

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

**INFORME FINAL
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**“LAS FASES DEL APRENDIZAJE DE VAN HIELE EN LA MANIFESTACIÓN DEL
CONCEPTO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE INFINITA”**

PRESENTADO POR:

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

“EDUCACIÓN MATEMÁTICA E HISTORIA” (UDEA- EAFIT)

MEDELLÍN

Diciembre 4 de 2009

INFORMACIÓN GENERAL

1. TÍTULO DEL PROYECTO: “Las fases del aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita”.

2. NOMBRE DEL INVESTIGADOR PRINCIPAL: Carlos Mario Jaramillo López.

3. TELÉFONO Y DIRECCIÓN ELECTRÓNICA: 314 8904448,
cama@matematicas.udea.edu.co.

4. NOMBRE DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN: “Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit)”

5. CATEGORÍA DEL GRUPO: Categoría C en la convocatoria de Colciencias 2009.

6. NOMBRES DE QUIENES DESARROLLARÁN EL PROYECTO:

Carlos Mario Jaramillo López: Investigador Principal.

Sandra Milena Zapata: Coinvestigador

Edison Sucerquia Vega: Coinvestigador

7. ESTUDIANTE(S) DE PROGRADO EN FORMACIÓN

Programa: Maestría en Educación, énfasis en Matemáticas.

Sandra Milena Zapata, CC: 32.140.410

Edison Alberto Sucerquia Vega, CC. 71.223.062

8. DURACIÓN DEL PROYECTO: 24 meses

9. VALOR TOTAL DEL PROYECTO: \$59'700.000

10. VALOR APROBADO POR UDEA: \$29'700.00

11. VALOR APROBADO POR EL FONDO CODI: \$30'000.000

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema planteado en esta investigación, se origina en uno de los resultados planteados por la tesis de maestría titulada: “Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma, de una serie vía áreas de figuras planas” de Jurado y Londoño (2005). Dicho trabajo, en el apartado de las conclusiones, menciona la dificultad que presentan los estudiantes en su progreso del nivel de razonamiento II al III, frente al concepto de convergencia de una serie infinita. La tesis mencionada, propone una entrevista de carácter socrático con la cual se busca identificar cómo razonan los estudiantes frente al concepto: suma de infinitos términos positivos, es así como, mediante el diseño de una entrevista de carácter socrático, fue posible caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes y además, determinar niveles de razonamiento de cada uno de ellos. El estudio clasifica un alto porcentaje de la población intervenida en el nivel II de razonamiento; dicha clasificación muestra que, los estudiantes, no establecen relaciones entre conceptos de manera apropiada y significativa y, su estructura mental, acerca del concepto objeto de estudio, se ve limitada por el análisis de las propiedades características de las figuras, sin lograr hacer procesos de abstracción rigurosos y formales.

Un tema importante, en los estudios e investigaciones realizadas en la última década por docentes de matemáticas, busca determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes de diferentes grados de escolaridad en cuanto a conceptos matemáticos y de geometría. El modelo educativo de van Hiele, describe, de manera precisa y adecuada, la evolución en este proceso, sin embargo, no abundan estudios que propongan el diseño de actividades para el paso de un nivel de razonamiento al siguiente, en cuanto a conceptos del análisis matemático.

Actualmente, existen pocos estudios enmarcados en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, orientados a mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes, frente a conceptos del análisis matemático. Dada esta necesidad se hace necesario pensar, en la manera cómo los estudiantes logran un nivel de razonamiento avanzado, específicamente frente al concepto de convergencia de una serie infinita.

Con este estudio, se pretenden proponer ciertos aportes significativos, en lo referente al componente prescriptivo del modelo educativo de van Hiele y demostrar su fuerte incidencia en la comprensión de conceptos del análisis matemático, susceptibles de una componente visual geométrica. Para ello se propone el diseño de módulos de instrucción (módulo de aprendizaje) en el marco de las fases del modelo mencionado, los cuales son, en sí mismos, una herramienta metodológica, que les permite a los estudiantes avanzar en sus niveles de razonamiento.

Propiciar el progreso de razonamiento matemático de un estudiante hace parte de la función de las fases de aprendizaje, en las cuales la instrucción juega un papel determinante. Ésta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas y que pongan de manifiesto la red de relaciones que el alumno posee en su estructura mental. Dado esto, se puede afirmar que el papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es el de desarrollar propuestas que motiven a los estudiantes para crear y fortalecer su red de relaciones en conceptos matemáticos y de la geometría y así mejorar su nivel de razonamiento. De acuerdo con esto, el estudio propuso el diseño cuidadoso y eficiente, de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje) que contiene experiencias de aprendizaje enmarcadas en dichas fases, las cuales facilitan el progreso en los niveles de razonamiento y ayudan a los estudiantes a construir redes de relaciones, además que dan cuenta del grado de apropiación del concepto abordado y de la comprensión de sus propiedades.

OBJETIVOS DEL PROYECTO

El desarrollo de este proyecto de investigación alcanzó los siguientes objetivos.

Objetivo General

Diseñar experiencias de aprendizaje para una manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita, mediante la exploración de las fases de aprendizaje del modelo de

van Hiele y de acuerdo a los descriptores de los niveles de razonamiento ya estudiados para este concepto.

Este objetivo fue alcanzado, gracias al desarrollo de la investigación que permitió concretar la tesis de maestría titulada: “*Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos*”, la cual facilitó el diseño de un módulo de instrucción (módulo de aprendizaje), que consta de un conjunto de experiencias de aprendizaje enmarcadas en cada una de las fases del modelo educativo de van Hiele; la elaboración del módulo inició con un guión entrevista, inspirado en el trabajo de Jurado y Londoño (2005). Gracias al trabajo de campo realizado durante esta investigación, este guión fue corregido, ampliado y mejorado. Además, de acuerdo a la caracterización de cada una de las fases, fue posible revisar y refinar los descriptores de fase inicialmente propuestos, de acuerdo a lo observado en el proceso de razonamiento manifestado por los estudiantes. La propuesta de los descriptores de cada una de las fases permitió evaluar el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento; cabe anotar que, dichos descriptores, no sólo respondían a las características propias de cada una de las fases, sino que también estaban en consonancia con el concepto objeto de estudio y con la herramienta utilizada: construcción de los mapas conceptuales, para evidenciar de un lado la manera como el estudiante progresa por cada una de las fases y de otro, como la red de relaciones de sus conceptos se enriquecen y se fortalecen; aspectos necesarios para lograr un avanzado nivel de razonamiento.

Objetivos específicos:

1. Exploración de las fases de aprendizaje (usando asistentes matemáticos y/o el software Cmap-Tools) en los niveles de razonamiento, tomando como referencia las investigaciones desarrolladas hasta el presente relativas al concepto convergencia de una serie infinita.

En el transcurso del desarrollo de la investigación, para la consecución del objetivo general fue necesaria la búsqueda de una herramienta que permitiera reflejara los conocimientos y la estructura mental que poseen los estudiantes en lo relativo a un concepto. Además, que

facilitara realizar modificaciones y complementos a la red de relaciones que manifiestan los estudiantes en sus razonamientos, tal como lo plantea el modelo educativo. Dado lo anterior, encontramos que, el mapa conceptual, es la herramienta que mejor refleja la estructura mental de los estudiantes en cuanto a su razonamiento matemático y que, en el marco del modelo educativo, es fundamental para la evolución en el proceso de razonamiento respectivo de cada fase de aprendizaje; además, de la ampliación y perfeccionamiento de dicha estructura que se ve favorecida, dada la creación de una red de relaciones, materializada mediante un mapa conceptual, evidenciando así el progreso al nivel de razonamiento esperado.

La implementación de herramientas virtuales como el Cmaptools, permiten dinamizar la utilización de los mapas conceptuales y facilitan a los estudiantes la construcción y modificación de éstos. Por otra parte, la motivación exhibida por ellos muestran que, el uso de estas herramientas, se debe a la interacción con los nuevos ambientes de aprendizaje, regulados a través de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTICs). Lo anterior está en correspondencia con las demandas de la educación actual, donde cada vez es mayor la necesidad de utilizar espacios que favorezcan la creatividad, la socialización, la discusión y generación de nuevos conocimientos, todo esto conjugado para lograr una mayor comprensión del conocimiento matemático objeto de estudio.

2. Diseñar entrevistas de carácter socrático correspondientes a las fases de aprendizaje para ayudar al alumno a avanzar desde el nivel de razonamiento en que se encuentra hasta el nivel siguiente.

La consecución de este objetivo se evidencia en la construcción del módulo, inspirado en la implementación de un guión entrevista que permitió, durante el desarrollo de la investigación, que los estudiantes, de manera consciente, elaboraran relaciones significativas entre conceptos. El carácter socrático del guión y las características de las preguntas propuestas favorecieron la generación de discusiones que posibilitaron a los estudiantes llegar a conclusiones a partir de sus propios razonamientos, igualmente en el transcurso de las socializaciones, se dio la construcción de reinterpretaciones con respecto a

lo que saben o comprenden. Igualmente, se puede afirmar que, gracias a las conclusiones presentadas en la tesis de maestría: *“Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos”*, la aplicación de entrevistas de carácter socrático es una estrategia metodológica que fomenta en el alumno un pensamiento discursivo, permite la optimización de un guión entrevista y finalmente, como producto de este guión, elaborar un test que pueda aplicarse a una amplia población de estudiantes para validar de manera precisa y coherente el estudio. Esta estrategia metodológica cumple una doble funcionalidad, por un lado logra determinar el nivel de razonamiento de un estudiante (aspecto descriptivo) y por otro, es un punto de partida para la elaboración de un módulo de aprendizaje que propenda por el mejoramiento del nivel de razonamiento del alumno (aspecto prescriptivo).

3. *Investigar, si existe alguna relación entre las fases de aprendizaje de la noción de continuidad y las de las nociones de convergencia de una serie infinita y las de la tangente a una curva plana en uno de sus puntos.*

El alcance de este objetivo se evidencia en el trabajo de investigación: *“Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos”*, el cual entre sus conclusiones aborda la posibilidad de realizar futuros estudios, que mediante el diseño de módulos de aprendizaje, enmarcados en cada una de las fases, logren mejorar el nivel de razonamiento de un estudiante a otro superior y favorecer así la consolidación de otros estudios, en cuanto a conceptos del análisis matemático, los cuales posean una componente visual geométrica.

RESULTADOS ESPERADOS

La realización de este proyecto contribuyó al logro de los siguientes resultados:

Resultados directos:

1. *Al menos un (1) material escrito especializado, que se elaborará como producto de la investigación en el programa de Maestría en Educación, que será dirigido por el investigador principal.*

En el marco del proyecto de investigación: *“Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita”*, se logra la realización de una trabajo de investigación a nivel de maestría titulado *“Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos”*, la cual retoma los resultados obtenidos en la tesis de maestría titulada: *“Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas”* (Jurado y Londoño, 2005), en el cual, se analiza la dificultad de los estudiantes para progresar en los niveles de razonamiento propuestos en el modelo educativo de van Hiele, específicamente del nivel II al III. Durante el trabajo de investigación se lleva a cabo el diseño de un módulo que contiene una serie de actividades enmarcadas en cada una de las fases de aprendizaje del modelo mencionado, y cuyo objetivo es lograr que los estudiantes mejoren sus procesos de razonamiento frente al concepto de convergencia de series de términos positivos. Según van Hiele, el paso de un nivel de razonamiento a otro se produce mediante la creación o ampliación de la red de relaciones; para evidenciar las modificaciones que realiza un estudiante a dicha red, que está en relación directa con su estructura mental, se utiliza la herramienta de los mapas conceptuales y el software Cmaptools, como metodología que favorece la explicitación y la integración de nuevos conocimientos.

2. *Presentación para publicación, en revistas de prestigio nacional o internacional, de al menos (1) artículo especializado en el área*

A nivel internacional:

- Como producto del trabajo de investigación se logra la publicación del artículo: *“Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele”*, presentado por Carlos Mario Jaramillo López, Sandra Milena Zapata y Edison

Sucerquia Vega, publicado en la Revista: Asociación latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), en la Ciudad de México, Año: 2009, código ISBN: 978-607-95306-00.

A través de este artículo se presentan los avances de la investigación llevada a cabo en el marco de las Fases de Aprendizaje del Modelo Educativo de van Hiele, las cuales corresponden al aspecto prescriptivo del modelo, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, susceptibles de una componente visual geométrica. Específicamente, describe como se ha logrado diseñar un módulo de instrucción enmarcado en estas fases, cuyo propósito es el de que los estudiantes, ubicados en un nivel II de razonamiento, frente al concepto de convergencia de una serie infinita, alcancen un nivel III de razonamiento.

El artículo, igualmente, expone de que manera el módulo de instrucción, se convierte en una propuesta metodológica de aprendizaje e intervención en el aula, que facilitará al docente por un lado, mejorar su enseñanza y por otro, lograr que el estudiante avance en sus procesos de razonamiento.

- En la actualidad, el artículo titulado: *“Las matemáticas y los mapas conceptuales”* se encuentra en proceso de evaluación por parte del equipo editor de la revista: Asociación latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), lugar: Santo Domingo, República Dominicana, Año: 2009. Dicho artículo expone la manera cómo los mapas conceptuales se pueden emplear como una técnica de estudio y como una herramienta fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje para lograr en el estudiante un avanzado nivel de razonamiento; es decir, además de permitirle al docente explorar los conocimientos previos que sus estudiantes tienen frente a un tema específico, favorecen tanto la construcción de relaciones y organización de conceptos, como el fomento de la reflexión, el análisis y la creatividad en cuanto al concepto objeto de estudio.

La implementación de los mapas conceptuales en investigaciones, relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, han evidenciado los procesos de razonamiento ocurridos en la mente del alumno, mostrando las conexiones entre conceptos matemáticos que pueden dar lugar a proposiciones válidas o no válidas, los diferentes

niveles jerárquicos, etc, que, a su vez, proporcionan una visión sobre el nivel de comprensión que poseen, tanto profesores como estudiantes, en dichos conceptos.

A nivel nacional:

- Se logra la publicación del artículo titulado: *“Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita”*, presentado por Carlos Mario Jaramillo López, Sandra Milena Zapata y Edison Sucerquia Vega, publicado en la revista Asocolme, en la ciudad de Santiago de Cali, Colombia, código ISBN: 958-97614-7-2.

El artículo presenta una breve reseña de la extensión del modelo de van Hiele, que en sus comienzos se implementó sólo en geometría y en la última década, gracias a la realización de diversas investigaciones, se ha demostrado que es posible aplicarla a la enseñanza de nociones del análisis matemático, susceptibles de una componente visual geométrica. Este artículo, igualmente, plantea el por qué de la necesidad de diseñar módulos de instrucción en el marco de las fases de aprendizaje del citado modelo, para favorecer el progreso en dichos niveles de razonamiento, permitiendo que el estudiante construya redes de relaciones referidas al concepto de convergencia de series infinitas, a través de figuras de áreas planas.

Resultados indirectos:

1. Formación de al menos un (1) investigador a nivel de maestría, en el área de la Educación Matemática y en la línea de pensamiento matemático avanzado. Aspiro, además, a que este estudiante del programa de Maestría en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas, se vincule a un futuro programa de Doctorado en Educación, en el área de énfasis de pensamiento matemático avanzado.

Se contribuyó a la formación de dos estudiantes de la línea de Maestría en Educación, con énfasis en Matemáticas. Prueba de ello es la obtención del título de Magister en Educación obtenido por parte de la estudiante Sandra Milena Zapata, en el mes de octubre del año en curso; el estudiante Edison Sucerquia se encuentra en proceso de obtención del certificado de competencia auditiva en lengua extranjera, requisito para la obtención de su título de Magister. Dicha tesis titulada “*Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos*”, obtuvo la calificación de SOBRESALIENTE. En el anexo se presenta una síntesis de la tesis realizada.

2. *Consolidación de las líneas de investigación del Grupo en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit), que fueron propuestas en el momento de inscribirlo en la VI Convocatoria Colciencias-2002.*

Producto del proyecto de investigación:

- Se ha venido consolidando un trabajo de maestría en el marco de las fases de van Hiele para el concepto de continuidad local, como continuación de la tesis doctoral *La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele*, desarrollado por Pedro Campillo Herrero.
- También, un trabajo de maestría en el marco de van Hiele para la construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel, usando la axiomática de Huzita.

3. Establecimiento de nuevas líneas de investigación en el marco del modelo de van Hiele.

Como producto del desarrollo de este proyecto, se hace necesario proponer al interior del grupo de investigación, nuevas líneas tales como:

- Empleo de los mapas conceptuales como estrategia para el aprendizaje de conceptos matemáticos, en el contexto de van Hiele. También, su importancia para la evaluación de los procesos de razonamiento en la comprensión de estos conceptos matemáticos.
- Importancia del uso de paquetes informáticos y software especializados (Derive, Geogebra, Cmaptools, entre otros) que contribuyan al mejoramiento, tanto de la enseñanza, como de la comprensión significativa de las matemáticas.

COMPROMISOS Y ESTRATEGIA DE COMUNICACIÓN

La siguiente es la participación activa en eventos relacionados con el trabajo de investigación:

- XIII Congreso de la Escuela Regional de Matemáticas, realizado en la Universidad Tecnológica de Pereira en la semana del 11 al 15 de septiembre de 2006, con el trabajo titulado: **Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita.**
- Foro Educativo Nacional, con el taller titulado: **Mapas conceptuales como herramienta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del análisis matemático**, durante los días 26, 27, 28 y 29 de octubre de 2006, en la ciudad de Mocoa, departamento del Putumayo.
- Octavo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, realizado en la ciudad de Cali en los días 8, 9 y 10 de Marzo del 2007. Esta ponencia tuvo como objetivo divulgar los avances del proyecto de investigación que, para ese entonces, se encontraba en su fase inicial de desarrollo. El título de la ponencia: **Las fases del aprendizaje de van hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita** fue publicada en las memorias del evento desarrollado en Cali. Su ISBN es 958-97614-7-2.
- Encuentro Científico Estudiantil organizado por los estudiantes de la licenciatura de matemáticas y física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, desarrollado en los días 11,12 y 13 de abril del 2007. Allí se desarrolló una conferencia denominada: **Los Mapas conceptuales como estrategia metodológica para el aprendizaje de conceptos matemáticos.** Este tema hace parte del proyecto antes mencionado.

- XVIII ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES y VI ENCUENTRO DE ARITMÉTICA, realizado en la ciudad de Bogotá, durante los días del 21 al 23 de junio de 2007, organizado por la Universidad Pedagógica Nacional, con una conferencia titulada: **Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele.**
- XVI Congreso Nacional de Matemáticas, realizado en la ciudad de Medellín, durante los días del 16 al 19 de julio de 2007, titulada: **Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele.**
- Se participó activamente en el programa Formador de Formadores, de la Universidad de Antioquia, con un seminario-taller titulado: **Las fases de aprendizaje de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita**, realizado los días 17 y 18 de agosto de 2007, en la sede de la Universidad de Antioquia, ubicada en el municipio de Santa Fé de Antioquia.
- VII Encuentro de enseñanza de las Ciencias, realizado los días 25 y 26 de octubre de 2007, con la ponencia: **Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele**, este evento se llevó a cabo en la universidad de Antioquia y fue organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- Primer Encuentro Iberoamericano y VI Encuentro Nacional de la Enseñanza del Cálculo con el cursillo: **Las fases de van Hiele en la manifestación del concepto de convergencia de una serie infinita**: Evento realizado en la Pontificia Universidad Javeriana, Ciudad de Bogotá, durante los días 3 al 5 de diciembre del 2007.
- El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), encargado del Relme XXII, aprobó la presentación del reporte de investigación que hace parte del proyecto, cuyo título fue: **Los Módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del Modelo Educativo de van Hiele**. Este evento tuvo lugar en Ciudad de México entre los días 1 al 4 de Julio de 2008. Para la asistencia de los dos estudiantes a

este importante evento internacional, hubo la necesidad de viajar a la ciudad de Bogotá para gestionar el pasaporte y la visa. EL CIEP, con los fondos del proyecto, aprobó la consecución de los tiquetes aéreos nacionales e internacionales.

- VIII Encuentro de Enseñanza de las Ciencias, en el cual se participó con la realización de un taller denominado: **Las matemáticas y los mapas conceptuales**. Este evento se llevó a cabo durante los días 24, 25 y 26 de septiembre del 2008, en la universidad de Antioquia y fue organizado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- XXIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, organizado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y realizado en la ciudad de Santo Domingo, República Dominicana, julio de 2009. En éste se participó con el reporte de Investigación: **“Los mapas conceptuales y las matemáticas”**.
- Congreso Internacional de Educación en Ciencias Naturales 10 años de la Journal of Science Education, organizado por la Universidad Antonio Nariño conjuntamente con el MEN, que tuvo lugar en la ciudad de Cartagena, Colombia, julio de 2009, en el cual se realizó el reporte de Investigación titulada: **“A methodological proposal in the frame of Van Hiele’s model”**.

ANEXO

Síntesis de la Tesis de Maestría

MÓDULO DE APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS.

Sandra Milena Zapata
Edison Sucerquia Vega

Asesor

Carlos Mario Jaramillo López

La tesis de maestría realizada y aprobada por los jurados respectivos consta de 5 capítulos. A continuación se describe, de manera resumida, los contenidos de éstos.

PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los estudiantes de los últimos grados de la educación media y el primer año de universidad, presentan dificultades en el paso del nivel de razonamiento II (análisis) al inmediatamente superior III (clasificación), frente al concepto del análisis matemático, en particular “la convergencia de series infinitas”.

El estudio propone el diseño de módulos de instrucción (módulo de aprendizaje) en el marco de las fases del modelo educativo de van Hiele, los cuales son, en sí mismos, una herramienta metodológica, que permitirá a los estudiantes progresar en sus niveles de razonamiento. Dicho modelo fue diseñado para lograr una mayor comprensión de los conceptos básicos de la geometría. En la actualidad, y gracias a las investigaciones que se han realizado en lo referente a conceptos del análisis matemático, se ha comprobado que es posible extender la aplicación del modelo, más aún, cuando los conceptos poseen una componente visual geométrica.

Según van Hiele (1986), el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones. Propiciar el progreso del razonamiento matemático de un estudiante es función de las fases de aprendizaje, en las cuales, la instrucción, juega un papel determinante, ésta se puede dar mediante el diseño de actividades correspondientes a cada una de las fases, que contengan acciones concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el alumno posee en su estructura mental. Por lo anterior, se puede afirmar que, el papel de la instrucción en las fases de aprendizaje es el de desarrollar propuestas que motiven a un estudiante para crear y fortalecer su red de relaciones en conceptos matemáticos y de la geometría y lograr, de esta manera, una mejora en su nivel de razonamiento.

Dada la necesidad existente de crear mecanismo mediante los cuales los estudiantes logren progresar de un nivel II al III, el presente trabajo de investigación pretende dar continuidad a la tesis *“Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas”* de Jurado y Londoño (2005), la cual, además de discriminar niveles de razonamiento, busca mejorar su avance frente al concepto: “Convergencia de una serie infinita”. Esto es posible gracias al paso por las diferentes fases de aprendizaje, que permitirán a los estudiantes consolidar sus redes de relaciones, mediante una ampliación y fortalecimiento de sus estructuras mentales.

Entre los aspectos más relevantes del estudio, se destacan los procesos de razonamiento finito e infinito, el concepto de área, límite y convergencia, entre otros. Estos aspectos se ven enmarcados en la división sucesiva e indefinida de áreas de figuras planas, en la cual se manifiestan las dificultades que tienen los estudiantes para aceptar procesos infinitos. Cabe anotar, además, que el concepto de infinito es comúnmente abordado como “aquello que no tiene fin”, “aquello que no es finito”, y desde esta concepción resulta difícil para los estudiantes comprender que, una suma infinita de términos positivos, bajo ciertas condiciones, puede tener resultado finito.

Generalmente, cuando se le propone a un estudiante sumar indefinidamente términos positivos, la respuesta usual es un resultado infinito, reafirmando con esto la concepción

errada de que una suma indefinida de términos positivos siempre da un resultado infinito. El problema radica en la forma en que los estudiantes conciben el infinito, lo que para ellos representa y lo que matemáticamente significa. No cuentan, por tanto, con elementos para dar una explicación adecuada acerca de la idea de infinitud, su concepción primaria de infinito difiere del concepto formal matemático. No es desconocido que este concepto ha sido, a través de los tiempos, inaccesible y paradójico y que grandes matemáticos negaron su existencia por mucho tiempo, debido a las contradicciones que implicaba su estudio y respectiva formalización matemática. En los procesos de razonamiento de los estudiantes, estas contradicciones siguen presentes, aún más, cuando se carece de un proceso de enseñanza y aprendizaje que permita desvirtuar las concepciones erróneas construidas en torno a este concepto.

En este sentido, es importante se hace necesario que, las prácticas docentes, consideren la posibilidad de ampliar la concepción usual de infinito, pues la manera como se conciben los fenómenos finitos difiere de la manera de concebir fenómenos infinitos, de ahí que un estudiante no logre adquirir elementos para comprender, porque una suma infinita de términos positivos, en algunos casos, es infinita y en otros finita. El concepto de convergencia de una serie infinita ha sido abordada desde diferentes tópicos. El presente trabajo de investigación retomó los procesos de visualización que conllevan a la deducción de una estructura formal del concepto. Éste se ve favorecido, gracias a que posee una componente visual-geométrica que fortalece la comprensión de dicha estructura, en tanto se generen elementos para vincular la visualización con la abstracción, requerida para su respectiva comprensión.

MARCO TEÓRICO

El estudio se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, que fue diseñado para lograr una mayor comprensión de los conceptos básicos de la geometría. Actualmente, gracias a las investigaciones que se han realizado con referencia a los conceptos del análisis matemático, se ha comprobado que es posible extender la aplicación del modelo, más aún, cuando los conceptos poseen una componente visual geométrica

RELEVANCIA Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN.

Este trabajo de investigación considera, igualmente, el campo de la Educación Matemática, la cual puede concebirse como un sistema social heterogéneo y complejo, que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El campo de la educación matemática ha inquietado profundamente tanto a expertos en el área como a pedagogos, sicólogos y sociólogos; la necesidad de lograr una mayor comprensión en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como alcanzar mayor eficacia en la docencia de las matemáticas, constituyen las mayores inquietudes de los investigadores.

La investigación en educación matemática se puede clasificar en teórica y práctica. La investigación aplicada a la tecnología didáctica, es un área prescriptiva y busca una mayor eficacia de la instrucción matemática, empleando los conocimientos disponibles en la elaboración de dispositivos para la acción: manuales escolares, material didáctico, diseño de currículos, módulos de instrucción, entre otros. La presente investigación se enmarca en este contexto, con la propuesta de actividades en correspondencia con las fases de van Hiele, las cuales constituyen un módulo de instrucción que permite desarrollar y potenciar procesos de razonamiento avanzado en los estudiantes.

Las investigaciones teóricas centran sus esfuerzos en los procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje y formación o modificaciones de redes conceptuales. En cuanto a las investigaciones prácticas, Gutiérrez (1991) señala: “En este tipo de trabajos se trata de estudiar algún tema en particular de la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, analizando los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y errores en el desarrollo de un método de enseñanza, entre otros”.

El objetivo principal de la investigación en educación matemática es el de conocer a profundidad la manera como se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, para poder compartir con los docentes, propuestas efectivas para implementar en el aula, y conseguir que los estudiantes logren un aprendizaje significativo.

Los especialistas en educación matemática, pretenden formar o instruir, mediante las matemáticas, es decir, consideran esta ciencia, en todo o en parte, como objeto de educación, para aquellos a quienes están formando. Para ellos, el análisis didáctico de los contenidos conjuga dos dimensiones igualmente importantes, a saber: la educativa y la matemática.

El concepto de infinito generalmente representa una gran dificultad en la mente de los estudiantes, al momento de intentar comprender un objeto de estudio relacionado con él; pues la confrontación entre un proceso finito y uno infinito es una construcción que debe ser cuidadosa dado el aspecto paradójico que éste conlleva.

En general, los estudiantes no han abordado experiencias significativas que les permitan construir el concepto de infinito. Su carácter abstracto dificulta su conceptualización y la concepción intuitiva de éste difiere de su definición formal matemática; es clara la dificultad que implica pretender mostrar la formalidad matemática de su significado, sin embargo, los docentes no deben desconocer la necesidad e importancia de abordar la idea intuitiva de infinito en aras de la formalización, debido a que está estrechamente relacionado con temas importantes del cálculo como: límites, sucesiones, series, área bajo una curva, entre otros.

La necesidad de abordar conceptos con un alto nivel de abstracción exige recurrir a mecanismos adecuados que posibiliten su comprensión, más aún, cuando se trata de temas poco relacionados con la cotidianidad de los estudiantes. La investigación profundiza en el concepto de “Convergencia de una serie infinita”; éste ha sido tratado mediante representaciones geométricas que permiten una mejor asimilación del mismo y a futuro su respectivo significado en el contexto formal.

Teniendo en cuenta que, los razonamientos de tipo infinito suponen obstáculos en la adquisición de conceptos asociados a éstos, en este estudio, se destaca la pertinencia de recurrir a mecanismos visuales - geométricos que ayuden a los estudiantes a comprender el concepto de convergencia y los elementos relacionados con él. Es por esto que, el concepto

objeto de estudio, se presenta a través de escaleras infinitas decrecientes, en las cuales, el área de cada escalón, se asocia a un término de la serie infinita y si ocurre que existe el área de la escalera, entonces la serie asociada a ésta será convergente. Esta manera de familiarizar a los estudiantes con el concepto de infinito, genera confianza en ellos al momento de hacer sus razonamientos, dado que han tenido mayor contacto con representaciones visuales - geométricas que con elementos formales y simbólicos asociados al concepto de infinito.

Gracias al mecanismo utilizado y a los recursos de tipo visual (escaleras infinitas) se logra la comprensión del concepto objeto de estudio. Cabe anotar además, que en todo este proceso se encuentra inmersa la noción de límite, la cual no es tan evidente en la mente del estudiante cuando intenta determinar la existencia o no del área de una escalera infinita decreciente, mientras que, para el área de una escalera infinita creciente, la visualización permite afirmar sin ninguna duda de que el área no existe.

Dado lo anterior, cabe destacar que la visualización favorece la construcción del concepto. Partir del concepto imagen, permite un acercamiento a la definición y el establecimiento de relaciones entre sus propiedades y sus manifestaciones, para lograr así la comprensión formal del mismo.

De otro lado, la creación de un módulo de aprendizaje destinado a contribuir en las prácticas docentes y al mejoramiento de los niveles de razonamiento de los estudiantes, constituye, en sí mismo, una experiencia de aprendizaje que favorece las construcciones conceptuales, en el campo de la matemática. Dado el carácter socrático del módulo, se destaca éste como una herramienta que estimula la creación de asociaciones significativas entre conceptos y conduce a la construcción de otros, de manera que el estudiante inicia su proceso de aprendizaje en un campo que le es familiar y le genera confianza para luego empezar con la construcción progresiva de nuevos conceptos.

La implementación de un guión entrevista permite que los estudiantes, de manera conciente, elaboren relaciones significativas entre conceptos. El carácter socrático del guión

y las características de las preguntas propuestas, favorecen la generación de discusiones que ayudan a los estudiantes a llegar a conclusiones a partir de sus propios razonamientos y la generación de reinterpretaciones con respecto a lo que saben o comprenden. Vale la pena resaltar, además, el hecho de que, el uso de los mapas conceptuales como una herramienta que no sólo es coherente con el modelo de van Hiele, contribuye al aprendizaje y enseñanza de conceptos matemáticos, además de que permite dinamizar las actividades en diferentes áreas, constituyéndose en un elemento común de aprendizaje. Por otra parte, posibilita la integración de conocimientos en función de un objetivo: aprender mediante el establecimiento de relaciones significativas entre conceptos.

De acuerdo a los lineamientos curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, p. 56), el modelo educativo de van Hiele es la propuesta que parece describir, con bastante exactitud, la evolución del pensamiento matemático desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales. El modelo educativo de van Hiele, en su estructura, considera una componente descriptiva, que permite identificar las dificultades manifiestas en un proceso de aprendizaje, en tanto que permite identificar cuál es el nivel de razonamiento de los estudiantes, y una componente prescriptiva, correspondiente a las fases de aprendizaje, que favorecen el progreso en los niveles de razonamiento, permitiendo establecer enlaces y relaciones que ayuden al estudiante avanzar, de manera progresiva, hacia un nivel de razonamiento avanzado. Para esta componente se sugiere la creación de una serie de actividades que potencialicen el establecimiento de relaciones significativas que servirán de apoyo para conseguir tal progreso.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se abordó, de manera específica, el diseño del módulo de instrucción (módulo de aprendizaje) en correspondencia con las fases de aprendizaje y como respuesta al problema de investigación planteado. Las actividades surgidas del trabajo de campo permitieron caracterizar cada una de las fases y determinar por cuál de éstas debe pasar un estudiante. En este capítulo se muestra la manera como se logra confeccionar las

actividades que hacen parte del módulo de instrucción y al mismo tiempo su aplicación, teniendo en cuenta que el módulo cumple una doble función. Una de ellas es discriminar la fase en la que se encuentra un estudiante de acuerdo a su razonamiento al momento de abordar cada una de las actividades y la otra es que, el módulo es, en sí mismo, una experiencia de aprendizaje, que favorece el progreso de los estudiantes ubicados en un nivel II de razonamiento al nivel inmediatamente superior, para el concepto de convergencia de una suma infinita de términos positivos.

De acuerdo con el modelo educativo de van Hiele, el progreso de los estudiantes a través de los niveles de razonamiento, se da de manera progresiva, partiendo desde un nivel visual hasta llegar a un nivel de formalización; dichos niveles son secuenciales y jerárquicos, lo que implica que un estudiante no podrá progresar a un nivel de razonamiento si no domina el inmediatamente anterior, así mismo, los conceptos implícitamente comprendidos en un nivel, llegan a ser explícitamente comprendidos en el siguiente, y de esta manera se pone de manifiesto el nivel de comprensión frente al concepto estudiado.

Lograr el progreso en los niveles de razonamiento es función de las fases de aprendizaje; cada una de ellas posee unos descriptores propios que constituyen las características que indican cuáles son las actividades que un estudiante debe estar en condiciones de realizar y los conceptos que debe poseer para avanzar en cada una de las fases y al mismo tiempo, adquirir elementos para avanzar hacia un nivel III de razonamiento. Es así como un estudiante logra progresar en los niveles de razonamiento, atravesando cada una de las fases y apropiándose de los conceptos abordados en ellas. Para la consecución de estos objetivos es fundamental el papel de la instrucción y es labor del docente diseñar experiencias de aprendizaje que propugnen por el perfeccionamiento en los niveles de pensamiento.

Previo al diseño del módulo, se usó un guión entrevista, el cual se fue refinando en el transcurso de las entrevistas con los estudiantes, lo que permitió ir elaborando cada uno de los descriptores de las respectivas fases, para lograr el diseño de las actividades correspondientes a cada una de ellas.

El módulo de instrucción es una propuesta metodológica para lograr el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento; contiene una serie de experiencias de aprendizaje, diseñadas a la luz de cada una de las fases del modelo; su estructura contempla los elementos fundamentales del proceso de aprendizaje según van Hiele, como lo son: el aumento progresivo del lenguaje, el refinamiento de las estructuras mentales mediante la creación de redes de relaciones, los procesos de visualización y la exploración de los conocimientos que poseen los estudiantes, a través de preguntas que los lleven a razonar, inferir y conjeturar acerca del concepto.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se hace la descripción del trabajo de campo realizado y el análisis de los resultados obtenidos durante el proceso de investigación, haciendo énfasis en el alcance del estudio, en relación con el progreso que presentan los estudiantes en cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele.

La presente investigación se encuentra enmarcada en un enfoque mixto, pues involucra “un proceso de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos”. El uso de este enfoque favorece profundizar la interpretación y análisis realizados en procesos investigativos, en la medida en que permite cuantificar datos cualitativos, lo cual es crucial en la validación del presente trabajo de investigación.

El presente estudio aplicó un guión entrevista de carácter socrático, el cual se refinó y perfeccionó, hasta materializarse en un módulo de aprendizaje. Dicha entrevista permitió determinar el nivel de evolución de los procesos de razonamiento de los estudiantes. Gracias al refinamiento progresivo del lenguaje, a la forma de argumentar y explicar cómo comprendían el concepto objeto de estudio, pudimos determinar si hubo o no progreso en el nivel de razonamiento; cabe anotar que, lo anterior, está en estrecha relación con el cumplimiento de los descriptores propuestos para cada fase, pues estos caracterizan el progreso en el razonamiento, como también lo hace el trabajo de los estudiantes con los mapas conceptuales. Todos los análisis de carácter cualitativo realizados, fueron materia

prima para construir un test, que se aplicó a una amplia población y que, además, permitió corroborar mediante un análisis cuantitativo las conclusiones obtenidas a través del análisis de tipo cualitativo.

Población y Muestra

La investigación se llevó a cabo con estudiantes de los últimos niveles de Educación media de dos instituciones educativas: Presbítero Camilo Torres Restrepo, con la participación de 35 estudiantes de grado once, en la cual se aplicó el guión entrevista que fundamentó el perfeccionamiento y desarrollo del módulo, y el colegio Pedro Justo Berrío, con la participación de 213 estudiantes, de los grados 10° y 11°. El test, producto del módulo, se aplicó a los estudiantes de ambas instituciones.

Aplicación del módulo de instrucción y trabajo de campo

El trabajo de campo se realizó en la institución educativa Presbítero Camilo Torres Restrepo; se desarrolló en tres etapas, la primera de ellas consistió en la aplicación del test denominado “Áreas de escaleras”, la aplicación de dicho test permitió detectar los diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes participantes en el estudio. Tanto los estudiantes que fueron clasificados en el nivel II, como los otros, participaron del proceso de aprendizaje para el cual se desarrollaron actividades en relación directa con el objeto de estudio y que les brindó la oportunidad de expresar inquietudes frente al concepto, socializar conclusiones y construir nuevos conocimientos.

Los siguientes son los resultados obtenidos por los estudiantes, en la aplicación del test “Áreas de escaleras”:

Número de casos en cada conglomerado

Niveles de razonamiento	I	11.000
	II	10.000
	III	10.000
Válidos		31.000
Perdidos		.000

De acuerdo con los resultados anteriores, se puede observar que el 68% de la población están ubicados en el nivel II de razonamiento, mientras que el 32% pertenecen al nivel III.

Con el análisis de los resultados obtenidos se dio inicio a la segunda etapa, y con ésta al proceso de intervención. Lo primero que se hizo fue un rastreo bibliográfico acerca de cuáles eran las herramientas metodológicas pertinentes para este estudio, que estuvieran en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele, de esta búsqueda concluimos que los mapas conceptuales, gracias a sus características, presentan una estrecha relación con la teoría del modelo educativo, permitiendo materializar la red de relaciones construida por los estudiantes en un proceso de aprendizaje.

Los estudiantes recibieron una capacitación acerca de la construcción de mapas conceptuales, durante aproximadamente dos semanas, enfatizando en el diseño de éstos en las áreas de matemáticas, lengua castellana e informática.

En el área de informática, los estudiantes fueron capacitados acerca del uso del software Cmaptools. Esta herramienta fue utilizada en muchos de los mapas realizados en las diferentes áreas.

La tercera etapa del trabajo de campo empezó con el diseño un guión entrevista de carácter socrático, algunas de las preguntas del guión fueron inspiradas en el trabajo de Jurado y Londoño (2005); el módulo de instrucción presentado es el resultado de un proceso de recopilación de las experiencias surgidas del diálogo directo o de entrevistas con los estudiantes, a medida que se fue avanzando en el proceso de intervención. Se tuvo especial atención a la socialización, dada la importancia de las respuestas de los estudiantes producto de su pensamiento discursivo; además, gracias a sus aportes, participaciones, observaciones y preguntas, fue posible concebir el diseño del módulo de instrucción (módulo de aprendizaje).

Con los datos obtenidos, en el trabajo de campo, fue posible mejorar las experiencias de aprendizaje y, a su vez, el guión entrevista; cabe anotar que se hizo un considerable esfuerzo por establecer, de manera precisa y coherente, la estrecha relación existente entre el guión entrevista y el modelo teórico, para conseguir que las actividades estuvieran enmarcadas en cada una de las fases, y a la vez garantizar que, el paso por cada una de ellas, favoreciera el progreso a un nuevo nivel de razonamiento. Gracias a todo el proceso de transformación y mejoramiento que sufrió el guión entrevista durante el lapso de tiempo destinado para el trabajo de campo, se logró la construcción y el refinamiento del módulo de instrucción propuesto para lograr los objetivos inicialmente planteados en el presente estudio.

La siguiente es una descripción del desarrollo del trabajo de campo, en la cual se destaca la participación de los estudiantes en el progreso de la intervención y su desempeño en cada una de las fases de aprendizaje.

Fase de Información

Las primeras actividades del módulo de instrucción estaban enmarcadas en una fase de información. La intención en esta fase era la de afianzar conceptos básicos de geometría, necesarios para la construcción del concepto objeto de estudio. Las actividades realizadas en esta fase fueron desarrolladas satisfactoriamente, los estudiantes mostraron un buen desempeño al momento de reconocer y construir figuras geométricas, así como también en su clasificación de acuerdo con sus propiedades.

En esta fase se empezó a trabajar en un marco visual, ésta fue la forma de introducir el concepto. Se redujo al máximo la utilización de expresiones aritméticas para evitar problemas de comprensión derivados de la notación, el concepto de área fue abordado durante esta fase, así como también la definición de relaciones parte – todo, para encontrar razones entre áreas; una vez terminadas las actividades de la fase uno, retomamos las conclusiones principales de los estudiantes y sus razonamientos, para revisar los

descriptores de fase propuestos, refinarlos y mejorarlos, de acuerdo con los objetivos definidos en la fase.

Fase de Orientación Dirigida

En la fase de orientación dirigida, los estudiantes empiezan a hacer procesos de razonamiento infinito, las actividades se proponen en un marco visual – geométrico, con el fin de inducirlos a la construcción del concepto; en esta fase empiezan a asociar sumas de áreas con representaciones aritméticas. Para los estudiantes, la idea de infinito, está relacionada con “no tener fin”, este concepto es poco utilizado por ellos, y por esta razón, no se sentían familiarizados con él. Muestra de lo anterior es que, cuando se les pide a los estudiantes, que dividan un rectángulo a la mitad, de todas las formas posibles, la mayoría de las respuestas dadas corresponden a cantidades finitas, no mayores de 4, en casi todos los casos. El carácter socrático del módulo, exige que, mediante las preguntas que se plantean en las discusiones, los estudiantes logren confrontar sus ideas y tengan la posibilidad de pensar en otras opciones de respuesta. En ningún momento a los estudiantes se les da a conocer la respuesta, ésta se deduce a partir de la confrontación.

Otras actividades propuestas para introducir el concepto de infinito, consisten en realizar procesos de división y sombreado, este mecanismo es utilizado para mostrar, por inducción, la forma de sumar áreas sombreadas. Una de las mayores dificultades radicó en el hecho de que, los estudiantes, lograran comprender que es posible hacer divisiones sucesivas a un área sin sombrear cuando se hace un *zoom* a dicho sector, algunas de las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, luego de las socializaciones fueron:

R=



Primero que todo se divide el triángulo en la mitad y se sombrea un pedazo lo que se convierte en $\frac{1}{2}$, luego se vuelve a dividir y sombrea y se convierte en $\frac{1}{4}$, inmediatamente se hace lo mismo y ya se convierte en $\frac{1}{8}$, luego ese pequeño espacio se vuelve a dividir en la mitad y se sombrea lo mitad de éste lo que equivale a $\frac{1}{16}$ y así sucesivamente.

Con este tipo de deducciones y gracias a las preguntas que orientaron el trabajo, los estudiantes empezaron a proponer representaciones aritméticas de infinitos términos, sin lograr determinar su resultado.

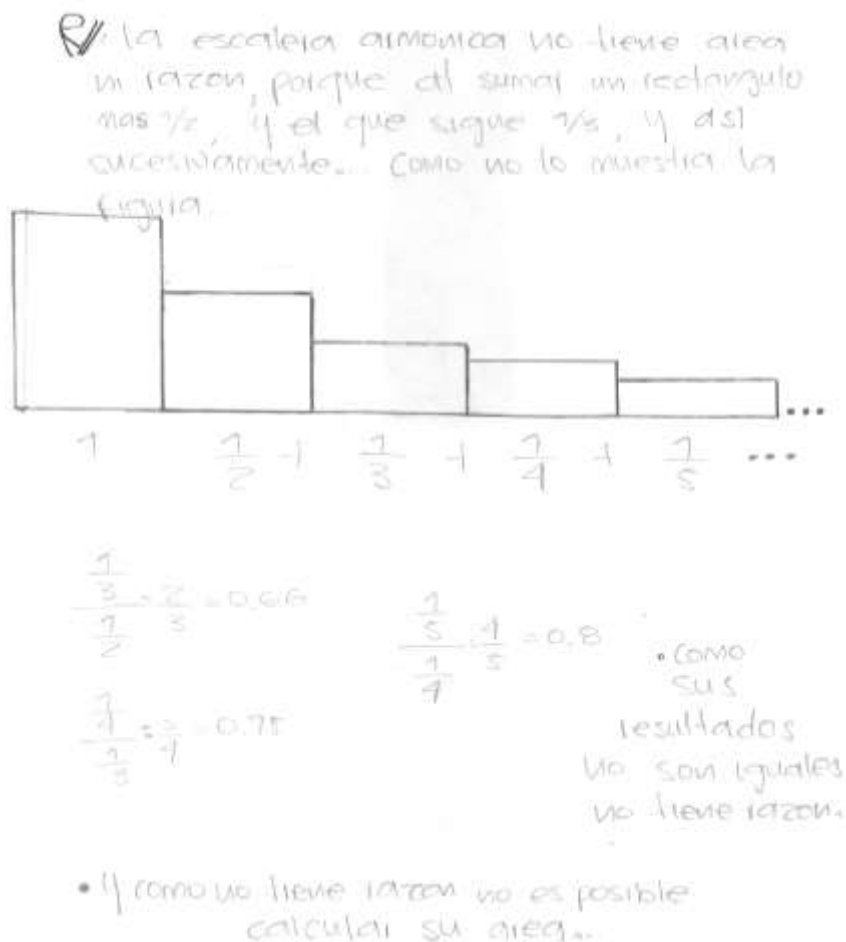
En esta fase los estudiantes comprenden que es posible construir una escalera infinita decreciente a partir de un rectángulo dividido a la mitad sucesivas veces. Esta relación permite que comprendan con más claridad el concepto de infinito, pues según ellos, “*en la escalera es más sencillo ver infinitos rectángulos*”. Entre las conclusiones obtenidas en esta fase, se destacan las siguientes: Los estudiantes comprenden el concepto de razón entre áreas y lo relacionan con el hecho de que los rectángulos de los escalones se hagan cada vez más pequeños. Generalmente esto ocurre cuando la razón es menor que 1, y ese es el caso de las escaleras estudiadas en esta fase, pues las escaleras con razón mayor que 1 o sin razón se estudiaron en la fase 3.

Fase de Explicitación

Las actividades de la fase 3, retoman, como mecanismo para la visualización, las escaleras infinitas decrecientes. En éstas, se observó en los estudiantes una evolución en sus razonamientos, comprenden que la suma de infinitas áreas puede ser finita y relacionan el área de una escalera infinita decreciente con el área del rectángulo que la origina.

Los estudiantes, en las discusiones, concluyeron que, el hecho de que la escalera presentada sea creciente implica que no se pueda determinar el área, y esta idea se fortalece cuando se

les presenta la escalera armónica, para la cual dispusieron los rectángulos de manera tal que lograron observar que se podía volver creciente. Pocos estudiantes relacionaron este hecho con que la escalera no tuviera razón, aunque la mayoría si estuvieron en condiciones de explicar porque la razón de dicha escalera no existía.



El carácter socrático del módulo, entonces, implica tomar las respuestas como punto de partida para mostrar sus carencias, cuando las haya, e ir llevando al estudiante a un nivel superior, mediante la elección de experiencias que faciliten este hecho. Es por esto que, en esta fase, los estudiantes reunidos en equipos, exponían las principales conclusiones construidas hasta el momento; es de destacar que muchos de ellos, lograron inferir las condiciones necesarias para que una escalera infinita tenga área, otros estuvieron cerca pero sólo lo comprendieron después de las exposiciones. En esta fase se observó, además, que los estudiantes recurren cada vez menos a las representaciones visual – geométricas.

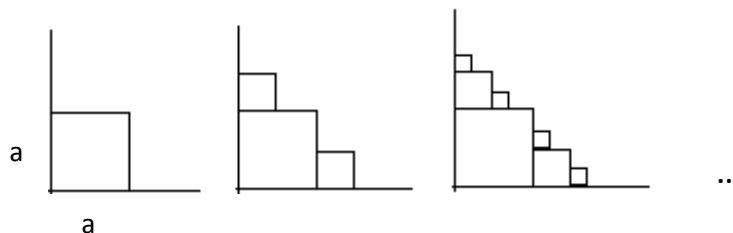
Durante el trabajo de campo se evidenció el mejoramiento del lenguaje de los estudiantes, éste es fundamental porque ayuda a detectar su nivel de razonamiento. Inicialmente, los mapas o esquemas construidos por los estudiantes no presentaban suficientes relaciones significativas, no mostraban tanta claridad frente al concepto, como si se observa en los mapas presentados para esta fase.

La realización de los mapas conceptuales, sumado al uso del lenguaje, que cada vez era más apropiado para el nivel que se quería lograr, evidenciaron el progreso de los estudiantes por cada una de las fases, además, de que tan cerca está el estudiante de progresar a un nivel III de razonamiento.

Fase de Orientación Libre

Las actividades de la fase 4 recogen todos los conceptos vistos y los llevan a otros contextos; los estudiantes comprenden que la suma de los infinitos términos de la escalera infinita decreciente de razón un medio es uno y utilizan este hecho para deducir la suma de la áreas de otras figuras.

Uno de los problemas abordados en esta fase es el de la “escalera con peldaños” de Orton, dicha escalera se construye a partir de un cuadrado de lado a , al lado derecho y en la parte superior se disponen 2 cuadrados de lado $\frac{a}{2}$, luego se disponen 4 cuadrados de lado $\frac{a}{4}$ y así sucesivamente, como se observa en la figura:



La construcción de dicha escalera les permitió llegar a conclusiones como:

“Para la escalera de Orton, se deduce la siguiente suma de áreas $a^2 + 2\frac{1}{2^2}a^2 + 4\frac{1}{2^4}a^2 + 8\frac{1}{2^8}a^2 + \dots = 2a^2$, porque a es la base del cuadrado mayor y su área a^2 , los cuadrados que se construyen luego son la mitad del primero, o sea $\frac{1}{2}a^2$, o también, por separado, sería lo mismo que tener 2 veces un cuarto de a^2 , y para los otros peldaños sería cuatro veces un octavo de a^2 , y así sucesivamente; además, sé que da $2a^2$ porque en conclusión voy a tener la suma de la mitad de a^2 , con un cuarto de a^2 , un octavo... y eso da a^2 , más el área del primero a^2 , me dio $2a^2$. ”

Las anteriores conclusiones, fueron expuestas por los estudiantes durante las socializaciones realizadas, otros, antes de las socializaciones, habían propuesto solucionar el problema de la siguiente manera:

DETERMINANDO LA BASE DEL TRIÁNGULO,
SOMANDO LAS EXPRESIONES.

$$\bullet a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \dots + \frac{a}{2^n} = 2a$$

Y SEGUIMOS, COMO EL LADO DE LA BASE
ES IGUAL A LA ALTURA POR LO CUAL EL
ÁREA DEL TRIÁNGULO DA COMO RESULTADO..

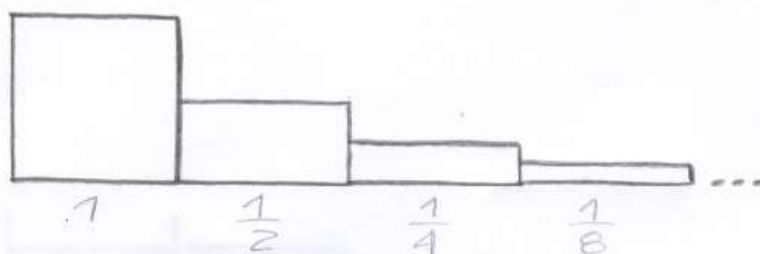
$$A_{\Delta} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{2a \cdot 2a}{2} = 4a^2 = 2a^2$$

Y ESO SE DEDUCE A SI...

Fase de Integración

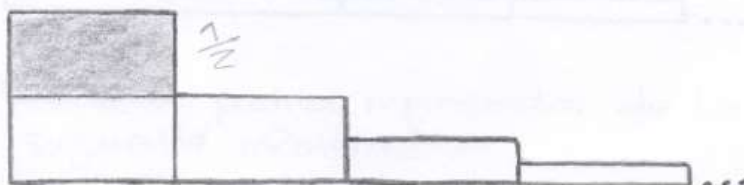
En esta fase los estudiantes, en general, han logrado construir los principales elementos que constituyen el concepto objeto de estudio; para esta fase se trabajó con la escalera de Oresme. La mayoría de los estudiantes lograron comprender el problema de Oresme y sus razonamientos se apoyaron en las conclusiones de las fases anteriores.

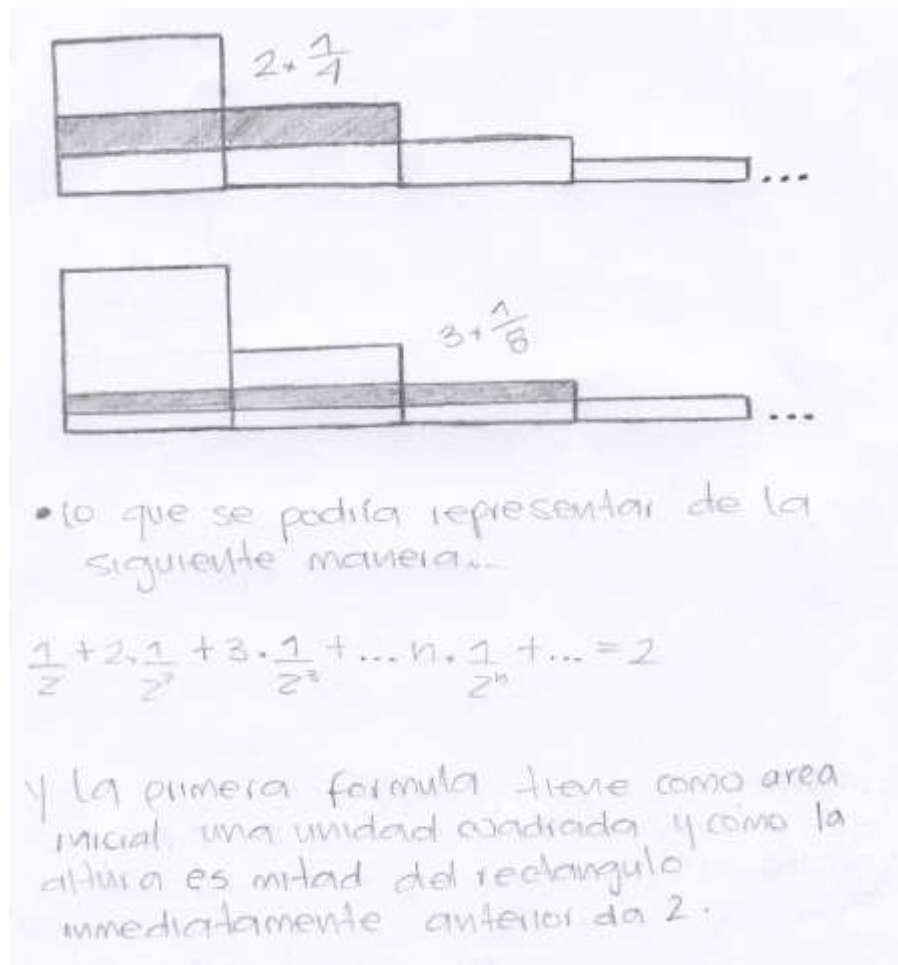
R// La primera fórmula sería...



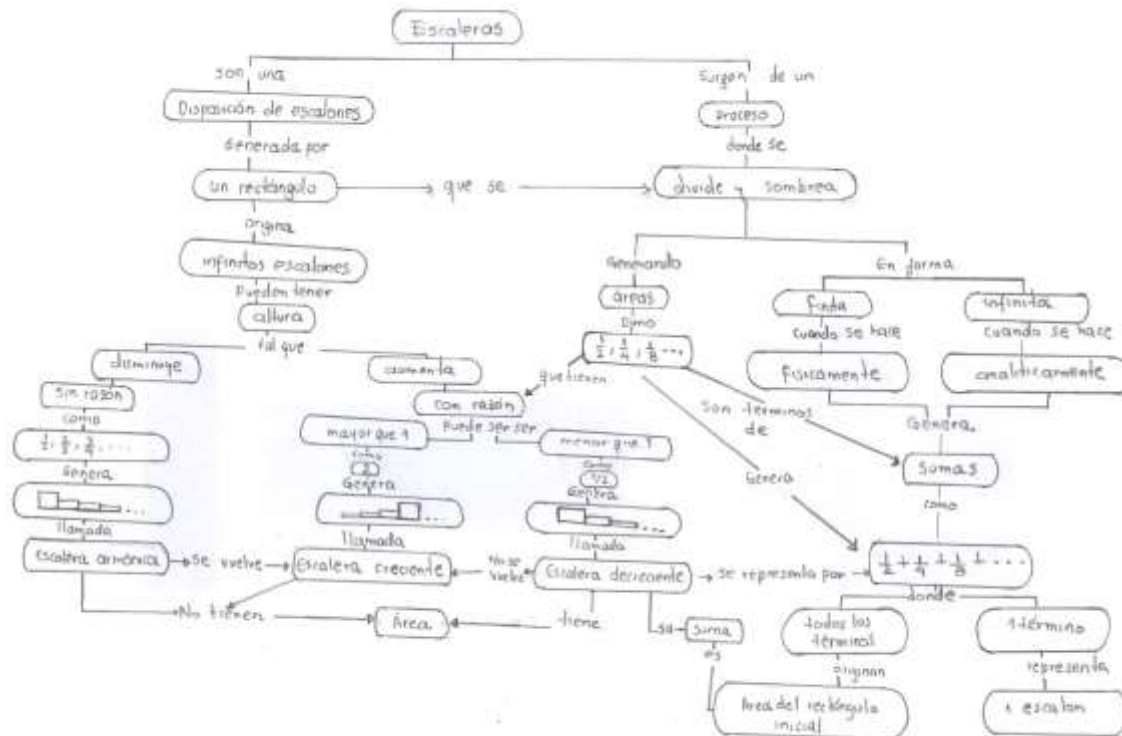
- lo que sería la suma de el primer rectángulo y las particiones, o sea,
 $1+1=2$

* La segunda fórmula sería...





Una vez terminado el trabajo de campo y solucionado el módulo en su totalidad, se logró establecer, cuales estudiantes, lograron progresar al nivel tres de razonamiento. Presentaron un mapa conceptual que integraba todos los conceptos abordados y lo expusieron dicho mapa; la exposición debía dar cuenta de los descriptores de las fases 4 o 5, para poder determinar si hubo o no progreso. A continuación se presenta uno de los trabajos realizados por un estudiante:



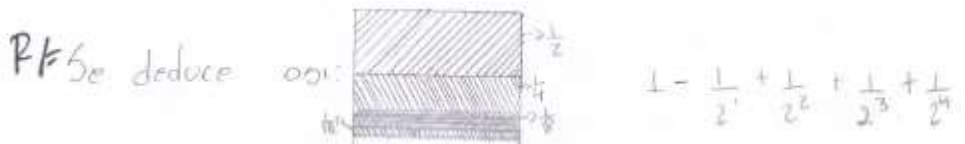
Resultados obtenidos por el estudiante que no fue clasificado en el Nivel III de razonamiento

En el trabajo de campo, se observó que durante casi todo el proceso, uno de los estudiantes no logró comprender los razonamientos que hacían sus compañeros y una de las principales dificultades radicó en el hecho de que no lograba llegar a hacer razonamientos infinitos a partir de procesos finitos. Algunas de las respuestas dadas por el estudiante, durante el trabajo de campo, se presentan a continuación, éstas evidencian las dificultades para comprender algunos conceptos, por ejemplo, cuando se indaga acerca de cuantas formas existen para dividir una figura geométrica a la mitad, en nuestro caso el rectángulo. El estudiante, aún después de haber estado en las socializaciones de los compañeros, responde:

Rf El proceso físicamente es posible pues siempre se va a tomar la mitad de la inmediatamente anterior hasta quedar sombreado totalmente.

Análiticamente para lo siguiente se va creando un proceso analítico donde va a llegar a un fin y va ser un número finito.

El proceso de razonamiento del estudiante se vio obstaculizado porque, aunque logró comprender los procesos de división y sombreado y reconocía relaciones parte – todo, no deducía la suma de áreas sombreadas en relación con el área original del rectángulo y las áreas sin sombreadar.



Así mismo cuando se preguntó si es posible disponer un rectángulo dividido y sombreado indeterminadas veces como una escalera infinita decreciente, respondió:

Rf El rectángulo se puede dividir de manera infinita decreciente y la escalera es un rectángulo dividido en infinitas maneras transpuestas por el rectángulo anterior.

Acerca de la escalera armónica, el estudiante acepta que no tiene razón, sin embargo, no es claro cuando trata de explicar que dicha escalera no tiene área.

No tiene razón porque no es estable y no sera posible calcularla

Porque el area es infinito y no se puede calcular.

En general, el estudiante presentó problemas para comprender el concepto objeto de estudio y estas se hicieron evidentes en la mayor parte del trabajo de campo. Entre las principales causas que originaron las dificultades mostradas, cabe anotar que el estudiante fue inconstante con su asistencia a la institución y respondió muy poco con las actividades propuestas.

Validación del módulo

Para validar el módulo de instrucción diseñado, se realizó un test (ver anexo) que contiene 35 preguntas derivadas de éste, las cuales, además de estar en correspondencia con los descriptores de las fases, eran las más significativas para la construcción del concepto objeto de estudio. Las opciones de respuesta contenidas en el test fueron obtenidas a través del trabajo de campo realizado con los estudiantes durante el desarrollo del módulo.

La estructura del test conserva las características del módulo, en el cual se da importancia al carácter socrático de las preguntas, por tanto, los conocimientos previos, los aportes de información, el pensamiento discursivo y la problematización de las ideas, se hacen necesarias para este proceso.

Antes de aplicar el test, al estudiante, se le aclara su objetivo y la disposición de las preguntas, de tal manera que, se familiarice con el tipo de prueba que va a presentar.

El test fue aplicado a 15 estudiantes de la universidad de Antioquia, clasificados en el nivel dos de razonamiento. Éstos, sin recibir instrucción, lo respondieron y luego hicieron las observaciones que consideraron pertinentes. Dichas observaciones permitieron mejorar el

test y el módulo, dado que fueron la base para identificar las fortalezas y dificultades del mismo.

El trabajo realizado facilitó la identificación y análisis de las preguntas que presentaron mayor dificultad. En algunos casos se hizo necesario replantearlas, así también como destacar algunas respuestas ambivalentes, lo que generaba problemas en el desarrollo del test. En el análisis de las respuestas se pudo determinar cuál era la posición más conveniente para algunas preguntas y la necesidad de agregar o eliminar ciertos ítems, de modo que se favoreciera la construcción de la red de relaciones. El test fue sometido a diferentes pruebas antes de ser aplicado a la población en la cual se validaría, con el fin de refinarlo y mejorarlo hasta obtener un instrumento que realmente enriqueciera el módulo de instrucción.

Tratamiento Estadístico

Para el presente estudio se considera pertinente hacer un análisis estadístico adecuado, que logre confirmar las conclusiones del trabajo de campo, y verificar el progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes. Debe, por tanto, permitir, que su eficiencia pueda medirse como una herramienta que posibilite su masificación.

Lo anterior requiere elegir instrumentos estadísticos que nos faciliten, de un lado, comprobar la uniformidad en grupos de respuestas (patrón ideal), de modo que estos estén en correspondencia con los descriptores de cada una de las fases de aprendizaje, para reconocer el progreso en el nivel de razonamiento, y por otro, los instrumentos también deben facilitar el proceso de automatización de la clasificación de los estudiantes en cada una de las fases. Se debe hacer, entonces, la aplicación del algoritmo k- medias y un análisis discriminante que optimice la comprobación de la robustez de los resultados obtenidos.

Para la realización del tratamiento estadístico usamos el programa SPSS, con el fin de generalizar los resultados obtenidos en el test, y masificar la prueba. El programa contiene,

entre sus análisis estadísticos, el de la clasificación de conglomerados y análisis discriminantes.

Análisis de Cluster

El análisis de cluster es un método estadístico multivariante que clasifica automáticamente datos. Este tipo de análisis define una serie de técnicas algorítmicas, cuyo objeto es el de buscar grupos, de individuos o variables, que presenten similitudes y agruparlos en conglomerados. Dada una tabla de casos–variables, la técnica trata de situar los casos en grupos homogéneos para hacer una clasificación de ellos, de manera que, los individuos que puedan ser considerados similares sean asignados a un mismo cluster, mientras que los individuos que no lo son, se localicen en cluster distintos.

Según Pérez (2001), “La creación de grupos basados en similaridad de casos exigen una definición de este concepto, o de su complementario distancia entre individuos, la variedad de formas de medir diferencias multivariantes o distancias entre los casos proporciona diversas posibilidades de análisis”.

Existen dos tipos de análisis de clusters: jerárquicos y no jerárquicos. En los primeros los clusters de niveles más bajos son contenidos en otros de niveles superiores, y en los segundos, se asignan los casos a grupos diferenciados, sin que unos dependan de otros; a su vez, los clusters no jerárquicos se clasifican en: disjuntos, donde cada caso corresponde a uno y sólo un grupo, y los solapados, en el que un caso puede pertenecer a más de un grupo.

Una vez realizado el análisis de cluster, conviene aplicar técnicas estadísticas que permitan determinar la relevancia de los grupos creados. Una de ellas es el análisis discriminante, que busca, de una parte, la separación o discriminación de grupos, y de otra, la predicción o asignación de un objeto a un grupo previamente definido; según Díaz (2002), “en el análisis discriminante se obtiene una función que separa entre varios grupos definidos a priori, esta función es una combinación, generalmente lineal, de las variables que minimiza los errores

de clasificación”. Tanto el análisis de cluster como el discriminante, se utilizan para clasificar individuos en categorías o grupos, sin embargo, se diferencian porque en el análisis discriminante es necesario especificar los grupos de manera objetiva, ajeno a la medida de las variables en los casos de la muestra, mientras que el análisis de cluster define grupos tan distintos como sea posible formando grupos homogéneos de conglomerados.

Al iniciar con el análisis de cluster es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La selección de las variables relevantes para identificar los grupos.
- La elección de la medida de proximidad entre los individuos y elección del criterio para agrupar individuos en conglomerados.

Para el presente estudio, la selección de las variables relevantes para identificar los grupos, requirió agrupar en bloques los descriptores que caracterizan el razonamiento de los estudiantes a medida que progresan en cada una de las fases. Se definieron cinco bloques, cada bloque contiene un conjunto de preguntas que buscan dar cuenta de los descriptores correspondientes a las fases. Los bloques están distribuidos de la siguiente manera:

Bloque 1

Preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, estas preguntas están estrechamente relacionadas con los descriptores definidos en la fase de información, indagan por los conocimientos previos de los estudiantes, sobre las propiedades de los cuadriláteros, el concepto de área, y el proceso de división y sombreado que permite identificar relaciones parte todo.

Bloque 2

Preguntas 8, 9, 12, 13, 18, 19, 25, 26, las preguntas de este bloque tienen como finalidad dar cuenta de los descriptores de la fase 2, de acuerdo con éstos los estudiantes realizan procesos de razonamiento finito e infinito, comprenden el concepto de razón, representan aritméticamente sumas infinitas, establecen la relación existente entre un rectángulo dividido indefinidamente y una escalera infinita; este tipo de preguntas familiarizan al estudiante de

manera directa con el concepto objeto de estudio y le permiten empezar a establecer las condiciones necesarias para definir cuándo existe la suma de infinitos términos.

Bloque 3

Preguntas 10, 11, 14, 15, 22, 29, 30, 31, las preguntas de este bloque están en estrecha relación con los descriptores correspondientes a la fase de explicitación, un estudiante en esta fase se caracteriza porque identifica la estructura de las escaleras infinitas decrecientes y crecientes, reconoce si éstas tiene o no área, y de ahí deducen la suma de una escalera infinita, además comprende porque la escalera armónica no tiene área y relaciona este hecho con los conceptos construidos en las otras fases.

Bloque 4

Preguntas 16, 17, 20, 27, 28, 32, en este bloque están contenidos descriptores que exigen mayor apropiación del concepto, dichos descriptores son de la fase 4 y permiten verificar la evolución en el razonamiento a través de las fases anteriores. Este bloque de preguntas permiten verificar como los estudiantes determinan la suma de una escalera infinita, que relacionan dicha escalera con una suma aritmética. Además, dado que el bloque contiene preguntas de tipo teórico, es posible comprobar que el estudiante tiene claridad frente a los procesos realizados en fases anteriores. Esto le permitirá abordar problemas presentados en otros contextos.

Bloque 5

Preguntas 21, 23, 24, 33, 34, 35, en este bloque las preguntas están en correspondencia con los descriptores de la fase 5. Un estudiante que responda este conjunto de preguntas está en condiciones de deducir el concepto de convergencia de una serie infinita, a partir de problemas relacionados con una componente visual geométrica, argumentando las condiciones necesarias para determinar la existencia de una suma infinita.

Una vez definidas las variables que permitieron definir los clusters, se realizó la elección de la medida de proximidad entre los individuos y la elección del criterio para agrupar individuos en conglomerados. Dado que, a medida que se avanza en las fases la exigencia en las preguntas aumenta, fue necesario asignar a cada bloque un valor proporcional al grado de dificultad de éstas. En el conjunto de preguntas del bloque 4 y 5, se concentra el mayor porcentaje, puesto que éstas son las preguntas cuyos descriptores definen el progreso que se ha alcanzado frente a un nuevo nivel de razonamiento. Los siguientes son los porcentajes asignados a cada bloque de preguntas:

Porcentajes asignados a los bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	10%	13%	17%	27%	33%

Descripción del algoritmo de las K- medias

El análisis de cluster no jerárquico, utilizado en el presente estudio, es el algoritmo de las K-medias. Éste es un método que asegura cada elemento al *cluster* que tenga el centroide más cercano, tiene como finalidad la determinación de la existencia de grupos o conglomerados.

De acuerdo con Lema Tapias (2003), el proceso comprende tres etapas:

1. Partición de los elementos en k *clusters*, esta partición también puede hacerse especificando k centroides iniciales conocidos como punto semilla.
2. Repasar la lista de elementos, asignándolos al *cluster* cuyo centroide (media) este más cercano, prefiriendo, usualmente, la distancia euclideana, de los datos estandarizados. Se recalcula el centroide tanto para los *clusters* que reciben como para los que donan el elemento.

3. Se repite el paso 2 hasta que concluyan las reasignaciones.

El experto identifica cada conglomerado con cada una de las fases de aprendizaje de van Hiele. La localización del centro, cuando se decide usar las medias actualizadas (la semilla) dadas por el experto, se actualiza cada vez que se añade un dato. Cuando se hayan asignado todos los datos, el proceso se repite hasta que la solución converja.

Entonces, se clasifican todos los casos asignándoles el centro de conglomerado más próximo. El algoritmo comienza por los centros de los conglomerados que se especifican, es decir, le damos al algoritmo los centros iniciales de los conglomerados para que inicie su ejecución. Además le especificamos el número de conglomerados que se desean. Dado un proceso iterativo, después de seleccionar los centros iniciales, se actualizan los centros de los conglomerados. Todos los casos se agrupan alrededor del conglomerado con el centro más próximo.

Medida de la confiabilidad: Alfa Cronbach

Existen diferentes métodos para determinar la confiabilidad de un instrumento. Entre las medidas de consistencia interna encontramos el alfa de Cronbach, que asigna un coeficiente de 0 a una confiabilidad nula y 1 a una confiabilidad máxima. Este método permite comprobar si el instrumento que se está evaluando selecciona información incorrecta y por tanto nos llevaría a conclusiones equivocadas o, si por el contrario, se trata de un instrumento fiable que hace mediciones estables y consistentes. El método alfa es un coeficiente de correlación al cuadrado que mide la homogeneidad de las preguntas, promediando todas las correlaciones entre todos los ítems para ver que, efectivamente, se parecen.

La interpretación consiste en que cuando el coeficiente se acerca a 1, la fiabilidad es mayor. Se considera que a partir de 0,80 la fiabilidad es válida. El presente estudio utilizó el método Alfa de Cronbach, y se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de elementos
.979	.980	35

Procedimiento de obtención y codificación de los datos

Como se había mencionado, el presente trabajo tomó dos muestras. Llamaremos muestra I al grupo correspondiente a la institución Presbítero Camilo Torres Restrepo y muestra II a los grupos del colegio Pedro Justo Berrío.

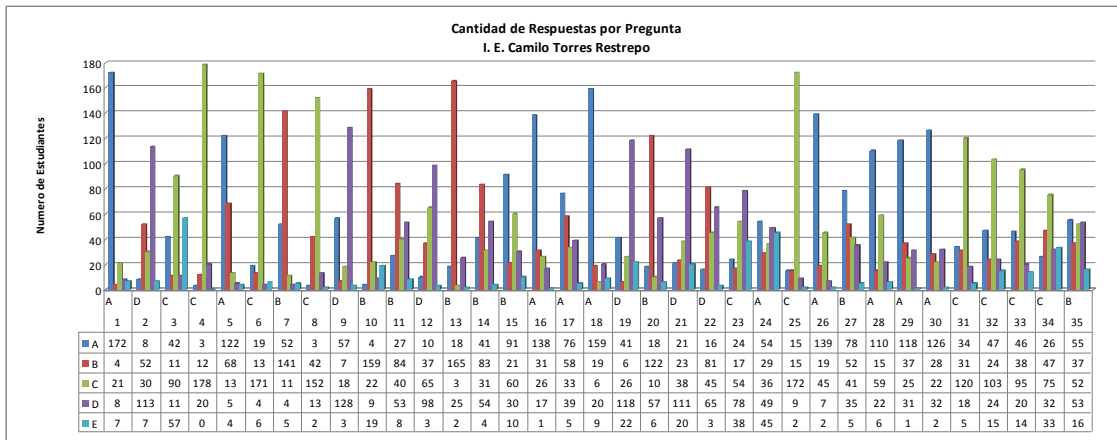
Consideramos un patrón ideal de respuestas para cada una de las 35 preguntas del test, que indica la mejor opción; esta opción sería también la escogida por aquellos estudiantes que manifiestan progreso en cada una de las fases frente al concepto objeto de estudio.

Para la codificación de los datos, fue necesario asignarle el valor de 0 a las preguntas que no coincidieron con el valor del patrón ideal presentado en la tabla y el valor de 1 a aquellas que coincidieron.

Las respuestas válidas, son aquellas que sirven para el estudio estadístico, se consideran como no válidas las respuestas en blanco o con dos opciones marcadas.

Las respuestas marcadas con “e”, fueron analizadas una por una, para verificar la posibilidad de que éstas fueran asimilables a alguna de las alternativas de respuesta, de ser así se le asignaba a la respuesta conveniente.

Una vez realizada la asignación anteriormente descrita, se observa que los estudiantes de la institución Camilo Torres Restrepo, obtienen los siguientes resultados:



Con los resultados obtenidos se procede a hacer la clasificación de los estudiantes en cada una de los cluster con la ayuda de un paquete estadístico SPSS.

Clasificación en las Fases de Aprendizaje

Utilizamos el algoritmo de k – medias, por ser uno de los métodos de agrupación alrededor de centros móviles, con el propósito de confirmar que, en el conjunto de la muestra, se pueden distinguir cinco grupos diferenciados, y que éstos están en correspondencia con cada una de las fases de aprendizaje.

Para la determinación de los centros iniciales, con los cuales comienza el algoritmo, es necesario adoptar un criterio de pre-clasificación acorde con la teoría de van Hiele y con los resultados experimentales obtenidos con el guión entrevista. Dicho criterio se denominará Criterio A y se presenta a continuación:

Criterio A: Para agrupar individuos en bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	10%	13%	17%	27%	33%

Para determinar los centros iniciales se calcularon las medias de “aciertos”, (coincidencias con el patrón ideal de respuestas), es decir, los porcentajes de aciertos en cada una de las preguntas y para cada uno de los cinco grupos asignadas a cada una de las fases, teniendo en cuenta los porcentajes asignados a cada bloque. La siguiente tabla muestra la asignación de los centros iniciales:

Centros iniciales Camilo Torres Restrepo

Pregunta	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0.5	1
3	0	0	0	1	0.9
4	0	0	1	0.5	0.8
5	0	0	1	0	0.6
6	0	0	0	1	0.9
7	0	0	0	0.5	0.7
8	0	0	1	1	0.7
9	0	0	1	1	0.8
10	0	0	1	0.5	0.8
11	0	0	0	1	0.8
12	0	0	1	0.5	0.6
13	0	0	1	1	0.9
14	0	0	0	0.5	0.8
15	0	0	1	1	0.6
16	0	0	1	1	1
17	0	0	0	0.5	1
18	0	0	1	1	0.7
19	0	0	1	0	0.8
20	0	0	0	0.5	0.9
21	0	0	1	0	0.9

22	0	0	0	0.5	0.5
23	0	0	0	0.5	0.9
24	0	0	0	0.5	0.9
25	0	0	1	1	0.9
26	0	0	1	0.5	0.8
27	0	0	0	1	0.8
28	0	0	0	0.5	0.9
29	0	0	0	0.5	0.8
30	0	0	0	0.5	0.8
31	0	0	0	1	0.7
32	0	0	1	0.5	0.9
33	0	0	1	0	0.9
34	0	0	0	0	0.7
35	0	0	0	0	0.3

Con el criterio anteriormente definido y los centros iniciales calculados, se asigna a cada estudiante el cluster correspondiente, obteniendo los siguientes resultados:

Pertenencia a los conglomerados

Número de caso	Conglomerado	Distancia
1	5	2.259
2	5	1.881
3	5	1.779
4	5	2.768
5	4	2.000
6	5	2.445
7	5	2.116
8	5	1.978
9	5	2.259
10	5	2.145
11	5	2.922
12	5	2.160
13	5	2.508
14	5	1.848
15	5	2.131
16	5	1.881
17	5	2.217
18	5	2.723
19	5	2.245
20	4	2.000
21	5	1.593
22	5	2.160
23	5	2.313
24	5	2.101
25	5	2.711
26	5	1.898
27	5	2.025
28	5	2.101
29	5	2.367
30	5	2.116
31	5	2.688
32	5	2.174
33	5	2.495
34	3	.000
35	5	2.483

Se logran clasificar 34 estudiantes (97%) de la institución educativa Presbítero Camilo Torres Restrepo:

Clasificación en Clusters

I. E. Pbro Camilo Torres Restrepo

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	.000
	2	.000
	3	1.000
	4	2.000
	5	32.000
Válidos		35.000
Perdidos		.000

De acuerdo con los resultados obtenidos podemos observar, en esta tabla, que el criterio de pre-clasificación dado por los expertos es coherente con la teoría de van Hiele.

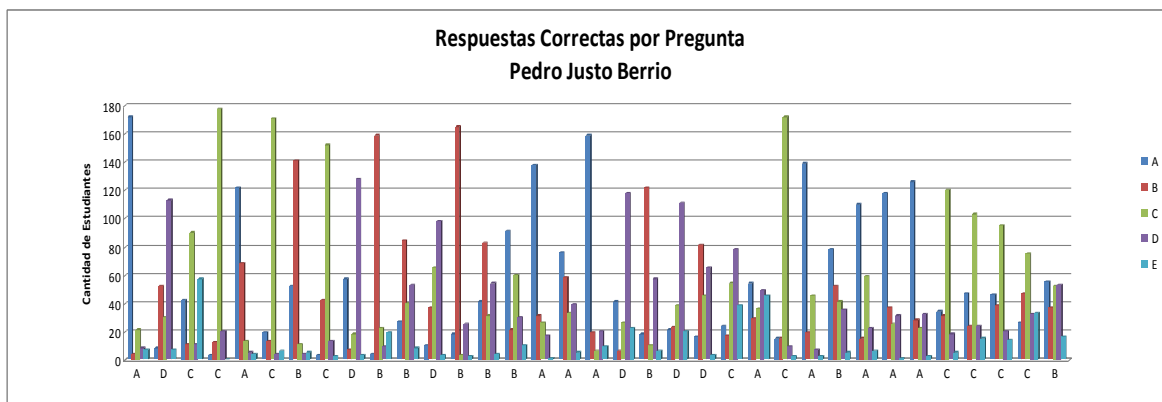
Podemos observar, además, que se generan 5 clusters, correspondientes a cada una de las fases, los estudiantes ubicados en los cluster 4 y 5, logran progresar en su nivel de razonamiento, mientras que los demás no lo hacen.

En correspondencia con las observaciones del trabajo de campo, se reafirma que sólo un estudiante no alcanza el nivel III de razonamiento, para el concepto objeto de estudio, quedando ubicado en el cluster 3. Podemos, por tanto, afirmar que dicho estudiante razona en el nivel II, en el marco del modelo de van Hiele.

Masificación de la Prueba

El test es el instrumento mediante el cual se hizo la recolección de los datos; el propósito de este test es el de permitir hacer un pase masivo, de modo que los estudiantes que no habían recibido instrucción logran progresar al nivel tres, desarrollando las actividades más significativas del módulo y construyendo una red de relaciones que se fortalecía a medida que éste era solucionado. Como ya se había mencionado, el test diseñado en el presente estudio, se aplicó a los estudiantes de dos instituciones educativas. A continuación

analizaremos los resultados obtenidos por 213 estudiantes del Colegio Pedro Justo Berrío, grupo que no participó en el trabajo de campo, pero si en la aplicación del test.



Para este grupo, se definieron los siguientes centros iniciales:

Centros iniciales Pedro Justo Berrío

Pregunta	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5
1	0.8	0.733	0.64	0.862	0.827
2	0.6	0.467	0.32	0.448	0.627
3	0	0.267	0.24	0.5	0.464
4	0.6	0.667	0.68	0.793	0.927
5	0	0.267	0.36	0.552	0.7
6	0.4	0.533	0.72	0.879	0.836
7	0.4	0.333	0.48	0.741	0.718
8	0.2	0.467	0.68	0.776	0.745
9	0.6	0.333	0.6	0.655	0.609
10	0.4	0.467	0.64	0.793	0.8
11	0.4	0.267	0.24	0.397	0.445
12	0	0.467	0.36	0.328	0.573
13	0.6	0.333	0.72	0.793	0.845

14	0.2	0.333	0.28	0.414	0.418
15	0.2	0.133	0.08	0.086	0.1
16	0	0.333	0.6	0.517	0.8
17	0.2	0.333	0.2	0.224	0.473
18	0	0.533	0.48	0.741	0.873
19	0.4	0.2	0.48	0.534	0.636
20	0.2	0.267	0.4	0.586	0.664
21	0	0.2	0.28	0.569	0.618
22	0	0.267	0.28	0.19	0.391
23	0	0.2	0.12	0.138	0.364
24	0	0.067	0.2	0.086	0.391
25	0	0.533	0.64	0.776	0.936
26	0.4	0.333	0.44	0.672	0.745
27	0.4	0.2	0.28	0.241	0.236
28	0.2	0.333	0.2	0.569	0.6
29	0.2	0.333	0.24	0.552	0.673
30	0.4	0.2	0.44	0.552	0.709
31	0.6	0.133	0.36	0.552	0.673
32	0	0.4	0.24	0.414	0.609
33	0.2	0.133	0.32	0.362	0.573
34	0.2	0.267	0.24	0.19	0.482
35	0	0.067	0.2	0.103	0.227

Con el número de aciertos por pregunta y la definición de los centros iniciales, usando el K-medias de acuerdo a la semilla introducida para su respectiva iteración, el programa SPSS asigna a los 213 estudiantes el cluster correspondiente, haciendo la clasificación de los estudiantes en los cinco conglomerados previamente elegidos, los cuales están en correspondencia con cada una de las fases van Hiele y a manera de resumen se obtiene:

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	7.000
	2	20.000
	3	35.000
	4	62.000
	5	89.000
Válidos		213.000
Perdidos		.000

Observamos que, de los 213 estudiantes, 151 se clasifican en los clusters 4 y 5, logrando progresar al nivel III de razonamiento; cabe anotar que, a pesar de que este grupo no participó del trabajo de campo, donde se estudió a fondo el concepto objeto de estudio y se fortaleció con el empleo de la herramienta mapas conceptuales, un porcentaje significativo logró mejorar su nivel, dado que la estructura y el carácter del módulo se ven reflejados en el test aplicado.

Robustez del análisis.

Consideraremos un nuevo criterio, denominado criterio B, éste es distinto del Criterio A, que corresponde a la opinión del experto. El nuevo criterio está acorde con los resultados experimentales obtenidos en el trabajo de campo y con la opinión del experto. Este nuevo criterio se describe en la siguiente tabla:

Criterio B: Para agrupar individuos en bloques de preguntas

Bloques de preguntas	B1	B2	B3	B4	B5
Porcentaje de Evaluación	13%	15%	17%	20%	35%

La introducción de un criterio B permite verificar si pequeñas modificaciones alteran significativamente los resultados obtenidos con el criterio A. El criterio B es más exigente que el A, asigna un porcentaje bastante alto al conjunto de preguntas del bloque 5, dándole

mayor peso a éste; el nuevo criterio permite la clasificación de los estudiantes en las siguientes fases:

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	6.000
	2	21.000
	3	30.000
	4	59.000
	5	97.000
Válidos		213.000
Perdidos		.000

Al comparar los cluster asignados con ambos criterios, se puede observar que no existen variaciones significativas entre los grupos formados, la siguiente tabla muestra los resultados de las dos clasificaciones finales:

Comparación de los Clusters para los criterios A y B

Fases	Criterio A	Criterio B
1	7	6
2	20	21
3	35	30
4	62	59
5	89	97

Los resultados anteriores permiten encontrar coincidencias significativas; se puede observar que con el criterio A, el 71% de la población progresa a un nivel III de razonamiento y con el criterio B lo hace el 73%. En la fase 3, se ubica el 16% de los estudiantes con el criterio A, y el 14% con el criterio B. De igual manera con el criterio A y B se ubican el 9% en la fase 2 y el 3% de la población en la fase 1.

La estabilidad observada permite reafirmar que, los descriptores propuestos son adecuados, que la asignación de los clusters está en correspondencia con las fases de aprendizaje y que, por esto, el criterio con el cual se realizó el análisis es correcto.

CONCLUSIONES

El trabajo expresa con claridad y precisión los resultados y aportes que se derivaron del proceso de investigación; el tratamiento estadístico permitió corroborar las observaciones y conclusiones que surgieron del trabajo de campo; se destacan aspectos como:

- La pertinencia de los descriptores de fase propuestos y refinados en el transcurso del trabajo de campo.
- La utilidad de los mapas conceptuales como herramienta para los procesos de enseñanza y aprendizaje, e incluso como herramienta de evaluación.
- La efectividad del uso de un guión entrevista de carácter socrático, que motiva al análisis de los procesos de construcción del concepto objeto de estudio.
- La importancia del lenguaje en el modelo educativo de van Hiele, como elemento diferenciador que favorece la conceptualización del objeto de estudio y amplía las posibilidades para llegar a la formalización.
- La asignación de clusters a cada grupo de preguntas, permitió determinar la coherencia de los descriptores propuestos con las características respectivas de cada fase de aprendizaje.
- La validez de la clasificación de los estudiantes en niveles de razonamiento realizada en el transcurso del trabajo de campo y confirmada mediante el tratamiento estadístico a una población más amplia de estudiantes.
- Como producto del trabajo de campo, uno de los mayores logros del proyecto fue el de poder fundamentar, desde el punto de vista teórico, de manera precisa y coherente, el aspecto relacionado con el módulo de instrucción y las fases de aprendizaje, ya que existe poca literatura e investigaciones al respecto (Capítulo 3, Zapata S. Sucerquia E, Tesis de Maestría).

La utilización de paquetes estadísticos, como el SPSS, permitió cuantificar datos cualitativos. Mediante el uso de herramientas adecuadas fue posible verificar, con los datos obtenidos en la aplicación del test, las conclusiones a las que se llegó en el transcurso del trabajo de campo, en cuanto al progreso en el nivel de razonamiento de los 34 estudiantes y con relación al análisis de las dificultades presentadas por un (1) estudiante que no avanzó, de manera satisfactoria, a un nuevo nivel.

Por otro lado, el test muestra su efectividad, ya que, más del 70% de los estudiantes que lo respondieron y que no habían participado en la intervención, logró una clasificación en las fases 4 y 5, con lo que podemos asegurar que progresan al nivel III de razonamiento. Dado lo anterior, el tratamiento estadístico nos permite concluir, además, que es posible diseñar un instrumento, como el test, que gracias a su estructura y carácter socrático consigue que una población significativa progrese en su nivel de razonamiento, aún sin haber participado de un proceso más integral de intervención.

Referencias Bibliográficas

Jaramillo, C. (2000). La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele. Tesis Doctoral publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.

Jaramillo, C. & Esteban, P. (2005). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele, *Revista Educación y Pedagogía*, 18 (45), 111–118.

Jurado, F. & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia. Colombia.

Llorens, J. & Pérez, P. (1997). An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28 (5), 713-726.

Novak, J. & Gowin, B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. España: Martínez Roca.

Campillo P. (1998). *La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele*, Tesis Doctoral publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.

Campillo, P. (1998): *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*, *Divulgaciones Matemáticas*, 6 (1), 69-80.

Stein, S. & Barcellos, A. (1996). *Cálculo y Geometría analítica* (5a. Ed.). México: McGraw-Hill.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis Doctoral. Universidad Real de Utrecht. Holanda.

Vasco, E. & Bedoya, J. (2005). *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van hiele*. Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia. Colombia.

Tall D. & Vinner S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. *Educational Studies in Mathematics*. 12 (2), 151 – 169.