

**LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA COMPRENSIÓN DE LAS
RELACIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD**

LEIDY YADIRA MONSALVE ORREGO

Trabajo de grado para optar el título de **Licenciada en Educación Básica con
Énfasis en Matemáticas**

ASESOR

JESÚS MARÍA GUTIÉRREZ MESA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

MEDELLÍN

2009

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	4
JUSTIFICACIÓN	8
FASE UNO: ANÁLISIS PRELIMINARES	10
1.1.1 LAS DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTACIÓN: UN ANÁLISIS DE SU CONTRIBUCIÓN EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA.	10
1.2. ANÁLISIS CURRICULAR	14
1.2.1 Currículo propuesto	14
1.2.2 Currículo desarrollado	19
1.2.4 Currículo alcanzado	23
1.3 CARACTERIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN	29
1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	32
1.4.1 Pregunta de investigación	33
1.4.2 Objetivo general	33
1.4.3 Objetivos específicos	33
1.4.4 Otras preguntas de investigación	33

FASE DOS: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI	35
2.1.LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS	
2.2. UN ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y SU INFLUENCIA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	38
2.3 DEFINICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DESDE LA GEOMETRÍA PLANA.	48
2.4 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN: LA INGENIERÍA DIDÁCTICA	49
FASE TRES: EXPERIMENTACIÓN	51
3.1 SITUACIÓN DIDÁCTICA UNO	51
3.2 SITUACIÓN DIDÁCTICA DOS	69
3.3 SITUACIÓN DIDÁCTICA TRES	85
FASE CUATRO: ANÁLISIS A POSTERIORI Y CONCLUSIONES	98
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103

INTRODUCCIÓN

A continuación se presenta un trabajo de intervención que se realiza en la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Realizada en el Municipio de Bello, en la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación, con una población de 42 estudiantes correspondientes al grado sexto.

El tema central del trabajo surge bajo la motivación inicial de plantearse interrogantes como: ¿Cuál es el papel que cumplen las figuras geométricas en la solución de un problema propio de la geometría? ¿Es posible resolver un problema de geometría sin el uso de una figura? ¿Qué es una figura geométrica?

En vista de estos interrogantes planteados se genera la necesidad de consultar diversas fuentes bibliográficas con el objetivo de hallar autores en cuyos trabajos se pudieran encontrar posibles respuestas. Como producto de esta búsqueda se encontraron los trabajos de Raymond Duval, Efraím Fischbein, los Lineamientos Curriculares y los Estándares básicos del área de Matemáticas, en cuya lectura fue posible identificar en general, que todo concepto matemático necesita de una forma de representación semiótica, que permita a un sujeto en determinado momento, comprenderlo y comunicarlo para sí y para los demás; de este modo para resolver un problema de geometría plana, siempre es necesario hacer uso de diversas formas de representación entre las que se encuentran las figuras geométricas. Estas permiten al sujeto percibir y establecer propiedades generales

y particulares que constituyen en determinado momento un concepto en particular. Al respecto en los lineamientos curriculares del área de Matemáticas se menciona que “las formas de representación en matemáticas son cruciales para la comprensión de los objetos matemáticos” (MEN, 1998), del mismo modo Raymond Duval concibe que “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación” (Duval, 1999).

Teniendo como precedente lo anterior, y en aras de plantear un problema de investigación que aporte a dar solución en parte a las necesidades propias que comporta la comprensión de dos conceptos geométricos en particular, como lo son las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, en una población específica, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el papel de las diferentes representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad?, con un objetivo general que es Identificar de qué manera contribuyen las representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en estudiantes del grado sexto de la institución educativa Fe y Alegría Nueva Generación del Municipio de Bello Antioquia.

El trabajo se desarrolla bajo los parámetros de la metodología de investigación, Ingeniería didáctica, la cual surge en la didáctica de la matemática francesa, como “una metodología para analizar los hallazgos de la teoría de situaciones didácticas y de la transposición didáctica”.

Se compone de cuatro fases:

Primera fase: análisis preliminares, Segunda fase: concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Tercera fase: experimentación. Cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación.

En la fase uno se presenta un análisis sobre la contribución que las diferentes formas de representación hicieron al desarrollo histórico de la geometría. Un análisis curricular en torno a la importancia que se otorgan a las representaciones semióticas en la adquisición del conocimiento matemático por parte del Ministerio de Educación Nacional y por parte de los autores y editoriales que escriben los diferentes libros de texto del grado sexto y que sirven en muchas oportunidades de guía para algunos docentes. Los análisis se realizaron a los Lineamientos curriculares y los Estándares Básicos del área de Matemáticas, al igual que a libros de texto, Matemáticas 2000 de la Editorial Voluntad, Elementos de Matemáticas 6 de la editorial Bedout, Matemáticas 6 de la editorial Santillana S. A entre otros. De igual manera se realizó una caracterización de la Institución Educativa y la población de estudiantes que intervino en el trabajo, y por último se formuló el problema de investigación, con sus respectivos objetivos generales y específicos.

En la fase dos se presenta el componente didáctico sobre el que se centra la fase tres de intervención: las situaciones didácticas, de igual manera se presentan los autores de referencia, Duval y Fischbein con sus respectivos planteamientos donde describen los aportes que han hecho al tema de las representaciones semióticas y su influencia en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, entre otros como

Vigotsky, Piaget, y Bruner que también en alguna forma con sus trabajos contribuyen a la comprensión del tema de las representaciones semióticas.

En la fase tres se presentan tres situaciones didácticas cuyos análisis a priori y propósitos obedecen a identificar ¿Cuál es el papel que cumplen las diferentes formas de representación semióticas en comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en estudiantes del grado sexto? En la fase cuatro se presentan los análisis a posteriori y conclusiones extraídas como resultado del trabajo realizado, y en donde fue posible describir los logros obtenidos en la realización del trabajo con relación a los objetivos que se plantearon pudiendo constatar así lo planteado por los autores referenciados.

JUSTIFICACIÓN

El Ministerio de educación Nacional en el texto “Lineamientos curriculares del área de matemáticas” plantea como uno de los componentes esenciales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la misma, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, de igual forma hace referencia a los procesos de visualización, razonamiento, y modelación o representación como fundamentales en la comprensión de las matemáticas escolares. Rescata la importancia de las representaciones como una de las formas que le permiten al estudiante acceder al conocimiento y comunicarlo pues dada la complejidad de los objetos matemáticos parece que sólo se puede acceder a ellos por medio de representaciones (mentales o internas, semióticas o externas).

Por lo anterior en este trabajo se indagará acerca del papel que desempeñan estas representaciones en la comprensión de las nociones matemáticas de paralelismo y perpendicularidad, y cómo ellas pueden determinar o condicionar el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, el problema formulado cobra importancia en la medida en que de la comprensión de estas nociones depende la conceptualización de teoremas o definiciones que se fundamentan en la presencia de las relaciones de paralelismo o perpendicularidad, y que los estudiantes parecen reconocer sólo en presencia de ciertas representaciones que las hacen evidentes, pero que no son reconocidas cuando sufren ciertas transformaciones, cuando son representadas en el plano,

dejando en evidencia con ello que las relaciones en mención quedan sujetas a una sola forma de representación que las determina, convirtiéndose en un obstáculo no sólo para la comprensión de las nociones en sí mismas sino también de aquellas otras nociones que se fundamentan en dichas relaciones.

Por ejemplo la geometría analítica y el cálculo, entre otros requieren de la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad dado que muchas de sus definiciones, demostraciones y teoremas se apoyan en representaciones en las cuales estas relaciones son fundamentales y no siempre son susceptibles de ser presentadas de una misma forma.

FASE UNO: ANÁLISIS PRELIMINARES

1.2 LAS DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTACIÓN: UN ANÁLISIS DE SU CONTRIBUCIÓN EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA

Una de las hipótesis sobre el descubrimiento de la geometría apunta a que fueron los egipcios quienes crearon la geometría pues la necesidad de medir constantemente sus tierras para delimitarlas, debido a las inundaciones del río Nilo los obligó a pensar en una forma de solucionar este problema, dando como resultado la instauración de las primeras formas de medición y representación del espacio físico. Al respecto recuérdese, precisamente que la palabra geometría en su más elemental definición significa medida de la tierra.

La presencia de geometría se evidencia en

“Los edificios, las sepulturas, los adornos en armas y utensilios, objetos de uso y de embellecimiento y productos de trenzado y tejido revelan un sentido de las formas y una familiaridad de alto nivel en el trabajo manual con propiedades de las figuras geométricas se deja ver un refinado sentir de las propiedades simétricas de los cuerpos en el relleno ornamental de superficies con adornos simétricos que están ordenados ya sea en líneas abiertas continuas (Hoffman, 1960)

Por otro lado se encuentra que el estudio del espacio y de las formas de la geometría ha contribuido al desarrollo en general de la matemática. Ha aportado al desarrollo del cálculo integral, en el sentido de haberse evidenciado la necesidad de hallar el área de figuras planas cuyos lados ya no son segmentos sino curvas, creándose así un proceso que hace posible una muy buena aproximación al área conocido como integración, y de donde se desprenden además conceptos fundamentales del cálculo como límites, derivadas entre otros.

La geometría ha aportado a la teoría de números gracias a la necesidad de **representar** mediante símbolos relaciones establecidas entre figuras, un ejemplo de ello se puede encontrar si se analizan las razones que llevaron a considerar un número irracional como $\sqrt{2}$ el cual **representa** la medida de la diagonal de un cuadrado de lado uno. La necesidad de **representar** las partes de una unidad, es decir, como **representar** simbólicamente un objeto que antes era parte de otro, viéndose así la necesidad de ampliar el conjunto de los números y crear una **representación** simbólica que explicara este hecho.

La geometría ha contribuido al desarrollo de la trigonometría como la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las relaciones métricas de los

triángulos. En los últimos tiempos contribuye a la didáctica del algebra pues gracias a ella se puede realizar un estudio mas comprensivo de algunas operaciones algebraicas como la solución a ciertos binomios al cuadrado, pero sobre la base de representaciones que permiten visualizar estas relaciones algebraicas y que han desarrollado el algebra geométrica. En éste mismo sentido se encuentra que la geometría aportó al algebra, a través del estudio que realizaron Descartes y Pierre de Fermat quienes “estudiaron las secciones cónicas y determinaron que éstas satisfacen ecuaciones algebraicas de orden dos de dos variables”.

De los anteriores párrafos se puede extraer que el desarrollo de la geometría a través de la historia estuvo marcado y determinado por la **representación del espacio** y las formas que en él se pueden evidenciar. Estas representaciones contribuyeron a la trascendencia de la misma a un con el pasar del tiempo, puesto que el hombre utilizó los diferentes medios como piedras, tablillas y papiros, que se poseían para dejar plasmado y representado por escrito sus avances científicos, permitiendo con ello que nuevas generaciones lo utilizaran y se avanzara hacia la construcción de la matemática de la que hoy se goza.

Muchos de los logros de las matemáticas y de las ciencias dependieron de la capacidad que ha tenido el hombre para construir sistemas de representación de objetos físicos o mentales, para comunicar no sólo sus propiedades, sino también mostrar o evidenciar relaciones entre ellos. Dice Andrés de la Torre en su texto “La Modelización del Espacio y del Tiempo” que una de las tareas fundamentales de los griegos fue, en el campo de la Geometría, el espacio físico , “percibido inicialmente por los sentidos y sometido después a un proceso de idealización” (DE LA TORRE, 2006) y otra de las tareas, más compleja que la primera, fue la modelización del tiempo, tareas que fueron logradas a la idea de usar segmentos de recta para **representar** tanto distancias o espacios físicos como intervalos de tiempo.

1.3 ANÁLISIS CURRICULAR

1.2.1 CURRÍCULO PROPUESTO

A continuación se presenta un análisis de los Lineamientos Curriculares y los Estándares del área de Matemáticas en torno a lo que se propone por parte del Ministerio de Educación Nacional, con respecto a las representaciones en la construcción de conocimiento por parte de un estudiante.

En el análisis se encontró como con el platonismo se afirma que las matemáticas siempre han existido y que el papel del hombre es descubrirlas. Para ilustrar esta afirmación se parte del ejemplo que si se “construye un triángulo de catetos c , d y de hipotenusa h entonces indiscutiblemente se encontrará la relación $h^2 = c^2 + d^2$,

de lo cual se puede inferir que cuando se afirma que se **construye** un triángulo, se hace referencia a una figura o representación no particular de un triángulo, sino a una idealización que tiene el carácter general en donde se podían “ver” estas relaciones.

De las afirmaciones anteriores y en particular del ejemplo presentado se puede evidenciar la importancia que se le proporciona a las formas y figuras, como punto de partida para el análisis de las relaciones existentes entre los catetos y la hipotenusa de este triángulo y que lleva a descubrir por sí mismos la relación existente en los triángulos rectángulos enunciada por Pitágoras cientos de años

atrás, así mismo se evidencia el papel que juega la figura en la deducción de ciertas relaciones matemáticas.

Por otro lado se encuentra en los “referentes curriculares” de los Lineamientos Curriculares afirmaciones como la siguiente “El conocimiento matemático está conectado con la vida social y con las abstracciones que hacemos del mundo”, de la cual es posible extraer la idea que la vida social, el mundo que se observa está impregnado de formas y figuras que todo el tiempo el hombre trata de representar y que reflejan la imagen y los conceptos que se ha fijado en la mente de ese mundo que habita, lo que da paso para pensar que a través de una llámese figuras en general o figuras propias de la geometría se refleja lo que pasa por la mente de un hombre, y que pudo pasar por la mente de miles de hombres a través de la historia, y que permiten identificar las diferentes concepciones que del mundo el hombre se ha forjado.

“La escuela debe promover las condiciones para que las nuevas generaciones lleven a cabo la construcción de los conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos” (MEN, 1998). Si se piensa como se pueden “elaborar significados simbólicos compartidos” para lograr que los estudiantes construyan el conocimiento, se puede asumir las representaciones como una de las formas en que dispone la escuela para posibilitar que el estudiante comprenda los diferentes conceptos matemáticos.

En los párrafos siguientes, se hará la presentación que los Lineamientos hacen explícitamente con respecto a las formas de representación y el papel que cumplen en la adquisición del conocimiento, en lo referente al saber específico del pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Los lineamientos curriculares dan un lugar privilegiado al proceso de representación, puesto que con la propuesta de la geometría activa se propone enseñar partiendo de la observación activa del espacio, de modo tal que se le permita al estudiante apropiarse de los conceptos de la geometría a través de **representaciones bidimensionales del espacio tridimensional**, y en donde el estudiante inicialmente parta de su intuición para descubrir relaciones abstractas que se presentan en el espacio, realice cálculos, establezca relaciones e infiera conceptos y propiedades de los objetos gracias a la interacción continua con éstas y a la realización de dibujos que “representen objetos sólidos ubicados en el espacio”

“De esta manera se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar esas representaciones” (MEN 1998)

Ahora bien, en los estándares básicos del área de matemáticas planteamientos como el que se presenta a continuación permiten identificar la importancia que se le atribuye a las representaciones en la adquisición de los diferentes conceptos de la matemática por parte del estudiante, de este modo entonces se dice que un estudiante debe

“Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista”. (MEN 2007)

Por otro lado se tiene que a través de lo planteado en cuanto a los procesos generales de la actividad matemática se evidencia la presencia de las representaciones en el aprendizaje, a través de procesos como:

La modelación definida como “la posibilidad de modelar procesos y fenómenos de la realidad”; Entendiendo por modelo “un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible”. Así se tiene que a través de la modelación el

estudiante puede encontrar soluciones a los problemas planteados y encontrarles sentido.

La comunicación como una forma de transmisión del conocimiento por medio de diferentes lenguajes con los que se puede expresar y representar los conocimientos adquiridos por parte del estudiante, al *respecto*

“podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido” (ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS, 2007)

1.2.2 CURRÍCULO DESARROLLADO

Teniendo en cuenta que uno de los puntos de referencia utilizado por un alto porcentaje de los docentes cuando se orienta el proceso de aprendizaje en la educación básica, son los libros de textos escritos por diferentes autores y editoriales, se realizó un análisis de varios de ellos, dentro de los que se encuentran Matemáticas 2000, de la Editorial voluntad, Bogotá 1999, escrito por Villegas Mauricio, Asensio Robinsón. Elementos de Matemáticas 6, de la editorial Bedout Editores S. A, Medellín 1989 escrito por Berrío Molina Israel, Uribe Calad Julio, y Matemáticas 6 de la Editorial Santillana S. A, Bogotá 1999, escrito por Mora Torres Ana Julia y otros.

El análisis se realizó con el fin de determinar la forma como trabajan estos textos dos conceptos en particular como lo son las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, y en relación con el papel que en ellos juegan los sistemas semióticos de representación, y teniendo en cuenta lo planteado por Raymond Duval, el cual concibe que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación; por lo que se debe posibilitar la utilización de gran variedad de formas de representación de un mismo concepto, donde estas representaciones a su vez se deben realizar tanto al interior de un mismo sistema, como de sistemas diferentes; todo con el objetivo que no se termine asociando un

concepto a una sola forma de representación y se termine impidiendo con ello la comprensión del mismo.

De igual forma se analizan bajo los planteamientos descritos en el currículo propuesto de este trabajo, y que son dados a su vez por lo planteado en los Lineamientos curriculares de Matemáticas y Los Estándares Básicos de la misma área.

Después de leer lo propuesto en los libros de texto con respecto a las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, y a la utilización de sistemas semióticos de representación, como mediadores en la comprensión de las mismas, se encontró que el tratamiento que se le da a las relaciones, está basado en la geometría formal, donde el punto de partida en la enseñanza se centra en conceptos formales y abstractos de la geometría euclidiana como punto, recta, plano, semiplano, ángulo, polígono, poliedro entre otros.

No se evidencia la utilización de variadas formas de representación tanto al interior de un mismo sistema, como al interior de varios sistemas semióticos de representación, pues se presentan a lo sumo tres formas diferentes de representar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

No se evidencian actividades donde se les proponga a los estudiantes pensar en otras formas diferentes a las ya dadas, para representar y comprender estas relaciones.

Se presentan las definiciones terminadas listas para ser “aprendidas” por parte del estudiante, quien después de ello debe asumirlas como ciertas y pasar a realizar los ejercicios propuestos.

Se observa que la utilización de las dos o tres figuras geométricas de cada concepto, siempre son las mismas en todos los libros de texto, y que estas se hacen sólo en la parte donde se presenta la definición formal del concepto, es decir no se evidenciaron actividades donde se le pida al estudiante que interprete y deduzca propiedades esenciales de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, a partir de representaciones dadas en uno o varios sistemas.

No se evidencian actividades donde los estudiantes tengan que sustentar puntos de vista a través de la utilización de sistemas de representación. (En su defecto las que se evidencian en algunos textos, son pocas teniendo en cuenta las múltiples formas de representación que ofrecen los diferentes sistemas semióticos.)

Como producto de todo lo anterior surge la siguiente pregunta. ¿Existe coherencia entre lo planteado por los Lineamientos curriculares de Matemáticas, Los estándares básicos de Matemáticas, y Raymond Duval, en cuanto a la utilización de sistemas de representación semióticos, como formas de las que se vale un estudiante para comprender los diferentes conceptos de las Matemáticas?

1.2.3 CURRÍCULO ALCANZADO

El análisis que se presenta a continuación fue realizado a los siguientes documentos consultados en julio de 2007:

- Saber, subdirección académica, grupo de evaluación de la educación básica y media, Área de matemáticas, análisis de preguntas, Aplicación 2005 – 2006.
- Instituto colombiano para el Fomento de la Educación Superior –ICFES, subdirección académica, grupo de evaluación de la educación básica y media, “¿cómo es la evaluación en matemáticas?” autor. Grupo de evaluación de la educación básica y media, 2003

Publicados en la página Web: <http://www.icfes.gov.co>.

Este texto busca indagar sobre el grado de relevancia que se otorga al proceso de representación en las Pruebas Saber por parte de los Comités Académicos que formulan estas pruebas y que son delegados para tal fin.

Como resultado del análisis a estos documentos, se ha encontrado coherencia con lo planteado en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos del área de Matemáticas, puesto que en el sustento teórico de las mismas, y en el planteamiento de las preguntas que se les formulan a los estudiantes, se evidencia

la importancia del proceso de representación como medio para comunicar y, desarrollar una mejor comprensión y aprehensión de los conceptos matemáticos. No sólo como competencias para ser evaluadas sino también como la misma prueba hace uso de las representaciones para exponer las tareas, pues las preguntas después de ser elaboradas o contextualizadas en el lenguaje natural son acompañadas en la mayoría de las veces de representaciones gráficas para facilitar su comprensión.

“ La competencia en comunicación y representación está referida a expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, usar lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones.” (ICFES 2005)

En cuanto a los tipos de preguntas abiertas realizadas a los estudiantes se encontró el siguiente ejemplo, muy significativo por cierto en el presente trabajo pues privilegia las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional. Como formas que dispone el estudiante para construir el conocimiento.

El ejemplo se sustenta desde la visión que se posee en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas sobre el pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

“El pensamiento espacial, como se plantea en los Lineamientos Curriculares, está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales. Más específicamente está ligado a la comprensión del espacio, al desarrollo del pensamiento visual, al análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades. Involucra el razonamiento geométrico y la solución de problemas significativos de modelación, diseño y construcción. Es por ello que resulta pertinente explorar, en los planteamientos de los niños en la pregunta abierta, algunos de los aspectos relacionados con el pensamiento espacial: el reconocimiento de una representación tridimensional, análisis de vistas y caras ocultas, el carácter de la representación que construye: bi o tridimensional y la interpretación de la condición que implica reconocimiento de las dimensiones (altura) de la torre. “

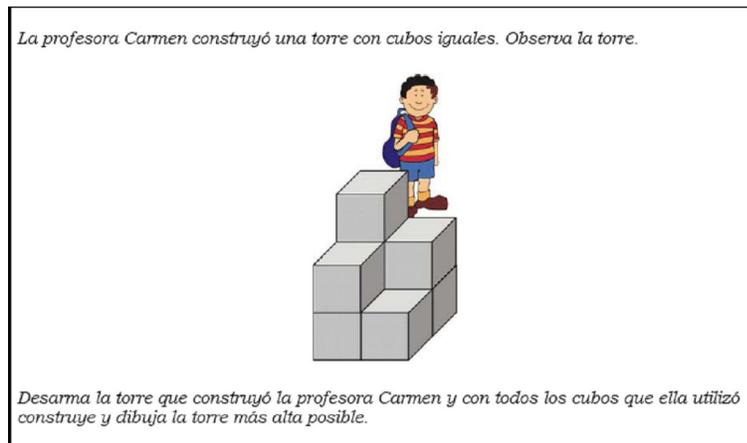


Fig. 1

Con respecto al documento ¿Qué evalúan las pruebas? Se encontró que estas se fundamentan en las posturas de autores como: Castro, Rico, Di Sessa, y Duval, los cuales rescatan la importancia del proceso de representación como parte fundamental en el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos. Como se cita a continuación:

“Los problemas que se incluyen en las pruebas requieren de la traducción y simbolización en diferentes formas de representación usadas en la matemática escolar. Siguiendo a Castro, Rico y otros, la noción de representación "debe tener la dualidad del concepto, para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas, se hace necesario representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las

representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos".

"las formas de representación en matemáticas son cruciales para la comprensión de los objetos matemáticos. Algunos autores plantean aspectos relevantes de la representación en la resolución de problemas, como que "no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (Duval, 1999) y que "hacer matemáticas implica más que la simple manipulación de símbolos matemáticos; implica interpretar situaciones matemáticamente; implica matematizar (o sea, cuantificar, visualizar o coordinar) sistemas estructuralmente interesantes; implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas gráficos, modelos concretos u otros sistemas de representación para desarrollar descripciones matemáticas o explicaciones, o construcciones que permitan plantear predicciones útiles de tales sistemas" (Rico, 1997)."

"Asumiendo lo anterior, las tareas que se proponen a los estudiantes a través de estas pruebas, les exigen el reconocimiento, no solamente del objeto matemático, sino también desde qué perspectiva el tipo de representación que

se plantea, le permite analizar la información. Como lo menciona Di Sessa (citado por LESH. R. 1997)

"Las capacidades matemáticas en las que se hace hincapié, a menudo, insisten en la comunicación, la planificación, el seguimiento y otros tipos de pensamiento de alto rango que reclaman capacidades de representación; es decir, que los estudiantes tienen que ir más allá de pensar con una representación matemática dada para pensar además acerca de la potencia o debilidad relativa de las representaciones alternativas".

"Las formas de representación consideradas para estas pruebas son de tipo verbal (en las que se incluyen los lenguajes natural y simbólico), gráfico (pictogramas, diagramas, gráficas) y tabular. Estas formas de representación se consideran tanto para el enunciado del problema como para las opciones de respuesta presentadas."

1.4 CARACTERIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN Y LA POBLACIÓN DE ESTUDIANTES QUE INTERVINO EN EL TRABAJO.

La institución educativa Fe y Alegría Nueva Generación es una institución de educación pública ubicada en el municipio de Bello, “en una planta física construida y cedida por el Instituto de Crédito Territorial nace con el nombre de escuela Fe y Alegría número tres por el decreto 0103 de febrero 15 de 1982 de la Secretaria de Educación de Antioquia. Ante el poco significado de número tres en el nombre se radica en 1999 el proyecto de cambio, y por concurso se elige el de Fe y Alegría Nueva Generación aprobada por resolución municipal 832 del mes de noviembre del mismo año, y por resolución departamental 1915 del 25 de febrero de 2000 se concede el reconocimiento oficial y se legalizan los estudios de preescolar, básica primaria y básica secundaria”.

Cuenta con 16 aulas de estudio con su respectiva silletería, oficina de rectoría, secretaria, coordinación, aula de materiales, sala de cómputo, biblioteca con su respectiva fotocopiadora, cuarto de aseo tienda escolar y restaurante para los niños con más necesidad económica. Para la realización de actividades deportivas se tiene una placa polideportiva, un terreno que cumple con la función de cancha de fútbol, y un pequeño parque para los niños de Preescolar.

En cuanto a equipos de audio y video, cuenta con videobeam, DVD, televisión en red en cada aula de clase y sala de cómputo. Cuenta con sala de tecnología, próximamente (año 2008) se construirá un aula de investigación.

Esta Institución cuenta con proyectos para apoyar los procesos en general de todos los estudiantes como:

- “Despertares para estudiantes con dificultades de aprendizaje,
- ” Padrinos” para estudiantes de Bachillerato,
- “Conexiones”, en convenio con la Universidad Eafit,
- “La semana de la familia”,
- ” Manos solidarias” para ayudar con implementos de estudio y uniformes a los niños que lo requieren,
- “Construyendo familias” proyecto para formación de los padres.

El Grado Sexto B grupo con el cual se realiza el proceso de intervención fundamentalmente, cuenta con 42 estudiantes. Con respecto al contexto familiar de los estudiantes se encontró que 62.8 % de los estudiantes viven con ambos padres, el 26.7% vive con sus madres y otros familiares, el 11.5 % con personas distintas a sus padres. Un 5% de los padres de familia están desempleados y un 20% de las madres son cabeza de familia. El 78.5% de los estudiantes pertenecen al estrato socioeconómico dos y el porcentaje restante al estrato tres.

En cuanto a los docentes encargados del grupo se percibe una actitud positiva frente a los estudiantes , puesto que muestran interés en el proceso de aprendizaje de cada uno de ellos, demuestran amor por la profesión docente al mostrarse dispuestos a mejorar sus métodos de enseñanza cuando consideran que es necesario hacerlo, se interesan por los problemas tanto académicos como familiares que puedan tener los estudiantes a su cargo, lo que contribuye a un mejoramiento de la calidad educativa de la Institución.

1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El Ministerio de Educación Nacional en el texto los Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas habla de la importancia que tienen las representaciones en el campo del conocimiento matemático al referirse que “las formas de representación en matemáticas son cruciales para la comprensión de los objetos matemáticos” (MEN 1998). Así mismo Raymond Duval concibe que “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación” (Duval 1999). Partiendo de éstas tesis se tiene que las representaciones en relación con el conocimiento matemático y en particular con el aprendizaje de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad deben constituirse en fundamentales para su comprensión.

Se tiene también que, en lo que concierne a las relaciones de paralelismo y perpendicularidad se ha podido observar que existe un alto porcentaje de estudiantes que presentan dificultades para resolver problemas o reconocer propiedades geométricas en donde se involucran dichas relaciones, dado que se tiende a asociar éstos a una sola forma de representación lo que ocasiona que se tomen “ los objetos por las cosas “ (Duval 2004) impidiendo así una buena comprensión por parte de los estudiantes de estas relaciones, por lo que se hace necesario preguntarse por:

1.5.1 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cuál es el papel de las diferentes representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad?

1.5.2 OBJETIVO GENERAL

Identificar de qué manera contribuyen las representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en estudiantes del grado sexto de la institución Fe y Alegría Nueva Generación del Municipio de Bello Antioquia.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar diferentes sistemas de representación asociadas a las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.
- Proponer actividades en relación con las operaciones de tratamiento y conversión e identificar su incidencia en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

1.5.4 OTRAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo ha sido y que incidencia han tenido las representaciones tradicionales de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad?
- ¿Qué tipos de situaciones de carácter pedagógico se pueden implementar en el aula de clase de modo tal que favorezcan la comprensión por parte de los estudiantes de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad?
- ¿De cuántas formas diferentes se pueden representar rectas paralelas y rectas perpendiculares?

FASE DOS: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

2.1 LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Después de la Reforma Educativa de los años 60 en Francia surge una nueva propuesta sobre la didáctica de las matemáticas liderada por Guy Brousseau en donde el objeto central de la misma se enmarca bajo lo que éste autor denominó como situación didáctica la cual se entiende como el

“Conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre el alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución” (Gálvez,)

La importancia de esta nueva propuesta radica en que las situaciones didácticas brindan la posibilidad de construir conocimiento, controlar y producir las acciones llevadas a cabo en la enseñanza, haciendo posible además optimizar los procesos de adquisición de conocimiento. En este mismo sentido el docente se convierte en un ingeniero que se encarga de diseñar las situaciones que más tarde serán puestas al estudiante para que éste trabaje sobre ellas.

Las situaciones didácticas ofrecen las posibilidades de construcción del conocimiento, de tener una intencionalidad, es decir el docente investigador puede predecir los resultados que obtendrán los estudiantes al realizar dicha situación, para después compararlos con los resultados obtenidos y así observar las dificultades o fortalezas que se tuvo por parte de éste, posibilitando el diseño de nuevas situaciones que transformen los resultados obtenidos y lograr efectos didácticos diferentes.

El hecho de diseñar otras situaciones da paso al surgimiento de toda una secuencia de situaciones didácticas, en donde una en especial se convierte en una situación fundamental, la cual se entiende como aquella “que es capaz de engendrar a todas las demás, a través de la asignación de diversos rangos de variación o valores particulares a las variables que la caracterizan”.

Por otro lado éstas se caracterizan porque permiten al estudiante responsabilizarse de la organización de la actividad para tratar de resolver el problema propuesto. Se busca la adquisición de un resultado preciso, previamente explicitado. Implica toma de decisiones por parte del estudiante y la posibilidad de conocer las consecuencias a fin de modificarlas para conseguir el objetivo perseguido. Permite al estudiante utilizar diferentes estrategias de solución; siendo una de ellas ya explicitada en el problema, por último se permite al estudiante establecer relaciones

sociales diversas a través de los debates y negociaciones con otros estudiantes y el docente.

En conclusión se tiene que las situaciones didácticas

“proporcionan la significación del conocimiento para el alumno en la medida en que se convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye así un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación descontextualizada”

2.2 UN ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y SU INFLUENCIA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Uno de los aspectos fundamentales en relación con el campo de las matemáticas tiene que ver con los procesos de enseñanza y aprendizaje, campo en el cual son esenciales actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comunicación. En el desarrollo de dichas actividades cobran especial importancia en términos de Raymond Duval “la utilización de sistemas de expresión y representación distintos al lenguaje natural o al de las imágenes” (Duval, 1999). Las actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se constituyen en un contexto privilegiado para analizar el papel de las representaciones en relación con la construcción del conocimiento y ellas en sí mismas, además favorecen u obstaculizan dichos procesos.

De ahí que varios autores hayan dedicado parte de sus trabajos a indagar por las posibles relaciones entre desarrollo cognitivo y representación: Vigotsky, Piaget, Bruner y Duval.

La teoría histórico cultural del desarrollo psicológico planteada por Vigotsky, sostiene que “el conocimiento es una unidad de lo sensorial y lo racional, de lo empírico y lo teórico. En el proceso de formación del concepto, el momento

constructivo, productivo, está constituido por el paso del espacio percibido al espacio representado, paso que se posibilita a través del desarrollo de distintas formas de conocer o estrategias cognitivas entre las que se destacan la reversibilidad, la realización verbal de procesos y el manejo de niveles de representación las cuales permiten el desarrollo de zonas de desarrollo próximo en su carácter de elemento que potencia el desarrollo intelectual y motivacional en los estudiantes.

También Piaget, en su teoría psicogenética hace referencia al proceso de representación como la evocación de objetos ausentes, para caracterizar la transformación que marca el último estadio de la inteligencia sensorio motriz.

Por otra parte Bruner hace un estudio más detallado de la representación describiendo así tres modos de representación interna: enactiva, icónica y simbólica. La representación enactiva consiste en un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada. El modo de representación icónica “nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales”. Por último el modo de representación simbólica “que para Bruner es la tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística. Un símbolo es

una palabra o marca que representa alguna cosa, pero que no tiene que parecerse a dicha cosa”.

Por su parte Raymond Duval en su teoría sobre las representaciones semióticas hace una presentación acerca del significado de éstas y sobre la importancia que cobran en la adquisición del conocimiento, “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación”,(Duval 2004) pues siempre que se trate de reflexionar acerca de las cuestiones que se involucran en la adquisición del conocimiento por parte de un sujeto, se tendrá que hacer alusión a una representación puesto que son éstas la forma como “ una información puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento “ (Duval 2004) , es decir una vez que la información está ahí disponible para un sujeto éste hace uso de uno o varios sistemas semióticos, como pueden ser el lenguaje, la escritura algebraica, las figuras geométricas, entre otros que puedan ser constituidos por el empleo de signos, de modo tal que le permitan representar la información y hacer un tratamiento de ésta.

Cabe aclarar que el uso de varios sistemas para representar la información y hacerle un tratamiento, no constituyen aspectos simples desde el punto de vista cognitivo, por lo que se hace necesario realizar un análisis de estas cuestiones.

Una representación semiótica se entiende como una producción material constituida por el empleo de signos, que sirve al sujeto para comunicar tanto la información acerca de los objetos externos a él, como las representaciones mentales que extrae de los objetos.

Ahora bien, si se analiza la importancia que comportan las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra que la relación que se teje entre las representaciones externas o semióticas y las representaciones mentales es fundamental para comprender que cuando se lleva a cabo la actividad de representación entran en juego otros aspectos que se desprenden directamente de esta relación, en consecuencia, se tiene que en una representación el contenido no puede separarse de su forma, es decir no puede haber noesis si semiósis(en otras palabras una representación externa siempre estará acompañada de una representación mental del objeto del que se esté trabajando), porque entonces “ la operación de conversión “ sería “cognitivamente neutra y de un valor nulo o mínimo” lo cual resulta ser errado pues como ya se dijo la noesis no es independiente de la semiósis, además porque en “todas las observaciones que se han podido hacer sobre el aprendizaje de las matemáticas, se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación cognitivamente difícil o en ocasiones imposible.

Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada” (Duval 2004).

Todo sistema de representación semiótico debe posibilitar las siguientes actividades cognitivas:

Formación; consiste en “construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado” (Duval 2004). De este modo la actividad cognitiva de formación posibilita que una determinada comunidad de sujetos pueda desarrollar formas de representarse momentos, situaciones y conceptos de una forma material que todos en esa comunidad puedan entender. Para el caso del conocimiento matemático se tiene que existe una serie de representaciones reconocidas por una comunidad científica como pertinentes para referirse a cada uno de los conceptos de ésta ciencia; en el mismo sentido, se puede hacer referencia a las representaciones que han sido aceptadas como pertinentes para las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas o segmentos de rectas, algunas de las cuales se presentan a continuación:

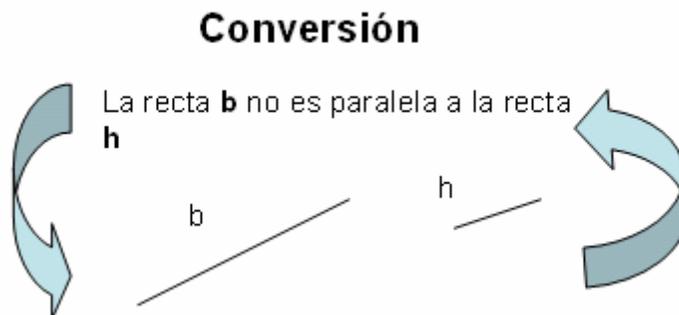
- $\parallel \dagger \equiv \perp \top \perp \dagger$,
- $A \parallel W$,
- $B \perp S$,
- “El segmento A es paralelo al segmento W”,
- “El segmento B es perpendicular al segmento S”

Tratamiento consiste en “transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales” (Duval 2004) . Así cuando un sujeto representa un concepto matemático como lo es la relación de perpendicularidad, y lo hace a través de un conjunto de figuras o un sistema figural, se tiene que todas las representaciones están en función de figuras; es decir no hay ninguna que esté representada en el lenguaje natural, en el sistema algebraico o en cualquier otro sistema.

Conversión consiste en “convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado “(Duval 2004).

Para el caso de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas o segmentos de recta, se tiene que éstas pueden ser representadas en primera instancia, a través de un sistema conformado por un conjunto de figuras propias de la geometría plana, luego ser representadas en el sistema formado por el lenguaje natural, y/o también en el sistema algebraico, u otro elegido por el sujeto; utilizando así dos o más sistemas.

En el siguiente ejemplo se presentan dos sistemas de representación utilizados para representar dos rectas que no guardan la relación de paralelismo; el primero es el lenguaje natural y el otro en un sistema figural.



Con respecto a la conversión se tiene que sólo cuando un sujeto es capaz de “disponer de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir una representación de un objeto...” y es capaz, de “espontáneamente”, “convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas sin siquiera notarlo”,

se puede afirmar que un sujeto no confunde la representación y el objeto representado.

Otro de los autores que dedica su trabajo a reflexionar acerca de las representaciones es Efraím Fischbein, quien en su tesis doctoral investiga la naturaleza de las representaciones en geometría y el papel que cumplen en relación con su aprendizaje. Hace un tratamiento de las figuras geométricas, como entidades mentales, pues estas no constituyen simples dibujos con los que se representan ciertos conceptos, sino que por el contrario se constituyen o toman el nombre de “conceptos figurales”.

Ahora bien los conceptos figurales según la teoría de Efraím Fischbein son “entidades mentales” que reflejan “propiedades espaciales” como forma, posición y tamaño, regidas por definiciones propias de un “sistema axiomático”.

Estas entidades mentales se componen de **Un concepto**, el cual se define como una representación simbólica (casi siempre verbal) usada en el proceso de pensamiento abstracto, posee un significado general correspondiente a un conjunto de representaciones concretas con respecto a lo que tienen en común. Se caracterizan por expresar una idea, una representación general de una clase de objetos basada en sus rasgos comunes. Este sistema conceptual es el que

controla absolutamente los significados, las relaciones y las propiedades de la figura.

Una imagen, definida como una representación sensorial de un objeto o fenómeno del espacio, poseedora de una cierta estructura o “Gestalt”.

La relación entre concepto e imagen como componentes de la entidad mental o figura geométrica, desde el punto de vista cognitivo genera “tensiones internas” en el sujeto que trata de comprender un concepto, puesto que “las propiedades conceptuales y las figúrales quedan bajo la influencia de sus respectivos sistemas, el conceptual y el figural” (Fischbein, 2006). En este mismo sentido se tiene que “Las figuras geométricas tienden a retener e imponer en el proceso de razonamiento sus llamativos rasgos aparentes de acuerdo a las restricciones de representación gráfica, en consecuencia el control conceptual (axiomático deductivo) es reducido y el proceso de resolución o de interpretación se vicia.” (Fischbein, 2006).

Para el caso de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, se tiene que una vez el sujeto ha utilizado o ha observado representaciones que se encuentran en el sistema figural y que representan estas relaciones, puede ocurrir que, con respecto a la relación de paralelismo aspectos de la imagen como posición, longitud, y grado de inclinación, de cada una de las rectas en relación, lleva al sujeto a lanzar afirmaciones erróneas que separan la imagen de su respectivo concepto, es decir

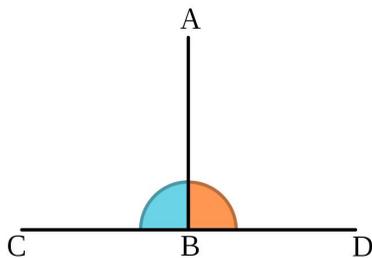
puede ocurrir que visualmente un par de segmentos de rectas parezcan paralelas, pues aparentemente no se interceptan en ninguno de sus puntos; ahora, cuando son prolongadas, estas se intersecan como mínimo en un punto y por lo tanto no son paralelas, pues no cumplen con la respectiva definición, (esta definición es tomada en cuenta desde la geometría plana) de ahí entonces que la afirmación inicial que sustentaba que las rectas en cuestión eran paralelas, constituyó un error.

Con respecto a la relación de perpendicularidad, se tiene que muchos veces visualmente dos segmentos que se intersecan entre sí, parecen formar un ángulo de noventa grados, lo cual llevaría a afirmar que estas son perpendiculares, y que la imagen y el concepto concuerdan, pero cuando se realiza un análisis detallado de esta imagen, ya sea porque se mide el ángulo formado en la intersección o porque se comprueba de otro modo, se llega a la conclusión que el ángulo en mención es mayor o menor de noventa grados, y que por lo tanto la afirmación inicial acerca de la relación de perpendicularidad, resulta ser errada y por lo tanto la imagen y el concepto no se integran para formar una figura geométrica que ilustre la relación de perpendicularidad.

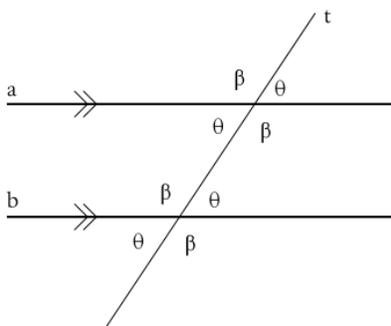
2.3 DEFINICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Teniendo en cuenta que el presente trabajo busca indagar por el papel de las representaciones semióticas en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad desde la geometría plana, dado el grado de escolaridad en el que se realizó el trabajo, se presentan a continuación las respectivas definiciones tenidas en cuenta

Relación de perpendicularidad



La semirrecta AB es perpendicular a la recta CD, porque los dos ángulos que conforma son de 90 grados



Relación de paralelismo

Dos rectas, contenidas en un plano, son **paralelas** cuando no se cortan ni aun en sus prolongaciones.

2.4 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN: LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Este trabajo se enmarca bajo la metodología de investigación denominada ingeniería didáctica la cual surge en la didáctica de la matemática francesa, como “una metodología para analizar las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de situaciones didácticas y de la transposición didáctica;”, las cuales consideran la didáctica de las matemáticas como “el estudio de las interacciones entre un saber, el sistema educativo y los alumnos.” Esta se utiliza en la didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza.”

Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza por “un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas”. Y por “un registro de los estudios de caso y por la validación basada en la confrontación de un análisis a priori y a posteriori”.

Se compone de cuatro fases a saber.

Primera fase: análisis preliminares, segunda fase: concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Tercera fase: experimentación. Cuarta fase: análisis a posteriori y evaluación.

Se eligió esta metodología de investigación por considerarla pertinente pues la idea inicial sobre el tema de investigación estuvo acompañada por el interés suscitado por las propuestas sobre la didáctica de las matemáticas de la escuela francesa; en lo que se refiere en particular a la teoría de las situaciones didácticas, el contrato didáctico y al rol que desempeñan dentro de cada una de estas propuestas; el alumno, el docente y el conocimiento.

FASE TRES: EXPERIMENTACIÓN

Ésta fase de intervención se realiza teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas planteadas por la escuela Francesa, bajo la influencia de Guy Brousseau y descritas la fase dos de este trabajo.

3.1 SITUACIÓN DIDÁCTICA UNO

ESTÁNDAR RELACIONADO

Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

LOGRO

Identifico las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en diversas representaciones que se encuentran al interior de un mismo sistema.

DESCRIPCIÓN

Esta situación didáctica va dirigida a los estudiantes del grado sexto B de la Institución Educativa Fe y Alegría Nueva Generación del Municipio de Bello Antioquia. Obedece a los planteamientos de Raymond Duval sobre la actividad cognitiva de tratamiento que moviliza una representación semiótica.

Fue diseñada teniendo presente tres grados de complejidad, de acuerdo con una clasificación realizada por parte de la docente encargada del trabajo, acerca de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Servirá además, para realizar los análisis a posteriori de la situación didáctica con respecto al desempeño que cada estudiante tuvo cuando fue realizada.

MATERIALES

Los materiales empleados para la situación son guías para el estudiante diseñadas de modo tal que permite a éste indicar las respuestas que considera correctas en la prueba sin la necesidad de recurrir a hojas alternas. En cada una se describe detalladamente los pasos a seguir para dar solución a la misma.

ANÁLISIS A PRIORI Y PROPÓSITOS

La clasificación surge a partir de la tarea de pensar de cuántas figuras geométricas diferentes se puede valer un sujeto para representar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad; y después realizar las respectivas representaciones, y así observar las propiedades comunes de cada representación.

Una vez efectuada la tarea, el segundo paso fue realizar una búsqueda de autores en cuyos trabajos se dedicara tiempo al análisis de las propiedades que se encontraron de común en cada una de las representaciones hechas, de modo tal que permitiera predecir en cierta medida los resultados obtenidos por cada estudiante, una vez puesta en marcha la situación didáctica.

RELACIÓN DE PARALELISMO

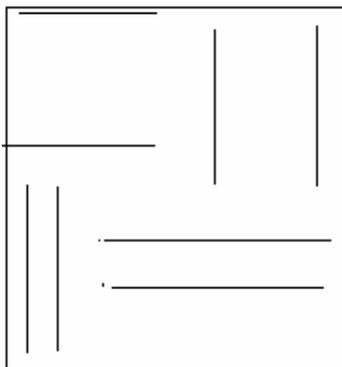


Fig.2

Grado de complejidad uno: Rectas paralelas con ubicación vertical, horizontal y alineada

En este grado de complejidad se espera que se ubiquen la gran mayoría de los estudiantes, puesto que son las formas como tradicionalmente los libros de texto han presentado las figuras que ilustran la relación

de paralelismo entre dos rectas, por lo que se piensa entonces, que los estudiantes están más familiarizados con las representaciones que se presentan en el grado de complejidad.

Por otro lado Según Piaget e Inhelder, el desarrollo de sistemas de referencia se funda en la capacidad natural de utilizar el que ellos describen como “marco de referencia natural” a saber, el correspondiente a la horizontal y vertical. Desde esta

perspectiva se puede inferir en consecuencia que para los estudiantes es más fácil reconocer y representar la relación de paralelismo, si ellas se remiten a las posiciones descritas por estos autores.

Por último la propiedad de alineación de las rectas, favorece visualmente la figura geométrica y la hace parecer una representación pertinente de la relación de paralelismo.

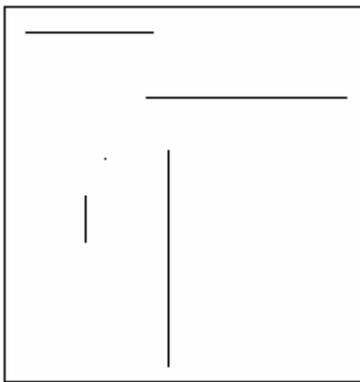


Fig.3

Grado de complejidad dos: Rectas paralelos con ubicación vertical, horizontal con distinta longitud y no alineadas

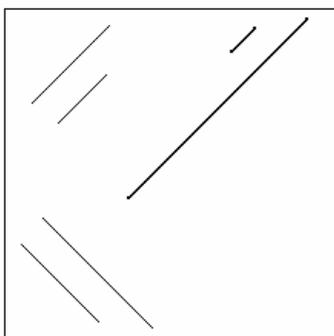
De igual manera que en el grado uno de complejidad, los segmentos guardan una posición vertical y horizontal por lo que el análisis anterior con respecto

a la ubicación horizontal y vertical es pertinente para este grado. Ahora bien la diferencia entre las longitudes de los segmentos se analiza teniendo en cuenta los estudios realizados por Piaget con respecto a la conservación de la longitud. Pues al respecto en el test clásico de conservación de longitud (1969) se presentan segmentos de recta paralelos, en la primera figura las longitudes son iguales y en la segunda figura las longitudes son distintas; en el análisis realizado por el autor se llegó a la conclusión que los niños sólo a partir de cierta edad desarrollan la

conservación de la longitud; por lo que se infiere entonces que ésta no constituye algo tan natural para el sujeto sino una cuestión que requiere tiempo para su desarrollo. Por lo anterior, se esperaría que a los estudiantes les sea más difícil identificar rectas paralelas cuando las longitudes de las mismas son distintas.

En el mismo sentido “podría decirse que los niños le añaden una característica a la relación de paralelismo y es de tener los dos segmentos igual longitud”.

Con respecto a la no alineación de las rectas se tiene que en esta representación se podrían ocasionar confusiones en el estudiante, puesto que la propiedad de la figura no es tan evidente a primera vista, y como consecuencia se podría generar la separación entre figura y concepto. Al respecto Efraím Fischbein en su teoría de los conceptos figurales, afirma que “Las figuras geométricas tienden a retener e imponer en el proceso de razonamiento sus llamativos rasgos aparentes de acuerdo con las restricciones de representación gráfica. En consecuencia el control conceptual (axiomático deductivo) es reducido y el proceso de resolución o de interpretación se vicia.” (Fischbein, 2006).



Grado de complejidad tres: Rectas paralelas y oblicuas con distinta longitud.

En este grado de complejidad se encuentra que la representación de la relación de paralelismo puede no

Fig. 4

ser evidente para los estudiantes del grado sexto, puesto que los segmentos se encuentran en posición oblicua y con distinta longitud entre las rectas que se relacionan, además porque no corresponden a las representaciones tradicionales.

Al respecto, Linda Dickson describe que en uno de los estudios realizados por Kerslake con niños entre los cinco y once años de edad se llega a la conclusión que para ellos “parece como si la igualdad de longitud de segmentos fuera condición necesaria para paralelismo”. Por otro lado con respecto a la posición (en este caso oblicua) se tiene que la misma Linda Dickson describe que “Fisher estudio las querencias de los alumnos a favor de las figuras “derechas” figuras inclinadas solamente o mezcladas de unas y otras. Esta profesora descubrió que incluso quienes enseñaban utilizando solamente figuras inclinadas encontraban más fáciles las figuras derechas y que en general la preferencia por las figuras derechas era mayor cuando aparecían ángulos rectos. Lo cual sugiere que el efecto puede ser debido a tendencias naturales más que a la instrucción, aunque como es obvio, no pueden ser descartados los efectos de la instrucción anteriormente recibida. Por lo anterior se esperaría que el porcentaje de estudiantes que respondan correctamente la actividad que hace referencia a este punto sea menor.

RELACIÓN DE PERPENDICULARIDAD

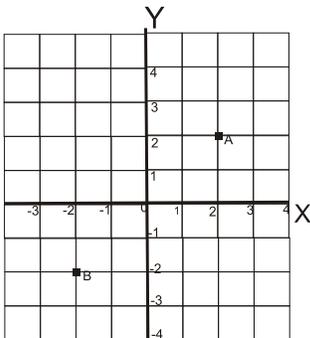


Fig. 5

Para explicar los grados de complejidad de las relaciones de perpendicularidad se toma como punto de referencia la presentación tradicional del plano cartesiano.

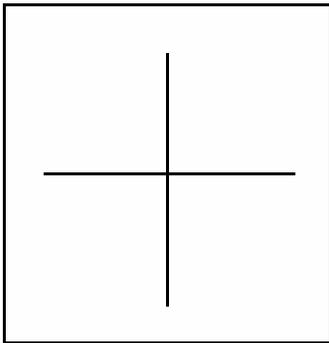


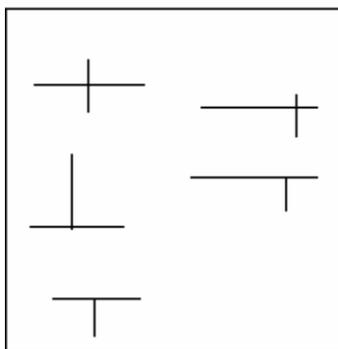
Fig. 6

Grado de complejidad cuatro: Rectas con igual longitud. En posición según el plano cartesiano conservando los cuatro cuadrantes, (horizontal y vertical)

En este grado de complejidad se representa la relación de perpendicularidad con dos segmentos cuyas longitudes son iguales, y cuya posición obedece a la presentación tradicional de figuras para representar la relación. Al igual que en el paralelismo se puede inferir que la posición horizontal y vertical de los segmentos que guardan dicha relación no ofrece mayores dificultades en el reconocimiento de la relación de perpendicularidad entre los dos segmentos, por las razones que se retoman de los autores Piaget e Inhelder citados con anterioridad. Por otro lado se tiene que en las investigaciones presentadas en el texto Didáctica de las matemáticas de Linda Dickson y otros autores se encuentra que los estudiantes

tienen una tendencia a asociar la perpendicularidad con la posición vertical de los segmentos pues se encontró por ejemplo que los niños al presentarles un segmento vertical, otros dos en posición oblicua y una tercera figura que relacionaba dos segmentos uno horizontal y el otro en posición oblicua; para referirse a la relación de paralelismo decían cosas como esta: “porque la perpendicular cae verticalmente”. Porque está en posición vertical”. “porque cae en línea recta”.

Por las anteriores razones se esperaba que la gran mayoría de los estudiantes acertaran la respuesta correcta de esta representación de perpendicularidad.



Grado de complejidad cinco: Rectas con distinta longitud. En posición según el plano cartesiano conservando dos y cuatro cuadrantes, (horizontal y vertical)

Fig. 7

El grado de complejidad es similar al anterior en el sentido de conservar los segmentos en posición vertical y horizontal, la diferencia del mismo radica en que se contemplan dos y cuatro cuadrantes con respecto al plano cartesiano y que las longitudes de los segmentos que relacionan son distintas . En este último sentido el

análisis que haría de este aspecto es el que se hace en el grado de complejidad anterior.

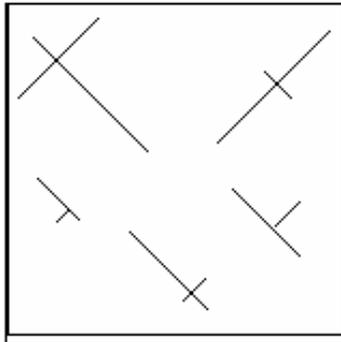


Fig.8

Grado de complejidad seis: Rectas con distinta longitud. En posición según el plano cartesiano conservando dos y cuatro cuadrantes y cuyos segmentos están en posición oblicua.

El grado de complejidad muestra la relación de perpendicularidad entre segmentos de recta conservando dos y cuatro cuadrantes del plano cartesiano, y en donde las longitudes de los segmentos son distintas. Como ya se mencionó antes existe una dificultad en los niños en la conservación de la longitud de los segmentos, se tiene una tendencia a asociar lo perpendicular con la verticalidad. Lo que ocasiona mayores dificultades en el reconocimiento de esta representación como pertinente para ilustrar la relación de perpendicularidad puesto que se alejan de las representaciones tradicionales que utilizan los estudiantes y los libros de texto del grado sexto, por otro lado porque visualmente los ángulos formados por las rectas visualmente parecieran no ser de noventa grados.

Por último al respecto del grado de complejidad, resulta importante presentar el resultado de un test. Citado por Linda Dickson el texto didáctica de las matemáticas y realizado por Kerlake. En el cual se presentaron unas figuras a estudiantes de

secundaria que ya habían recibido clases de geometría y con respecto a las cuales se les hizo la pregunta, ¿Cuáles de las rectas son paralelas? obteniendo los resultados que se muestran en la figura 9 en los que se puede observar que las representaciones que obedecen a rectas en posición oblicua, los resultados son más bajos mientras que los que son en posición horizontal y vertical, los porcentajes son más altos.

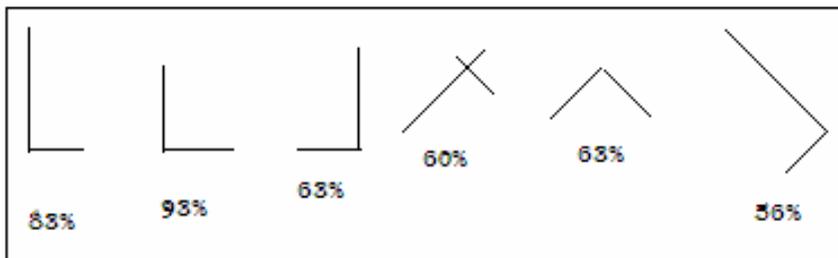


Fig. 9

GUÍA PARA EL ESTUDIANTE

INSTITUCIÓN EDUCATIVA FE Y ALEGRÍA NUEVA GENERACIÓN

Formando para el amor y la vida

Actividad sobre representación de Segmentos paralelos y perpendiculares

GRADO: *SEXTO B* JUNIO ____ DE 2008

NOMBRE DEL ESTUDIANTE _____

1. Señala con una x la casilla donde consideras que los segmentos son paralelos.

2. Señala con una **x** la casilla donde consideras que los segmentos que son perpendiculares.

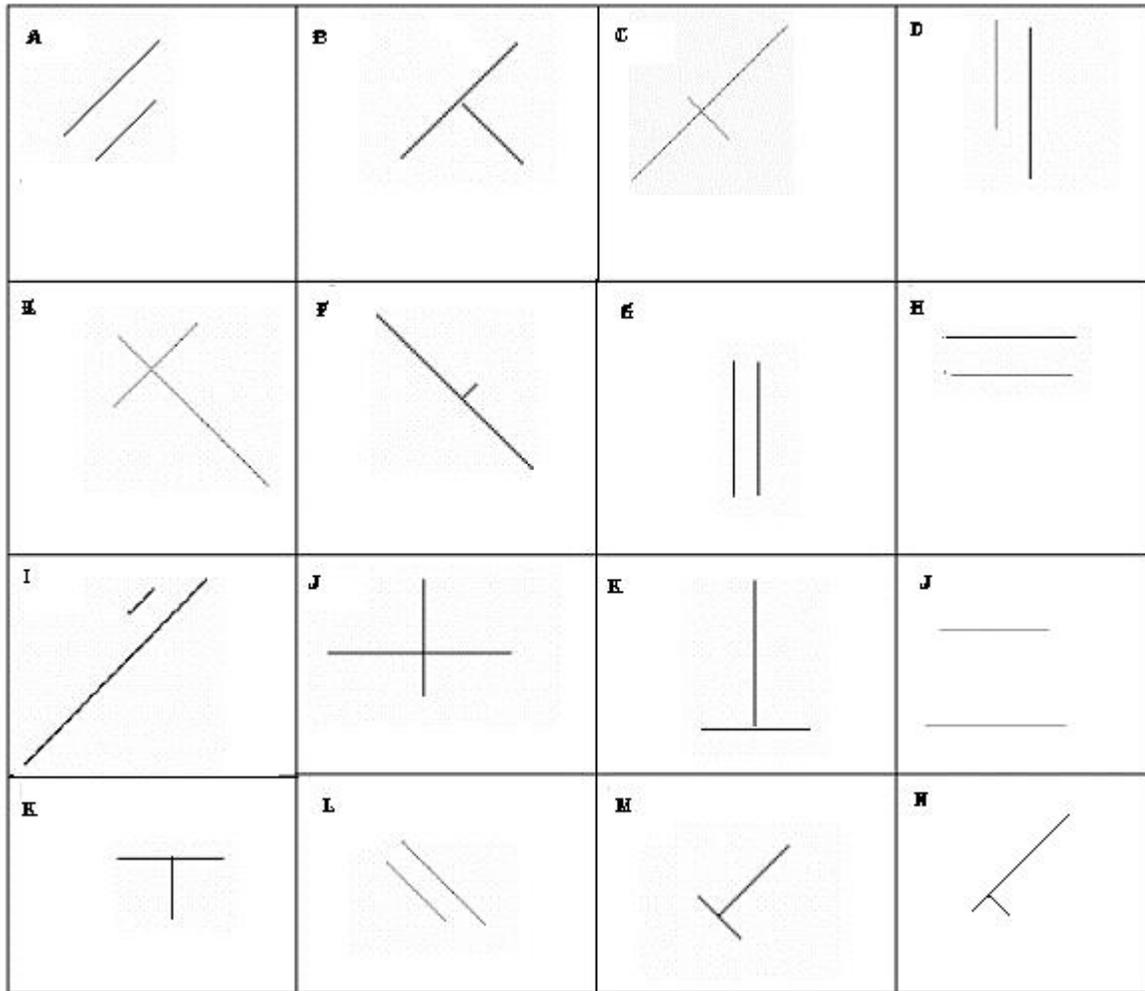


Fig.10

ANÁLISIS A POSTERIORI

Para el presente análisis de la situación didáctica uno, con el propósito de optimizar el corto tiempo que dura el trabajo se tomó una muestra de diez estudiantes los cuales, fueron elegidos al azar con el objetivo de no privilegiar alguna respuesta.

Estudiante #1	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	acierto	2de3
Grado 4	Desacierto	El total
Grado 5	Desacierto	El total
Grado 6	Desacierto	El total
Estudiante # 2	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	Desacierto	El total
Grado 4	Desacierto	El total
Grado 5	Desacierto	El total

Grado 6	Desacierto	El total
Estudiante # 3	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	acierto	El total
Grado 4	Acierto	El total
Grado 5	acierto	El total
Grado 6	acierto	El total
Estudiante # 4	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	acierto	El total
Grado 4	acierto	El total
Grado 5	acierto	El total
Grado 6	acierto	El total
Estudiante # 5	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	Desacierto	El total
Grado 4	Desacierto	El total

Grado 5	Desacierto	El total
Grado 6	Desacierto	3 de 4
Estudiante #6	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	acierto	El total
Grado 4	acierto	El total
Grado 5	acierto	El total
Grado 6	acierto	El total
Estudiante #7	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	Desacierto	2 de 3
Grado 4	Desacierto	El total
Grado 5	Desacierto	El total
Grado 6	Desacierto	El total
Estudiante # 8	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	Desacierto	El total

Grado 4	Desacierto	El total
Grado 5	Desacierto	El total
Grado 6	Desacierto	El total
Estudiante # 9	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	Desacierto	El total
Grado 4	Desacierto	El total
Grado 5	Desacierto	El total
Grado 6	Desacierto	El total
Estudiante #10	ACIERTO /DESACIERTO	Detalle (cantidad de respuestas acertadas)
Grado 1	acierto	El total
Grado 2	acierto	El total
Grado 3	acierto	El total
Grado 4	acierto	El total
Grado 5	acierto	El total
Grado 6	acierto	El total

En los grados de complejidad uno y dos se encontraron que el 100% de los estudiantes acertaron en cada una de las actividades realizadas. De acuerdo con los propósitos de la situación didáctica se tiene que los estudiantes manifiestan haber desarrollado la habilidad de reconocer rectas ubicados en un marco de referencia natural el correspondiente a la horizontal y vertical. Por otro lado también se encontró que éstos mismos dan muestras de haber desarrollado lo que en términos de Piaget se denomina la conservación de la longitud puesto que en la situación se encontró que cuando se hace referencia a éste aspecto no se evidencian dificultades.

En el grado de complejidad tres se encontró que el 60% de los estudiantes acertó la respuesta y el 40% restante no. Al parecer los estudiantes igualmente a lo que se esperaba en los propósitos, poseen mayor grado de dificultad con la posición oblicua de los segmentos.

Al respecto de los grados de complejidad cuatro y cinco se encontró que el 50% de los estudiantes dieron una respuesta correcta a lo que se pedía en los dos grados, en donde los segmentos perpendiculares obedecían a una posición horizontal y vertical al parecer según lo que se esperaba encontrar, los estudiantes tienen una tendencia a reconocer más fácilmente segmentos en las posiciones mencionadas.

Por su parte en el grado de complejidad seis al igual que en los dos anteriores se encontró que el 50% de los estudiantes hace un reconocimiento de dichas

relaciones; como se esperaba el porcentaje es bajo, dado que las rectas están en posición oblicua.

En los grados de complejidad cuatro, cinco y seis, se encontró que los resultados obtenidos en la muestra analizada generan cierta confusión puesto que según los propósitos se esperaba mayor acierto en los grados de complejidad cuatro y cinco con respecto al grado de complejidad seis por las razones ya expuestas, además según los autores referenciados para los casos, se hace más fácil el reconocimiento de la relación de perpendicularidad cuando obedecen a una ubicación en posición horizontal y vertical, que a una posición en forma oblicua. Por lo que se hace necesario realizar otra situación didáctica que permita aclarar los resultados que involucran las representaciones de la relación de perpendicularidad.

A propósito de las posibles confusiones generadas al analizar los resultados obtenidos en estos grados de complejidad se encontró en entrevistas informales realizadas posteriormente, los niños manifestaron confusiones en las representaciones que hacen referencia a las relaciones de perpendicularidad pues no poseen claridad con la medida del ángulo que se debe formar para que un segmento sea perpendicular con respecto a otro, lo que llevaría a pensar que esta fue la causa de lo equitativo de los resultados. De ahí entonces que este será un aspecto a tener en cuenta en la realización de la siguiente situación didáctica.

CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA UNO

En segmentos cuyas posiciones son las correspondientes a la horizontal y vertical se hace más fácil el reconocimiento de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, haciendo la salvedad que se obtiene mayor grado de aciertos en la relación de paralelismo que en la relación de perpendicularidad, por las diferencias inherentes a cada una.

No se posee por parte de los estudiantes una claridad con respecto a la relación de perpendicularidad entre dos segmentos al parecer por la no identificación de lo particular del ángulo formado entre dos rectas, cuya condición es necesaria para que la relación se cumpla.

Las hipótesis de los autores tomados en la clasificación por grados de complejidad, de las rectas paralelas y perpendiculares son evidenciables en gran medida puesto que efectivamente como se describió, estos son evidenciables en los resultados obtenidos en la situación.

3.2 SITUACIÓN DIDÁCTICA DOS

ESTÁNDAR RELACIONADO

Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

LOGRO

Reconozco y describo a partir del carácter perceptual de las figuras las condiciones necesarias y suficientes desde la geometría plana, para que se den las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

DESCRIPCIÓN

Para el desarrollo de la siguiente situación didáctica se entregará a los estudiantes una guía, en donde se indica detalladamente a cada estudiante las actividades que debe realizar. Se divide en dos momentos:

El primer momento está compuesto por una actividad de campo, que se realiza por parte del conjunto de estudiantes, en la cancha de fútbol de la institución. Para la realización de la actividad se pide a dos estudiantes que fueron previamente elegidos por sus compañeros que recorran las diferentes representaciones de las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y de segmentos que se interceptan

sin guardar una relación de perpendicularidad, los cuales fueron previamente representadas por parte de la docente que dirige la situación didáctica sobre el terreno de la cancha de fútbol con el objetivo que el resto de los estudiantes del grupo se ubicaran en los alrededores y observaran con detenimiento a sus compañeros cuando recorran cada una de las representaciones.

El segundo momento se compone por una actividad individual realizada en el aula de clase, en donde se presenta una serie de preguntas sobre las que el estudiante debe reflexionar y las cuales recogen los aspectos fundamentales de la actividad de campo realizada en la cancha de fútbol.

MATERIALES

Los materiales empleados son guías para el estudiante, la cancha de fútbol, lazos y tiza. Las guías orientan a cada estudiante sobre las actividades a realizar, la cancha de fútbol es el lugar donde se lleva a cabo el primer momento descrito en la guía del estudiante, finalmente los lazos y la tiza se emplean por parte de la docente que dirige la situación didáctica para representar las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y de segmentos que aunque se interceptan no son perpendiculares, sobre el terreno de la cancha de fútbol.

ANÁLISIS A PRIORI

Esta situación didáctica pretende realizar un trabajo con el estudiante en un contexto que le permita poner en juego nuevas experiencias y percepciones en relación con las nociones objeto de intervención.

Se prevé que el hecho de colocar rectas sobre el plano que forma la cancha de fútbol, permite que el estudiante resignifique el sentido de infinitud pues este contexto ayuda a la imaginación de los estudiantes a suponer la continuidad de las rectas extendidas en el horizonte hasta infinito dándole de algún modo en el contexto un carácter perceptual y sensorial a partir de las figuras que se encuentran plasmadas sobre el terreno de la cancha de fútbol, de modo que con ello el estudiante pueda realizar abstracciones que le permitan avanzar en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

Con estas nociones se pretende, para el caso de la relación de paralelismo que el estudiante pueda comprender que lo esencial allí, es que por más que dos o más rectas se prolonguen, nunca éstas, tendrán un punto en común, y que para el caso de la relación de perpendicularidad, el estudiante comprenda que lo esencial en ésta, es que existe una intersección, pero que no es una cualquiera, sino que es una muy particular en donde el ángulo que se forma debe ser un ángulo de 90° .

Por otro lado se pretende mostrar al estudiante que los conceptos de paralelismo y perpendicularidad se pueden comprender a través de idealizaciones de situaciones de la vida cotidiana que se pueden percibir, y que pueden ocurrir por ejemplo cuando alguien camina, es decir, se podría pensar que la persona lo hace en línea recta guardando una relación de paralelismo o de perpendicularidad con otro objeto que se mueve también en línea recta. Así estas idealizaciones se constituyen en una forma de permitirle al estudiante comprender las relaciones pues en términos de Vigotsky el conocimiento se genera como producto del paso de lo percibido a lo representado.

Ahora bien, el énfasis sobre lo perceptual y lo sensorial de la figura se considera en esta situación, también obedeciendo a los planteamientos de Fischbein, el cual es uno de los autores considerados en el marco referencial de este trabajo, y en cuyos planteamientos se menciona que las figuras geométricas son “entidades mentales” llamadas “conceptos figurales “ que se componen de un concepto y de una imagen; imagen que se encuentra provista de propiedades espaciales y perceptuales como forma posición y tamaño que permiten realizar abstracciones de un concepto.

Cabe aclarar que en esta situación didáctica se prestó especial atención sobre el tipo de nociones que se pretendía que el estudiante percibiera en cada representación y el objetivo de las mismas, con el fin de evitar que en algún

momento otras propiedades de la figura se interpusieran y causaran interpretaciones erradas que llevaran a desligar la imagen del concepto, pues como lo menciona Fischbein la relación entre imagen y concepto es una relación que puede ocasionar "tensiones internas" en un estudiante.

Para lograr los propósitos planteados se pretende que el estudiante pueda describir lo que percibe cuando sus compañeros recorren las representaciones puestas sobre la cancha. Clasificar las rectas que se intersecan, aparte de las que no. Dibujar un ángulo de 90° que le sirva para realizar una clasificación de los segmentos que se intersecan formando un ángulo de igual medida.

GUÍA PARA EL ESTUDIANTE

INSTITUCIÓN EDUCATIVA FE Y ALEGRÍA

NUEVA GENERACIÓN

Formando para el amor y la vida

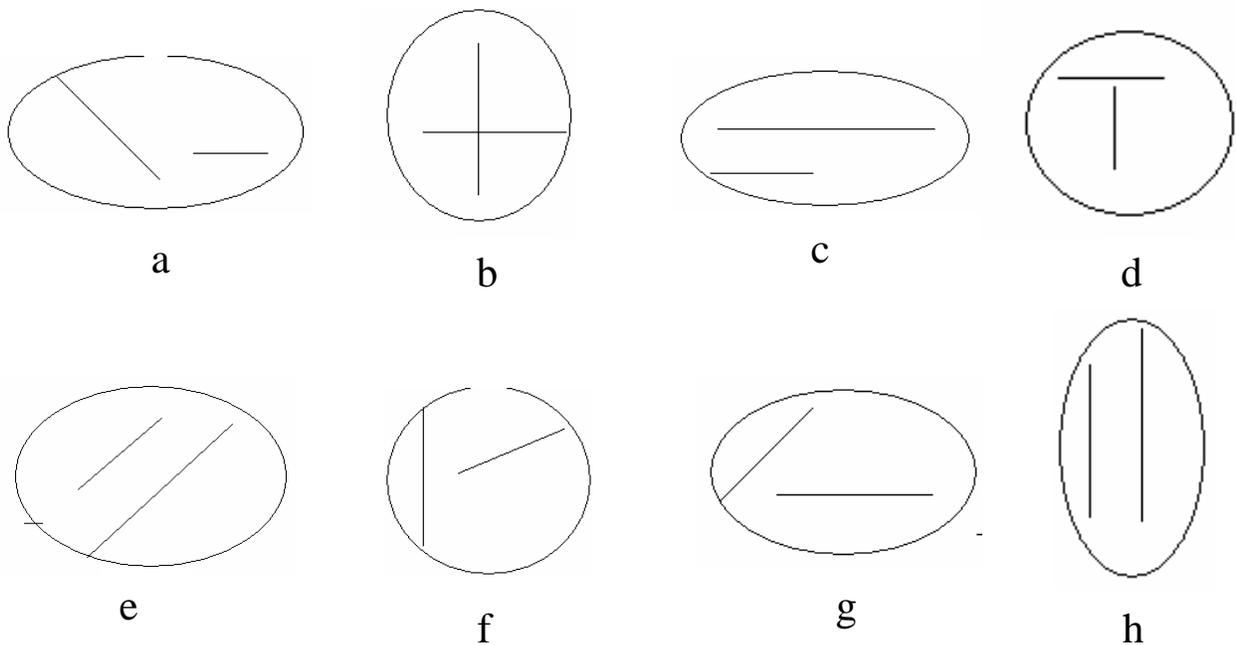
Actividad # 2: Representación de Segmentos paralelos y perpendiculares

GRADO: *SEXTO B* AGOSTO ____ DE 2008

NOMBRE DEL ESTUDIANTE _____

ACTIVIDAD 1

1. Dirígete a la cancha de fútbol.
2. Estando allí, con ayuda de todo el grupo elige dos compañeros.
3. Si no eres de los compañeros elegidos, ubícate alrededor de los dos elegidos.
4. Observa los pares de segmentos a, b, c, d, e, f, que se encuentren dibujados sobre la superficie de la cancha de fútbol; observa que son tal cual como lo indican las siguientes figuras.



5. Observa a los dos compañeros elegidos para recorrer las figuras, cuando ellos lo hagan sobre los segmentos que están dibujados en la cancha, según las instrucciones, del docente.

6. Entra nuevamente al salón de clase.

7. Observa los dibujos que se encuentran en el numeral cuatro y describe lo sucedido cuando los dos compañeros elegidos recorrían estos segmentos que también estaban dibujados en la cancha, especificando lo sucedido en cada caso.

8. Dibuja en una hoja los segmentos que se intersecan (también en sus prolongaciones) y en otra diferente los que no se intersecan.

9. Responde las siguientes preguntas: ¿si prolongáramos un poco más los pares de segmentos que no se intersecan seguirían sin hacerlo?

¿Porque?

10. Dibuja un Angulo de 90° con la ayuda de un transportador y una regla.

11. Toma la hoja donde tienes los segmentos que se intersecan y compara los ángulos que se forman en cada uno, con el ángulo de 90° . Dibuja cuales de los pares de segmentos forman un ángulo igual y describe cómo crees que se le llama a este hecho.

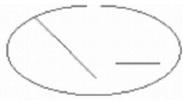
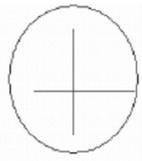
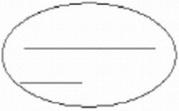
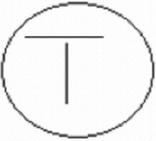
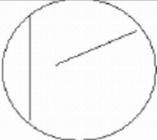
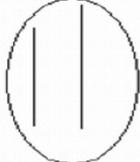
ANÁLISIS A POSTERIORI

Con respecto al numeral siete el 100% de los estudiantes realizó una descripción de lo observado en cada figura, lo que constituye un logro pues los estudiantes plasmaron en el papel sus ideas acerca de lo que percibieron en cada representación y se atrevieron a explicar el por qué consideran que los estudiantes que recorrieron las figuras se “chocaron” en unos casos y porque en otros no.

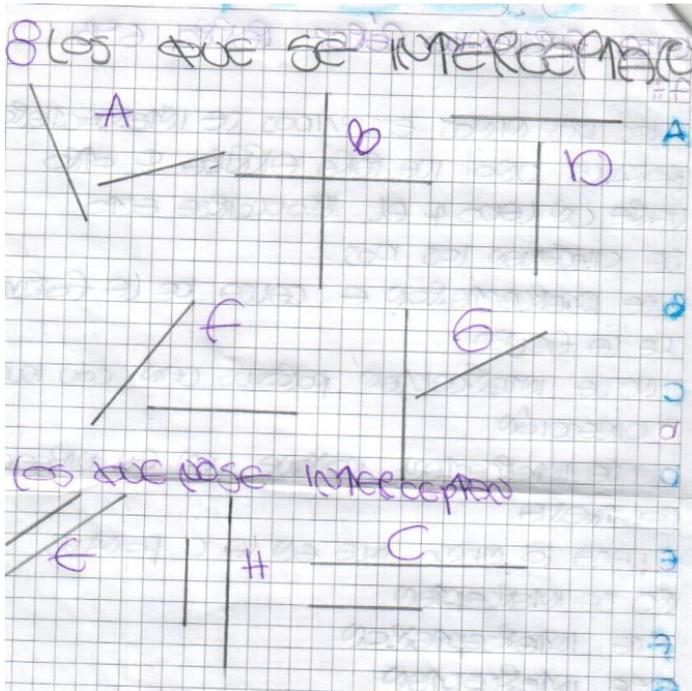
Numeral siete

En este numeral se rescata el hecho que los estudiantes al recorrer la rectas que se cruzan, asocian la noción de intersección con la noción de chocar. Se cree que el hecho que los estudiantes expresen con palabras lo observado en las figuras, en alguna medida se está permitiendo el paso de un sistema de representación dado en términos de figuras a otro sistema que es el lenguaje natural y con respecto a las relaciones objetos de intervención. En otras palabras como dice Duval se estaría realizando una actividad de “conversión “entre sistemas de representación.

A continuación se cita las descripciones realizadas por parte de una de las estudiantes con respecto al numeral 7

	<p>Figura a “las dos personas se chocan por que una iba para abajo y la otra a la derecha, llegando a una intercepción”</p>
	<p>Figura b “las dos personas chocaron porque las líneas iban en forma de cruz, así iba una a la derecha y una hacia abajo formando un intercepción”</p>
	<p>Figura c “las dos personas no se chocan porque las líneas paralelas no se encuentran “</p>
	<p>Figura d “las dos personas se chocan porque al cruzar una persona hacia arriba y la otra hacia el lado, se encuentran”</p>
	<p>Figura e “las dos personas no se chocan porque las líneas paralelas van las dos para la misma dirección”</p>
	<p>Figura f “las personas se chocan porque una va hacia arriba y la otra va hacia abajo y otro a la derecha causando una intercepción</p>
	<p>Figura g “las dos personas se chocan porque una línea esta derecha y la otra esta volteada”</p>
	<p>Figura h “las dos personas no se chocan porque las líneas son rectas”</p>

Numeral ocho



En este numeral se encontró que el 100% de los estudiantes realizó una clasificación correcta de las rectas que se intersecan (Fig.11), a parte de las que no. Se rescata el hecho que todos los estudiantes lograron realizar las conversiones

Fig. 11

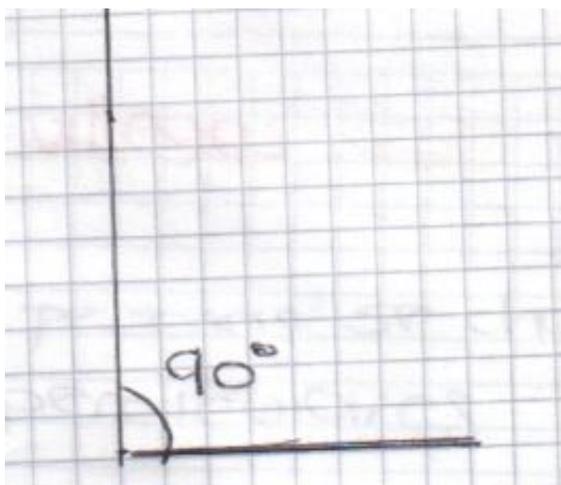
correspondientes entre las representaciones figurales puestas en juego en la actividad y sus respectivas descripciones correspondientes en el lenguaje natural lo que indica que los estudiantes a través de la actividad terminaron asociando las nociones a las representaciones, lo que puede implicar desde el punto de vista didáctico que se hace necesario entonces, tener especial cuidado por parte del docente que orienta el proceso de aprendizaje, de modo que se posibilite que el estudiante utilice muchas formas de representación para un concepto, con el fin de evitar que se termine asociando un concepto sólo a un tipo de representación y se ocasione una confusión entre representante y representado.

Numeral nueve

Se encontró que con respecto a las preguntas ¿si prolongáramos un poco más los pares de segmentos que no se intersecan seguirían sin hacerlo? ¿Porque?, El 100% de los estudiantes respondió afirmativamente, aunque las razones expuestas para ésta afirmación, no son claras pues se encuentra que no se maneja un lenguaje matemático adecuado que les permita describir con sus propias palabras pero correctamente la relación de paralelismo.

Algunas de las respuestas de los estudiantes son: “si porque son líneas paralelas y aunque se junten siempre van a ser paralelas” “si seguirán sin intersecarse porque llevan igual dirección”

Numeral diez



A la sugerencia de dibujar un ángulo de 90° el 90% de los estudiantes realizó la representación que se ilustra en la figura 12 y el 10% realizó la representación que ilustra la figura 13.

Fig.12

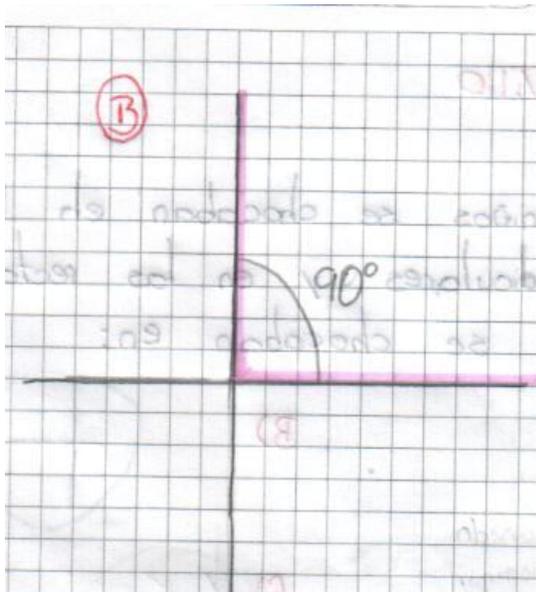


Fig.13

Nótese que en la figura 12 la estudiante dibuja el ángulo de 90° en una posición que como se describe en la situación didáctica uno, obedece a un marco de referencia horizontal y vertical, las rectas relacionadas son de igual longitud, no es una figura rotada en la que se permita ver el ángulo de una forma diferente a la presentada tradicionalmente en los libros de texto.

Además aunque en ésta representación se pueden identificar cuatro ángulos rectos, la estudiante sólo pinta el que se ilustra en el primer cuadrante del plano cartesiano, indicando con ello que no se identifican otros ángulos rectos en la figura.

La observación realizada en el numeral es bastante significativa para los objetivos de éste trabajo, pues en cierta medida permiten identificar cual es el papel que desempeñan las representaciones semióticas en la comprensión de la relación de perpendicularidad. En este sentido el hecho que todos los estudiantes hayan utilizado la misma representación del ángulo de 90° , se presta para pensar que ésta, es una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de la relación de perpendicularidad, la cual es un hecho que se

evidenció también en la situación didáctica uno, y que en esta situación dos se permite aclarar.

Por otro lado según los planteamientos de Raymond Duval citado en el marco referencial, se puede pensar que la dificultad encontrada en la situación didáctica uno, con respecto a la relación de perpendicularidad, es real para los estudiantes debido a que han asociado siempre el concepto de ángulo recto a un sólo tipo de representación lo que les ha ocasionado una confusión entre representante y representado, impidiendo así que se pueda avanzar hacia la comprensión de la relación de perpendicularidad pues parece que está asociada no a la relación en sí misma sino a la forma de las rectas de las líneas de las hojas del cuaderno y más aun en relación con los mismos bordes de la hoja que forman el ángulo recto, o que la noción de ángulo recto está asociado a la noción de “esquina” y ésta se forma en la condiciones descritas anteriormente en la hoja del cuaderno.

Numeral once

Con respecto a la que se pedía en éste numeral se encontró que el 20% de los estudiantes respondieron correctamente a lo que se planteó y que el porcentaje restante no ofreció ninguna respuesta.

En la figura 14 se ilustra una de las representaciones realizada por una de las estudiantes. Nótese que la estudiante nombró la representación como

perpendicular, lo cual significa un avance en la comprensión de la relación, aunque como se puede observar en la figura continúa siendo más representativo la identificación de la relación de perpendicularidad sólo en algunas representaciones, pues la identificación del ángulo recto formado en la intersección de las rectas sigue siendo limitado para las posibilidades que ofrece la figura, es decir, para el caso de la figura **b** se puede pintar el ángulo recto en cuatro partes diferentes y no sólo en una, como lo hizo la estudiante, mientras que en la figura **d** se puede pintar en dos partes y no en una sola.

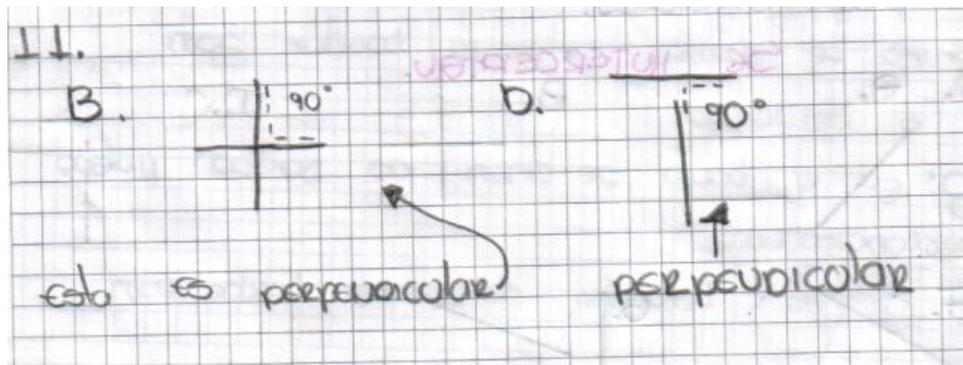


Fig.14

CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA DOS

La situación didáctica cumplió en gran parte los propósitos para los que fue diseñada, entre otros aspectos, porque tuvo una buena aceptación por parte de los estudiantes, quienes la realizaron juiciosamente no sólo disciplinariamente sino también utilizando sus conocimientos previos, su capacidad de percepción y análisis.

Se pudo confirmar que efectivamente como se previó en los análisis preliminares de esta situación didáctica dos, la dificultad en la comprensión de la relación de perpendicularidad, se debe a que los estudiantes no reconocen lo particular del ángulo de 90° formado en la intersección de las rectas y que esto se debe a que al parecer los estudiantes han asociado tanto el concepto de ángulo recto a una sola representación, a saber la que se ilustra en el primer cuadrante del plano cartesiano confundiendo así el objeto con su representación.

La situación arroja resultados importantes puesto que ellos permiten en parte dar respuesta al objetivo general de éste trabajo, pues en lo sucedido con los estudiantes con respecto a la relación de perpendicularidad, se deja entrever que el papel que cumplen las representaciones semióticas en la comprensión de la relación de perpendicularidad es fundamental.

Con respecto a la comprensión de la relación de paralelismo que tienen los estudiantes se encontró que aún es muy intuitiva, puesto que todavía no son capaces de expresarla con claridad.

Por último se tiene que en esta situación didáctica dos se pudo evidenciar la necesidad de centrar el énfasis en figuras más complejas, es decir, figuras en donde las relaciones de paralelismo y perpendicularidad se encuentren evidenciadas en más de dos rectas, además que sean figuras propias de la geometría plana y de las caricaturas. Esto con el objetivo de identificar como se desenvuelven los estudiantes en la comprensión de las relaciones, en éste tipo de figuras.

La inquietud suscitada para la realización de la siguiente situación didáctica tres surge como producto de lo descrito en los análisis a posteriori de la situación didáctica dos, en lo referente al numeral 10 y 11 en donde se encontró que las estudiantes a las que se hace referencia en la figuras 13 y 14 a pesar de evidenciar un ángulo recto en varias partes de la figura, sólo lo reconocen en dos de las seis partes en donde se encuentra presente.

3.3 SITUACIÓN DIDÁCTICA TRES

ESTÁNDAR RELACIONADO

Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.

LOGRO

Identifico las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en figuras propias de la geometría plana y en caricaturas, en donde es posible evidenciar no sólo las relaciones ya mencionadas sino también relaciones de tipo diferente.

DESCRIPCIÓN

La siguiente situación didáctica presenta tres figuras. Dos de ellas son caricaturas, en la caricatura 15 o figura 15, se pueden identificar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en varias de las partes que la componen, mientras que en la caricatura 16 o figura 16, no es posible identificar ninguna de estas relaciones, dado que la conforman en su totalidad líneas curvas.

Por su parte la tercera figura (Fig.17) está compuesta por tres polígonos. Los dos primeros son un cuadrilátero convexo semiregular, y un hexágono irregular, en donde es posible identificar relaciones de paralelismo y perpendicularidad. El

tercer polígono es un triángulo rectángulo escaleno donde es posible identificar por obvias razones sólo la relación de perpendicularidad.

MATERIALES

Los materiales empleados son guías del estudiante, lápiz y borrador.

ANÁLISIS A PRIORI

La situación didáctica tres pretende que los estudiantes identifiquen las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en figuras más complejas, es decir en figuras que no representan exclusivamente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, como es el caso de las figuras trabajadas en las dos situaciones didácticas uno y dos, sino que por el contrario son figuras en donde al interior de la misma es posible identificar en varios puntos las relaciones de paralelismo, además porque son figuras en las que se encuentran representadas otro tipo de relaciones diferentes a las de paralelismo y perpendicularidad

Además de lo anterior se pretende que el estudiante describa con sus propias palabras las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que se encuentran representadas en las figuras de la guía para el estudiante, lo que implica la utilización de dos sistemas de representación, uno que está dado en sentido figural, y que implica un reconocimiento perceptual, y el otro dado en el lenguaje natural y

que implica una descripción. Finalmente entonces, se pretende que el estudiante utilice estos dos sistemas, el figural y el lenguaje natural para expresar las mismas relaciones.

GUÍA PARA EL ESTUDIANTE

INSTITUCIÓN EDUCATIVA FE Y ALEGRÍA NUEVA GENERACIÓN

Formando para el amor y la vida

GRADO: SEXTO B octubre ____ DE 2008

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: _____

Actividad # 3: representando segmentos paralelos y perpendiculares

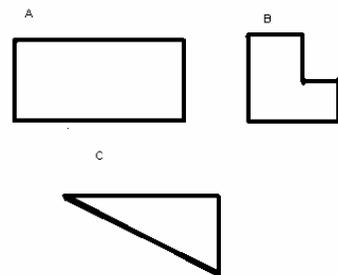
Figura 15



Figura 16



Figura 17



1. Observa la figura 15.

A) ¿Puedes observar segmentos paralelos y segmentos perpendiculares?

B) Describe cuales pares de segmentos son paralelos y cuales pares de segmentos son perpendiculares.

C) ¿Por qué crees que son paralelos?

D) ¿Porque crees que son perpendiculares?

2. Observa la figura 16.

A) ¿Puedes observar segmentos paralelos y segmentos perpendiculares?

B). En el punto anterior si tu respuesta es no explica porque; o si tu respuesta es si también explica porque.

3. Observa la figura 17

A) ¿Puedes observar segmentos paralelos y segmentos perpendiculares?

B) Describe cuales pares de segmentos son paralelos y cuales pares de segmentos son perpendiculares. En las figuras 3 a) 3b) y 3c)

ANÁLISIS A POSTERIORI

Figura 15

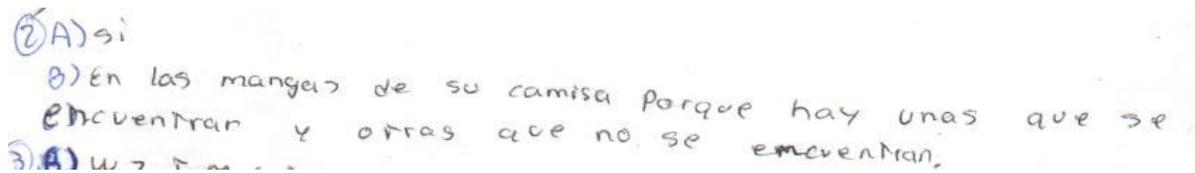


Se encontró con respecto a la figura uno que el 100% de los estudiantes manifestó haber observado las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Un 80% las identificó tanto en las rectas horizontales A y B como en las verticales C y D y un 20% de las identificó sólo en las rectas horizontales A y B, las cuales forman parte de la mesa del “mono” que se representa en la figura. Con respecto a la relación de perpendicularidad se encontró que un 60% de los estudiantes observó todas las combinaciones posibles de las rectas que son perpendiculares A y C, C y D, A y D, D y B. Un 40% sólo las evidenció entre las rectas A y C, D y B.

De igual manera hubo algunos estudiantes un poco más detallistas que manifestaron haber observado las relaciones de paralelismo en el lápiz del mono, en el objeto que tiene en la mano izquierda, y en las líneas que tienen las mangas de la camiseta del “mono”. Es de resaltar con respecto a esta parte que algunos estudiantes son bastante observadores de las representaciones que los docentes realizan y que no dejan pasar pequeños detalles, lo que significa que las representaciones figúrales son una forma efectiva de comprender los diferentes conceptos de la matemática, por lo que además como se ha dicho en la anterior

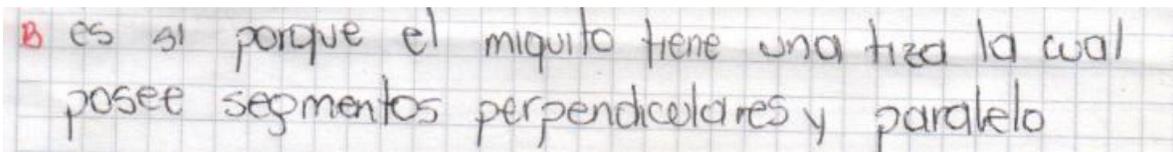
situación didáctica se debe prestar especial atención en el tipo y la variedad de representaciones que se utilizan para representar un concepto.

A continuación se presentan evidencias de lo ya descrito acerca de los detallistas que son los estudiantes.



a) "sí"

b) "En las mangas de su camisa porque hay unas que se encuentran y otras que no se encuentran"



"Es si porque el miquito tiene una tiza la cual posee segmentos perpendiculares y paralelo"

Con respecto a las preguntas

c) ¿Por qué crees que son paralelos? Y d) ¿Por qué crees que son perpendiculares? (los segmentos observados en la figura 15)

Se encontraron avances significativos, pues en un 80% los estudiantes fueron capaces de a partir de lo observado en las figuras describir con sus propias

palabras las relaciones de paralelismo y perpendicularidad aunque cabe aclarar que estas descripciones están en relación con el trabajo realizado en la situación didáctica dos, puesto que las descripciones de los estudiantes están en términos de la forma como se abordó en la situación didáctica dos, como se muestra a continuación por algunos estudiantes.

C) porque no se encuentran
D) porque se encuentran

“porque no se encuentra”

“porque se encuantran”

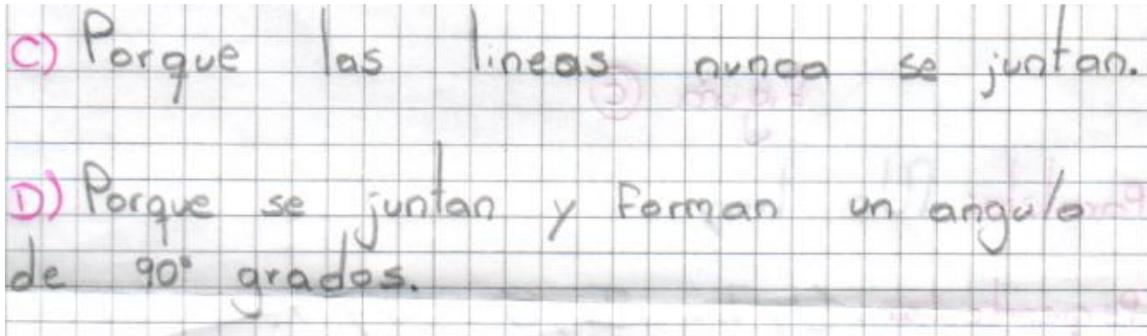
C) por que nunca se pueden encontrar aunque se extiendan

“porque nunca se pueden encontrar aunque se extiendan”

c) porque van en una misma dirección
d) porque se encuentran y forman un ángulo del 90%

“porque van en una misma dirección”

“porque se encuentran y forman un ángulo del 90%”



“porque la líneas nunca se juntan”

“porque se juntan y forman un ángulo de 90° grados”

El 20% restante de los estudiantes presentó dificultades para describir las relaciones de paralelismo y perpendicularidad pues al parecer no encuentran las palabras que en el lenguaje natural les permitan dar cuenta de éstas. Además porque muchos de ellos durante la realización de la situación didáctica tres preguntaron ¿Qué es paralelismo? ¿Qué es perpendicularidad?, como si nunca lo hubieran escuchado. Este olvido se podría entender en dos sentidos, primero porque parece más compleja la actividad de conversión entre diferentes sistemas es decir, se dificulta establecer una correspondencia entre las unidades significantes de cada sistema y en segundo lugar porque parece que el carácter perceptual de la figura tiende a fijarse más en la mente de los estudiantes, de ahí que es importante que se utilicen distintas formas de representar figuralmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad y que estas figuras si den cuenta

del concepto , como se menciona en la teoría de los conceptos figurales el estudiante en ciertas figuras se deja confundir por otros elementos que la constituyen y aun habiendo comprendido con anterioridad aspectos del concepto por el que se le pregunta , no sabe responder en determinado momento correctamente.

Figura 16

En esta figura se encontró que en un 90% los estudiantes no identificaron las



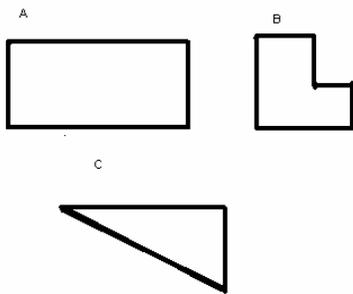
relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Pues como se había previsto en la figura no existen líneas rectas que guarden esta relación, pues a diferencia de la figura uno el “mono” de la figura 16 ya no tiene en sus manos ningún objeto, y el escritorio en el que escribía fue retirado, sin embargo hubo un 10% de los estudiantes

que observó la relación de paralelismo en las mangas de la camisa del “mono” y además siguió viendo los objetos que fueron retirados , como es el caso del lápiz y del objeto que tenía éste en la mano izquierda.

Para estos estudiantes sucede como si por el hecho de habérseles preguntado por la relación de paralelismo y perpendicularidad se les obligara a dar una respuesta positiva y no se pudiera responder con firmeza “es que no existen segmentos

paralelos y perpendiculares”. Además lo observado en la figura 15 tiende a fijarse en la figura 16.

Figura 17



Se encontró al igual que en los análisis a priori de la situación didáctica uno los estudiantes son dados a asociar paralelismo con horizontalidad y perpendicularidad con verticalidad como se evidencia la figura 14 realizada por parte de un estudiante, obsérvese que el estudiante nombra en cada uno de los polígonos como rectas paralelas sólo las que aparecen en posición horizontal y como rectas perpendiculares sólo las que aparecen en posición vertical.

Por otro lado con respecto a los polígonos presentados en la figura 17 se encontraron resultados positivos y variados, es decir, los estudiantes establecieron en su gran mayoría todas las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, presentes en la figura, que se había puesto como propósito en los análisis a priori de esta situación didáctica tres.

Por último se encontró que algunos estudiantes como producto de las situaciones didácticas anteriores han avanzado en el proceso de comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, pues no sólo las reconocen en la figura dada sino que también son capaces de reproducir sus propias representaciones desligadas de la figura dada, esto implica que su atención no se centra sólo en la figura sino también en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, como es el caso de una estudiante que realizó las siguientes representaciones, Fig.18 y 19

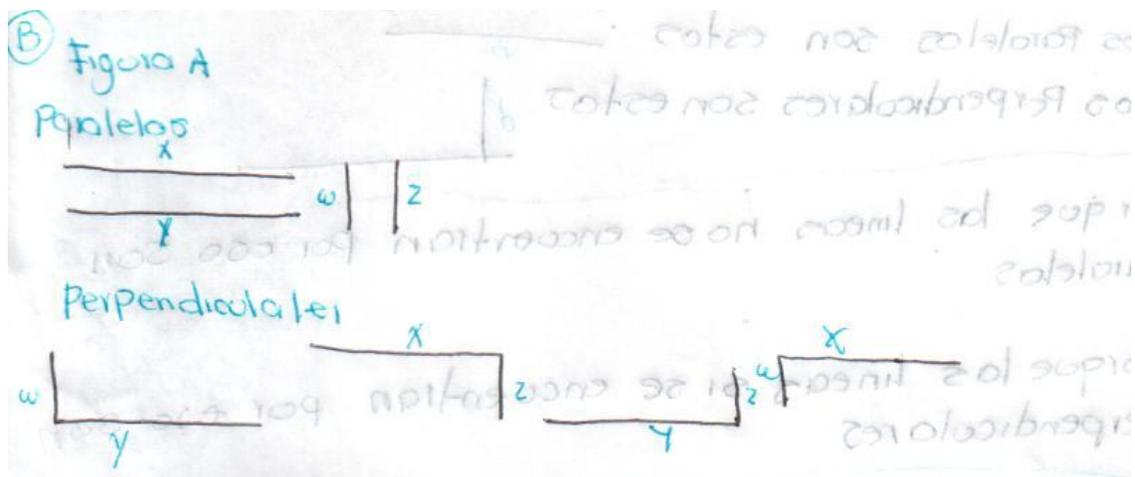


Fig.18

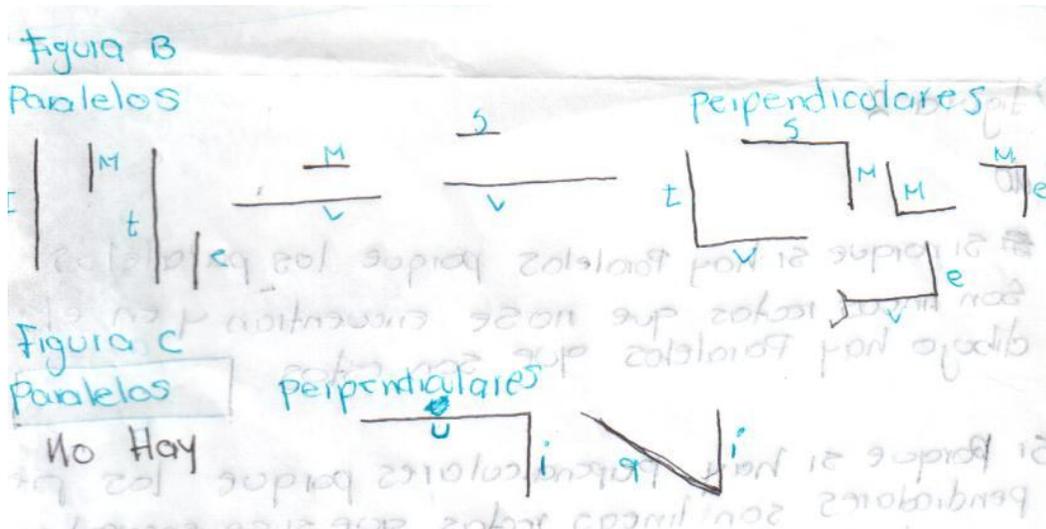


Fig. 19

CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA TRES

Se encontraron avances significativos en los estudiantes en la situación didáctica tres puesto que la gran mayoría lograron hacer buenas aproximaciones a las definiciones formales de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, haciendo uso del lenguaje natural, para describir las figuras en las que se representaron estas relaciones.

En esta situación didáctica tres se puso en evidencia que la situación didáctica dos tuvo un impacto positivo en los estudiantes, pues estos describieron las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en términos de la forma como se trabajó en ésta.

Se tuvo un avance significativo en cuanto a la relación de perpendicularidad, lo cual podría pensarse que debe sus frutos a la situación didáctica dos, pues algunos de los estudiantes escribieron en sus respuestas acerca de la relación de paralelismo que dos rectas son perpendiculares cuando “se juntan y forman un ángulo de 90° ”, esto es importante en la medida que sirve como evidencia que se logró aclarar a los estudiantes lo particular de la relación de perpendicularidad. Aspecto que fue el objetivo central de la situación didáctica y que se evidenció en los análisis a posteriori de la situación didáctica uno.

Por último se logró que algunos estudiantes se aproximaran a la comprensión de infinitud de una recta en la definición de rectas paralelas, como lo muestra uno de los estudiantes al utilizar esta afirmación “porque nunca se pueden encontrar aunque se extiendan” para responder a la pregunta de ¿Porqué dos rectas son paralelas?

FASE CUATRO: ANÁLISIS A POSTERIORI Y CONCLUSIONES

A través del proceso de intervención se pusieron en juego formas diferentes de representación que por un lado permitieron identificar el estado inicial de los estudiantes en relación con las formas como ellos identificaban las relaciones de paralelismo y perpendicularidad asociadas a formas particulares de representación: líneas horizontales con igual longitud y alineadas para la relación de paralelismo y líneas intersecadas en la misma posición de las cuadrículas del cuaderno para la relación de perpendicularidad y en dirección vertical y horizontal como siguiendo el esquema del primer cuadrante del plano cartesiano. Con ello se permite afirmar que los estudiantes como producto de aprendizajes previos a este trabajo han construido el significado de estas relaciones asociadas a una forma clásica o tradicional de representación, donde lo que interiorizan no son las relaciones en sí mismas sino sus representaciones.

En segundo lugar en el trabajo se lograron poner otras representaciones de estas relaciones que permitieron en alguna medida confrontar a los estudiantes con el esquema ya incorporado mentalmente, mostrando con nuevas representaciones facetas nuevas de las nociones puestas en juego, como fue el caso de las figuras construidas en la situación didáctica dos, en donde se puso en juego no sólo representaciones figúrales, sino también se ofreció la posibilidad de recorrerlas haciendo énfasis con ello en el carácter perceptual del concepto.

También en esta situación (dos) se permitió que los estudiantes identificaran lo particular del ángulo formado entre dos rectas que guardan la relación de ser perpendiculares y que identificaran que no todas las intersecciones entre dos rectas guardan dicha relación, es decir, contrastar que no todas las rectas que se intersecan forman un ángulo de 90° , esto implicó de alguna manera que los estudiantes tuvieran que identificar la condición suficiente y necesaria para que la relación de perpendicularidad se cumpla, condición que no se evidenció en la primera actividad en donde los estudiantes asociaban la relación de perpendicularidad no a la formación del ángulo de 90° , sino a la forma de la figura o representación en relación con las líneas del cuaderno o a las esquinas de la hoja de trabajo, impidiendo que ellos pudieran identificar otras rectas que siendo perpendiculares no estaban en dicha posición, en otras palabras estaban asociando la noción, no a la condición sino a la figura que tradicionalmente se les ha dado.

Dado que las representaciones no agotan el concepto, pues sólo ponen de manifiesto algunas de sus propiedades, se hace necesario que se tenga que recurrir a varias representaciones de un mismo concepto a fin de mostrar todas sus facetas y permitir que el estudiante identifique lo que es invariante en ellas y por tanto pueda realizar actividades de tratamiento y conversión, lo que da cuenta de la comprensión de la noción en sí misma desligada de las apariencias figurales, pues cabe la posibilidad que algunas representaciones, dado su carácter

perceptual, desvíen la atención del concepto o le agreguen propiedades que este no posee.

En el trabajo realizado se permitió confirmar que las representaciones semióticas juegan un papel determinante en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, dado que las representaciones quedan asociadas a éstas. Esto implica especial atención por parte del docente, para permitir diferentes formas de representación, de modo tal que un concepto no quede asociado a una sola forma de representación.

A pesar de haberse posibilitado en las diferentes actividades formas distintas de representación que contribuyeron a la comprensión de las nociones de paralelismo y perpendicularidad, parece que dichas nociones quedaran ligadas a la forma clásica o tradicional de representarlas (horizontal, vertical y en el caso de perpendicularidad obedeciendo a la representación que se evidencia en el primer cuadrante del plano cartesiano) lo que ratifica lo planteado a largo de este trabajo, que las nociones quedan ligadas a ciertas formas de representación y que a pesar que se conozcan y se manipulen correctamente otras formas de representación para estas relaciones existe una tendencia “casi natural y espontánea ” de utilizar las mismas representaciones de estas relaciones, es decir cuando se le pide no solo a un estudiante sino también a una persona cualquiera que utilice una figura para representar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en la mayoría

de los casos utiliza las mismas representaciones, y sólo utiliza otro tipo de representaciones no tradicionales si esta persona lo hace intencionalmente, como se hace desde el punto de vista pedagógico.

Con este trabajo se identificaron diferentes formas de representación asociadas a sistemas compuestos por figuras geométricas y por el lenguaje natural, de igual manera se abordaron actividades de tratamiento y conversión, como se evidencia en las situaciones didácticas realizadas. En la situación didáctica uno se realizó un trabajo de tratamiento, puesto que se les pidió a los estudiantes que a partir de un conjunto de representaciones dadas en forma de figuras identificaran rectas paralelas y perpendiculares, permitiendo con ello que estos reconocieran que a partir del uso de sólo figuras se pueden ver representadas estas dos relaciones de muchas formas diferentes.

Por su parte en las situaciones didácticas dos y tres se trabajó con actividades tanto de tratamiento, como de conversión, pues se les pidió a los estudiantes que a partir de las diferentes representaciones que estaban dadas en figuras tanto propias de la geometría, (como es el caso de la situación dos, donde además las figuras fueron más simples pues las relaciones eran más evidentes) como de las caricaturas (como es el caso de las figuras de la situación didáctica tres) describieran con sus propias palabras o sea en un lenguaje natural las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, permitiendo así el paso de una

representación dada en un sistema figural a una representación dada en el sistema del lenguaje natural.

Se pudo identificar que las actividades de tratamiento y conversión son de gran importancia en la comprensión de estas relaciones pues permiten al estudiante comprender las relaciones identificando lo esencial para que se cumpla la relación de paralelismo y de perpendicularidad entre dos rectas, de modo tal que les permita tanto interpretar las representaciones realizadas por otros, como producir sus propias representaciones, como es el caso de la estudiante que realizó sus propias representaciones y las cuales se ilustran en las figuras 18 y 19, en las páginas 95 y 96 respectivamente, del presente trabajo, y como es el caso también, de la estudiante que realiza una actividad de conversión la cual se ilustra en el numeral 7 de la página 74 en los análisis a posteriori de la situación didáctica dos, en donde ésta realiza una descripción a partir de unas figuras dadas, descripción que le ayuda a la estudiante en su propia comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DUVAL, Raymond, (1999), “Semiósis y Pensamiento Humano”, Cali Universidad del Valle.
- DUVAL, Raymond, (2004), “Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo”, Instituto de educación y pedagogía, Universidad del Valle.
- FISCHBEIM, Efraín, (2006), “La teoría de los conceptos figúrales”, Tesis doctoral (Documento de estudio- MEN- JICA).
- MEN, (1998), “Lineamientos Curriculares de Matemáticas”, Editorial magisterio
- MEN, (2007), “Estándares Básicos de Matemáticas”.
- DE FARRIA CAMPOS, Edison, (2006),” Ingeniería didáctica”, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Universidad de Costa Rica.
- DE LA TORRE, Andrés. (2003). “La Modelización del Espacio y del tiempo” Universidad de Antioquia. Medellín.
- FILLOY YAGUÉ, Eugenio, (1998). “Didáctica e historia de la geometría euclidiana”, Grupo editorial ibero América S.A., México D F.
- DICKSON, Linda y otros. (1991) “El aprendizaje de las matemáticas”, Editorial Labor. Barcelona.

- VASCO URIBE, Carlos Eduardo, (2006), “Didáctica de las matemáticas artículos selectos”, Universidad Pedagógica Nacional, D’ vinni Ltda., Bogotá Colombia
- GARCÍA ROA, María Agustina y otros, (2006). “Didáctica de la geometría euclidiana conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacial”, Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá
- VILLEGAS R, Mauricio, Asensio G Robinsón, (1991). “Matemáticas 2000”, Editorial Voluntad, Bogotá
- Grupo editorial Norma educativa. “Alfa g serie de Matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional”
- RODRÍGUEZ SAENZ, Benjamín Plinio y otros. (1996) “Matemáticas con tecnología aplicada, Prentice Hall de Colombia, Bogotá.
- BERRIO MOLINA Israel, URIBE CALAD Julio, 1989 “Elementos de matemáticas 6, Bedout Editores S. A, Medellín.
- MORA TORRES, Ana Julia y otros, (1999), Matemáticas 6, Editorial Santillana S. A, Bogotá.