



## **Condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales**

Jorge Leonardo Pico Cárdenas

Marisela Holguín Hurtado

Jhon Jairo Bedoya Agudelo

Trabajo de investigación para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en  
Matemáticas

Asesores

Diana Victoria Jaramillo Quiceno, Doctora en Educación

Diego Alejandro Pérez Galeano, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2022

<b>Cita</b>	(Pico, Holguín & Bedoya, 2022)
<b>Referencia</b>	Pico Cárdenas, J., Holguín Hurtado, M. & Bedoya Agudelo, J. (2022). <i>Condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales</i> . [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
<b>Estilo APA 7 (2020)</b>	



Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Centro de Documentación Educación (CEDED).



Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

**Repositorio Institucional:** <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - [www.udea.edu.co](http://www.udea.edu.co)

**Rector:** Jhon Jairo Arboleda Céspedes.

**Decano/Director:** Wilson Bolívar Buriticá.

**Jefe departamento:** Cártul Vargas Torres.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

## **Dedicatorias**

### ***Jorge Leonardo Pico***

*A mi familia, especialmente a mis hermanas Ana Mercedes y Maira, por su apoyo incondicional. Gracias a ellas estoy aquí.*

*A Luis Eduardo, mi padre, ejemplo de laboriosidad. A mi hija, Ana Sofía, motor de mi vida, mi aliento y fortaleza.*

### ***Marisela Holguín***

*A mi hija Dulce María, mi regalo de Dios,  
quien llenó mi vida de bendiciones, alegría y mucho amor,  
mi pilar y mi motivación para seguir, sin importar qué.*

### ***Jhon Jairo Bedoya***

*A mi esposa Érika Montoya y a mis hijos, Johan, Miguel Ángel y Valery, los cuales me apoyaron incondicionalmente, con su tiempo, y en momentos difíciles con una voz de aliento.*

*Todo eso fue gran motivación para llegar a estas instancias.*

## **Agradecimientos**

### **Jorge Leonardo Pico**

*Al culminar este proceso de formación de pregrado, quiero dar gracias primero que todo a Dios y a la vida, por posibilitarnos los espacios de formación y encontrar personas de gran calidad humana que aportaron sus conocimientos para nuestra formación profesional.*

*A los profesores Diana Jaramillo y Diego Pérez, mis asesores, por guiarnos durante el proceso de la Práctica Pedagógica y el trabajo de grado.*

*A Hortensia, nuestra maestra cooperadora en la institución educativa, y a los estudiantes de grado tercero y cuarto de dicha institución, por acogernos en su aula con su humildad y sencillez.*

*A mis compañeros de Seminario de Práctica Pedagógica, por su apoyo y aportes a mi formación.*

*A mi familia, a mi hija Ana Sofía, por su apoyo incondicional durante mi paso por la universidad y por ser mi fortaleza en momentos difíciles.*

*A todos ellos, infinitamente gracias...*

### **Marisela Holguín**

*Quiero iniciar agradeciendo a Dios, por ponerme en este camino y por todas las bendiciones recibidas hasta hoy.*

*a mis padres Gil Alberto Holguín y Odilia Hurtado, por su persistencia y esfuerzo para que yo pudiera llegar hasta donde hoy estoy. A mis hermanos Gil Alberto y Érica, por su compañía y apoyo incondicional. A mi compañero de vida Juan José y a mi hija Dulce María, por la admiración y la motivación.*

*A nuestros asesores Diana Jaramillo y Diego Pérez, por la calidad humana, por todo lo que nos enseñaron como personas y como académicos, por la metodología implementada, por la innovación en sus clases, por las risas, por las lágrimas, por tomarse el tiempo de estar pendiente de cada uno de nosotros, por los llamados de atención que nos ayudaron a mejorar, por su esmero, su coherencia y sobre todo por su tiempo.*

*A mi compañero Leonardo, por su liderazgo, su paciencia, su dedicación y entrega para mantener y mejorar el grupo de trabajo. Al compañero John Jairo por acompañarnos en este*

*proyecto de grado y a los demás compañeros del Seminario de Práctica Pedagógica, porque de cada uno me llevo gratos recuerdos y aprendizajes.*

*A nuestra profesora cooperadora de la institución educativa, Hortensia, por acompañarnos en el camino de la Práctica Pedagógica, por su entereza y dedicación con sus niños, por mostrarnos ese lado especial, amoroso y detallista que también hace parte de nuestro día a día como maestros.*

*A la Universidad por brindarme diversidad en maestros, compañeros y amigos. A cada una de las personas que estuvieron presentes en este camino que, aunque no fue fácil, termina con gran satisfacción y lleno de aprendizajes para toda la vida.*

### **John Jairo Bedoya**

*Primeramente a Dios, por darnos salud y vida. A mi esposa Érika Montoya y a mis hijos Johan, Miguel Ángel y Valery por su apoyo, paciencia y comprensión, ya que en muchas ocasiones no les pude dedicar el mejor de los tiempos.*

*A mis asesores Diana Jaramillo y Diego Pérez por su paciencia, conocimientos compartidos y el estar ahí cuando los necesitamos.*

*A mis compañeros Marisela y Jorge Leonardo, los cuales estuvieron siempre dispuestos a colaborar. Al grupo de Práctica Pedagógica por sus críticas constructivas y apoyo.*

*A la maestra cooperadora y a los estudiantes de la institución educativa que nos abrieron las puertas para realizar la Práctica Pedagógica.*

*A todas las personas que de una u otra manera hicieron parte en la construcción y elaboración de este trabajo.*

## Contenido

Resumen .....	10
Abstract .....	11
1. Presentación .....	12
2. Planteamiento del problema .....	14
2.1 Un inicio, la Práctica Pedagógica .....	14
2.2 La enseñanza de la multiplicación de números naturales: una dificultad observada en el aula. ....	21
3. Sobre condiciones de posibilidad.....	25
4. Sobre lo metodológico .....	28
4.1 Sobre el objeto de estudio .....	28
4.2 Sobre el método historiográfico .....	29
4.3 Construcción de archivo .....	32
4.4 Análisis documental .....	36
5. Buscando en la historia: algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales .....	40
5.1 Primeras nociones matemáticas en la prehistoria.....	40
5.2 La cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes.....	45
5.3 La economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los textos cuneiformes y del papiro de Rhind .....	50
5.4 Las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal .....	60
6. A modo de cierre .....	77
7. Referencias .....	81

## Lista de tablas

<b>Tabla 1</b>	Fuentes primarias y secundarias que constituyeron el archivo .....	34
<b>Tabla 2</b>	Representación de los números naturales en la escritura cuneiforme .....	45
<b>Tabla 3</b>	Tabla de multiplicar del 9 en el sistema sexagesimal .....	48
<b>Tabla 4</b>	Organización de las actividades económicas en la antigua Mesopotamia .....	51
<b>Tabla 5</b>	Símbolos numéricos Jeroglíficos en potencia de 10 .....	54
<b>Tabla 6</b>	Símbolos numéricos Hieráticos.....	54
<b>Tabla 7</b>	Método de multiplicación por Colonna o Tavoleta.....	69

## Lista de figuras

<b>Figura 1</b> Acompañamiento a estudiantes cerca de nuestros hogares .....	15
<b>Figura 2</b> Diario reflexivo de Práctica Pedagógica.....	16
<b>Figura 3</b> Narrativas sobre los encuentros con los estudiantes.....	17
<b>Figura 4</b> Diario reflexivo Práctica Pedagógica II.....	19
<b>Figura 5</b> Diario reflexivo Práctica Pedagógica III .....	20
<b>Figura 6</b> Encabezado del Registro Bibliográfico .....	38
<b>Figura 7</b> Registro de los documentos consultados .....	38
<b>Figura 8</b> Hueso de Ishango.....	43
<b>Figura 9</b> Forma de contar en el sistema sexagesimal.....	47
<b>Figura 10</b> Traducción del problema 79 del papiro de Rhind .....	56
<b>Figura 11</b> Método de multiplicación por duplicación .....	58
<b>Figura 12</b> Método por duplicación.....	59
<b>Figura 13</b> Símbolos numéricos Brahmi.....	61
<b>Figura 14</b> Método de multiplicación Gelosia.....	62
<b>Figura 15</b> Genealogía de nuestro sistema de numeración .....	64
<b>Figura 16</b> Ábaco romano.....	66
<b>Figura 17</b> Portada del libro de Luca Pacioli.....	67
<b>Figura 18</b> Método de multiplicación por Castellucio.....	68
<b>Figura 19</b> Método de multiplicación por Cuadrilátero $5432 \times 5432$ .....	70
<b>Figura 20</b> Método de multiplicación por Gelosía o Graticola $987 \times 987$ .....	71
<b>Figura 21</b> Método de multiplicación por Repiego .....	71
<b>Figura 22</b> Método de multiplicación por Scapezzo.....	72
<b>Figura 23</b> Método de multiplicación Scachieri o por Bericocolo .....	73



<b>Figura 24</b> Método de multiplicación por Crocetta o Casella .....	74
<b>Figura 25</b> Método de multiplicación por Crocetta .....	75
<b>Figura 26</b> Método de multiplicar por Crocetta con factores de más de dos cifras.....	75

## Resumen

El presente trabajo de grado lo realizamos desde una perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. La pregunta de investigación de este trabajo fue: ¿Qué condiciones de posibilidad contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales? El objetivo planteado en esta investigación fue identificar condiciones de posibilidad que contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales. Así, esta investigación tuvo como objeto de estudio algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.

Esta fue una investigación cualitativa, con un enfoque hermenéutico-interpretativo. El método utilizado fue el historiográfico complementado con el análisis documental, un método que contempló la construcción de un archivo. El archivo estuvo constituido por los documentos donde pudimos rastrear los enunciados que se fueron constituyendo en los datos que, a su vez, posibilitaron identificar condiciones de posibilidad de la multiplicación de números naturales.

A partir del análisis de los datos emergieron tres categorías que se constituyeron en lo que nosotros pudimos identificar como condiciones de posibilidad. Estas tres categorías fueron: “la cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes”, “la economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los textos cuneiformes y del papiro de Rhind”, “las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal”.

Finalmente, pudimos identificar en este análisis, que las relaciones comerciales jugaron un papel importante en la consolidación de la multiplicación; relaciones que fueron transversales a las condiciones de posibilidad anteriormente mencionadas.

*Palabras clave:* Educación Matemática; perspectiva histórico-cultural de la educación; método historiográfico; análisis documental; sistema decimal.

### **Abstract**

The present degree work was carried out from a historical-cultural perspective of Mathematics Education. The research question of this work was what conditions of possibility contributed to the emergence of multiplication of natural numbers? The objective of this research was to identify the conditions of possibility that contributed to the emergence of multiplication of natural numbers. Thus, the object of this research was to study some conditions of possibility for the emergence of multiplication of natural numbers.

This was a qualitative research, with a hermeneutic-interpretative approach. The method used was the historiographic method complemented with documentary analysis, a method that contemplated the construction of an archive. The archive was constituted by the documents where we were able to trace the statements that were constituted in the data that, in turn, made it possible to identify the conditions of possibility of the multiplication of natural numbers.

From the analysis of the data, three categories emerged, which were constituted in what we were able to identify as conditions of possibility. These three categories were: "the Mesopotamian culture and the need to handle larger and larger quantities", "the economy and its relationship with everyday problems: an analysis from the cuneiform texts and the Rhind papyrus", "the trade routes of the East and the consolidation of multiplication in the decimal system".

Finally, we were able to identify in this analysis, that commercial relations played an important role in the consolidation of multiplication; relations that were transversal to the conditions of possibility previously mentioned.

*Keywords:* Mathematics education; historical-cultural perspective of education; historiographic method; documentary analysis; decimal system.

## 1. Presentación

La presente investigación estuvo inscrita en la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. En este trabajo nos planteamos como objetivo identificar las condiciones de posibilidad que contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales a partir del método historiográfico complementado con el análisis documental.

De este modo, pretendimos responder a la pregunta de investigación ¿Qué condiciones de posibilidad contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales? El objeto de investigación estuvo constituido por algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.

Esta investigación se consolidó, en parte, gracias a las observaciones hechas en la Práctica Pedagógica, donde identificamos una posible problemática a ser estudiada. Esta Práctica fue realizada durante los semestres 2020-1, 2020-2 y 2021-1. A partir de estas observaciones y dadas las circunstancias y las medidas tomadas por el gobierno nacional para atender a la contingencia de la pandemia causada por el virus Covid-19, optamos por realizar un trabajo de corte historiográfico.

A partir del método historiográfico indagamos en la historia del pasado para comprender desde el presente, aquellos acontecimientos, prácticas sociales y discursivas que se constituyeron en una condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.

El método historiográfico, complementado con el análisis documental, contempló la construcción de un archivo, el cual estuvo constituido por fuentes primarias y secundarias donde rastreamos los enunciados que hablaban de las condiciones de posibilidad.

Como resultado del análisis de los datos presentamos este trabajo el cual conjuga nuestras comprensiones a nivel teórico, metodológico y nuestra interpretación crítica de la historia.

Este documento está conformado por seis capítulos. En el capítulo uno hicimos una breve presentación del trabajo; en el capítulo dos, llamado “Planteamiento del problema”, expusimos la experiencia de la Práctica Pedagógica y el inicio del camino de esta investigación, también mostramos en este capítulo las dificultades observadas en el aula que ayudaron a perfilar un problema de investigación.

En el capítulo tres, llamado “Sobre condiciones de posibilidad”, presentamos algunos autores bajo la perspectiva foucaultiana que sustentan el objeto de esta investigación.

En el capítulo cuatro, llamado “Sobre lo metodológico”, mostramos la constitución del camino de la investigación donde se encuentran el tipo de investigación, el enfoque y el método historiográfico. Además, exponemos en qué consiste el análisis documental.

En el capítulo cinco, llamado “Buscando en la historia: algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales”, inicialmente mostramos algunas nociones de las matemáticas en los pueblos primitivos. Posteriormente, presentamos algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación que identificamos a partir de la lectura crítica de parte de la historia de las matemáticas. Estas condiciones las presentamos en tres secciones, a saber: La primera, “La cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes”; la segunda, “La economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los textos cuneiformes y del papiro de Rhind”; y la tercera, “Las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal”.

Finalmente, en el capítulo seis, llamado “A modo de cierre” presentamos las condiciones de posibilidad identificadas y algunas conclusiones derivadas del trabajo de investigación.

## **2. Planteamiento del problema**

En el presente capítulo contaremos la experiencia de la Práctica Pedagógica y el inicio del camino de esta investigación. Una investigación historiográfica, bajo una perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. Mostraremos, también, el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, el objetivo trazado y el objeto estudiado.

### **2.1 Un inicio, la Práctica Pedagógica**

Antes de iniciar las Prácticas Pedagógicas de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, desde la coordinación de dichas Prácticas, nos hacen una reunión donde varios maestros, adscritos a la Licenciatura hacen una presentación de su propuesta de Práctica Pedagógica. En esta propuesta, los maestros nos presentan la perspectiva desde donde se hará el trabajo de grado. Los estudiantes analizamos estas propuestas y realizamos la elección, sabiendo, así, con antelación, desde qué perspectiva realizaremos el trabajo de grado y quién o quiénes serán nuestros asesores de Práctica.

La Práctica Pedagógica consta de cuatro semestres académicos: tres semestres de Práctica en una institución educativa y un semestre para la elaboración del trabajo de grado. Durante los cuatro semestres de Práctica se cuenta con el acompañamiento de uno o varios asesores adscritos a la universidad, y durante los tres primeros semestres con un maestro cooperador adscrito a la institución educativa correspondiente.

El inicio de nuestra Práctica Pedagógica se dio en el primer semestre del año 2020. Cabe resaltar que esta Práctica Pedagógica estuvo atravesada por una eventualidad muy particular, la cual la hizo diferente a las demás Prácticas Pedagógicas; en marzo de 2020, la pandemia causada por el virus COVID -19, y las consecuencias derivadas de ella, y particularmente el confinamiento, nos obligaron a realizar la Práctica Pedagógica mediada por herramientas tecnológicas de forma sincrónica o asincrónica.

El trabajo correspondiente al primer semestre de Práctica Pedagógica lo llevamos a cabo desde nuestros hogares y, en otros momentos, en hogares vecinos. El trabajo consistió en realizar un acompañamiento a estudiantes de diferentes grados escolares, que vivieran cerca de nosotros; de esta manera, pudimos acompañarlos e interactuar en sus casas o en nuestros hogares. Este

trabajo se caracterizó por ser de forma individual más que colectivo. Cada uno de nosotros “adoptó” un estudiante para apoyarlo en sus actividades académicas, específicamente en el área de matemáticas. (Ver Figura 1)

### **Figura 1**

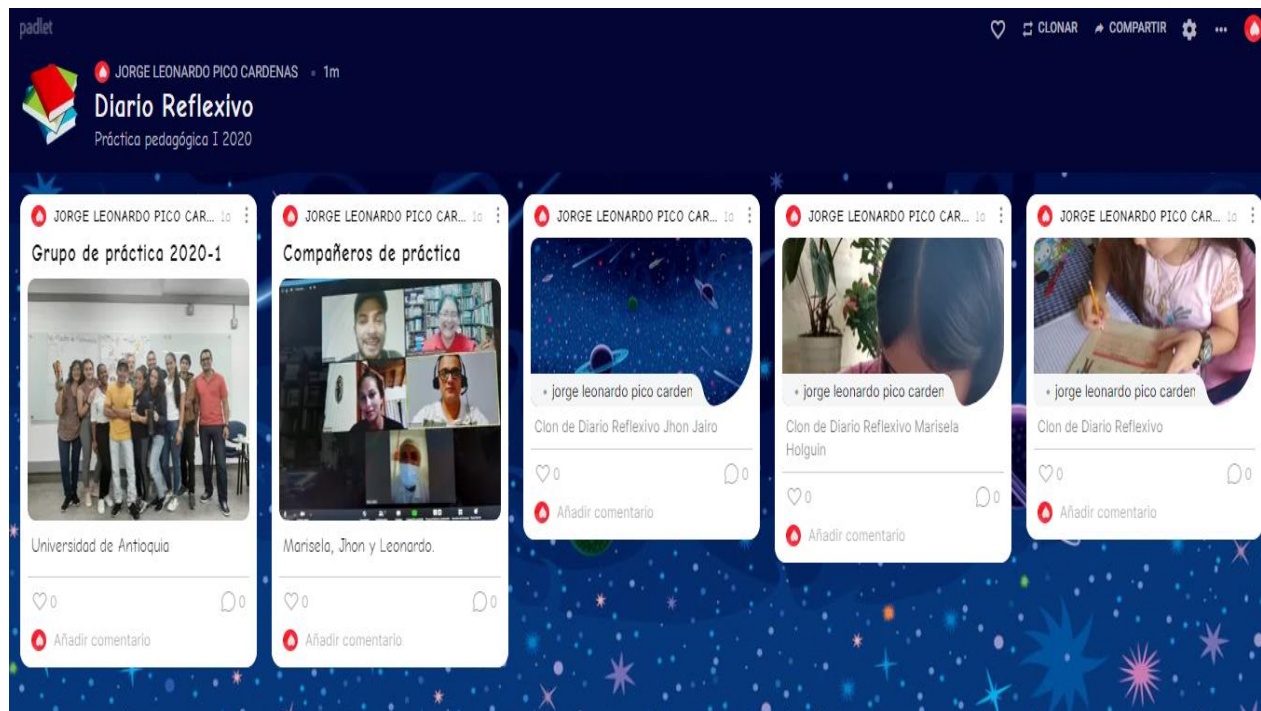
*Acompañamiento a estudiantes cerca de nuestros hogares*



*Nota.* Registro fotográfico de Práctica Pedagógica I.

Como producto de este acompañamiento, realizamos un diario reflexivo en la plataforma digital Padlet. (Ver figura 2).

**Figura 2**  
*Diario reflexivo de Práctica Pedagógica*



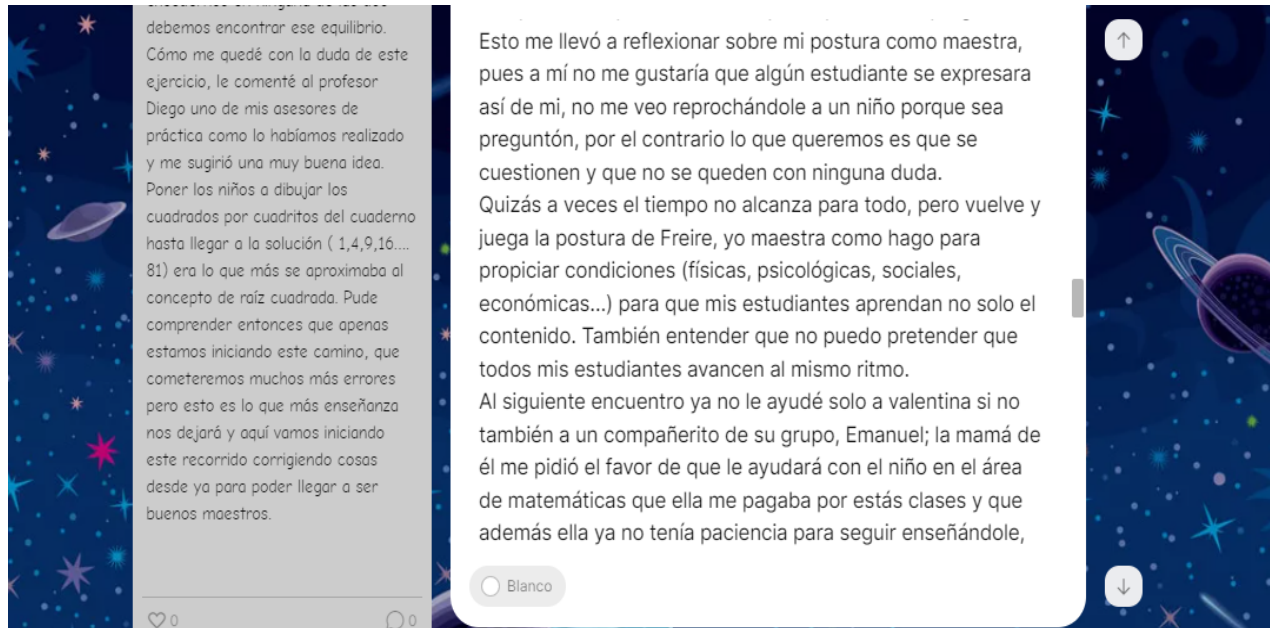
*Nota.* Elaborado en la plataforma digital Padlet.

En el diario reflexivo plasmábamos narrativas sobre lo que acontecía en los encuentros con los estudiantes, analizábamos la pertinencia de los contenidos, de su presentación y de nuestra postura como maestros en formación frente a lo que ocurría en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. (Ver Figura 3)



### Figura 3

#### *Narrativas sobre los encuentros con los estudiantes*



*Nota.* Elaborado en la plataforma digital Padlet.

El diario reflexivo es un instrumento que posibilita la reflexión de la Práctica Pedagógica. En palabras de Jaramillo<sup>1</sup> (2008), el diario reflexivo se define como “registros elaborados sistemáticamente por (el futuro) maestro después de cada clase. En estos registros, el maestro describe y analiza hechos y detalles de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de la Práctica Pedagógica en general” (p. 12).

En el segundo semestre del 2020 continuamos nuestra Práctica Pedagógica de manera sincrónica y asincrónica mediada por herramientas tecnológicas. En este semestre académico, desde la coordinación de Prácticas Pedagógicas de la Licenciatura nos presentaron un listado de instituciones educativas que tenían convenio con nuestra universidad. Con ayuda de nuestros

<sup>1</sup> Diana Victoria Jaramillo: Doctora en Educación, Área de Educación Matemática, *Universidade Estadual de Campinas-(UNICAMP)* (Campinas, São Paulo, Brasil). Profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia) y coordinadora de del grupo de investigación “Matemáticas, Educación y Sociedad” (MES).

---

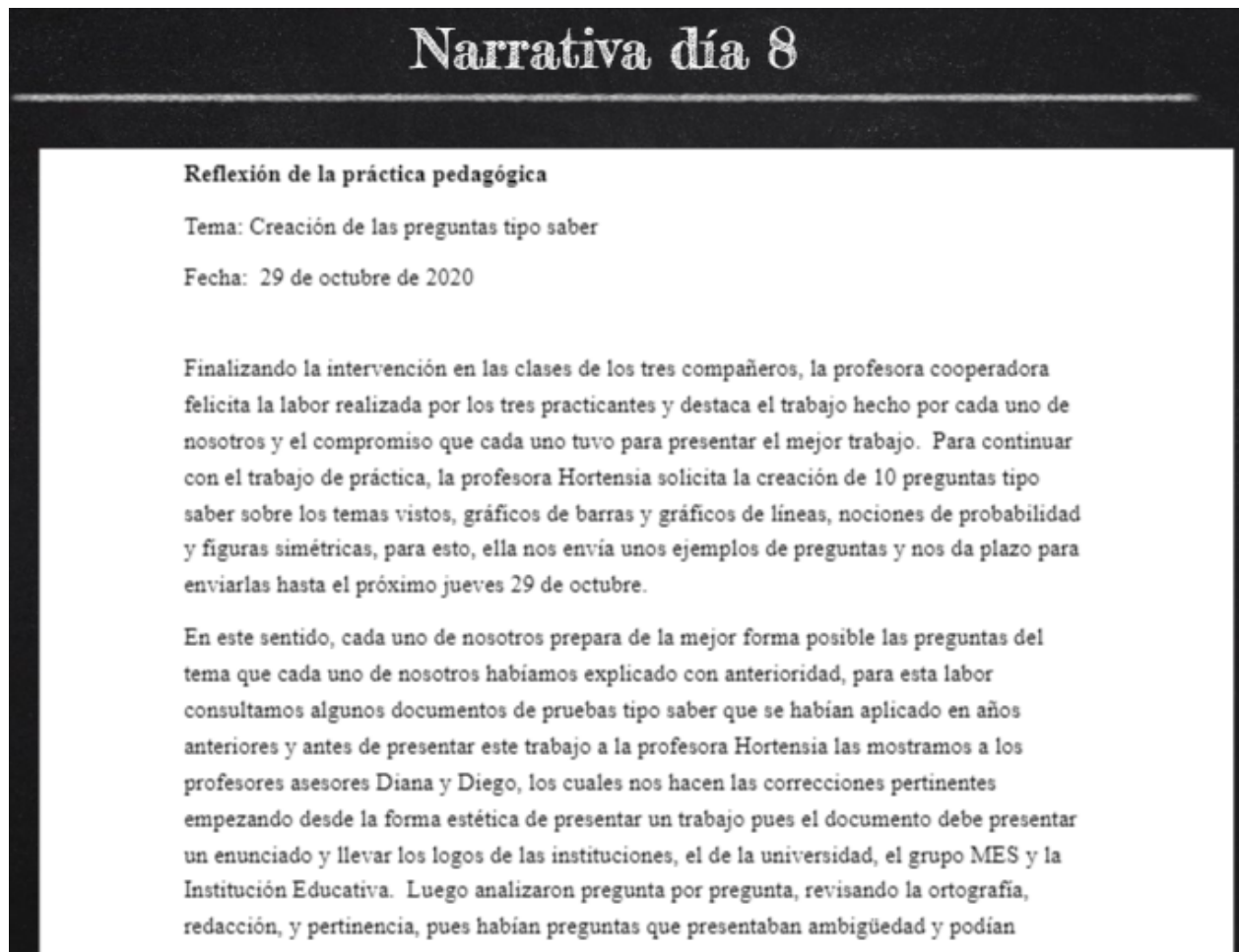
asesores, hicimos la elección de una institución educativa<sup>2</sup> para realizar nuestra Práctica Pedagógica. En esta institución educativa tuvimos el primer acercamiento bajo la modalidad sincrónica y asincrónica mediada por herramientas tecnológicas con los estudiantes de tercer grado y la maestra cooperadora, quien era la maestra directora de grupo, que nos acogió y nos guó durante el proceso de Práctica.

Inicialmente, y dado el momento coyuntural que la educación estaba sufriendo, derivado de la pandemia, nuestro acompañamiento consistía en observar y apoyar a la maestra cooperadora en lo que solicitara, posteriormente nos asignó algunos temas para presentarlos a los estudiantes y, finalmente, debimos preparar la clase y apoyar a los estudiantes para presentar las olimpiadas del conocimiento. Estas olimpiadas consistían en un programa educativo que buscaba incentivar a los estudiantes desde el grado cuarto hasta el grado undécimo a tener un mejor desempeño académico en algunas áreas del conocimiento: matemáticas, español, ciencias naturales, sociales e inglés.

Como producto del segundo semestre de Práctica, al igual que el anterior semestre, elaboramos un diario reflexivo, esta vez, narrando nuestras experiencias con los estudiantes de tercer grado y la maestra que nos acogió en aula virtual. (Ver Figura 4).

---

<sup>2</sup> Institución Educativa mixta, de carácter oficial, que imparte enseñanza formal en los niveles de Educación Preescolar, Básica Primaria, Básica secundaria, Media Académica, Media Técnica y Ciclos Lectivos Especiales Integrados (CLEI). Ubicada en el Barrio Castilla, comuna 6 de la ciudad de Medellín (Antioquia, Colombia).

**Figura 4***Diario reflexivo Práctica Pedagógica II*

## Narrativa día 8

**Reflexión de la práctica pedagógica**

Tema: Creación de las preguntas tipo saber

Fecha: 29 de octubre de 2020

Finalizando la intervención en las clases de los tres compañeros, la profesora cooperadora felicita la labor realizada por los tres practicantes y destaca el trabajo hecho por cada uno de nosotros y el compromiso que cada uno tuvo para presentar el mejor trabajo. Para continuar con el trabajo de práctica, la profesora Hortensia solicita la creación de 10 preguntas tipo saber sobre los temas vistos, gráficos de barras y gráficos de líneas, nociones de probabilidad y figuras simétricas, para esto, ella nos envía unos ejemplos de preguntas y nos da plazo para enviarlas hasta el próximo jueves 29 de octubre.

En este sentido, cada uno de nosotros prepara de la mejor forma posible las preguntas del tema que cada uno de nosotros habíamos explicado con anterioridad, para esta labor consultamos algunos documentos de pruebas tipo saber que se habían aplicado en años anteriores y antes de presentar este trabajo a la profesora Hortensia las mostramos a los profesores asesores Diana y Diego, los cuales nos hacen las correcciones pertinentes empezando desde la forma estética de presentar un trabajo pues el documento debe presentar un enunciado y llevar los logos de las instituciones, el de la universidad, el grupo MES y la Institución Educativa. Luego analizaron pregunta por pregunta, revisando la ortografía, redacción, y pertinencia, pues habían preguntas que presentaban ambigüedad y podían

*Nota.* Elaboración en la plataforma digital Genially

Este semestre fue especial para nosotros porque estábamos en un ambiente escolar con los estudiantes y la maestra cooperadora, aunque no fuese de manera presencial y física. También, empezamos a observar posibles problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se podrían constituir en un problema de investigación de nuestro interés.

Al inicio del 2021, empezamos nuestro tercer semestre de la Práctica Pedagógica. Continuamos con los mismos estudiantes, pero ya en el grado cuarto, a solicitud de la maestra cooperadora. Todas las actividades que realizamos las llevamos a cabo bajo la modalidad sincrónica y asincrónica desde casa, mediado por herramientas tecnológicas.

El trabajo que realizamos consistió en preparar diferentes temas para las clases, según lo disponía la maestra cooperadora. Cabe resaltar que no fue una tarea fácil, ya que debíamos tener

mucho cuidado con el contenido y la forma en la que íbamos a presentar dichos temas a los estudiantes. Desde nuestra ética profesional, debemos siempre contar con la apropiación de los conceptos y pensar en actividades que no se limiten a la mera transmisión del conocimiento, sino también a la construcción de este, teniendo en cuenta lo que afirma Freire, “enseñar no es transferir un conocimiento, sino crear las posibilidades para su producción o construcción” (2004, p. 12).

El producto final de este semestre de Práctica, al igual que los anteriores semestres, consistió en la elaboración de un diario reflexivo. (Ver Figura 5)

### Figura 5

#### Diario reflexivo Práctica Pedagógica III

Luego el compañero Jhon Jairo inicia presentando otra situación similar en la cual los estudiantes debían proponer la solución y desarrollar las operaciones aritméticas que ellos mismos planteaban. Se puede observar que en el desarrollo de esta actividad los estudiantes proponen con más facilidad las operaciones para desarrollar la situación problema y se muestran más participativos.

Para finalizar la sesión, se les propuso desarrollar una actividad a modo de cierre, la cual estaba diseñada en la plataforma Kahoot!. La actividad consistía en contestar un cuestionario correspondiente al tema de la multiplicación. Los estudiantes se mostraron entusiasmados por realizar esta actividad, pues fue una actividad diferente a las que se acostumbraba tener.

La multiplicación					
Final Scores					
Rank	Player	Total Score (points)	Correct Answers	Incorrect Answers	
1	Angely Cataño	2416	3	1	
2	emanuel tabares	2383	3	1	
3	malson	1782	2	2	
4	Juan diegi	924	1	3	
5	Emanuel y mateo	889	1	3	
6	maria fernanda	779	1	3	
7	maties palacio	0	0	4	
8	juanis	0	0	4	
9	Luciana	0	0	4	

Consideramos que la implementación de nuevas herramientas en la enseñanza, contribuyen a que los estudiantes se motiven y muestren más interés en desarrollar las actividades.

*Nota.* Elaborado en plataforma digital Genially.

A partir del tercer semestre de Práctica Pedagógica tomamos la decisión de realizar una investigación mediante el método historiográfico y desde la perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. Esta decisión la tomamos en comunión con los maestros que nos asesoraron en la Práctica Pedagógica. Entendíamos que, debido a las circunstancias de la pandemia, se dificultaría un acercamiento y el trabajo de campo con los estudiantes y la maestra cooperadora, para desarrollar la investigación de forma presencial y bajo otra metodología de investigación.

Nuestros maestros asesores nos propusieron realizar un trabajo investigativo mediante el método historiográfico, donde se indagara por la emergencia de algún concepto matemático.

Basados en las observaciones que realizamos en el desarrollo de la Práctica Pedagógica, específicamente en el segundo y tercer semestre, identificamos algunas dificultades en la enseñanza de la multiplicación de números naturales. Consideramos que, tal vez, esas dificultades se presentaban debido a que la multiplicación es concebida como un objeto simple o acabado, que tiende a la memorización y repetición del algoritmo, presentando así una matemática alejada de las necesidades cotidianas del estudiante.

Apoyados en las anteriores observaciones decidimos indagar por condiciones de posibilidad<sup>3</sup> para la emergencia de la multiplicación de números naturales, donde pudiéramos dar cuenta de algunas necesidades sociales por las cuales emergió la multiplicación.

## **2.2 La enseñanza de la multiplicación de números naturales: una dificultad observada en el aula.**

A partir del trabajo adelantado en el aula virtual con los estudiantes, durante el segundo y tercer semestre de la Práctica Pedagógica, evidenciamos que algunos estudiantes tenían dificultades para realizar operaciones aritméticas básicas, entre ellas la multiplicación. En algunas aulas se presentaba la multiplicación como algo natural y acabado. Es posible que algunos maestros de matemáticas desconozcan el origen de la multiplicación, los acontecimientos históricos y las necesidades sociales que dieron paso a que se constituyera este concepto, para llegar a lo que hoy en día enseñamos en el aula. Este desconocimiento puede ocasionar que el maestro se limite a la enseñanza de los algoritmos, además, puede ocasionar que enseñe las matemáticas como un campo de conocimiento acabado y distante de las necesidades del estudiante. Como lo sugiere Moura<sup>4</sup> (2011)

A propósito de las necesidades del estudiante, Moura menciona que, “desde el inicio de la humanidad, el combustible que mueve al hombre es la necesidad” (2011, p. 49). Esto nos lleva a

---

<sup>3</sup> El término “condiciones de posibilidad” en esta investigación lo abordamos desde una perspectiva foucaultiana. Más adelante expondremos nuestra concepción de dicho término.

<sup>4</sup> Manoel Oriosvaldo de Moura: Doctor en Educación, Área de Especialización en Educación Matemática con enfoque en la metodología de enseñanza de la matemática, formación de profesores y Teoría de la Actividad. Universidad de São Paulo, (Brasil). Profesor titular de la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo.

pensar que los conceptos matemáticos que se trabajan en el aula han surgido de acuerdo con las necesidades humanas que se presentan en cada momento de la historia. Son las prácticas sociales las que contribuyen a desarrollar nuevos saberes, que surgen como una solución a estas problemáticas sociales.

Entendemos el término necesidad como “una condición que, en el marco de la teoría histórico-cultural, no es únicamente de tipo biológica, sino que el hombre, a medida que se apropia de la cultura, va creando necesidades, y convirtiendo esas necesidades en histórico-culturales” (Pérez, 2020, p. 32)<sup>5</sup>.

Es posible que, los contenidos matemáticos que se presentan pueden estar distantes de la realidad y distantes de las necesidades del estudiante. De manera diferente, cuando se presenta una matemática producto de la actividad humana, y que moviliza al estudiante a buscar soluciones a problemas de su vida cotidiana haciendo uso de los conceptos, el estudiante interioriza o se apropia de los conceptos matemáticos, porque los está poniendo en práctica según su necesidad. Son estas necesidades las que posibilitan que emerja un conocimiento en el estudiante. Frente a esto Moura (2011) plantea lo siguiente:

Existen, así dos movimientos del conocimiento matemático. Aquel que es parte de la necesidad del sujeto, y otro que es parte del desarrollo social, y que está ciertamente desconectado del desenvolvimiento natural de este sujeto, pues la matemática producida en la actualidad está lejos de ser su necesidad. En este sentido, él pasa a ser apenas un consumidor del conocimiento que ya fue producido, y que está embutido en los instrumentos tecnológicos que usa. (p. 52)

Según Quiroz<sup>6</sup> (2018), es recurrente observar que en algunas aulas los contenidos matemáticos son enseñados como contenidos rígidos, sin vida, que tienden a la memorización de algoritmos. La presentación de contenidos que tienden a la memorización va en contra de la labor del maestro ya que este debe buscar y crear las condiciones para la construcción del conocimiento, como lo sugiere Freire (2004). En este sentido, en la escuela se deben propiciar espacios donde el estudiante tenga las condiciones para la producción de su conocimiento, luego, el papel de la

---

<sup>5</sup> Diego Alejandro Pérez Galeano: Doctor en Educación. Línea de Formación en Educación Matemáticas, Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Líneas de investigación: formación inicial y continuada de profesores que enseñan matemáticas; perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. Miembro del grupo de investigación “Matemáticas, Educación y Sociedad” (MES)

<sup>6</sup> Lorena María Quiroz Betancur: Magíster en Educación, Estudiante de Doctorado, Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Línea de formación en Educación Matemática.

existencia de la escuela debe ser, según Moura, “combinar las razones para aprender matemáticas para el sujeto con las necesidades del desarrollo social” (2011, p. 52).

Una de las razones por la cual la multiplicación de números naturales sea presentada como un concepto acabado, puede ser por el desconocimiento de los acontecimientos históricos y las necesidades que posibilitaron la emergencia de la multiplicación. Este desconocimiento puede implicar una limitación en los maestros que enseñan matemáticas en los grados de primaria. Esta limitación se podría deber a que el maestro no establece una conexión entre el origen del concepto y la aplicación de éste en contextos cotidianos contemporáneos. Lo anterior genera que los estudiantes no se involucren en la construcción del conocimiento matemático, convirtiéndose, así, en simples consumidores pasivos de ese conocimiento.

En contraste, el maestro que enseña matemáticas debe propiciar las condiciones para que el estudiante participe de la construcción de su conocimiento, teniendo en cuenta que fueron las necesidades y las prácticas de las culturas las que posibilitaron el surgimiento del conocimiento matemático. A partir de esto, el maestro puede mostrar al estudiante que a cada momento la sociedad, de acuerdo con sus prácticas cotidianas está generando nuevos problemas y por tanto se requieren nuevas soluciones.

En este sentido, se da la posibilidad de comprender las matemáticas producto de una actividad humana. A propósito, Zapico (2006), citado por Quiroz (2018), nos menciona que:

El objeto de enseñar matemáticas con la historia hace parte del proceso de humanizarlas, de mostrar a nuestros estudiantes que es un producto más de la actividad humana que se gestó a partir de diferentes estímulos, a veces para resolver problemas prácticos y otras por motivos de orden artístico o espiritual. (p.18)

Por esta razón, podríamos pensar que, si el maestro deja de lado la articulación de los contenidos matemáticos con la historia y con la cultura, puede convertir a los estudiantes en consumidores de un conocimiento que fue creado por otros. También, el maestro puede crear disgusto de los estudiantes hacia un conocimiento del que se desconoce su origen, o que fue creado por otras personas en un tiempo lejano a nosotros.

En consecuencia, consideramos que el maestro debe crear acciones que favorezcan la enseñanza de los conocimientos matemáticos. En concordancia con lo anterior, Moura (2011) sugiere que “es necesario, por lo tanto, dar condiciones para que los aprendices se involucren en una dinámica de producción global de lo que se produce en la Tierra, para que no se sientan meros

consumidores” (p. 52). Es decir, el maestro debe proporcionar, en los espacios de formación, situaciones donde el estudiante pueda construir la matemática a partir de las situaciones del cotidiano, de este modo, el estudiante podría comprender que el conocimiento se construye y no es por tanto un conocimiento que fue creado para el consumo pasivo de las personas.

Consideramos que comprender las condiciones de posibilidad para la emergencia de un concepto matemático, en este caso, la emergencia de la multiplicación de números naturales aporta diferentes relaciones entre el sujeto que busca conocer y ese objeto de conocimiento, reconociéndolo como un conocimiento que fue creado y adoptado por las culturas para resolver sus necesidades. Así mismo, consideramos que comprender las condiciones de posibilidad nos lleva a reconocer que hoy en día la sociedad, según sus dinámicas o prácticas cotidianas, está en constante producción de problemas, que requieren solución. Hacemos parte de esta sociedad y podemos producir la matemática para dar solución a estos problemas.

El conocimiento de esas condiciones de posibilidad puede favorecer notablemente la enseñanza de las matemáticas de los maestros de primaria, ya que, en su Práctica Pedagógica ellos podrían repensar y diseñar actividades que articularan la historia con la emergencia de la multiplicación y con las realidades contemporáneas. De este modo, los maestros pueden brindar elementos que movilicen a los estudiantes hacia la producción de conocimiento, para que sean ellos mismos quienes produzcan su propio saber; un saber que pueda responder a sus necesidades de la vida real. En este sentido, los estudiantes pueden adquirir la capacidad de reflexionar y de mirar de forma indagadora a través de la historia los conocimientos que ya fueron producidos para rescatar elementos matemáticos y utilizarlos en la solución de los problemas que se proponen en la cotidianidad.

Teniendo en cuenta el trabajo realizado en el segundo y tercer semestre de nuestra Práctica Pedagógica, donde hicimos un acercamiento a la identificación de un problema de investigación y con base a los anteriores planteamientos, formulamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué condiciones de posibilidad contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales?*

Consecuentemente el objetivo de investigación es: *identificar condiciones de posibilidad que contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales*. Así, nuestro objeto de investigación se centra en: *las condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales*.



### 3. Sobre condiciones de posibilidad

En este capítulo presentaremos algunos elementos teóricos que, bajo una perspectiva foucaultiana, dan sustento al objeto de esta investigación.

Autores como Martínez<sup>7</sup> (1993; 2013) y Quiroz (2018) aportan elementos que contribuyen a una aproximación al concepto “condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales”.

Cuando hablamos de condiciones de posibilidad que contribuyen a la emergencia de algún objeto matemático, en este caso, para la multiplicación de números naturales, tenemos que remitirnos a la historia, para hacer una reflexión sobre ciertos acontecimientos, prácticas sociales y cambios históricos desde una perspectiva foucaultiana.

Martínez (1993) menciona que para realizar un trabajo de historia se hace uso de las herramientas metodológicas y conceptuales de Foucault<sup>8</sup>. Herramientas que son apropiadas para reescribir la historia de las condiciones de posibilidad de una práctica, de un concepto o de un discurso. Lo anterior sugiere que no se debe contar una historia por contarla, de forma lineal y cronológica.

Según Martínez (1993), cabe mencionar que Foucault no es un historiador. Llama la atención la forma discontinua en la que Foucault analiza la historia; sugiere no seguir los datos históricos de forma lineal, continuos y causales. Lo que este autor sugiere, es mirar en las fisuras de la historia hechos que, desde acciones, prácticas concretas o discursos, constituyen un saber o un objeto.

En este sentido, cuando hablamos de esas prácticas concretas, Martínez (2013) dice que la práctica “es la que muestra la materialidad de los discursos, de los sujetos, de las instituciones” (p. 226). Es por esto por lo que, a partir de la identificación y el análisis de las prácticas, podemos encontrar las bases donde se sustenta el origen de un objeto o concepto. Así, en palabras de Martínez (2013) “la pregunta no es quién hizo tal cosa sino cuál fue esa práctica que surgió alrededor de algo y qué hace que ese “algo” emerja” (p. 226). Entendemos la emergencia como la

---

<sup>7</sup> Alberto Martínez Boom: Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación. Profesor e investigador de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). Miembro de la Academia Colombiana de Pedagogía.

<sup>8</sup> Paul Michael Foucault. Doctor en filosofía, historiador, sociólogo y psicólogo francés. Falleció en 1984 en Francia. Es conocido por sus estudios críticos de las instituciones sociales, en especial la psiquiatría y la medicina, las ciencias humanas. Su análisis se basó sobre el poder, y las relaciones entre poder, conocimiento y discurso.

noción que acuña Foucault (2002), citado por Vázquez y Monroy (2013), para construir su método de análisis de la historia, ésta posibilita identificar huellas que al unir las conforman un objeto.

De este modo, Martínez (2013) entiende que, “las prácticas se constituyen en condiciones de posibilidad para la aparición de un saber que, a su vez, es condición de posibilidad para la aparición de un conocimiento” (p. 226).

En este sentido, comprendemos que es necesario hacer uso de la metodología de Foucault<sup>9</sup> para interpretar la historia, buscando no solo acontecimientos en un orden cronológico y que respondan a una causa, sino, buscando relaciones entre los sujetos con la práctica y los discursos.

Por otro lado, Quiroz (2018) citando a Foucault (2002) menciona que:

Las condiciones de posibilidad van emergiendo de las singularidades y las discontinuidades, configurando tres premisas útiles para comprender mejor la formación del objeto: la primera se pregunta por el lugar, el dónde; la segunda por las circunstancias limitantes, o regla del tema y, la última, por la regla del sujeto. Es decir, a partir de las relaciones discursivas se puede inferir el lugar en que se produjeron los acontecimientos, el tiempo, el tema, y el o los sujetos que están implicados. (p. 30)

Con lo anterior mencionado, suponemos que la formación del objeto no se da en un lugar y un momento determinado de la historia, sino que se va constituyendo a través de las prácticas sociales y discursos de los sujetos en diferentes lugares y momentos de la historia.

Finalmente, Quiroz (2018) define las condiciones de posibilidad como:

Los discursos y las acciones sociales que se dan en lugares y tiempos particulares en una búsqueda de la verdad. Por tal razón, deduzco que las condiciones de posibilidad permiten la intersección de los contextos y los acontecimientos sociales, educativos, políticos, económicos, culturales y religiosos de una comunidad, que se expresa en y a través de códigos, discurso y otras prácticas que surgen de la interacción de los sujetos y su entorno. (p. 30)

Por último, a partir del análisis de algunos trabajos de Martínez (1993, 2013) y Quiroz (2018), y para efectos de esta investigación, definimos las condiciones de posibilidad como aquellas acciones o prácticas sociales, discursos, acontecimientos, cambios históricos, políticos,

---

<sup>9</sup> A propósito, cabe mencionar que Foucault cuestionaba a los historiadores de su época porque solo hacían historia si a ella le podían encontrar una causa y, casi siempre, esta causa provenía de la economía.

sociales, culturales y religiosos que permean el pensamiento de los sujetos por medio de la experiencia, y, por tanto, influyen en la comprensión, construcción o consolidación de un concepto o de un objeto de conocimiento (en nuestro caso, el objeto matemático llamado multiplicación).

## 4. Sobre lo metodológico

En el presente capítulo mostraremos algunos aspectos que constituyen el camino de la investigación, entre los que se encuentran: el tipo de investigación, el enfoque investigativo y el método historiográfico. Este método propone la construcción de un archivo a partir de los datos que se encuentren en algunas fuentes documentales. Finalmente, expondremos en qué consiste el análisis de documental.

### 4.1 Sobre el objeto de estudio

La presente investigación se enmarca en un paradigma cualitativo con un enfoque hermenéutico-interpretativo. Según Vanegas<sup>10</sup> (2010), en la investigación cualitativa “se reconoce la existencia de múltiples realidades y no una realidad única y objetiva, sino una construcción o un constructo de las mentes humanas; y, por tanto, la “verdad” está compuesta por múltiples constructos de la realidad” (p. 130).

En este trabajo indagamos en el pasado por aquellas múltiples realidades de una comunidad o cultura, y no solamente pensamos en una única verdad, sino que, por el contrario, indagamos por múltiples prácticas que el ser humano, en determinados momentos de la historia, llevó a cabo para consolidar esa “verdad”. Es así, que a partir de la perspectiva foucaultiana acudimos a la historia para describir las condiciones que posibilitaron la emergencia y constitución del concepto de la multiplicación, analizando las prácticas y discursos configurados alrededor de este, no buscamos el origen, sino los múltiples puntos de emergencia y las condiciones que lo llevaron a ser lo que hoy en día se conoce como multiplicación. Por tanto, la historiografía es un método para ello.

En concordancia con lo anterior, Denzin<sup>11</sup> y Lincoln<sup>12</sup> (2012) mencionan que “la investigación cualitativa es una actividad situada, que ubica al observador en el mundo. Consiste

---

<sup>10</sup> Blanca Cecilia Vanegas: Profesora Emérita y docente excepcional de la Universidad Nacional de Colombia. Profesora Titular de la Universidad del Bosque ( Bogotá, Colombia)

<sup>11</sup> Norman Kent Denzin: Profesor Emérito en el departamento de Sociología de la Universidad de Illinois en Urbana – Champaign, (Estados Unidos). Intereses académicos: La Teoría Interpretativa, Los Estudios de Desempeño, La Metodología de Investigación Cualitativa.

<sup>12</sup> Yvonna Sessions Lincoln: Metodóloga y académica de la educación superior y desarrollo de recursos humanos en la Universidad de Texas (Estados Unidos). Entre sus obras se destacan: La Investigación Cualitativa, Métodos de Recolección y Análisis de Datos.

en una serie de prácticas materiales e interpretativas que hacen visible el mundo y lo transforman”. (p. 48). En este sentido, en la investigación que llevamos a cabo, nos ubicamos como los observadores del mundo, revisamos en la historia aquellos acontecimientos sucedidos en una comunidad para interpretarlos y a partir de su naturaleza comprenderlos. Así, se hacen visibles, hoy, esas condiciones de posibilidad gracias a los datos recolectados en las fuentes consultadas.

Además, el enfoque de nuestra investigación, lo abordamos desde los planteamientos de Denzin y Lincoln (2012), los cuales nos mencionan que:

La investigación cualitativa implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo, lo cual significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en sus escenarios naturales tratando de entender e interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas les dan. (p.48)

Los acontecimientos o fenómenos objeto de estudio en esta investigación se encontraron en los datos que rastreamos a partir de las lecturas críticas e interpretativas de la historia. Estos datos posibilitaron indagar por condiciones de posibilidad. Tales datos fueron analizados bajo uno de los enfoques de la investigación cualitativa, como lo es el enfoque hermenéutico-interpretativo. Este enfoque posibilitó (re) conocer e interpretar en la historia aquellos acontecimientos o prácticas que se fueron constituyendo como una condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación.

#### **4.2 Sobre el método historiográfico**

Para entender el método historiográfico que adoptamos en esta investigación, hicimos un recorrido por trabajos de varios autores que nos fundamentan este concepto. Es de aclarar que para esta investigación no seguimos al pie de la letra el método historiográfico, sino que retomamos varios elementos del mismo para combinarlos con ideas de la propuesta de análisis de Foucault y con el análisis documental y de contenido.

Autores como Mayer<sup>13</sup> (2009), Pappe<sup>14</sup> (2001), Barbosa<sup>15</sup> y Silva<sup>16</sup> (2014), Garnica<sup>17</sup> (2018) y Quiroz (2018) nos dan una mirada más cercana sobre la historiografía y su relación con la historia y la historicidad. Desde la obra de Pappe (2001), retomamos la historiografía crítica, como la perspectiva sobre la cual nos basamos para hacer la interpretación de la historia.

Usualmente, la definición de historiografía se refiere al estudio de los textos escritos sobre la historia y sus fuentes o como la historia de la historia. Consideramos que esta definición no abarca todo su significado para la investigación que adelantamos, porque, como lo señala Pappe, “la historiografía se plantea como problema actual en función del conocimiento de lo anterior, no como historia de la historia, ni como balance, sino como posibilidad de pensar la historia en cada momento” (2001, p. 16).

Es importante entender que la historicidad, la historia y la historiografía tienen una estrecha relación. La historicidad se puede entender como la existencia real de ciertos acontecimientos en el pasado, que pretenden ser históricos. Para Mayer (2013)

La diferencia entre la historia y la historiografía no puede ubicarse en el registro temático, archivístico o documental, sino sólo en el registro de la lectura. La historiografía opera a manera de suplemento crítico (esto es, a modo de un suplemento de lectura) que persigue a la historia por doquier como una sombra. (p. 43)

Con relación a lo anterior, la diferencia entre la historicidad y la historiografía depende de la perspectiva desde la cual nos ubiquemos para interpretar la historia. Del mismo modo, Barbosa y Silva, citando a D’Ambrosio (2004), dejan en claro que hay que hacer una diferenciación entre la historia y la historiografía: “la historia es el conjunto de acontecimientos humanos ocurridos en

---

<sup>13</sup> Benjamin Mayer: Doctor en Filosofía de la Universidad Nacional Autónoma de México. Profesor de la maestría en historiografía de México de la Universidad Autónoma Metropolitana.

<sup>14</sup> Silvia Pappe: Doctora en Letras. Profesora-investigadora de la Maestría en Historiografía, UAN-Azcapotzalco (México). Líneas de investigación en Teoría de la Historia y la Historiografía, Teoría y Crítica Literaria. Autora de nacionalidad Suiza con residencia prolongada en México.

<sup>15</sup> Línlya Natássia Sachs Camarleno de Barbosa: Doctora en Educación matemática de la Universidad de São Paulo (Brasil). Sus intereses de investigación actuales están relacionados con la Educación Matemática, la Educación Rural, las Etnomatemáticas, el Plan de Estudios y la Formación de profesorado.

<sup>16</sup> Marcos Rodríguez da Silva: profesor en el departamento de filosofía de la Universidad Estatal de Londrina (Brasil). Trabaja en los programas de posgrado en Educación Científica y Filosofía. Sus principales temas de investigación: Realismo científico, Empirismo, Historia de la Biología, y Concepciones Sociológicas y Pragmáticas de la ciencia.

<sup>17</sup> Antonio Vicente Marafioti Garnica: Doctor en Educación Matemática de la UNESP de Rio Claro (Brasil). Intereses de investigación en Formación de Profesores de Matemática, Historia Oral, Historia de la Educación Matemática, Narrativas y Metodologías de investigación.

el pasado, y la historiografía es el conjunto de registros, interpretaciones y análisis de estos acontecimientos”<sup>18</sup> (2014, p.107).

Consideramos que Pappe (2001) nos aporta la historiografía crítica, la cual adoptamos en este trabajo de investigación. Entendemos que esta autora se sale del concepto genérico que se tiene de la historiografía; ella ya no la ve solo como la historia de la historia, sino como una posibilidad de pensar la historia en cada momento. Además, Pappe menciona su concepción sobre la historicidad, al expresar que: “Entendemos la historicidad como posibilidad, condición y necesidad para la constitución de lo histórico (Historia, historias, historiografía...) con base en una tensión entre por lo menos dos tiempos: el presente y cualquier modalidad de pasado” (2001, p. 21).

En nuestra investigación realizamos una lectura crítica de la historia. Esta lectura se hace desde el presente recurriendo a la historia del pasado; en este sentido, la historicidad nos posibilita realizar esa lectura crítica, ya que la historicidad es la existencia real o auténtica de aquellos hechos o acontecimientos que se han dado en el pasado y que se han quedado registrados en la historia.

Quiroz (2018) habla de la historiografía como una metodología que tiene en cuenta aspectos culturales, políticos, sociales y religiosos de una comunidad. Estos aspectos, crean la posibilidad de hacer un análisis crítico de los discursos del pensamiento histórico. Así, la autora concibe la historiografía como:

Aquella dialéctica que se traza entre el pasado y el presente, entre la historia de las historias, particularmente en las condiciones de posibilidad, para conocer aspectos sociales, culturales, políticos e incluso religiosos que influyeron en un periodo determinado para crear la historia que puede ser narrada y vivenciada desde el presente. (2018, p. 30)

Con este planteamiento, entendemos que la historiografía apunta a las muchas maneras de analizar esos acontecimientos históricos, que se pueden constituir en condiciones de posibilidad para la emergencia de un saber o un conocimiento.

Por su parte, Garnica (2018) menciona que “la historiografía (la escritura de la Historia), en sus registros, permite que las concepciones, las perspectivas, los escenarios se alteren, se reconfiguren o se mantengan” (Fragmento, párr. 12). Lo anterior nos lleva a pensar que a partir de la historiografía podemos, o bien reconfigurar estos conocimientos o puntos de vista que nosotros tenemos sobre un objeto, o bien mantenerlos.

---

<sup>18</sup> Las traducciones de documentos realizadas de otro idioma al español, a lo largo del trabajo de investigación, fueron realizados por los autores, y por ende, no compromete de ninguna manera a los autores de los textos originales.

En nuestro trabajo, desde la perspectiva de historiografía crítica, tuvimos en cuenta los planteamientos de Pappe (2001) quien se fundamenta en tres razones importantes. La primera razón, es que nos posibilita pensar, reflexionar y problematizar la historia en torno a un eje teórico; la segunda, es que en su concepción no se limita a una historia de las historias, sino que va mucho más allá; y, la tercera, es un quehacer que incluye en su reflexión las consecuencias de este sobre sus propios postulados. Para esta autora:

La importancia de la historiografía crítica radica en que analiza cómo y por qué algo relacionado con el pasado adquiere interés para la historia, investigando siempre a partir de un conocimiento doble: el pasado que aconteció y que es comunicado, y el pasado que recupera la historia desde el presente y para el presente. (2001, p. 16)

En este sentido, observamos la relación que hay entre el pasado y el presente. Nosotros hacemos el análisis de la historia desde el pasado y nos venimos hacia el presente. No vamos a transcribir la historia solo por contarla, sino, que haremos una interpretación crítica más profunda de esta historia.

Así, después de presentar algunos autores que fundamentan la historiografía, en nuestro trabajo la concebimos como la interpretación de la historia para comprender el presente, a partir de un análisis crítico del pasado. Esta interpretación la hacemos desde una perspectiva que posibilite reconocer acontecimientos de carácter social, político, cultural, religioso y económico. En estos acontecimientos identificamos las necesidades y las condiciones que posibilitaron la emergencia de un objeto de conocimiento. El reconocimiento de las necesidades y las condiciones de posibilidad se da por medio del análisis de las prácticas sociales y de los discursos de los sujetos en los diferentes momentos históricos.

### 4.3 Construcción de archivo

En esta investigación comprendemos el archivo a la luz de los trabajos de autores como Díaz<sup>19</sup> (1995), Quiroz (2018) y Rodríguez<sup>20</sup> (2011).

---

<sup>19</sup> Esther Díaz: Doctora en Filosofía de la Universidad de Buenos Aires (Argentina). Pensadora intelectual, epistemóloga y escritora. Ha realizado una importante contribución a lo que respecta a la introducción de la filosofía de Michael Foucault en el ambiente académico argentino.

<sup>20</sup> Lorena María Rodríguez Rave: Magíster en Educación Línea de Formación de Maestros. Investigadora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Investigadora del Grupo de Historia de la Práctica Pedagógica en Colombia. Actualmente cursa su estudio doctoral en la Universidad de Antioquia.



El archivo, según Díaz (1995), “está compuesto por sistemas de enunciados de los que surgen los acontecimientos y las cosas” (p. 20). Es importante destacar en esta definición una palabra clave: “enunciado”. Desde la perspectiva foucaultiana, el enunciado, en el sentido arqueológico del saber, se refiere a aquella enunciación que forma parte de un discurso considerado sólido. Los enunciados son formaciones discursivas que se refieren a una verdad. Todo lo visible puede ser enunciado, pero, no todo lo enunciado puede constituirse en un enunciado en el sentido arqueológico, ya que no tiene un sustento discursivo, teórico o científico que lo respalde; en ese caso son apenas discursos de la vida cotidiana. Los enunciados en esta investigación son enunciaciones que hablen de condiciones de posibilidad de la emergencia de la multiplicación.

A su vez, Rodríguez (2011) define el archivo como, “el conjunto de documentos que se transforman en el material de trabajo para la investigación histórica” (p. 25). La palabra clave en esta definición es “documento”. Para entender qué es documento, Rodríguez (2011) menciona que “el documento permite ver un registro documental que posibilita leer el objeto allí” (p. 16), estos registros pueden ser libros, capítulos de libros, artículos, tesis, entrevistas de un experto en la materia, entre otros.

Para esta investigación concebimos el archivo como el conjunto de documentos, donde pudimos rastrear los enunciados que constituyen los datos. Estos datos, a su vez, posibilitan ver las condiciones de posibilidad que contribuyen a la emergencia de un concepto matemático. Entiéndase aquí el dato como los enunciados cargados de historia que posibilitan ver las condiciones de posibilidad para la emergencia de un objeto.

En este trabajo construimos el archivo a partir de las lecturas de los documentos, donde fuimos rastreando los datos que nos posibilitaron ver las condiciones de posibilidad. Los documentos los identificamos como fuentes primarias o secundarias, según la naturaleza del dato encontrado.

Las fuentes primarias, según Hernández, Fernández-Collado y Baptista<sup>21</sup> (2006), “proporcionan fuentes de primera mano pues se tratan documentos que contienen resultados de

---

<sup>21</sup> Roberto Hernández Sampieri: Doctor en Administración por la Universidad de Celaya (México). Es Licenciado en Ciencias de la Educación. Obras que se destacan: “Metodología de la Investigación”, “Fundamentos de Investigación”, entre otras.

Carlos Fernández Collado: Doctor en Sociología por la Michigan State University (Estados Unidos). Áreas de trabajo: El Análisis de Medios y Nuevas Tecnologías, la Comunicación Organizacional, la Parte Teórica, la Comunicación Interpersonal, las Aportaciones Metodológicas. Y entre sus libros esta Metodología de la Investigación.

estudios como libros, antologías, artículos, monografías, tesis” (p. 66); mientras que las fuentes secundarias “son listas, compilaciones y resúmenes de referencias o fuentes primarias publicadas en un área de conocimiento en particular, las cuales comentan artículos, libros, tesis, disertaciones y otros documentos especializados” (Hernández et al., 2006, p. 66).

Los datos obtenidos en el archivo surgieron de las fuentes primarias y secundarias y son enunciados que hablan particularmente de las condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales (objeto de esta investigación). Estos datos fueron producidos por nosotros los investigadores, producto del análisis crítico e interpretativo de la historia de las primeras civilizaciones como en la prehistoria, los babilónicos, los egipcios, los indios y árabes.

Los artículos, trabajos de investigación y los libros fueron localizados en bases de datos como Dialnet, Scielo, Redalyc, Scrib; en repositorios de tesis como la de la Universidad de Antioquia y en buscadores como Google Académico y Google Books.

A continuación, mostramos las fuentes primarias y secundarias que constituyeron nuestro archivo, de donde fueron extraídos los datos que enuncian las condiciones de posibilidad, y que fueron objeto de interpretación y de análisis (ver Tabla 1).

**Tabla 1**

*Fuentes primarias y secundarias que constituyeron el archivo*

<b>Construcción del archivo</b>			
<b>Título de la fuente</b>	<b>Autor</b>	<b>Tipo de fuente</b>	<b>Primaria/secundaria</b>
El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I	Morris Kline	Libro	Secundaria
Historia de las matemáticas I	Jean-Paul Collette	Libro	Secundaria

Historia de la matemática	Carl Benjamin Boyer	Libro	Secundaria
Historia de las matemáticas	K. Ríbnikov	Libro	Secundaria
Los algoritmos de cálculo en la historia de la matemática y en la escuela	Verónica Grimaldi	Artículo	Secundaria
La matemática. Su contenido, métodos y significado	Aleksandr Danílovich Aleksandrov	Capítulo de libro	Primaria
Expediciones Matemáticas	Frank J. Swetz	Libro	Primaria
The Rhind Mathematical Papyrus	Gay Robins & Charles Shute	Libro	Primaria
The Rhind Mathematical Papyrus	Arnold Buffon, Raymond Clare & Henry Parker	Libro	Primaria
Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità	Luca Pacioli	Libro	Primaria

*Nota.* Elaboración propia

Basados en estas fuentes empezamos a identificar aquellas prácticas sociales y discursivas que llevaron a desarrollar conceptos matemáticos, siguiendo los rastros de la multiplicación. Conceptos, estos, que hoy en día utilizamos en nuestra vida cotidiana como algo sencillo, pero que fueron, y aún son, avances matemáticos que posibilitaron, y posibilitan, el desarrollo de la cultura.

#### 4.4 Análisis documental

En esta investigación se usa el método historiográfico complementado con el análisis documental. Según Quiroz (2018),

El análisis documental se basa en un proceso de selección en los documentos de las nociones y los conceptos que se aproximan al estudio del objeto. Para analizar un documento no solo se debe tener en cuenta la identificación externa o descripción física que se hace a través de los elementos como el autor, el título y la editorial, sino su contenido. (p. 31)

Complementando lo anterior, además de los elementos mencionados en el análisis documental, es importante reconocer aspectos biográficos del autor, si aún vive o no, la postura epistemológica y la línea de investigación desde la cual produce conocimiento.

También es importante identificar en los documentos, la tesis, el objetivo y el camino recorrido por el autor para desarrollar su trabajo. Todo esto se convierte en insumos que le posibilitan al lector realizar un análisis crítico del documento.

Para realizar el análisis documental en esta investigación, tuvimos en cuenta la descripción de la temática. Esta descripción la realizamos por medio de palabras-clave en las bases de datos y repositorios ya mencionados. Algunas de las palabras-clave utilizadas en la búsqueda fueron condiciones de posibilidad, multiplicación de números naturales, emergencia de la multiplicación, historia de la multiplicación, historiografía, historia de las matemáticas, entre otras. Esta búsqueda la realizamos en las fuentes antes mencionadas en español y algunas en inglés y portugués.

Para López<sup>22</sup>(2002), el análisis de contenido se puede considerar como una forma particular de analizar documentos. Como una técnica que no pretende analizar el estilo del documento, sino las ideas que se expresan, los significados de las palabras o enunciados contenidos en el documento.

Por su parte, Bardín<sup>23</sup> (1986) menciona que el análisis de contenido es entendido como “un conjunto de instrumentos metodológicos, cada vez más perfectos, y en constante mejora, aplicados a “discursos” (contenidos y continentes) extremadamente diversificados” (p. 7). Este conjunto de instrumentos favorece el análisis de las prácticas discursivas de las culturas y posibilita rastrear o

---

<sup>22</sup> Fernando López Noguero: Doctor en Pedagogía por la Universidad de Sevilla (España). Doctor Honoris Causa por la UNAM (Managua, Nicaragua).

<sup>23</sup> Laurence Bardín: Doctora en el Estado de Letras y Ciencias Humanas. (francesa)

descubrir sistemas establecidos por los enunciados, los cuales se pueden identificar por medio del método historiográfico y ser interpretados de forma crítica a partir de la hermenéutica.

Bardín (1986) señala que para realizar el análisis de contenido no existen plantillas confeccionadas listas para ser usadas, simplemente se cuenta con unos patrones base que son difíciles de obviar.

Teniendo en cuenta esta idea expuesta por Bardín (1986), en esta investigación, después de realizar las búsquedas de las fuentes documentales, las sistematizamos en una plantilla en Excel que denominamos registro bibliográfico. Esta plantilla fue creada bajo unos presupuestos que posibilitan analizar los documentos y extraer información importante, bajo los criterios establecidos por nosotros los investigadores, categorizando su importancia en el aporte a la investigación.

El registro bibliográfico estuvo compuesto por un encabezado donde se hallan nuestros datos personales y de los maestros asesores; también se encuentra la estructura que fundamenta la investigación o lo que llamamos cuadro-taller. Este cuadro-taller está conformado por el título o tema de investigación, el problema, la pregunta, el objeto y el objetivo planteado. Estos fueron algunos aspectos generales que se relacionaron en la plantilla, como una orientación a lo que se quiso llegar con esta investigación.

Propusimos en la plantilla la fecha de lectura, la fecha de elaboración o de registro, el tipo de fuente y si la consideramos como una fuente primaria o secundaria, el nombre del autor, la base de datos utilizada, el título de la obra, las palabras-clave textuales (si las tiene) y las palabras-clave para nosotros, el resumen textual (si lo tiene) y el resumen para nosotros, las citas textuales que consideremos importantes, nuestros aprendizajes o las ideas centrales de la lectura, las observaciones, las referencias en el estilo American Psychological Association (APA), y finalmente, la biografía del autor.

A continuación, se presentan extractos del modelo de la plantilla creada para registrar las fuentes documentales y realizar el análisis correspondiente (ver Figura 6 y Figura 7).

**Figura 6***Encabezado del Registro Bibliográfico*

Nombres: Marisela Holgín, Jhon Jairo Bedoya y Leonardo Pico		Problema: Desconocimiento de condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.				
Asesores: Diana Victoria Jaramillo Quiceno y Diego Alejandro Pérez		Pregunta: ¿Qué condiciones de posibilidad contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales?				
Tema de investigación: Condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.		Objetivo: Identificar condiciones de posibilidad que contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales.			Objeto: Condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.	
Fecha de elaboración	Tipo de fuente	Primaria/secundaria	Autor	Base de datos utilizada	Título	Palabras clave para nosotros

*Nota.* Elaboración propia.

**Figura 7***Registro de los documentos consultados*

Tipo de fuente	Primaria/secundaria	Autor	Base de datos utilizada	Título	Palabras clave para nosotros	Resumen para nosotros
Libro	Primaria	Ribnikov.	<a href="https://vdocuments.net/download/k-ribnikov-historia-de-las-matematicas">https://vdocuments.net/download/k-ribnikov-historia-de-las-matematicas</a>	Historia de las Matemáticas	Multiplicación, objeto de la historia, actividad productiva, práctica, necesidad, papiro de Rhind, desarrollo, condiciones.	Este libro nos menciona que las matemáticas surgieron de la actividad productiva de los hombres y que así mismo los nuevos conceptos y métodos se irían formulando bajo la influencia de las ciencias exactas. El autor nos habla de las matemáticas en Egipto, Babilonia, China e India antiguas de la edad media y el renacimiento, hablándonos de la multiplicación en cada una de estas y algunas características de los sistemas de numeración.
Artículo	Secundaria	Verónica Grimalki	<a href="https://www.academia.edu/18157765/Los_algoritmos_de_c%C3%A1lculo_en_la_historia_de_la_matem%C3%A1tica_y_en_la_escuela?email_work_card=title">https://www.academia.edu/18157765/Los_algoritmos_de_c%C3%A1lculo_en_la_historia_de_la_matem%C3%A1tica_y_en_la_escuela?email_work_card=title</a>	Los algoritmos de cálculo en la historia de la matemática y en la escuela.	Algoritmo, cálculo y escuela.	Los algoritmos de cálculo en la historia de la matemática y en la escuela. Define lo que es un algoritmo. El modo de resolver los cálculos escritos es reciente. El origen de nuestros algoritmos se remonta al 500 d.C. Al-Khuwarizmi recopiló y difundió entre los árabes elementos de la matemática hindú. El autor presenta los 8 métodos para multiplicar recopilados en la obra de Luca Pacioli 1494.

*Nota.* Elaboración propia.

El registro y análisis de las fuentes documentales posibilitó la exploración de los documentos básicos para la fundamentación teórica y metodológica de esta investigación, también, posibilitó el análisis de contenido desde el cual se fueron identificando los enunciados que se iban constituyendo en las condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.

El análisis de las fuentes lo realizamos implementando una estrategia que denominamos “semáforo”. Esta estrategia consistió en resaltar los documentos con color verde, amarillo y rojo, según la importancia que nosotros como investigadores le otorgáramos a cada documento. Esta marcación con los colores estuvo sujeta a cambios, ya que con el ir y venir en los análisis críticos

de las lecturas de estos documentos pudimos otorgar mayor relevancia a algunos documentos que en un principio considerábamos no la tenían.

## **5. Buscando en la historia: algunas condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales**

En el presente capítulo, mostraremos inicialmente algunas nociones de las matemáticas en los pueblos primitivos desde autores como Kline<sup>24</sup>, Collette, Ríbnikov y Boyer<sup>25</sup>. Posteriormente, presentamos algunas condiciones de posibilidad que identificamos a partir de la lectura crítica de parte de la historia de las matemáticas. Cada condición de posibilidad identificada influyó directamente en la consolidación de la multiplicación de números naturales. A continuación, presentamos las condiciones de posibilidad identificadas en tres categorías de análisis emergentes: la primera, “La cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes”; la segunda, “La economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los de los textos cuneiformes y del papiro de Rhind”; y, la tercera, “Las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal”.

### **5.1 Primeras nociones matemáticas en la prehistoria**

La historia de la matemática muestra una serie de acontecimientos en la que cada cultura desarrolló conocimientos matemáticos como respuesta a las necesidades de su entorno y a sus labores cotidianas. En los primeros asentamientos humanos, el hombre primitivo realizó una transición de actividades y estilo de vida; pasó de dedicarse a la caza y a la pesca a establecer labores de agricultura y comercio. Fue ahí donde empezaron a emerger los primeros conceptos matemáticos, entre ellos el concepto de número, tal y como lo sugiere Boyer (1986), “El concepto de número natural es uno de los más antiguos en la matemática, y sus orígenes se pierden entre la bruma de la antigüedad prehistórica” (p.24).

---

<sup>24</sup> Morris Kline: (estadounidense) Nació 1 de mayo de 1908 Brooklyn Nueva York y falleció el 10 de julio de 1992 también en Brooklyn Nueva York, fue profesor de matemáticas, filosofía y enseñanza de las matemáticas, y un gran divulgador de temas matemáticos. Entre sus obras tenemos: Introducción a las Matemáticas, Matemáticas en la cultura occidental, teoría de ondas electromagnéticas entre otras.

<sup>25</sup> Carl Benjamin Boyer: (estadounidense) Nació 3 de noviembre de 1906 y murió 26 de abril de 1976, fue un historiador de la ciencia, en especial de la matemática. Entre sus obras: Historia de la Geometría Analítica, la Historia del Cálculo y su Desarrollo Conceptual, Historia de las Matemáticas.



La noción de número fue dada a partir de las necesidades y condiciones sociales de estos tiempos, donde el hombre primitivo empezó a constituir sus comunidades. Según Collette:

La necesidad de un sistema de numeración proviene de la naturaleza de las actividades propias del pueblo primitivo. Las tribus que poseían grandes rebaños domesticados o que practicaban una agricultura diversificada y desarrollada sintieron muy pronto la necesidad de elaborar un sistema que les permitiese utilizar números grandes y favoreciese la invención de un calendario. (1985, p.10)

Lo anterior se relaciona con el planteamiento de Kline (1972), quien señala que algunas civilizaciones primitivas llegaron a contar y a distinguir los números uno, dos y la palabra *muchos* para designar una cantidad mayor a dos; mientras que otras culturas sí conocieron números más grandes y fueron capaces de operar con ellos. Algunas civilizaciones primitivas que precedieron a los mesopotámicos y egipcios además de conocer los números los dotaron de símbolos o nombres para cada uno de ellos, incluso, introdujeron el uso de sistemas de numeración cuya base era la base diez, base veinte o base cinco. También encontramos que en algunas civilizaciones primitivas se realizaban las cuatro operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) restringidas a números no muy grandes.

Estas primeras civilizaciones se vieron en la necesidad de tener un mayor control sobre sus actividades; así, a partir de sus prácticas cotidianas fueron surgiendo nuevos saberes que les facilitó comprender y organizar de una manera más ordenada sus actividades comerciales: como lo plantea Collette (1985) a continuación:

Con la aparición del comercio, la industria y la agricultura, el hombre primitivo debe no solamente saber contar, sino también ser capaz de hacer un balance de sus actividades comerciales. Los métodos primitivos varían enormemente cuando se trata de registrar las diversas formas de la actividad económica: marcas en la madera, nudos en una cuerda, grupos de guijarros o de cocos, rayas en los papiros o en tablillas de arcilla, etc. Y hacer el balance implicaba necesariamente conocer las reglas elementales de cálculo numérico. (p.11)

De acuerdo con el planteamiento anterior, podemos inferir que la matemática de estas primeras civilizaciones tuvo una gran importancia para el desarrollo de la humanidad. Esas matemáticas se convirtieron en la base de nuevos conocimientos que surgieron a partir de las

necesidades y aplicación los conocimientos en la vida cotidiana. A propósito de esto, Kline (1972) menciona que:

Las aplicaciones de la matemática en estas civilizaciones primitivas se limitaron a cálculos comerciales muy sencillos, al cálculo aproximado de áreas de campos, a la decoración geométrica de la cerámica, al diseño de dibujos para reproducirlos repetidamente en los tejidos, y al registro y medida del tiempo. (p.19)

Las matemáticas de los pueblos primitivos se fueron consolidando a partir de las necesidades del hombre; además, la aplicación de estas matemáticas se limitó al conteo y a los cálculos comerciales sencillos; podemos así inferir que en la prehistoria ya se tenía conocimiento de las operaciones aritméticas básicas, un tanto rudimentarias, pero prácticas.

Podríamos decir que las matemáticas, entendidas como disciplina, no existían sino hasta después que entraran en escena los antiguos griegos, en una época que va aproximadamente entre el año 600 y 300 a.C. Sin embargo, podemos afirmar que sí hubo unas matemáticas anteriores a éstas, en las civilizaciones precedentes que desarrollaron los orígenes rudimentarios de la matemática (Kline, 1972).

La historia nos cuenta que anteriormente los primeros cálculos se hacían con los dedos de las manos y de los pies, con montones de piedras, tallando marcas en madera o algún otro elemento del entorno, como se pudo evidenciar en el hueso de Ishango (ver Figura 8). Según Boyer (1986), este hueso fue hallado en Checoslovaquia procedente de un cachorro de lobo donde aparecen 55 incisiones profundas distribuidas en dos series, una de 25 y otra de 30 y en cada serie las incisiones están distribuidas en grupos de cinco.

**Figura 8***Hueso de Ishango*

Nota. Fuente <https://prehistorialdia.blogspot.com/2014/02/las-matematicas-en-la-prehistoria-5.html>

Lo anterior es una evidencia de que el conteo y los cálculos de los primeros humanos se realizaban con las herramientas que tenían a la mano. Cada grupo de cinco incisiones distribuidas en dos series, en el hueso de Ishango, indicaba la relación y la forma en la que contaban los humanos. Todos estos cálculos se limitaban a operaciones aditivas, debido a que se utilizaban cantidades pequeñas.

Los primeros humanos nómadas fueron dejando sus actividades primitivas, como la caza y la pesca, y se establecieron en asentamientos; en los lugares donde se radicaban se dedicaron a la agricultura, a la domesticación de animales y a la construcción de viviendas y de templos. Entre los asentamientos cercanos fueron surgiendo intercambios comerciales. Estos intercambios dieron un incremento a las actividades económicas.

A medida que las poblaciones se incrementaban, también aumentaba la necesidad de realizar operaciones aritméticas que posibilitaran manejar cantidades más grandes, ya que la forma en la que los primeros humanos realizaban los cálculos se estaba quedando limitada. En este sentido dice Ríbnikov (1987, p. 20) que:

Por ejemplo, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar los objetos. Inicialmente se contaba con ayuda de los medios disponibles: dedos,

piedras, conos de abetos, etc. Huellas de esto se han conservado en las denominaciones de los cálculos matemáticos: por ejemplo, *calculus* en su traducción del latín significa *cuenta con piedras*. La reserva de números en las primeras etapas era muy limitada. La serie de los números naturales conocidos y utilizados era finita y se fue extendiendo sólo gradualmente. La conciencia de la prolongación ilimitada de la serie natural constituye un síntoma de alto nivel de conocimiento y cultura.

Vemos pues, como al incrementar las cantidades, los humanos ya no podían continuar haciendo cuentas con los dedos, las piedras, etc., sino que veían la necesidad de operar con números más grandes y esto los obligó a buscar una nueva forma de hacerlo.

A medida que los asentamientos humanos fueron creciendo, se instauraron los primeros gobiernos o Estados. Una de las funciones de los Estados era la de calcular y recoger los impuestos a los pueblos, tarea encomendada a los escribas o copistas, quienes eran las personas o los funcionarios encargados de realizar dichos cálculos matemáticos. De igual manera, la organización del Estado implicaba contar con un ejército para protegerse de posibles invasiones, asunto que requirió conocimientos matemáticos para su organización, dotación y distribución de tropas.

En este sentido, Aleksandrov <sup>26</sup> (1973) menciona que “con la aparición del Estado surgió la necesidad de recoger impuestos, reclutar y equipar ejércitos, etc., todo lo cual requirió operaciones con números muy grandes.” (p.28).

Las actividades administrativas requerían de conocimientos matemáticos para realizar operaciones aritméticas con cantidades más grandes. Dichas actividades se fueron constituyendo como una condición de posibilidad que contribuyó a la emergencia de la multiplicación de números naturales. Las operaciones aritméticas ya no se podían realizar como se hacían inicialmente para efectuar los cálculos de forma aditiva, contando con los dedos o con piedras, ya que esto suponía un procedimiento muy engorroso y demorado. El ser humano se vio movilizado a buscar nuevas estrategias y métodos para realizar cálculos matemáticos.

Por ejemplo, si un escriba deseaba calcular el impuesto que debía pagar un agricultor por la cantidad de trigo que producía su terreno, seguramente, se veía limitado si sus cálculos los realizaba con los dedos, o tendría que cargar con una gran cantidad de piedras para realizar estos

---

<sup>26</sup>Aleksandr Danílovich Aleksandrov: (Ruso). Nació 4 de agosto de 1912 Gobernación de Riazán y falleció el 27 de julio de 1999 en San Petersburgo. A partir de 1929 estudio Física y Matemática en la Universidad de San Petersburgo. Desde 1930 trabajo en el Instituto Estatal de Óptica (GOI) y luego en el Instituto de Física de la Universidad, donde en 1933 se graduó como Físico Teórico.

cálculos, o tendría que buscar la manera de realizar una operación que le permitiera realizar este cálculo de una manera más sencilla.

## 5.2 La cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes

En la cultura mesopotámica encontramos que sus pueblos ya conocían las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división); cabe aclarar que estas operaciones eran realizadas con números no muy grandes.

Gran parte de la información arqueológica la aportaron las tablillas de arcilla, donde se escribía cuando aún estaban blandas y luego se cocían o simplemente se dejaban secar al sol. El tipo de escritura era realizado con una estaca en forma de cuña, de ahí que su nombre sea escritura *cuneiforme*. La mayoría de estas tablillas data de dos periodos, del año 2000 a. C. y otras en el periodo comprendido entre el año 600 a. C y 300 d. C. En este sentido, dice Collette (1985),







Los textos matemáticos consisten esencialmente en tablillas que contenían series de números, relaciones geométricas y listas de problemas de la vida cotidiana. En particular, las tablillas contenían multiplicaciones, números y sus inversos, cuadrados y cubos y también algunas relaciones numéricas en términos de exponentes. (p. 21)

















Las tablillas de arcilla se convirtieron en instrumentos valiosos para la arqueología porque aportaron información sobre los conocimientos matemáticos que poseía la cultura mesopotámica; entre esta información, resaltamos el sistema de numeración utilizado por los mesopotámicos.

A continuación, presentamos los números naturales en la escritura cuneiforme (ver Tabla 2).



**Tabla 2**





*Representación de los números naturales en la escritura cuneiforme*

Escritura sistema decimal	Escritura cuneiforme base 60	Escritura sistema decimal	Escritura cuneiforme base 60
1		12	
2		20	
3		30	

4		40	
5		50	
6		60	
7		61	
8		70	
9		80	
10		120	
11		130	

Nota. Adaptada de Kline (1972, p. 21).

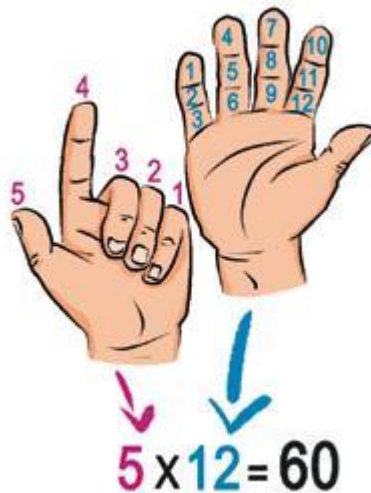
Para representar la unidad se utilizaba este símbolo  y se repetía hasta nueve veces para representar los números hasta el nueve. El numeral diez se representaba con el símbolo  y se repetía combinándolo con la unidad para representar los numerales del 11 al 59. A partir del numeral 60, se utilizaban las mismas combinaciones de símbolos para representar los numerales, pero se debía tener en cuenta que entraba en juego el principio posicional.

El sistema de numeración de los mesopotámicos se caracterizaba por el principio de notación posicional y la base sesenta, no tenían definido un símbolo para el cero, en su lugar dejaban un espacio, motivo por el cual, sus numerales podían resultar ambiguos o mal interpretados. Por ejemplo, si representamos el numeral 2  y el numeral 61  en la escritura *cuneiforme*, tenemos que sus símbolos son los mismos, pero, podemos evidenciar que entre los numerales que representan el 61, existe un espacio. Cada numeral ocupa una posición diferente, por consiguiente, obtiene un valor numérico dependiendo del lugar que ocupen los símbolos. Para representar el numeral uno se utilizaba este símbolo  y para representar el numeral 60 de igual modo se utilizaba el mismo símbolo,  pero, más grande que el símbolo utilizado para representar el uno.

El origen del sistema de numeración de base sesenta o sexagesimal puede remontarse a la forma como contaban o enumeraban los habitantes de Mesopotamia, usando los dedos de las manos. Los mesopotámicos contaban con los dedos de la mano; iniciaban señalando con el dedo pulgar sobre el dedo meñique, cada una de las tres falanges, y luego las falanges de los dedos restantes (ver Figura 9); de esta forma se contaba hasta 12. Para contar cifras mayores, cada vez que se contaba hasta 12 se levantaba un dedo de la mano libre, así hasta completar 60 unidades, o sea, ( $12 \times 5 = 60$  hablando en base decimal).

### Figura 9

*Forma de contar en el sistema sexagesimal*



*Nota.* Fuente <https://docplayer.es/docs-images/78/77275838/images/8-0.jpg>

Una de las razones por la que se adoptó el sistema numérico sexagesimal fue por razones prácticas, ya que, si la unidad mayor fuese 60, al fraccionar esta unidad en  $1/2$ ,  $1/3$ , o  $2/3$ , se obtendrían múltiplos enteros, por lo tanto, resultaba conveniente para las prácticas cotidianas. Es decir, 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, y su cociente es un número entero, razón por la cual, a los comerciantes o escribas se les facilitaba realizar las reparticiones de granos, harinas, pagos de salarios, entre otros.

El sistema base 60 se usa hoy para medir las horas que equivalen a 60 minutos, y los minutos que equivalen a 60 segundos. Hoy usamos este sistema de numeración en la medición del tiempo




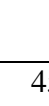

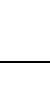

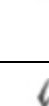


y de los grados. Los 60, minutos de la hora y también los  $360^\circ$  de un círculo provienen de la tradición babilónica (Swetz<sup>27</sup>, 2013).

Collette (1985) menciona que los mesopotámicos realizaban la multiplicación referenciados en tablas de multiplicación construidas usando adición iterativa (ver Tabla 3).

A continuación, presentamos un ejemplo de estas tablas, en este caso la tabla de multiplicar por 9 en la escritura *cuneiforme* y en base sesenta, en esta, podremos observar a partir de la séptima línea ( $9 \times 7 = 63$  hablando en sistema decimal) el cambio en la escritura ya que se trata de un sistema de numeración posicional.










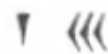





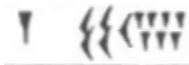


**Tabla 3**

*Tabla de multiplicar del 9 en el sistema sexagesimal*

Tabla de multiplicar por 9			
Representación Base decimal	Representación Base sexagesimal	Representación Base decimal	Representación Base sexagesimal
1		9	
2		18	
3		27	
4		36	
5		45	

<sup>27</sup> Frank J. Swetz: Catedrático emérito de Matemáticas y Educación de la Pennsylvania State University (Estados Unidos)



6		54	
7		63	
8		72	
9		81	
10		90	
11		99	
12		108	
13		117	
17		126	

*Nota.* Adaptado de Collette (1985, p. 24).

Según Kline “los babilonios también efectuaban multiplicaciones con números enteros: multiplicar por 37, por ejemplo, suponía, multiplicar por 30, luego por 7 y sumar los resultados” (1972, p. 24). Retomemos el anterior ejemplo, supongamos la multiplicación  $84 \times 37$  (hablando en sistema decimal). Según el planteamiento de Kline (1972), los babilonios haciendo uso del sistema de numeración sexagesimal, primero multiplicaban  $84 \times 30 = 2520$  y luego multiplicaban  $84 \times 7 = 588$ . Después sumaban los resultados o los productos de las anteriores multiplicaciones, esto es  $2520 + 588 = 3108$ . En esta forma de operar podemos evidenciar que los babilonios

tenían un pensamiento matemático, ya que ejecutaban operaciones aritméticas a la vez que componían y descomponían los números en diferentes términos.

Las anteriores formas en las que se efectuaban las multiplicaciones en la cultura mesopotámica fueron producto de la necesidad del hombre por buscar otras formas de realizar cálculos para operar con cantidades cada vez más grandes.

En la cultura mesopotámica, la escritura cuneiforme jugó un papel importante para la emergencia de la multiplicación, ya que, al estar construidas las tablas de multiplicar, los escribas o copistas podían realizar cálculos aritméticos de una manera más práctica, utilizando cantidades más grandes. Con la invención de la escritura y los registros en las tablillas de arcilla, se dejó un legado de la cultura mesopotámica que se transmitió entre los escribas, como una manera de preparación para servir al Estado en los asuntos administrativos y financieros.

Para sintetizar, hemos visto, que una condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación fue, sin duda, la necesidad de operar con números cada vez más grandes, esto como consecuencia del crecimiento de la población, de las actividades comerciales y de su desarrollo económico. En la civilización mesopotámica, pudimos evidenciar un desarrollo en la forma de efectuar cálculos que fueron dejando de lado los métodos rudimentarios; estos desarrollos, fueron fundamentales en el desarrollo de otros conocimientos matemáticos.

### **5.3 La economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los textos cuneiformes y del papiro de Rhind**

Basados en las lecturas realizadas logramos identificar que, en las primeras civilizaciones, como la mesopotámica y la egipcia, se han hallado registros escritos en los cuales se encontraron problemas descriptivos del cotidiano y sus soluciones. En este sentido, Swetz (2013) menciona que los problemas descriptivos son aquellos cuyos enunciados presentan los datos, narrando una historia o describiendo una situación. Estos problemas son extensiones de la tradición oral de los pueblos.

Con la aparición de la escritura, los problemas descriptivos se estandarizaron y se establecieron como un registro de conocimiento matemático. Estos registros escritos se encontraron en las tablillas de arcilla en Mesopotamia y en los papiros en Egipto. Es importante destacar lo que afirma Swetz (2013, Una visión general, párr. 4) “los problemas descriptivos son

las “huellas” dejadas por la historia de las matemáticas y su enseñanza. Desde el punto de vista de las matemáticas nos enseñan donde hemos estado y la dirección hacia la cual nos dirigimos”.

A propósito de lo anterior, desde la perspectiva foucaultiana y su método de análisis de la historia, estas “huellas” dejadas por la historia de las matemáticas se constituyen en un dato que nos lleva a encontrar las condiciones que posibilitaron la emergencia de un objeto o conocimiento matemático.

Con el surgimiento del urbanismo en la cultura mesopotámica y la creación del Estado, la mayoría de los problemas descriptivos se convirtieron en textos escolares para la formación de los escribas o copistas que entraban al servicio del Estado. La función de los escribas en estas primeras sociedades era realizar cálculos del área de los terrenos para sembrar, de la longitud de los canales, la cantidad de la tierra que una persona extraía en las excavaciones, del número de ladrillos que se necesitan para una construcción, de los impuestos y los salarios de los obreros.

A continuación, mostramos una lista de actividades cotidianas para las cuales los escribas debían realizar los cálculos (ver Tabla 4).

**Tabla 4**

*Organización de las actividades económicas en la antigua Mesopotamia*

<b>Comida</b>	<b>Construcción</b>	<b>Trabajo</b>	<b>Comercio</b>
Siembra	Preparación	Salarios	Moneda
Cosecha	Área	Impuestos	Sociedades
Distribución	Volumen	Valor	Beneficios
Almacenamiento	Medidas	Proporción	Pérdidas
Calendario	Geometría	División social	Intereses

*Nota.* Adaptado de Swetz (2013)

Como ya dijimos, los primeros registros escritos se hallaron en las tablillas de arcilla. Las tablillas más antiguas datan de hace 5000 años aproximadamente, encontradas en la cuenca del río Éufrates y el río Tigris en la antigua Mesopotamia. En las primeras tablillas encontradas se hallaron marcas de diferentes fichas de barro, símbolos matemáticos cuya marca designaba un valor numérico. Las marcas poco a poco se fueron incorporando a la forma de la escritura cuneiforme. Con relación a lo anterior, Swetz (2013) menciona que:

Parece que los primeros productos de este proceso fueron tablillas numéricas, registros que contenían datos de actividades sociales, como las cantidades recogidas durante la cosecha o los impuestos pagados y “textos con problemas”, es decir, conjuntos de problemas para los que se le buscaba una solución, o bien un problema concreto con una respuesta y el proceso que conducía a la solución. (Una visión general, párr. 2)

A continuación, mostramos una traducción de un problema que, según Swetz, fue encontrado en los primeros registros de las tablillas de arcilla, el cual es un enunciado que narra una actividad cotidiana de la sociedad mesopotámica, y que requiere de una solución por medio de un conocimiento matemático. “Un hombre transporta 540 ladrillos a una distancia de 30 varas. [A cambio de esta tarea] le entregan *1 ban* de grano. Ahora transporta 300 ladrillos y termina el trabajo. ¿Cuánto grano le entregan? [*1 ban = 10 sila* (litros)]”. (Robson, 2007, citado en Swetz, 2013, una visión general, párr. 7)

Complementando lo anterior, retomamos a Kline (1972), quien dice:

A pesar de su limitada extensión, la matemática entraba en muchos de los aspectos de la vida de los babilonios. Babilonia (una ciudad de la antigua Mesopotamia) era un cruce de importantes rutas comerciales. Los babilonios utilizaron sus conocimientos de aritmética y de álgebra elemental aplicados a longitudes y pesos, a intercambios de moneda y mercancías, al cálculo de interés simple y compuesto, de los impuestos y de las porciones de una cosecha a pagar al granjero, al templo y al Estado, mientras que los problemas de herencias y divisiones de campos conducían a problemas algebraicos. La mayoría de los textos cuneiformes que tratan de matemáticas (excluyendo las tablas y textos de ejercicios) se refieren a problemas económicos. No hay duda, pues, de la influencia de la economía en el desarrollo de la aritmética del periodo más antiguo. La construcción de canales, presas y otros proyectos de riego exigía cálculo, y el uso de ladrillos planteaba numerosos problemas numéricos y geométricos. Otros cálculos útiles eran los de volúmenes de graneros y edificios, y los de áreas de campos. (p.30)

Es evidente, con lo planteado por Kline (1972), que las actividades económicas ocuparon un papel importante en la consolidación de los problemas cotidianos, pues la mayoría de estos enunciados giraron en torno a las prácticas que ejercían los pueblos de la antigua Mesopotamia y también los del antiguo Egipto. Veamos otro ejemplo de un problema cotidiano donde se refleja lo mencionado anteriormente:

Se ha de excavar un pequeño canal rectangular a lo largo de 5 km. Su anchura es de 2 m y su profundidad de 1 m. a cada trabajador se le asigna la extracción de  $4\text{m}^3$  de tierra, por lo cual se le pagará  $1/3$  de cesta de cebada. ¿Cuántos trabajadores se requieren para realizar el trabajo y cuál es el total de los salarios que se deben pagar? (Swetz, 2013, La antigua babilonia, párr. 6)

A propósito del pueblo egipcio, esta civilización surgió aproximadamente en el año 4000 a. C.; esta es una fecha estimada ya que no existe un registro exacto documentado. El pueblo egipcio se constituyó a las orillas del río Nilo. Río que una vez al año inundaba casi todo el territorio que se extendía a lo largo de sus riberas, dejando tierras fértiles al retirarse la inundación; motivo por el cual, gran parte de la población egipcia vivía de cultivar las tierras fértiles de esa ribera.



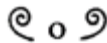



Los egipcios tenían creencias religiosas muy arraigadas, por lo cual, la construcción de templos constituía una actividad muy importante en esta sociedad. Así, era importante tener los conocimientos matemáticos que les permitiera calcular la cantidad de ladrillos para la construcción de esos templos, para calcular los salarios de los obreros que generalmente eran realizados a partir del pago de pan y cerveza, como lo evidencian las tablillas y los papiros.

Los antiguos egipcios escribían sobre ladrillos, piedras, piezas de barro o papiros. La escritura *Jeroglífica* se hacía con tinta roja y negra, y aparecía en las tumbas, y piedras, mientras que otra escritura, la *Hierática* aparecía en los rollos de papiro.






Los egipcios tenían un sistema de numeración tanto *Jeroglífico* como *Hierático*. El sistema de numeración *Jeroglífico* se basaba en un sistema de base diez no posicional con un principio aditivo y tenía símbolos especiales para las potencias de 10 (ver Tabla 5). El sistema de numeración aditivo egipcio no posicional, consistía en que, para expresar cualquier número, cada símbolo numérico se repetía el número de veces que fuese necesario. Los símbolos se combinaban para formar números y su forma de escritura era de derecha a izquierda.






El sistema de numeración *Hierático* o sagrado era también un sistema de base diez, no posicional sino aditivo. A diferencia del sistema de numeración *Jeroglífico*, el principio de repetición se sustituye por la introducción de signos especiales que representan los números del 1 al 10, (ver Tabla 6).

**Tabla 5***Símbolos numéricos Jeroglíficos en potencia de 10*

<b>Símbolos numéricos Jeroglíficos que usaron los egipcios</b>	
<b>Representación base decimal</b>	<b>Símbolo Jeroglífico</b>
1	
10	
100	
1000	
10000	
100000	

*Nota.* Adaptado de Kline (1972, p. 37).**Tabla 6***Símbolos numéricos Hieráticos*

<b>Símbolos numérico Hieráticos</b>	
<b>Representación base decimal</b>	<b>Símbolo Hierático</b>
1	
2	
3	
4	
5	

6	
7	
8	
9	
10	

*Nota.* Adaptado de Kline (1972, p. 37).

Los rollos de papiro provenían de una planta acuática en Egipto, que crecía en la ribera del río Nilo. Esta planta se cortaba en tiras finas que se entrecruzaban formando un rollo, y después de un proceso de secado soportaba la escritura. Una de las desventajas que presentaba el rollo de papiro era que con el tiempo se deterioraba, ocasionando así la pérdida de información valiosa para la humanidad.

Los papiros tenían una función pedagógica, pues su contenido matemático estaba destinado a la formación de escribas. Estos registros escritos mostraban problemas asociados a los aspectos de la vida cotidiana del pueblo egipcio. Con el estudio de estos problemas de tipo descriptivo, el escriba estaba en la capacidad de obtener los conocimientos matemáticos para desempeñar su función en los asuntos del Estado.

Hoy destacamos dos papiros importantes: el papiro de Moscú y el de Rhind. El papiro de Moscú se encuentra en un museo de la ciudad de Moscú y data del año 1800 a. C. aproximadamente. Este papiro fue comprado en un mercado de Egipto en 1893. Sus dimensiones son de 0,33 m por 3,48m. El papiro de Moscú contiene 25 problemas relacionados con las actividades de la vida cotidiana.

El papiro de Rhind es llamado así gracias al egiptólogo escoses Henry Rhind quien lo compró en 1858, y actualmente se encuentra en el British Museum. Este papiro también es conocido como el papiro de Ahmes, ya que así se llamaba el escriba que lo escribió en el año 1650 a. C., sin embargo, según Ahmes, este papiro es una copia de un texto más antiguo que data de aproximadamente el año 2000 a 1800, a. C. Las dimensiones del papiro de Rhind son de 0,33m por

5,48 m, y contiene 85 problemas de la vida cotidiana, (algunos libros de historia mencionan 87 problemas), redactados en escritura hierática, según lo menciona Collette (1985).

En el papiro de Rhind encontramos problemas que contienen operaciones matemáticas como multiplicación de fracciones, repartos, sustracciones, progresiones aritméticas y geométricas, volúmenes, áreas, entre otros.

A continuación, presentamos la traducción del problema 79 propuesto en el papiro de Rhind.

*“[Hay] 7 casas; en cada una de ellas hay 7 gatos; cada gato mata 7 ratas; cada rata se habría comido 7 espigas de espelta; cada espiga de espelta produciría 7 hekat. ¿Cuál es el total de ellos?”* (Chance, 1979, citado en Swetz, 2013, La forma y presentación de los problemas, párr. 5)

La solución propuesta al problema 79 del papiro de Rhind la podemos ver en la Figura 10.

### Figura 10

*Traducción del problema 79 del papiro de Rhind*

<b>Problema 79</b>	
Suma la progresión geométrica de cinco términos, de los cuales el primer término es 7 y el multiplicador 7.	
La suma según la regla. Multiplicar 2801 por 7.	
1	2801
2	5602
3	11204
Total	19607
La suma por adición	
Casas	7
Gatos	49
Ratones	343
Espigas	2401
Hekat	16807
Total	19607

*Nota.* Tomado de Buffon, et al. (1927, p. 112)



En las anteriores traducciones podemos observar unos de los problemas descriptivos cotidianos de la sociedad egipcia, el cual tiene que ver con una progresión geométrica y uno de los primeros ejemplos de la matemática recreativa. La solución planteada a este problema consiste en multiplicar el número de casas por los 7 gatos y cada resultado es multiplicado 7 veces por los siguientes elementos.

A continuación, presentamos la traducción de un problema del cotidiano relacionado con la calidad de los productos propuesto en el papiro de Rhind y tomado de Swetz (2013). En el antiguo Egipto, la calidad de los productos fabricados con grano, como el pan y la cerveza, se medía en una unidad llamada *pesu*, cuyo valor se calculaba como sigue:  $Pesu = \text{cantidad de pan o cerveza} / \text{Ihekat}^3$  de grano.

“¿Cuánta cerveza se puede hacer con fuerza de 2 *pesu* a partir de 10 *hekat*<sup>3</sup> de grano?” (El antiguo Egipto, párr. 3)

En el papiro de Rhind, logramos identificar que muchos de los problemas que contiene estaban relacionados con el pan y la cerveza, debido a que el trabajo se pagaba con estos productos. A propósito de esto, Swetz (2013) menciona que las pirámides de Egipto fueron construidas por obreros especializados y que su trabajo era pagado con raciones de grano de cebada y trigo, pan y cerveza. Según este autor, las colecciones de los problemas en el papiro de Rhind así lo confirman. Resumiendo lo anterior, Kline nos menciona que:

Los egipcios utilizaron la matemática en la administración de los asuntos del Estado y de los templos, en el cálculo de los salarios pagados a los trabajadores, en el cálculo de volúmenes de graneros, y áreas de campos, en el cobro de impuestos estimados según el área de la tierra, en la conversión de un sistema de medidas a otro y en cálculo del número de ladrillos necesario para la construcción de edificios o rampas. Los papiros contienen también problemas relativos a la cantidad de grano necesario para producir cantidades dada de cerveza, o la cantidad de grano de una calidad necesario para obtener el mismo resultado que con grano de otra calidad. (1972, p.44)

Como producto de la necesidad de los egipcios para hallar la solución a los problemas del cotidiano, Kline (1972) afirma que “los antiguos egipcios desarrollaron sus propios sistemas de escritura, uno de ellos y el más antiguo, la escritura *Jeroglífica*, era de tipo pictórico, es decir, que cada símbolo era el dibujo de un objeto concreto” (p. 36). Otro tipo de escritura fue la escritura *Hierática*, un tipo de escritura en cursiva, más estilizada, usada por los escribas o copistas.

Los egipcios efectuaban la multiplicación por el método de duplicación, el cual consistía en ubicar dos columnas. En la columna izquierda se ubicaba el número 1, y en la columna derecha se ubicaba un factor. A continuación, se duplicaban los números y así se obtenía una nueva línea. Hay que aclarar que se duplicaban las líneas sin que el número de la columna derecha superara al otro factor de la multiplicación. Luego, se buscaban los números que sumados fueran igual al otro factor y se sumaban los productos parciales.

Veamos un ejemplo con la multiplicación de  $12 \times 12$  (ver Figura 11).

1. Ubicamos en la columna derecha el número 1 y a este se le hace corresponder el factor uno de los factores, el 12.
2. Ahora duplicamos cada número y formamos una nueva línea, o sea, duplicamos el 1 y el 12, esto es, 2 y 24 respectivamente.
3. Duplicamos nuevamente la anterior línea, esto es, 4 y 48.
4. Duplicamos nuevamente, la anterior línea, esto es, 8 y 96.
5. Ahora, no duplicamos más las líneas ya que si duplicamos el 8 claramente sería mayor que el otro factor que es 12,
6. Ahora, agrupamos dos números que sumados nos de igual al otro factor de la multiplicación, o sea 12. Como  $4 + 8$  es igual a 12, entonces sumamos los productos correspondientes a estos dos números, esto es,  $48 + 96$  igual a 144 y en efecto  $12 \times 12 = 144$ .

### Figura 11

*Método de multiplicación por duplicación*

1	12
2	24
*4	48
*8	96

4+8 =12, 4 por 12 igual a 48 y 8 por 12 igual a 96. Sumando los productos parciales, 48+96 se obtiene 144 que es igual a 12 por 12 igual 144

*Nota.* Elaboración propia.

El anterior método fue utilizado por los egipcios para realizar las multiplicaciones con números relativamente pequeños. Cuando se multiplicaban cantidades más grandes, se usaba similarmente el anterior método, pero en lugar de multiplicar por dos un factor, este se multiplicaba por diez, luego por 20 teniendo en cuenta que la suma de esta columna no superara al otro factor, luego se multiplicaba por 2. A continuación, mostramos el método por duplicación de las dos formas efectuando la multiplicación 33 por 47 (ver Figura 12).

**Figura 12**  
*Método por duplicación*

*1	47	o	*1	47
2	94		*10	470
4	188		*20	940
8	376		*2	94
16	752	Total	33	1551
*32	1504			
Total 33	1551			

*Nota.* Tomado de Robins & Shute (1987, Multiplication and división, párr.2).

Boyer (1986) menciona que el método de la multiplicación usado por los egipcios tenía la suma como operación fundamental. Las multiplicaciones y las divisiones de nuestra época se hacían por sucesivas duplicaciones. Es así como, según este autor, multiplicación viene de “múltiple”. A partir de este método, cuya base es la suma, podemos inferir que los egipcios se vieron en la necesidad de buscar nuevos métodos de cálculo que, aunque usaban como base la suma, les permitía multiplicar por cantidades mucho más grandes, como se pudo evidenciar en los ejemplos mostrados.

Hemos presentado en este apartado un recuento histórico acerca de los problemas descriptivos y los registros escritos en los cuales se encontraron los problemas cotidianos. Las tabillas y los papiros egipcios son instrumentos valiosos para la humanidad de donde se puede rescatar información sobre los conocimientos matemáticos de estas culturas. Es así como los problemas del cotidiano se constituyeron en huellas que permitieron realizar un rastreo de los acontecimientos, las prácticas sociales y las matemáticas que se utilizaron.

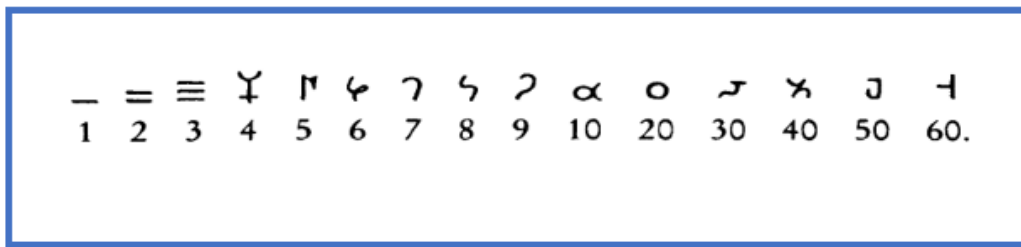
En este sentido, consideramos que tanto las actividades económicas como los problemas de la vida cotidiana se constituyen en condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación. La organización de las actividades económicas como lo son la producción y comercialización de comida, la construcción, el trabajo y el comercio, generaba cada vez más la necesidad de obtener conocimientos avanzados para efectuar los cálculos requeridos, convirtiendo los problemas de la vida cotidiana propuestos en los registros escritos, como tablillas y papiros, en acontecimientos que posibilitaron que los conocimientos matemáticos, fueran emergiendo a la luz las soluciones propuestas por los escribas.

Los problemas propuestos en las tablillas y los registros dejan ver que los escribas iban adquiriendo la habilidad para desarrollar los cálculos, pero, además, son el indicio claro de que fue a partir de estas actividades del común, que la matemática se fue desarrollando a la par que las sociedades iban creciendo.

#### **5.4 Las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal**

Indagamos también en la cultura india y la cultura árabe, ya que desde estas dos culturas proviene nuestro sistema de numeración decimal y la base de los algoritmos de cálculo que conocemos hoy en día.

Según Kline (1972), “Los sucesores de los griegos en la historia de la matemática fueron los hindúes de la india” (p. 248). Esta civilización india data como mínimo del año 2000 a. C. En el periodo comprendido entre el año 800 a. C. hasta el 200 d. C., los indios produjeron una matemática rudimentaria. A partir del siglo III a. C, aparecen los símbolos numéricos *Brahmi*. (Kline, 1972) (Ver Figura 13).

**Figura 13***Símbolos numéricos Brahmi*

*Nota.* Tomado de Kline (1972, p. 248)

Lo que llama la atención en esta numeración es que existe un símbolo diferente para cada número desde el 1 al 9 pero, no un símbolo para el cero y ningún tipo de notación posicional.

En el periodo comprendido entre los años 200 hasta el año 1200 d. C. se dio un avance en el desarrollo de la matemática por parte de la civilización india, ya que se adoptó la notación posicional base 10 y también el cero. En este sentido, se fue constituyendo el sistema de numeración base 10. Este sistema de numeración fue usado por los indios y también por los árabes. El sistema de numeración decimal es un sistema posicional, lo que quiere decir que según la posición que ocupe un símbolo o numeral, este tiene un valor diferente, permitiendo así escribir el mismo numeral varias veces sin que esto se preste para ambigüedades o malas interpretaciones; por ejemplo: “cuando escribimos el 222 usamos tres veces la misma cifra, pero cada una de ellas tiene un significado distinto; el primero de la derecha representa dos unidades, el segundo dos decenas y el tercero dos centenas” (Boyer, 1986, p. 50)

El método de multiplicación utilizado por los indios y luego por los árabes es un método gráfico. Los indios lo llamaban el método de *Gelosia*, multiplicación en celdillas o cuadrilátero utilizando pequeñas cubiertas de pintura blanca, o una tabla cubierta de arena o harina.

Para realizar la multiplicación por el método de *Gelosia* se deben considerar los siguientes pasos:

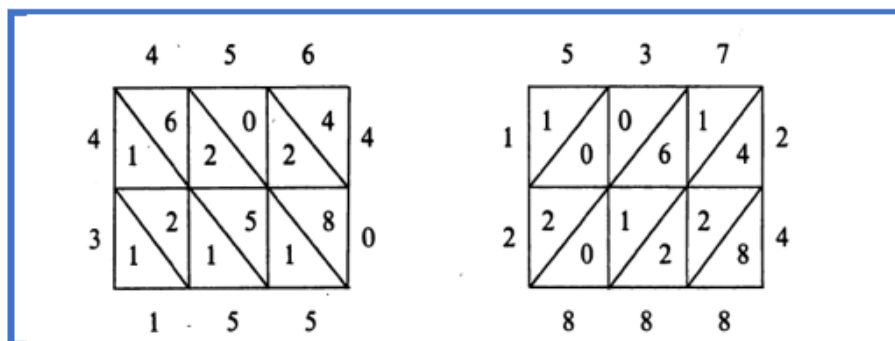
1. Hacer una cuadrícula con tantas filas como números tenga el primer factor y tantas columnas como números tenga el segundo factor
2. Se ubica el primer factor en la fila de abajo hacia arriba luego se ubica el segundo factor de en la columna de izquierda a derecha.
3. Se divide por la mitad cada cuadro generando una diagonal.

4. Luego se multiplica en cada cuadro, el valor de la fila por el valor de la columna teniendo en cuenta que las unidades se ubican en la parte superior derecha y las decenas en la parte inferior izquierda.
5. Después se suman las diagonales formadas iniciando en la esquina superior derecha, hacia la esquina inferior izquierda.
6. El producto de la multiplicación es el número que resulta de las sumas de estas diagonales, escrito de izquierda a derecha.

A continuación, presentamos de forma gráfica el método de multiplicación utilizado por los indios y luego por los árabes (ver Figura 14).

### Figura 14

#### *Método de multiplicación Gelosia*



*Nota.* Tomado de Boyer (1986, p. 281)

En la anterior figura se puede observar la multiplicación de los números 34 por 456, cuyo producto es 15504 y el número 537 por 24 cuyo producto es 12888; distribuido de manera diferente respecto al otro ejercicio en la cuadrícula pero que, en esencia, era el mismo procedimiento. Este procedimiento demuestra que el método de multiplicación se podía llevar a cabo de diferente manera, sin que se afectara el resultado.

Los árabes, por su parte, eran un pueblo nómada que ocupaba la región de Arabia, y fueron incitados a la unidad por el profeta Mahoma; sus conquistas iban desde España hasta el norte de África y sur de Italia. Luego de sus conquistas, los árabes se interesaron por las artes y las ciencias. Los árabes, cuando aún eran una civilización nómada tenían palabras para designar los números, pero no tenían símbolos para representarlos, así que tomaron, adoptaron y mejoraron los símbolos de numeración indios y su idea de notación posicional.

Según Collette (1985), “fue el astrónomo persa Al-Kowarizmi<sup>28</sup> quien presentó de manera formal las reglas de cálculo numérico basados en los algoritmos indios, además de exponer detalladamente el sistema de numeración utilizado por los indios”. (p. 196). Se puede evidenciar que la matemática árabe se basó en los avances presentados por los indios y los griegos, y que gracias a los árabes es que más adelante los europeos adoptaron parte de los procedimientos aritméticos debido a los intercambios comerciales y culturales entre las dos partes.

Según Boyer (1986), la aritmética de Al-kowarizmi era la traducción árabe de los textos de Brahmagupta<sup>29</sup>, quien dio una exposición completa del sistema de numeración indio. Al llegar las traducciones latinas de los textos árabes a Europa, se le atribuyó a Al-kowarizmi la paternidad de la numeración utilizada, esto debido a la falta de información respecto a este tema.

De acuerdo con los planteamientos de Boyer (1986) podemos mencionar que:

El sistema de numeración que hace uso de los numerales indios vino a ser denominado sin más como “algorismo” o “algoritmo” palabra derivada del nombre Al-kowarizmi y que actualmente significa, de una manera mucho más general, cualquier procedimiento operativo para resolver un problema arbitrario. (p. 296)

Autores como Aleksandrov(1973), Boyer (1986) y Collette (1985) hacen mención a que fueron los árabes los encargados de llevar el sistema de numeración y las reglas formales del cálculo indio a Europa. En este sentido, Aleksandrov (1973) afirma que, “nuestros actuales símbolos “arábigos”, y en general nuestro método de formar los números, fueron traídos de la India a Europa por los árabes en el siglo X y se arraigaron firmemente en el transcurso de pocos siglos” (p. 29).

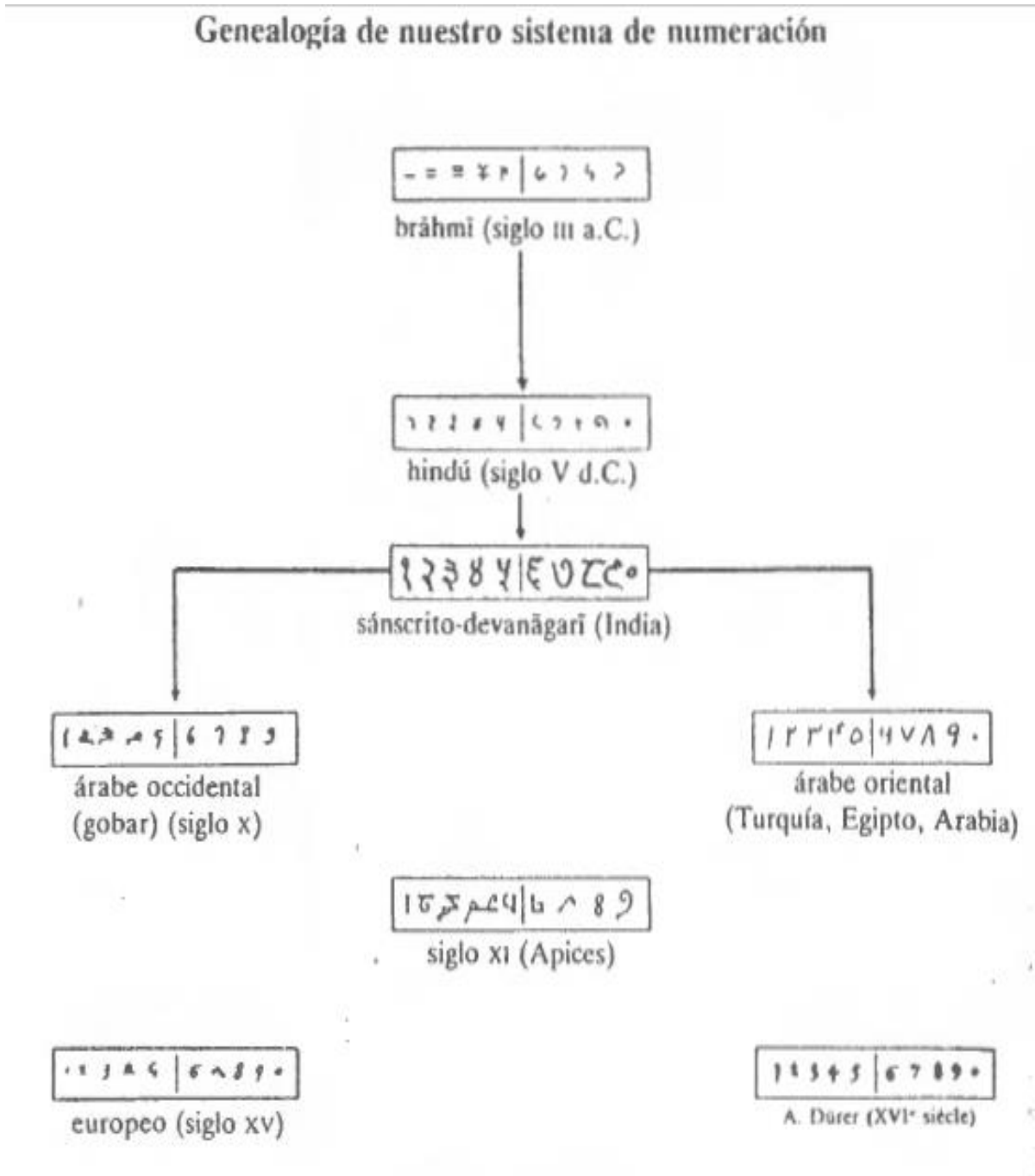
A continuación, presentamos el árbol genealógico de nuestro sistema de numeración, (ver Figura 15), el cual presenta los cambios a través de su origen en la cultura india, arábiga y europea.

---

<sup>28</sup> Abu Abdallah Muhammad Ibn Musa Al-Jwarismi: nació en 780 en Persia y murió en 850 en Bagdad. Fue matemático, astrónomo, y geógrafo. Es considerado como uno de los más grandes matemáticos de la historia. Fue responsable de introducir los número arábigos, basados en el sistema de numeración indu-árabe desarrollado en las matemáticas indias. Presentó la primera solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas. Trabajó en el campo de la trigonometría produciendo tablas de seno y coseno. El término Algoritmo se deriva de la técnica de realizar aritmética con la numeración indo-arábica desarrollada por Al- Jwarismi.

<sup>29</sup> Fue matemático y astrónomo indio. Nació en 598 en Ujjain y murió en el año 760, Es reconocido por su obra Brahmasphutasiddhanta donde expuso el concepto de cero y números negativos. Además, es conocido por la fórmula que lleva su nombre que servía para calcular ternas pitagóricas y por la teoría de ecuaciones indeterminadas.

**Figura 15**  
Genealogía de nuestro sistema de numeración



Nota. Tomado de Collette (1985, p. 186)

El sistema de numeración decimal y los métodos de multiplicar usados por los indios y luego por los árabes posibilitaban realizar operaciones aritméticas sin tanta dificultad y, por tanto,



realizar cálculos con números muy grandes. Lo anterior facilitó que tanto el sistema de numeración como las reglas formales del cálculo de la multiplicación se arraigara firmemente en el transcurso de pocos siglos en Europa. A respecto de lo anterior, Aleksandrov (1973) menciona que el método de escritura es sencillo y facilita los cálculos matemáticos.

Una de las razones por la cual el sistema de numeración decimal posicional y las reglas formales del cálculo se hayan arraigados en Europa, hasta nuestros días, es que, antes de su arribo a Europa, el sistema de numeración que utilizaban los europeos era el sistema de numeración romano, lo cual implicaba que, tanto la escritura como los cálculos aritméticos fueran una tarea laboriosa. Por ejemplo, el número 378 en el sistema de numeración romana se escribe CCCLXXVIII, luego, multiplicar este número por otra cantidad, se volvía un procedimiento engorroso.

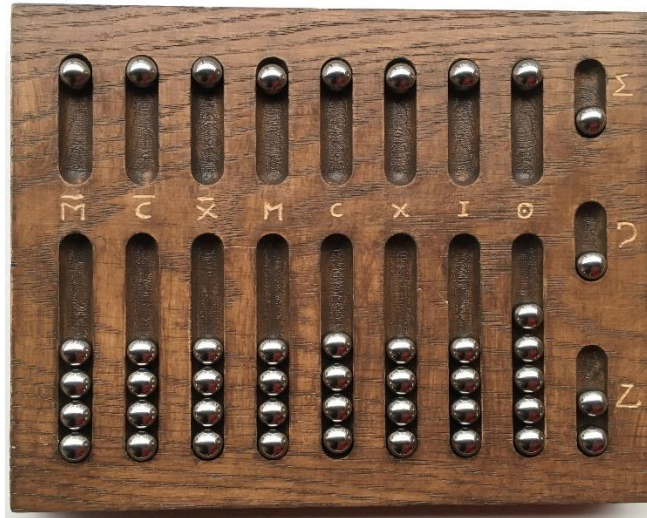
A propósito de los procedimientos y de los instrumentos de cálculos aritméticos utilizados en Europa, ellos se realizaban en el llamado ábaco romano. Resumiendo a Grimaldi<sup>30</sup> (2010), el ábaco romano estaba formado por ranuras con cuentas de piedra o de metal que se iban moviendo para realizar los cálculos (ver Figura 16).

Según Grimaldi (2010), a diferencia de los europeos, los árabes realizaban los cálculos inicialmente sobre una tabla, con fichas enumeradas del 1 al 9, que tomaban diferentes posiciones según el número que querían formar; aún no usaban el cero, en cambio ubicaban una ficha en blanco o dejaban un espacio. Con el tiempo, estas tablas o tableros fueron reemplazadas por tablas de arena donde se podía escribir y borrar los números dando así paso a los algoritmos escritos. Según la autora, el origen de estas prácticas podría explicar la verticalidad de nuestros algoritmos y los modismos de “llevar 1” que indica pasar una ficha a una columna de orden superior.

---

<sup>30</sup> Verónica Grimaldi: (Argentina) Profesora en física y matemática, egresada de la Universidad Nacional de la Plata, especialista en Educación en Ciencias Exactas y Naturales con Orientación en Matemáticas, de la misma universidad. Actualmente se desempeña como formadora de maestros y forma parte de un equipo de Investigación en Educación Matemática.

**Figura 16**  
*Ábaco romano*



*Nota.* Fuente <https://www.calculatinginstruments.com/1-%C3%A1bacos-de-bolas/>

Cabe mencionar que la llegada de los árabes a Europa mediterránea, llevando consigo el sistema de numeración y los métodos de cálculo, en un primer momento, no fue bien recibida. A propósito de esto, Grimaldi (2010) menciona que:

El ingreso de métodos para realizar cuentas utilizando nuevas graffías fue resistida durante mucho tiempo. Esta resistencia se debió a múltiples factores, algunos relativos al poder que significa la manipulación de un conocimiento vinculado al dinero y la economía, pero también a cuestiones religiosas, ya que las nuevas cifras provenían de una cultura considerada infiel por el cristianismo. (Formas de calcular, párr. 3)

Como dijimos anteriormente, los europeos utilizaban el sistema de numeración romano y su instrumento para realizar los cálculos era el ábacó romano. Con la llegada de los árabes a partir de las rutas de comercio que se abrían entre estas dos culturas, los europeos se vieron en la necesidad de operar con números más grandes para realizar los cálculos del pago de las mercancías, el manejo de inventarios, entre otras actividades relacionadas con el comercio; el ábacó romano como instrumento para realizar los cálculos se quedaba limitado, por tanto, esto propició que se fuera adaptando poco a poco al sistema de numeración indo-arábigo. En concordancia con lo anterior, Grimaldi (2010) afirma que:

Las necesidades de los comerciantes fueron la piedra angular para el gran cambio de un sistema de numeración a otro: los viajes de negocios exigían estandarizar las cantidades con

las que se trabajaba, y los modos de medir y de calcular debieron evolucionar de forma tal que distintos pueblos pudieran compartir un mismo lenguaje. (Formas de calcular, párr. 4)

Una de las dificultades para la adaptación del sistema de numeración decimal en Europa era que las grafías no estaban estandarizadas, la forma de los símbolos numéricos sufría variaciones de un copista a otro, esto según la región de dónde proviniera. Esta problemática vino a ser solucionada con la invención de la imprenta en el año 1440, ya que se pudieron estandarizar las cantidades, las unidades de medición y, así, los pueblos empezaron a compartir un mismo lenguaje.

Para hablar de la consolidación del algoritmo de la multiplicación de números naturales en el sistema decimal, nos remitimos a la obra de Luca Pacioli<sup>31</sup>, escrita en 1494 en la ciudad de Venecia, (ver Figura 17). Su obra titulada “Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità” es una de las obras más notables de la época.

**Figura 17**

*Portada del libro de Luca Pacioli*



*Nota.* Tomado de <https://bit.ly/3HCW3eM>

<sup>31</sup> Fray Luca Bartolomeo de Pacioli: (Italiano) Matemático, fraile franciscano, contador, economista, y profesor. Precursor del cálculo de probabilidades y reconocido históricamente por haber formalizado y establecido el sistema de partida doble que es la base de la contabilidad moderna. Falleció en 1517.



parciales para agrupar cada parte. Veamos el ejemplo propuesto en la Tabla 7, la multiplicación es  $4685 \times 13$ , en este caso tenemos que uno de los factores es un número “pequeño”, en este método se propone multiplicar el factor “pequeño” por cada uno de los numerales del primer factor, el producto parcial se descompone en las unidades del sistema y se ubica el numeral correspondiente al número por el que multiplicó. En este caso la multiplicación  $5 \times 13$  es igual a 65, descomponiendo este número en las unidades del sistema corresponde a 5 unidades más 60 unidades o 6 decenas, entonces ubicamos las 5 y pasamos a sumar las 6 decenas al siguiente producto parcial.

**Tabla 7**

*Método de multiplicación por Colonna o Tavoletta*

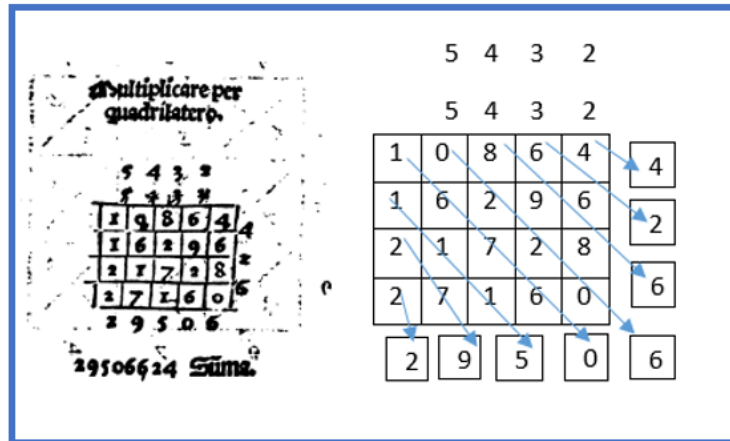
$\begin{array}{r} 4685 \\ \underline{13} \\ 5 \end{array}$	$13 \cdot 5 = 65 = 60 + 5$
$\begin{array}{r} 4685 \\ \underline{13} \\ 05 \end{array}$	$\begin{aligned} 13 \cdot 80 &= 1040 \\ 1040 + 60 &= 1100 + 00 \end{aligned}$
$\begin{array}{r} 4685 \\ \underline{13} \\ 905 \end{array}$	$\begin{aligned} 13 \cdot 600 &= 7800 \\ 7800 + 1100 &= 8000 + 900 \end{aligned}$
$\begin{array}{r} 4685 \\ \underline{13} \\ 60905 \end{array}$	$\begin{aligned} 13 \cdot 4000 &= 52000 \\ 52000 + 8000 &= 60000 \end{aligned}$

*Nota.* Tomado de Grimaldi (2010, La aritmética del renacimiento, párr. 4)

El tercer método es la multiplicación por *Cuadrilátero*. Este método de multiplicación es un poco similar al algoritmo que utilizamos actualmente, la diferencia radica en que se escriben los productos parciales sin hacer el desplazamiento hacia la izquierda, de este modo, la suma se realiza en diagonal, siendo la primera cifra del producto, la correspondiente a la celda superior derecha (ver Figura 19). Lo interesante de este método es que al sumar las diagonales como se evidencia en la figura 19, los numerales corresponden a la suma en las unidades del sistema, o sea las unidades, las decenas, las centenas, etc., de los productos parciales, teniendo en cuenta el desplazamiento hacia la izquierda que se hace cada vez que se multiplica por un numeral de orden mayor.

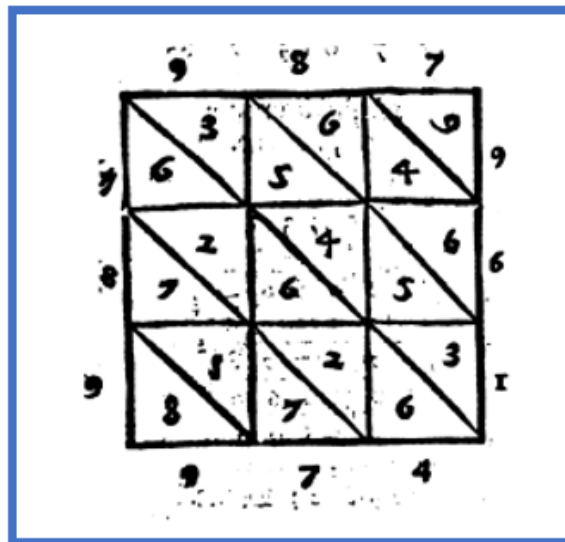
**Figura 19**

*Método de multiplicación por Cuadrilátero 5432 x 5432*



Nota. Adaptado de Pacioli (1494, p. 69)

El cuarto método es la multiplicación por *Gelosía* o *Graticola*. Este método de multiplicación ya lo habíamos explicado anteriormente, pues fue el método que utilizaban los indios. Pacioli retoma esta forma de realizar la multiplicación y lo expone en su obra, allí propone la multiplicación 987 por 987 igual a 974169 (ver Figura 20). Al igual que el anterior método, los numerales se suman en diagonal, ya que estos números corresponden a las unidades del sistema como si se estuviera multiplicando con el método o al algoritmo actual.

**Figura 20***Método de multiplicación por Gelosía o Graticola 987 x 987**Nota.* Tomado de Pacioli (1494, p. 70)

El quinto método es la multiplicación por *Repiego*. Según Grimaldi (2010), el procedimiento de este método consiste en descomponer alguno de los factores en productos de factores de una sola cifra para luego aplicar lo que hoy llamamos la propiedad asociativa de la multiplicación (ver Figura 21).

**Figura 21***Método de multiplicación por Repiego*

$$\begin{aligned}
 29 \times 24 &= 29 \times (4 \times 6) = \\
 &= (29 \times 4) \times 6 = 116 \times 6 = 696 \\
 \\ 
 29 \times 24 &= 29 \times (6 \times 4) = \\
 &= (29 \times 6) \times 4 = 174 \times 4 = 696
 \end{aligned}$$

*Nota.* Tomado de Grimaldi (2010, La aritmética del renacimiento, párr. 9)

El sexto método es la multiplicación por *Scapezzo*. Este método de multiplicar que propone Pacioli se apoya en lo que hoy llamamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a

la suma. En su obra, Pacioli describe este método sin hacer la representación gráfica según lo afirma Grimaldi (2010). (Ver Figura 22).

### Figura 22

*Método de multiplicación por Scapezzo*

$$\begin{aligned}
 42 \times 24 &= 42 \times (4 + 6 + 5 + 9) = \\
 &= 168 + 252 + 210 + 378 = 1008 \\
 \\ 
 10 \times 12 &= (3 + 2 + 5) \times (3 + 4 + 5) = \\
 &= (3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5) + (2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5) + (5 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 5) = \\
 &= 36 + 24 + 60 = 120
 \end{aligned}$$

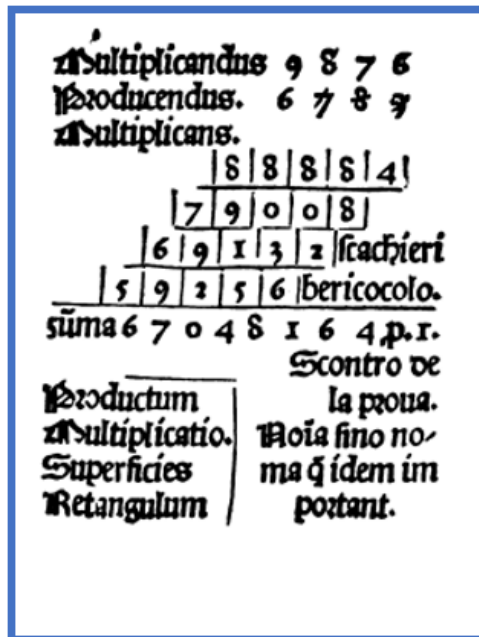
*Nota.* Tomado de Grimaldi (2010, La aritmética del renacimiento, párr. 10)

Pacioli, en su obra, presentó varios métodos para realizar la multiplicación, como los que mostramos anteriormente. A continuación, presentamos otros dos métodos que nos llamaron la atención en esta investigación, ya que dieron aportes para la consolidación del algoritmo de la multiplicación de números naturales en el sistema de numeración decimal.

Uno de esos métodos de multiplicación fue el método nombrado *Scachieri* o *Bericuocolo* (ver Figura 23). Este método muestra el algoritmo actual convencional que se ha enseñado tradicionalmente. Según Grimaldi, este método de multiplicar “se basa en la descomposición aditiva del segundo factor y la resolución de productos parciales que se escribe en distintas filas corriendo un lugar hacia la izquierda cada vez el resultado” (2010, La aritmética del renacimiento, párr. 3).

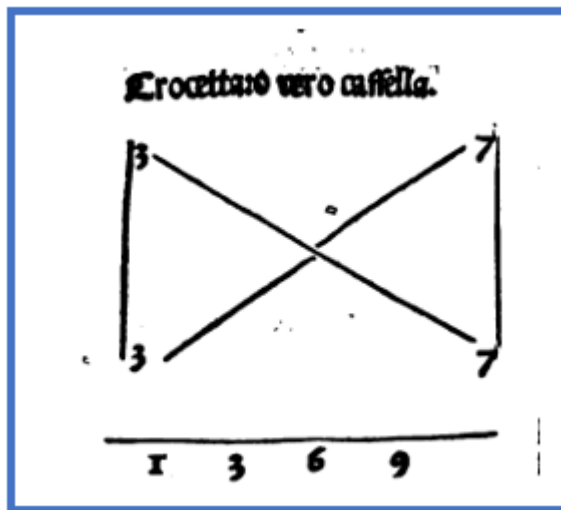
En su obra, Pacioli hizo una descripción detallada del paso a paso del cómo se realiza la multiplicación por este método. Primero indica que se debe multiplicar las unidades del segundo factor por cada uno de los numerales del primer factor, o sea, en el ejemplo propuesto  $9876 \times 6789$  esto es  $9876 \times 9$ . Cada vez que se va a multiplicar por el siguiente numeral del segundo factor, el resultado se desplaza un lugar hacia la izquierda debido a que el sistema decimal es un sistema posicional. Y finalmente se suman los productos parciales.



**Figura 23***Método de multiplicación Scachieri o por Bericocolo*

*Nota.* Tomado de Pacioli (1494, p. 65)

Otro de los métodos propuestos en la obra de Pacioli es el método por *Crocetta* o *Casella*. Este método propone la multiplicación de  $37 \times 37$  por el método de la cruz (ver Figura 24). Según Grimaldi (2010), algunas fuentes consideran que este método dio lugar a la utilización del símbolo “X” para simbolizar la multiplicación.

**Figura 24***Método de multiplicación por Crocetta o Casella*

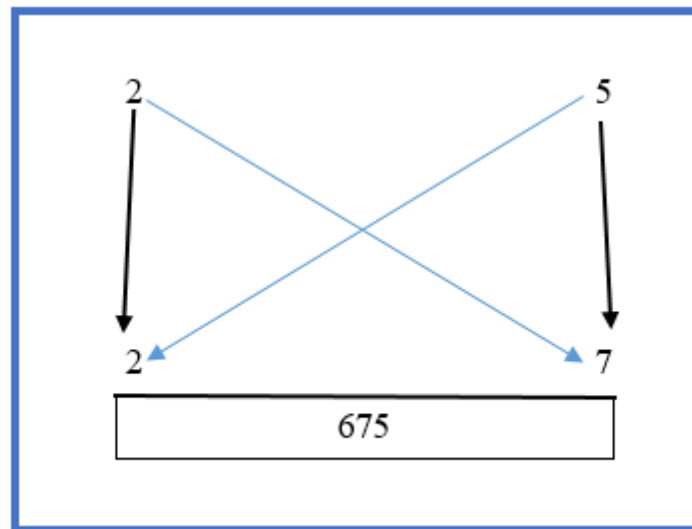
*Nota.* Tomado de Pacioli (1494, p. 68)

A continuación, presentamos la traducción del latín del texto original según Grimaldi (2010).

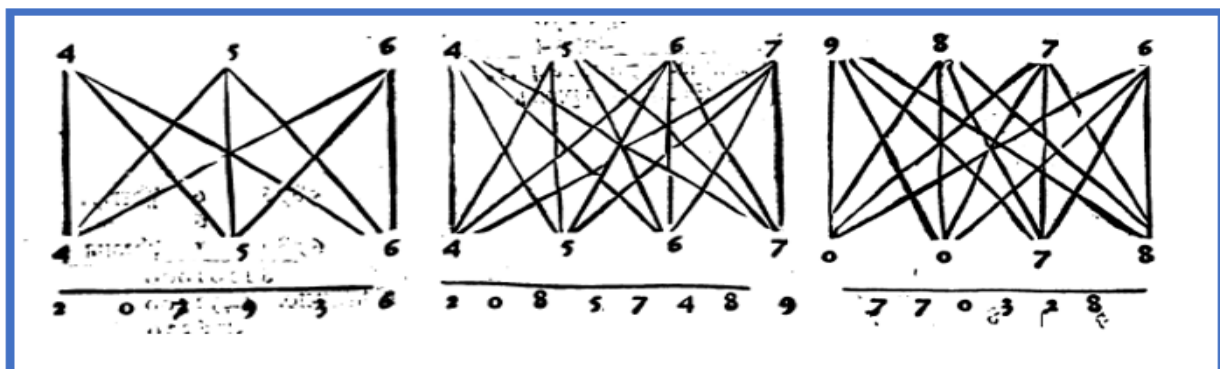
Primero asienta uno debajo del otro como se ve y empieza por la primera figura diciendo 7 por 7 hacen 49. Pon el 9 debajo de la raya y toma 4 para las decenas. Después, haz la cruz y di una vez 3 por 7, hacen 21. Después, otra vez 3 por 7, hacen 21. Suma estos dos productos, o sea 21 y 21, hacen 42 y 4 que tenías en la memoria hacen 46. Escribe el 6 y guarda 4. Después multiplica las últimas figuras, o sea 3 por 3, hacen 9, y 4 que guardabas hacen 13. Escribe el 13 al lado del 6 y el 9 que habías puesto antes y resultará 1369. (La aritmética del renacimiento, párr. 7)

Ahora veamos un ejemplo para verificar la eficacia de este método de multiplicar. Realicemos la multiplicación 25 por 27.

Decimos que  $5 \times 7 = 35$ . Ubicamos el 5 en las unidades y tenemos presente que llevamos 3 decenas. Luego realizamos la cruz y decimos,  $2 \times 7 = 14$  y  $5 \times 2 = 10$ , ahora sumamos los productos, esto es  $14 + 10 = 24$ , luego sumamos al 24 las 3 decenas, esto es 27; ubicamos el 7 en las decenas y llevamos el 2 para sumarlo a las centenas. Finalmente decimos,  $2 \times 2 = 4$  y  $4 + 2 = 6$ , y ubicamos el 6 en las centenas. Así obtenemos que  $25 \times 27 = 675$  (ver Figura 25)

**Figura 25***Método de multiplicación por Crocetta**Nota.* Elaboración propia.

Como podemos observar, haciendo uso de este método, se puede realizar correctamente una multiplicación. Cabe aclarar que, para realizar multiplicaciones con factores de más de dos cifras, el procedimiento es un tanto confuso. Pacioli en su obra hace la representación gráfica con multiplicaciones con factores de tres y cuatro cifras o multiplicaciones con factores de 4 cifras por factores de dos cifras; para esto, se completaban con ceros a la izquierda a los factores para igualar la misma cantidad de numerales (ver Figura 26).

**Figura 26***Método de multiplicar por Crocetta con factores de más de dos cifras**Nota.* Tomado de Pacioli (1494, p. 68)

A partir del anterior relato, consideramos que las rutas comerciales de los árabes se constituyen en una condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales, ya que es dado a este intercambio comercial y cultural que los europeos ven la posibilidad de adoptar un sistema de numeración más sencillo y práctico, que les facilitara los cálculos. Es gracias a ese intercambio entre las dos culturas que hoy hacemos uso del sistema de numeración decimal y los algoritmos para realizar la multiplicación.

Por otra parte, rescatamos que la invención de la imprenta jugó un papel importante para terminar de consolidar el sistema de numeración decimal en los europeos, ya que la estandarización de los símbolos numéricos generó confianza entre las personas que comercializaban sus productos y se genera así un crecimiento en las economías. También con la invención de la imprenta, se posibilitó la creación y difusión de obras como la de Luca Pacioli que, sin duda alguna, fue una de las obras de mayor relevancia para la época porque ayudó a difundir los métodos o algoritmos de multiplicar. De estos métodos, se fueron adoptando poco a poco los más prácticos o sencillos como el método de *Scachieri* o *Bericuocolo*.

## 6. A modo de cierre

Al inicio de este trabajo de investigación propusimos la siguiente pregunta: ¿Qué condiciones de posibilidad contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales? Para dar respuesta a esta pregunta planteada, realizamos un diseño metodológico a partir del paradigma cualitativo, con un enfoque hermenéutico interpretativo, además, utilizamos el método historiográfico complementado con el análisis de contenido, para darle sentido a la historia que íbamos indagando a través de la lectura de los documentos que constituyeron nuestro archivo.

El método historiográfico elegido para la elaboración de este trabajo nos exigió la construcción de un archivo. Nuestro archivo se constituyó por cinco fuentes primarias y cinco fuentes secundarias. Los documentos que conformaron el archivo son libros, capítulos de libros, y artículos de investigación. En estos documentos pudimos rastrear los enunciados que se constituyeron en datos que nos hablaban de las condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales.

A partir del análisis de los datos, identificamos tres condiciones de posibilidad que consideramos dan respuesta de manera parcial a la pregunta que hemos planteado al inicio de este trabajo. Dichas condiciones de posibilidad fueron identificadas a partir de las lecturas críticas de los libros de historia y artículos relacionados en el archivo. Las tres categorías donde presentamos las condiciones de posibilidad identificadas fueron: “La cultura mesopotámica y la necesidad de manejar cantidades cada vez más grandes”, “La economía y su relación con los problemas del cotidiano: un análisis desde los de los textos cuneiformes y del papiro de Rhind” y “Las rutas comerciales de oriente y la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal”.

A partir de los elementos tomados del método historiográfico, pudimos indagar en la historia sobre la multiplicación y dirigirnos a las primeras civilizaciones como la mesopotámica y la egipcia. En este rastreo pudimos identificar sus sistemas de numeración y la forma en la que realizaban las operaciones aritméticas, haciendo énfasis en la multiplicación de números naturales. Luego nos adelantamos en la historia y nos ubicamos en la cultura india y árabe, donde pudimos identificar una condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales en nuestro sistema decimal.

Como resultado del análisis que realizamos, en la primera categoría planteamos, a modo de hallazgo, que una de las condiciones de posibilidad para la emergencia de la multiplicación de números naturales fue *la necesidad de operar con números cada vez más grandes*.

Con el establecimiento de los primeros asentamientos humanos surgieron las actividades agrícolas y los intercambios de productos entre los pueblos cercanos, generando así la actividad comercial. A medida que fueron creciendo los pueblos, se fueron generando mayores intercambios comerciales para lo cual, se requería realizar cálculos con cantidades numéricas cada vez más grandes.

Los asuntos administrativos y contables del Estado eran otras de las actividades en las primeras civilizaciones. Estas actividades fueron en aumento a medida que los pueblos iban creciendo, por tanto, el hombre se vio en la necesidad de realizar operaciones con números cada vez más grandes, situación que posibilitó la emergencia de los primeros métodos usados para multiplicar, como la construcción de tablas de multiplicar construidas con adiciones sucesivas por los mesopotámicos, y el método de multiplicar por duplicación en la cultura egipcia.

En la segunda categoría identificamos otra condición de posibilidad que ayudó a dar respuesta a la pregunta formulada inicialmente, y es que, con la invención de la escritura, se pudo analizar en los primeros registros, ya sea en las tablillas de arcilla o en los papiros egipcios, la matemática en estas primeras civilizaciones.

*La economía y los problemas del cotidiano* se constituyeron en otra condición de posibilidad para la emergencia de la multiplicación; por ejemplo la organización de las actividades económicas como la producción de alimentos (la siembra, cosecha, distribución, almacenamiento), la construcción y su relación con las medidas de área y volumen, el trabajo y lo relacionado con el pago de salarios, la recolección de impuestos, el comercio y su relación con el cambio de moneda, pérdidas, ganancias e intereses.

Todas estas actividades requirieron de conocimientos matemáticos para su manejo; por esta razón, estas actividades económicas generaron la necesidad de buscar nuevos métodos para efectuar los cálculos matemáticos necesarios.

De igual forma, los problemas del cotidiano contribuyeron a la emergencia de la multiplicación de números naturales. Como lo mostramos, en los primeros registros hallados en las tablillas de arcilla y en los papiros en Egipto hay problemas descriptivos. Estos problemas son

enunciados que narran o describen situaciones del cotidiano, mostrando la necesidad del ser humano de buscar alternativas para darle solución.

Por último, en la tercera categoría identificamos como condición de posibilidad *las rutas comerciales de oriente para la consolidación de la multiplicación en el sistema decimal*. Esta tercera condición de posibilidad nos muestra que los intercambios comerciales y culturales entre los árabes y los europeos facilitaron que el sistema de numeración decimal, y los métodos de cálculo llegaran a Europa. Aunque en principio hubo resistencia a estos métodos de conteo y de operatividad, poco a poco estos métodos fueron acogidos por su facilidad en su escritura y en el uso de los algoritmos, lo cual les facilitó a los europeos realizar cálculos con cantidades más grandes.

También rescatamos que la obra de Luca Pacioli se constituyó en una herramienta que posibilitó el estudio y la expansión de los métodos para realizar multiplicaciones, ya que recopila y expone métodos utilizados para realizar los cálculos en las actividades comerciales y así facilitar la contabilidad de las actividades económicas. Es a partir del uso de estos métodos de multiplicar que se fue constituyendo el algoritmo más práctico y sencillo y que hasta el día de hoy es el que usamos en nuestro contexto, el método de *Scachieri* o *Bericuocolo*.

Sin duda, la aparición de la imprenta posibilitó la recopilación y divulgación de los métodos de multiplicación utilizados en las actividades comerciales como los expuestos por Luca Pacioli.

Finalmente, concluimos que las relaciones comerciales jugaron un papel importante en la consolidación de la multiplicación de números naturales; relaciones que fueron transversales a las condiciones de posibilidad identificadas en este estudio historiográfico. Estas relaciones fueron creando la necesidad en los seres humanos de operar con cantidades numéricas cada vez más grandes, e ir optimizando métodos o algoritmos para ello.

Este trabajo de investigación nos aporta aprendizajes tanto desde lo metodológico como desde lo conceptual e histórico, lo que nos posibilita pensar en futuras prácticas mostrando la matemática como producto de la actividad humana.

A partir del trabajo desarrollado nos parece importante fortalecer en la formación de maestros el acercamiento a los conceptos matemáticos desde la parte histórica epistemológica, para que haya una conexión entre el origen del concepto y la aplicación de éste en contextos cotidianos.

Una de las limitaciones en el desarrollo de este trabajo investigativo fue que la Práctica Pedagógica estuvo atravesada por la eventualidad de la pandemia a causa de virus Covid-19. Ello

nos deja como aprendizaje que a pesar de las adversidades somos personas capaces de afrontar diversas situaciones familiares, académicas y personales. Estas situaciones nos sirvieron para reinventarnos e ir aprendiendo sobre la marcha acerca de nuestra profesión como maestros, también para valorar los espacios y ambientes que se genera con la presencialidad física.



## 7. Referencias

- Aleksandrov, A. (1973). Visión general de la matemática. En A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros (Eds). *La matemática. Su contenido, métodos y significado*. (pp. 17-89). Alianza universidad.
- Antigos instrumentos de cálculo. (s.f.). *Ábacos de bolas*. <https://www.calculatinginstruments.com/1-%C3%A1bacos-de-bolas/>
- Barbosa, L. y Silva, M. (2014). A participação da história no ensino de matemática: pontos de vista historiográfico e pedagógico. *Zetetike*, 21 (1), 103–120. <https://doi.org/10.20396/zet.v21i39.8646600>
- Bardín, L. (1986). *El Análisis de Contenido*. Ediciones Akal. <https://bit.ly/3COjjni>
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (1a ed.) Madrid, España: Alianza universidad textos. <http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf>
- Buffon, A., Clare, R. & Parker, H. (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus. British Museum 10057 and 10058*. The mathematical Association of America. <https://bit.ly/3EOaTg5>
- Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas I*. (1a ed.) Bogotá, Colombia: siglo veintiuno editores. <https://bit.ly/3qakkCH>
- Denzin, N. y Lincoln, Y. S. (2012). *Manual de Investigación Cualitativa*. Gedisa, S. A. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=490631>
- Díaz, E. (1995). *La Filosofía de Michel Foucault*. (1a. ed.) Buenos Aires: Biblos. <https://bit.ly/304kOzx>
- Doc player. (s.f.). *Adaptación curricular*. <https://docplayer.es/docs-images/78/77275838/images/8-0.jpg>
- Freire, P. (2004) *Pedagogía de la autonomía*. Paz e terra SA. <https://redclade.org/wp-content/uploads/Pedagog%C3%ADa-de-la-Autonom%C3%ADa.pdf>
- Garnica, V. 2018. Para una concepción de História e Historiografia. <https://bit.ly/3o0Aadcb>
- Grimaldi, V. (2010). *Los algoritmos de cálculo en la historia de la matemática y en la escuela*. <https://bit.ly/3GSEB5u>
- Hernández, R., Fernández-Collado, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4ta ed.). Interamericana editores, S.A. de C.V. <https://bit.ly/3wrhI4j>
- Jaramillo, D. (2008). *La reflexión y la investigación en la formación del maestro que enseña matemáticas: un camino*. [Conferencia]. Tercer Encuentro de Programas de Formación Inicial en Matemáticas. Bogotá Colombia.
- Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I*. (1a ed.) Alianza editorial. <https://b-ok.lat/book/8017212/d9be66>

- López, F. (2002). El Análisis de Contenido como Método de Investigación. *XXI Revista de Educación*, 11 (4), 167-179. <https://bit.ly/3068VZL>
- Martínez, A. (1993). *Teoría pedagógica. Una mirada arqueológica a la pedagogía*. <https://bit.ly/3nUuyUI>
- Martínez, A (2013). Lecturas y usos de Foucault. <https://bit.ly/3bKfR0V>
- Mayer, B. (2009). El origen de la historiografía: historicidad, escritura y plus-de-goce. *Psicología y Sociedad*. (21), 43-50. <http://www.scielo.br/pdf/psoc/v21nspe/v21nspea08.pdf>
- Moura, M. (2011) “Educar con las matemáticas: saber específico y saber pedagógico”. *Revista Educación y Pedagogía*. 23, (59), 47-57. <https://bit.ly/3GSStN6>
- Noticias de Prehistoria. Prehistoria al día. (2014). *Las matemáticas en la prehistoria 5 parte: Los huesos de Lebombo y de Ishango*. <https://bit.ly/3kbTB4F>
- Pacioli, L. (1494). *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*. <https://bit.ly/3HCW3eM>
- Pappe, S. (2001). *Historiografía crítica. Una reflexión teórica*. Azcapotzalco, México: Sans Serif Editores. <http://zaloamati.azc.uam.mx/handle/11191/1763>
- Pérez, D. (2020). *Organización de la enseñanza del profesor que enseña matemáticas en programas de administración: una posibilidad a partir del estudio de caso*. [Tesis de doctorado, Universidad de Antioquia] <https://bit.ly/3q8fMwz>
- Quiroz, L. (2018). *Números enteros negativos: condiciones de posibilidad que permitieron su inclusión en el currículo escolar colombiano*. [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia]. <https://bit.ly/3nY4N6d>
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir Moscú. <https://es.scribd.com/doc/181450824/K-Ribnikov-Historia-de-las-Matematicas>
- Robins, G. & Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Britihs Museum Publications Ltd. <https://es.b-ok.lat/book/3558051/9f7c0e>
- Rodríguez, L. (2011). *Las matemáticas en la escuela primaria colombiana: Contribuciones a una historia sobre su enseñanza*. [Tesis maestría, Universidad de Antioquia]. <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1384/1/JC0699.pdf>
- Swetz, F. (2013). *Expediciones matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia*. La esfera de los libros. <https://bit.ly/3CQLrGm>
- Vanegas, B. (2010). La Investigación Cualitativa: Un Importante Abordaje del Conocimiento para Enfermería. *Revista Colombiana de Enfermería*. 6 (6), 128-142. <https://revistas.unbosque.edu.co/index.php/RCE/article/view/1441/1047>
- Vásquez, L, y Monroy, M. (2013). Condiciones de posibilidad para una mirada a la subjetividad del maestro en Colombia. *Panorama*, 5(9). <https://doi.org/10.15765/pnrm.v5i9.38>