dibujos.	Se emplea el lenguaje y símbolos para representar el mundo (objetos).
Concreto	**Pictórico**	**Abstracto**
Indagación de conceptos matemáticos, a través de actividades manipulativas.	Después de lo concreto se representan las cantidades matemáticas por medio de modelos y dibujos.	A partir de las indagaciones concreta y pictórica, Se representan las cantidades matemáticas por medio de símbolos, algoritmos, teoremas, etc.

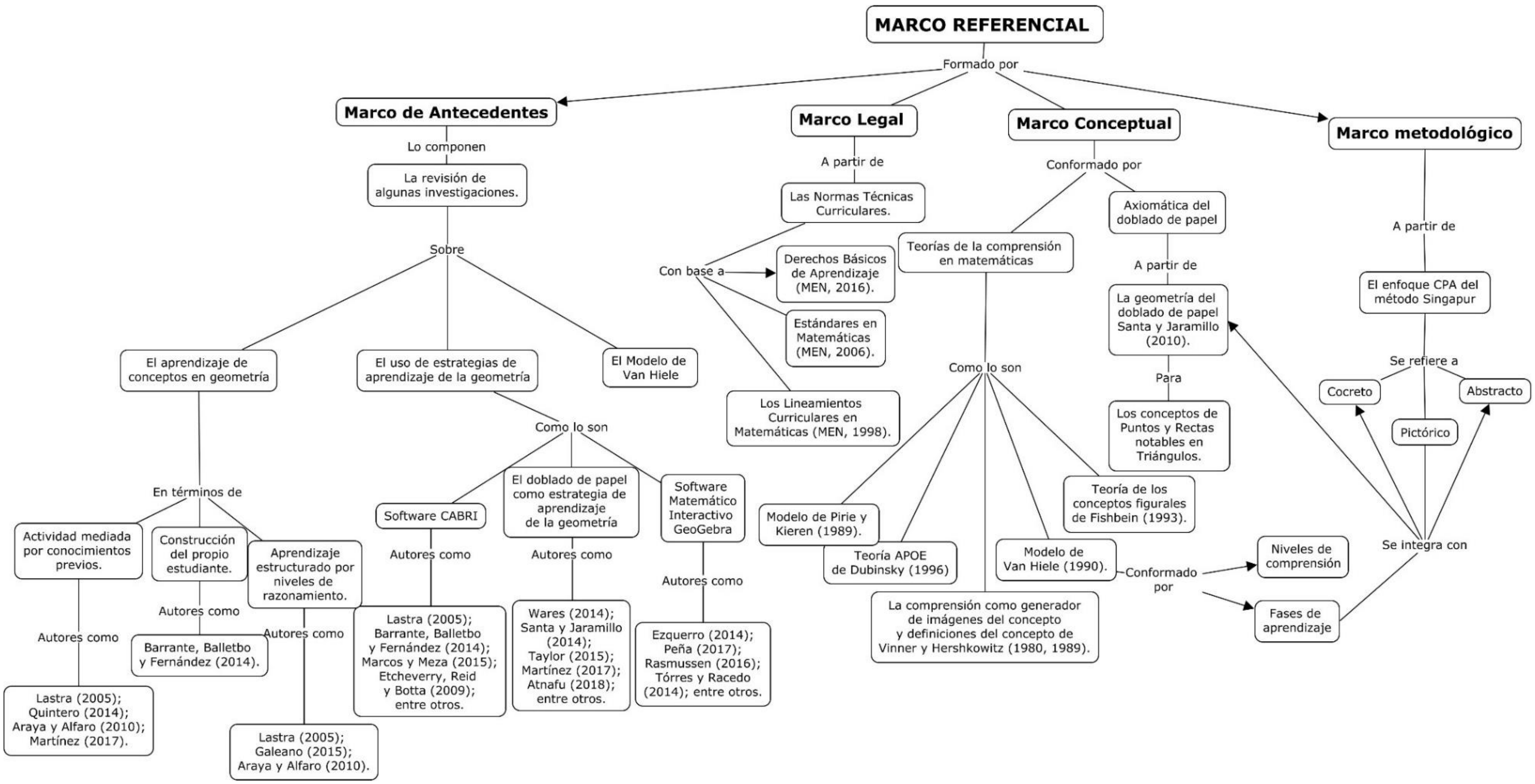
Nota: esta tabla se realiza con relación a los planteamientos de Bruner (1980) y el enfoque CPA. del método Singapur.

Con el objetivo de desarrollar el enfoque CPA del método Singapur, en consonancia con las fases del modelo de Van Hiele, se propone la geometría de doblado de papel como una estrategia que, por un lado, permite que el estudiante tenga ese primer encuentro con el acto de doblar papel (lo concreto), por otro lado, que concretice aquellos dobleces por medio del acto de desdoblar, observar y dibujar las propiedades que surgen a partir de allí (Pictórico), finalmente, que pueda matematizar lo observado, abstraer propiedades e integrarlas con otras (Abstracto).

De ahí entonces que se considera como posibilidad para esta investigación la integración de las fases del Modelo de Van Hiele con el método Singapur, para el diseño de las estrategias de enseñanza sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, por medio de la geometría del doblado de papel.

A continuación, en la gráfica 5 se presenta un esquema que pretende sintetizar el marco referencial:

Gráfica 5. *Síntesis del marco referencial.*



3. Metodología

3.1. Enfoque y tipo de estudio

Esta investigación se inscribe en un enfoque cualitativo, ya que se caracteriza por estar fundamentada en describir, comprender e interpretar significados, (Hernández, et al., 2014), pues su interés es analizar el nivel de comprensión en el marco de Van Hiele, que alcanzan estudiantes de grado 8° sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, en el contexto de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA. En este sentido, en la investigación cualitativa la realidad se fundamenta desde lo social y experiencial, las construcciones individuales se generan y refinan hermenéuticamente, se contrastan y comparan dialécticamente. Así, la investigadora se comprometió a tratar la información tal y como fue proporcionada, sin buscar alterarla ni intervenir en ella.

En palabras de Rodríguez (2005), la investigación cualitativa “privilegia como objeto de estudio al mundo subjetivo, aborda los hechos y fenómenos en sus ambientes naturales de manifestación y considera el proceso de conocimiento como un proceso comprensivo y holístico” (2005, p. 28). Así pues, la intención principal de esta investigadora fue obtener perspectivas y puntos de vista, evitando llegar a conclusiones apresuradas, en relación con las dinámicas que se presentaron en los encuentros.

Atendiendo a los propósitos de esta investigación se implementó como método de investigación el estudio de caso, porque, de acuerdo con Stake (1999) “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11), lo que permite que el interés se centre en el caso y en sus modos de comprender los conceptos de puntos y rectas notables y que la explicación no esté supeditada a una teoría que pretenda universalizar las condiciones particulares del caso. Del mismo modo, en este trabajo de investigación, el estudio de caso dio lugar al análisis de los datos subjetivos que surgieron desde de las interacciones entre los casos, lo cual posibilitó evidenciar transformaciones en el razonamiento y modos de comprender los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos a partir de la implementación de los diferentes técnicas e instrumentos.

Ahora bien, siendo consecuente con lo anterior, se desarrolló el estudio de casos colectivo, con relación a los planteamientos de Stake (1999), pues este permite estudiar en conjunto un número determinado de casos, con la pretensión de aproximarse a conocer de manera directa las características o los rasgos distintivos de aspectos tales como el objeto de estudio, una población o un fenómeno en general involucrados en un estudio; en otras palabras, se trata de un estudio *instrumental*[5], pero extendido a varios casos (Galeano, 2012). En este sentido, el interés se centra en una población particular, la cual es un grupo de estudiantes de grado 8° de un colegio de carácter privado, que hayan abordado los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos; con unas dinámicas específicas tanto sociales como educativas, con el fin de realizar una interpretación de sus modos de comprender los conceptos en cuestión, antes y después de la implementación de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA y, así analizar sus niveles de comprensión a partir del Modelo de Van Hiele.

3.2. Participantes y criterios de selección

Con respecto al lugar donde se llevó a cabo el trabajo de campo, es un colegio de carácter privado, que cuenta con dos sedes, una femenina y otra masculina, esta segunda ubicada en el Retiro (Antioquia), lugar donde la investigadora es maestra en propiedad; brinda formación en los niveles de kínder, preescolar, educación básica y media académica.

Este colegio se caracteriza por tener un enfoque de educación personalizada, donde se atienden las dinámicas de desarrollo de la ciudad de Medellín, como la apropiación del enfoque STEM. Además, se destaca por su participación en olimpiadas tanto locales como nacionales; proyectos de ciudad como la universidad de los niños de EAFIT, la integración de filosofía, ética y educación religiosa en *Project for Change*, la implementación del método Singapur para la comprensión de las matemáticas desde los primeros grados de escolaridad, entre otros. Asimismo, el currículo de este colegio privilegia la utilización de métodos y alternativas que promuevan la comprensión en matemáticas, por ello, brinda formación continua a los docentes en tal aspecto.

Para efectos del trabajo de campo, se seleccionaron cuatro estudiantes de grado 8°, con edades entre los 13 y 14 años, ya que por un lado según la estructura conceptual[6] del colegio, en

[5] [4] Esto es, se estudia un caso con el fin de obtener mayor conocimiento acerca de un tema o una teoría. Que para el caso de la investigación son 4 estudiantes que cursan el grado octavo y que abordaron los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos

[6] Entendida de manera institucional, como los documentos que orientan a los maestros en cada grado con respecto a los indicadores a desarrollar, las competencias, procesos, metodologías, conceptos y bibliografía sugerida, en otras palabras, son las mallas curriculares que orientan la institución.

este grado de escolaridad se abordan los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos, y por otro lado, de acuerdo con las características del Modelo de Van Hiele (1990), se escogieron casos que permitieran y analizar los niveles de comprensión a partir a la temática, con el fin de contrastar su comprensión inicial y su comprensión al finalizar el trabajo de campo.

Para la selección de los casos se tienen en cuenta algunos criterios de acuerdo con los planteamientos de Stake (1999), disponibilidad y disposición, puesto que es necesario que los casos puedan proporcionar la información en los tiempos establecidos en el cronograma, ya sea en clase o en encuentros académicos; capacidad comunicativa, pues es necesario que los casos tengan la capacidad de comunicar a la investigación sus modos de comprender de forma clara y pertinente.

3.3. Técnicas e instrumentos para recoger la información

Con el fin de triangular los datos obtenidos a partir del trabajo de campo, se combinan diferentes técnicas (Restrepo, 2018), las cuales se definen atendiendo a los planteamientos de Stake (1999), en tanto que, la intención principal es obtener perspectivas y puntos de vista de los casos. Para ello se emplean como técnicas de recolección de la información, la entrevista de carácter socrático y los talleres de doblado de papel.

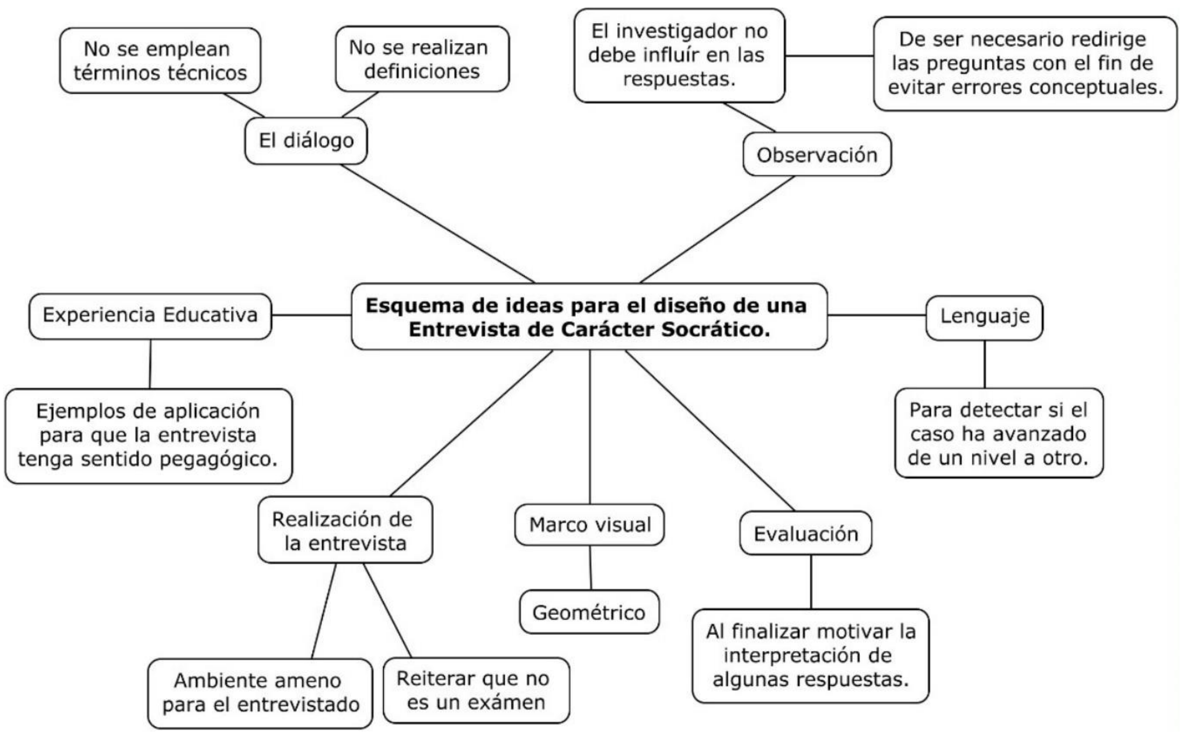
3.3.1. Entrevista de carácter Socrático

La entrevista tiene un papel importante en la recolección de la información para esta investigación, puesto que allí se encuentran y se producen distintas reflexividades en relación con el objeto de estudio (Guber, 2011), donde se obtienen enunciados y verbalizaciones a partir de la participación de los casos. En este estudio se aplica la entrevista de carácter socrático, con el objetivo de indagar por la comprensión inicial que tienen los casos sobre los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos, esto es, observar la evolución del pensamiento de los casos partiendo de algunos conocimientos básicos; y, en un segundo momento, con el fin de identificar los niveles de comprensión que alcanzan dichos casos, a partir de la implementación de la geometría del doblado de papel, enmarcada en el enfoque CPA. Lo anterior desde de los niveles de comprensión propuestos por el modelo Van Hiele (1990).

Así, por medio de esta técnica, la investigadora proporciona cierta información al caso, con el fin de observar cómo este la asimila, la utiliza y qué conclusiones establece a partir de ella. Según Jaramillo y Campillo (2001), la entrevista de carácter Socrático se enmarca dentro de la estructura del modelo de Van Hiele, ya que este enfatiza la necesidad de una experiencia puntual de aprendizaje con el fin que se produzca una evolución en la comprensión

Jaramillo y Campillo (2001), proponen unas ideas para el diseño de la entrevista de carácter Socrático, resumidas en la gráfica 6:

Gráfica 6. *Esquema de ideas para el diseño de una entrevista de carácter Socrático.*



Previamente a los encuentros, los protocolos de entrevistas fueron sometidos a juicio de expertos, con el fin de brindar confiabilidad y credibilidad a la investigación, fueron revisadas por la Doctora en Educación Zaida Margot Santa quien, en el año 2010, en su tesis de maestría profundizó la entrevista de carácter Socrático. Del mismo modo, fueron diseñadas a partir de una serie de preguntas que surgieron de los procesos de visualización producidos en los talleres de doblado de papel (Santa, 2011).

Cabe destacar, que las entrevistas se realizaron a partir de la implementación de algunos talleres, por lo tanto, en el trabajo de campo estas dos técnicas de recolección de la información no se desligan, por el contrario, se articulan.

3.3.2. Talleres de doblado de papel

Los talleres de doblado de papel, desarrollados en conjunto con las entrevistas de carácter socrático, tenían como objetivo describir la aplicación de la geometría del doblado de papel desde el enfoque CPA, para la comprensión de conceptos geométricos. Además, posibilitaron recoger información que posteriormente permitirá identificarlos niveles de comprensión que alcanzan los casos. Al igual que en las entrevistas de carácter socrático, el montaje de los talleres de doblado de papel también fue sometido a juicio de expertos con una persona que tenga experiencia en geometría de doblado de papel, con el fin de identificar posibles errores conceptuales.

Para el diseño de los talleres se tuvieron en cuenta las indagaciones concretas, pictóricas y abstractas del enfoque CPA. La siguiente es una rúbrica para cada uno de los talleres, donde se muestran indicadores que dan cuenta de información relevante, proporcionada por el caso, en cada una de las indagaciones y atendiendo al objetivo de cada taller.

Tabla 5. *Manifestaciones típicas que podrían contener información relevante en los talleres de doblado de papel a partir de las indagaciones del CPA.*

Taller (se especifica el título del taller)		
Objetivo (se especifica el objetivo del taller)		
Materiales (se especifica los materiales a utilizar en el taller)		
Indicador de lo Concreto	**Indicador de lo Pictórico**	**Indicador de lo Abstracto**
Lo que se espera construir a partir del doblado de papel en el taller de doblado de papel.	Lo que se espera identificar a partir de la construcción realizada.	Lo que se espera deducir y describir matemáticamente de la construcción realizada.

Con relación a los encuentros para la recolección de la información, ya sea para la aplicación de entrevistas socráticas o talleres de doblado de papel, se propuso una secuencialidad específica, atendiendo a las cinco fases del modelo de Van Hiele (1990). A continuación, en la tabla 6, se presentan las características de dichas fases de aprendizaje de Van Hiele, el instrumento que se utilizó y los momentos destinados.

Tabla 6. *Propuesta de Encuentros a Partir de las Fases de Aprendizaje de Van Hiele (1990).*

Nivel de comprensión	Fases	Características	Instrumento o momento	Encuentros destinados
Nivel 1: Reconocimiento	*Fase 1 Información*	Se informa a los casos sobre el campo de estudio e identificación de saberes previos.	Presentación del proyecto, socialización de beneficios, riesgos garantías, lectura de consentimiento informado.	Encuentro 1
	Fase 2 Orientación dirigida	Se empieza a explorar el campo de estudio (conceptos de puntos y rectas notables en triángulos), a partir de la implementación de un cuestionario que tiene como objetivo, identificar esos preconceptos que los casos poseen acerca del objeto de estudio.	Cuestionario de Saberes previos (ver Anexo 2).	Encuentro 2
	Fase 3 Explicitación	Se realiza una puesta en común con el fin de orientar posibles errores conceptuales y resolver dudas con respecto al cuestionario.		
	Fase 4 Orientación libre	En este encuentro, se propone un test que tiene como objetivo, recoger información previa a los talleres, respecto a los conceptos de puntos y rectas notables, a partir del doblado de papel. Cabe mencionar, que son preguntas de selección múltiple y que, a partir de éstas, se realizarán las preguntas que formarán las entrevistas que orientarán los talleres de doblado de papel posteriores.	Test (Ver anexo 3)	Encuentro 3
	Fase 5 Integración			
Nivel 2: Análisis	*Fase 1 Información*	Se realiza un encuadre, con respecto al los instrumentos anteriores, de la misma manera, se explica la metodología de la sesión: taller de doblado de papel; los materiales, entre otros.	**Taller 1 de doblado de papel:** Construcción de un triángulo cualesquiera a partir de dos puntos dados (ver anexo 4).	Encuentro 4

	Fase 2 Orientación dirigida	A partir de una serie de instrucciones, se inicia con la indagación concreta, esto es, se propone la construcción de un triángulo cualquiera mediante doblado de papel, con el fin de determinar características como la mediatriz.		
	Fase 3 Explicitación	En la indagación pictórica, el caso debe plasmar en su construcción, aquellos atributos tanto físicos como matemáticos, a partir del acto de doblar y desdoblar.	**Taller 2 de doblado de papel:** Construcción de líneas notables en triángulos isósceles Objetivo: construcción de líneas notables en triángulos isósceles, por medio de doblado de papel (ver anexo 5).	Encuentro 5
	Fase 4 Orientación libre			
	Fase 5 Integración	En la indagación abstracta, se le proporcionan una serie de preguntas que impulsan a integrar lo concreto y pictórico, a través de la aplicación matemática.		
Nivel 3: Clasificación	*Fase 1 Información*	Se realiza un encuadre, con respecto a los instrumentos anteriores, de la misma manera, se explica la metodología de la sesión: taller de doblado de papel; los materiales, entre otros.	**Taller 3 de doblado de papel:** Construcción de líneas notables en triángulos obtusángulos y rectángulos (ver anexo 6).	Encuentro 6
	Fase 2 Orientación dirigida	En este punto de los talleres, se busca aplicar las líneas notables abordadas en el Taller 2, en casos específicos de triángulos rectángulos y obtusángulos, con el fin de aplicar los conocimientos a una situación puntual.		
	Fase 3 Explicitación			
	Fase 4 Orientación libre	A partir de los talleres de doblado de papel realizados, se aplica una entrevista de carácter socrático final, donde se espera que los casos proporcionen información con respecto a los conceptos y propiedades abordadas, para ello son indispensables las construcciones realizadas en todos los talleres. En este punto, se espera que los casos estén en la capacidad de extraer propiedades matemáticas, definirlas, y relacionarlas en los diferentes triángulos construidos	**Entrevista de carácter Socrático:** (ver anexo 7).	Encuentro 7
	Fase 5 Integración			

3.4. Consideraciones a propósito de la contingencia sanitaria COVID-19

Se realizaron 7 encuentros de manera virtual de dos horas cada uno, acordados con anterioridad con los casos. Los talleres iniciaron con los conceptos básicos de la geometría como el punto, la recta, y se irán encaminando al triángulo y sus propiedades. Se grabarán en vídeo los talleres, que posteriormente se analizarán con la finalidad de identificar el nivel de comprensión alcanzado por los casos.

Lo anterior, debido a que el 16 de marzo del año 2020, el Ministerio de Educación Nacional emitió la circular número 20, dirigida a gobernadores, alcaldes y secretarios de educación; donde daba las directrices relacionadas con las medidas adicionales y complementarias para el manejo y control del coronavirus (COVID-19). Allí se habla de una reorganización del calendario académico escolar, así como también del trabajo académico desde casa, por medio de “metodologías pedagógicas innovadoras y flexibles, apoyados en contenidos digitales y físicos” (p. 3). Según esto, la prestación del servicio educativo durante la emergencia sanitaria pasó de la presencialidad a la virtualidad, mientras las instancias gubernamentales y de salubridad así lo estipulen.

En este orden de ideas, fue preciso la reestructuración de los instrumentos para la recolección de la información a plataformas virtuales, es por esto, que para los encuentros se utilizó la plataforma *meet* de la *g-suite* de *Google*, del mismo modo, para las entrevistas socráticas se utilizaron *formularios* Google. En lo concerniente a los talleres de doblado de papel, se utilizaron tanto tutoriales elaborados por la investigadora como encuentros sincrónicos, con el fin de conservar la cercanía con los casos y los posibles inconvenientes.

3.5. Técnicas y procedimiento de análisis

Es preciso decir que el objetivo directo de la investigadora está enfocado en tratar la información tal y como es proporcionada por los casos, sin buscar alterarla ni intervenir en ella (Hernández, et. al, 2014), por esto se considera que el análisis de contenido es la técnica pertinente para analizar los datos provenientes de las entrevistas, las guías de trabajo que desarrollaran los estudiantes en los talleres y de la observación en los mismos. El procedimiento de análisis implica una triangulación entre instrumentos, en donde inicialmente se transcribe, organiza y codifican los datos con el fin de seleccionar unidades de análisis, en consonancia con algunos descriptores previamente definidos desde los niveles de comprensión que propone el modelo de Van Hiele (1990), información que permitirá identificar por el nivel de comprensión que alcanzan los estudiantes sobre los puntos y rectas notables en triángulos.

En la tabla 7, se presentan los atributivos distintivos de los procesos de comprensión en cada nivel de Van Hiele, para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

Tabla 7. *Atributos distintivos de los procesos de comprensión en cada nivel de Van Hiele (1990) para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.*

Procesos	**Nivel 1** ***Visualización***	**Nivel 2** ***Análisis***	**Nivel 3** ***Clasificación***
Reconocimiento y descripción	Atributos físicos (posición, forma, tamaño). -Describe la figura según el tipo de triángulo. -Describe el triángulo según los tipos de ángulos. - Reconoce la altura y base de un triángulo	Propiedades matemáticas. -Reconoce algunas rectas notables en triángulos -Reconoce algunos puntos notables en triángulos -Reconoce la perpendicularidad -Reconoce la equidistancia -Reconoce el punto medio. -Reconoce la bisección de un ángulo.	--------------------------------------
Uso de definiciones	---------------------	Definiciones con estructura simple. -Usa la definición de recta notable en un triángulo -Usa la definición de perpendicularidad -Usa la definición de equidistancia	Usa definiciones de algunos teoremas asociados a los puntos notables de los diferentes tipos de triángulos. -La altura relativa a la base de un triángulo isósceles, es mediana, bisectriz y mediatriz. -El ortocentro del triángulo rectángulo coincide con el ángulo recto y el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas. -Formula la definición de congruencia. -Formula definiciones para cada tipo de triángulo según la medida de sus lados. -Formula definiciones para cada tipo de triángulo según la medida de sus ángulos.	Listado de propiedades matemáticas -Formula definiciones para la mediana, mediatriz, bisectriz y altura. -Formula definiciones para el incentro, ortocentro, circuncentro y baricentro. -Formula definiciones para las rectas y puntos notables	Conjunto de propiedades de las rectas y puntos notables para cada tipo de triángulos. -Circuncentro y puntos por los que pasa una circunferencia circunscrita. -Circunferencia Circunscrita en un triángulo. -Incentro y puntos por los que pasa una circunferencia inscrita. -Radios de una circunferencia inscrita en un triángulo.

	-Formula algunas definiciones de propiedades de los triángulos, como la suma de ángulos interiores de un triángulo	en triángulos isósceles y equiláteros.	-Radios de una circunferencia circunscrita en un triángulo -Circunferencia inscrita en un triángulo. -Distancia del baricentro a los vértices y al punto medio de los segmentos que forman el triángulo.
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos -Clasifica los tipos de triángulos según la medida de sus lados. -Clasifica los tipos de triángulos según la medida de sus ángulos. -Clasifica congruencia, equidistancia, punto medio en diferentes tipos de triángulos.	Exclusiva basada en atributos matemáticos. - Clasifica la posición de los puntos notables según el tipo de triángulo. -Clasifica algunas características de las mediatrices, bisectrices, alturas y medianas. -Clasifica el triángulo equilátero a partir de la coincidencia de los puntos y rectas notables.	Clasificar con diferentes definiciones -Triángulo obtusángulo a partir del ortocentro y el circuncentro que están exterior a este. -Clasifica las rectas notables en triángulos específicos como lo es el triángulo rectángulo y obtusángulo. -Clasifica el papel que cumplen las prolongaciones de los segmentos de los triángulos obtusángulos para el trazado de las alturas.

Finalmente, se pretende analizar los casos conjuntamente, con el fin de dar cuenta de cómo el uso de una estrategia como el doblado de papel y el enfoque CPA pueden ser posibilidades en la comprensión de conceptos geométricos.

Por otro lado, uno de los aspectos que permite dar credibilidad a la investigación es la triangulación, entendida desde Cisterna (2005) "como un cruce dialéctico de toda la información pertinente al objeto de estudio" (p. 68), lo cual permite mirar desde diferentes ángulos la información que se ha recolectado, con los métodos e instrumentos utilizados.

La codificación de la información se realizó a través del software ATLAS-ti para el análisis cualitativo de datos. Al interior de la unidad hermenéutica creada, los documentos primarios (transcripciones de los instrumentos de cada caso) se ubicaron en dos campos documentales (familias de documentos): *nivel de comprensión inicial*, compuesto por el cuestionario de saberes previos, el test y el taller de doblado de papel 1; *nivel de comprensión alcanzado*, compuesto por los talleres 1 y 2 y la entrevista de carácter socrático final. Posterior a ello, se crearon los códigos correspondientes a las características o atributos de cada proceso: reconocimiento y descripción; uso de definiciones; formulación de definiciones y clasificación (Tabla 8); asimismo, surgieron códigos con respecto a los axiomas de Huzita y a las visualizaciones realizadas por los casos en cada uno de los talleres.

Con respecto a lo anterior, se asignaron colores a los diferentes niveles, con el fin de diferenciar cada atributo para cada uno de estos. Posteriormente, se realizó una triangulación con las respuestas proporcionadas por los casos y con cada uno de los atributos de cada nivel.

Tabla 8. *Colores asignados para cada Nivel de comprensión en el Software de Análisis Cualitativo Atlas ti.*

Color	Nivel de comprensión
	Nivel 1
	Nivel 2
	Nivel 3

3.6. Momentos de la investigación

La investigación se desarrolló siguiendo los siguientes momentos:

Momento 1. Diseño del proyecto de investigación: se plantea el problema de investigación a partir de la revisión de la literatura, descripción del problema, preguntas, objetivos, se construye el marco conceptual y el diseño metodológico.

Momento 2. Diseño de la entrevista de carácter socrático y los talleres de doblado de papel: planteó el pilotaje y validación por parte de expertos de las entrevistas, así como del diseño de cada uno de los talleres con su respectiva guía de trabajo.

Momento 3. Trabajo de campo: Se inició con la firma del consentimiento informado por parte del colegio y los padres de familia de los estudiantes que participaron de la investigación. Se convocó a una reunión para motivar y acordar los encuentros y, aplicar la entrevista inicial. En los otros encuentros se desarrollaron los talleres de doblado de papel, en los que se recogió la producción de los estudiantes y la información proporcionada por las entrevistas.

En el último encuentro se realizó nuevamente la entrevista socrática con la intención de indagar por la comprensión que lograron los estudiantes.

Momento 4. Organización de los datos y análisis de la información y elaboración del informe de trabajo de grado.

3.7. Compromiso ético y criterios de credibilidad

Una investigación de corte cualitativo se encuentra mediada por la subjetividad de los individuos, la cual, a su vez, puede ser o no, parte constitutiva de la investigación. En este sentido, la ética se adscribe como una dimensión transversal al proceso investigativo, pues se debe tener en cuenta que aspectos como las identidades, las ideologías, los prejuicios y la cultura, impregnan tanto el problema y los propósitos como los métodos y los instrumentos (Parra y Briceño, 2013). Es por esto, que la investigación debe tener en cuenta aspectos relacionados con el manejo de la información, como lo es la presentación del consentimiento informado (ver anexo 1), donde el investigador da a conocer los propósitos de la investigación y garantiza la confidencialidad de la información recolectada, así como también se compromete a usar la información solo con fines académicos.

Para efectos del desarrollo del presente trabajo de investigación, teniendo en cuenta lo dicho por Parra y Briceño (2013), se usarán seudónimos de los nombres de los estudiantes entrevistados, con el propósito de no divulgar información personal de los estudiantes.

4. Hallazgos

A continuación, se presentan los hallazgos derivados del análisis de la información proporcionada por cada uno de los casos. En este sentido, se presenta el proceso de comprensión de cada caso con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos a partir de la ejecución seis instrumentos, tres de los cuales se enfocan en la implementación de la geometría del doblado de papel, enmarcada en el enfoque CPA.

En un primer momento, se indaga por el nivel de comprensión inicial de los casos con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables y, en un segundo momento, se identifica el nivel de comprensión alcanzado por los casos, después de haber realizado los talleres de doblado de papel; finalmente, se describe la aplicación de la geometría del doblado de papel en el enfoque CPA, para la comprensión de conceptos geométricos.

4.1. Análisis del nivel de comprensión para el caso 1

El caso 1 tiene una edad de 14 años, es un estudiante que se desataca por su afinidad con el área de matemáticas, por su participación asertiva en las clases y quien desde un inicio estuvo interesado en participar de la investigación, destinando tiempo para los encuentros programados.

4.1.1. Nivel de comprensión inicial para el caso 1

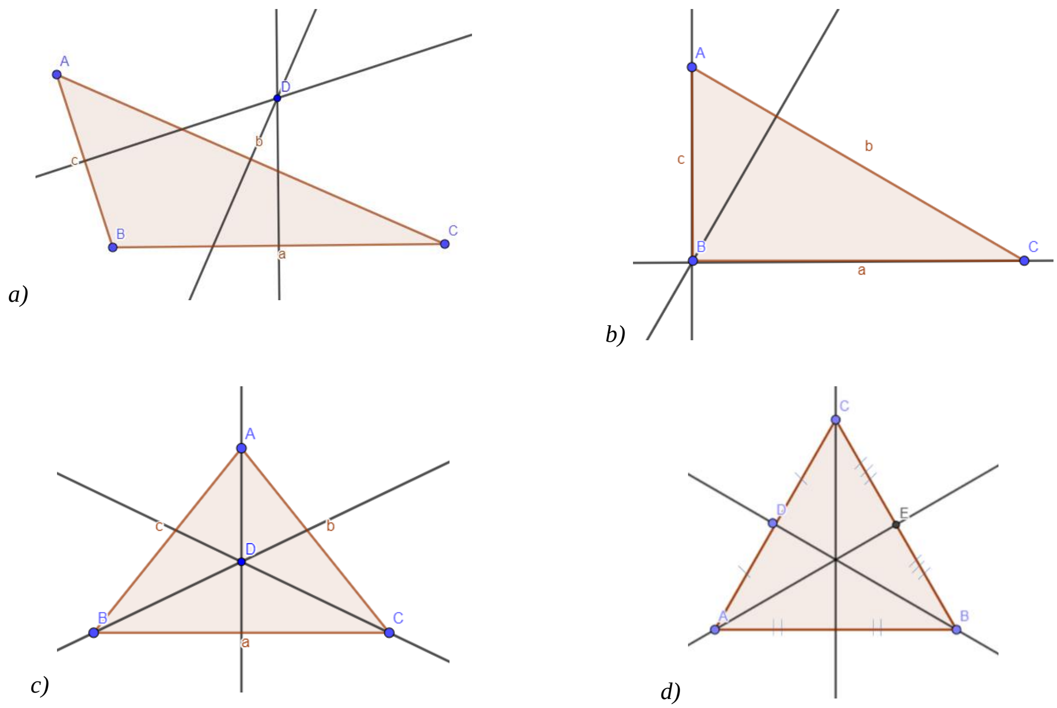
Con la implementación del cuestionario de saberes previos; del test y del primer taller de doblado de papel; se pretende indagar por el nivel de comprensión inicial que tienen los estudiantes sobre los conceptos puntos y rectas notables de triángulos.

En el cuestionario de saberes previos que tenía como objetivo identificar la comprensión inicial de los casos con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, se pudieron identificar atributos tanto del nivel 1 de comprensión como del nivel 2.

Se identificaron para el nivel 1 atributos referentes a los procesos de descripción y reconocimiento, esto es, el caso describe los diferentes tipos de triángulos, a partir de la medida de sus lados y la medida de sus ángulos; del mismo modo, se identificaron procesos de formulación de definiciones, cuando el caso se remite a la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° cuando se le pide que identifique propiedades matemáticas en las figuras proporcionadas.

Para el nivel 2, se identificaron atributos de descripción y reconocimiento, cuando el caso plantea que en los diferentes tipos de triángulos presentados se pueden visualizar algunas rectas y puntos notables. No obstante, se identifican algunas dificultades a la hora de referirse a tales aspectos de los triángulos, ya que se reconoce una confusión entre bisectrices y medianas cuando se pide al caso que clasifique cada triángulo basándose únicamente en características matemáticas y este afirma: “A). Se ven las mediatrices y su circuncentro B). Se ven las alturas y el ortocentro C). Se ven las medianas y su baricentro D). Se ven las bisectrices y el incentro” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

Figura 6.*Triángulos propuestos en el cuestionario de saberes previos.*



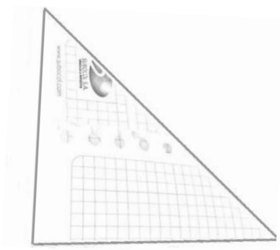
En el triángulo a) y b) (Figura 6) el caso acierta en afirmar que se trata de las mediatrices y de las alturas con su respectivo punto notable. En los triángulos c) y d) (Figura 6) confunde las medianas con las bisectrices y las bisectrices con las medianas.

Del nivel 2, también se distinguen atributos correspondientes al uso y formulación de definiciones con respecto al concepto de perpendicularidad y a los conceptos de rectas notables en triángulos (mediana, bisectriz y altura); el caso aún no se remite a la mediatriz.

Finalmente, cuando se le pide al caso que tome una hoja cualquiera e intente, por medio de dobleces, formar un triángulo (Figura 7), este describe lo siguiente:

"Primero doblé el papel a la mitad, justo a la mitad, luego, doblé una parte del papel formando un cuadrado, por último, doble diagonalmente el papel juntando una esquina con la contraria, formando un triángulo rectángulo" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

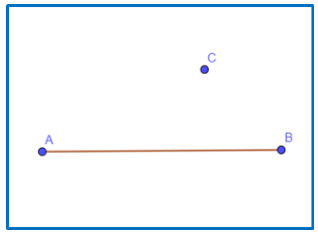
Figura 7. *Construcción realizada por el caso 1: Cuestionario de saberes previos.*



De lo anterior, se puede decir, que, aunque el caso aún desconoce los axiomas de Huzita, implícitamente se remite al axioma 2, cuando habla de "juntar una esquina con la contraria". Dicho axioma plantea que dados dos puntos $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{p_2}$, existe un doblez que pone el punto $\boldsymbol{p_1}$ sobre el punto $\boldsymbol{p_2}$.

En los resultados del test, que tenía como objetivo, recoger información previa a los talleres de doblado de papel, respecto a los conceptos de puntos y rectas notables, se empiezan a avizorar más rasgos distintivos del nivel 2 que del nivel 1. Con respecto al nivel 1, se identifican aspectos del proceso de reconocimiento y descripción, cuando el caso se remite a la descripción de los triángulos presentados en las figuras, enfocándose en la medida de sus lados y la medida de sus ángulos. Un ejemplo de ello es, la respuesta proporcionada en la pregunta 9, cuando se le interroga por las medidas de dos segmentos que se muestran en la figura 8: d) "Son diferentes porque se forma un triángulo escaleno" (Comunicación personal, 26 de septiembre de 2020).

Figura 8. *Pregunta 9 del test.*



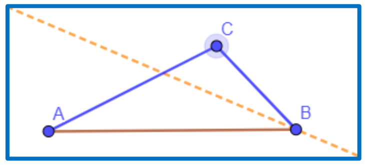
La respuesta se enfoca en el tipo de triángulo, sin embargo, se esperaba que al venir hablando de mediatriz en los anteriores enunciados, el caso asociara su respuesta a la opción c) “Son diferentes porque el punto C no pertenece a la mediatriz del segmento”.

En el nivel 2, se identifican atributos correspondientes a los procesos de reconocimiento y descripción: reconoce y describe la perpendicularidad; la equidistancia; el punto medio de las figuras presentadas; algunos puntos notables; en el proceso de clasificación: clasifica algunas características de las rectas notables en triángulos.

Con respecto al reconocimiento de algunos puntos notables, el caso distingue a partir de las visualizaciones que en el punto de intersección de las bisectrices se forma una circunferencia inscrita en el triángulo y que los radios no son las líneas notables, sino la perpendiculares que van del punto de intersección a cada uno de los segmentos que forman el triángulo. Asimismo, en el test, se hace explícito el axioma 2 de Huzita, ya que el caso reconoce que en un segmento al llevar un punto exactamente sobre el otro punto, se puede determinar el punto medio de dicho segmento y que se forma una perpendicular con el segmento. Sin embargo, en este instrumento, se evidenciaron algunos errores conceptuales con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos.

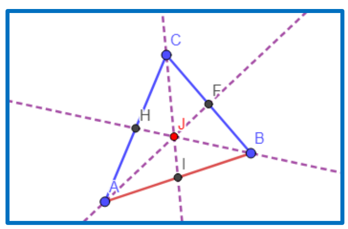
Se sigue evidenciando una confusión con la bisectriz, cuando se realiza la siguiente pregunta: Se dobla el papel de forma que se lleva el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$, ¿Qué puedes decir acerca de las medidas de los ángulos que se forman? ¿Por qué? El caso refiere que la medida de los ángulos es igual, porque el doblez pasa por la mitad del segmento (opción c). En este sentido, hay una confusión puesto que en la imagen (Figura 9) se ve claramente que el doblez no pasa por el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$. En este asunto la respuesta correcta es la a) puesto que allí se habla de que el tipo de doblez realizado divide el ángulo en dos exactamente.

Figura 9. *Pregunta 11 del test.*



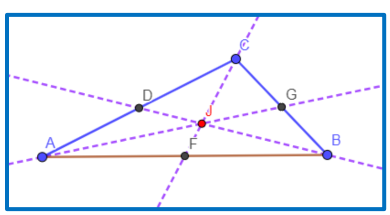
También se evidencia un error conceptual con respecto al baricentro, cuando se le pregunta por la relación entre el baricentro del triángulo en cuestión (Figura 10) y las distancias de los vértices de los puntos **A**, **B** y **C** con los puntos **F**, **H** e **I**, y el caso escoge la respuesta b) donde se dice que los puntos medios de cada segmento se encuentran a la misma distancia del baricentro; cuando la visualización deja ver que los vértices se encuentran a una mayor distancia del baricentro que los puntos medios de los segmentos.

Figura 10. *Pregunta 16 del test.*



No obstante, en el test, se agregó una pregunta igual, pero con otro tipo de triángulo (Figura 11), con el fin de que los casos no generalizaran las visualizaciones realizadas para todos los tipos de triángulos. En este sentido, el caso responde correctamente, lo que quiere decir que tal vez la visualización en el otro tipo de triángulo no era tan clara.

Figura 11. *Pregunta 17 del test.*



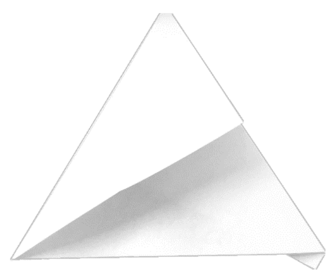
El caso confunde el hecho de llevar un punto sobre sí mismo con llevar un segmento sobre sí mismo, es por esto por lo que elige la respuesta incorrecta en la pregunta 19, refiriendo que al llevar el segmento sobre sí mismo, el doblez pasa exactamente por el punto medio, cuando en realidad lo que allí se presenta es un doblez perpendicular.

Finalmente, cuando se pregunta al caso por la relación que encuentra entre los dobleces realizados en el último triángulo, efectivamente, dichos dobleces se intersecan en un punto específico del triángulo, pero el caso carece de herramientas concretas para concluir que es posible determinar ese punto de intersección por medio del doblado de papel.

En el taller de doblado de papel número 1, que tenía como objetivo construir un triángulo cualquiera a partir del doblado de papel, con el fin de determinar características como la mediatriz, se identificaron en las tres indagaciones: Concreta, Pictórica y Abstracta, atributos distintivos del nivel 1 y del nivel 2.

En un primer momento, para la indagación concreta, se presentan una serie de pasos, que llevan a la construcción de un triángulo equilátero (Figura 12).

***Figura 12**. Construcción realizada por el caso 1: Taller de doblado de papel 1.*



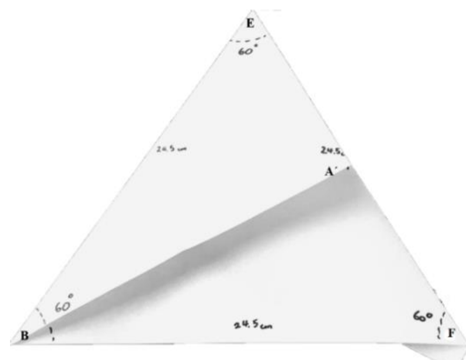
Posterior a la indagación concreta, se propone la indagación pictórica, allí el caso debe identificar y describir, tanto características físicas como matemáticas de la construcción realizada, del mismo modo, se propone definir algunas de dichas propiedades.

En esta indagación, se logran identificar solo atributos del nivel 1: formulación de definiciones y reconocimiento. Para esta primera, el caso alude a características físicas de la construcción, refiriéndose a la definición de triángulo equilátero:

"Es un triángulo equilátero, es decir, con todos sus lados idénticos […]" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020).

Del mismo modo, el caso identifica a partir de las visualizaciones, características del triángulo como lo son la altura delimitada por un doblez realizado y otros triángulos que se forman al interior de este. En la parte de características matemáticas, el caso se refiere únicamente a la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Figura 13. *Construcción realizada por el caso 1: Taller de doblado de papel 1, indagación pictórica.*



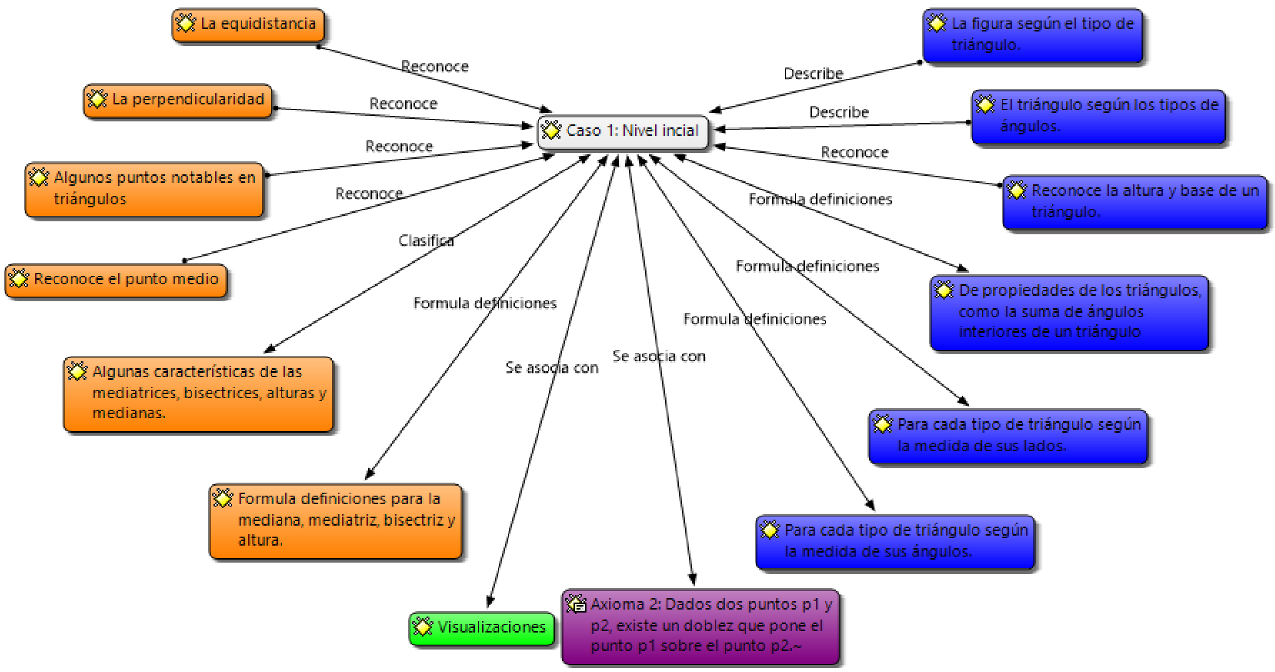
En la indagación abstracta se realizan preguntas que involucran lenguaje matemático, encaminadas a la identificación del tipo de triángulo construido, es así como en esta parte se identifican atributos del nivel 1 y 2, correspondientes a reconocimiento, descripción y formulación de definiciones. En primer lugar, el caso reconoce la altura y la base del triángulo construido, asimismo, define la propiedad de la suma de los ángulos interiores de los triángulos, con el fin de validar que cada ángulo mide 60°.

En segundo lugar, el caso describe a partir de las visualizaciones de su construcción, que el ángulo que forma $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ con el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$ es un ángulo recto, “Forma dos ángulos rectos a cada lado que termina convirtiéndose en un ángulo llano. Son ángulos suplementarios” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), refiriendo, además, que $\boldsymbol{A'}$ es el punto medio de dicho segmento.

Del mismo modo, formula la definición de mediana, cuando se le interroga por lo que es $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\Delta\boldsymbol{EBF}$: “Es una mediana, ya que es una recta que va de un vértice al punto medio del lado contrario”.

A continuación, se presenta la red resultante de los atributos identificados en el nivel de comprensión inicial para el caso 1, esto es, a partir del cuestionario de saberes previos, del test y del primer taller de doblado de papel.

Figura 14. *Atributos identificados en el nivel de comprensión inicial del caso 1.*



A partir de la Figura 14 se establece que el caso reconoce conceptos relacionados con la perpendicularidad, equidistancia, punto medio; además, clasifica algunas características de los triángulos relacionadas con sus rectas notables, definiéndolas en algunos casos. Asimismo, se puede evidenciar que el caso posee destreza para identificar y describir los diferentes tipos de triángulos, refiriendo algunas propiedades matemáticas de estos.

Lo anterior, permite concluir, en primera instancia que se cumple con la propiedad de jerarquización y secuencialidad, en la que se plantea que: “para adquirir un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido antes el nivel precedente” (Corberán, et al., 1994, p. 22), esto es, hay propiedades explícitas e implícitas para cada nivel. Específicamente para el caso 1 en el nivel de comprensión inicial, se puede observar que los elementos explícitos son las figuras, en este caso, los triángulos, logra identificarlos y describirlos a partir de propiedades físicas (forma, medida de lados, de ángulos, elementos de este, como base altura, etc.). Y los elementos implícitos, son algunas de las características y propiedades que enuncia con respecto a rectas notables.

Se concluye entonces, que el caso 1, para los conceptos de puntos y rectas notables inicialmente, se encuentra en el nivel 1 de visualización y reconocimiento, el cual, establece que las figuras se reconocen de manera global a partir del tamaño, la posición, etc., donde no se generalizan características que reconocen en una figura con otra de su misma clase, por lo tanto, no se reconocen explícitamente las propiedades matemáticas que componen las figuras.

Del mismo modo, los atributos que se lograron avizorar del nivel 2, aún se enfocan en gran medida, en el reconocimiento y la descripción. En este sentido, se evidencia que el lenguaje que utiliza el caso para referirse a los objetos trabajados se enfoca en conceptos muy puntuales y básicos, como perpendicularidad, punto medio, ángulos suplementarios, etc. Lo anterior, cumple con otra propiedad de los niveles de Van Hiele: “cada nivel de razonamiento lleva asociado un tipo de lenguaje específico” (Corberán, et al., 1994, p. 23).

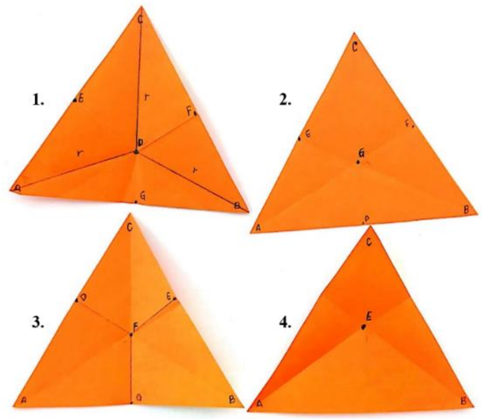
4.1.2. Nivel de comprensión alcanzado para el caso 1

De acuerdo con la aplicación del segundo taller de doblado de papel, del tercer taller y de la entrevista de carácter socrático final; se pretender identificar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes sobre los conceptos de puntos y rectas notables según el modelo de Van Hiele, a partir de la implementación de los instrumentos.

El segundo taller de doblado de papel, que tenía como objetivo la construcción de líneas notables en triángulos isósceles, por medio de la geometría del doblado de papel, se realizó siguiendo las indagaciones Concreta, Pictórica y Abstracta (CPA).

A continuación, se presentan las cuatro construcciones: mediatrices, medianas, bisectrices y alturas, respectivamente (figura 15) del caso 1 en la indagación concreta.

Figura 15. *Construcción realizada por el caso 1: Taller de doblado de papel 2.*



En la indagación pictórica se identificaron atributos distintivos del nivel 1 y del nivel 2, ambos relacionados con los procesos de identificación y de razonamiento; del mismo modo, se distinguen algunas visualizaciones con respecto a los dobleces realizados.

En un primer momento, el caso describe las características físicas de los triángulos y los dobleces realizados enfocándose en la medida de los segmentos que forman los triángulos; en un segundo momento, describe como características matemáticas, algunos dobleces que forman perpendiculares con los segmentos de los triángulos; relaciones de equidistancia con respecto a los vértices y algunos dobleces realizados y, muy someramente, reconoce que en el triángulo 3 los dobleces realizados corresponden a las bisectrices

"Triángulo 3. […] $\mathbf{F}$ es el punto notable de las bisectrices, ya que los dobleces son bisectrices" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020).

En la indagación abstracta, se empiezan a distinguir en mayor medida, atributos distintivos del nivel 2: reconocimiento y descripción; formulación de definiciones y clasificación. Y en el nivel 3, el atributo de formulación de definiciones.

Para este punto, el caso reconoce que los dobleces realizados, corresponden a rectas notables, asegurando que en el triángulo 1, se trazaron las mediatrices. En este sentido, a partir de la indagación concreta donde se estableció que los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ eran iguales (Figura 16) y que, además, el punto $\boldsymbol{D}$ corresponde con el centro de una circunferencia; el caso refirió que dicha circunferencia, pasaba por los puntos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **y** $\boldsymbol{C}$ y que esta quedaba por fuera de este. Del mismo modo, establece que los radios de la circunferencia circunscrita en el triángulo son los segmentos $\boldsymbol{AD}, \boldsymbol{BD}$ y $\boldsymbol{CD}$.

Figura 16. *Construcción realizada por el caso 1: Taller de doblado de papel 2, mediatrices.*

Para el triángulo 2, el caso define los dobleces como las medianas: "eran medianas ya que iban de un vértice al segmento opuesto" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020) y su punto de intersección como el baricentro.

Para el triángulo 3, el caso, identifica que los dobleces realizados son las bisectrices, del mismo modo, en la indagación concreta también se había establecido que los segmentos $\overline{\boldsymbol{DF}}$, $\overline{\boldsymbol{EF}}$ y $\overline{\boldsymbol{GF}}$ eran iguales y que $\boldsymbol{F}$ era el centro de una circunferencia, para lo cual, el caso refirió que la circunferencia pasaba "Por los puntos **d**, **e** y **g** ya que hay una relación de equidistancia entre estos puntos y el punto **f**". Además, el caso logró distinguir que los radios de dicha circunferencia no eran los dobleces correspondientes a las bisectrices, sino *"**DF**, **EF*** y ***GF***, los otros dobleces perpendiculares a los segmentos que realizamos" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020) y que según la medida de los segmentos que formaban los radios, la circunferencia debía estar por dentro del triángulo.

Para el triángulo 4 el caso establece que los dobleces realizados hacen referencia a las alturas del triángulo, ya que "iban desde un vértice al lado opuesto y por medio del doblez, se puede ver que son perpendiculares, porque llevamos cada segmento sobre sí mismo exactamente" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020). De esto último, se puede concluir, que el caso ya utiliza de manera consciente los axiomas de Huzita a la hora de realizar los dobleces planteados.

Finalmente, el caso identifica que, en un triángulo isósceles, la altura relativa a la base es mediana, bisectriz y mediatriz, puesto que el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ de los triángulos 1, 2, 3 y 4 "los dobleces siempre marcan el punto medio de este segmento debido a que es un triángulo isósceles en todos los casos presentados" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020).

En el segundo taller de doblado de papel, se logró identificar, que, si bien el caso habla con más soltura y propiedad de las rectas notables de los triángulos a partir de sus propias visualizaciones, aún no menciona los puntos notables a cada recta. Puesto que cuando se le pregunta por el nombre que recibe el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, es decir, el punto $\boldsymbol{D}$, el caso lo responde de forma muy general, aludiendo a que se trata de "un punto notable" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020), sin especificar cuál puntualmente. Lo mismo sucede cuando se le pregunta por el nombre que recibe el centro de la circunferencia circunscrita, es decir el punto $\boldsymbol{F}$.

Según las características identificadas en el segundo taller de doblado de papel, se puede concluir que los atributos del nivel 2, que no eran explícitos en los demás instrumentos, han pasado a explicitarse en los modos de comprender del caso y en el lenguaje que ha adquirido, es por esto por lo que se evidencia en la indagación abstracta de este instrumento, una evolución en el nivel de comprensión del caso al nivel 2 de análisis, en el cual, según Jaime y Gutiérrez (2015), los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están formadas por elementos que tienen unas propiedades matemáticas, prestan atención a dichas propiedades, pero, al leer o establecer definiciones, tienen problemas con algunas particularidades lógicas de las figuras, esto es, no pueden relacionar unas propiedades con otras.

En relación con los aspectos identificados del nivel 3 que, para el momento son implícitos, se espera sean explicitados en las siguientes fases de trabajo.

En el tercer taller de doblado de papel, que tenía como objetivo aplicar las líneas notables abordadas en el taller 2, en casos específicos de triángulos rectángulos y obtusángulos, con el fin de aplicar los conocimientos a una situación puntual y la entrevista de carácter socrático final, que se realizó siguiendo el enfoque CPA, se identificaron atributos distintivos del nivel 1, 2 y 3.

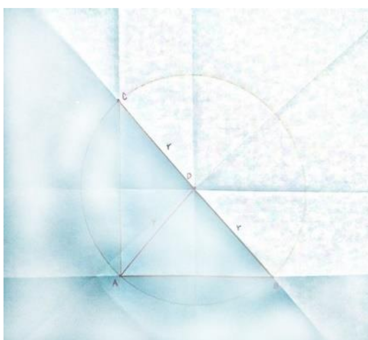
En la indagación concreta, se pide al caso que dibuje dos triángulos obtusángulos y dos triángulos rectángulos, con el fin de realizar las mediatrices y alturas en cada triángulo respectivamente, por medio de la geometría doblado de papel. Con respecto a la indagación pictórica, se lograron identificar atributos distintivos del 2: reconocimiento y descripción, formulación de definiciones y clasificación. Y atributos del nivel 3: clasificación.

En un primer momento, el caso describe las propiedades físicas de los triángulos y dobleces realizados. Allí, este se enfoca en el tipo de triángulo según la medida de sus lados y las relaciones de perpendicularidad. No obstante, identifica y define los dobleces realizados para cada pareja de triángulos que son respectivamente, mediatrices y alturas.

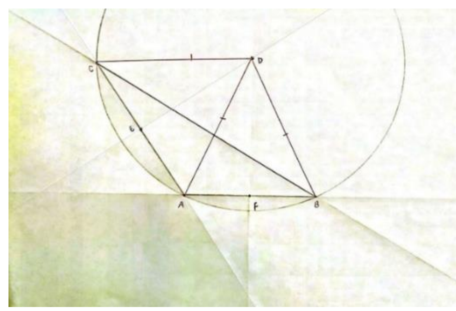
"Puedo decir que en la pareja 1,1 son mediatrices ya que parten los segmentos a la mitad y se juntan en el circuncentro, y, en la pareja 2,2 son alturas porque parten perpendicularmente desde un vértice al lado opuesto de este" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020).

Lo anterior, permite inferir que los dobleces realizados en el segundo taller fueron comprendidos por el caso ya que ahora define la mediatriz y la altura a partir de sus visualizaciones. En un segundo momento, el caso describe las propiedades matemáticas identificadas en los triángulos y dobleces realizados. En este aspecto, clasifica las rectas notables en cada tipo de triángulo específico enfocándose en las mediatrices trazadas, refiriendo que allí se forman círculos por fuera del triángulo, tanto en el obtusángulo como en el rectángulo, para constatarlo, posterior a los dobleces utiliza un compás y traza las circunferencias (ver Figura 17).

Figura 17*. Construcción de mediatrices en triángulos rectángulo y obtusángulo por el caso 1.*



a)



b)

En la indagación abstracta se identifican atributos del nivel 3: uso de definiciones, formulación de definiciones y clasificación y del nivel 2: reconocimiento, formulación de definiciones y clasificación. A partir de los dobleces realizados y las visualizaciones, el caso determina que el circuncentro del triángulo rectángulo se ubica en el punto medio de la hipotenusa.

Asimismo, establece que los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ del triángulo rectángulo donde se trazaron las mediatrices, son completamente iguales y que estos son los radios de una circunferencia (ver Figura 16a). Para el triángulo obtusángulo de esta primea pareja, también logra visualizar que el circuncentro se ubica en el exterior del triángulo y que igual que en el triángulo rectángulo, los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$, son los radios de una circunferencia (ver Figura 16b).

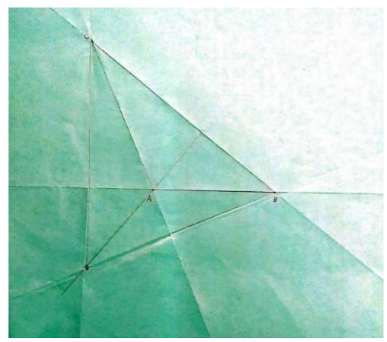
Cabe aclarar que, para la última visualización, el caso tuvo sus dudas a la hora de responder, pues, consideraba que sus dobleces no habían quedado de una forma "correcta", ya que el circuncentro quedaba por fuera. Allí se logró establecer que no todos los puntos notables quedan al interior del triángulo y que hay casos específicos, donde el circuncentro es exterior como lo es el triángulo obtusángulo.

En los triángulos donde se trazaron los dobleces correspondientes a la altura, el caso clasifica el papel que cumplen las prolongaciones en un triángulo obtusángulo para el trazado de estas rectas notables, ya que, según manifestó en el taller, sin la identificación de estas no es posible realizar los dobleces planteados (Figura 18a). De la misma forma, identifica que el ortocentro de un triángulo rectángulo coincide con el ángulo recto y que, para el caso del triángulo obtusángulo, este sale de él (Figura 18b).

Figura 18*. Construcción de alturas en triángulos rectángulo y obtusángulo por el caso 1.*

a)

b)



Lo anterior permite concluir que mediante la geometría del doblado de papel y el enfoque CPA, el caso reconoce propiedades de las mediatrices y las alturas en triángulos rectángulos y obtusángulos y de sus puntos notables, lo anterior lo sustentan Reyes y Rodríguez (2014), cuando plantean que los estudiantes suponen que las rectas notables siempre están al interior del triángulo, pues, por lo general se le presenta el trazo de rectas notables en triángulos isósceles y equiláteros.

Con respecto a la entrevista de carácter socrático final se esperaba observar la evolución del nivel de comprensión de los casos con respecto a los conocimientos previos identificados en la fase 1, a partir de la implementación de la geometría del doblado de papel, enmarcada en el enfoque CPA. En este sentido, para el caso 1 se lograron identificar atributos explícitos de los niveles 2 y 3 que ya se habían identificado en el tercer taller de doblado de papel, asimismo, se evidenció que el caso adquirió el lenguaje de los axiomas de Huzita al referirse a ciertos dobleces.

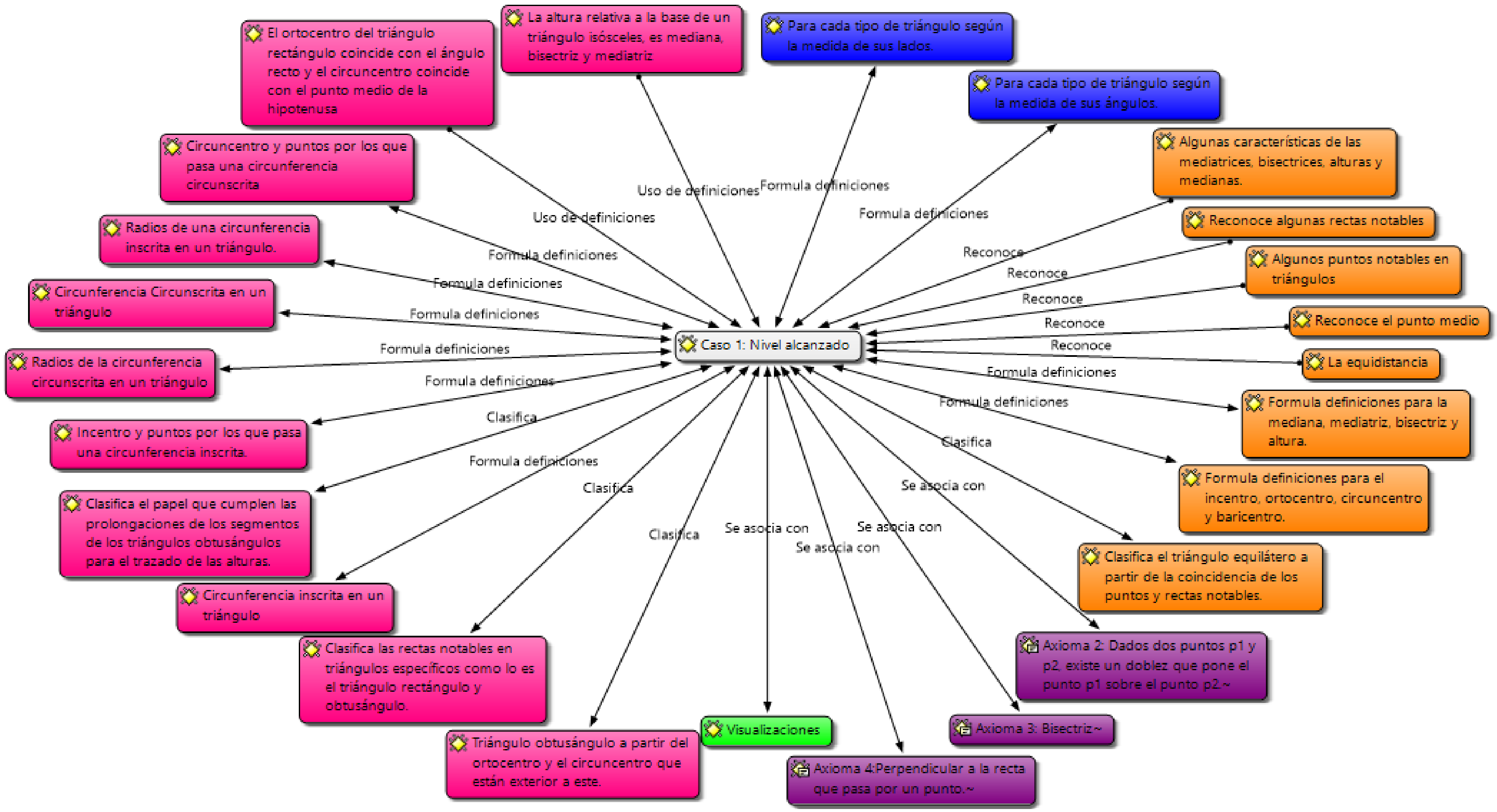
En relación con el nivel 2, el caso se remite a definiciones de perpendicularidad y equidistancia al referirse a las mediatrices de un segmento, del mismo modo, formula definiciones para la mediana, mediatriz, bisectriz y altura. Lo anterior permite concluir que durante los talleres de doblado de papal enmarcados en el enfoque CPA, adquirió un lenguaje matemático que le permitió pasar del reconocimiento de estas propiedades a dar definiciones coherentes y precisas con respecto al objeto de estudio.

Con respecto a los atributos identificados del nivel 3, el caso formula definiciones para las distancias del baricentro a los vértices y al punto medio de los segmentos que forman el triángulo, siendo esta una de las dificultades evidenciada en el test formulado, es decir, se infiere que, a partir de las construcciones realizadas y sus visualizaciones, pudo identificar esta relación.

Por último, el caso refiere que para determinar el punto medio de un segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se debe poner el punto $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$ exactamente, haciendo alusión al primer axioma de Huzita. También define la bisectriz a partir de los segmentos que componen el ángulo que se va a bisecar refiriendo que esta construcción se realiza “llevando $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre $\overline{\boldsymbol{BC}}$” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), es decir un segmento sobre otro, lo cual, según el caso, garantiza que el ángulo quede dividido en dos exactamente iguales, haciendo así alusión al axioma 3 de Huzita.

A continuación, se presenta la red, resultado del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, a partir del cual se puede concluir el nivel de comprensión alcanzado por el caso 1.

__Figura 19.__ Atributos del nivel de comprensión alcanzado por el caso 1.



El tercer taller de doblado de papel y la entrevista de carácter socrático final permiten concluir que el caso tuvo una evolución en el nivel de comprensión, puesto que el paso por estos dos instrumentos le permitió adquirir nuevo lenguaje para referirse a los conceptos de mediatriz, mediana, bisectriz y altura; además, se evidenció que reconoció propiedades planteadas a partir de las construcciones y visualizaciones, realizando definiciones más precisas a partir del tipo de triángulo y del tipo de recta notable construida.

Del mismo modo, pudo identificar los radios tanto de una circunferencia inscrita como de una circunferencia circunscrita a partir de las indagaciones de los talleres, puesto que no se pretendía la mera construcción de las líneas notables, sino que también permitían que el caso extrajera de las conclusiones, propiedades de la indagación concreta, mediante la utilización de herramientas como la regla y el compás para verificar propiedades y para encontrar otras. Finalmente, la indagación abstracta le permitió al caso condensar todo lo identificado y referirse a ello a partir de un lenguaje matemático.

Según lo anterior, el nivel de comprensión alcanzado por el caso 1 es el nivel 3, donde se evidencia que este nivel de comprensión se apoya en los niveles anteriores, esto es, hay una secuencialidad entre dichos niveles.

En el siguiente gráfico, se muestra el paso por los tres niveles de comprensión del caso 1.

Gráfica 7. *Paso por los niveles de comprensión del caso 1.*

4.2. Análisis del nivel de comprensión para el caso 2

El caso 2 es un estudiante de 14 años, el cual se destaca entre sus compañeros por su afinidad con el área de las matemáticas, es por esto, por lo que desde un principio mostró gran interés en participar del estudio. Este caso es tímido y reservado por lo cual fue preciso motivarlo constantemente para que verbalizara sus modos de comprender y proporcionara la mayor información posible; no obstante, su participación durante los talleres fue activa y comprometida.

4.2.1. Nivel de comprensión inicial para el caso 2

En la indagación del nivel de comprensión inicial para el caso 2, con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, se pudieron identificar atributos distintivos tanto del nivel 1, como del nivel 2 de comprensión.

En el cuestionario de saberes previos las respuestas proporcionadas por el caso se asociaron a los atributos de clasificación, reconocimiento y descripción para el nivel 1, esto es, el caso describe las figuras presentadas enfocándose únicamente en el tipo de triángulo según la medida de sus lados y de sus ángulos. Un ejemplo de ello es la respuesta proporcionada por el caso, cuando se le pedía describir las características físicas de las figuras: “equilátero, escaleno, isósceles, obtusángulo, rectángulo, acutángulo” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

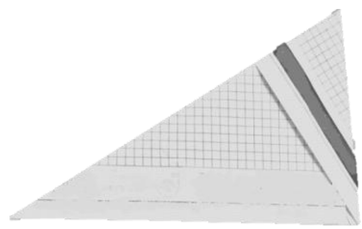
Por otra parte, cuando se le pide al caso definir un conjunto de propiedades matemáticas que aplique para las cuatro figuras, este responde que “tienen puntos notables, la suma de todos sus ángulos son 180º, todos tienen ángulos agudos” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020). No obstante, cuando se pide que clasifique las figuras presentadas (triángulos) basándose únicamente en sus características matemáticas, el caso afirma no entender la pregunta planteada.

Según lo anterior, el caso 2 no involucró en sus respuestas las líneas notables que tenía cada uno de los triángulos presentados, esto se constata en las dificultades que presentó el caso a la hora de responder preguntas orientadas a indagar por las líneas y puntos notables de los triángulos, refiriendo que “no recordaba el tema”. Sin embargo, en este tipo de respuestas también se lograron identificar características del nivel 2, pues si bien el caso aseguraba no recordar el tema, dio algunos indicios con respecto a la formulación de definiciones de mediatriz: “línea recta de la mitad de los lados” y de altura de un triángulo: “es noventa grados desde el lado hasta el ángulo” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

La mediana no es nombrada por el caso en ninguna de sus respuestas y la bisectriz la define como "la mitad del vértice una línea recta" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020), siendo esta definición confusa, pues si bien se entiende que divide el ángulo de este vértice, falta más consistencia en la respuesta para decir que el caso formula la definición de bisectriz.

Finalmente, el caso construye un triángulo doblando papel (figura 20) y describe lo siguiente: “Desde un cuadrado. 1) cogemos una de las puntas del cuadrado y la llevamos al otro lado, doblamos y desdoblamos. 2) llevamos alguno de los lados a la marca. 3)después doblamos el lado opuesto del punto dos hasta el lado opuesto. 4) doblamos el lado que está saliendo para que nos dé un triángulo escaleno, rectángulo” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

Figura 20. *Construcción realizada por el caso 2: Cuestionario de saberes previos.*



El caso afirma que sí es posible trazar las alturas del triángulo construido sin hacer marcas con lápiz, mediante doblado de papel, sin embargo, refiere que no sabe cómo explicar los dobleces que realizaría.

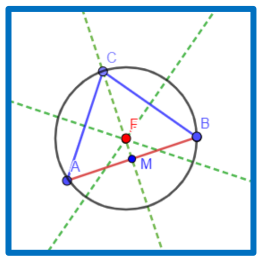
En el test, para el caso 2, se identificaron características de atributos concernientes a los niveles de comprensión 1 y 2, así como también se identifican en algunas de las respuestas indicios de los axiomas 2 y 4 de Huzita.

Para el nivel de comprensión 1, al igual que el cuestionario de saberes previos, el caso 2 clasifica los triángulos a partir de sus características físicas como la medida de sus lados y de sus ángulos, no obstante, en el test, no se queda solo en la descripción, sino que también formula definiciones para cada tipo de triángulo. Del mismo modo, clasifica congruencia, equidistancia y punto medio.

En el nivel de comprensión 2 se identifican características de los atributos de reconocimiento y descripción: Cuando reconoce la equidistancia de un punto a otro en un segmento, asimismo, reconoce el punto medio y algunos puntos notables en las figuras presentadas; atributos de uso de definiciones: Cuando usa la definición de equidistancia para explicar que cualquier punto que está sobre la mediatriz de un segmento, está a la misma distancia de sus extremos.

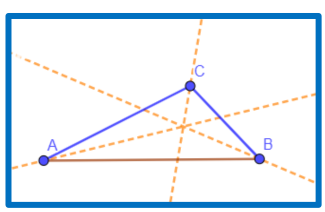
En este instrumento se presentaron algunas dificultades conceptuales con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables. En la pregunta 8, cuando se presenta la circunferencia circunscrita en el triángulo y se le pregunta al caso acerca de los vértices del triángulo, este refiere que los vértices equidistan del centro de la circunferencia, sólo porque se trata de un triángulo isósceles. Allí se evidencia que el caso no reconoce las propiedades de las mediatrices y el papel que cumplen los segmentos que se forman desde el vértice al punto de intersección de las mediatrices.

Figura 21. *Pregunta 18 del test.*



También se evidencia un error conceptual con respecto a las mediatrices, ya que en la pregunta 12 se plantea un doblez que biseca uno de los ángulos del triángulo y se pregunta por la relación que hay entre los dobleces realizados. La visualización del caso genera un error conceptual con respecto a las bisectrices de un triángulo, ya que este plantea que la relación que encuentra entre las mediatrices trazadas es que los dobleces y los segmentos se intersecan en sus puntos medios, respectivamente. Cuando la visualización de la figura permite ver que las intersecciones de los dobleces están a diferente distancia para cada segmento.

Figura 22. *Pregunta 12 del test.*

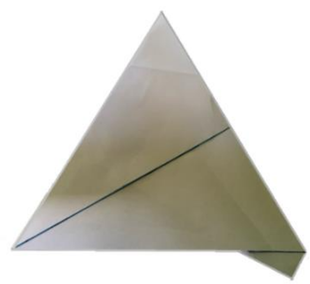


Finalmente, en la pregunta 14, donde se plantea determinar mediante el doblado de papel el punto medio de un segmento, el caso confunde el doblez que permite bisecar un ángulo y el doblez que permite establecer el punto medio de un segmento. En la pregunta 15 se plantea que se doblan las medianas de los segmentos del triángulo y se pregunta al caso por la relación que encuentra entre los dobleces realizados. Para lo anterior, el caso afirma que los dobleces hechos pasan perpendicularmente por los puntos medios de los segmentos. Según la respuesta proporcionada, se infiere que, por un lado, el caso desconoce el concepto de mediana de un

triángulo y, por otro lado, confunde el hecho de que las rectas pasen por el punto medio de los segmentos con rectas perpendiculares.

El taller de doblado de papel número 1 se realizó siguiendo las indagaciones del enfoque CPA, empezando con la parte concreta, donde se suministraron una serie de orientaciones para la construcción de un triángulo (ver Figura 23).

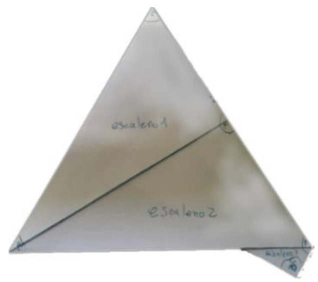
Figura 23. *Construcción realizada por el caso 2: Taller de doblado de papel 1.*



Seguido de la indagación pictórica, en la cual se esperaba que el caso estableciera relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados, asimismo, que identificara propiedades matemáticas producto de los dobleces realizados.

Se pidió al caso que, posterior a la construcción realizada, describiera las características tanto físicas como matemáticas que encontrara en el triángulo. Con respecto a las características físicas, el caso 2 refiere que es un “triángulo equilátero, dos escalenos iguales y otro escaleno, pero más chiquito” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), sin embargo, llama la atención que, en las características matemáticas, el caso también se enfoque en los ángulos hallados en la construcción: “dos ángulos agudos, tres ángulos rectos” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020). Lo anterior, hace parte del atributo de *clasificación* para el nivel 1.

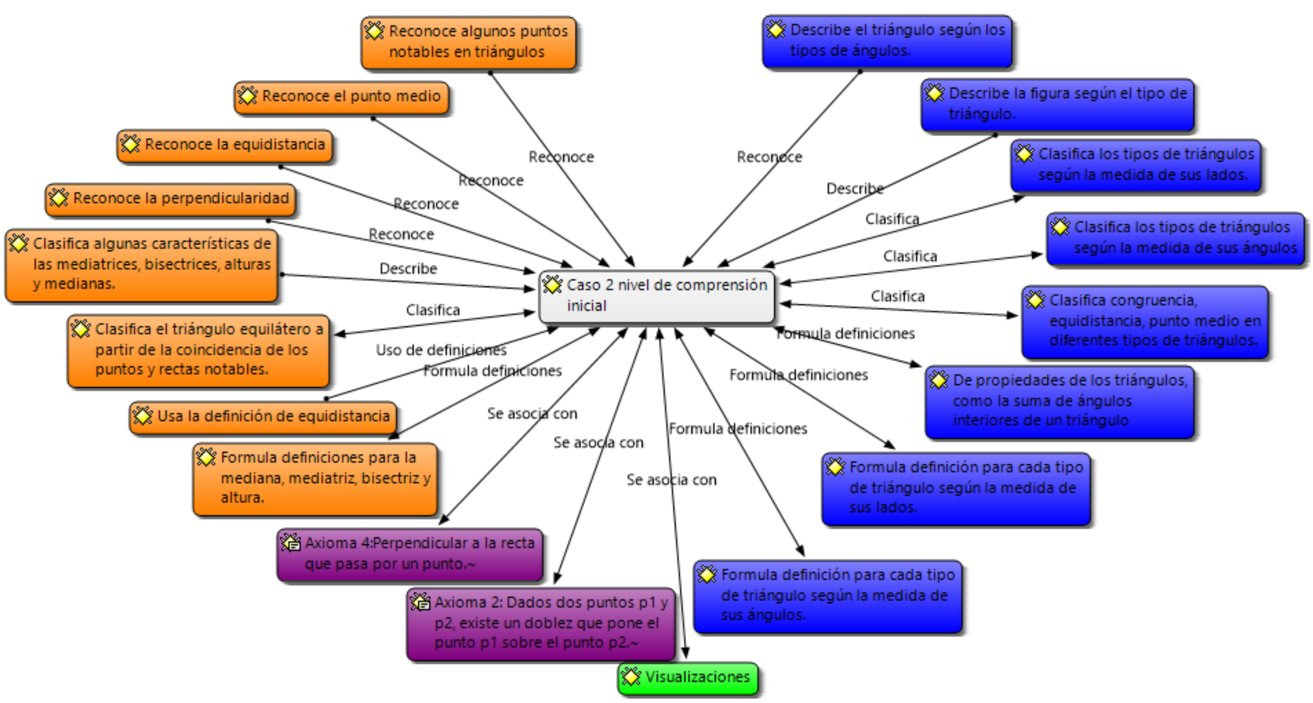
Figura 24. *Construcción realizada por el caso 2: Taller de doblado de papel 1. Indagación pictórica.*



En la indagación abstracta, cuando se interroga al caso por el segmento $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\boldsymbol{EBF}$, este refiere que es una línea notable y que puede ser cualesquiera, ya que se trata de un triángulo equilátero. De la misma forma, reconoce que $\boldsymbol{A'}$es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$. Lo anterior, hace referencia al atributo de clasificación del nivel 2, puesto que el caso 2 clasifica el triángulo equilátero a partir de la coincidencia de sus rectas notables.

A continuación, se presenta la red resultante de los atributos identificados en el nivel de comprensión inicial para el caso 2, esto es, a partir del cuestionario de saberes previos, del test y del primer taller de doblado de papel.

Figura 25. *Atributos identificados en el nivel de comprensión inicial del caso 2.*



A partir de la Figura 25 se puede concluir que el caso 2 utiliza de manera explícita las características del nivel 1, puesto que reconoce y clasifica los triángulos a partir de sus características físicas, formulando así definiciones con relación a este aspecto; asimismo, utiliza las mismas propiedades durante los tres instrumentos, sin realizar relaciones entre ellas. En este sentido, las características identificadas del nivel 2, el caso las utiliza de manera implícita, dando indicios de ellas en sus respuestas, sin embargo, aún el caso no reconoce los triángulos sobre la

base de sus características matemáticas (Jaime y Gutiérrez, 2015) y tampoco enuncia definiciones que le permita relacionar nuevas propiedades.

Asimismo, se puede decir que el lenguaje utilizado por el caso 2 para referirse a las rectas notables, durante los tres primeros instrumentos, carece de nivel conceptual con respecto a los puntos notables ya que no son mencionados por el caso en ningún instrumento, lo que quiere decir que aún falta dicha conceptualización y adquisición de tal lenguaje. Lo anterior, lo sustenta Corberán y sus colaboradores (1994) cuando plantean que una de las propiedades de los niveles de comprensión, es que cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje específico.

Según lo anterior, el caso 2 se ubica en el nivel 1 de reconocimiento y visualización de comprensión inicial, esto es, compara, ordena y clasifica los triángulos a partir de sus características físicas, incluyendo atributos basados solamente en sus visualizaciones; no reconoce explícitamente las propiedades matemáticas en los diferentes triángulos presentados; no hace generalizaciones entre los triángulos e instrumentos y no utiliza un lenguaje apropiado para los conceptos de puntos y rectas notables (Corberán, et al., 1994).

4.2.2. Nivel de comprensión alcanzado para el caso 2

En el taller de doblado de papel número 2, se identificaron características de atributos de los niveles 1, 2 y 3. Este taller también se desarrolló a partir de las tres indagaciones del enfoque CPA. En la indagación concreta, el caso construye a partir de una serie de pasos, las cuatro líneas notables en triángulos (mediatrices, medianas, bisectrices y alturas) isósceles. La Figura 26 presenta las cuatro construcciones del caso 2.

Figura 26*. Construcción realizada por el caso 2: Taller de doblado de papel 2.*

En la indagación pictórica se identificaron características de atributos de los niveles 1, 2 y 3. En un primer momento, el caso se remite solo a la clasificación de triángulos según la medida de sus lados para referirse a las características físicas de las construcciones. En un segundo momento, para referirse a las características matemáticas, el caso reconoce de forma general que los dobleces realizados en los cuatro triángulos hacen referencia a líneas notables; del mismo modo, reconoce una particularidad en todos los triángulos y es el doblez del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, que es el mismo en todas las construcciones; a partir de esto último, se puede decir que implícitamente el caso reconoce la propiedad de la altura relativa a la base de un triángulo isósceles es mediana, bisectriz y mediatriz.

En la indagación abstracta, el caso 2 define los dobleces del triángulo 1 como las mediatrices, del mismo modo, nombra el punto de intersección de los dobleces como el circuncentro. En este sentido, se observa una evolución en el lenguaje del caso, ya que, en los instrumentos anteriores, el caso 2 no nombró los puntos notables.

En el taller, por medio de los dobleces realizados, se establece que el punto de intersección de los dobleces en el primer triángulo es el centro de una circunferencia. Según lo anterior, el caso refiere que al ser $\boldsymbol{D}$ el centro de una circunferencia, esta pasa por los vértices del triángulo, esto es, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$; también, plantea que esta circunferencia se encuentra por fuera del triángulo y lo sustenta argumentando que $\boldsymbol{D}$ es el circuncentro; también establece que los radios son $\overline{\boldsymbol{AD}}, \overline{\boldsymbol{BD}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$.

En el tercer triángulo, el caso reconoce que los dobleces realizados hacen referencia a las bisectrices de un triángulo, además, refiere que el punto de intersección $\boldsymbol{F}$ de estos dobleces es el incentro, es por esto por lo que plantea que los puntos por los que pasa una circunferencia son los puntos que se forman al doblar perpendiculares a los segmentos que parten desde $\boldsymbol{F}$, es decir, los puntos $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{G}$ y, por ende, los radios son $\overline{\boldsymbol{DF}}, \overline{\boldsymbol{EF}}$ y $\overline{\boldsymbol{DG}}$. Cabe señalar que, en el taller de doblado de papel, se había establecido que el punto $\boldsymbol{F}$ era el centro de una circunferencia. De la misma manera, el caso afirma que la circunferencia se encuentra por dentro del triángulo, por tratarse del incentro.

Para el primer y tercer triángulo, el caso 2 realiza la siguiente definición: "el triángulo 3 va desde los ángulos hasta los lados, pero no de forma perpendicular; en cambio el triángulo 1 va desde la mitad de los lados, pero en forma perpendicular". A partir de dicha definición, se puede inferir que el caso formula definiciones para mediatriz y bisectriz y que reconoce la perpendicularidad.

Para el segundo y cuarto triángulo, el caso 2 reconoce tanto la recta notable que se formó con los dobleces, mediana y altura respectivamente; como los puntos de intersección: baricentro y ortocentro. Según la información proporcionada por el caso 2 en el segundo taller de doblado de papel, se puede decir que su nivel de comprensión evolucionó para los conceptos de puntos y rectas notables, puesto que los elementos que eran implícitos del nivel 2, ahora han pasado a ser explícitos. El caso ya formula definiciones con naturalidad las rectas notables, reconoce y nombra los puntos notables; otro rasgo de su evolución es que, en este taller, dejó de enfocarse las propiedades físicas de los triángulos y con el material proporcionado en el transcurso del taller, pudo sacar conclusiones de sus propias visualizaciones, prestando atención a las características matemáticas.

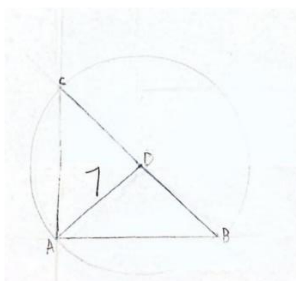
En el taller de doblado de papel número 3, se realizó a partir del enfoque CPA. En la indagación concreta, el caso dibujó dos parejas de triángulos, cada una de las cuales debía contener un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo. En la primera pareja, se realizaron dobleces correspondientes a las mediatrices y en la segunda pareja, dobleces referentes a las alturas de los triángulos.

En la indagación pictórica, el caso 2, describe lo que ocurrió en cada pareja de triángulos: "en los triángulos obtusángulos los puntos notables quedaron por fuera del triángulo y en los triángulos rectángulos, depende de la línea notable que se trace, en el caso de la mediatriz queda en la mitad de la hipotenusa y en el caso de la altura, el punto notable coincide con el vértice donde se forma el ángulo recto" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020). A partir de la descripción anterior, se identifican atributos del nivel 3 de comprensión, ya que el caso clasifica el triángulo obtusángulo a partir del ortocentro y el circuncentro que están exterior a este y que el ortocentro en el triángulo rectángulo coincide con el ángulo recto y el circuncentro con el punto medio de la hipotenusa.

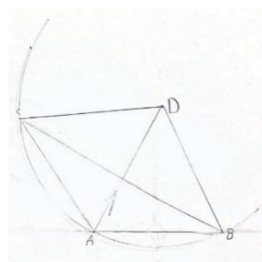
En la parte abstracta, para la primera pareja de triángulos, cuando se indaga por la relación entre los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ en el triángulo rectángulo (ver Figura 26a), el caso afirma que “miden lo mismo y ambos son el radio de la circunferencia, y entre los dos dan el diámetro”. Además, que los radios de dicha circunferencia son los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$. Para el triángulo obtusángulo, el caso refiere que ambos segmentos, “terminan fuera del triángulo, miden lo mismo y ambos son el radio de la circunferencia” (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020) (ver Figura 27b). Cabe mencionar que el caso utiliza el compás con el fin de constatar que por estos puntos pasaba una circunferencia y que dichos segmentos eran los radios.

Figura 27. *Construcción de mediatrices en triángulos rectángulo y obtusángulo por el caso 2.*

a)

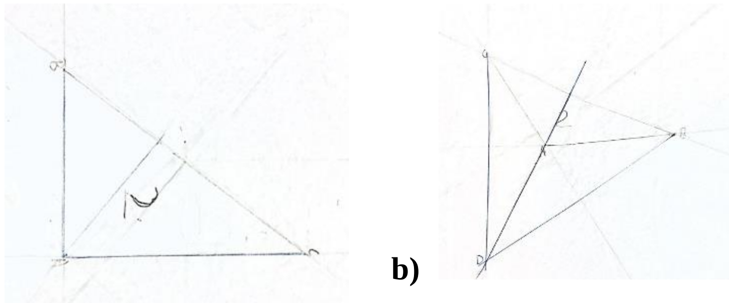


b)



Para la segunda pareja de triángulos, el caso clasifica el papel que cumplen las prolongaciones de los segmentos que forman el triángulo obtusángulo para el trazado de alturas, ya que sin estas no hubiese sido posible realizar los dobleces perpendiculares a los segmentos. En la figura 28, se puede observar las dos construcciones realizadas por el caso 2, con respecto a las alturas.

***Figura 28**. Construcción de alturas en triángulos rectángulo y obtusángulo por el caso 2.*



a) **b)**

En la entrevista de carácter socrático final, se identificaron atributos tanto del nivel 2, como del nivel 3; de la misma manera, se explicitaron los axiomas 2, 3 y 4 de Huzita en las respuestas proporcionadas por el caso: “el doblez está sobre sí mismo, por tanto, es perpendicular”; “doblar $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$” para trazar la bisectriz, “doblando $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$” para determinar el punto medio de un segmento (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020).

En el nivel 2, el caso reconoce la equidistancia, punto medio y perpendicularidad de la misma manera, formula definiciones para la mediatriz, mediana, bisectriz y altura. En el nivel 3, el caso especifica los radios de una circunferencia circunscrita en un triángulo; clasifica las rectas notables en triángulos específicos como lo es el triángulo y el obtusángulo; identifica los radios de una circunferencia inscrita en un triángulo, asimismo, identifica que la distancia del baricentro a los vértices es mayor que la distancia desde el baricentro a los puntos medios de los segmentos que forman el triángulo.

A partir del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, se logra apreciar una evolución en el nivel de comprensión del caso 2 con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. En el taller 2 se observa cómo el caso pasa del nivel 1 de reconocimiento y visualización, al nivel 2 de análisis y en el transcurso del taller 3 y de la entrevista de carácter socrático final, cómo el caso continúa en la evolución de su comprensión, pues, allí empieza a “desarrollar su capacidad de razonamiento matemático” (Corberán, et al., 1994, p. 17), está en la capacidad de reconocer que algunas propiedades se deducen de otras, como lo es el caso de la circunferencia circunscrita en la circunferencia independientemente del tipo de triángulo.

Del mismo modo, el caso 2 utiliza “las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar sus deducciones que como un medio para realizarlas” (Corberán, et al., 1994, p.

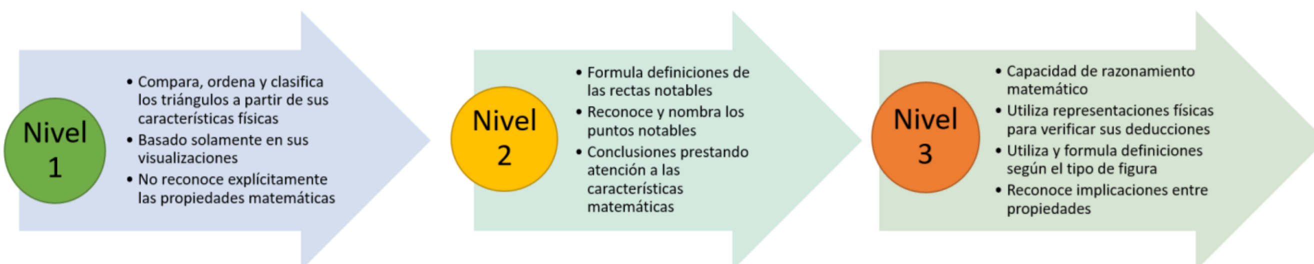
18), cuando decide utilizar el compás con el fin de verificar que los segmentos que formaban los radios eran iguales y que la circunferencia estaba circunscrita en la circunferencia.

Utiliza y formula definiciones según el tipo de figuras, cuando realiza la distinción entre los puntos notables de los triángulos rectángulos y los triángulos obtusángulos, cuando identifica el papel que cumplen las prolongaciones en los triángulos rectángulos para el trazado de las alturas.

Por todo lo anterior, el caso 2 alcanza un nivel 3 de clasificación, el cual establece que el caso está en la capacidad de reconocer implicaciones entre las propiedades, así como la forma en que unas se deducen de otras y describir de manera formal las figuras, proporcionando definiciones matemáticas, conscientes de que se necesita un conjunto de propiedades y que no necesariamente agregar más propiedades da como resultado una mejor definición.

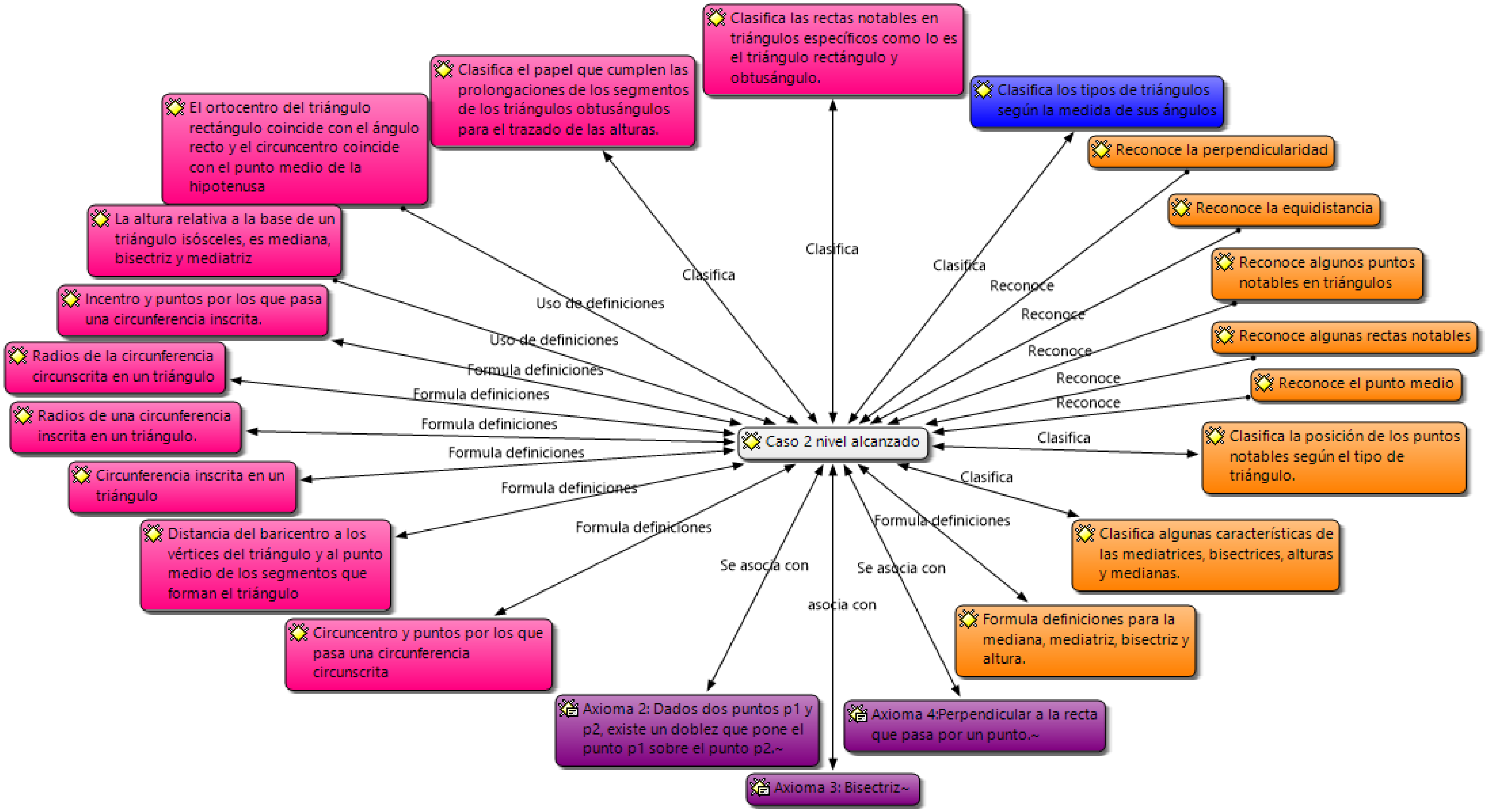
En el gráfico se muestra el paso por los tres niveles de comprensión del caso 2.

Gráfica 8*. Paso por los niveles de comprensión del caso 2*



A continuación, se presenta la red, resultado del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, a partir del cual se puede concluir el nivel de comprensión alcanzado por el caso 2.

Figura 29. *Atributos del nivel de comprensión alcanzado por el caso 2.*



4.3. Análisis del nivel de comprensión para el caso 3

El caso 3 es un estudiante de 14 años, atento, con capacidad comunicativa y comprometido con sus responsabilidades académicas.

4.3.1. Nivel de comprensión inicial para el caso 3

Para la indagación del nivel de comprensión inicial del caso 3, con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, se implementó un cuestionario de saberes previos, un test y el primer taller de doblado de papel. A partir de lo anterior, se pudieron identificar atributos distintivos tanto del nivel 1, como del nivel 2 de comprensión.

A partir de la implementación del cuestionario de saberes previos se identificaron características de atributos del nivel 1, relacionadas con reconocimiento - descripción y formulación de definiciones. En este sentido, el caso 3, con relación a sus visualizaciones, a diferencia de los casos anteriores, es descriptivo enfatizando su atención hasta en los más mínimos detalles de las figuras; intenta dar indicios de definiciones de congruencia, ángulo, triángulo, punto y recta notable.

Llama la atención la definición que emplea para referirse a línea notable: "líneas imaginarias que hacen del punto notable" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020) y la definición de punto notable: "es el punto medio del triángulo según las líneas notables" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020). De las afirmaciones anteriores, se puede concluir que el caso 3 no posee elementos conceptuales que le permitan comprender las rectas y puntos notables involucrados en las figuras presentadas. Un ejemplo claro de ello es que el caso, presenta dificultades a la hora de distinguir las diferentes rectas notables de cada figura.

En primera instancia, el caso 3 afirma que en el triángulo a) las líneas notables son las alturas y, por ende, su intersección es el ortocentro. Sin embargo, esta es una visualización errónea, pues las alturas pasan por los vértices y son perpendiculares a los lados opuestos y las líneas notables de la figura, si bien, son perpendiculares a los segmentos, no pasan por los vértices. Lo mismo sucede cuando confunde las medianas que se presentan en el triángulo d) con mediatrices. Si bien ambas rectas notables pasan por el punto medio de los segmentos, las mediatrices no pasan por los vértices a diferencia de las medianas.

En segunda instancia, el caso 3 define las alturas como las "líneas que salen del vértice al lado opuesto dentro del triángulo" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020), a partir de esto se puede inferir que el caso no reconoce las alturas a partir del concepto de perpendicularidad, del mismo modo que generaliza que todas las alturas se encuentran al interior sea cual sea el triángulo, lo cual puede generar un error conceptual, pues hay casos donde el trazo de las alturas es externo, por ejemplo, en el triángulo obtusángulo. De la misma manera, define las mediatrices de un triángulo como "las líneas que salen del punto medio de cada lado" (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020), sin tener en cuenta que estas líneas que salen del punto medio de cada lado, deben ser perpendiculares a estos.

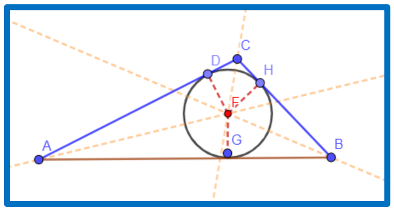
Con respecto a las características del nivel 2, se lograron identificar atributos de reconocimiento - descripción y formulación de definiciones. En este nivel se observa que el caso identifica que los triángulos presentados en la figura poseen líneas notables e intenta formular definiciones para las medianas: “son segmentos que pasan del vértice de un ángulo al punto medio del otro lado. dentro del triángulo” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020) y para las bisectrices: “son las líneas que salen de los ángulos internos del triángulo, dividiendo el vértice a la mitad” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

En el test se identificaron características de atributos de los niveles 1, 2 y 3; asimismo, algunas de las respuestas se asocian a los axiomas de Huzita, cuando el caso expresa que, para determinar el punto medio de un segmento, basta con llevar un extremo sobre el otro exactamente. Con respecto al nivel 1, el atributo de clasificación es evidente cuando el caso se remite a los tipos de triángulos involucrados en las figuras, refiriéndose a la medida de sus lados y de sus ángulos. Por su parte, se hace explícito el atributo de reconocimiento y descripción para el nivel 2, cuando el caso reconoce equidistancia, perpendicularidad y algunas rectas notables en los triángulos.

En cuanto al nivel 3, cabe señalar que, a diferencia de los otros dos casos, el caso 3 identifica y nombra los radios de la circunferencia circunscrita en el triángulo, refiriendo que los vértices equidistan del centro de la circunferencia. También visualiza la relación que hay entre las distancias de los vértices y los puntos medios de los segmentos al baricentro.

Un aspecto para resaltar de las respuestas proporcionadas por el caso 3 en el test, cuando se le plantea que el punto de intersección de las tres bisectrices es el centro de la circunferencia como se muestra en la figura 27 y se le pregunta por las distancias **G**, **H** y **D** del incentro, a los segmentos **AB, BC** y **AC** respectivamente.

Figura 30. *Pregunta 13 del test.*



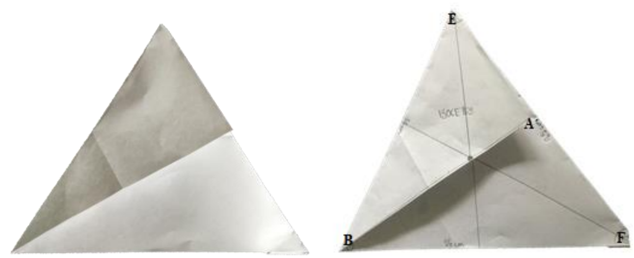
El caso refiere que "no es posible determinar relaciones entre los segmentos y el centro de la circunferencia, por tratarse de un triángulo escaleno". Este tipo de respuestas permite ir ubicando en el nivel 1de comprensión al caso 3, puesto que, en este nivel, los estudiantes “no piensan en las propiedades como características de una clase de figuras” (Corberán, et al., 1994, p. 16), es decir, el caso asume que cada tipo de triángulo tiene sus propiedades y que no hay propiedades generales para los puntos y rectas notables en triángulos.

En el primer taller de doblado de papel, las respuestas del caso 3 fueron poco descriptivas; sin embargo, se identificaron características del nivel 1 de reconocimiento y del nivel 2 de análisis. Como se ha mencionado anteriormente, los talleres de doblado de papel se enmarcan en el enfoque CPA del método Singapur, comenzando con la indagación concreta, donde se presentaron una serie de orientaciones para la construcción de un triángulo a partir del doblado de papel (ver figura 31).

Seguido de la indagación pictórica, donde en primer lugar, el caso 3 describe las características físicas del triángulo en términos de tamaño “es un triángulo grande, con sus lados grandes” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020); habla de los dobleces realizados e intenta buscarles una lógica, “el doblez más grande en mi opinión fue el de la prolongación del lado más corto” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), también resalta el color de la hoja que empleó para su construcción “la hoja es de color blanco” y afirma que se trata de un triángulo isósceles acutángulo. En segundo lugar, el caso describe las características matemáticas a partir de la forma de la figura “tiene 3 ángulos, los cuales todos miden menos de 90 grados” y las medidas de cada uno de los segmentos que la componen; finalmente refiere que no encuentra relaciones de perpendicularidad y que se pueden encontrar puntos notables “no tan exactos” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020).

Las respuestas proporcionadas en la indagación pictórica se corresponden con características de los atributos de reconocimiento y descripción del nivel 1, las cuales plantean que los estudiantes reconocen figuras a partir de sus características físicas como aspecto, tamaño de los elementos, posición, etc. (Jaime y Gutiérrez, 2015). También se identifican atributos de formulación de definiciones en este mismo nivel, donde los estudiantes toman en consideración solo los atributos que se refieren a objetos físicos de forma global, o propiedades no matemáticas (Jaime y Gutiérrez, 2015).

Figura 31. *Construcciones realizadas por el caso 3: Taller de doblado de papel 1.*



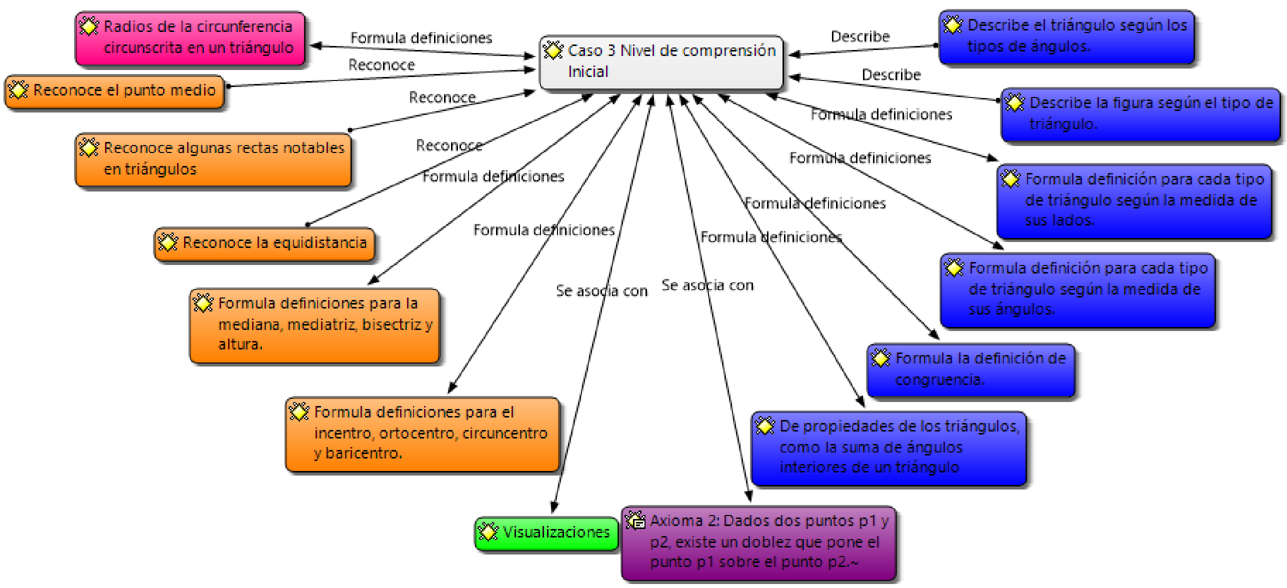
Finalmente, en la indagación abstracta, se identificaron características del nivel 2 de reconocimiento y descripción, ya que, a partir de las preguntas orientadoras, el caso 3, encontró relaciones de perpendicularidad, de equidistancia y de punto medio en los dobleces realizados, refiriendo que el segmento $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ se trata de la altura del triángulo, de la misma manera, plantea que $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ también es “una recta que marca la relación de perpendicularidad o una mediana” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020).

Llama la atención en la clasificación que establece el caso 3, con respecto al tipo de triángulo que se formó, puesto que, en varias ocasiones, establece que se trata de un “triángulo isósceles obtusángulo” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), sin embargo, cuando se le pregunta por la medida del ángulo $\widehat{\boldsymbol{B}}$ este aduce que todos son de 60° “porque deben sumar 180°”, lo anterior, permite observar un error conceptual con respecto a la clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos, pues su definición no concuerda con su clasificación que, en este orden de ideas, es un triángulo equilátero.

Se puede concluir, con relación al nivel de comprensión inicial del caso 3 para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, que este se encuentra en el nivel 1 de reconocimiento y visualización, si bien se identifican elementos de los niveles 2 y 3; se determina este nivel de comprensión, ya que el caso usa propiedades imprecisas de los triángulos para compararlos, ordenarlos, describirlos o identificarlos; no reconoce explícitamente las propiedades matemáticas en los tres instrumentos presentados; no usa un lenguaje adecuado para referirse a los diferentes conceptos geométricos y se evidencia que sus descripciones son basadas en atributos físicos (Corberán, et al., 1994).

A continuación, se presenta la red resultante de los atributos identificados en el nivel de comprensión inicial para el caso 3, esto es, a partir del cuestionario de saberes previos, del test y del primer taller de doblado de papel.

Figura 32*. Atributos identificados en el nivel de comprensión inicial del caso 3.*

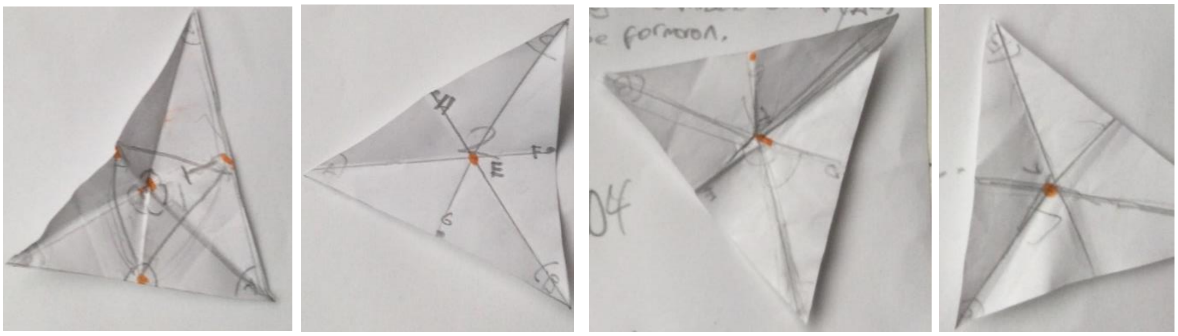


4.3.2. Nivel de comprensión alcanzado para el caso 3

El segundo taller de doblado de papel se llevó a cabo a partir de las tres indagaciones del enfoque CPA: Concreto, Pictórico y Abstracto. Con respecto a lo anterior, se identificó que el caso 3 aún no ha adquirido un lenguaje matemático en relación con los conceptos de puntos y rectas notables, ya que sus respuestas, al igual que en los demás instrumentos, se enfocaron en la descripción y el reconocimiento de atributos físicos.

En la indagación concreta, el caso construye, a partir de una serie de pasos, las cuatro líneas notables en triángulos (mediatrices, medianas, bisectrices y alturas) isósceles. La figura 33 presenta las cuatro construcciones del caso 3.

Figura 33*. Construcción realizada por el caso 3: Taller de doblado de papel 2.*



En la indagación pictórica se identificaron características de atributos de los niveles 2 y 3. En un primer momento, el caso se remite solo a la descripción de características físicas, enfocándose en las medidas de los segmentos en los puntos medios que se forman en los mismos con los dobleces realizados y los triángulos que se forman al interior del triángulo inicial con los dobleces. En un segundo momento, para referirse a las características matemáticas, el caso únicamente se remite a las relaciones de perpendicularidad y de equidistancia que visualiza en los triángulos.

Lo anterior, permite inferir que el caso hasta el momento no ha adquirido un lenguaje matemático, con relación a los conceptos trabajados, que le permita identificar y describir otro tipo de características matemáticas en los cuatro triángulos.

En la indagación abstracta, se pide al caso definir matemáticamente los dobleces realizados en el triángulo 1, a lo cual este responde que, “son líneas notables, las cuales se juntan en un punto notable deseado (no me recuerdo exactamente)” (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020). En este sentido, se puede deducir que, por un lado, el caso no realiza una definición, este se limita a enunciar su visualización con sus propias palabras, sin buscar una propiedad matemática que lo respaldara; por otro lado, se esperaría que este punto del trabajo de campo el caso identifique, por lo menos, a qué línea notable le corresponde cada doblez.

No obstante, se identifican características de atributos distintivos del nivel 3, puesto que el caso, refiere que por los puntos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ del triángulo 1 pasa una circunferencia que está por fuera del triángulo y que sus radios son los segmentos que se forman desde los vértices del triángulo hasta el punto donde se intersecan los dobleces, esto es, $\overline{\boldsymbol{CD}}, \overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$, finalmente, nombra el centro de dicha circunferencia como el circuncentro. Con respecto al triángulo 2, el caso no proporciona respuestas.

Para el triángulo 3, confunde los dobleces realizados (bisectrices) con las medianas, formulando la definición de esta, sin embrago, afirmando no recordar el nombre de dicha línea notable: "se podría decir que son rectas que parten desde la mitad de cada lado del triángulo y no van perpendicular por el tipo de doblez que realizamos, pero exactamente como se llaman siendo líneas notables no me recuerdo bien en este momento" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020); a pesar de esto, reconoce que por los puntos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{G}$ pasa una circunferencia que se encuentra "dentro, porque pasa por esos puntos cerrando la magnitud de aquella" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020) y que sus radios son los segmentos $\overline{\boldsymbol{DF}}$, $\overline{\boldsymbol{EF}}$ y $\overline{\boldsymbol{GF}}$, además, nombra temerosamente el centro de dicha circunferencia refiriendo "es el incentro, si no estoy mal" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020).

Finalmente, para el triángulo 4, el caso reconoce que se trata de las alturas y que su punto de intersección se denomina ortocentro; de la misma manera, refiere que una particularidad encontrada en los cuatro triángulos es que en el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, cualquiera que haya sido el doblez, siempre quedó en el mismo lugar, respuesta que es ubicada en la propiedad de la altura relativa a la base en un triángulo isósceles es mediana, bisectriz, mediatriz y altura.

Para el taller de doblado de papel número 3, en la indagación concreta, el caso dibujó dos parejas de triángulos, cada una de las cuales debía contener un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo. En la primera pareja, se realizaron dobleces correspondientes a las mediatrices y en la segunda pareja, dobleces referentes a las alturas de los triángulos.

En la indagación pictórica, el caso 3, describe lo que ocurrió en cada pareja de triángulos:

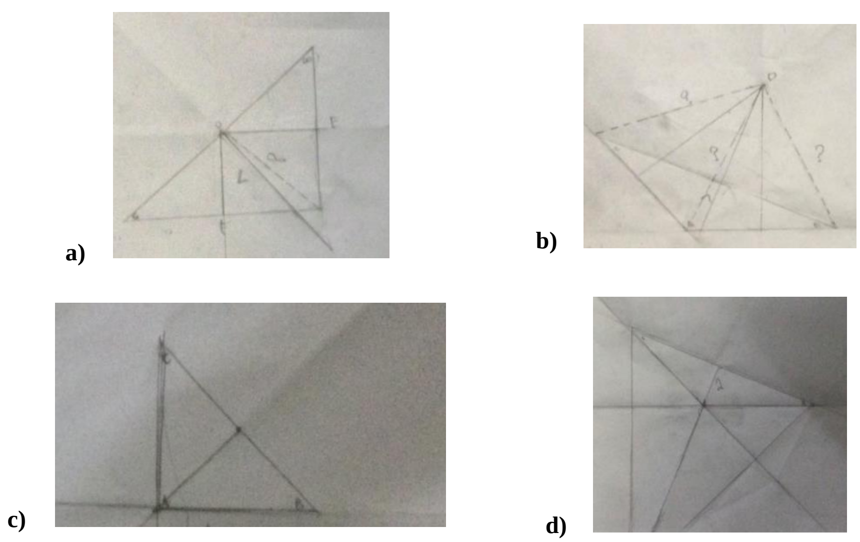
> En el triángulo rectángulo 1, podemos ver que el punto de intersección de las mediatrices está en la mitad de la hipotenusa. En el triángulo obtusángulo 1, podemos ver que el punto de intersección de las mediatrices está por fuera del triángulo. En el triángulo rectángulo 2, podemos ver que el punto de intersección de las alturas está en uno de los vértices del triángulo. En el triángulo obtusángulo 2, podemos ver que el punto de intersección de las alturas está por fuera del triángulo. (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020)

A partir de lo anterior, se identifican atributos del nivel 3 de comprensión, puesto que el caso incluye en sus descripciones otras características, con relación a las líneas trazadas en cada triángulo. En este sentido, clasifica en cada pareja que en el triángulo obtusángulo el ortocentro y el circuncentro que están exterior a este; además, que el ortocentro en el triángulo rectángulo coincide con el ángulo recto y el circuncentro con el punto medio de la hipotenusa.

> “En los triángulos rectángulos, el punto de intersección ya sea de mediatrices o de alturas, es interior al triángulo, en cambio en triángulos obtusángulos, dichos puntos de intersección son exteriores” (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020).

Para la primera pareja de triángulos, donde se han trazado dobleces correspondientes a las mediatrices cuando se indaga por la relación entre los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ en el triángulo rectángulo (ver figura 33a), el caso afirma que “miden lo mismo” (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020) y que los radios de la circunferencia circunscrita en el triángulo son “CD-BD-AD” (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020). Cabe aclarar, que la afirmación anterior, se realiza, porque en el taller de doblado de papel se llegó a dicha conclusión. Para el triángulo obtusángulo, el caso refiere que el circuncentro “sucede una prolongación y hace que quede fuera del triángulo” (ver figura 34b), además, afirma que los radios de la circunferencia circunscrita son los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$, sin mencionar el segmento $\overline{\boldsymbol{AD}}$

Figura 34. *Construcción de mediatrices en triángulos rectángulo y obtusángulo por el caso 3.*



Para la segunda pareja de triángulos, el caso 3 afirma que el trazo de las alturas en el triángulo obtusángulo “es posible gracias a la prolongación de las mismas alturas igual, aunque estén fuera del triángulo y de la hoja, se encuentren en un punto” (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020) (ver Figura 34d).

En la entrevista de carácter socrático final, se identificaron atributos de los niveles 1, 2 y 3; de la misma manera, se explicitaron los axiomas 2, 3 y 4 de Huzita en las respuestas proporcionadas por el caso.

En primer lugar, con respecto a los axiomas de Huzita, el caso 3, refirió que el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se determina “deslizando el punto $\boldsymbol{A}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{B}$” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), lo anterior, se relaciona con el axioma 2, el cual plantea que dados dos puntos $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{p_2}$, existe un doblez que pone $\boldsymbol{p_1}$sobre $\boldsymbol{p_2}$ (Palamakumbura, 2013); también menciona que para bisecar un ángulo doblando papel “doblaría $\overline{\boldsymbol{AB}}$ poniéndolo sobre $\overline{\boldsymbol{BC}}$” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), siendo este el axioma 3, dadas dos líneas dadas dos líneas $\boldsymbol{l_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$, se puede hacer un doblez que ponga $\boldsymbol{l_1}$ sobre $\boldsymbol{l_2}$ (Palamakumbura, 2013); finalmente, cuando se le interpela por la relación que existe entre un doblez que pone exactamente el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$ del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y dicho segmento, el caso expresa que el doblez “pasa exactamente por la mitad de $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y pasa perpendicularmente” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), relacionándose con el axioma 4, que dice que dado un punto $\boldsymbol{p_1}$ y una línea $\boldsymbol{l_1}$, se puede hacer un doblez que ponga a $\boldsymbol{l_1}$ sobre sí misma y pase por $\boldsymbol{p_1}$ (Palamakumbura, 2013).

En segundo lugar, con relación a las características identificadas en los atributos para los diferentes niveles de comprensión, en el nivel 1 el caso 3 clasifica los diferentes triángulos que se presentan en la entrevista, a partir de la medida de sus lados y de sus ángulos. Ahora bien, en el nivel 2, reconoce y formula definiciones para los conceptos de perpendicularidad, equidistancia, punto medio, medianas: “lo que hiciste con el doblez fue marcar rectas desde el punto medio de uno de los segmentos del triángulo, en otras palabras, mediatrices” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020); clasifica algunas características de triángulos específicos como el rectángulo y obtusángulo.

En esa misma línea, con respecto a las características del nivel 3 de comprensión, el caso identifica los radios de una circunferencia circunscrita en un triángulo, asimismo, refiere que la posición del circuncentro en un triángulo rectángulo “queda exactamente en un punto medio de la hipotenusa del triángulo” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020) y que en un triángulo obtusángulo “queda por fuera del mismo, como una prolongación” (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020); además, para referirse a la relación entre el baricentro ***J*** del triángulo y las distancias de los vértices con los puntos de intersección de las medianas, el caso plante que "unos puntos están más alejados de ***J*** que otros, por ejemplo, los vértices están más alejados de ***J*** que los otros" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), siendo la anterior, una propiedad del baricentro que establece que el segmento que se forma de la unión del baricentro con el vértice, mide el doble que el segmento que se forma al unir el baricentro con el punto medio del lado opuesto.

El caso también refiere que en el triángulo donde se trazaron las bisectrices, los segmentos perpendiculares que van desde el incentro al cada lado del triángulo, son los radios de la circunferencia. Del mismo modo, reconoce que el ortocentro en un triángulo rectángulo coincide con el ángulo recto.

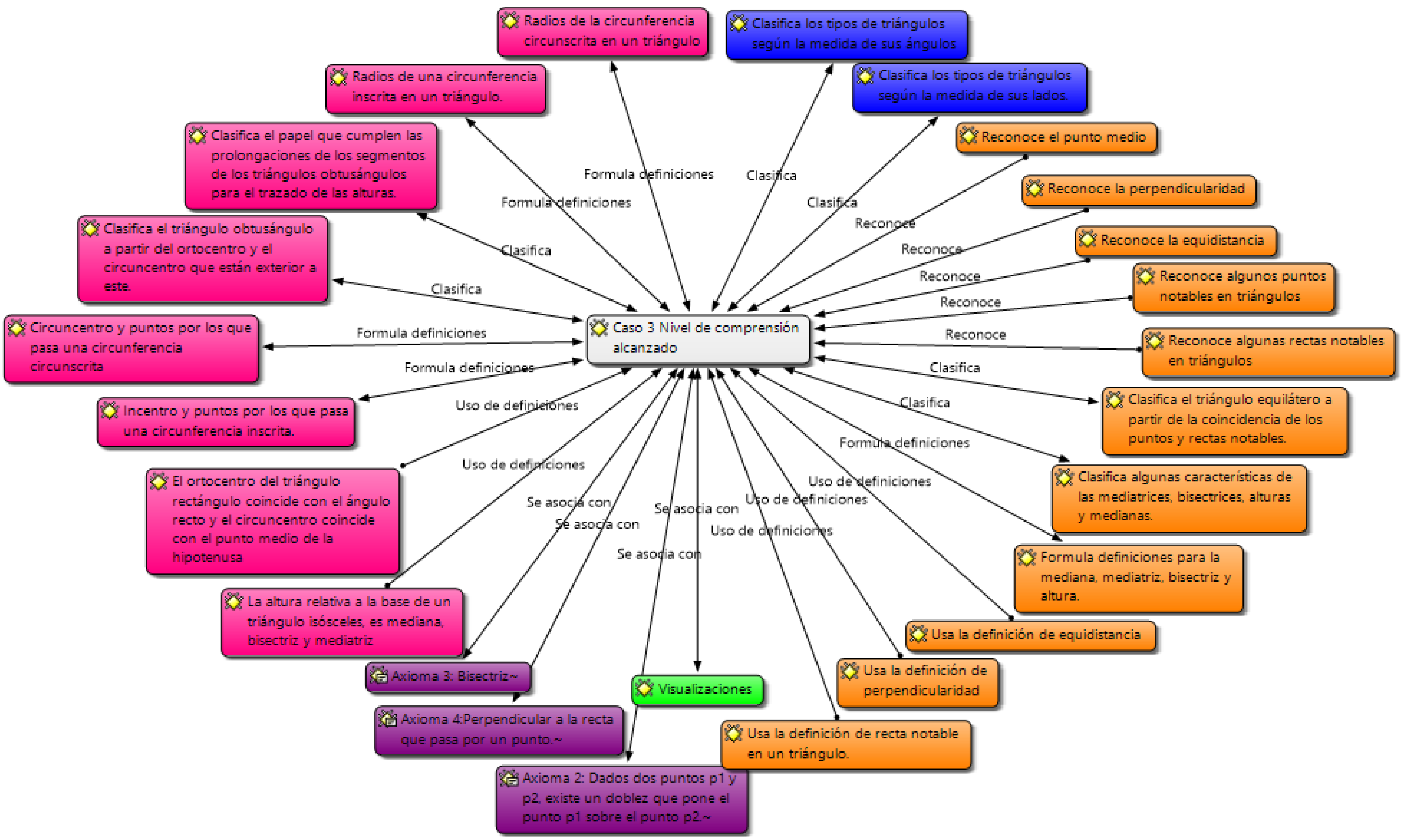
A partir del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, se logra apreciar una evolución en el nivel de comprensión del caso 3 con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. No obstante, se observa que la evolución del caso 3 es más lenta con relación a los casos 1 y 2, pues solo hasta el tercer taller, se evidencia que el caso emplea un lenguaje matemático para referirse a los conceptos de puntos y rectas notables.

A diferencia del nivel de comprensión inicial del caso, se puede decir que a lo largo de los talleres de doblado de papel, el caso 3 se hace consciente de que las figuras están dotadas de propiedades matemáticas, cabe aclarar, que el reconocimiento de dichas propiedades matemáticas, se dio a partir de sus observaciones, del acto de doblar y desdoblar, realizando descripciones de sus partes, enunciando algunas de estas propiedades; igualmente, se observó que cuando se pedía una definición para las figuras, este enunciaba un listado de propiedades de manera implícita, realizando comparaciones entre tipos de triángulos, particularidades en triángulos rectángulos y obtusángulos (Corberán, et al., 1994).

Si bien, tanto en el tercer taller de doblado de papel y la entrevista de carácter socrático final, se lograron apreciar características de atributos relacionados con el nivel 3 algunos de manera implícita y otros de manera explícita, se concluye que el caso 3 alcanza un nivel de comprensión 2, ya que se observó en las respuestas proporcionadas por el caso, que este todavía no estaba en la capacidad de relacionar las propiedades matemáticas, pues, percibía cada figura como algo aislado, es decir, con un conjunto de propiedades aparte; del mismo modo, aún no estaba en la capacidad de explicar relaciones entre las propiedades que enunciaba; el lenguaje para referirse a la mediana, bisectriz y altura no fue explícito en los talleres, al igual que para referirse al baricentro y el ortocentro.

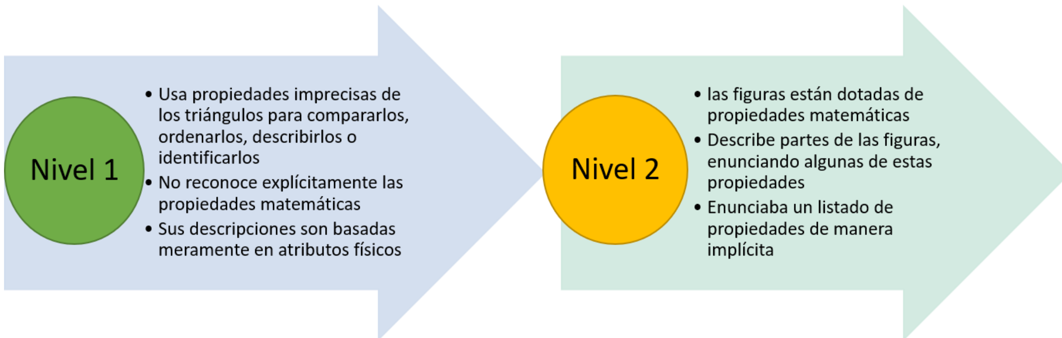
A continuación, se presenta la red, resultado del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, a partir del cual se puede concluir el nivel de comprensión alcanzado por el caso 3.

Figura 35. *Atributos del nivel de comprensión alcanzado por el caso 3.*



En el gráfico se muestra el paso por los tres niveles de comprensión del caso 3.

Gráfica 9. *Paso por los niveles de comprensión del caso 3.*



4.4. Análisis del nivel de comprensión para el caso 4

El caso 4 es un estudiante de grado 8°, que tenía al momento de realizar el trabajo de campo, catorce años. Es una persona dinámica, comprometida y resiliente en el aspecto académico, quien se comprometió con la investigación, aun siendo el área de matemáticas, una de las menos preferidas por él. Cabe destacar, que el estudiante presentó algunos inconvenientes para reunirse a los encuentros grupales, por lo que fue necesario proponer encuentros extra.

4.4.1. Nivel de comprensión inicial para el caso 4

En la indagación del nivel de comprensión inicial para el caso 4, con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos, se pudieron identificar atributos distintivos tanto del nivel 1, como del nivel 2 y del nivel 3 de comprensión.

En el cuestionario de saberes previos, las respuestas proporcionadas por el caso se asociaron a los atributos de clasificación- reconocimiento y descripción para el nivel 1, esto es, el caso clasifica y describe las figuras según el tipo de triángulo, a partir de la medida de sus ángulos y de sus lados. Para el nivel 2, atributos de reconocimiento y formulación de definiciones, puesto que identifica las líneas notables que cada figura tenía trazada; de la misma manera, intenta formular definiciones para cada una de ellas. En este sentido, el caso realizó la siguiente descripción detallada de cada uno de los triángulos presentados:

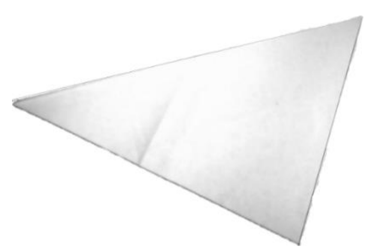
> […]el triángulo A es un triángulo obtusángulo, yo diría sin mucha seguridad que se trazaron las mediatrices por el hecho que van de forma perpendicular desde el punto medio de un lado al opuesto de forma perpendicular, es escaleno. el triángulo B es un rectángulo, yo

diría que tiene marcadas la altura porque se puede ver una línea que va de forma perpendicular hasta el vértice opuesto. es escaleno también. el triángulo C es un triángulo isósceles, y después de estar un buen rato mirando e intentando medir la pantalla puedo decir que están marcadas las medianas, que van desde un punto medio de un lado hasta el vértice opuesto. El Triángulo D es un equilátero y si no estoy mal un equilátero hace que los puntos medios de las líneas notables son iguales. entonces pues ahí está eso. (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020)

De lo anterior, se puede identificar que el caso clasifica cada uno de los triángulos, no sólo a partir de sus características físicas, sino también enfocándose en características matemáticas. No obstante, se observa una confusión entre el triángulo $\boldsymbol{C}$ y el triángulo $\boldsymbol{D}$, ya que la visualización realizada por el caso, lo hace afirmar que, en este primero, están trazadas las medianas, seguido de esto, refiere que son aquellas que van desde el punto medio de un lado hasta el vértice; sin embargo, en este triángulo se encuentran trazadas las bisectrices, ya que no llegan al punto medio del lado opuesto, como sí ocurre en el triángulo $\boldsymbol{D}$ (ver Figura 6c y d).

Cuando se le pide al caso que tome una hoja cualquiera e intente, por medio de dobleces, formar un triángulo (Figura 36), este describe que lo realiza “con dos dobleces haciendo un cuadrado y después dividiéndolo en dos partes” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020).

Figura 36. *Construcción realizada por el caso 4: Cuestionario de saberes previos.*



Con respecto a la construcción, cuando se le indaga, por la cantidad de triángulos que se pueden realizar a partir del doblado de papel, este responde que infinitos, ya que el “el papel permite doblarse y cortarse de manera infinita” (Comunicación personal, 12 de septiembre de 2020). Sin embargo, cuando se le pregunta cómo haría para trazar las líneas notables doblando papel, refiere que no sabe cómo sería posible.

En el test, que se le aplicó igualmente al caso 4, se identificaron características de atributos concernientes a los niveles de comprensión 1, 2 y 3, así como también, se identifican en algunas de las respuestas, indicios de los axiomas 2 y 4 de Huzita.

Para el nivel de comprensión 1, el caso 2 clasifica los triángulos a partir de sus características físicas como la medida de sus lados y de sus ángulos, asimismo, formula definiciones para cada tipo de triángulo. Del mismo modo, clasifica perpendicularidad, equidistancia y punto medio.

En el nivel de comprensión 2, se identifican características de los atributos de reconocimiento, descripción y clasificación. En este sentido, el caso 4 reconoce el punto medio en los segmentos donde se han trazado las mediatrices (sin decirle que lo son, sólo introduciendo los dobleces con los axiomas de Huzita), de la misma manera, los segmentos que son equidistantes a un punto y los dobleces que forman perpendiculares con los segmentos. Finalmente, clasifica la posición del punto notable que se forma por la intersección de las alturas, externo al triángulo, por tratarse de un triángulo obtusángulo.

Para el nivel 3, se identifican algunos indicios de atributos relacionados con formulación de definiciones y clasificación. Para el primero, el caso refiere que la distancia del centro de la circunferencia a cada uno de los segmentos es la misma, son radios de dicha circunferencia y para el segundo, clasifica el papel que cumplen las prolongaciones de los segmentos de los triángulos obtusángulos para el trazado de las alturas, ya que, sin estas, no hubiera sido posible el trazo de dicha línea notable.

En las respuestas proporcionadas por el caso en este instrumento, se presentaron algunas dificultades conceptuales con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables. En la pregunta 8, al igual que el caso 2, cuando se presenta la circunferencia circunscrita en el triángulo y se le pregunta al caso acerca de los vértices del triángulo, este responde que los vértices equidistan del centro de la circunferencia, sólo porque se trata de un triángulo isósceles. De lo anterior, se puede decir que el caso está realizando una generalización con respecto a las propiedades de los puntos y rectas notables en triángulos isósceles, tal vez esto se deba, a que, hasta el momento, en el test solo se han presentado figuras que representan triángulos isósceles. De la misma manera, se evidencia que el caso no reconoce las propiedades de las mediatrices y el papel que cumplen los segmentos que se forman desde el vértice al punto de intersección de las mediatrices.

En esa misma línea, igual que ocurrió con el caso 1, también se evidencia un error conceptual en la pregunta 11 del test, puesto que allí se interroga al caso con respecto las medidas de los ángulos que se forman y este se enfoca en uno de los segmentos que forma el ángulo, refiriendo que el doblez pasa exactamente por la mitad del segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$, donde se puede ver claramente que el doblez no pasa por el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$, pero sí pasa exactamente por el vértice $\boldsymbol{B}$ (ver Figura 3).

Con relación al primer taller de doblado de papel, este se realizó siguiendo las indagaciones del enfoque CPA, empezando con la parte concreta, donde se suministraron una serie de orientaciones para la construcción de un triángulo (ver Figura 37)

Figura 37. *Construcción realizada por el caso 4: Taller de doblado de papel 1.*

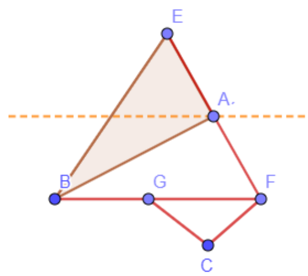
Posteriormente, en la indagación pictórica, se pidió al caso que describiera las características tanto físicas como matemáticas que encontrara en la construcción realizada. Con respecto a las características físicas, el caso 4 refiere que:

> Es un triángulo isósceles, […] el hecho de que en el triángulo sus dos lados nacen de un doblez a una paralela influye en que se genere el triángulo isósceles, el triángulo es tan grande como es la hoja de block y por el hecho de que la hoja sea un rectángulo pues le sobra una esquinita. (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020)

La descripción anterior resalta características propias de atributos distintivos del nivel 1, ya que, como se puede observar, el caso se enfoca en la forma, el tamaño e intenta formular una definición apresurada con respecto al tipo de triángulo. En las características matemáticas, el caso vincula la medida de los lados, la medida de los ángulos, siendo la primera, una característica física; de la misma manera, plantea que “se le puede sacar sus líneas notables y por el hecho de que el triángulo nace de un doblez se puede ver su altura” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020). En este sentido, el caso formula la definición de altura y reconoce algunas líneas notables en el triángulo, siendo estos atributos del nivel 2.

En la indagación abstracta, en primer lugar, el caso afirma que el segmento $\overline{\boldsymbol{BA'}}$, forma un ángulo recto con el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$ (ver Figura 38)., "porque el doblez abarca desde el punto $\boldsymbol{B}$ hasta el paralelo central" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020); de lo anterior, se puede inferir que el "paralelo central" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), se refiere al punto medio de $\overline{\boldsymbol{EF}}$, no obstante, no es una definición clara de perpendicularidad y no justifica que allí se forme un ángulo recto.

Figura 38. *Triángulo formado a partir del taller de doblado de papel 1.*



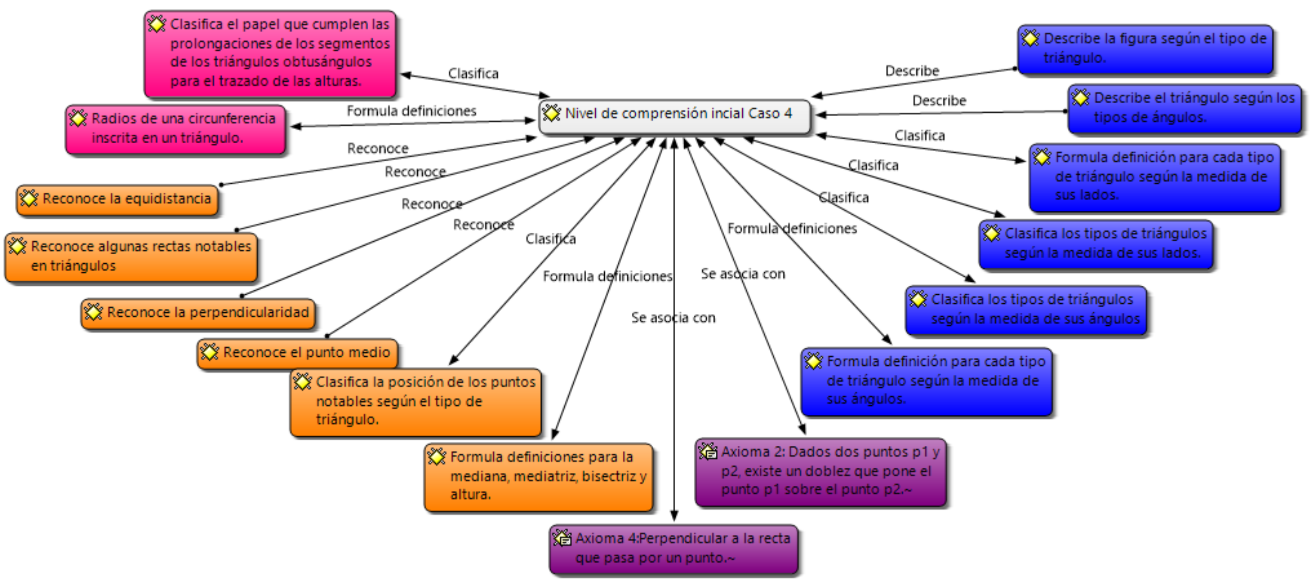
En este orden de ideas, el caso refiere que $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\boldsymbol{EBF}$ es una altura, puesto que "sale del segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$ en forma perpendicular hasta $\boldsymbol{B}$" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020). Al respecto, se puede decir que el caso intenta formular una definición para la recta notable nombrada, siendo este atributo, parte de las características del nivel 2.

Con relación al punto $\boldsymbol{A'}$, el caso describe algunas de sus características, por ejemplo, que "es un punto medio, porque el doblez que va sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$ de forma paralela generando una perpendicular y el punto medio $\boldsymbol{A'}$" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020). Según lo anterior, se puede inferir que, de manera superficial, el caso empieza a reconocer el lenguaje de los axiomas de Huzita empleados en el taller, puesto que para trazar la perpendicular de un segmento por medio del doblado de papel, se empieza a doblar el segmento sobre sí mismo, garantizando un ángulo recto.

Del mismo modo, el caso clasifica algunas características de las mediatrices cuando afirma que $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\boldsymbol{EBF}$, también "puede ser una mediana, bisectriz, o mediatriz [..]" (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020), sin embargo, expresa que esto debe ser porque es un triángulo isósceles, pero dice no tenerlo claro. Es por esto por lo que duda a la hora de establecer qué tipo de triángulo fue el construido: "en mis medidas es un triángulo isósceles, pero podemos decir que puede llegar a ser un equilátero” (Comunicación personal, 17 de octubre de 2020).

A continuación, se presenta la red resultante de los atributos identificados en el Nivel de comprensión inicial para el caso 4, esto es, a partir del cuestionario de saberes previos, del test y del primer taller de doblado de papel.

Figura 39. *Atributos identificados en el nivel de comprensión inicial del caso 4.*



A partir de la Figura 39, se puede decir que el caso reconoce conceptos relacionados con la perpendicularidad, la equidistancia y el punto medio; de la misma manera, clasifica algunas características de los triángulos relacionadas con sus rectas notables, definiéndolas en algunos casos, siendo la altura la recta notable más mencionada en durante los tres instrumentos. Asimismo, se evidenció que el caso 4 realiza descripciones elaboradas de los triángulos, a partir de la medida de sus lados y de sus ángulos.

Lo anterior, permite concluir, en primer lugar, que se cumple con la propiedad de recursividad, esto es, hay unos elementos implícitos en la comprensión de los conceptos, en este caso, puntos y rectas notables en triángulos, que se hacen explícitos a medida que se pasa de un nivel de compresión a otro (Jaime y Gutiérrez, 1991). En este sentido, los elementos explícitos del caso 4, son los atributos físicos de las figuras presentadas y contraídas en los distintos instrumentos y los elementos implícitos son aquellas propiedades matemáticas, de las cuales hay algunos indicios, pero que son débiles en algunas al momento de enunciarlas.

Asimismo, se observa que el lenguaje utilizado por el caso durante los tres encuentros estaba enfocado en conceptos puntuales y básicos como perpendicularidad, punto medio, equidistancia y no en las propiedades matemáticas de cada figura.

Se concluye entonces, que el caso 4, para los conceptos de puntos y rectas notables inicialmente, se encuentra en el nivel 1 de visualización y reconocimiento, esto es, puede reconocer los diferentes tipos de triángulos en diferentes contextos; identifica los triángulos equiláteros e isósceles a partir de su aspecto físico, medida de sus lados y ángulos; considera cada tipo de triángulo con propiedades independientes entre sí (Gutiérrez y Jaime, 1991).

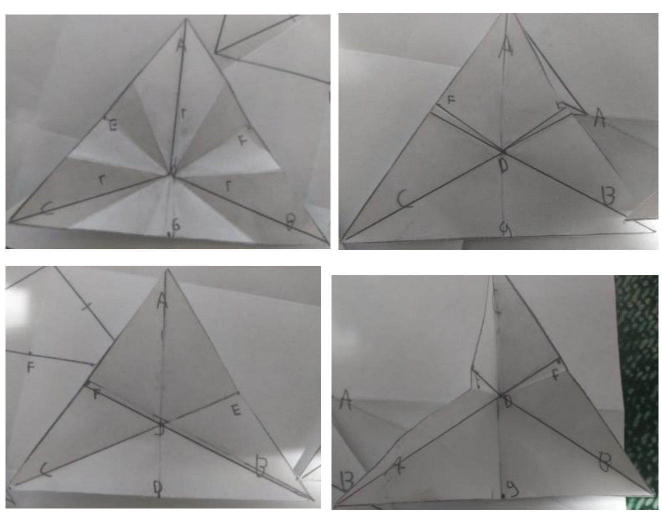
Finalmente, se espera que los atributos que se lograron avizorar de los niveles 2 y 3 sean desarrollados de manera explícita en los siguientes talleres.

4.4.2. Nivel de comprensión alcanzado para el caso 4

Iniciando con el segundo taller de doblado de papel, en el cual se realizó la construcción de las cuatro líneas notables en triángulos isósceles, a través de la geometría del doblado de papel que, además se planteó a partir de las indagaciones Concreta, Pictórica y Abstracta (CPA).

A continuación, se presentan las cuatro construcciones: mediatrices, medianas, bisectrices y alturas, respectivamente (Figura 40) del caso 4 en la indagación concreta.

Figura 40. *Construcciones realizadas por el caso 4: Taller de doblado de papel 2.*



En la indagación pictórica, el caso debe tomar los elementos que considere necesarios para identificar tanto características físicas como matemáticas en las cuatro construcciones, a partir de allí, este describe sus visualizaciones.

De lo anterior, se identificaron características de los niveles 1, 2 y 3, relacionadas con los atributos de reconocimiento, clasificación y uso de definiciones. En primer lugar, el caso realiza una descripción detallada de cada uno de los triángulos incluyendo aspectos físicos y matemáticos:

> Triángulo 1. Es isósceles porque hay dos segmentos iguales y uno diferente. La cercanía que tienen los puntos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ al $\boldsymbol{D}$ son iguales.
>
> Se forman tres triángulos, $\boldsymbol{DAB}$- $\boldsymbol{CDA}$- $\boldsymbol{CDB}$, dos triángulos son iguales mientras que el otro es diferente.
>
> Triángulo 2. Se forman tres triángulos, pero esta vez son iguales entre sí.
>
> Triángulo 3. El punto $\boldsymbol{D}$ es equidistante a $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$. El doblez del segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ es perpendicular, pero los otros segmentos no.
>
> Los dobleces son perpendiculares, no necesariamente parten del punto medio, porque no se llevan los vértices sobre sí mismos.
>
> Triángulo 4. Se forman 3 triángulos, los dos de arriba son más pequeños que los de abajo.
>
> El punto de intersección de los dobleces no es equidistante a los segmentos. (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020)

Según lo anterior, el caso 4, en este taller de doblado de papel, a partir del análisis que realizó de sus construcciones de manera detallada, estableció conclusiones importantes que logra desarrollar de una manera más explícita en la indagación abstracta, por mencionar algunas: la equidistancia del incentro $\boldsymbol{D}$ (triángulo 3) a los puntos $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$; la definición de punto medio a partir de la geometría del doblado de papel, axioma 4 de Huzita: ya que el caso reconoce que en un segmento al llevar un punto exactamente sobre el otro punto, se puede determinar el punto medio de dicho segmento y que se forma una perpendicular con el segmento.

En la indagación abstracta, el caso establece para el triángulo 1 que, de acuerdo con los dobleces realizados, por los vértices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ pasa una circunferencia que está por fuera del triángulo; de la misma manera, plantea que los radios de dicha circunferencia son los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$; posteriormente, establece la línea y el punto notable trazados: "logramos sacar las mediatrices del triángulo marcando así el circuncentro con la intersección de los dobleces" (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020).

Para los triángulos 2 y 4, de la misma manera, el caso reconoce la línea y el punto notable en cuestión, formulando definiciones para cada línea notable: “los dobleces que hicimos en el triángulo 4 nos permitieron sacar la altura del triángulo, estos son perpendiculares y van hasta el vértice opuesto” (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020) y nombra el punto de intersección de las alturas como el ortocentro; “en los dobleces que hicimos en el triángulo 2 nos encargamos de hacer que el punto medio terminara en el vértice opuesto, por lo que no son perpendiculares, entonces son las medianas” (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020), nombrando el punto de intersección como el baricentro.

Finalmente, para el triángulo 3, el caso refiere que por los puntos $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{G}$ pasa una circunferencia que se encuentra al interior del triángulo y que sus radios son los segmentos $\overline{\boldsymbol{DF}}$, $\overline{\boldsymbol{DE}}$ y $\overline{\boldsymbol{DG}}$, formulando la definición de los dobleces realizados, de la siguiente manera: “logramos doblar el papel de tal forma de sacar la mitad de los ángulos que a su vez permite que pueda haber la circunferencia inscrita” (Comunicación personal, 24 de octubre de 2020).

A partir de las respuestas proporcionadas por el caso en este taller de doblado de papel, se evidencia un avance en lenguaje para referirse a cada una de las construcciones realizadas, puesto que, a diferencia de los instrumentos anteriores, explicitó modos de comprender enfocados a aspectos matemáticos, esto es, pasó de indagaciones referidas solo a aspectos físicos, para verbalizar aspectos matemáticos de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos, es por esto por lo que se puede decir que, después de este taller, el caso se encuentra el nivel 2 de comprensión.

En el tercer taller de doblado de papel, se pretendía aplicar algunas de las líneas notables abordadas en el taller 2, en casos específicos como lo son triángulos rectángulos y obtusángulos. Dicho taller, se realizó a partir de las indagaciones del enfoque CPA, primero a partir lo concreto (el doblado de papel), seguido de la indagación pictórica (donde el caso toma su construcción e identifica propiedades, desdoblando, utilizando otros dobleces y dibujando sobre esta), finalmente, en la indagación abstracta (donde el caso matematiza las propiedades identificadas y las utiliza en situaciones puntuales).

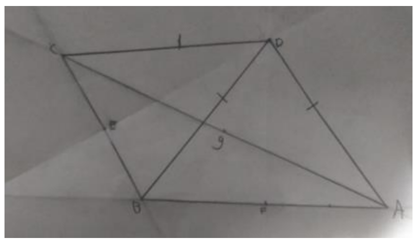
Es importante decir, que en este taller de doblado de papel específicamente, el caso 4 fue inconstante en su participación y las respuestas proporcionadas fueron poco detalladas.

En la indagación concreta, el caso realizó la construcción en dos pares de triángulos, las mediatrices y alturas respectivamente, a partir de una serie de pasos.

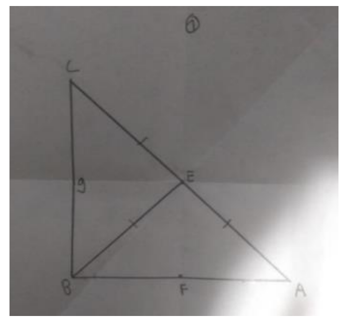
Con respecto a lo pictórico, se evidencia en la figura 41 que el caso enfatizó su indagación en las congruencias de los segmentos que surgieron a partir de cada línea notable trazada, así como también, relaciones de equidistancia. En este sentido, en el triángulo obtusángulo (Figura 41a) define que los segmentos, $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{BD}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$, son iguales; del mismo modo, en el triángulo rectángulo (Figura 41b), denotó los segmentos $\overline{\boldsymbol{AE}}$, $\overline{\boldsymbol{BE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CE}}$ como iguales.

Figura 41. *Construcciones realizadas por el caso 4: Taller de doblado de papel 3.*

a)



b)



En la indagación abstracta, se identificaron características con relación a los atributos del nivel 3. En primer lugar, el caso define el circuncentro del triángulo rectángulo refiriendo que "como es un triángulo rectángulo este hace que sus mediatrices se junten justamente en el punto medio del segmento hipotenusa" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020), tal como se observa en la figura 41b, donde el circuncentro es nombrado como $\boldsymbol{E}$ en la construcción. Con relación al triángulo obtusángulo, el caso refiere que, "como es un triángulo obtusángulo, el ángulo hace que las líneas notables salgan del triángulo y el punto de intersección sea exterior" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020). De la misma manera, el caso afirma que "la circunferencia que pasa por $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020), asimismo, nombra los radios de la circunferencia circunscrita en el triángulo rectángulo, los segmentos $\overline{\boldsymbol{AE}}$, $\overline{\boldsymbol{BE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CE}}$ y del triángulo obtusángulo, los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{BD}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$.

En segundo lugar, el caso clasifica el papel que cumplen las prolongaciones de los segmentos de los triángulos obtusángulos para el trazado de las alturas, del mismo modo, refiere que el ortocentro en un triángulo rectángulo "estará en el ángulo contrario a la hipotenusa, es decir, en el ángulo recto" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020) y en el triángulo obtusángulo, "por ser un triángulo en los que su ángulo está más abierto se puede ver como el ortocentro se va más allá, entre más abierto esté el triángulo (más sea el ángulo) este se sale del triángulo" (Comunicación personal, 31 de octubre de 2020).

En la entrevista de carácter socrático final, se identificaron atributos de los niveles 2 y 3; de la misma manera, se explicitaron los axiomas 2, 3 y 4 de Huzita en las respuestas proporcionadas por el caso.

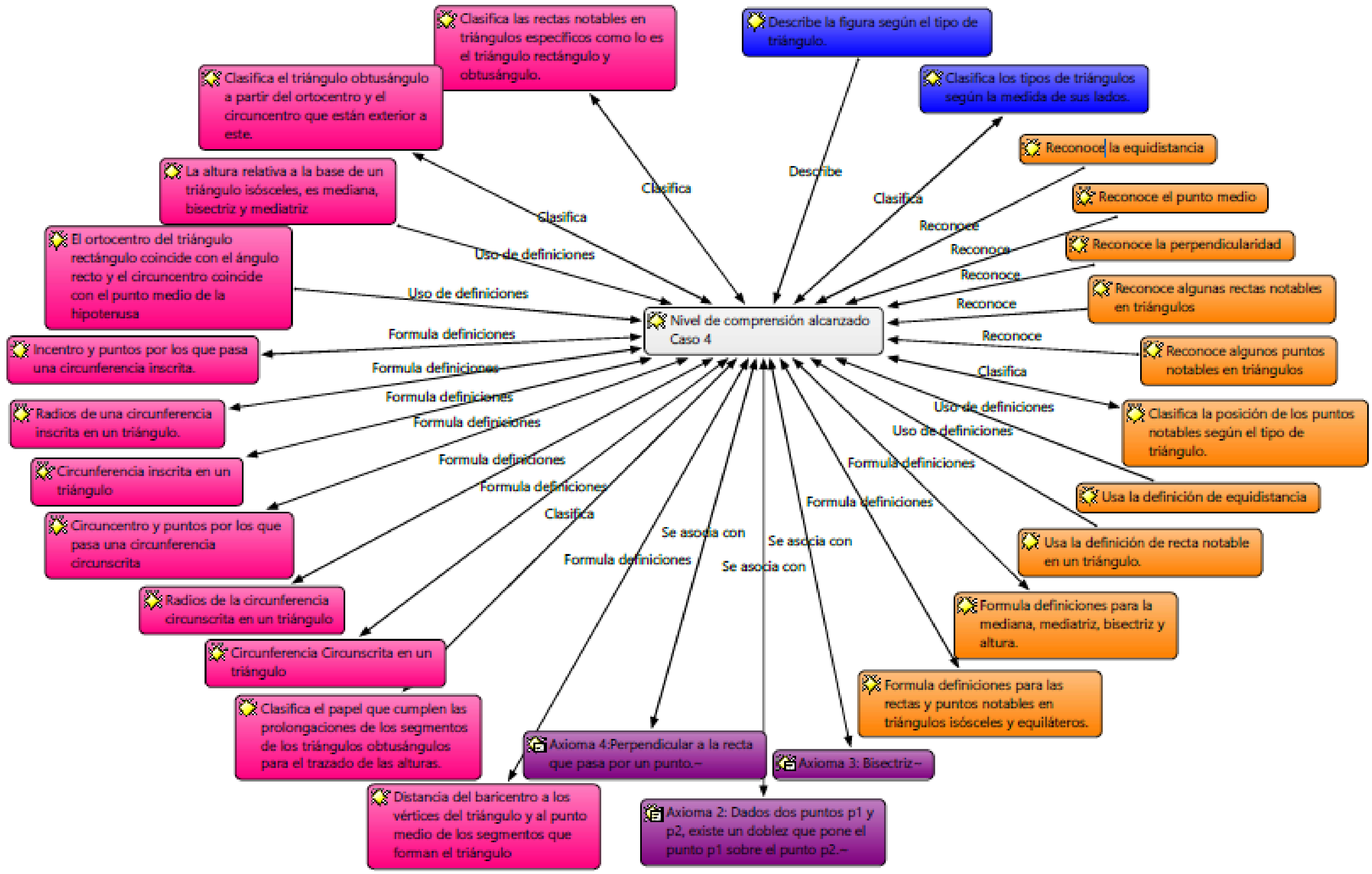
Por un lado, con relación a los axiomas de Huzita, el caso 4, para el axioma 2, refirió que el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se determina "llevando el punto $\boldsymbol{A}$ al punto $\boldsymbol{B}$" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020). Con relación al axioma 3; el caso menciona que para bisecar un ángulo doblando papel "se tendría que hacer un doblez desde el vértice $\boldsymbol{B}$ llevando el lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$ al lado $\overline{\boldsymbol{AB}}$" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020). Finalmente, para el axioma 4, el caso expresa que la relación que existe entre un doblez que parte desde el vértice $\boldsymbol{A}$, llevando sobre sí mismo el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$, es que "este segmento es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ porque este se dobló sobre sí mismo" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), de la misma manera, plantea que, al determinar el punto medio de un segmento, dicho doblez, es perpendicular al segmento, "porque […] va sobre sí mismo, y si va sobre sí mismo hace que directamente sea perpendicular al segmento" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020).

Por otro lado, con relación a las características identificadas en los atributos para los diferentes niveles de comprensión, en el nivel 2 el caso 4 reconoce los conceptos de perpendicularidad, equidistancia, punto medio; de la misma manera, reconoce los puntos de intersección de cada línea notable: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.

Finalmente, con respecto a las características del nivel 3 de comprensión, el caso identifica los radios de una circunferencia circunscrita en un triángulo, asimismo, refiere que la posición del circuncentro en un triángulo rectángulo, "por el ángulo recto nos permite que las mediatrices se encuentren en el punto medio de la hipotenusa" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020) y que en un triángulo obtusángulo "por la forma del ángulo hace que las mediatrices se salgan del propio triangulo y se encuentren mucho más lejos del triángulo" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020); además, para referirse a la relación entre el baricentro $\boldsymbol{J}$ del triángulo y las distancias de los vértices con los puntos de intersección de las medianas, el caso plante que "se puede decir que $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, están más lejos de $\boldsymbol{J}$ que $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{I}$" (Comunicación personal, 16 de noviembre de 2020), siendo la anterior, una propiedad del baricentro que establece que el segmento que se forma de la unión del baricentro con el vértice, mide el doble que el segmento que se forma al unir el baricentro con el punto medio del lado opuesto.

A continuación, se presenta la red, resultado del segundo y tercer taller de doblado de papel y de la entrevista de carácter socrático final, a partir del cual se puede concluir el nivel de comprensión alcanzado por el caso 4.

***Figura 42**. Atributos del nivel de comprensión alcanzado por el caso 4.*



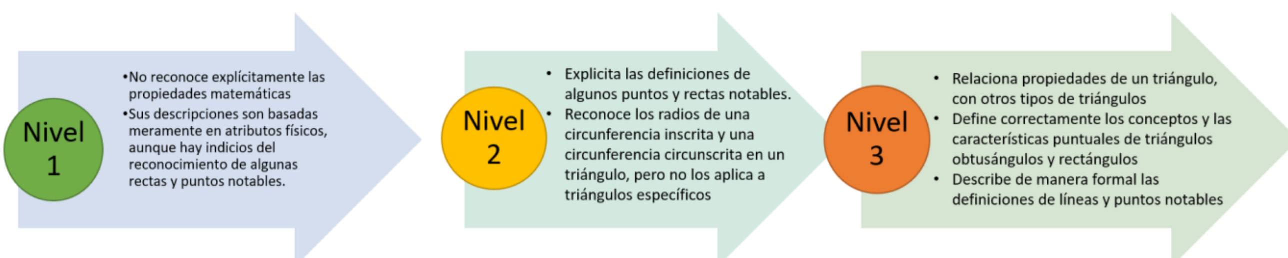
A partir de la Figura 42, se logra apreciar un avance en el nivel de comprensión del caso 4 con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. En el taller 2 se observa cómo el caso pasa del nivel 1 de reconocimiento y visualización, al nivel 2 de análisis y en el transcurso del taller 3 y de la entrevista de carácter socrático final, cómo el caso continúa en la evolución de su comprensión, esto es, allí relaciona propiedades de un triángulo, con otros tipos de triángulos (Jaime y Gutiérrez, 1993), dichas relaciones se descubren a partir del doblado de papel.

De la misma manera, el caso define correctamente los conceptos y las características puntuales cuando realiza la distinción entre los puntos notables en triángulos rectángulos y obtusángulos, extrayendo conclusiones de las construcciones realizadas, utilizando y formulando definiciones según el tipo de figuras; asimismo, cuando identifica el papel que cumplen las prolongaciones en los triángulos rectángulos para el trazado de las alturas; también se observa cómo el caso describe de manera formal las líneas y los puntos notables en cada triángulo.

Por todo lo anterior, el caso 4, alcanza un nivel 3 de clasificación.

En el gráfico, se muestra el paso por los tres niveles de comprensión del caso 4.

Gráfica 10. *Paso por los niveles de comprensión del caso 4.*



4.5. La Geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA, como una estrategia que coadyuva a la comprensión de conceptos geométricos

Los hallazgos de esta investigación permitieron establecer que, en el marco de los talleres de doblado de papel desarrollados a la luz de las tres indagaciones: Concreta- Pictórica- Abstracta, para los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos; los casos alcanzaron niveles de comprensión superiores con respecto al nivel de comprensión inicial indagado previamente. En este sentido, se propone el doblado de papel enmarcado en el enfoque CPA para la comprensión de conceptos geométricos en general.

Cabe destacar, que la geometría del doblado de papel es una estrategia que permite abordar diferentes conceptos, no solo geométricos, sino también matemáticos, a partir de la manipulación de papel. En este sentido, los estudiantes aprenden a partir del acto de doblar y desdoblar, es por esto, por lo que el enfoque CPA no es ajeno, por el contrario, coexiste en la medida que no solo se espere doblar papel, sino que también se busque representar eso que se dobló y posterior a ello, encontrar propiedades matemáticas que permitan al estudiante enfrentarse al algoritmo.

Así pues, para plantear la estrategia de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA, es necesario iniciar con los axiomas de Huzita, los cuales le permiten al estudiante apropiar los dobleces básicos de la geometría del doblado de papel, teniendo en cuenta que son necesarios a la hora de abordar los conceptos.

Posterior a ello, se plantea la planeación de clase atendiendo, en primer lugar, a las fases del modelo de Van Hiele, en cada momento se desarrollan las cinco fases (organización, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración), ya que todas estas se desarrollan en cada nivel de comprensión; y, en segundo lugar, a las indagaciones Concreta, Pictórica y Abstracta. En la Tabla número 9, se presenta una estructura que se puede seguir para la planeación de enseñanza de algún concepto geométrico, atendiendo a esta ruta metodológica:

Tabla 9. *Estructura de una ruta metodológica para la enseñanza de conceptos geométricos atendiendo al enfoque CPA y a la geometría del doblado de papel.*

Fase	Descripción	Indagación	Tiempo destinado
Fase 1 Organización	Allí se describe la temática geométrica, buscando indagar conocimientos previos; asimismo, se informa sobre los materiales y la duración de los talleres.	Concreta	2 sesiones de 1 hora
Fase 2 Orientación dirigida	En esta fase se inicia la exploración por medio de lo concreto, con el objetivo de que el estudiante tenga su primer acercamiento al concepto geométrico a abordar, se coloca el énfasis en la visualización y en la comparación de objetos, se enuncian características de manera informal. (Aravena y Caamaño, 2013).		
Fase 3 Explicitación	Es una buena oportunidad para propiciar el trabajo por equipos, allí los estudiantes pueden compartir		

	sus experiencias y visualizaciones de lo trabajado con el material concreto.		
Fase 4 Orientación libre Fase 5 Integración	El docente propone otras situaciones para que el estudiante continúe su indagación y pueda aplicar aquello que evidenció de sus demás visualizaciones. Se realiza una plenaria donde los estudiantes exponen su experiencia con el material manipulativo.		
Fase 1 Organización Fase 2 Orientación dirigida Fase 3 Explicitación Fase 4 Orientación libre Fase 5 Integración	El docente hace un encuadre, utilizando algunas preguntas que permitan retroalimentar la experiencia anterior con el material concreto. El maestro orienta los estudiantes para que identifiquen propiedades del concepto geométrico que se está trabajando, a partir de su experiencia sensorial y la compartidas por sus compañeros El estudiante plasma pictóricamente, ya sea en su cuaderno de notas o en un papelógrafo, lo construido con el material concreto; en este punto, puede dibujar sus construcciones, con el fin de puntualizar las propiedades expuestas en la fase anterior. El docente orienta el trabajo pictórico a partir de una clase expositiva, que le permita al estudiante ir relacionando sus dibujos con otras propiedades del objeto de estudio. Se realiza una plenaria donde todos los estudiantes comparten su experiencia pictórica.	Pictórica	2 sesiones de 1 hora
Fase 1 Organización Fase 2 Orientación dirigida Fase 3 Explicitación Fase 4 Orientación libre	El docente hace un encuadre, utilizando algunas preguntas que permitan retroalimentar las propiedades abordadas a partir de la indagación pictórica. Aquí a partir del trabajo por equipos, los estudiantes exploran el concepto geométrico que se está abordando desde la indagación concreta. A partir de las propiedades identificadas en el trabajo por equipos, se procede a establecer situaciones donde se aplique el concepto abordado, para esto, el docente orienta la parte abstracta, por medio de clases expositivas sobre el concepto geométrico. El docente orienta, para que los estudiantes planteen y resuelvan situaciones en las que está implicado el concepto geométrico que se desarrolló durante las sesiones de trabajo.	Abstracta	2 sesiones de 1 hora

Fase 5 Integración	En esta parte del trabajo, se condensan las experiencias (concretas, pictóricas y abstractas) con el fin de que el estudiante sintetice los conceptos abordados. Esta fase también permite que se establezcan actividades de mejora en aquellos estudiantes que no alcanzaron el dominio conceptual geométrico esperado.	

Plantear una estrategia educativa que se enmarque en este enfoque toma en consideración la inclusión, puesto que se tienen en cuenta los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje, donde se atienden necesidades de toda la población estudiantil, probablemente un estudiante requerirá más de la parte concreta para comprender los conceptos abordados, otro necesitará mayor orientación a la hora de identificar lo que surge en los dobleces realizados, otro, por el contrario, necesitará que el maestro proporcione más herramientas abstractas, pues no necesita de la parte concreta y pictórica. Asimismo, el enfoque CPA y la geometría del doblado de papel no requieren de insumos de altos costos, es por esto por lo que está dirigido a todo tipo de estudiante, desde la educación básica, hasta la educación media.

5. Conclusiones

En esta investigación se implementó la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA del método Singapur como posibilidad para la comprensión de conceptos geométricos, pues, a partir de la revisión de literatura, se logró establecer que el componente geométrico-métrico presenta dificultades en el contexto colombiano.

Es así, como se construyó el marco referencial, partiendo de la necesidad de desarrollar una propuesta que permitiera describir el nivel de comprensión de los estudiantes y que, a su vez, brindara orientaciones para lograr la evolución de dicha comprensión; en este sentido, se integró una estrategia para la enseñanza de la geometría que se integrara con el enfoque CPA, implementado en el contexto donde se llevó a cabo la investigación. Así, se abordó el modelo de Van Hiele, a partir del cual se logró describir la evolución de los procesos de pensamiento y comprensión de los casos con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos; y la aplicación de sus fases, permitió la adquisición de nuevas habilidades de comprensión que favorecieron los procesos de aprendizaje y de comprensión de dichos conceptos.

Se logró establecer que el nivel de comprensión inicial de cada caso sobre los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos era el nivel 1, de visualización y de reconocimiento, atendiendo a los atributos distintivos de cada nivel y a sus propiedades, dicho nivel establece que las figuras se reconocen de manera global a partir del tamaño, la posición, etc. Lo que se corresponde con el objetivo de indagar por el nivel de comprensión inicial que tienen los estudiantes sobre los conceptos puntos y rectas notables en triángulos.

Los casos, reconocieron los triángulos propuestos en cada instrumento, a partir de sus características y propiedades físicas; además, conceptos relacionados con la perpendicularidad, la equidistancia y el punto medio; clasificaron algunas características de los triángulos relacionadas con sus rectas notables. Asimismo, se logró evidenciar destreza para identificar y describir los diferentes tipos de triángulos, refiriendo algunas propiedades matemáticas de estos. Del mismo modo, los casos clasificaron los triángulos a partir de sus características físicas, esto a partir de sus visualizaciones.

Así, el caso 1, reconoció los triángulos presentados en los dos instrumentos, a partir de sus propiedades físicas, sin embargo, se lograron avizorar atributos del nivel 2 de forma implícita como la formulación de definiciones de algunas características de las rectas notables. Pese a lo anterior, con el siguiente instrumento aplicado, el caso logró alcanzar el nivel 2 de comprensión, donde reconoció las diferentes rectas notables en triángulos isósceles y equiláteros, formulando definiciones para los diferentes puntos notables, de la misma forma, hubo algunos elementos implícitos del nivel 3, que se lograron explicitar con los demás instrumentos.

El caso 2, comparó, ordenó y clasificó los triángulos a partir de sus características físicas, basado únicamente en sus visualizaciones sin reconocer las propiedades matemáticas; sin embargo, al igual que el caso 1, con el siguiente taller de doblado de papel, logró alcanzar el nivel 2, pues formuló definiciones simples de las rectas notables, reconociendo y nombrando a su vez, los puntos notables, de la misma manera, realizó algunas conclusiones a partir de características matemáticas.

El caso 3 por su parte, usó propiedades imprecisas de los triángulos para compararlos, ordenarlos, describirlos e identificarlos, siendo sus descripciones basadas meramente en atributos físicos sin reconocer de manera explícita las propiedades matemáticas.

El caso 4, no reconoció las explícitamente las propiedades matemáticas, ya que sus descripciones estaban basadas meramente en atributos físicos, no obstante, hubo indicios del reconocimiento de algunas rectas notables. Empero, con la implementación de los demás instrumentos, el caso pudo explicitar características del nivel 2, por ejemplo, la utilización de algunas definiciones de puntos y rectas notables en triángulos; asimismo, reconoció los radios de una circunferencia inscrita y una circunferencia circunscrita en un triángulo, pero sin aplicarlo a triángulos específicos.

Se observó, la evolución en los niveles de comprensión para cada uno de los casos, con respecto al nivel de comprensión inicial. De modo que, los casos 1, 2 y 4, alcanzaron el nivel de comprensión 3 de clasificación, esto es, reconocen propiedades de las rectas y puntos notables en los triángulos; asimismo, el lenguaje utilizado para referirse a dichas propiedades es matemático; clasifican rectas notables en triángulos a partir específicos como los son obtusángulos y rectángulos; utilizan y formulan definiciones según el tipo de figura; utilizan representaciones físicas para verificar sus deducciones; describen de manera formal las definiciones de líneas y puntos notables; entre otras.

El caso 3 alcanzó el nivel 2 de análisis, donde, las figuras están dotadas de propiedades matemáticas, pero no establece relación entre ellas; describe parte de las figuras, enunciando algunas propiedades; enunciaba un listado de propiedades de manera implícita.

Finalmente, este trabajo investigación, a partir de los hallazgos, plantea una ruta metodológica que permite describir las posibilidades que ofrece la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA, para la comprensión de conceptos geométricos, los hallazgos posibilitaron la descripción de dicha ruta metodológica desde el enfoque CPA, para la enseñanza de la geometría utilizando el doblado de papel, que permita la comprensión de conceptos geométricos en general.

Con relación a los diferentes aportes de esta investigación: Para la educación matemática, esta investigación puede ser un aporte, puesto que, en la revisión de literatura no se lograron encontrar investigaciones que, en el campo de la geometría, sean desarrolladas con el enfoque CPA del método Singapur; de la misma manera, que relacionen este enfoque educativo con la geometría del doblado de papel. Conviene destacar entonces, que puede ser un gran insumo para la educación en tanto que las investigaciones recientes sobre el método Singapur, se centran en resolución de problemas, siendo el componente geométrico fundamental en nuestro currículo.

A nivel nacional, en la ciudad de Barraquilla se reporta la primera experiencia del Método Singapur, implementado en 150 colegios a través de asesorías y capacitación de maestros. Algunos países como Finlandia, Sudáfrica, Brunei, Tailandia, Libia, Australia, India y Estados Unidos han adoptado este método en sus escuelas, apoyados por los libros de texto asiáticos. A nivel latinoamericano, Chile aparece como pionero al implementar el Método Singapur a través de un programa piloto liderado por el Ministerio de Educación de este país y en colaboración con el Centro Félix Klein de la USACH.

En este sentido, esta investigación también es un aporte metodológico al colegio donde se llevó a cabo la investigación, pues este se encuentra en el proceso de apropiación del método Singapur en su plan de estudios, ya que, en el año 2019 en el proceso de renovación curricular, el Colegio adopta el Método Singapur con miras a fortalecer los procesos y habilidades matemáticas de los estudiantes, mediante la capacitación de los maestros y la compra de material concreto.

Para la formación de maestros en educación matemática, puede ser un aporte, ya que el enfoque CPA permite abordar los conceptos atendiendo a los ritmos y las formas de aprendizaje de cada estudiante, ya que es un enfoque visual, donde los estudiantes interactúan con los conceptos, antes de saberlos.

Algunas las posibles preguntas o caminos que deja abiertos para futuras investigaciones pueden ser, pueden ser:

- ¿Cómo abordar conceptos geométricos, estadísticos y aritméticos desde el enfoque CPA del método Singapur, en la licenciatura de matemáticas de la universidad de Antioquia?
- ¿Cómo diseñar de guías didácticas en matemáticas de 1° a 5° grado, a partir de las fases del modelo de Van Hiele y el enfoque CPA?
- La propuesta de un seminario de doblado de papel enmarcado en el enfoque CPA, para conceptos básicos de la geometría.
- La propuesta de un diplomado en metodología de enseñanza de matemáticas de Singapur: Modelo de barras y números conectados para la resolución de problemas.

6. Referencias

Águila, C. A. (2012). *Uso y aplicación de Cabri II plus para mejorar el aprendizaje de la trigonometría* [Tesis de Maestría, Tecnológico de Monterrey]. Repositorio TEC. https://repositorio.tec.mx/handle/11285/632299

Angulo, G. L., Castillo, J., y Niño, S. (2016). *Propuesta de implementación del método Singapur para enseñar las matemáticas en niños de segundo de primaria en el gimnasio los arrayanes* [trabajo de especialización Universidad de La Sabana]. Repositorio universidad de la Sabana. http://hdl.handle.net/10818/22966

Aravena, M., y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática RELIME*, *16(2)*, 139-178 https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621

Araya, R. G., y Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *XIV(2),* 125–142. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194115606010

Atnafu, M. (2018). Mathematics teachers' responses and perceptions on paper folding activities in teaching mathematics. *Bulgarian Journal of Science & Education Policy*, 12(1), 101–122. https://bit.ly/2UEzBxK

Ávila, M. Z. (2019). El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello. *Revista Del Instituto de Estudios En Educación y Del Instituto de Idiomas, Universidad Del Norte*, *(30)*, 33–62. https://bit.ly/3i5WLoG

Barrantes, Balletbo, y Fernández. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 14 (54)*, 1–14. https://www.coursehero.com/file/51263399/54pdf/

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*. Vols. 12 al 16. Número extraordinario, 67-87.

Bohórquez, L. (2004). Sobre las formas efectivas de incorporar el software cabri-geometrie en la enseñanza de conceptos geométricos en el bachillerato. *Revista de Estudios Sociales*, *(19)*, 106–109. https://bit.ly/2ULmhre

Bruner, J. (1980). *Sobre el desarrollo cognitivo*. Pablo del Río, Editor, S.A.

Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, *(32)*, 4–8. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Cano, Z. S., Flórez, M. E., y Zapata, A. H. (2017). *El doblado de papel en la comprensión de algunas características de los triángulos en estudiantes de grado octavo* [tesis de maestría, Universidad de Medellín]. Repositorio Institucional UdeM. https://repository.udem.edu.co/handle/11407/4650

Chine-Culture. (2020). Dobleces básicos. Recuperado el 22 de octubre de 2020, de Chine-Culture: http://www.chine-culture.com/es/origami/dobleces-b%C3%A1sicos.php

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria Ciencia. Arte y Humanidades*, (14), 61–71.

Ley 115. Ley 115 de 1994. (1994, 08 de febrero). Congreso de la República de Colombia. Ley General de Educación. https://bit.ly/3edxIyZ

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruíz, E., (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE.

De la Torre, H., y Prada, A. (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría* [ponencia]. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking*. 95–126. Springer.

Etcheverry, N., Reid, M., y Botta, R. (2009). Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (17)*, 102–116.

Ezquerro, M. (2014). Uso de GeoGebra en la enseñanza de geometría analítica en 4 o de la ESO [Tesis de Maestría, Universidad Internacional de La Rioja]. Re-UNIR repositorio digital https://reunir.unir.net/handle/123456789/2428

Fernández, H., Gamboa, M., Rodríguez, M., y Díaz, O. (2016). La Geometría Asistida por Geogebra. *Boletín Virtual, (5)*2–9.

Fernández, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Estudios Pedagógicos (Valdivia), 42(1),* 87–105. https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics. 24(2),* 139–162.

Fonseca, R., Hernández, R., y Mariño, L. (2017*). Enfoque CPA en la resolución de problemas para el aprendizaje de fracciones mediante el uso de software matemático* [ponencia]. II Encuentro Internacional En Educación Matemática, Universidad Francisco de Paula Santander. 78–88.

Fuentes, N. M., Portillo Wilches, J. C., y Robles, J. R. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama, 9(16),* 44–54. https://doi.org/10.15765/pnrm.v9i16.635

Fuster, J. L., y Villar, M. P. (2015). Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte (45),* 113–128. https://bit.ly/3i8ZyOe

Galeano, M. E. (2012). *Estudio cualitativo de caso: el interés por la singularidad*. En Estrategias de investigación social cualitativa, el giro en la mirada. Medellín: La Carreta Editores.

Galeano, J. E. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento* [Tesis de Maestría, Universidad del Valle]. Repositorio digital Univalle http://hdl.handle.net/10893/9457

Gamboa, R., y Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática, 0(5),* 113–136.

García, H. A. (2014). *Diseño e implementación de un módulo de aprendizaje como apoyo para la transición de la aritmética al álgebra. Análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín]. Repositorio Unal https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/51764

George, W. (2017). Bringing van Hiele and Piaget Together: A Case for Topology in Early Mathematics Learning. *Journal of Humanistic Mathematics, 7(1),* 105–116.

Guber, R. (2011). *La etnografía: Método, campo y reflexividad.* (1.ª ed) Veintiuno editores.

Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: “de la revolución cognitiva” a la “revolución cultural.” *EDUCERE Ideas y Personajes,* (44), 235–241.

Gutiérrez, L. (2017). *Modelo didáctico para la enseñanza - aprendizaje de conceptos de geometría utilizando la herramienta GeoGebra* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNAL https://bit.ly/3yPBk1V

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed) MC Graw Hill/ Interamericana Editores S.A. de C.V.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2018). *Guía de orientación Saber 11.° para instituciones educativas*. https://bit.ly/2TbOK9y

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* [tesis doctoral, Universit de Valéncia]. Repositorio Institucional https://bit.ly/3wAR1sr

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015, 03 de septiembre). *A model of test design to assess the van Hiele levels* [conferencia]. Pme 18 Conference. 41–48.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En Linares, S. y Sánchez, M. (Eds), *Teoría y práctica en educación matemática*, 295-384. Sevilla: Alfar. https://bit.ly/3xOIh3v

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación matemática 3(2),* 49 – 65.

Jaramillo, C., y Campillo, P. (2001). Propuesta teórica de entrevista Socrática a la luz del Modelo de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*(1), 65–84.

Jaramillo, C., y Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía, 18(45),* 110–118. https://acortar.link/s4OytW

Lang, R. J. (2004). Origami and geometric constructions. *Merrimack.Edu*, 1–6. http://langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. [Tesis de Maestría, Universidad de Chile]. Repositorio académico de la Universidad de Chile. https://bit.ly/3hyyKYh

Londoño, R. (2017). Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. *Logos Ciencia & Tecnología*, *9(2)*, 121–133. https://doi.org/10.22335/rlct.v9i2.451

Marcos, M., y Meza, P. (2015). *Aplicación de software cabry Geometry 2D y 3D en el aprendizaje de la geometría en el área de matemática de los estudiantes del 5° grado de secundaria en la Institución Educativa José de La Torre Ugarte Ugel.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle "Alma Máter del Magisterio Nacional"]. Repositorio Institucional http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/357

Martínez, X. (2017). *La papiroflexia como estrategia didáctica para desarrollar las nociones básicas de geometría en los niños de cuarto y quinto de primaria de una institución educativa de carácter privado en la ciudad de Bucaramanga* [tesis de licenciatura, Universidad Santo Tomás Bucaramanga]. Repositorio Institucional UST. https://repository.usta.edu.co/handle/11634/13/discover

Mazo, O., y Suárez, V. (2009). *Las relaciones intrafigurales e interfigurales de los cuadriláteros: rectángulo, paralelogramo y rombo* [tesis de licenciatura, Universidad de Antioquia]. Repositporio Institucional UdeA https://bit.ly/3hwoksm

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemàtica: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime*, *6*, 221–271.

Ministerio de Educación de Singapur. (2012). Mathematics Syllabus Primary One to Six. https://bit.ly/3wBWrn4

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie de Lineamientos curriculares Matemáticas*. https://bit.ly/2VrTAA2

Ministerio de Educación Nacional. (2006a). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.

Ministerio de Educación Nacional. (2006b). *Estándares De Matemáticas* https://bit.ly/3r60hng

Ministerio de Educación Nacional. (2016a). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*.

Ministerio de Educación Nacional. (2016b). *fundamentacion teorica de los DBA (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional. (2020, 16 de marzo). *Circular No. 020.*

Miranda, N. (2011). *Caracterización del uso de las TIC en la enseñanza de los puntos notables de los triángulos* [tesis de maestría, Universidad Nacional]. Repositorio Institucional UNAL https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9080

Monsalve, O., y Jaramillo, C. (2002). El placer de doblar el papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 10-25. https://bit.ly/3hwozUi

Moriena, S., y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática, 15(1),* 5–19. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515101

Ochoa, M. (2020, 16 de agosto). Pensar, prueba de articulación por procesos. *Milton Ochoa – Expertos en Evaluación*. https://bit.ly/3i2sW8z

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2007). *El programa PISA de la OCDE qué es y para qué sirve*. http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Palamakumbura, S. (2013). The mathematics of origami. *Mathematical Spectrum*, *46*(1), 12–17. https://doi.org/10.1.1.574.6604

Parra, M., y Briceño, I. (2013). Aspectos éticos en la investigación cualitativa. *Enf Neurol (Mex)*, *12*(3), 118–121. https://bit.ly/3xCqKLG

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9(3),* 7–11.

Quintero, O. L. (2014). *Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana* [ponencia]. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires, Argentina.

Rasmussen, M. (2016). Thinking Creatively about Teaching Geometry A Teacher's Guide to Using GeoGebra in Elementary School. *GeoGebra* 1–26.

Restrepo, E. (2018). *Etnografía Alcances, técnicas y éticas* (1.ª ed.) Fondo Editorial de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Fondo.

Reyes, L. E., y Rodríguez, F. M. (2014). *Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico* [ponencia] XVIII Simposio de Investigación En Educación Matemática, Universidad Autónoma de Guerreto. 543–551.

Rico, J. G., y Vaquero, E. F. (2009). *Construcción de las rectas y puntos notables del triángulo por medio del programa matemático carMental* [tesis de licenciatura, Universidad Industrial de Santander]. https://doi.org/10.18860/ling.v5i1.609

Rodriguez, J. (2005). La investigación acción educativa ¿Qué es? ¿Cómo se hace?. Lima: DOXA.

Rodríguez, G., y Hoyos, V. (2009). Funcionalidad de juegos de estrategia virtuales y del software Cabri-géomètre II en el aprendizaje de la simetría en secundaria. Investigación En Educación Matemática XIII, 4(4), 463–472.

Royo, J. I. (2002). Matematicas Y Papiroflexia. *Sigma* N° 21. 175–192.

Sánchez, J. (2017). *Estudio de las líneas notables de los triángulos utilizando geometría dinámica para potenciar los niveles de razonamiento geométrico* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/62222

Santa, Z. M. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele* [tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional UdeA. https://bit.ly/3xwou8F

Santa, Z., y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte,* 338–362. http://origami.ousaan.com/library/conste.html

Santa, Z. M., y Jaramillo, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, (41)*, 45–60.

Santa, Z. M., Jaramillo, C. M., y de Carvalho, M. (2015). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, 46*, 154–168.

Sarrín, M. (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. *Educación (10199403), 28(54),* 127–158. https://doi.org/10.18800/educacion.201901.007

Stake, R. (1999). *Investigación sobre estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2)*, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Taylor, H. (2015). Conceptual Transformation and Cognitive Processes in Origami Paper Folding. *Journal of Problem Solving, 8*, 2–22. http://10.0.30.91/1932-6246.1154

Tieng, P. G., & Eu, L. K. (2018). Effect of Phase-based Instruction Using Geometer's Sketchpad on Geometric Thinking Regarding Angles. *Pertanika Journal of Social Sciences & Humanities, 26(1),* 329–343.

Tórres, C., y Racedo, D. (2014*). Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad de la Costa]. Repositorio Universidad de la Costa http://hdl.handle.net/11323/1284

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17(1),* 5–32.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos: Revista de La Facultad de Educación de Albacete, 2006(21),* 35–50.

Van Hiele, P. (1990). *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* [tesis de doctorado, Universidad Real de Utrecht]. (Original publicado en 1989).

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27(1),* 74–94.

Wang, S., & Kinzel, M. (2014). How do they know it is a parallelogram? Analysing geometric discourse at van Hiele Level 3. *Research in Mathematics Education, 16(3)*, 288–305. http://10.0.4.56/14794802.2014.933711

Wares, A. (2014). Problem solving through paper folding. *Australian Senior Mathematics Journal*, *28(2),* 60–63.

7. Anexos

Anexo 1: Consentimiento informado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN MATEMÁTICA GRUPO DE INVESTIGACIÓN: EDUMATH. EDUCACIÓN, MATEMÁTICA E HISTORIA	PROYECTO DE TESIS DE MAESTRÍA. “COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE TRIÁNGULOS MEDIANTE EL USO DE LA GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL ENMARCADA EN EL ENFOQUE CPA” ESTUDIANTE LISET XIOMARA GIRALDO MUÑOZ[7] DIRECTORA DRA. LUZ ESTELA MEJÍA ARISTIZÁBAL

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES[8]

El propósito de este documento es proveer a los/as participantes de una explicación sobre la naturaleza de la propuesta de trabajo, así como su rol en ella.

.

A quien interese

Yo ________________________________ identificado(a) con C.C. ____________ de __________ acepto de manera voluntaria que mi hijo(a) ____, participe en algunos talleres de doblado de papel, que les permita comprender los conceptos de puntos y rectas notables, y que brinde información mediante entrevistas, que se llevarán a cabo durante las sesiones de los talleres, en el marco del proyecto de tesis maestría “**Comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos mediante el uso de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA”** a cargo de la estudiante de maestría Liset Xiomara Giraldo Muñoz en el marco de la línea de investigación, “Educación matemática” de la maestría en Educación-Universidad de Antioquia Sede Medellín.

1. La información aportada quedará registrada en audio y vídeo para facilitar su transcripción respetando la intención y contexto de la información cedida.
2. Las respuestas a las entrevistas serán codificadas usando un seudónimo o número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

[7] Correo: liset.giraldo@udea.edu.co.
[8] La base de este formulario de consentimiento informado se tomó del proyecto “Las propuestas de conocimiento escolar en ciencias naturales en las orientaciones curriculares de la Secretaría de Educación de Bogotá (2007-2015). Proyecto de Investigación. Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico. Universidad Distrital Francisco José de Caldas”

3. Se eliminará de cualquier dato o nombre del material obtenido, que pueda permitir el reconocimiento de la identidad de la persona entrevistada.
4. Los datos se utilizarán como información para el desarrollo del proyecto de tesis de maestría antes mencionado. Si quisiera hacerse uso de esta información para cualquier otro fin, se pediría su autorización expresa.

He sido invitado(a) a participar en el proyecto de tesis de maestría " **Comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos mediante el uso de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA "**, *entiendo que mi participación consistirá en conceder entrevistas a la autora de la tesis de maestría, acerca de mis modos de comprender los conceptos a trabajar en los talleres de doblado de papel, los cuales serán acordados con antelación. He leído (o se me ha leído) la información del documento de consentimiento. He tenido tiempo para hacer preguntas y se me ha contestado claramente. No tengo ninguna inquietud sobre mi participación.*

Acepto voluntariamente participar y sé que tengo el derecho a hacer preguntas en cualquier momento con el fin de aclarar alguna duda; si alguna de las preguntas durante la entrevista me parece incómoda, tengo el derecho de hacérselo saber a la autora de la tesis de maestría o de no responderla, así como de terminar mi participación en cualquier momento.

Firmado en ____________ a los ______ días del mes de __________ de _________

Xiomara Giraldo G.

_______________________________ _______________________________

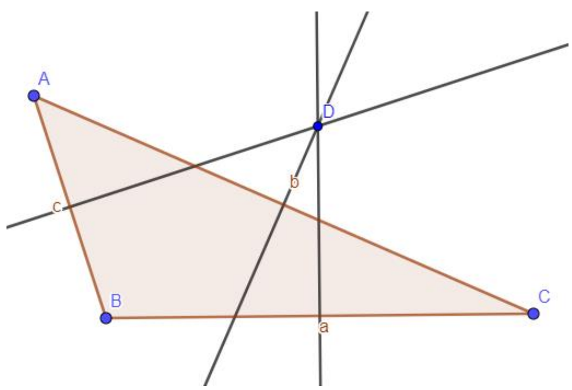
Acudiente *Investigadora y entrevistadora*

Anexo 2: Cuestionario de saberes previos

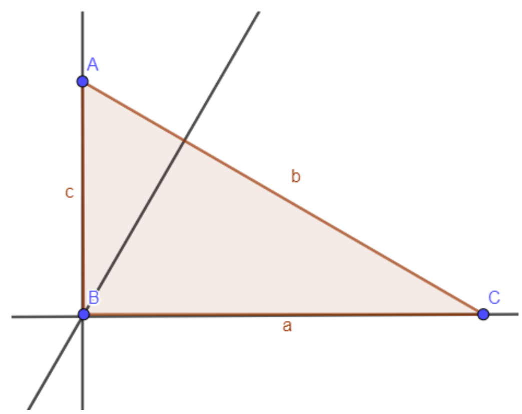
Fase 1: Información

Cuestionario de saberes previos

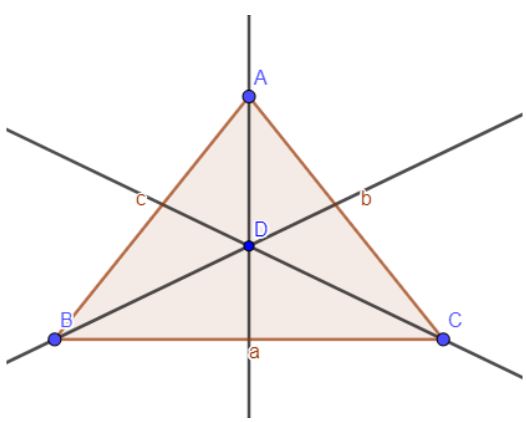
Apreciado estudiante: A continuación, se presenta un conjunto de preguntas, las cuales debes responder a partir de las cuatro figuras presentadas. Te solicito responderlas con toda la sinceridad con respecto a los conocimientos que poseas sobre geometría. Es de vital importancia que escribas todo aquello que se te ocurra al respecto y que no dejes ítems en blanco, en el caso de no responder alguno, escribe el motivo. Agradezco de antemano tu valioso aporte para esta investigación



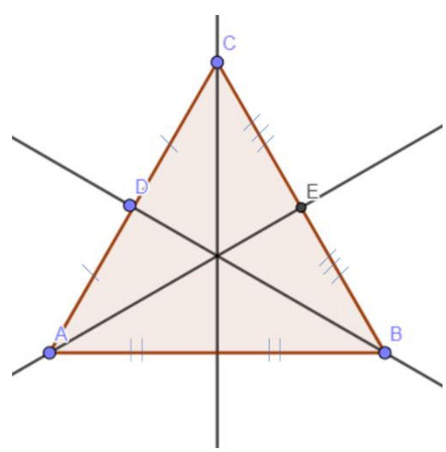
a)



b)



c)



d)

1. Describe las características físicas de las figuras anteriores

2. Identifica y describe las propiedades matemáticas que se encuentran en las figuras
3. Define las propiedades matemáticas que se encuentran en las figuras
4. Si conoces teoremas que se pueden deducir de alguna de las figuras, defínelos
5. Define las características físicas del punto 1 de este cuestionario (para cada una de las figuras)
6. Define un conjunto de propiedades que aplique para todas las figuras.
7. Clasifica las figuras, basándote únicamente en sus características físicas.
8. Clasifica las figuras, basándote únicamente en sus características matemáticas.
9. Propón figuras que cumplan con las propiedades matemáticas de las figuras dadas. Explica cada una de ellas

Anexo 3: Test

Fase 1: Información

TEST[9]

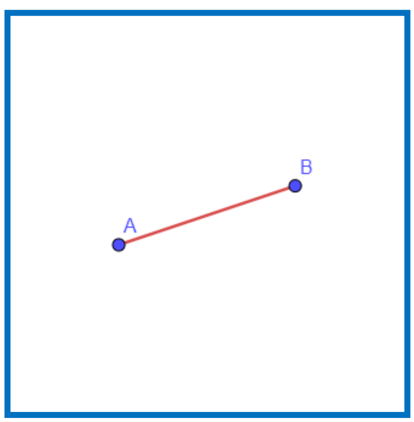
Instrucciones

El presente test tiene como objetivo identificar el nivel de comprensión inicial con respecto a los conceptos de puntos y rectas notables en triángulos. Para ello es indispensable que elijas solo una de las opciones propuestas que van desde el literal a, hasta el literal e, siendo este último "ninguna de las anteriores", el cual se recomienda elegir sólo en el caso que no se entienda la pregunta y se considere que la respuesta no se encuentra entre las opciones.

Asimismo, es importante no pasar de pregunta sin responder la anterior, puesto que se proporcionan algunos "aportes de información" que servirán para respuestas posteriores.

Muchas gracias, tu participación es muy importante para esta investigación.

1. Mediante el doblado de papel, ¿cómo determinarías el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ trazado en la hoja? (Santa, 2011)

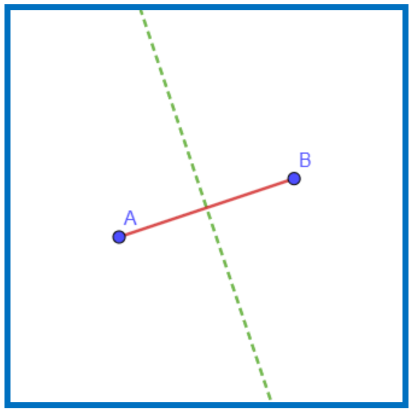


a) Llevando un lado del cuadrado exactamente sobre el otro lado.
b) Sí es posible determinar el punto medio con el doblado de papel, pero no sabría cómo hacerlo.
c) Llevando el punto A exactamente sobre el punto B.
d) Con el doblado de papel no es posible encontrar el punto medio de un segmento.

[9] Las preguntas 1 a la 6, fueron tomadas y modificadas con respecto a los propósitos de la presente investigación de: La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele [tesis de maestría, Universidad de Antioquia] (2011).

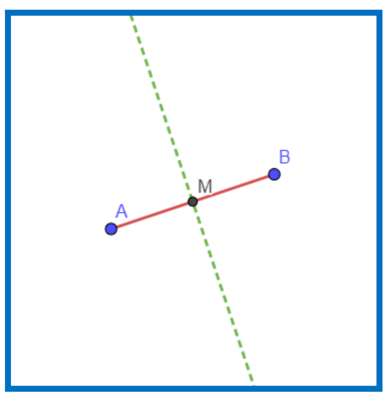
e) Ninguna de las anteriores.

2. Si se lleva el punto A exactamente sobre el punto B, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento que une los dos puntos? (Santa, 2011)



a) El doblez y el segmento se intersecan en un punto.
b) El doblez hecho pasa por el punto medio del segmento.
c) Los extremos del segmento están a igual distancia del doblez hecho.
d) El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento.
e) Ninguna de las anteriores.

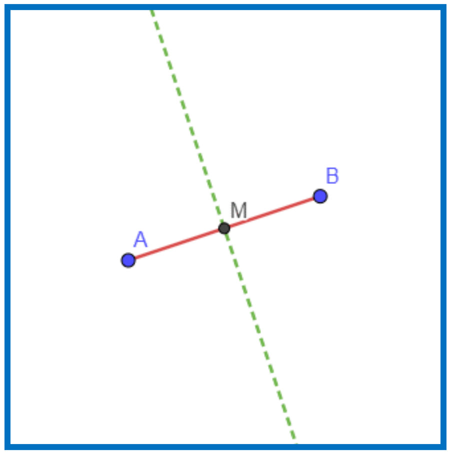
3. De acuerdo con la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AM}}$ y $\overline{\boldsymbol{MB}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011)



a) Tienen la misma medida porque $\boldsymbol{M}$ es el punto medio del segmento.
b) Tienen medidas diferentes porque sólo se llevó el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$.
c) Los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ están a la misma distancia del punto $\boldsymbol{M}$.
d) La medida del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se divide en dos partes.

e) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Crees que el doblez que se hace cuando se lleva el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$ es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011)

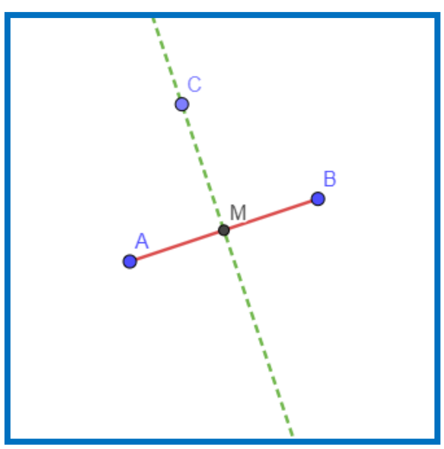


a) Sí, porque forman entre sí un plano cartesiano.
b) No, porque no forman ángulos de 90°.
c) Sí, porque al intersecarse forman ángulos de 90°.
d) No, porque se cortan en el punto medio.
e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

Las mediatrices son definidas como las perpendiculares trazadas desde el punto medio de un segmento.

5. Considera un punto $\boldsymbol{C}$, diferente del punto medio $\boldsymbol{M}$, sobre la mediatriz del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011)



a) Son iguales, porque cuando llevo el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$, coinciden.

b) El punto $\boldsymbol{C}$ siempre está a la misma distancia del punto medio $\boldsymbol{M}$.

c) Son iguales porque el punto $\boldsymbol{C}$ está en la mitad del segmento $\boldsymbol{AB}$.

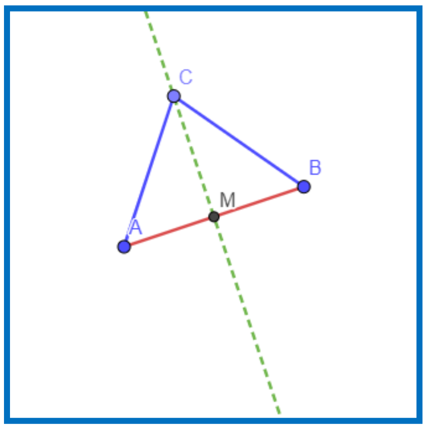
d) Son iguales porque siempre se forma un triángulo.

e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

La equidistancia es definida como la igualdad de distancia entre dos o más puntos.

6. ¿Cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos? ¿Por qué? (Santa, 2011)



a) Sí, porque siempre se forma un triángulo.

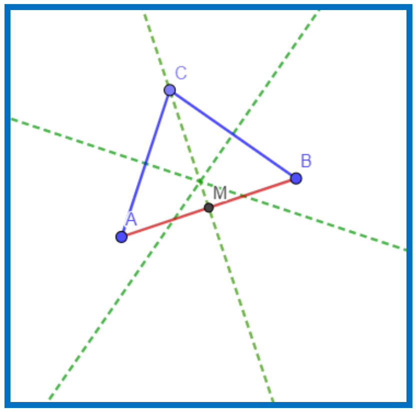
b) No, sólo algunos puntos equidistan de los extremos del segmento.

c) Sí, porque las distancias, desde los extremos del segmento a un punto cualquiera de la mediatriz, son iguales.

d) Sí, porque es un punto que pertenece a la mediatriz y ésta pasa por el punto medio del segmento.

e) Ninguna de las anteriores.

7. Si se lleva el punto $\boldsymbol{A}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{C}$, y el punto $\boldsymbol{B}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{C}$, de tal forma que se tracen las mediatrices de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?

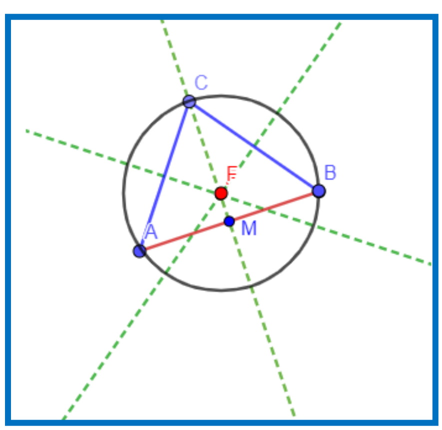


a) Los dobleces y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$se intersecan en un punto, respetivamente.
b) Los dobleces hechos pasan por los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
c) Los extremos de cada segmento están a igual distancia de los dobleces hechos respectivos.
d) Los dobleces hechos pasan perpendicularmente por los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

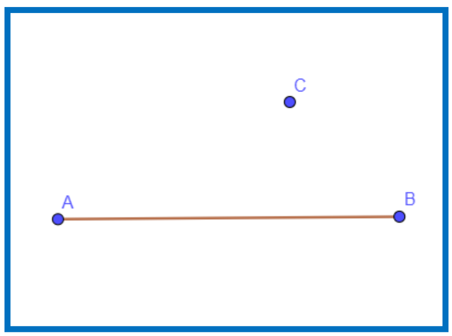
El circuncentro es el punto donde se intersecan las mediatrices de un triángulo, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

8. El punto de intersección de las tres mediatrices es el centro de una circunferencia, tal como se muestra en la figura, ¿qué puedes decir acerca de los vértices del triángulo?



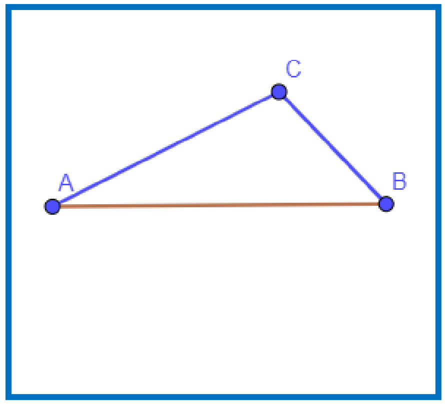
a) Los vértices hacen parte de la circunferencia, solo porque se trata de un triángulo isósceles.
b) Los vértices equidistan del centro, es decir, son parte de los radios de dicha circunferencia.
c) Los vértices equidistan del centro de la circunferencia, solo porque se trata de un triángulo isósceles.
d) Los vértices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ equidistan del centro de la circunferencia, pero el vértice $\boldsymbol{C}$ no equidista del centro de la circunferencia.
e) Ninguna de las anteriores.

9. Considera un punto $\boldsymbol{C}$, exterior al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, como se muestra en la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$? ¿Por qué?



a) Son iguales, porque cuando llevo el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$, coinciden.
b) El punto $\boldsymbol{C}$ siempre está a la misma distancia de los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.
c) Son diferentes porque el punto $\boldsymbol{C}$ no pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$.
d) Son diferentes porque se forma un triángulo escaleno.
e) Ninguna de las anteriores.

10. Si unes los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, se forma un triángulo, ¿qué puedes decir acerca del tipo de triángulo que se forma?



a) Es un triángulo rectángulo porque el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ forma un ángulo de 90° con el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$.

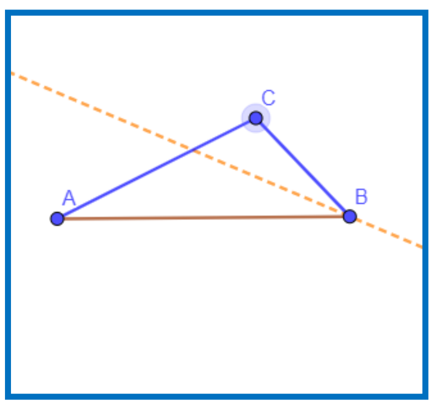
b) Es un triángulo isósceles porque el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ es igual al segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$.

c) Es un triángulo escaleno, ya que todos los segmentos que lo componen son de diferente longitud.

d) Es un triángulo isósceles, ya que el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ tiene igual longitud al segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.

e) Ninguna de las anteriores.

11. Se dobla el papel de forma que se lleva el segmento AB sobre el segmento AC, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los ángulos que se forman? ¿Por qué?



a) Son iguales, porque cuando hago coincidir las líneas que forman el ángulo $\boldsymbol{A}$, el doblez divide el ángulo en dos exactamente.

b) Son iguales porque el doblez es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.

c) Son iguales porque el doblez pasa exactamente por la mitad del segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.

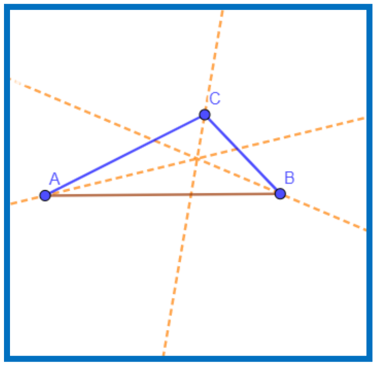
d) Son iguales porque siempre se forman dos triángulos.

e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

La bisectriz es la semirrecta que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales.

12. Se dobla el papel de forma que se biseque el ángulo $\boldsymbol{B}$ y el ángulo $\boldsymbol{C}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?

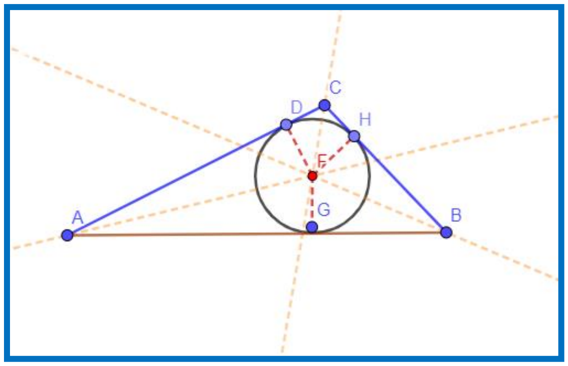


a) Los dobleces y los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ se intersecan en sus puntos medios, respetivamente.
b) Los dobleces se intersecan entre sí.
c) Los extremos de cada segmento están a diferente distancia de la intersección de los dobleces hechos, respectivamente.
d) Los dobleces hechos pasan perpendicularmente por los puntos medios de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{AC}}$y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ respectivamente.
e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

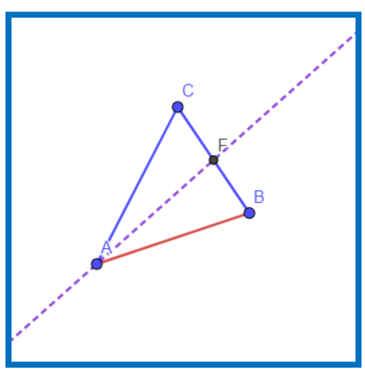
- El incentro es el punto donde se intersecan las bisectrices de un triángulo, además, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.
- La distancia de un punto a una recta (a un doblez) es perpendicular.

13. El punto de intersección de las tres bisectrices es el centro de una circunferencia, tal como se muestra en la figura, ¿qué puedes decir acerca de las distancias $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{D}$ del incentro, a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$ respectivamente?



a) Los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ se encuentran a una mayor distancia del centro de la circunferencia que el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$.
b) La distancia del centro de la circunferencia a cada uno de los segmentos es la misma, son radios de dicha circunferencia.
c) Al ser un triángulo escaleno, no hay relación entre los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{BC}}$, $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y la circunferencia.
d) No es posible determinar relaciones entre los segmentos y el centro de la circunferencia, por tratarse de un triángulo escaleno
e) Ninguna de las anteriores.

14. Se realiza un doblez que parta del vértice $\boldsymbol{A}$ y que pase por el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$, ¿cómo harías para determinar dicho punto?



a) Se dobla el papel de forma que coincidan los segmentos que forman el ángulo $\boldsymbol{A}$.
b) Sí es posible determinar el punto medio con el doblado de papel, pero no sabría cómo hacerlo.
c) Llevando el punto $\boldsymbol{B}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{C}$.

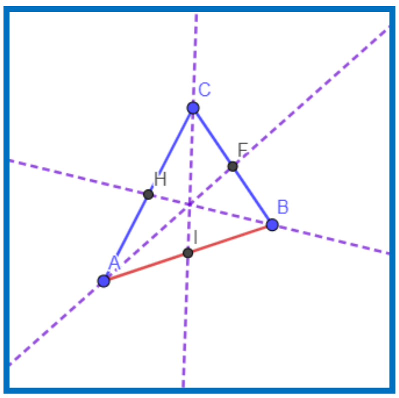
d) Con el doblado de papel no es posible encontrar el punto medio de un segmento.

e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

La mediana es un segmento de recta que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto del vértice.

15. Se doblan las medianas de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



a) Los dobleces y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en sus puntos medios, respetivamente.

b) Los dobleces se intersecan entre sí en un punto específico al interior del triángulo.

c) Los puntos A, B y C están a diferente distancia de los dobleces hechos, respectivamente.

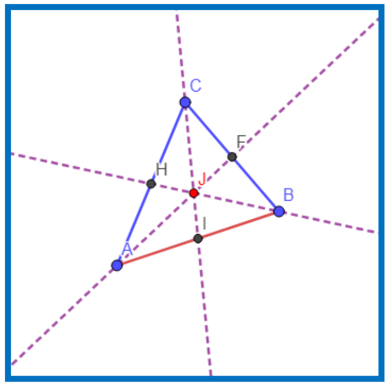
d) Los dobleces hechos pasan perpendicularmente por los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

El baricentro es el punto donde se intersecan las medianas de un triángulo. Asimismo, es el centro de gravedad del triángulo

16. ¿Qué relación encuentras entre el baricentro J del triángulo ABC y las distancias de los puntos A, B y C con los puntos F, H e I?



a) Los tres vértices se encuentran a la misma distancia del baricentro.

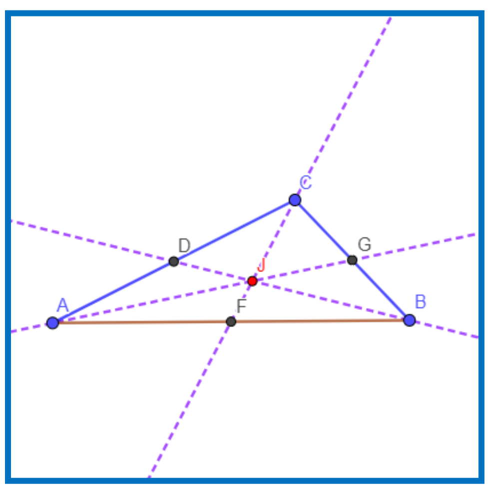
b) Los puntos medios de cada segmento se encuentran a la misma distancia del baricentro.

c) Los vértices se encuentran a una mayor distancia del baricentro que los puntos medios de los segmentos.

d) Los puntos medios de los segmentos se encuentran a una mayor distancia del baricentro que los vértices.

e) Ninguna de las anteriores.

17. En el caso de las medianas en otro tipo de triángulo ¿Qué relación encuentras entre el baricentro $\boldsymbol{J}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ y las distancias de los puntos A, B y C con los puntos $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}$ y F?



a) Los tres vértices se encuentran a la misma distancia del baricentro.

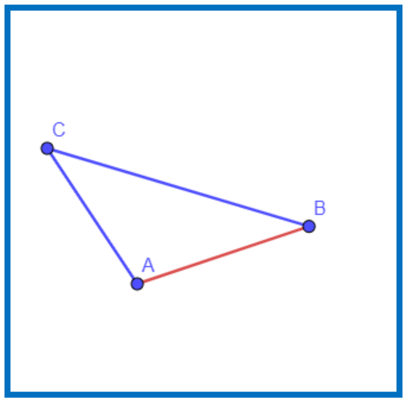
b) Los puntos medios de cada segmento se encuentran a la misma distancia del baricentro.

c) Los vértices se encuentran a una mayor distancia del baricentro que los puntos medios de los segmentos.

d) Los puntos medios de los segmentos se encuentran a una mayor distancia del baricentro que los vértices.

e) Ninguna de las anteriores.

18. Si cambias de posición el punto $\boldsymbol{C}$ en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, como se muestra en la figura, ¿qué puedes decir acerca del tipo de triángulo que se forma?



a) Es un triángulo rectángulo porque el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ forma un ángulo de 90° con el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$.

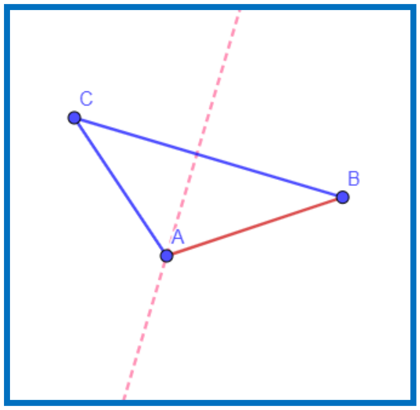
b) Es un triángulo acutángulo porque todos los ángulos son agudos.

c) Es un triángulo obtusángulo porque el ángulo $\boldsymbol{A}$ es obtuso.

d) Es un triángulo acutángulo porque el ángulo $\boldsymbol{B}$ y el ángulo $\boldsymbol{C}$ son agudos.

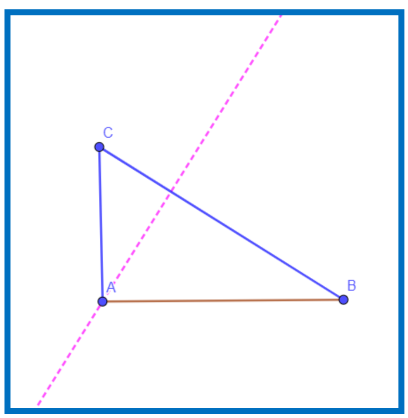
e) Ninguna de las anteriores.

19. Se realiza un doblez que parte del vértice $\boldsymbol{A}$, llevando el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$?



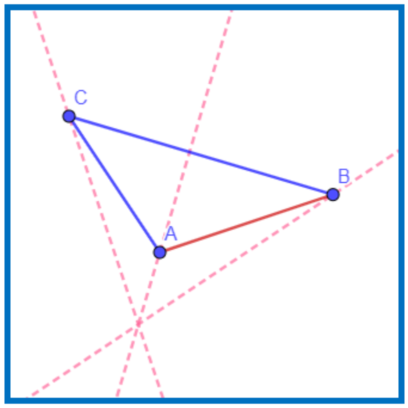
a) El doblez y el segmento se intersecan en un punto.
b) El doblez hecho es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.
c) Los extremos del segmento están a igual distancia del doblez hecho.
d) El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento.
e) Ninguna de las anteriores.

20. En el caso de otro tipo de triángulo, se realiza un doblez que parte del vértice $\boldsymbol{A}$, llevando el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$?



a) El doblez y el segmento se intersecan en un punto.
b) El doblez hecho es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.
c) Los extremos del segmento están a igual distancia del doblez hecho.
d) El doblez hecho pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento.
e) Ninguna de las anteriores.

21. Las líneas punteadas que parten de los vértices $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ representan los dobleces realizados, ¿son perpendiculares a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$, respectivamente? ¿Por qué?

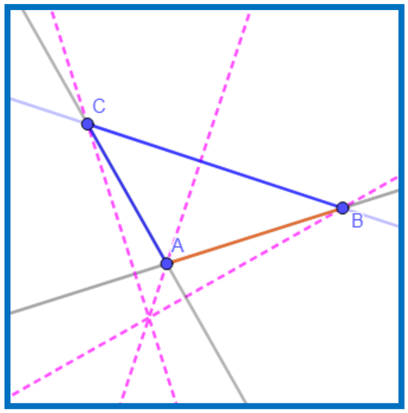


a) Las líneas punteadas son perpendiculares a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$, respectivamente, porque se trata de un triángulo obtusángulo.
b) No es posible determinarlo.
c) Las líneas punteadas son perpendiculares a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$, pero no es posible determinarlo por medio del doblado de papel.
d) Las líneas punteadas son perpendiculares a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$, porque al prolongar dichos segmentos, respectivamente, las líneas punteadas forman ángulos rectos con estas prolongaciones.
e) Ninguna de las anteriores.

Aporte de información:

La altura de un triángulo es un segmento perpendicular a un lado, que va desde el vértice opuesto a este lado (o a sus prolongaciones). Las tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro.

22. Ha sido posible trazar las alturas en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, gracias a las prolongaciones de algunos de sus lados, lo cual permite visualizar las perpendiculares de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$, respectivamente. ¿Qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



a) Los dobleces y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en sus puntos medios, respetivamente.

b) Los dobleces se intersecan entre sí en un punto específico del triángulo.

c) Los dobleces se intersecan en un punto específico, pero doblando papel no es posible determinarlo.

d) Los dobleces se intersecan en un punto externo del triángulo por tratarse de un triángulo obtusángulo.

e) Ninguna de las anteriores.

Anexo 4: Primer taller de doblado de papel

Fase 1: Información

Taller 1: Construcción de un triángulo doblando papel		
Objetivo	Identificar aspectos físicos y algunas propiedades matemáticas en un triángulo, resultado de aplicar la geometría del doblado de papel.	
Materiales	Hoja de papel sin rayas (se pueden utilizar hojas de block iris) Elementos como lápiz, regla, compás (opcionales).	
Indicador de lo Concreto	**Indicador de lo Pictórico**	**Indicador de lo Abstracto**
Se espera que los casos realicen la construcción de un triángulo cualesquiera.	Se espera que los casos establezcan relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados y que las comuniquen. Asimismo, identifiquen propiedades matemáticas producto de los dobleces realizados.	Se espera que los casos, identifiquen matemáticamente el tipo de triángulo que se construyó y los tipos de ángulos involucrados

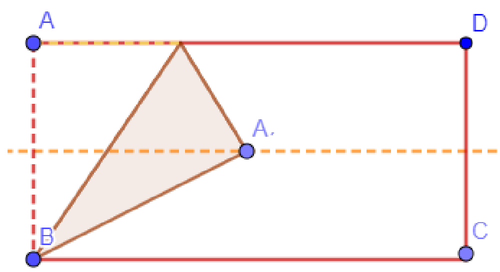
Apreciado estudiante, el presente taller consta de tres momentos: la indagación concreta, donde se realizará la construcción de un triángulo cualesquiera por medio del doblado de papel; la indagación pictórica, que tiene como fin, desdoblar y describir aspectos físicos y que tengan que ver con algunas propiedades matemáticas que se identifiquen y, finalmente, la indagación abstracta, donde se realizan unas preguntas de corte matemático con respecto a las construcciones.

Es importante que te tomes el tiempo tanto para la construcción como para responder las preguntas y que no dejes preguntas en blanco

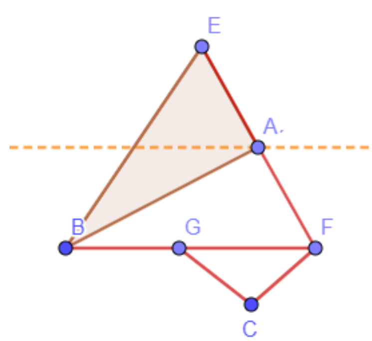
Indagación Concreta

1. Toma una hoja de papel, marca dos puntos A y B. Luego lleva el punto A sobre el punto B exactamente.

2. Con un doblez que pase por el punto ***B*** lleva ***A*** el doblez que se formó en el punto anterior.



3. Sin desdoblar la figura anterior, con un nuevo doblez, dobla el lado más corto del triángulo, prolongándolo.



Indagación Pictórica

Toma los elementos que consideres necesarios, por mencionar algunos: lápiz, regla, compás, entre otros.

Luego toma tu construcción e identifica:

1. Características físicas (tipo de triángulo, relaciones entre sus lados con respecto a los dobleces realizados, tamaño, entre otros que puedas identificar).
2. Características matemáticas (ángulos, relaciones de perpendicularidad, relaciones de equidistancia, entre otras propiedades que puedas identificar

Indagación Abstracta

1. ¿Dónde ha ido a parar el punto $\boldsymbol{D}$? Explica
2. ¿Qué ángulo forma $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ con el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$? ¿Por qué?
3. ¿Qué es $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\Delta\boldsymbol{EBF}$? Explica
4. ¿Qué es $\boldsymbol{A'}$ en el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$? ¿Por qué?
5. ¿Qué es también $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ en el triángulo $\Delta\boldsymbol{EBF}$? Explica
6. Por ser $\overline{\boldsymbol{BA'}}$ esas dos cosas ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo $\Delta\boldsymbol{EBF}$ con base en el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$? Explica
7. Según lo anterior, ¿cómo son los ángulos $\widehat{\boldsymbol{EBA}}'$ y $\widehat{\boldsymbol{FBA}}'$? ¿por qué?
8. Si te devuelves al segundo paso de construcción (puedes desdoblar) ¿qué puedes decir del al ángulo $\widehat{\boldsymbol{EBF}}$ con respecto al ángulo $\widehat{\boldsymbol{B}}$?
9. Según lo anterior ¿cuánto mide el ángulo $\widehat{\boldsymbol{EBF}}$? Explica
10. Y por ser equilátero el triángulo $\Delta\boldsymbol{EBF}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{EF}}$ ¿Cuánto miden respectivamente los ángulos $\widehat{\boldsymbol{EBF}}$ y $\widehat{\boldsymbol{BFE}}$? Explica

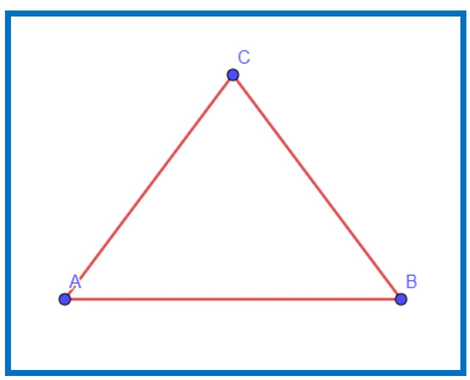
Anexo 5: Segundo taller de doblado de papel

Fase 2: Orientación dirigida

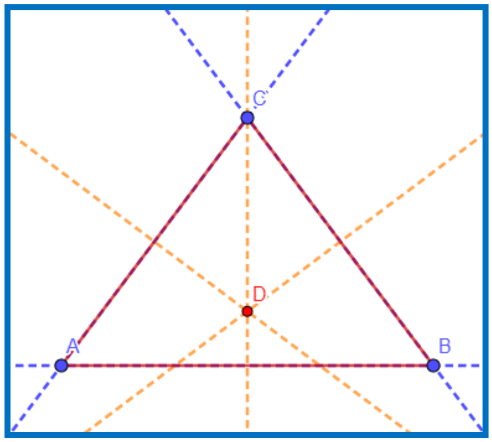
Taller 2: Construcción de líneas notables doblando papel en triángulos isósceles		
Objetivo	Construcción de líneas notables en triángulos isósceles	
Materiales	Cuatro hojas de papel sin rayas (se pueden utilizar hojas de block iris) Elementos como lápiz, regla, compás (opcionales).	
Indicador de lo Concreto	**Indicador de lo Pictórico**	**Indicador de lo Abstracto**
Se espera que los casos realicen las construcciones propuestas de mediatriz, mediana, bisectriz y altura.	Se espera que los casos establezcan relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados y que las comuniquen. Asimismo, que diferencien los puntos notables que surgen en cada construcción.	Se espera que los casos diferencien el circuncentro del incentro, asimismo que deduzcan algunas propiedades de los puntos y rectas notables para triángulos isósceles.

<u>Indagación concreta:</u>

1. Toma 4 hojas, dibuja un triángulo isósceles (ABC) en cada una, luego enumera cada triángulo del 1 al 4 y recórtalo.

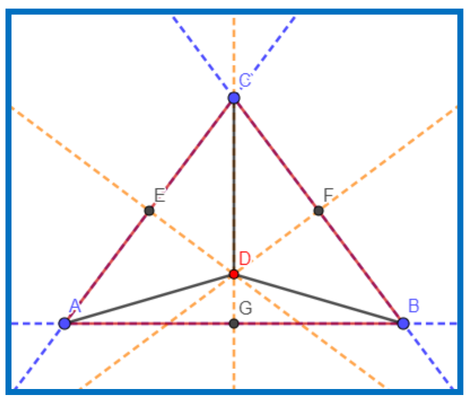


2. Toma el triángulo 1 y realiza los siguientes dobleces:
   a) Haz coincidir el punto $\boldsymbol{A}$ con el punto C
   b) Haz coincidir el punto B con el punto C
   c) Haz coincidir el punto A con el punto B



d) Toma un lápiz y traza un segmento que vaya desde el vértice C, hasta el punto D

e) Realiza lo anterior, desde el vértice A hasta el punto D y desde el Vértice B hasta el punto D.



f) Dobla en forma de valle (hacia adentro, ver figura 1) los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$

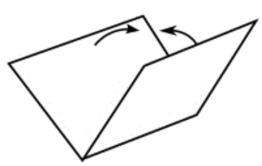


Figura 43: doblez en valle. Recuperado de (Chine-Culture, 2020)

g) Dobla en forma de colina (hacia afuera, ver figura 2) los segmentos $\overline{\boldsymbol{ED}}$, $\overline{\boldsymbol{FD}}$ y $\overline{\boldsymbol{GD}}$

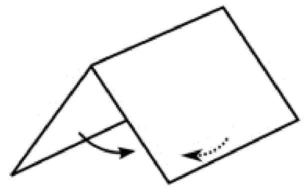
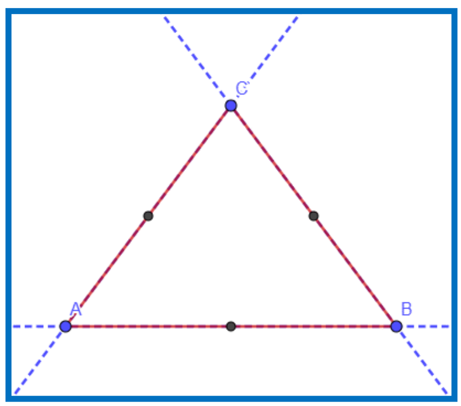


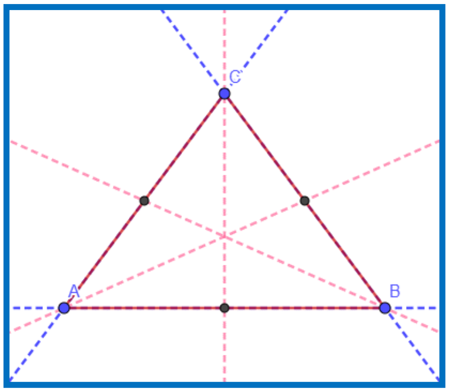
Figura 44: doblez en colina. Recuperado de ((Chine-Culture, 2020)

Obteniendo así una estrella de tres puntas que es posible cerrar juntando los tres brazos, comprobando que los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ son iguales. Siendo *D* el centro de una circunferencia.

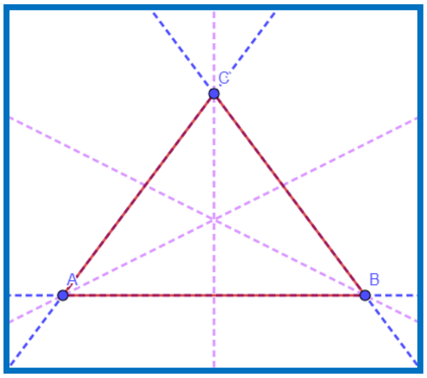
3. Toma el triángulo 2 y realiza los siguientes dobleces:
   a) Haz coincidir el punto A con el punto *C*, pero esta vez, sólo marca un pequeño doblez en el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$
   b) Realiza el paso anterior, con los segmentos $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$



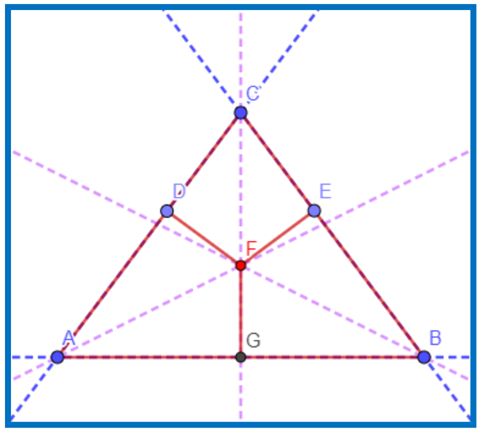
   c) Realiza un doblez que una la marca realizada el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ con el vértice opuesto a este, es decir con el vértice *B*
   d) Realiza el paso anterior con los segmentos $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$



4. Toma el triángulo 3 y realiza los siguientes dobleces:
   a) Realiza un doblez que ponga exactamente el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$
   b) Realiza un doblez que ponga exactamente el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$
   c) Realiza un doblez que ponga exactamente el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$



   d) Haz resbalar el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre sí mismo sin marcar, marcamos cuando aparezca el punto *F*, sin perder la guía del segmento, marca el doblez desde *F* hasta dicho segmento.
   e) Repite la acción con los otros dos segmentos $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$



f) Dobla en forma de colina (hacia afuera) los segmento $\overline{\boldsymbol{CF}}$, $\overline{\boldsymbol{AF}}$ y $\overline{\boldsymbol{BF}}$

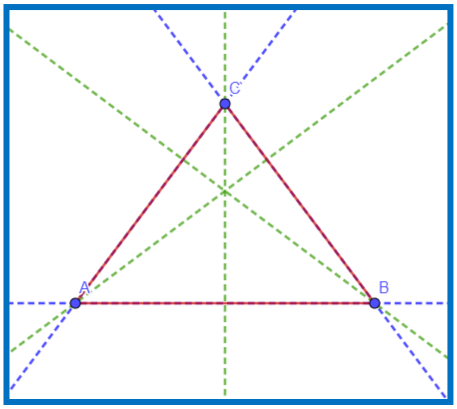
g) Dobla en forma de valle (hacia adentro) los segmentos $\overline{\boldsymbol{DF}}$, $\overline{\boldsymbol{EF}}$ y $\overline{\boldsymbol{GF}}$

5. Toma el triángulo 4 y realiza los siguientes dobleces:

a) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *B*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *B*.

b) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *A*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *A*.

c) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *C*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *C*.



Indagación Pictórica:

Toma los elementos que consideres necesarios, por mencionar algunos: lápiz, regla, compás, entre otros.

Luego toma tus construcciones e identifica:

3. Características físicas (relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados; tipo de triángulo isósceles, es decir, si es un triángulo isósceles rectángulo o un triángulo isósceles obtusángulo; entre otras que puedas identificar).
4. ¿Qué puedes concluir de los dobleces realizados en los 4 triángulos?
5. Características matemáticas (relaciones de perpendicularidad, relaciones de equidistancia, entre otras propiedades que puedas identificar).

Fase 3: Explicitación

Indagación Abstracta:

1. Define matemáticamente los dobleces realizados en el triángulo 1.

2. En el triángulo 1, se estableció que los segmentos $\overline{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y $\overline{\boldsymbol{BD}}$ son iguales y que $\boldsymbol{D}$ es el centro de una circunferencia ¿Por cuáles puntos pasa la circunferencia? Explica

3. ¿Está la circunferencia dentro o fuera del triángulo? Explica

4. ¿Cuáles son los radios de dicha circunferencia?

5. Define matemáticamente los dobleces realizados en el triángulo 3.

6. En el triángulo 3, se estableció que los segmentos $\overline{\boldsymbol{DF}}$, $\overline{\boldsymbol{EF}}$ y $\overline{\boldsymbol{GF}}$ son iguales y que $\boldsymbol{F}$ es el centro de una circunferencia ¿por cuáles puntos pasa dicha circunferencia?

7. ¿Está la circunferencia dentro o fuera del triángulo? Explica

8. ¿Cuáles son los radios de dicha circunferencia?

9. Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué diferencias y/o similitudes encuentras entre los dobleces realizados en el triángulo 1 y los dobleces realizados en el triángulo 3?

10. ¿Qué nombre recibe el punto que es el centro de una circunferencia inscrita en un triángulo?

11. Explica la pregunta anterior con una de las construcciones realizadas

12. ¿Qué nombre recibe el punto que es el centro de una circunferencia circunscrita en un triángulo?

13. Explica la pregunta anterior con una de las construcciones realizadas

14. Define matemáticamente los dobleces realizados en el triángulo 2.

15. ¿Qué nombre recibe el punto donde se intersecan los dobleces del triángulo 2?

16. Define matemáticamente los dobleces realizados en el triángulo 4.

17. ¿Qué nombre recibe el punto donde se intersecan los dobleces del triángulo 4?

18. En el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ de los triángulos 1, 2, 3 y 4 ¿Qué relación encuentras en los dobleces?

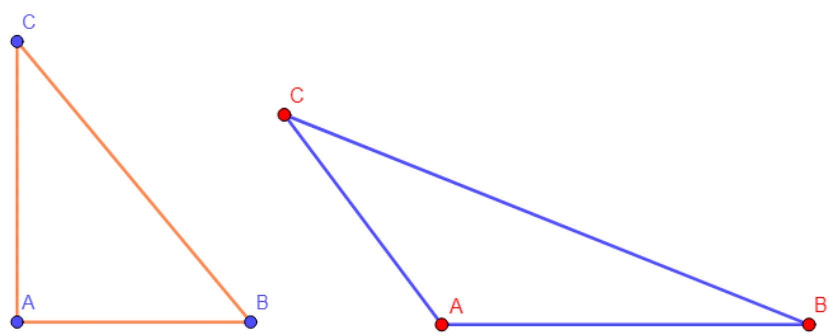
Anexo 6: Tercer taller de doblado de papel

Fase 4: Orientación libre

Taller 3: Construcción de mediatrices y alturas en triángulos obtusángulos y rectángulos		
Objetivo	Construir las mediatrices y alturas en triángulos obtusángulos y rectángulos.	
Materiales	Hojas de papel sin rayas (se pueden utilizar hojas de block iris) Elementos como lápiz, regla, compás (opcionales).	
Indicador de lo Concreto	**Indicador de lo Pictórico**	**Indicador de lo Abstracto**
Se espera que los casos realicen las construcciones propuestas de mediatriz, y altura en triángulos rectángulos y obtusángulos.	Se espera que los casos establezcan relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados y que las comuniquen.	Se espera que los casos identifiquen las particularidades del ortocentro y circuncentro en triángulos rectángulos y obtusángulos.

<u>Indagación concreta:</u>

6. Toma 4 hojas, en dos de ellas dibuja dos triángulos rectángulos y en las otras, dos triángulos obtusángulos. Luego, toma uno de cada uno formando parejas y enuméralos (1, 1- 2, 2). Marca cada lado con un doblez.

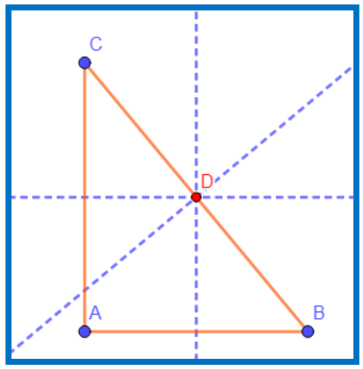


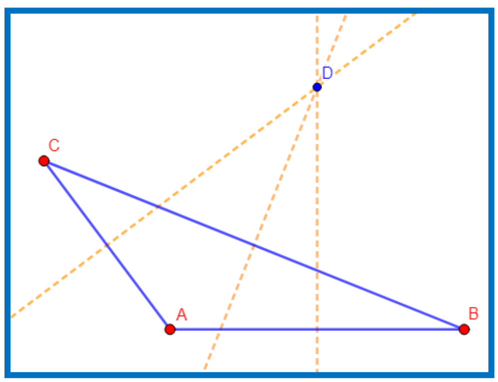
7. Toma la pareja de triángulos 1,1, en cada uno traza las mediatrices realizando los siguientes dobleces:

h) Haz coincidir el punto $\boldsymbol{A}$ con el punto C

i) Haz coincidir el punto B con el punto C

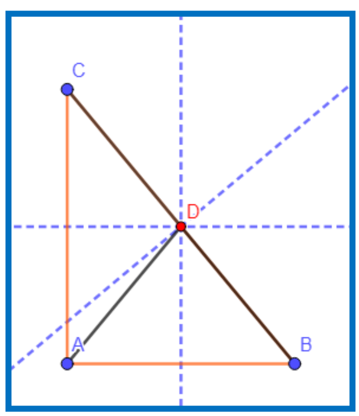
j) Haz coincidir el punto A con el punto B

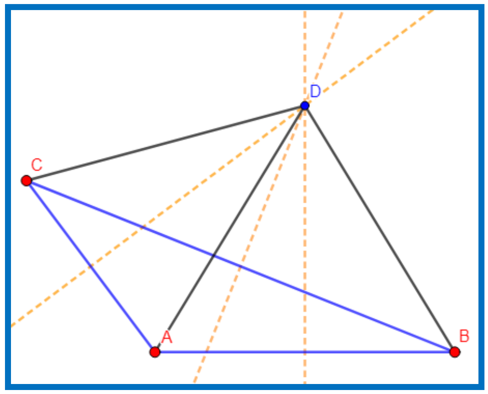




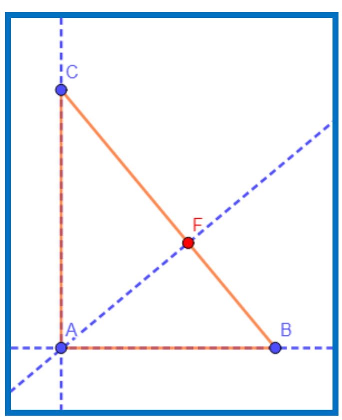
k) Toma un lápiz y traza un segmento que vaya desde el vértice C, hasta el punto D

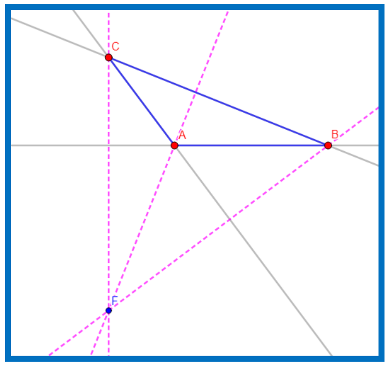
l) Realiza lo anterior, desde el vértice A hasta el punto D y desde el Vértice B hasta el punto D.





8. Toma la pareja de triángulos 2,2 en cada uno traza las alturas realizando los siguientes dobleces:
   d) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *B*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *B*.
   e) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *A*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *A*.
   f) Empieza a resbalar sutilmente el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre sí mismo, hasta que veas que sobre ese insinuado doblez empieza a aparecer el punto *C*, entonces manteniendo el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ sobre él mismo, aprieta asegurándote que dicho doblez pase por el punto *C*.





Indagación Pictórica:

Toma los elementos que consideres necesarios, por mencionar algunos: lápiz, regla, compás, entre otros.

Luego toma tus construcciones e identifica:

1. Características físicas (relaciones entre los segmentos y los dobleces realizados; tipo de triángulo isósceles, es decir, si es un triángulo isósceles rectángulo o un triángulo isósceles obtusángulo; entre otras que puedas identificar).
2. ¿Qué puedes concluir de los dobleces realizados en los 4 triángulos?
3. Características matemáticas (relaciones de perpendicularidad, relaciones de equidistancia, entre otras propiedades que puedas identificar).

Indagación Abstracta:

1. Describe lo que ocurre con circuncentro del triángulo rectángulo
2. ¿Qué relación encuentras entre el segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{DB}}$ del triángulo rectángulo de la pareja 1,1?
3. ¿Qué relación encuentras entre los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{DB}}$ del triángulo rectángulo de la pareja 1,1?
4. En el triángulo rectángulo $\boldsymbol{D}$ al ser circuncentro, es el centro de una circunferencia circunscrita en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, según esto ¿cuáles son los radios de dicha circunferencia?
5. Describe lo que ocurre con el circuncentro en el triángulo obtusángulo

6. ¿Qué relación encuentras entre el segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{DB}}$ del triángulo obtusángulo de la pareja 1,1?

7. ¿Qué relación encuentras entre los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y $\overline{\boldsymbol{DB}}$ del triángulo obtusángulo de la pareja 1,1?

8. En el triángulo obtusángulo $\boldsymbol{D}$ al ser circuncentro, es el centro de una circunferencia circunscrita en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, según esto ¿cuáles son los radios de dicha circunferencia?

9. Si las alturas de un triángulo son definidas como las rectas perpendiculares a un lado que van desde el vértice opuesto ¿cómo fue posible trazar las alturas en el triángulo obtusángulo?

10. Describe lo que ocurre con el ortocentro en el triángulo rectángulo

11. Describe lo que ocurre con el ortocentro en el triángulo obtusángulo

Anexo 7: Entrevista de carácter socrático final

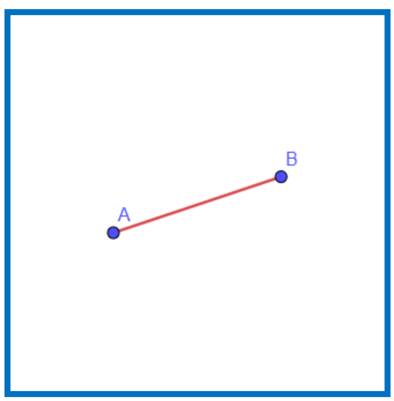
Fase 5: Integración

Entrevista

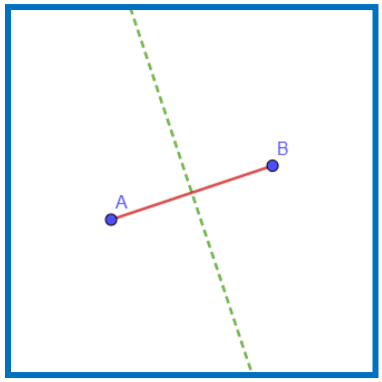
Apreciado estudiante, a continuación, encontrarás una serie de preguntas formuladas con base a los encuentros y talleres realizados. Se recomienda realizar las construcciones propuestas, ya que a partir de las visualizaciones se puede responder cada pregunta. Es muy importante que respondas a partir de lo que comprendes, no es necesario consultar otras fuentes, sólo debes remitirte a tus construcciones y a los aportes de información que se van proporcionando en el transcurso de la entrevista.

Muchas gracias, tu aporte es muy importante para esta investigación.

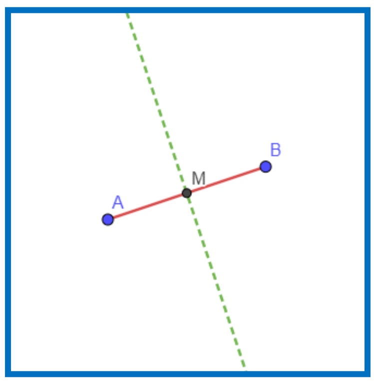
1. Mediante el doblado de papel, ¿cómo determinarías el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ trazado en la hoja? (Santa, 2011).



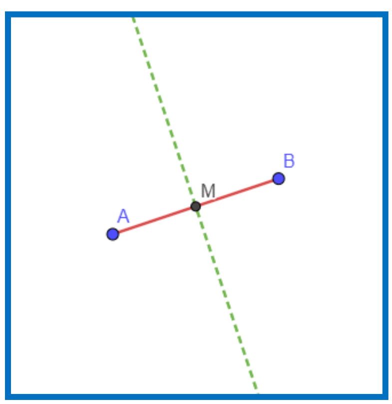
2. Si se lleva el punto A exactamente sobre el punto B, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento que une los dos puntos? (Santa, 2011).



3. De acuerdo con la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AM}}$ y $\overline{\boldsymbol{MB}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011).



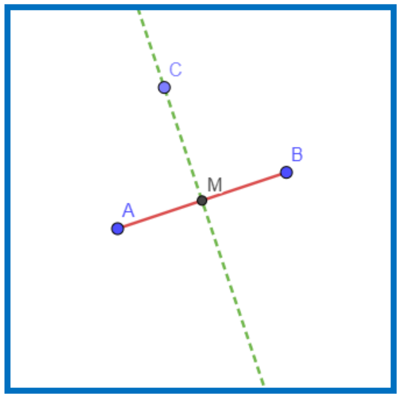
4. ¿Crees que el doblez que se hace cuando se lleva el punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{B}$ es perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011).



Aporte de información:

Las mediatrices son definidas como las perpendiculares trazadas desde el punto medio de un segmento.

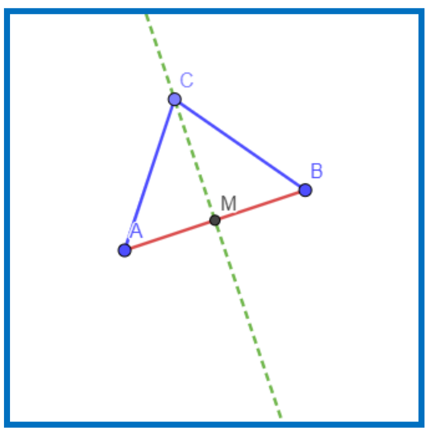
5. Considera un punto $\boldsymbol{C}$, diferente del punto medio $\boldsymbol{M}$, sobre la mediatriz del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$? ¿Por qué? (Santa, 2011).



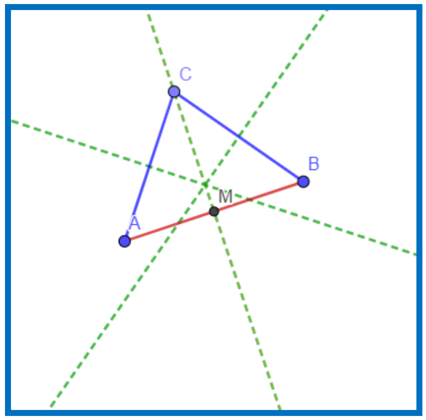
Aporte de información:

La equidistancia es definida como la igualdad de distancia entre dos o más puntos.

6. ¿Cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos? ¿Por qué? (Santa, 2011).



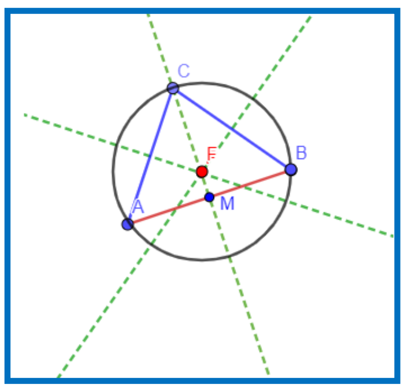
7. Si se lleva el punto $\boldsymbol{A}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{C}$, y el punto $\boldsymbol{B}$ exactamente sobre el punto $\boldsymbol{C}$, de tal forma que se tracen las mediatrices de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



Aporte de información:

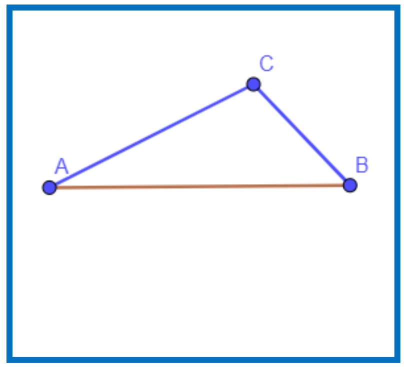
El circuncentro es el punto donde se intersecan las mediatrices de un triángulo, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

8. El punto de intersección de las tres mediatrices es el centro de una circunferencia, tal como se muestra en la figura, ¿Cuáles son los radios de dicha circunferencia?

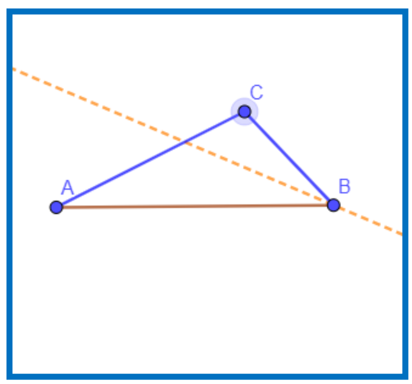


9. Si se trazan las mediatrices en un triángulo rectángulo ¿Qué puedes decir acerca de la posición del circuncentro?
10. Si se trazan las mediatrices en un triángulo obtusángulo ¿Qué puedes decir acerca de la posición del circuncentro?

11. Mediante doblado de papel ¿cómo bisecarías el ángulo B?



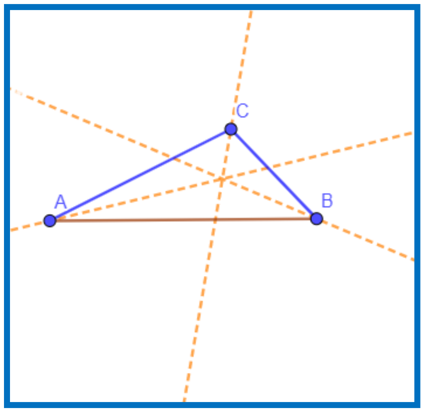
12. Si se lleva el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ exactamente sobre el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el ángulo $\boldsymbol{B}$?



Aporte de información:

La bisectriz es la semirrecta que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales.

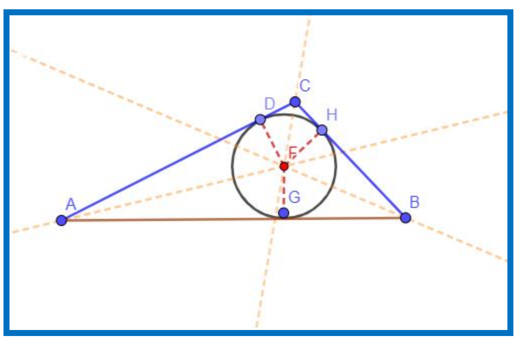
13. Se dobla el papel de forma que se biseque el ángulo $\boldsymbol{B}$ y el ángulo $\boldsymbol{C}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



Aporte de información:

- El incentro es el punto donde se intersecan las bisectrices de un triángulo, además, es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.
- La distancia de un punto a una recta (a un doblez) es perpendicular.

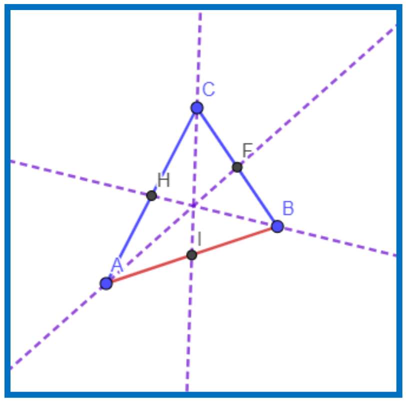
14. El punto de intersección de las tres bisectrices es el centro de una circunferencia, tal como se muestra en la figura, ¿qué puedes decir acerca de las distancias $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{D}$ del incentro, a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$ respectivamente?



Aporte de información:

La mediana es un segmento de recta que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto del vértice.

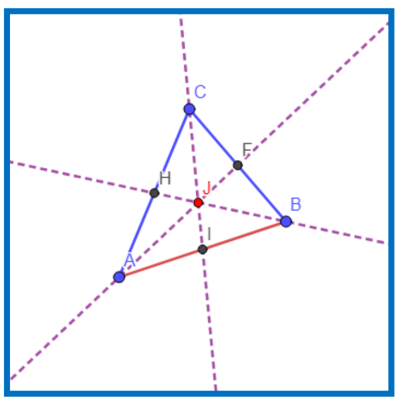
15. Se doblan las medianas de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$, $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, respectivamente, ¿qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



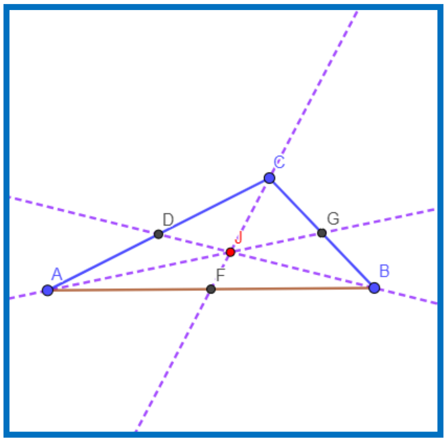
Aporte de información:

El baricentro es el punto donde se intersecan las medianas de un triángulo. Asimismo, es el centro de gravedad del triángulo

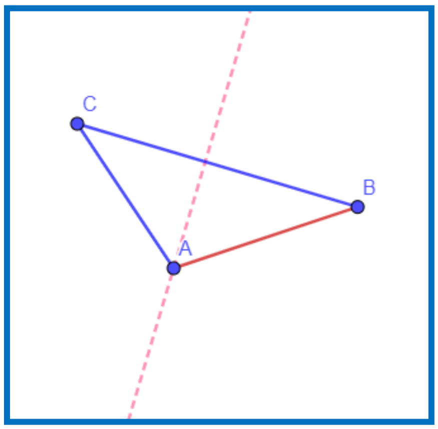
16. ¿Qué relación encuentras entre el baricentro $\boldsymbol{J}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ y las distancias de los puntos A, B y C con los puntos $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{I}$?



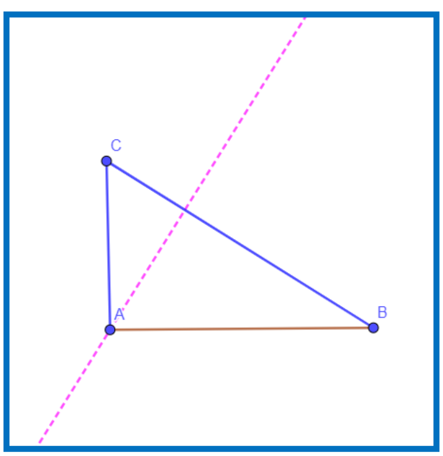
17. En el caso de las medianas en otro tipo de triángulo ¿Qué relación encuentras entre el baricentro $\boldsymbol{J}$ del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ y las distancias de los puntos A, B y C con los puntos $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}$ y F?



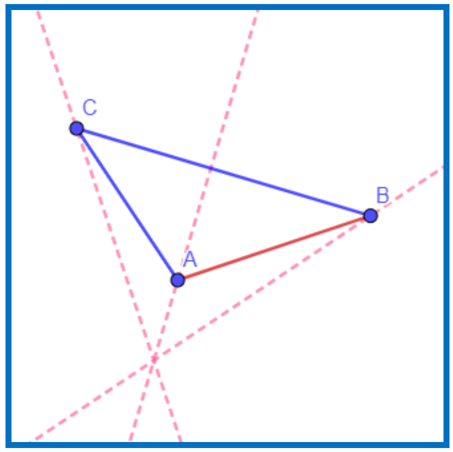
18. Se realiza un doblez que parte del vértice $\boldsymbol{A}$, llevando el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$?



19. En el caso de otro tipo de triángulo, se realiza un doblez que parte del vértice $\boldsymbol{A}$, llevando el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ sobre sí mismo, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$?



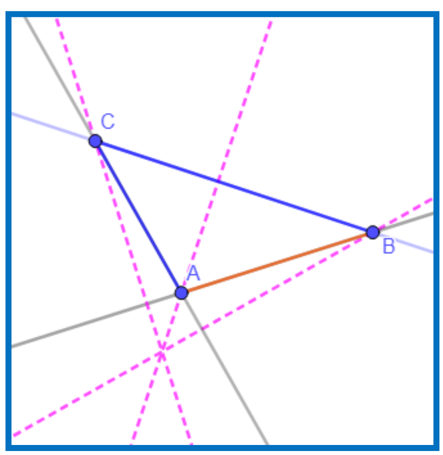
20. Las líneas punteadas que parten de los vértices $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ representan los dobleces realizados, ¿son perpendiculares a los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}}$, respectivamente? ¿Por qué?



Aporte de información:

La altura de un triángulo es un segmento perpendicular a un lado, que va desde el vértice opuesto a este lado (o a sus prolongaciones). Las tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro.

21. Ha sido posible trazar las alturas en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$, gracias a las prolongaciones de algunos de sus lados, lo cual permite visualizar las perpendiculares de los segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$, respectivamente. ¿Qué relación encuentras entre los dobleces realizados?



22. Si se trazan las alturas en un triángulo rectángulo ¿Qué puedes decir acerca de la posición del ortocentro?

Anexo 8: Divulgación del trabajo de investigación

Quinto encuentro internacional de investigación en educación matemática (EIEM – 5), ponencia.

5TO ENCUENTRO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EIEM5

Octubre de 2020

Formentando la Investigación en Educación Matemática desde la Región Caribe Colombiana

LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CERTIFICA QUE:

Liset Xiomara Giraldo Muñoz

PARTICIPÓ COMO PONENTE

CON SU TRABAJO: Comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos en el contexto de Van Hiele. Una posibilidad desde la geometría del doblado de papel y enfoque CPA del método Singapur

EN EL "5TO ENCUENTRO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

EIEM-5

REALIZADO EN MODALIDAD VIRTUAL, EN LOS 14 Y 15 DÍAS DEL MES DE OCTUBRE DE 2020

Rector (e) | Decano Facultad de Ciencias de la Educación | Coordinador. Lic Matemáticas | Coordinadora EIEM