DETERMINAR EL NIVEL DE RAZONAMIENTO EN EL QUE SE ENCUENTRAN ALGUNOS ESTUDIANTES FRENTE AL CONCEPTO DE ÁREA

"Un análisis desde el modelo de van Hiele"

GLORÍA SUSANA CADAVID FERNÁNDEZ
ADRIANA PATRICIA CASTAÑO GIRALDO
SANDRA MILENA GARZÓN GIRALDO
ADRIANA MARÍA GÓMEZ CORTÉS
JOSE MARTÍN E. RODRÍGUEZ JIMÉNEZ

ASESORA:
Magister en Educación
FLOR MARÍA JURADO HURTADO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
MEDELLÍN
2008

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a nuestra familia y amigos más cercanos, quienes con su paciencia, amor y apoyo incondicional estuvieron presentes en el desarrollo de nuestra formación como docentes.

Agradecemos a las Instituciones Educativas Concejo de Medellín y Octavio Calderón Mejía, por permitirnos realizar la práctica docente y posibilitar la ejecución del proyecto de investigación, facilitando así los recursos humanos y logísticos necesarios para una adecuada intervención. De manera muy especial agradecemos a todos los estudiantes que permitieron que este proyecto diera sus inicios y finalizara de manera satisfactoria; por compartir con nosotros sus conocimientos matemáticos dentro del ámbito escolar.

Agradecemos muy especialmente a nuestra asesora Flor María Jurado Hurtado por su acompañamiento en la planeación, elaboración y ejecución del proyecto de investigación y demás profesores que de una u otra manera influyeron en nuestros pensamientos e ideas, que permitieron reestructurar nuestro conocimiento hacia la enseñanza de las matemáticas.

TABLA DE CONTENIDO

1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más frecuentes que encontramos en la asignatura de geometría, es que el tiempo dedicado a su enseñanza en la escuela es poca, en relación al área de matemáticas, lo cual hace que se presenten dificultades para los estudiantes en cuanto a esta área se refiere; esta situación representa un reto para nosotros como maestros, pues debemos diseñar estrategias didácticas que busquen que los estudiantes, logren un aprendizaje significativo. Para tal fin, es importante que los maestros conozcamos como aprenden los estudiantes y como razonan en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

En la presente investigación se observa el nivel de razonamiento de los estudiantes frente a un concepto geométrico; aplicando el modelo de Van Hiele. Este modelo describe la forma de razonar de los individuos mediante cinco niveles de razonamiento que son: visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor matemático; y plantea la forma de organizar la enseñanza de acuerdo a unas fases de aprendizaje que facilitan el progreso en el razonamiento.

Nosotros sólo nos ocuparemos de la parte descriptiva, en los cuatro primeros niveles de razonamiento (que no van asociados a la edad y abarcan desde los conceptos básicos geométricos hasta el empleo del razonamiento formal. Sólo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente); para esto tomamos como punto de partida dos actividades, guión-entrevista y test, que diseñamos con el propósito de identificar y detectar cuál es el nivel de razonamiento frente al concepto de área.

El guión-entrevista nos dio algunas ideas previas que dieron pie para la elaboración del test final donde utilizamos las respuestas más frecuentes. El test consta de 23 preguntas, cada una con cinco opciones de respuesta con una de ellas correcta, las cuales diseñamos usando conceptos básicos de matemáticas trabajados por los estudiantes en su proceso formativo de la educación básica; también en la mayoría de las preguntas, empleamos un lenguaje natural comprensible para ellos.

Para el análisis de resultados utilizamos el programa estadístico informático "SPSS" con el que aplicamos la estadística descriptiva y el análisis por de K-Medias, con el propósito de clasificar en qué nivel de razonamiento en el concepto de área se encuentran los estudiantes de las Instituciones Educativas Concejo de Medellín y Octavio Calderón Mejía.

1.2. JUSTIFICACIÓN

La educación matemática es fundamental dentro del plan de estudio, es por ello que consideramos importante analizar y describir el nivel de razonamiento en el que se encuentra un estudiante en su proceso formativo; el cual nos permitirá asumir una posición que facilite construir y validar el conocimiento en los estudiantes, para que éstos ejerzan la iniciativa y la crítica y apliquen ese conocimiento en diversas situaciones y contextos. Mediante el proceso educativo, un estudiante puede aspirar a un mejor desarrollo y a elevar su calidad de vida, por eso es que se reconoce que la educación es un derecho universal y un deber del estado y de toda la sociedad.

Cada área de la matemática requiere de un tipo de razonamiento distinto para su estudio, por las notables diferencias que existen entre ellas; nosotros nos hemos decidido por el área de la geometría ya que al observar algunos textos escolares hemos encontrado; que las unidades temáticas de geometría son poco claras y discontinuas dentro del plan de estudios y que los contenidos geométricos se presentan mediante un enfoque axiomático en el que se exige de los estudiantes habilidades para hacer demostraciones formales, donde éstas requieren que su comprensión se ubique en un nivel de razonamiento muy alto.

Por otra parte, nuestra experiencia como maestros en formación nos permite expresar que la "libertad" del profesor y/o la institución educativa en cuanto al tiempo dedicado a la enseñanza de la geometría, hace que ésta pase a un segundo plano o no se estudie.

> *En el campo de la geometría surgió el modelo educativo de Van Hiele, el cual proporciona una descripción de los procesos de pensamiento que no se identifican con destrezas de cómputo o con el progreso del nivel académico. También, el modelo postula la existencia de niveles de razonamiento que no se identifican con el desarrollo biológico del individuo, sin embargo, las experiencias de aprendizaje que se tengan previamente son un factor determinante para acceder a estos niveles.*

> *En la aplicación del modelo a un concepto matemático se requiere determinar una serie de factores para cada uno de los niveles estudiados, que ponen en evidencia la detección de éstos. Para obtener esos descriptores y comprobar que se ajustan a las exigencias, se usa como procedimiento fundamental la entrevista semi-estructuralpara la cual se diseña previamente un guión.*[1]

Nosotros solo nos remitiremos al concepto de área, pues este nos permite reconocer algunas dificultades que presentan los estudiantes al abordar dicho concepto, ejemplos de éstas son:

- Reconocer que figuras de diferente superficie tienen igual área.
- La identificación de las diferentes estrategias para hallar el área de figuras no convencionales.
- La comprensión de que para hallar el área de una figura no sólo se necesitan fórmulas matemáticas.

[1] El modelo Educativo de van Hiele. Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en La Educación Básica y Media el Departamento de Antioquia. Modulo 6. Situaciones de aprendizaje. Pág. 90 -91.

1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los conceptos abordados en el aula de clase, en especial para el área de las matemáticas, siempre han tendido a crear expectativa en educadores e investigadores de la educación respecto a la forma cómo pueden ser enseñados, arrojando creaciones y resultados que, de una u otra manera, afectan la educación de los estudiantes.

Dado que los conceptos geométricos en los estudiantes son construidos paulatinamente, es posible considerar que las diferentes estrategias utilizadas por los docentes ayudan a profundizar los conceptos, en este caso el de área. Por lo tanto, nuestro problema de investigación pretende dar cuanta de: *"como se puede determinar el nivel de razonamiento en que se encuentran algunos estudiantes frente al concepto de área, haciendo un análisis desde el modelo de van Hiele"*.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Adicionalmente se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuál es el nivel de razonamiento en el que se encuentran algunos estudiantes frente al concepto de área?

1.4. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

1. El nivel de razonamiento de un estudiante en el concepto de área no depende de la edad cronológica ni del grado de escolaridad que tenga.

2. La dificultad que presentan algunos estudiantes al reconocer que figuras de diferente superficie tienen igual área.

3. La utilización del lenguaje natural en el área de la geometría puede facilitar la comprensión de los conceptos de dicha área.

1.5. OBJETIVOS

1.5.1. OBJETIVO GENERAL

Determinar el nivel de razonamiento (según el modelo de Van Hiele) en el que se encuentran algunos estudiantes frente al concepto de área; a través de la aplicación de un test que servirá de base a cualquier docente para establecer como están sus estudiantes en dicho concepto.

1.5.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Observar y confrontar diferentes textos escolares en cuanto a la pertinencia y estudio del concepto de área, para tener en cuenta las definiciones más completas al momento de construir nuestro guión entrevista y el test final.

- Diseñar un guión entrevista y con las respuestas dadas a éste elaborar el test final; el cual nos permitirá detectar el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes elegidos frente al concepto de área.

- Identificar los diferentes niveles de razonamiento al aplicar el test a los estudiantes de los grados octavo y undécimo, de dos instituciones educativas de carácter público, para hacer un análisis estadístico comparando los resultados y con base en éste realizar las conclusiones pertinentes.

2. REFERENTES CONCEPTUALES

2.1. MARCO LEGAL

Con el propósito de dar cuenta de la validez y pertinencia de nuestro de trabajo de investigación. Lo hemos enmarcado desde lo planteado por el Gobierno Nacional para la educación básica en nuestro país.

En la Ley General de Educación se plantea como objetivo el reconocimiento de la educación como un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes.

> *La Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de La Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de La Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público.*[2]

Los lineamientos curriculares en la educación matemática presentan una renovación curricular, la cual permite que ésta sea trabajada desde sus diferentes ramas, desde una perspectiva sistémica que los comprende como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones, lo cual hace posible que para nuestro proyecto la geometría sea nuestra área específica de estudio; partiendo de la idea que ésta hace parte de las matemáticas y como tal es considerada como área obligatoria y fundamental del conocimiento y de la formación de los estudiantes en la sección tercera del artículo 23 de la Ley General de Educación, que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el PEI de cada Institución educativa, lo que nos lleva a resaltar que:

> *... hay acuerdos en que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan.*
>
> *Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no solo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de*

[2] Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Ley General de Educación.* Santafé de Bogotá: Magisterio.

> *instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella.*[3]

La geometría permite realizar un conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Para este propósito los lineamientos nos plantean el manejo de una geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. En donde el papel de los estudiantes radica en que éstos reciben la información y tienen la oportunidad de razonar, sugerir, opinar y crear su propio proceso de aprendizaje, a través de la experiencia y desenvolvimiento con el mundo que los rodea.

Tomamos como punto de partida dos actividades (entrevista y test) que diseñamos con el propósito de identificar y detectar cuál es el nivel de razonamiento frente al concepto de área, ya que este concepto desde los Lineamientos Curriculares en lo que a medida se refiere, hace énfasis en comprender los atributos medibles y dar significado a los patrones y unidades de medida, involucrando los aspectos geométricos y aritméticos fundamentalmente.

Además, se reconoce que el proceso de construcción del pensamiento geométrico sigue una evolución muy lenta que inicia desde las formas intuitivas iníciales hasta las formas deductivas finales, (aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.)

> *El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar.* (Lineamientos Curriculares, 1998. p. 38)

Este modelo permite interpretar el aprendizaje de la geometría, describir cómo se va modificando la forma de razonar de los individuos; mediante cinco niveles de razonamiento, que abarcan desde la visión más simplista de los conceptos geométricos hasta el empleo del razonamiento formal.

[3] Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares. Áreas Obligatorias y Fundamentales.* Santa fe de Bogotá. (pp. 35).

2.2. MARCO TEÓRICO

Nuestro proyecto de investigación surge como una iniciativa de plasmar las experiencias observadas en nuestra práctica docente, un aspecto fundamental en esta práctica fue evaluar a los estudiantes. Es por ello que nos enfrentamos al reto de poder determinar como razona un estudiante frente a un concepto geométrico. Respondiendo a este propósito, decidimos trabajar con el modelo de Van Hiele que es la teoría que mejor se adapta a nuestra propuesta de investigación. Cabe resaltar que esta propuesta se basará sólo en el aspecto descriptivo, aunque también consideramos importante definir los otros dos aspectos y tener en cuenta sus propiedades.

2.2.1. EL MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

El modelo educativo de Van Hiele analiza el aprendizaje y enseñanza de la geometría, como también la relación entre ellas dos. Ésta teoría incluye tres aspectos:

- DESCRIPTIVO: en cuanto que intenta explicar como razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cinco "niveles de razonamiento".
- PRESCRIPTIVO: porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. Esto se lleva a cabo mediante la consideración de cinco "fases de aprendizaje".
- INSIGHT: Son las estructuras mentales que se tienen frente a un concepto.

P.M. Van Hiele (1986) explica brevemente cuál fue su primer intento de solución, mediante la elaboración de un modelo educativo que trata de explicar el porqué del comportamiento de sus alumnos.

"Primero presenté mi descubrimiento de la siguiente forma:

> *Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aún así, mediante*

> *una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance un nivel superior de pensamiento.*[4]

La idea básica del modelo, es que *"el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento"*, *"que no van asociados a la edad"* y *"que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente"*. Es más, se señala que cualquier persona, y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, *"pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente"*.

Antes de señalar los niveles concretos, es importante señalar algunas ideas previas al modelo y referidas a los estudiantes que, basadas en la experiencia del trabajo del matrimonio Van Hiele, marcan el diseño del modelo.

Podemos señalar entre otras que, en la base del aprendizaje de la geometría, hay dos elementos importantes *"el lenguaje utilizado"* y *"la significatividad de los contenidos"*. Lo primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento. Si no es así se debe esperar a que lo alcancen para enseñarles un contenido matemático nuevo.

Finalmente, Van Hiele señala que *"no hay un método para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición"*.

A continuación empezaremos a desarrollar detalladamente lo referido al aspecto descriptivo trabajado por Van Hiele y las interpretaciones realizadas por Jaime y Gutiérrez, y Crowley en su propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría.

[4] Van Hiele, P. M. (1986): *Structure andInsight. A theory ofmathematics education.* (Academic Press: N. York). (p. 39).

2.2.2. ASPECTO DESCRIPTIVO

2.2.2.1. Niveles de razonamiento:

Los niveles de razonamiento son cinco y en nuestra propuesta de investigación los identificaremos con los números del 1 al 5, tal y como lo trabaja Van Hiele en su tesis original y como lo proponen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Estos niveles son:

Nivel 1: Visualización o reconocimiento

Van Hiele (1986) se refiere a este nivel como el de visualización; es decir: *Del primer nivel es dicho: las "cosas visuales directas son en realidad como se le presentan a los estudiantes, como el estudiante habla de ellas."* (p.42)

> *El primer nivel es aquel en el cual la gente (incluyendo a los alumnos) piensa en la vida cotidiana, en la que ocurren sus experiencias y con las cuales toman sus decisiones. Los demás niveles (a mi parecer niveles menores) son aquellos en los cuales, desde una perspectiva limitada, partes del primer nivel son escogidas para hacer modelos que sirvan de ayuda para pensar y decidir en el primer nivel*

[5]Jaime y Gutiérrez se refieren al primer nivel como de reconocimiento y lo consideran el más elemental en el razonamiento de un estudiante, afirman que es típico de preescolar y los primeros grados de la básica, aunque no es exclusivo de éste ya que si un estudiante se enfrenta a un concepto nuevo, debe pasar por este nivel de reconocimiento.

Para estar en este nivel, Jaime y Gutiérrez (1990) presentan las siguientes características (p. 306-307):

- *Los estudiantes perciben las formas de las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.*

[5] Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Llinares, MV Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384) fragmentos.

- *Además perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.*
- *Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de las figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.*
- *En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como: "...se parece a...", "... tiene forma de... ", etc.*
- *Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.*

Nivel 2: Análisis

Según Van Hiele (1986), este nivel lo alcanza un estudiante cuando *"puede aplicar características operativas de una figura bien conocida".* (p. 41).

Tal y como lo expresa Van Hiele (1986) en una conversación que sostiene con van Baleen, reconociendo su avance en el estudio de las relaciones de los conceptos, afirma: *"El segundo nivel es, si te entiendo correctamente, que los conceptos son precisados por sus nombres matemáticos y puestos en conexiones formales. "* (p. 41)

Jaime y Gutiérrez llaman este segundo nivel de análisis y afirman que la primera característica que se va a describir es la que denota una diferencia clara con el nivel 1, pues los estudiantes han cambiado la forma de mirar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades. Para estar en este nivel, Jaime y Gutiérrez (1990) presentan las siguientes características (p. 308):

- *Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.*
- *Además de reconocer sus propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.*

- *Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.*

La primera característica de este nivel que hemos enunciado revela su diferencia básica con el nivel cero: los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, ya son consientes de que pueden estar formadas por elementos y que son portadoras de ciertas propiedades.

Otro avance importante en el tipo de razonamiento del nivel 1 respecto al cero está en el desarrollo por parte de los estudiantes de la capacidad de reconocer que las figuras concretas que están manipulando son (o pueden ser) representantes de unas familias.

El nivel 1 es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar "matemático ", pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían. Sin embargo, esta capacidad de razonamiento es limitada, pues usarán las propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí.

Nivel 3: Ordenación o clasificación

Van Hiele (1986) al referirse al tercer nivel afirma:

> *Se logra un segundo nivel (1981 notación: tercer nivel) cuando un alumno es capaz de operar con relaciones conocidas sobre figuras conocidas. Esto significa que un estudiante que ha alcanzado este nivel es capaz de aplicar la congruencia de figuras geométricas para probar ciertas propiedades de un conjunto geométrico del cual hacen parte otras figuras congruentes.* (p. 41).

Jaime y Gutiérrez (1990) se refieren a este tercer nivel como el de clasificación. Afirmando que: *"Al alcanzar el nivel 3 habrán adquirido esta habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras".* (p. 310)

Alcanzar este nivel significa que:

- *En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular, puede clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a* *partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.*

- *Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, puede dar definiciones matemáticas correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.*
- *Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración: pueden entender la demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por si mismos.*
- *Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir se necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.*

Nivel 4: Deducción formal

Van Hiele (1986) hace referencia a este nivel de la siguiente manera: *"En el nivel 4 debe haber conectado la posibilidad de estar comparando, transponiendo y operando con relaciones. En este nivel sin ayuda para las operaciones es necesario extensiones de teorema, pruebas indirectas, etc. "*. (p. 44).

Jaime y Gutiérrez (1990) afirman que: *"Al alcanzar el nivel 4 de razonamiento se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se esté estudiando "*. (p. 311).

Para alcanzar este nivel deben cumplirse las siguientes características:

- *Alcanzando este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tiene sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.*
- *Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas,...*
- *Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema), la existencia de definiciones equivalentes al mismo concepto,.*

Nivel 5: Rigor matemático

Al observar la tesis de Van Hiele, no se identifica una definición de lo que es este nivel de razonamiento, sin embargo, podemos abordar lo expuesto por [6]Crowley cuando afirma que en este nivel el estudiante:

> *". puede trabajar sobre una variedad de sistemas axiomáticos, es decir, que puede estudiar geometrías no euclídeas y puede comparar los diferentes sistemas axiomáticos. La geometría se ve en abstracto.*
>
> *Este último nivel es el menos desarrollado en los trabajos originales y ha recibido escasa atención por parte de los investigadores. P.M. van Hiele ha reconocido que él está interesado en los tres primeros niveles (comunicación personal con Alan Hoffer, 25 de febrero de 1985). Dado que la mayoría de los cursos de geometría de los centros de Enseñanza Media son impartidos en el nivel 3"* (p. 3).

En nuestra investigación no se trabajará este nivel de razonamiento, pues consideramos que éste es de difícil adquisición para el público al cual va dirigido.

2.2.2.2. <u>Características de los niveles:</u>

Las características de los niveles son de gran importancia para los docentes al momento de diseñar estrategias de enseñanza para sus estudiantes, pues les permite hacerlo teniendo en cuenta los niveles anteriormente descritos. Estas características son:

1. **Jerarquización y secuencialidad:** Van Hiele (1986) se refiere a esta característica de la siguiente manera:

> *La formas de pensamiento del nivel base, del segundo nivel y del tercer nivel tiene un orden jerárquico. Los pensamientos del segundo nivel no son posibles fuera del nivel base; los pensamientos del tercer nivel no son posibles fuera de los pensamientos del segundo nivel.* (p. 50).

[6] Crowley, ML. (1987): *The van Hiele model of de development of geometric thought,* en N.C.T.M. (1987), pp1-16
Traducción por Tomás Macías (E.U. de Profesorado de E.G.B. de Cádiz) Corregida por ángel Gutiérrez y Adela Jaime (Dpto. de Didáctica de la matemática de la U. de Valencia)

Jaime y Gutiérrez (1990), refiriéndose a esta característica afirman que: *"Los niveles de Van Hiele tienen una estructura recursiva, ya que en el nivel N (1, 2, 3) hay determinadas habilidades que están siendo usadas implícitamente por los estudiantes y cuyo uso explícito se aprende en el nivel N+1". El siguiente diagrama resume estas ideas:*

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	***ELEMENTOS IMPLÍCITOS***
NIVEL 0	*Figuras y objetos*	*Partes y propiedades de las figuras y objetos*
NIVEL 1	*Partes y propiedades de las figuras y objetos*	*Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos*
NIVEL 2	*Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos*	*Deducción formal de teoremas*
NIVEL 3	*Deducción formal de teoremas*	*Relación entre los teoremas (sistemas Axiomáticos)*

Desde este punto de vista, la actividad que realice el estudiante para desarrollar su capacidad de razonamiento debe orientarse a hacerle consciente de esa habilidad implícita, para ello será necesario plantearle actividades en las que se requiera la utilización de dicha habilidad, ya que la práctica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar.

Estas consideraciones se pueden resumir en un principio básico del modelo de Van Hiele, que se deriva de esta estructura jerárquica y secuencial: ***No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.*** (pp. 311-312)

2. **Progreso:** Van Hile (1986) se refiere a esta característica de la siguiente manera: *"La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; toma lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje ".* (p. 50)

Según Crowley (1987) refiriéndose a esta característica afirma:

El progreso (o la carencia de éste) de un nivel a otro depende más de los contenidos y los métodos de enseñanza recibidos que de la edad: Ningún método de enseñanza permite al estudiante

> *saltarse un nivel. Algunos métodos intensifican el progreso, mientras que otros lo retrasan o, incluso, impiden el movimiento entre niveles.* (p. 3).

3. **Intrínseco y extrínseco:** En su tesis, Van Hiele (1986) hace referencia a esta característica así:

> *En la discusión precedente nosotros hemos visto que el pasaje de Nivel 1 al Nivel 2 es un proceso complicado. También es difícil dado ayudar a un estudiante con este proceso de aprendizaje. A veces puede ser útil dar un nombre al periodo entre Nivel 1 y Nivel 2; nosotros lo llamaremos Periodo 1 simplemente. Después de que el segundo nivel de pensamiento se ha logrado, y Periodo 1 se completa. Nosotros entramos en Periodo 2 que tiene su extremo en el tercer nivel de pensamiento.* (p. 63).

Según Crowley (1987) se refiriere a esta característica afirmando que: *"Los objetos inherentes a un nivel llegan a ser objetos de estudio en el siguiente nivel".* (p. 3).

4. **Lenguaje:** específico para cada nivel. La progresión en y entre los niveles va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje. No sé trata sólo de adquirir conocimientos matemáticos sino también mejorar y ampliar las capacidades referidas al lenguaje necesario en cada uno de los niveles.

Van Hiele (1986) hace referencia a esta característica diciendo: *"...El maestro, cuando empieza enseñando geometría debe hacerlo en el lenguaje que ellos entienden.".* (p. 45). "*La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; toma lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible fuera del aprendizaje de un nuevo lenguaje".* (p. 50)

Jaime y Gutiérrez (1990) se refieren a esta característica afirmando que: "… *a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico".*

> *Las implicaciones que esto tiene para la actividad de los profesores en sus clases son evidentes y trascendentales: si un profesor quiere hacerse comprender por sus alumnos, debe hablarles en su nivel de lenguaje, es decir, debe amoldarse al nivel de razonamiento de los estudiantes para, a*

partir de ahí, tratar de guiarles para que lleguen al nivel superior; lo contrario provocará en poco tiempo la incomprensión mutua (el profesor tampoco entiende a sus alumnos y no evalúa adecuadamente las respuestas de éstos). Por tanto, tal como lo escribe P.M Van Hiele (Fuys, Geddes, Tischler [1984], p. 246), ***dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse.*** (p. 315)

5. **Emparejamiento** Si el estudiante está en un nivel y la instrucción se está desarrollando en un nivel diferente, puede que no se de el aprendizaje y el progreso deseado.

Van Hiele (1986) se refiere a esta característica diciendo que:

"... es obvio que el profesor tiene que considerar la composición heterogénea de la clase, aun cuando él ha tenido la ventaja de un método ideal de la selección. Un grupo de estudiantes, comenzando de manera homogénea, no pasa al nivel siguiente del pensamiento al mismo tiempo. (Van Hiele, 1955, pp. 289-290) " (pág. 40).

Según Crowley (1987) refiriéndose a esta característica afirma:

"Si el estudiante está en un nivel y la instrucción se está desarrollando en un nivel diferente, puede que no se den el aprendizaje y el progreso deseados. En particular, si el profesor, el material didáctico, los contenidos, el vocabulario, etc. Están en un nivel más alto que el alumno, éste no podrá seguir el proceso de pensamiento que se está utilizando ". (p. 3).

2.2.3. ASPECTO PRESCRIPTIVO

2.2.3.1. Las fases de aprendizaje:

Las fases de aprendizaje tienen como objetivo el avance en cada uno de los niveles. Como se ha mencionado anteriormente, depende más de la metodología utilizada que de la edad o la maduración; así, el método, la enseñanza, los contenidos, los materiales utilizados juegan un papel importante desde la didáctica para avanzar de un nivel inferior a otro superior.

Van Hiele (1986) se refiere a las fases de aprendizaje de la siguiente manera:

> *La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella (esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico). Por lo tanto, es posible y deseable que el profesor la ayude y la acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber como se pasa a través de estas fases y cómo se pude prestar ayuda al estudiante de forma eficaz.* (Fuys, Geddes, tischler [1984], p. 246).

De este modo el modelo de van Hiele (1986) desarrolla un conjunto de fases secuenciales que promueven la adquisición de un nivel. (pp. 53-54). Estas fases son:

> ***FASE 1, La de información.*** *Los estudiantes la obtienen con el dominio activo; es decir trabajando directamente.*
>
> ***FASE 2, orientación guiada.*** *Ellos están guiados por los métodos (que les da el profesor o lo que ellos hacen por sí mismos) con diferentes relaciones del trabajo en equipo que ha sido formado.*
>
> ***FASE 3, de explicación.*** *Ellos llegarán conscientes de las relaciones, ellos tratarán de expresar esto con sus palabras. Ellos aprenden el lenguaje técnico, acompañado con el sujeto principal.*
>
> ***FASE 4, de orientación libre.*** *Ellos aprenderán por lo general, a encontrar su propio camino en las relaciones de trabajo.*
>
> ***FASE 5, de integración.*** *Ellos construirán con todo lo visto teniendo aprendizaje de un sujeto, la nueva forma del trabajo en grupo, y de las relaciones que ahora están puestas.*

Jaime y Gutiérrez (1990) en concordancia con lo que plantea Van Hiele, afirman que: *"las fases de aprendizaje son una serie de pasos que debe seguir un profesor para ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento ".* (pp. 332-335).

Lo que Van Hiele llama las "fases de aprendizaje" son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Dicho de otra manera, es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y a combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele son cinco:

1ª fase: Información

Se trata de una fase de toma de contacto. El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar.

Esta fase sirve para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles que sepan qué tipo de trabajo van a hacer, y para que el profesor descubra qué nivel de razonamiento tienen sus alumnos en el nuevo tema y qué saben del mismo.

2a fase: Orientación dirigida

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, figuras, etc. Principales en el área de geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que las "actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior ".

3ª fase: Explicitación

Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo.

Esta fase también tiene la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar.

Por lo tanto, la fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión de trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

4a fase: Orientación libre

Ahora los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diferentes formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

... el núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento.

5a fase: Integración

A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente, se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

2.2.4. PERCEPCIÓN INSIGHT

n

Los Van Hiele definen percepción de la manera siguiente: una persona muestra insight si es capaz de actuar en una situación no familiar; ejecuta de forma, competente (correctamente y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación; y emplea intencionalmente (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Para tener insight, los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuando hacerlo. Ellos pueden aplicar su conocimiento con el propósito de resolver problemas.

[8]El insight es el "darse cuenta" o tomar conciencia. Es conectar una vivencia, una conducta, un rasgo de personalidad o forma de ser, con su significado y/o su origen, lo que permite ampliar la conciencia y acceder a un mayor conocimiento de sí mismo.
El hecho de que el insight ocurra en forma súbita, ha hecho que se le asocie o incluso confunda con la intuición.

Van Hiele (1986) hace referencia al término de intuición de la siguiente manera:

> *"Una decisión basada en la intuición, que es una consideración cercana sin fundamento en el pensamiento discursivo, puede ser correcta. Si se tiene acceso a una estructura más fuerte, la seguridad de la decisión podría estar justificada. En tal caso, se ha vislumbrado una estructura clara de la cual se puede sacar fácilmente la solución a un problema ".* (p. 72).

[9]En términos generales, las condiciones para que se produzca el "insight", cuando una tarea o problema tenga varias estructuras posibles, y alguna de ellas resulte más inmediata o fácil de percibir para el sujeto, la reestructuración resultará más difícil. Lo que sí parece estar demostrado es que la experiencia previa puede en muchos contextos obstaculizar e incluso impedir la reestructuración, aunque en muchas otras ocasiones ha de ser fundamental para que ésta se produzca.

[7] Botero, O,. Velásquez, G,. Moreno, M,. & Otros. (2007). Diploma en el Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. *Modulo 6. Situaciones de aprendizaje.* Medellín: Editorial Artes y Letras Ltda. P. 92

[8] Horst Bussenius C. (2007). Insight. Recuperado en mayo 11, 2008. Disponible en http://www.unap.cl/p4_unap/site/artic/20070102/pags/20070102075029.html

[9] Estructura e Insight. Orígenes de la teoría de La Gestalt Recuperado en Julio 7, 2008. Disponible en http://gestalt.idoneos.com/index.php/311470.

2.3. RASTREO CONCEPTUAL

Se hace necesario realizar un rastreo bibliográfico del concepto de área, para que quienes acudan a esta investigación puedan tener claras las definiciones que asumiremos y por las que se le preguntará a los estudiantes a través de los test realizados.

La definición de área con la que trabajamos es la que encontramos en [10]Geometría de Baldor.

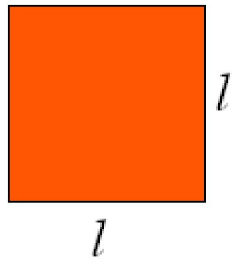
> ***ÁREA.*** *Es la medida de una superficie. El área se refiere al* ***tamaño.***
>
> ***SUPERFICIE.*** *La superficie se refiere a la* ***forma.*** *Hay superficies rectangulares, cuadradas, circulares, etc.*
>
> ***MEDIDA DE UNA SUPERFICIE.*** *Para efectuar la medida de una superficie se toma como unidad un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud.*
> *En la práctica el cálculo del área de una figura se efectúa indirectamente, es decir, midiendo la longitud de algunos de los elementos de la figura y realizando ciertas operaciones con dichas medidas.*

A continuación definiremos cada uno de los conceptos trabajados en nuestra investigación:

[11]Definición de Cuadrado

Polígono regular de cuatro lados iguales cuyos vértices forman ángulos de 90^{o}. Puesto que tiene cuatro lados es también un cuadrilátero. Sus lados son paralelos dos a dos y es, por tanto, un paralelogramo. Además ya que todos sus vértices forman ángulos rectos es un caso especial de rectángulo.

[10] Baldor, J. A. (1983). *Geometría Plana y del Espacio con una Introducción a la trigonometría.* México, D.F. Editorial Ultra S.A. de C.V (pp. 203-233)
[11] *Definición de cuadrado.* Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Cuadrado



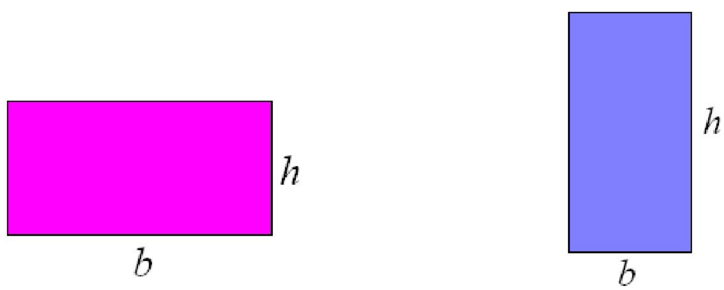
Área del cuadrado

El área *A,* de un cuadrado de lado *l* se obtiene multiplicando el valor del lado por sí mismo:

$$A = l \times l = l^2$$

[12]**Definición de rectángulo**

Cuadrilátero cuyos vértices forman ángulos rectos. La longitud de sus lados es igual dos a dos.



Área del rectángulo

El área *A,* de un rectángulo de base, *b,* y altura, *h* es:

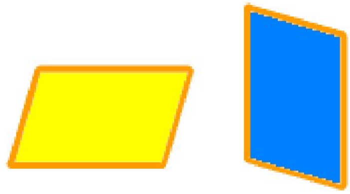
$$A = b \times h$$

[13]**Definición de romboide**

Paralelogramo de lados iguales y paralelos cada uno con el opuesto, y ángulos opuestos iguales.

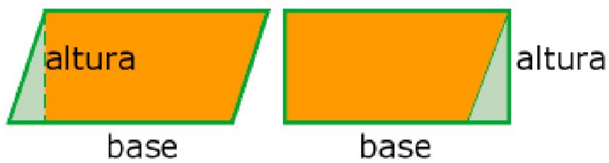
[12] *Artículo de la Enciclopedia Libre Universal en Español.* (2007). Definición de rectángulo. Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Rectángulo

[13] Diccionario- web.com.ar. *Romboide.* Recuperado en julio22, 2008. Disponible en http://www.diccionario-web.com.ar/largo/romboide.html



[14]Área del romboide

Para calcular el área del romboide, nos fijamos en que si lo cortamos por la línea de puntos y esa parte triangular la unimos al otro lado, la figura que resulta es un rectángulo cuya base y cuya altura miden lo mismo que las del romboide:

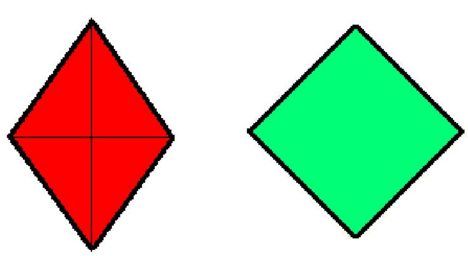


Como las dos figuras ocupan la misma superficie: Área del romboide = Área del rectángulo Con lo que: **Área del romboide** = base x altura.

Aclaramos que el dibujo es solo un caso particular de la fórmula matemática.

[15]Definición de rombo

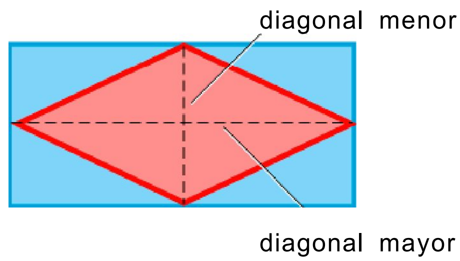
Paralelogramo cuyos cuatro lados tienen la misma longitud. Sus diagonales son perpendiculares. Cuando sus vértices forman ángulos rectos se convierte en un cuadrado.



[14] *Área del romboide.* Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.
[15] *Artículo de la Enciclopedia Libre Universal en Español.* (2007). Definición de rombo. Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Rombo.

[16]Área del rombo

Para obtener el área del rombo, nos fijamos en la figura que resulta si trazamos paralelas a sus diagonales por los cuatro vértices:



Resulta un rectángulo cuya base mide lo mismo que la diagonal mayor, y cuya altura mide igual que la diagonal menor del rombo. Así pues:

Área del rectángulo = diagonal mayor del rombo x diagonal menor del rombo

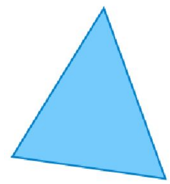
Como los ocho triángulos rectángulos que se forman dentro del rectángulo son iguales, y dentro del rombo hay cuatro, la mitad de ellos será el área del rombo. Es decir, el área del rombo será la mitad del área del rectángulo.

$$\textbf{Área del rombo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

[17]Definición de triángulo

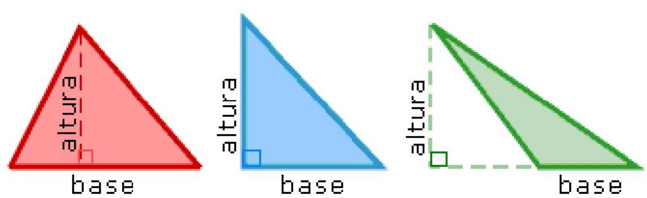
Un triángulo, en geometría, es un polígono de tres lados; está determinado por tres segmentos de recta que se denominan lados, o tres puntos no alineados que se llaman vértices.

[16] *Rombo.* Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.
[17] *Definición de triángulo.* Recuperado en julio 9, 2008. disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo



Área del triángulo

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura (donde la altura es un segmento perpendicular que parte de la base hasta llegar al vértice opuesto) y dividiendo en dos.

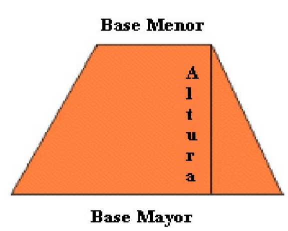


Siendo b la longitud de cualquiera de los lados del triángulo y h la distancia perpendicular entre la base y el vértice opuesto a esa base, el área A queda expresada del siguiente modo:

$$A = \frac{b\ h}{2} = \frac{base \times altura}{2}$$

[18]Definición de trapecio

El trapecio tiene dos de sus lados opuestos paralelos. A esos lados se les llama bases.



Área del trapecio

$$Área\ del\ trapecio = \frac{(base\ mayor + base\ menor)\ altura}{2}$$

Trapecio. Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.

[19]Definición de polígono

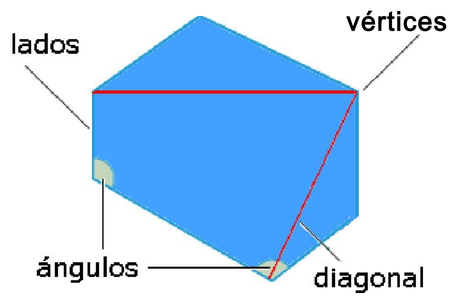
Los polígonos son figuras planas cerradas, limitadas por segmentos rectilíneos. Los elementos de un polígono son los lados, los vértices, los ángulos y las diagonales.

Los **lados** son los segmentos rectilíneos que delimitan al polígono.

Los **vértices** son los puntos donde se cortan los lados dos a dos.

Los **ángulos** son las regiones comprendidas entre cada par de lados.

Las **diagonales** son los segmentos que unen cada pareja de vértices no consecutivos.



[20]Área de un polígono regular

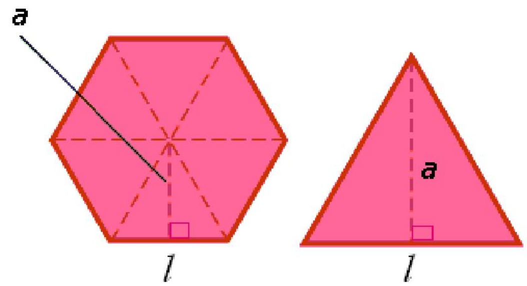
En cualquier polígono regular podemos dibujar tantos triángulos en su interior como lados tenga el polígono. Todos los triángulos dibujados tienen un vértice común que es el centro del polígono.

El área de cada uno de esos triángulos será:

$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

Siendo la base el lado (l) y la altura, la **apotema** (a) del polígono:

[19] *Los polígonos.* Microsoft ® Encarta ® 2007. © 1993-2006 Microsoft Corporation.
[20] *Área de un polígono regular.* Microsoft ® Encarta ® 2007. © 1993-2006 Microsoft Corporation.



Así pues: $A = \dfrac{l \times a}{2}$

El área del polígono será la suma de las áreas de los *n* triángulos, seis en el caso del hexágono anterior: $A_{total} = 6\left(\dfrac{l \times a}{2}\right)$

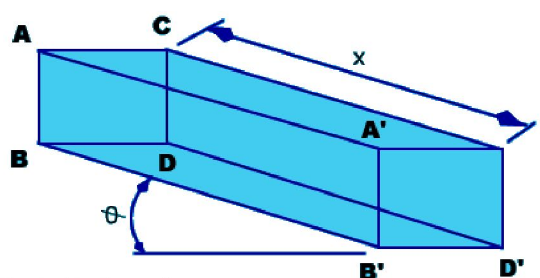
En general, para un polígono regular de *n* lados, su área se calcula así:

$$A_{total} = n\left(\frac{longitud\ \ del\ lado \times apotema}{2}\right)$$

[21]Movimientos en el plano

Traslación

La traslación es un movimiento en el plano de tal forma que a cada punto de la figura le corresponde un vector de traslación, (una distancia, una dirección y un sentido de la traslación).

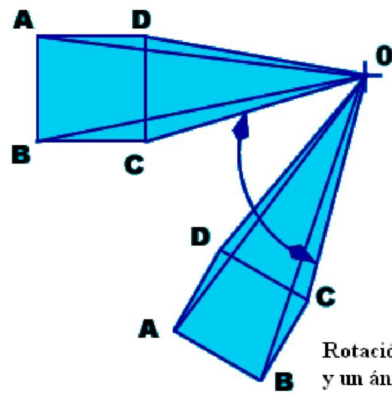


Traslación de una figura, un
un ángulo θ y una distancia X

[21] *Movimientos en el plano.* Recuperado en julio 9, 2008. Disponible en: http://www.memo.com.co/fenonino/aprenda/geometria/geomet4.html

Rotación

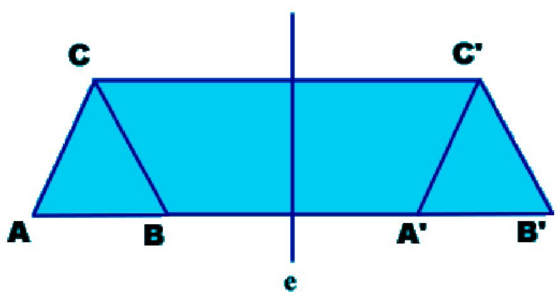
La rotación es un movimiento angular de cada uno de los puntos a partir de un punto que es el centro de giro. Para este movimiento es necesario dar un ángulo y el punto centro de giro.



Rotación con centro en 0
y un ángulo 0

Simetría

Cuando cada uno los puntos de la figura tiene un homologo al frente, de tal forma que tendremos una figura reflejada, como en el caso de un espejo. Para realizar una simetría axial, es necesario que nos den un eje o plano de simetría.



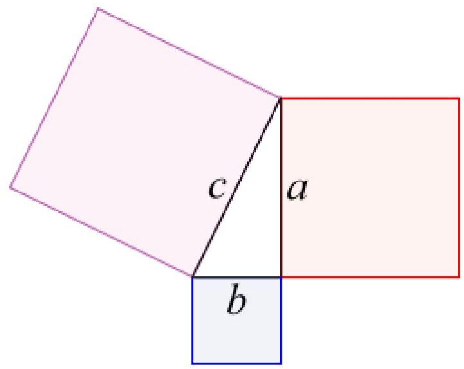
Simetría axial sobre el eje e

[22]**Teorema de Pitágoras**

Establece lo siguiente: en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.

Wiki pedía. La Enciclopedia Libre. *Teorema de Pitágoras.* Recuperado en julio 9, 2008. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras

Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes *a* y *b,* y la medida de la hipotenusa es C, se establece que: $^{a} + b = c$



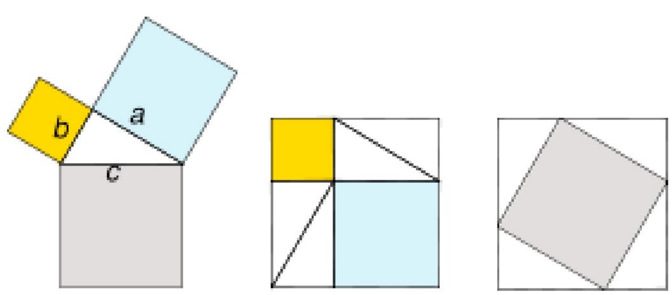
Demostración gráfica del teorema:

Partiendo de la configuración inicial, con el triángulo rectángulo de lados ***a, b, c,*** y los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa, se construyen dos cuadrados iguales:

S Uno de ellos está formado por los cuadrados de los catetos, más cuatro triángulos rectángulos iguales al triángulo inicial.

S El otro cuadrado lo conforman los mismos cuatro triángulos, y el cuadrado de la hipotenusa.

Si a cada uno de estos cuadrados les quitamos los triángulos, evidentemente el área del cuadrado gris (c^2) equivale a la de los cuadrados amarillo y azul ($b^2 + a^2$), habiéndose demostrado el teorema de Pitágoras.

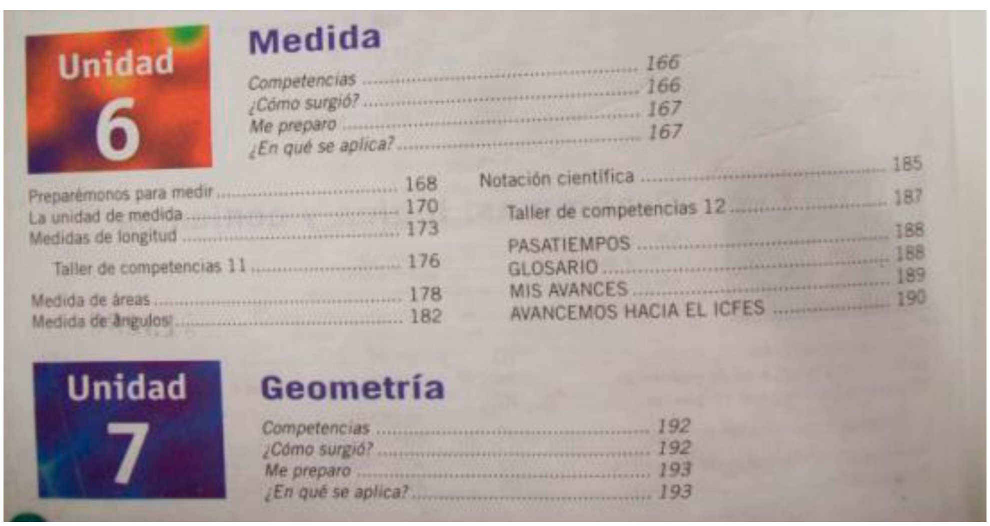


2.4. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA EN DIFERENTES TEXTOS ESCOLARES

A continuación mostraremos una revisión bibliográfica de algunos textos escolares de la educación básica primaria y secundaria, los cuales nos servirán de apoyo y nos permitirán observar la manera como éstos trabajan y desarrollan el concepto de área, además de suministrarnos algunas bases al momento de realizar el test que se va a aplicar en algunos estudiantes, para determinar el nivel de razonamiento en el que se encuentran frente al concepto de área.

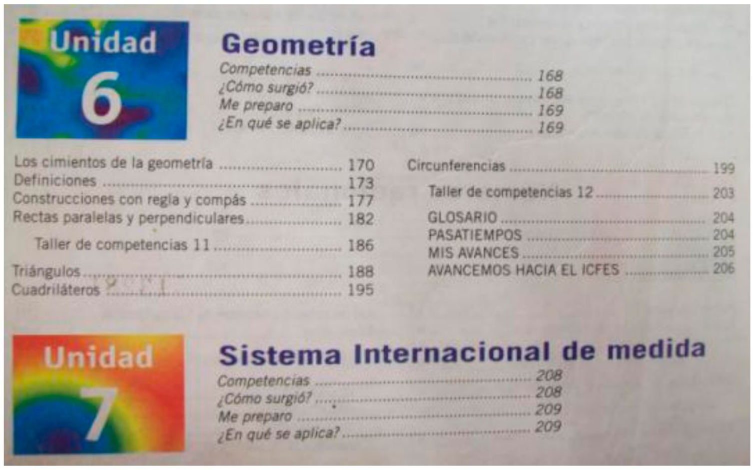
Textos: Nuevo Alfa 6° y Nuevo Alfa 7°

- En el texto [23]Nuevo Alfa 6° Encontramos que se trabaja primero la unidad de medidas y luego la de geometría, pero no hacen un enlace entre las dos unidades. Consideramos que se está trabajando el concepto de área de manera dependiente, pues solo lo relacionan con el sistema decimal de medidas. Por lo que nos hace preguntarnos qué tan favorable o desfavorable sea para el desarrollo del concepto dentro del texto escolar.



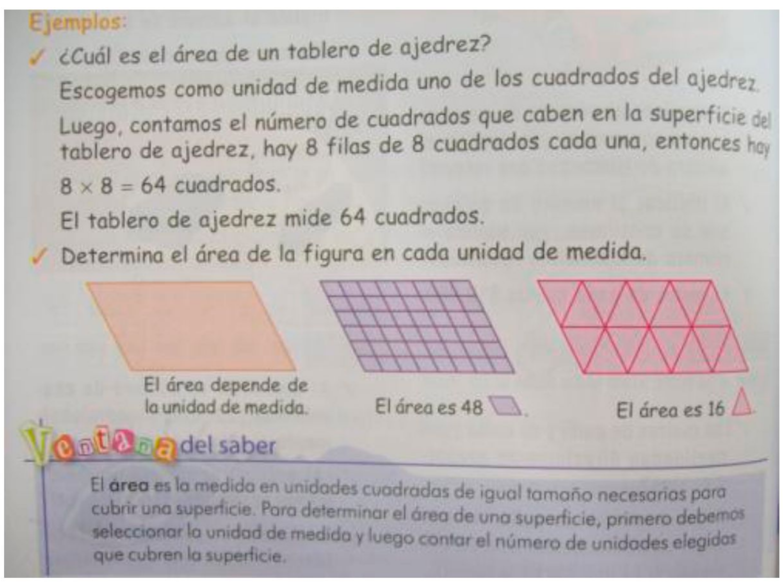
[23] Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 6°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A.

- En el texto [24]Nuevo Alfa 7°, trabaj an de manera inversa las unidades en comparación con Nuevo Alfa de 6°, es decir, inicialmente trabajan lo que es la unidad de geometría y después la de medida, lo que consideramos presenta cierta ambigüedad.



Texto: [25]Aciertos matemáticos 3°

- En este texto hay una unidad, en donde se da la noción de área y se trabaja tanto con las unidades de medida y sus submúltiplos como desde la parte geométrica.



[24] Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 7º. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A.
[25] Ramírez, C. O. (2006). *Aciertos matemáticos 3.* Santafé de Bogotá: Editores Educar. (pp. 216)

Observación:

Desde lo revisado en los textos escolares de matemáticas Nuevo Alfa 6° y Nuevo Alfa 7°, podemos evidenciar que no hay una relación de orden entre las unidades de medición y geometría, de lo que concluimos que aunque el concepto de área debe ser parte de la unidad de medición, no debe olvidarse en la unidad de geometría, o se debe trabajar primero este concepto desde la unidad de medición para luego pedirle a los estudiantes que den cuenta de éste en los contenidos geométricos, pues para cada concepto es necesario ya que se trabaja de manera tanto implícita como explícita. En cuanto al texto Aciertos matemáticos 3, vemos que trabajan las dos unidades de manera conjunta, facilitándole al estudiante la comprensión del concepto de área y la utilización de unidades de medida para hallar dicha área.

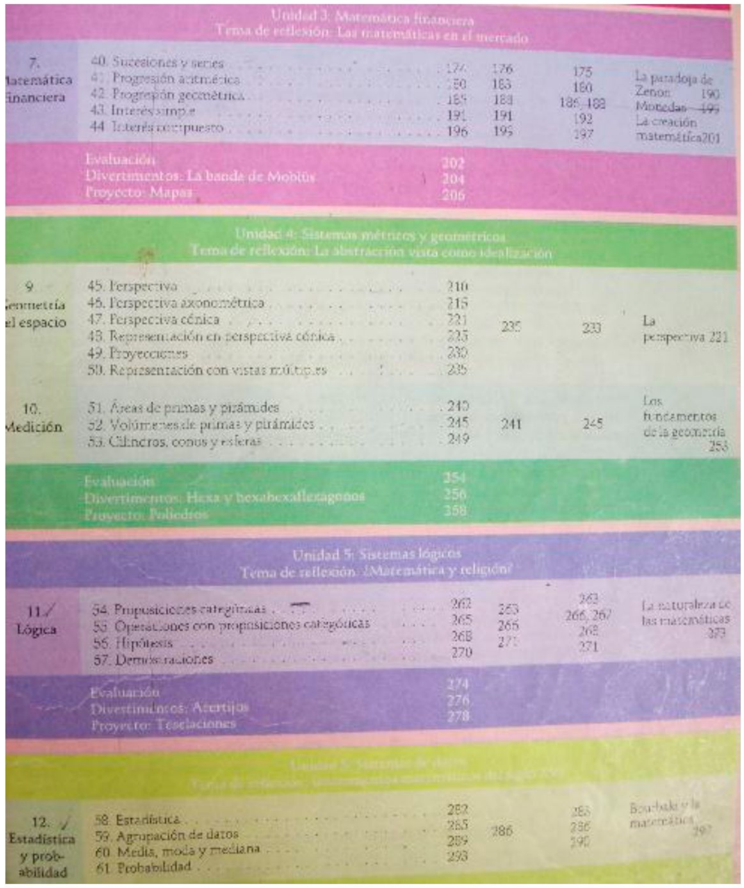
Texto: [26]Espiral 5°

- En este texto, encontramos que el tema de geometría es trabajada en las últimas, unidades.

[26] Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., Samper, C. (2004). *Espiral 5*. Bogotá D.C, Colombia: Editorial norma. (pp. 240).

Texto: Matemática en Construcción 9° [27]

- En este texto, observamos que el tema de geometría se encuentra muy reducido, dando por hecho que los conceptos ya han sido aprendidos por los estudiantes. Trabajan los temas de manera superficial y no amplían los temas.



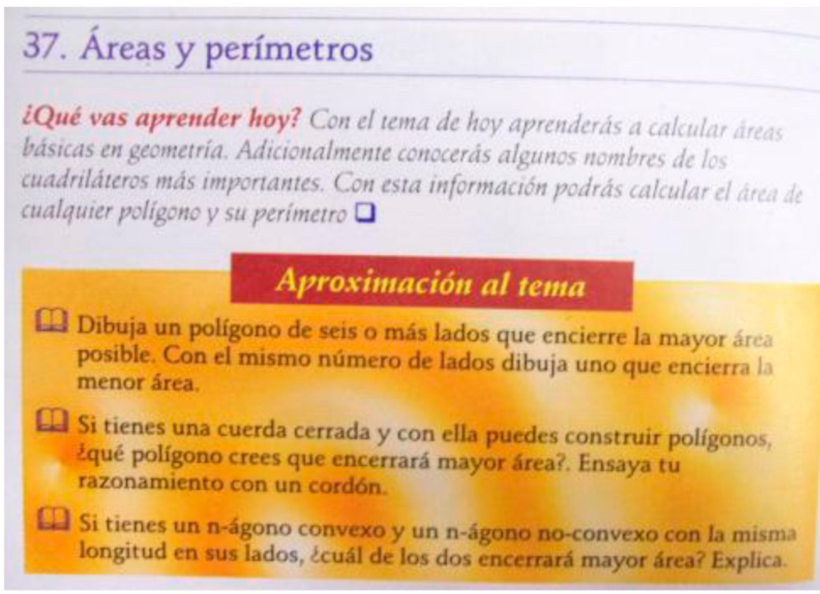
Observación:

Consideramos que la extensión dedicada al área de geometría en los textos escolares de La Educación Básica, es muy corto, en comparación con los demás contenidos aritméticos que son los que más unidades presentan en los textos escolares; especialmente en la básica primaria se presenta dicha unidad como una de las últimas lo que hace que sea un factor determinante para que los docentes no alcancen a trabajar esta unidad en el año escolar.

[27] Neira, C., Ochoa, C., Bautista, M. *(1996). Matemática en Construcción 9°.* Santafé de Bogotá. Oxfor. University Press.

Texto: [28]Matemática en Construcción 6°

- El concepto de área que encontramos en este texto es "el espacio que encierran los lados de una figura", este concepto no lo presentan de manera explícita sino que se puede extraer desde el planeamiento que se hace de un ejercicio, donde proponen que se calcule el espacio que encierra los lados de una figura, para que el lector recuerde lo que debe saber de área. Además, en muchos textos escolares no se hace una separación clara entre los conceptos de perímetro y área, lo cual hace que no se identifique de manera clara estos dos conceptos para los estudiantes.


37. Áreas y perímetros

¿Qué vas aprender hoy? Con el tema de hoy aprenderás a calcular áreas básicas en geometría. Adicionalmente conocerás algunos nombres de los cuadriláteros más importantes. Con esta información podrás calcular el área de cualquier polígono y su perímetro

Aproximación al tema

Dibuja un polígono de seis o más lados que encierre la mayor área posible. Con el mismo número de lados dibuja uno que encierra la menor área.

Si tienes una cuerda cerrada y con ella puedes construir polígonos, ¿qué polígono crees que encerrará mayor área?. Ensaya tu razonamiento con un cordón.

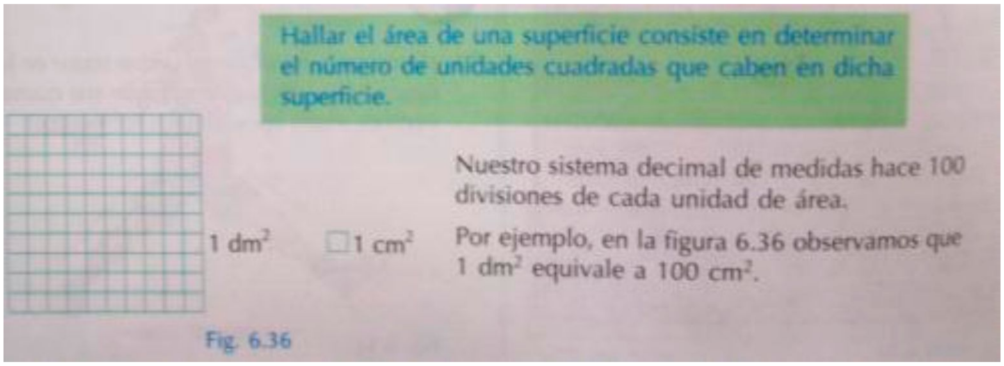
Si tienes un n-ágono convexo y un n-ágono no-convexo con la misma longitud en sus lados, ¿cuál de los dos encerrará mayor área? Explica.

Texto: Nuevo Alfa 6°

- La definición que encontramos en este texto es: *"hallar el área de una superficie consiste en determinar el número de unidades cuadradas que caben en dicha superficie "*. (Pág. 178-179). Se puede ver que en el texto no hacen una diferenciación clara de lo que es superficie y lo que es área, de la misma manera hacen referencia al área de figuras planas, como lo son las figuras regulares; afirmando que para hallar el área de éstas figuras se hace necesario la utilización de fórmulas, por lo que realizan una descripción por medio

[28] Millan, J., Ochoa, C., Herrera, O. *(1996). Matemática en Construcción 6°.* Santafé de Bogotá. Oxfor. University Press. (pp.184).

de ejemplos para hallar el área de un cuadrado, un triángulo, un rectángulo, un paralelogramo y un trapecio, con sus respectivos ejercicios de aplicación.



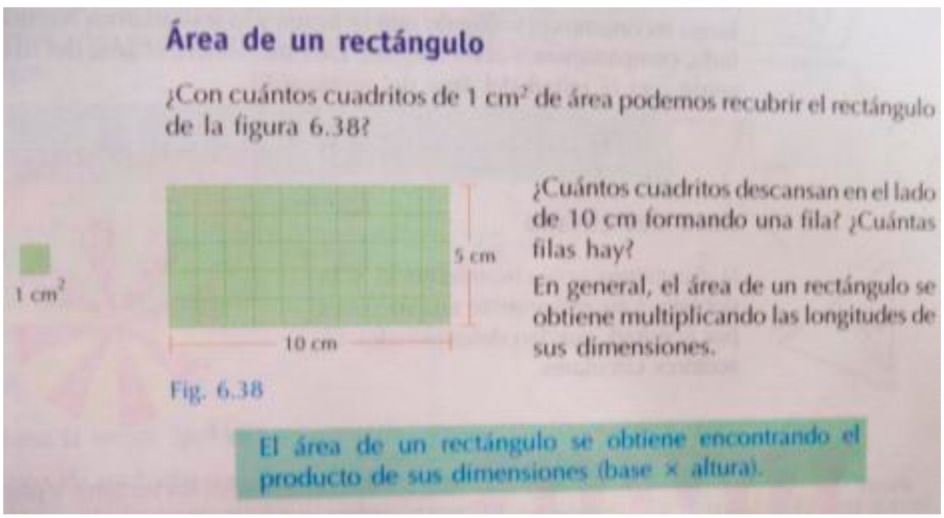
Hallar el área de una superficie consiste en determinar el número de unidades cuadradas que caben en dicha superficie.

$1\ dm^2$ $1\ cm^2$

Nuestro sistema decimal de medidas hace 100 divisiones de cada unidad de área.

Por ejemplo, en la figura 6.36 observamos que $1\ dm^2$ equivale a $100\ cm^2$.

Fig. 6.36



Área de un rectángulo

¿Con cuántos cuadritos de $1\ cm^2$ de área podemos recubrir el rectángulo de la figura 6.38?

$1\ cm^2$ 5 cm 10 cm

¿Cuántos cuadritos descansan en el lado de 10 cm formando una fila? ¿Cuántas filas hay?

En general, el área de un rectángulo se obtiene multiplicando las longitudes de sus dimensiones.

Fig. 6.38

El área de un rectángulo se obtiene encontrando el producto de sus dimensiones (base × altura).

A continuación presentaremos otras definiciones rastreadas en diferentes textos escolares, que nos servirán de apoyo para identificar como trabajan en dichos textos el concepto de área, además; consideramos que estas definiciones son las más relevantes en cuanto a las implicaciones que tienen para los estudiantes. Estas son:

S En el texto Dominios 2 *"La medida de una superficie es su área. (Pág. 140).* Podríamos decir al respecto de esta definición, que para el estudiante se pueden presentar ciertas dificultades al distinguir la definición de área y la de superficie, pues no podrían dar cuenta de ellas por separado.

- S En el texto Aciertos Matemáticos 4. Observamos que en la unidad 3 se tiene el tema de área bajo el nombre de unidades de superficie, trabajando el pensamiento métrico y el espacial. Explican áreas con un ejemplo del área de visión, tomada por una cámara panorámica sencilla y una cámara de 35 mm. Con lente panorámico especial.
- S En el texto Olimpiadas Matemática**s 7** la definición dada es: *El área de una figura es la cantidad de superficie que la cubre.*
- S En el texto calculemos 3, se enseña el concepto de área a partir de la relación del área de un cuadrado pequeño con lado igual a 1, utilizando unidades de medida del sistema métrico decimal con un cuadrado más grande y se comienza hacer la relación del área con algunas figuras geométricas.
- S En el caso de algunos textos grado tercero, se enfocan en trabajar más el perímetro. Hacen explicito el concepto de área y lo trabajan como la medida interior de una región, utilizando la unidad cuadrada.
- S En algunos textos ni siquiera se define el concepto de área, se trabaja desde una mirada aritmética dejándole al estudiante la labor de intuir el concepto.
- S Aunque en casi todas las definiciones se utiliza el concepto superficie para definir el área, en ninguna se define ésta para que los estudiantes puedan identificar de que les están hablando y no confundan los conceptos de área y superficie.

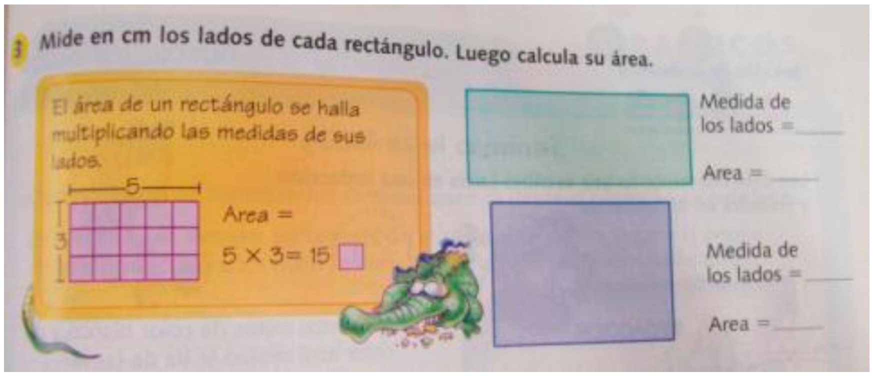
Observación:

En muchos textos no definen los conceptos de área, perímetro y superficie dando por hecho que los estudiantes ya los tienen claros; otros, trabajan el concepto de área muy ligado o de manera continua al concepto de perímetro de una figura y los definen de manera ambigua. Desde nuestra experiencia como docentes en formación, observamos que muchos estudiantes cuando se les sugiere que determinen el área de una superficie lo que hacen es determinar el perímetro de la misma.

29

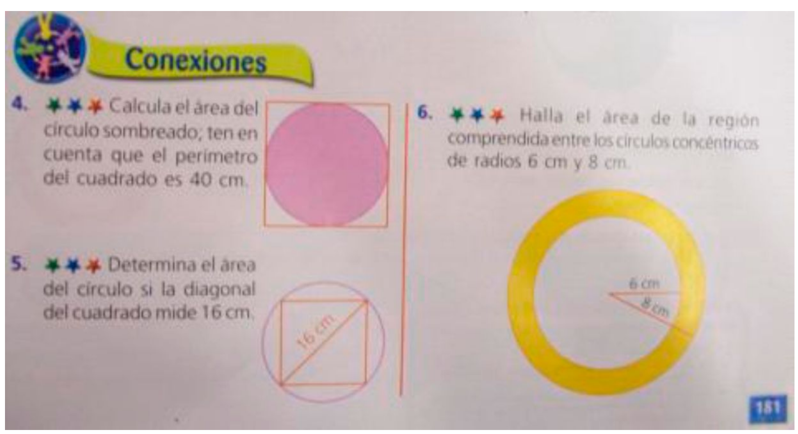
Texto: Matemáticas 3°

S En este texto, se enseña el concepto de área teniendo como unidad de medida un cuadrado de 1cm de lado, para que los estudiantes puedan entender con mayor claridad dicho concepto; teniendo en cuenta que los ejercicios parten de lo visual.



Texto: Espiral 5°

S En este texto se aumentan las relaciones del concepto, pues se comienza a trabajar el área de diferentes figuras planas y también se trabaja el cálculo de áreas laterales y totales de algunos sólidos, planteándose algunos problemas de la vida cotidiana.



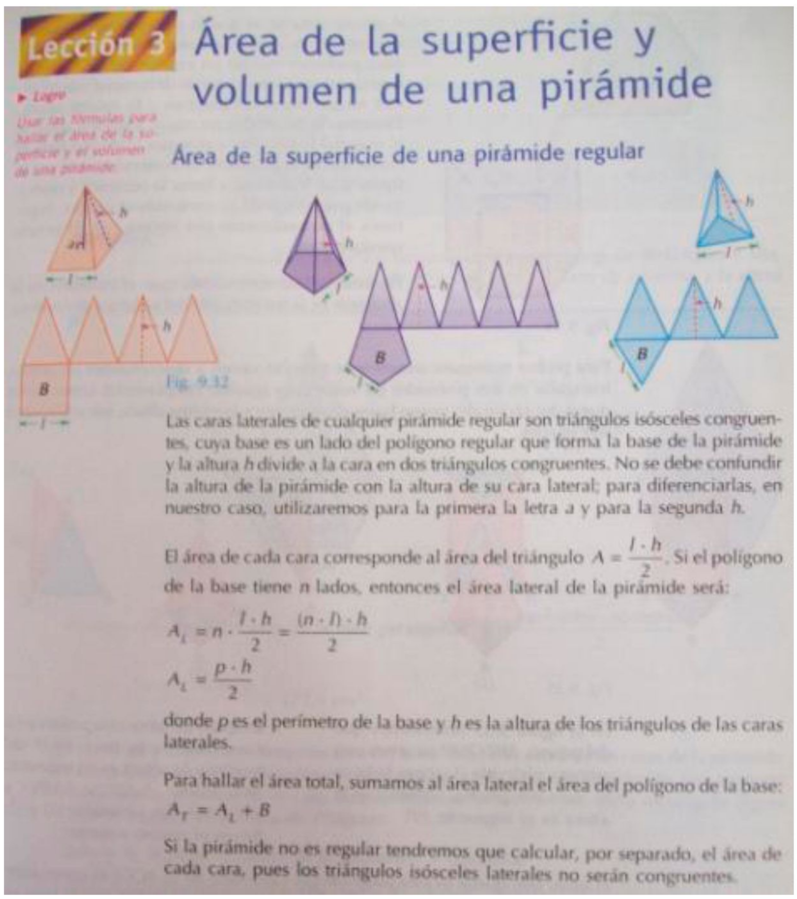
Este es otro de los ejemplos encontrados en este texto, donde se puede ver claramente la utilización de las unidades de medida, en un contexto determinado:

[29] Gutiérrez, E. (1999). *Matemáticas 3.* Santafé de Bogotá: Santillana. (pp. 176).

El estado soberano más pequeño del mundo es ciudad del Vaticano, cuya superficie es 0,44 Km^2. ¿Cuántos decámetros cuadrados de área tiene este estado?

Texto: [30]Nuevo Alfa 8°

- S En este texto podemos ver que el nivel de complejidad en comparación con los otros dos textos ha aumentado, haciendo que los estudiantes al momento de resolverlos, tengan que realizar un mayor análisis.



Lección 3 Área de la superficie y volumen de una pirámide

Logro

Usar las fórmulas para hallar el área de la superficie y el volumen de una pirámide.

Área de la superficie de una pirámide regular

Fig. 9.32

Las caras laterales de cualquier pirámide regular son triángulos isósceles congruentes, cuya base es un lado del polígono regular que forma la base de la pirámide y la altura h divide a la cara en dos triángulos congruentes. No se debe confundir la altura de la pirámide con la altura de su cara lateral; para diferenciarlas, en nuestro caso, utilizaremos para la primera la letra a y para la segunda h.

El área de cada cara corresponde al área del triángulo $A = \frac{l \cdot h}{2}$. Si el polígono de la base tiene n lados, entonces el área lateral de la pirámide será:

$$A_L = n \cdot \frac{l \cdot h}{2} = \frac{(n \cdot l) \cdot h}{2}$$

$$A_L = \frac{p \cdot h}{2}$$

donde p es el perímetro de la base y h es la altura de los triángulos de las caras laterales.

Para hallar el área total, sumamos al área lateral el área del polígono de la base:

$$A_T = A_L + B$$

Si la pirámide no es regular tendremos que calcular, por separado, el área de cada cara, pues los triángulos isósceles laterales no serán congruentes.

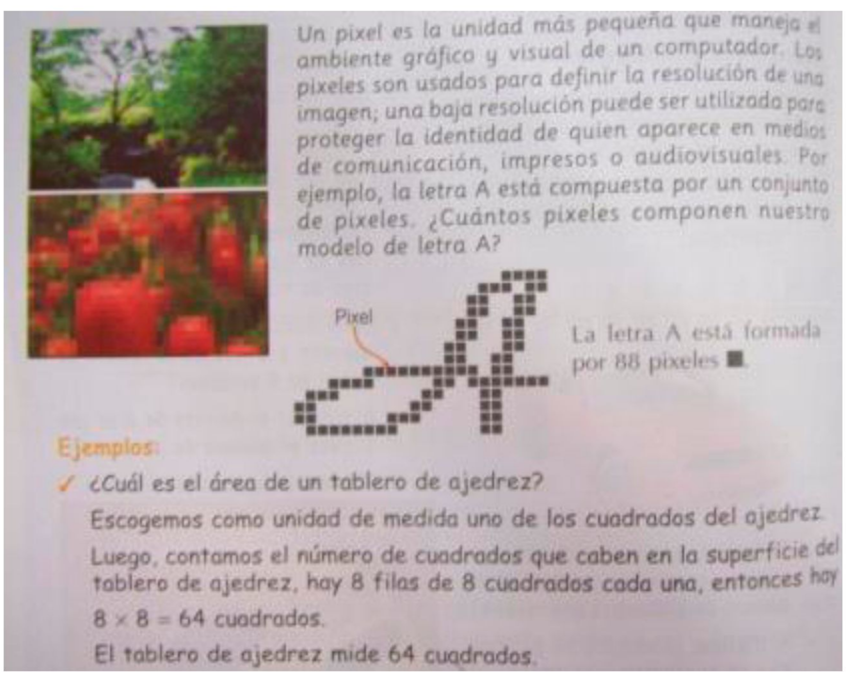
[30] Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 8°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A. (pp. 291).

Observación:

Lo que podemos concluir después de lo analizado en muchos textos, es que el concepto es enseñado teniendo en cuenta el nivel cognitivo de los estudiantes, ya que a medida que se avanza de grado el concepto abarca relaciones más complejas, pero cuando son vinculadas con el entorno cultural, familiar y cotidiano, pueden ser mejor comprendidas.

Texto: Aciertos Matemáticos 3°

- En este texto nos presentan la noción de área, iniciando con una explicación del uso de los píxeles para definir la resolución de una imagen, la definición de área es: *"la medida en unidades cuadradas de igual tamaño necesarias para cubrir una superficie"*. (Ramírez, 2006. pp. 291). También se da un ejemplo mostrando como unidades de medida el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo; en el que es necesario contar el número de veces que la unidad está contenida en la figura, siendo este resultado el área. Utiliza además situaciones problema que alude a objetos de su contexto familiar, las conexiones son comparaciones de relación de desigualdad entre áreas de algunos lugares comunes de la institución.



Un pixel es la unidad más pequeña que maneja el ambiente gráfico y visual de un computador. Los pixeles son usados para definir la resolución de una imagen; una baja resolución puede ser utilizada para proteger la identidad de quien aparece en medios de comunicación, impresos o audiovisuales. Por ejemplo, la letra A está compuesta por un conjunto de pixeles. ¿Cuántos pixeles componen nuestro modelo de letra A?

Pixel

La letra A está formada por 88 pixeles ■.

Ejemplos:

✓ ¿Cuál es el área de un tablero de ajedrez?

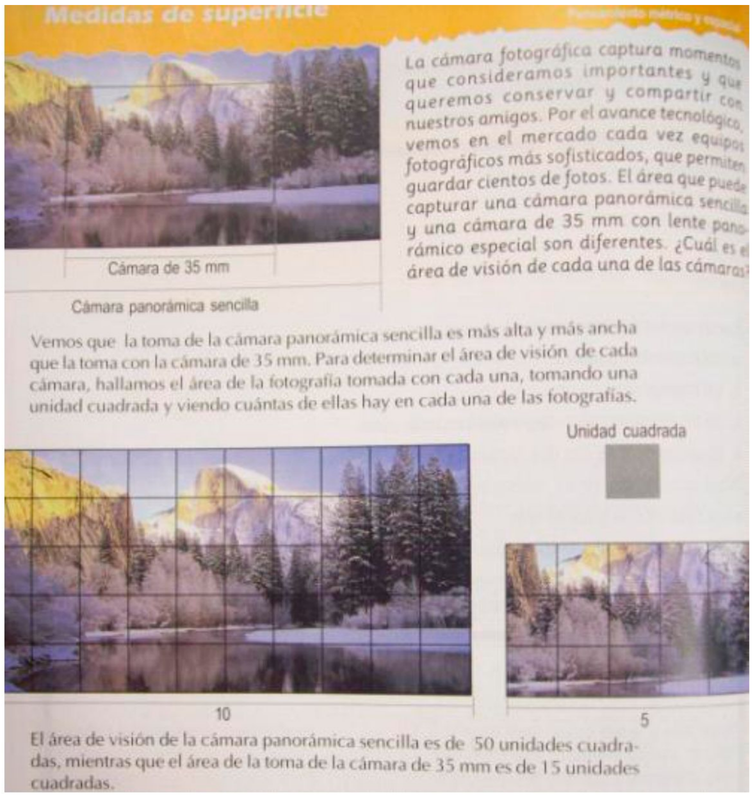
Escogemos como unidad de medida uno de los cuadrados del ajedrez.

Luego, contamos el número de cuadrados que caben en la superficie del tablero de ajedrez, hay 8 filas de 8 cuadrados cada una, entonces hay $8 \times 8 = 64$ cuadrados.

El tablero de ajedrez mide 64 cuadrados.

Texto: [31]Aciertos matemáticos 4°

S Este texto nos presenta el tema de área bajo el nombre de <u>unidades de superficie</u>, trabajando tanto el pensamiento métrico como el espacial. Explican áreas con un ejemplo del área de visión tomada por una cámara panorámica sencilla y una cámara de 35 mm. Con lente panorámico especial.


Medidas de superficie

La cámara fotográfica captura momentos que consideramos importantes y que queremos conservar y compartir con nuestros amigos. Por el avance tecnológico, vemos en el mercado cada vez equipos fotográficos más sofisticados, que permiten guardar cientos de fotos. El área que puede capturar una cámara panorámica sencilla y una cámara de 35 mm con lente panorámico especial son diferentes. ¿Cuál es el área de visión de cada una de las cámaras?

Cámara de 35 mm

Cámara panorámica sencilla

Vemos que la toma de la cámara panorámica sencilla es más alta y más ancha que la toma con la cámara de 35 mm. Para determinar el área de visión de cada cámara, hallamos el área de la fotografía tomada con cada una, tomando una unidad cuadrada y viendo cuántas de ellas hay en cada una de las fotografías.

Unidad cuadrada

10

5

El área de visión de la cámara panorámica sencilla es de 50 unidades cuadradas, mientras que el área de la toma de la cámara de 35 mm es de 15 unidades cuadradas.

Observación:

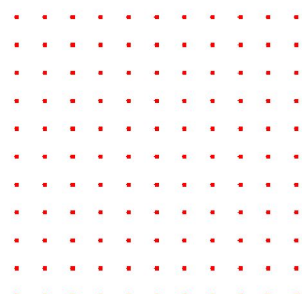
En la mayoría de textos, notamos que se muestran como unidad de medida para trabajar el concepto de área, la unidad cuadrada, y no presentan otras alternativas a los estudiantes para determinarla, por lo que consideramos importante enseñarle a los estudiantes a trabajar con diferentes unidades de medida, para que al enfrentarse al mundo real puedan hacer uso de éste. Cabe señalar que los ejemplos encontrados en algunos textos de primaria utilizan el lenguaje figural, ayudando así a contextualizar el concepto de área, mostrando los usos fuera del ámbito matemático y trabajando de una forma clara cómo otras figuras geométricas pueden ser usadas como unidades de medida.

[31] Ávila, T. J. (2006). *Aciertos Matemáticos 4.* (pp. 216). Bogotá: Editores Educar.

2. PROPUESTA METODOLÓGICA

3.1. PROCESO DE ELABORACIÓN DEL TEST

Antes de explicar el proceso de elaboración del test, en nuestro trabajo de investigación consideramos importante definir "geoplano"; pues no lo estamos tomando como un tablero cuadrado de madera, sino como un plano de puntos en el que se pueden dibujar diferentes figuras y así observar de manera más fácil el área de las mismas. El siguiente es el geoplano que utilizamos:



1. GUIÓN ENTREVISTA

Con el propósito de estudiar los diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes frente al concepto de área, planteados en la teoría de Van Hiele, se hicieron cinco preguntas sobre como determinar el área en figuras planas, centrándonos especialmente en el recubrimiento; sin descartar la posibilidad de modificación en caso de ser necesario. Estas preguntas las llamamos "guión entrevista".

Aplicamos el[32] lenguaje natural ("Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre estos símbolos" Van Hiele 1984[a],. 246) a nuestro guión

[32] **Lenguaje natural:** Este tipo de lenguaje es el que nos permite el designar las cosas actuales y razonar a cerca de ellas, fue desarrollado y organizado a partir de la experiencia humana y puede ser utilizado para analizar situaciones altamente complejas y razonar muy sutilmente. La riqueza de sus componentes semánticos da a los lenguajes naturales su gran poder expresivo y su valor como una herramienta para razonamiento sutil. Por otro lado la sintaxis de un LN puede ser modelada fácilmente por un lenguaje formal, similar a los utilizados en las matemáticas y la lógica. Pablo. (2007). *Lenguaje natural.* Recuperado en junio 25, 2008. Disponible en http://lengua.laguia2000.com/general/los-tipos-de-lenguaje

entrevista, ya que éste permite un mejor entendimiento al momento de realizar las preguntas y a la hora de enseñar la geometría.

Este guión entrevista lo aplicamos a personas de todas las edades, independientemente de su grado de escolaridad. Cada integrante del equipo se encargó de aplicarlo por separado a las personas de su entorno; para luego analizar las respuestas más relevantes y así poder mejorar su comprensión y anexar las opciones de respuesta para la elaboración del test. Tuvimos en cuenta el comportamiento de cada persona al realizar este guión (interpretación de preguntas, métodos de solución, opiniones en la estructura de la pregunta, entre otros), para establecer cuáles fueron las principales dificultades que se presentaron, tanto en la redacción de las preguntas como en la estructura de las mismas; y así poder determinar si dichas preguntas dan cuenta de la concepción que tienen las personas entrevistadas sobre el concepto de área.

Aclaramos que aunque el test en el anexo aparece a color, cuando se lo presentamos a las personas, se les entregó a blanco y negro.

2. PRIMER TEST

Con los resultados arrojados al aplicar el guión entrevista, nos dimos cuenta de la necesidad de realizar algunas modificaciones en la redacción e incluso sustituir algunas palabras para una mayor comprensión en algunas preguntas; ya que al momento de aplicarse el guión, las personas presentaban dificultades para resolverlo, porque no comprendían exactamente lo que se les pedía.

Como nos centramos en el tema de áreas, tomamos el recubrimiento de las figuras como estrategia para determinar el área de las mismas en la mayoría de las preguntas, ya que consideramos que ésta es una de las formas más fáciles de acceder al concepto sin utilizar [33]lenguaje formal.

[33] **Lenguaje formal:** Es una clase de lenguaje artificial en el que no sólo se construyen artificial y convencionalmente los símbolos propios del lenguaje, sino también sus reglas de construcción y sus reglas de transformación, convirtiéndose en la práctica en un cálculo. Los lenguajes formales, si adoptan además una interpretación, se convierten en lenguajes plenamente formalizados. Pablo. (2007). *Lenguaje formal.* Recuperado en junio 25, 2008. Disponible en http://lengua.laguia2000.com/general/los-tipos-de-lenguaje

En este test anexamos algunas preguntas donde:

1. Entra a jugar el color como forma de recubrimiento usando la figura de una casa construida con figuras geométricas básicas como triángulos, cuadrados y rectángulos y un trabajo común como lo es "pintar".

2. Se toma una pregunta trabajada anteriormente (la del mesón), pero ahora por fuera del geoplano, con la que se logra adquirir un mayor grado de complejidad y a la vez verificar la comprensión del concepto de área en contextos donde no se utiliza el geoplano.

3. Se tiene en cuenta que las imágenes utilizadas debían ser más nítidas y con mayor tamaño para una mejor visualización.

Además utilizamos algunas figuras como triángulos, paralelogramos, hexágonos y trapecios en las cuales el esquema de pregunta era de comparación. Para este tipo de preguntas, en ningún momento se utilizo el nombre de la figura geométrica que se presentaba; observando de esta manera, las habilidades en el análisis y comparación de las mismas.

También utilizamos imágenes cotidianas construidas con triángulos, cuadrados y rectángulos donde se hace necesario el recubrimiento, utilizando así el concepto de área.

3. SEGUNDO TEST

En este test utilizamos diferentes aplicaciones del concepto de área a través de otros conceptos matemáticos como rotación, traslación y el uso del teorema de Pitágoras.

Teniendo en cuenta las observaciones y los cambios realizados en el test anterior, en este se utilizaron algunas preguntas que contienen tanto el geoplano de puntos como el de cuadricula; con el fin de elegir cuál de los dos era más pertinente y cuál permitía una mayor comprensión del concepto para los entrevistados.

La mayoría de las preguntas que se anexaron al test, exigen del estudiante un mayor razonamiento y análisis, las diseñamos con base en situaciones reales, usando en ellas palabras del lenguaje natural tal y como lo mencionamos anteriormente. Además algunas de estas son de un nivel de razonamiento más alto.

4. TERCER TEST

En el siguiente test definimos trabajar con el geoplano de puntos, pues esta forma de representar el geoplano le exige al estudiante más concentración y análisis a la hora de responder cada pregunta.

Después de analizar lo contestado por los estudiantes a los test anteriores, definimos e incluimos las opciones de respuesta de selección múltiple con única respuesta, teniendo en cuenta las más representativas; dichas opciones nos servirán para posteriormente definir en cuál nivel de razonamiento se encuentra un estudiante frente al concepto de área.

Se eliminaron algunas preguntas, pues consideramos que el test estaba muy extenso, lo cual generaba en ciertos estudiantes malestar al momento de resolverlo, pues las últimas preguntas las contestaban al azar, dejando de lado el compromiso que habían adquirido o negándose a solucionarlo. Por lo tanto, decidimos eliminar las preguntas menos representativas en cuanto al concepto de área.

5. TEST FINAL

Según nuestro criterio, este test reúne todas las características necesarias para determinar en que nivel de razonamiento se encuentra un estudiante frente al concepto de área, además para el análisis estadístico que realizaremos posteriormente.

Los principales cambios realizados a este test los hicimos en ciertos enunciados que en su contenido debían dar cuenta de dos preguntas diferentes, lo cual dificultaría nuestro análisis estadístico. Por lo tanto, a este tipo de preguntas decidimos reducirlas para que quedaran en una sola, eliminando las que consideramos eran menos relevantes o sacando dos preguntas; para darle mayor facilidad a los estudiantes al momento de contestar. (Ver anexo 1).

3.2. DESCRIPTORES DE NIVEL

Para clasificar a los estudiantes, en un determinado nivel de razonamiento, utilizaremos algunos descriptores que nos permitirán observar el avance o retroceso frente al concepto a trabajar.

Entenderemos por descriptor:

"una proposición o un conjunto de proposiciones que expresan de manera concisa los conceptos y fundamentos que debe poseer o alcanzar un estudiante para ubicarse en los niveles de razonamiento de Van Hiele, en el desarrollo del aprendizaje matemático". (Gloria Valencia, 2006).

Definimos además, una serie de descriptores, que nos permitirán identificar que es lo que debe y no debe comprender un estudiante para ubicarse en un determinado nivel, estos descriptores los llamaremos de inclusión y separación respectivamente.

Los *descriptores de inclusión* son aquellos que se refieren a lo que el estudiante debe saber en cada nivel de razonamiento frente al concepto a trabajar.

Los *descriptores de separación* son aquellos que se refieren a lo que el estudiante aún no comprende de cada nivel de razonamiento frente a dicho concepto. (Cada descriptor de separación será un descriptor de inclusión en el nivel siguiente).

NIVEL 1

- Reconoce en general las figuras geométricas, las superficies triangulares, cuadradas, y redondas, entre otras, trazándolas en el geoplano.
- Reconoce algunos atributos de las figuras geométricas como: lados, vértices, segmentos.
- Hace una clasificación de las figuras por sus formas y semejanzas.
- Referencia prototipos visuales para caracterizar superficies cuando las representa en el geoplano.
- No concibe una variedad infinita de superficies.
- No usa las propiedades necesarias para realizar la clasificación de las superficies.

NIVEL 2

- Usa las propiedades necesarias para realizar la clasificación de las superficies.
- Reconoce las partes por las que están compuestas las superficies geométricas, para realizar recubrimientos.
- Compara las superficies geométricas explícitamente por medio de sus propiedades.
- Reconoce la congruencia de las figuras.
- Identifica, como unas figuras pueden formar otras.
- Identifica que de una figura puede sacar varias figuras.
- Utiliza las figuras que componen la superficie para determinar de cierto modo el área de ésta.
- Reconoce los atributos simples y necesarios para las relaciones de área en diferentes superficies, sin haber definido aún el concepto.
- Utiliza el geoplano para hallar el área de las figuras pero solo de forma visual.
- No posee aún definiciones claras sobre área.

NIVEL 3

- Forma definiciones de superficie y área.
- A través de las definiciones puede llegar a las relaciones que hay entre las superficies y el concepto de área.
- Reconoce igualdad entre algunas áreas.
- Reconoce que algunas figuras pueden tener igual área pero diferente forma.
- Reconoce que el área de algunas figuras se pueden hallar sumando el área de otra que conoce y que está contenida en esta.

- Reconoce la relación existente entre los lados de las figuras con el área experimentando con el geoplano.
- Utiliza las propiedades geométricas para hallar el área de las figuras, más no tiene mayor implicación de por que se hace de esa forma.

NIVEL 4

- Utiliza las propiedades geométricas para hallar el área de las figuras, reconociendo el por que se hace de esa forma.
- Cuando tiene superficies de las que desconoce las propiedades geométricas para determinar el área; las descompone en figuras en las que si conoce sus propiedades.
- Demuestra que dos superficies diferentes tienen igual área.
- Calcula el área de una superficie con una determinada unidad de medida fuera del geoplano.
- Generaliza lo trabajado en el geoplano a problemas por fuera de éste.
- Demuestra algunas propiedades de las superficies geométricas, pero no de una manera formal (axiomática).

3.3. PREGUNTAS SEPARADAS POR NIVELES

Para determinar el nivel de razonamiento de un estudiante frente al concepto de área, hemos diseñado un test entrevista con preguntas que corresponden a los niveles de razonamiento de Van Hiele, tomando sólo los cuatro primeros. A continuación mostraremos cómo organizamos estas preguntas por niveles (conservando el número de cada una en el test final), teniendo en cuenta los descriptores y lo pretendido en cada nivel.

Nivel 1

Trabajando el concepto de área en este nivel, partimos del reconocimiento de las superficies ya que es considerado el más elemental en el razonamiento de un estudiante, cuando éste se enfrenta a un concepto nuevo.

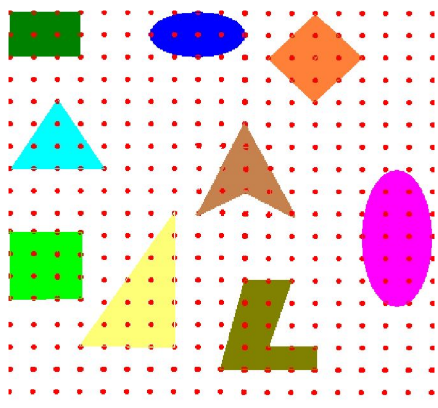
Estas preguntas nos permitirán saber si el estudiante:

- Reconoce en general las figuras geométricas, las superficies triangulares, cuadradas y redondas, entre otras, las cuales están trazadas en el geoplano.
- Reconoce algunos atributos de las figuras geométricas como: lados, vértices, segmentos.
- Hace una clasificación de las figuras por sus formas y semejanzas.

- Referencia prototipos visuales para caracterizar superficies cuando las representa en el geoplano.

En este nivel tendremos en cuenta dos preguntas, las cuales consideramos fundamentales para identificar si los estudiantes tienen conocimientos sobre conceptos geométricos básicos; además, si responden a estas preguntas, se verá el compromiso en la elaboración del test, pues estas son las más elementales.

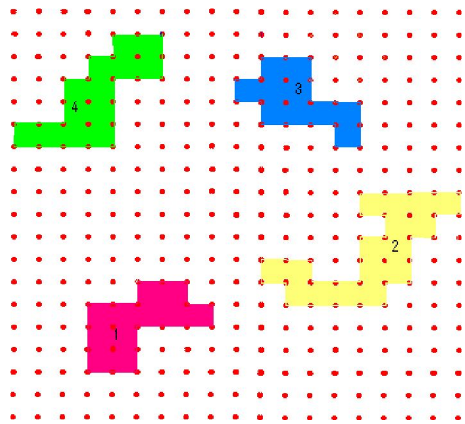
1. Observa las siguientes figuras hechas en el geoplano y responde.



¿Cuántos rectángulos y cuántos triángulos hay en el geoplano?

a. 1 rectángulo y 2 triángulos
b. 2 rectángulos y 1 triángulos
c. 3 rectángulos y 2 triángulos
d. 3 rectángulos y 3 triángulos
e. Ninguna de los anteriores

2. Describe cuantos lados tiene cada una de las figuras.



a. 1) 6 2) 12 3) 11 4) 11

b. 1) 8 2) 14 3) 12 4) 12

c. 1) 9 2) 20 3) 14 4) 13

d. 1) 10 2) 20 3) 12 4) 12

e. Ninguna de los anteriores

Nivel 2

En este nivel, los estudiantes cambian la forma de mirar las figuras geométricas, y son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y ciertas propiedades.

Estas preguntas nos permitirán saber si el estudiante:

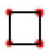
- S Usa las propiedades necesarias para realizar la clasificación de las superficies.
- S Reconoce las partes por las que están compuestas las superficies geométricas, para realizar recubrimientos.
- S Compara las superficies geométricas explícitamente por medio de sus propiedades.
- S Identifica, como unas figuras pueden formar otras.
- S Identifica que de una figura puede sacar varias figuras.

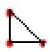
S Utiliza las figuras que componen la superficie para determinar de cierto modo el área de ésta.

S Reconoce los atributos simples y necesarios para las relaciones de área en diferentes superficies, sin haber definido aún el concepto.

S Utiliza el geoplano para hallar el área de las figuras pero solo de forma visual.

Por medio de estas preguntas, podemos identificar que el estudiante concibe el concepto de área de una manera intuitiva; utilizando algunas herramientas y propiedades de las superficies para determinarla, pero no posee todavía una definición clara.

3.  Este es un cuadrado

 Este triángulo es la mitad del cuadrado anterior.

¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados caben en cada una de las siguientes figuras?

a. 1) 2 triángulos 9 cuadrados 2) 2 triángulos y 5 cuadrados
3) 6 triángulos y 7 cuadrados 4) 6 triángulos y 11 cuadrados
5) 4 triángulos y 6 cuadrados

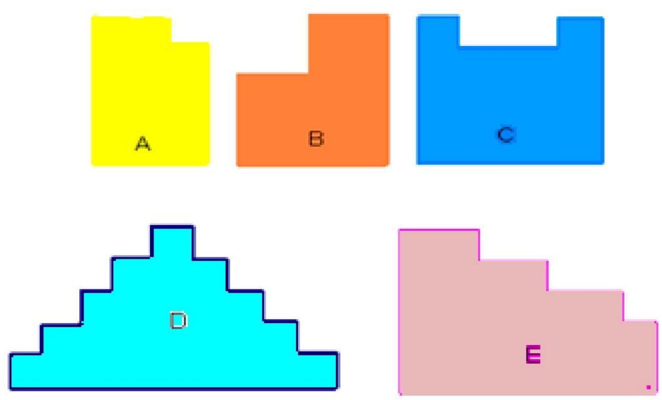
b. 1) 20 triángulos y 10 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 14 cuadrados
5) 16 triángulos y 8 cuadrados

c. 1) 20 triángulos 9 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 22 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 15 triángulos y 8 cuadrados

d. 1) 18 triángulos 10 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 16 triángulos y 10 cuadrados

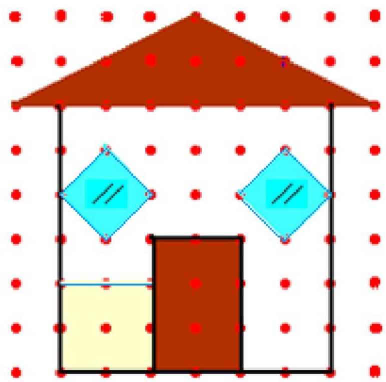
e. Ninguna de los anteriores

6. Determina cuál de las siguientes figuras ocupa mayor espacio y cuál menos



a. Mayor D menor A
b. Mayor E menor A
c. Mayor D menor B
d. Mayor C menor A
e. Ninguno de los anteriores

8. Carlos necesita pintar el frente de su casa de color crema. Con un tarro de pintura solo pudo pintar la parte que se muestra en la figura. ¿Cuántos tarros más necesitaría para recubrir con pintura lo que le falta?



a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. Ninguno de los anteriores

Nivel 3

En este nivel, los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática frente al concepto de área; determinando definiciones y presentando argumentos de manera informal; además, de usar diferentes figuras como unidades de medida de área, pero siempre considerando las propiedades como independientes.

Estas preguntas nos permitirán saber si el estudiante:

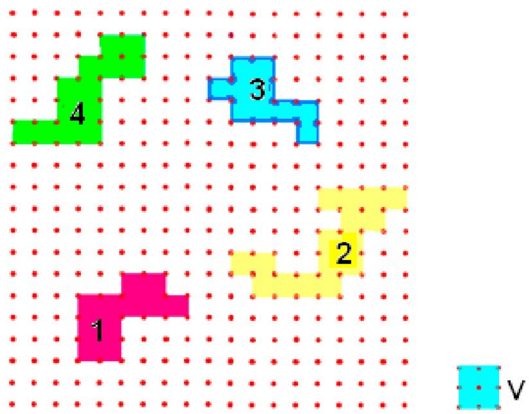
- Forma definiciones de superficie y área.
- A través de las definiciones puede llegar a las relaciones que hay entre las superficies y el concepto de área.
- Reconoce igualdad entre algunas áreas.
- Reconoce que algunas figuras pueden tener igual área pero diferente forma.

S Reconoce que el área de algunas figuras se puede hallar sumando el área de otra que conoce y que está contenida en esta.

S Reconoce la relación existente entre los lados de las figuras con el área experimentando con el geoplano.

S Utiliza las propiedades geométricas para hallar el área de las figuras, más no tiene mayor implicación de por qué se hace de esa forma.

4. Teniendo en cuenta el número de cuadrados que tiene v, observa con cuantas v se recubre cada una de las figuras dibujadas en el geoplano.



a. 1)3 2) 4 3) 2 4) 3

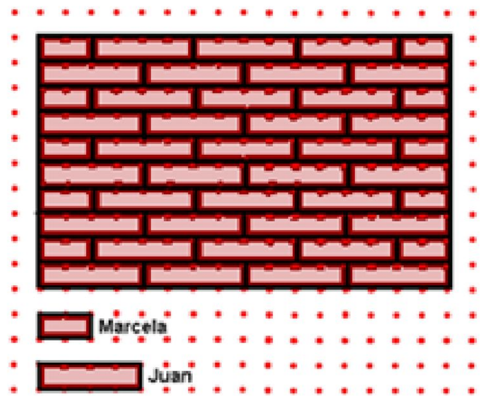
b. 1)2 2)2 3) 1 4)2

c. 1)1 2) 3 3) 3 4) 5

d. 1)4 2) 4 3) 2 4) 3

e. Ninguna de los anteriores

5. Marcela y Juan quieren construir un muro idéntico al de la figura utilizando cada uno de ellos un ladrillo de tamaño diferente. ¿Cuántos ladrillos necesitaría cada uno de ellos para construir el muro?



a. Marcela 35 y Juan 78

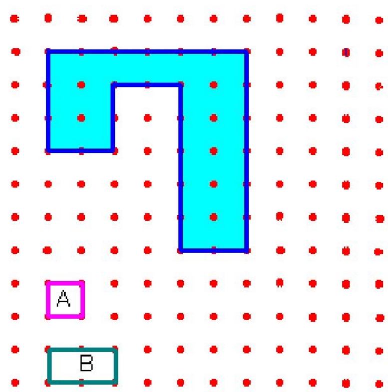
b. Marcela 10 y Juan 35

c. Marcela 80 y Juan 40

d. Marcela 120 y Juan 120

e. Ninguna de los anteriores

7. Marina quiere recubrir el mesón de la cocina utilizando uno de los dos baldosines



¿Cuántos baldosines necesita si va a utilizar el baldosín A y cuántos si va a utilizar el baldosín B?

a. 21 baldosines de A y 15 de B

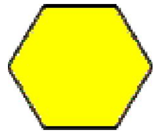
b. 20 baldosines de A y 10 de B

c. 30 Baldosines de A y 12 de B

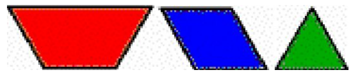
d. 26 Baldosines de A y 12 de B

e. Ninguno de los anteriores

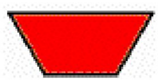
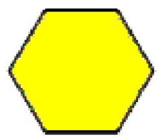
La figura siguiente es el hexágono regular.



Las siguientes figuras pueden obtenerse como partes del hexágono regular.



Q © € >

10. ¿Cuántos  hay en  ?

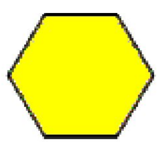
a. 4

b. 2

c. 6

d. 1

e. Ninguna de las anteriores

11. ¿Cuántos  hay en  ?

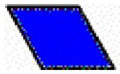
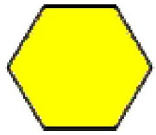
a. 12

b. 5

c. 6

d. 8

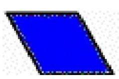
e. Ninguna de las anteriores

12. ¿Cuántos  hay en 

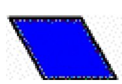
a. 2
b. 4
c. 3
d. 6
e. Ninguna de las anteriores

13. ¿Cuántos  hay en  ?

a. 3
b. 2
c. 4
d. 1
e. Ninguna de las anteriores

14. ¿Cuántos  hay en 

a. 4
b. 2
c. 3
d. 1
e. Ninguna de las anteriores

15. ¿Cuántos  hay en 

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. Ninguna de las anteriores

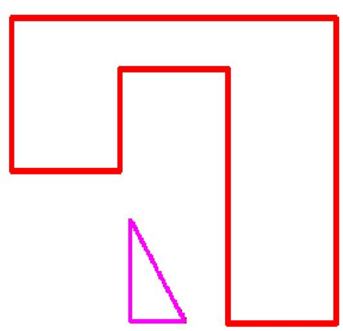
Nivel 4

En este nivel, los estudiantes tienen en cuenta las propiedades, definiciones y teoremas pertenecientes al área de figuras planas en cuanto a relaciones de orden, sin hacer todavía razonamientos abstractos.

Estas preguntas nos permitirán saber si el estudiante:

- Utiliza las propiedades geométricas para hallar el área de las figuras, reconociendo el por que se hace de esa forma.
- Cuando tiene superficies de las que desconoce las propiedades geométricas para determinar el área; las descompone en figuras en las que si conoce sus propiedades.
- Demuestra que dos superficies diferentes tienen igual área.
- Calcula el área de una superficie con una determinada unidad de medida fuera del geoplano.
- Generaliza lo trabajado en el geoplano a problemas por fuera de éste.

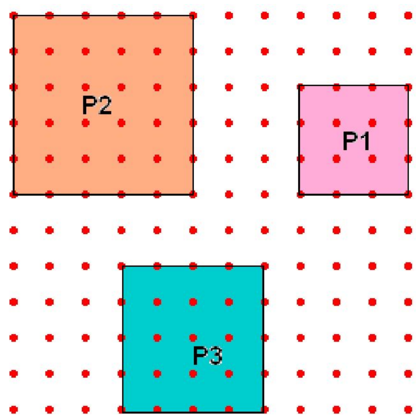
1. Marina quiere recubrir el mesón de la cocina con un baldosín triangular como el de la figura. ¿Cuántos baldosines necesita para cubrirlo?



   a. 11
   b. 18
   c. 31
   d. 20
   e. Ninguno de los anteriores

16. Sebastián desea recubrir tres de los pisos de su casa con baldosín, para hacerlo contrata a una persona experta en este tipo de trabajos. Sebastián le dice a la persona encargada de realizar el trabajo que cada piso cumple las siguientes características:

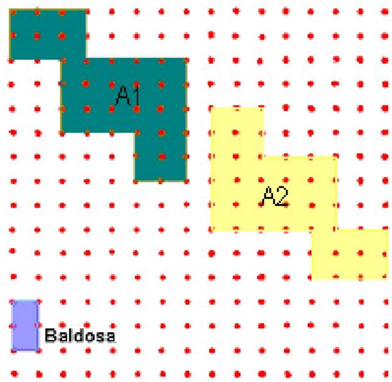
- Cada piso tiene la misma medida tanto de largo como de ancho.
- P2 tiene igual tamaño que la suma de P1 y P3.
- Todos los pisos están divididos en pequeñas partes iguales.
- Cada pequeña parte se gasta un baldosín.



La persona encargada de recubrir los pisos no está muy convencida de la segunda característica. ¿Cómo le explicarías al trabajador que P2 tiene el mismo tamaño que P1 más P3?

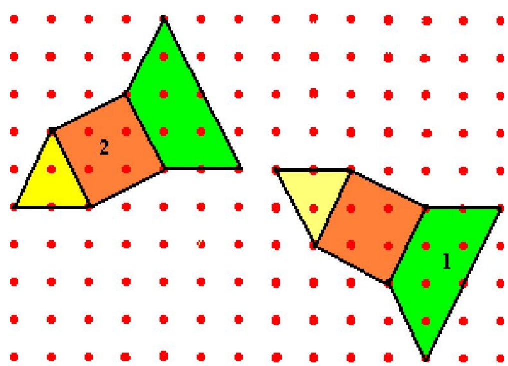
a. Sumar los baldosines que tienen P1 y P3 y comparar la suma con el total de baldosines de P2.
b. Restar los baldosines que tienen P1 y P3 y comparar la resta con el total de baldosines de P2.
c. Restar de P1 los baldosines que tiene P2 y comparar la resta con el total de baldosines de P3.
d. Sumar los baldosines que tienen P2 y P3 y comparar la suma con el total de baldosines de P1.
e. Ninguna de las anteriores.

17. Pedro y Jaime fueron contratados para recubrir con baldosas el piso de dos apartamentos, utilizando una baldosa de igual tamaño (como se muestra en la figura). Pedro dice que el piso del apartamento 1 necesita más baldosas que el piso del apartamento 2. por el contrario Jaime dice que se necesitan igual número de baldosas para cada apartamento. ¿Quién tiene la razón Pedro o Jaime?



a. Pedro al afirmar que el apartamento 1 necesita más baldosines que el apartamento 2.
b. Jaime Al afirmar que el apartamento 2 necesita más baldosines que el apartamento 1.
c. Pedro y Jaime.
d. Pedro al afirmar que ambos apartamentos necesitan igual cantidad de baldosas.
e. Ninguna de las anteriores

18. Observa las siguientes figuras y determina que pasó con la figura 1 en relación con la figura 2.



a. Fue trasladada

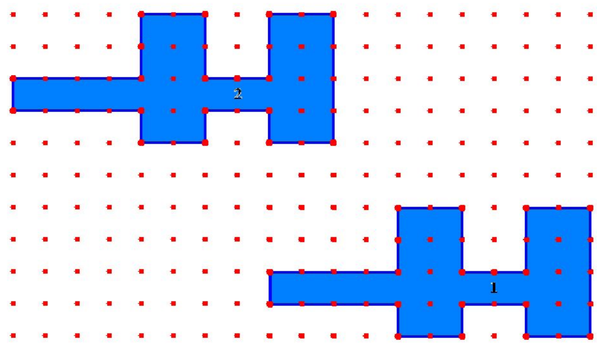
b. Es simétrica

c. Fue rotada

d. Fue trasladada y rotada

e. Ninguna de las anteriores

19. Observa las siguientes figuras y determina que pasó con la figura 1 en relación con la figura 2.



a. Fue trasladada

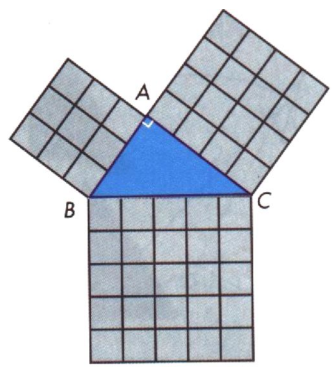
b. Es simétrica

c. Fue rotada

d. Fue trasladada y rotada

e. Ninguna de las anteriores

20. el siguiente triángulo rectángulo ABC.



Si construimos un cuadrado en cada lado del triángulo rectángulo y lo dividimos en cuadrados iguales:

a) ¿Cuántos cuadrados pequeños caben en cada cuadrado formado en los lados del triángulo?

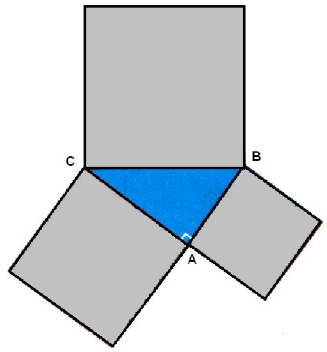
a. Lado AB 12, lado BC 20 y lado AC 15
b. Lado AB 6, lado BC 10 y lado AC 8
c. Lado AB 9, lado BC 25 y lado AC 16
d. Lado AB 9, lado BC 25 y lado AC 14
e. Ninguna de las anteriores

21. Teniendo en cuenta la información anterior, responde:

¿Qué relación puedes ver entre el número de cuadrados de lado BC y el número de cuadrados de los otros dos lados?

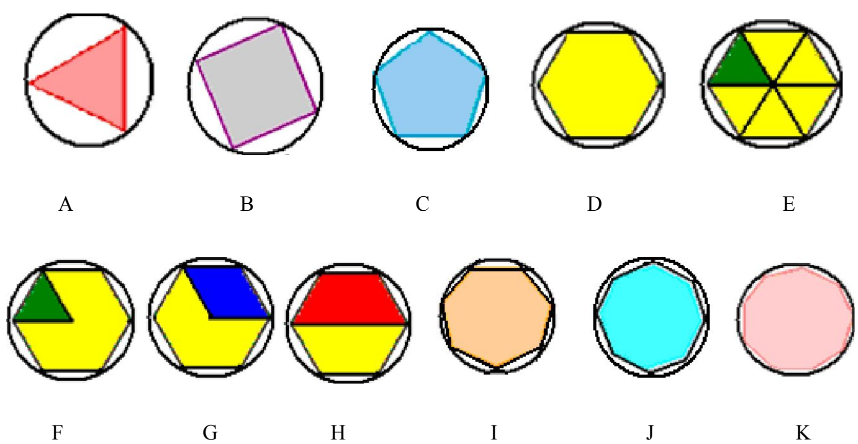
a. El número de cuadrados del lado BC es la resta de los cuadrados de los otros dos lados.
b. El número de cuadrados del lado BC es la suma de los cuadrados de los otros dos lados.
c. El número de cuadrados del lado BC es el triple de los cuadrados de los otros dos lados.
d. El número de cuadrados del lado BC es el doble de los cuadrados de los otros dos lados.
e. Ninguna de las anteriores.

22. Si el triángulo fuera el siguiente, ¿Qué relación puedes ver entre el cuadrado de lado BC y los otros dos cuadrados?



a. El cuadrado de lado BC es la resta de los otros dos cuadrados.
b. El cuadrado de lado BC es la suma de los otros dos cuadrados.
c. El cuadrado de lado BC es el triple de los otros dos cuadrados.
d. El cuadrado de lado BC es el doble de los otros dos cuadrados.
e. Ninguna de las anteriores.

23. Si quisiéramos recubrir el círculo con una de las siguientes figuras, ¿cuál de ellas utilizarías para hacerlo y por qué?



a. C, porque cabe en el círculo
b. K, porque con ésta se podría recubrir casi todo el círculo
c. J, porque ésta tiene menos lados que k
d. E, porque está formada por más figuras
e. Ninguna de las anteriores

4. RESULTADOS

4.1. SÍNTESIS E INTERPRETACIÓN DEL DIAGNÓSTICO

4.1.1. Institución Educativa Concejo de Medellín

Ambiente físico

En términos generales la institución educativa tiene una planta amplia y ordenada, pero no en todos sus espacios se pueden realizar actividades que fomenten el aprendizaje y la convivencia de los estudiantes, pues los diferentes espacios institucionales son apenas suficientes para las labores académicas que ellos realizan. En la sede donde se realizó la práctica (sede anexo), faltan áreas de recreación y esparcimiento; además hay aulas que no están en las mejores condiciones porque cuentan con muy poca ventilación.

La institución cuenta con una dotación de equipos que permiten un acceso eficiente a la tecnología.

Diseño pedagógico

Cuentan con un proceso que permite ajustar las prácticas del aula a las condiciones cognitivas, emocionales y de desarrollo que tienen los estudiantes. Al ingresar a la institución a estos se les hace un seguimiento de su desempeño académico y disciplinario para que se facilite el proceso de enseñanza aprendizaje.

Poseen un plan de estudio estructurado que es llevado a cabo durante todo el año académico y revisado al final para adecuarlo a las necesidades presentadas por los estudiantes.

Los diferentes recursos para el aprendizaje, como lo son la biblioteca y las ayudas audiovisuales son insuficientes; pues no hay demasiados libros disponibles para préstamo de los estudiantes, tampoco hay materiales didácticos para los docentes ni un aula especial para matemáticas.

Metodología

Los docentes reconocen la importancia de una metodología activa, y han emprendido algunas experiencias innovadoras en ese sentido, sin que por ello deje de predominar el aprendizaje receptivo, repetitivo y memorístico; los docentes disponen de la autonomía para implementar dicha metodología y además son conscientes del gran aporte que tienen en el proceso de aprendizaje. Se nota claramente que hay poca coordinación por niveles y áreas, y cuando se presenta es para actividades extracurriculares. No existe transversalidad en las diferentes áreas de matemáticas, lo que hace que no se enriquezca el proceso pedagógico.

Gestión de aula

En cuanto a la relación maestro-estudiante, estudiante-estudiante, las practicas pedagógicas cuentan con rutinas y practicas institucionales que fomentan la estructuración de formas de interacción en el aula a distinto nivel, como un pilar del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se le da importancia a la planeación como la estrategia a través de la cual es posible establecer y aplicar el conjunto ordenado de actividades estructuradas y articuladas, con ayuda de recursos didácticos para la asimilación de los contenidos por parte de los estudiantes, el maestro tiene autonomía para realizar su planeación y diseñar alternativas didácticas y pedagógicas para dictar las clases diferentes al estilo magistral.

La evaluación es continua y se hace tanto a nivel grupal como individual para observar la evolución y construcción de los saberes por parte de los estudiantes.

Seguimiento y evaluación

El seguimiento que se hace a los resultados académicos de los alumnos, genera procesos sistemáticos por medio de un consolidado de toda la institución en donde se observan las fortalezas y debilidades permitiendo así la retroalimentación de acuerdo a los requerimientos. Para superar las debilidades, la institución cuenta con actividades de recuperación y si estas son ocasionadas por problemas difíciles de aprendizaje, se aplican estrategias por parte de los docentes con la ayuda de la maestra de apoyo.

4.1.2. <u>Institución Educativa Octavio Calderón Mejía</u>

Ambiente físico

La sede da la institución es limpia y organizada. Los diferentes espacios son amplios y suficientes, los cuales están adecuadamente dotados para propiciar un buen ambiente de aprendizaje y de convivencia, ya que sus estudiantes se sienten a gusto y estimulados en ella.

Diseño pedagógico

La institución cuenta con un proceso a partir del cual logra tener prácticas pedagógicas adaptadas en su conjunto a la situación cognitiva, emocional y de desarrollo de sus estudiantes. Se encuentra una precaria dotación de libros y textos para apoyar el aprendizaje, que no circulan ni se usan. Pero del mismo modo, observamos que existe material didáctico y audiovisual suficiente y apropiado. La institución también cuenta con una adecuada y actualizada dotación de equipos y software, resultado de la aplicación de una política institucional clara y equitativa sobre la adquisición y uso de tecnologías de información y comunicación.

Metodología

El tiempo está bien distribuido entre lo académico, lo cultural, lo deportivo y las actividades de coordinación y consolidación del equipo docente, además se observa un uso responsable de la jornada académica de toda la institución.

Encontramos que existe una política institucional que desarrolla la estrategia en el PEI (Proyecto Educativo Institucional), desde la que se fomenta la implementación de metodologías que propicien la investigación y la experimentación (laboratorios, consultas, salidas, proyectos) como formas privilegiadas del aprendizaje participativo.

Hay una coordinación general en el tratamiento de las diferentes áreas por medio de proyectos o de actividades transversales.

Gestión de aula

Los diferentes grupos de docentes realizan actividades coordinadas para estructurar la interacción en el aula a distintos niveles en el proceso educativo, reconociendo la planeación como estrategia a través de la cual es posible definir recursos didácticos y procesos evaluativos. También existen esfuerzos colectivos para trabajar con alternativas en la clase magistral, donde la mayoría de docentes implementan un proceso de evaluación en el aula como es la evaluación inicial, la evaluación formativa, la evaluación al final de cada unidad didáctica y la sumativa de los saberes construidos.

Seguimiento y evaluación

Existen mecanismos claros de retroalimentación para los estudiantes y sus padres a partir del seguimiento a los resultados académicos, donde hasta un 70% alcanza satisfactoriamente los logros académicos en la mayoría de las áreas. Se hacen actividades periódicas de recuperación, que producen resultados variables; además se combinan recursos internos y externos para abordar los casos de bajo rendimiento académico y de problemas de aprendizaje, haciendo seguimiento sistemático de su evolución.

4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Esta investigación se da a partir del modelo mixto, ya que participa de la naturaleza de la investigación documental (porque estamos apoyados en la teoría de Van Hiele) y de la investigación de campo (realizada en las Instituciones Educativas Concejo de Medellín y Octavio Calderón Mejía). La muestra elegida, es una muestra *no aleatoria,* ya que se seleccionaron dos grados para ser intervenidos (8° y 11°), sin supeditarse a los beneficios de la probabilidad; es decir, los grados fueron escogidos sin haber realizado cálculos para elegir al azar los estudiantes como es el caso de la *muestra aleatoria,* ya que ésta es una muestra sacada de una población de manera que todo elemento de la población tenga la misma probabilidad de ser seleccionada.

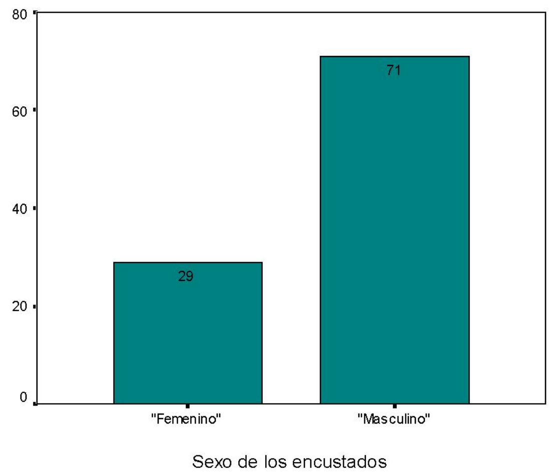
Para poder hacer un análisis de los resultados obtenidos en el test, trabajaremos con la ayuda del software SPSS (Statistical Product and Service Solutions), este constituye un sistema amplio y flexible de análisis estadístico y de gestión de datos en un entorno gráfico, que tiene como ventaja, que es de fácil manejo para lograr el equilibrio adecuado entre la capacidad estadística, el nivel de confianza y el tamaño de efecto esperado para llegar al tamaño de muestra apropiado, es decir, llega a un tamaño de muestra comprensible en diversas situaciones comunes de análisis.

Este nos facilitará el trabajo puesto que nos permite la definición de variables, registrar los datos y analizar gráficos y estadísticos. Además:

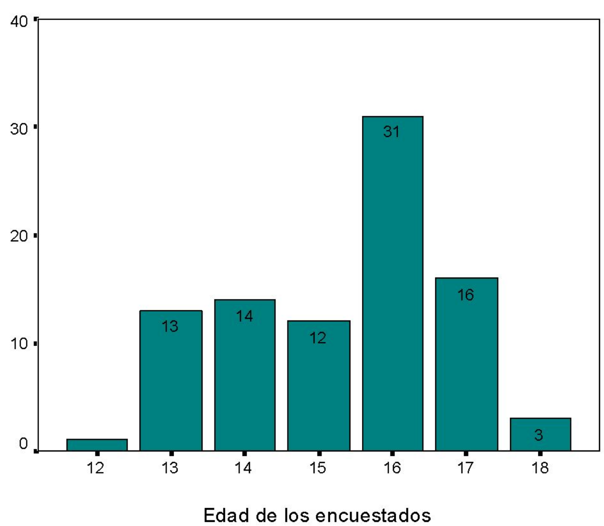
- S Permite un importante ahorro de tiempo y esfuerzo, realizando en un tiempo más reducido un trabajo que requiere de largas horas e incluso días de dedicación.
- S Hace posible cálculos más exactos, evitando los redondeos y aproximaciones del cálculo manual.
- S Permite trabajar con grandes cantidades de datos, utilizando muestras mayores e incluyendo más variables.
- S Permite trasladar la atención desde las tareas mecánicas de cálculo a las tareas conceptuales: decisiones sobre el proceso, interpretación de resultados, análisis crítico, etc.

Las variables elegidas para esta investigación son:

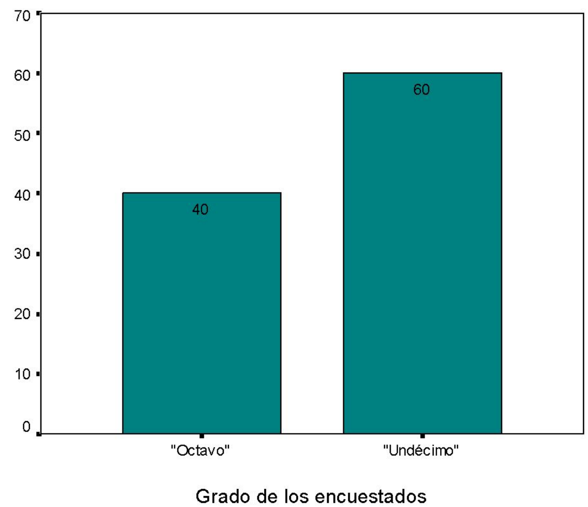
- **Sexo:** lo consideramos importante ya que nos permite observar la cantidad tanto de mujeres como de hombres que participaron en esta investigación. Al realizar una interpretación de la gráfica, es evidente que en la muestra hay más hombres que mujeres, teniendo los hombres el 71% del total de la muestra.



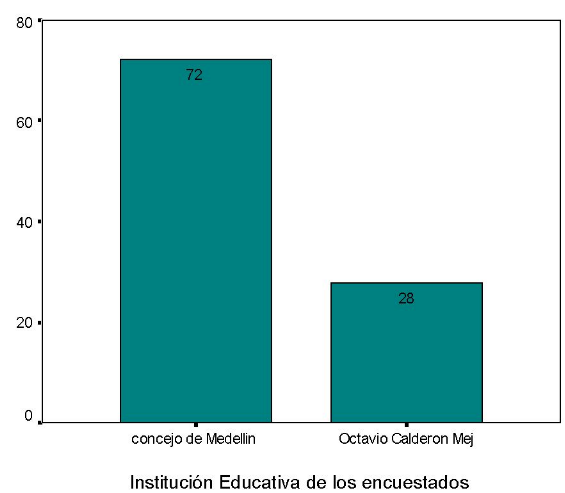
- **Edad:** consideramos importante esta variable, porque pretendemos analizar en que interviene la edad de los estudiantes, con la forma en que contestan determinadas preguntas del test; y así poder comparar los diferentes niveles en que se ubican los estudiantes. Al analizar la gráfica podemos observar que la edad más representativa en el total de la muestra es 16, con 31 estudiantes.



S **Grado:** decidimos trabajar esta variable, para hacer una comparación en los diferentes niveles en que se ubican los estudiantes teniendo en cuenta el grado. Podemos observar al analizar la gráfica, que en el grado octavo hay un 40% del total de los estudiantes y en el grado undécimo un 60% de la muestra.



S **Institución Educativa:** esta variable la consideramos importante, ya que nos permite conocer el porcentaje de estudiantes que están en determinada institución educativa. Al observar la gráfica podemos concluir que el mayor porcentaje de estudiantes está en el Concejo de Medellín con un 72% del total de la muestra. Por lo tanto, los análisis realizados referentes a las instituciones educativas se harán teniendo en cuenta los porcentajes de estudiantes por cada institución.



- **Total de respuestas acertadas:** Consideramos esta variable de gran importancia, pues nos permite observar el total de aciertos de cada estudiante frente a cada grupo de preguntas determinando así el nivel de razonamiento en el que se encuentran.

En este análisis pretendemos demostrar la validez o no de nuestras hipótesis iníciales, apoyados en el estudio de las preguntas más significativas que se pudieron encontrar en la solución del test por parte de los estudiantes, y así, con el uso de tablas y gráficos de barras presentar una información más detallada de los resultados arrojados por éste. Además, consideramos importante anexar las respuestas correctas al test que resolvieron los estudiantes. Estas son:

PREGUNTA	RESPUESTA CORRECTA
1	c
2	d
3	b
4	e
5	c
6	b
7	b
8	b
9	d
10	b
11	c
12	c

PREGUNTA	RESPUESTA CORRECTA
13	a
14	d
15	b
16	a
17	e
18	d
19	a
20	c
21	b
22	b
23	b

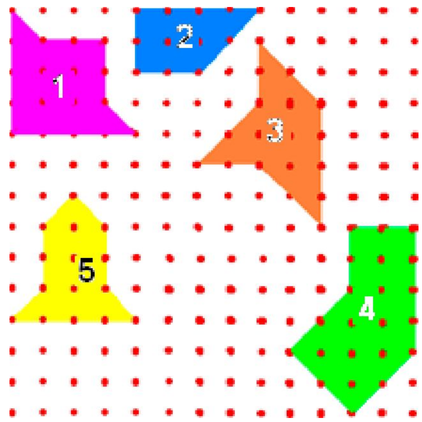
En primer lugar realizaremos un análisis descriptivo y luego un análisis de conglomerados.

4.2.1. ANÁLISIS DESCRIPTIVO

El siguiente análisis descriptivo lo realizamos con el fin de justificar la hipótesis que enunciamos anteriormente referente a la gran dificultad que tienen los estudiantes al reconocer que figuras de diferente superficie tienen igual área; para esto analizaremos las respuestas dadas a las preguntas 3, 4 y 5. Aunque estas preguntas no tienen como objetivo, que el estudiante determine cuales figuras tienen la misma área, de manera implícita se pretende que éste reconozca la igualdad que existe entre las figuras al hacer composición y descomposición para calcular sus áreas.

Pregunta 3

- Este es un cuadrado   ^ Este triángulo es la mitad del cuadrado anterior.



¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados caben en cada una de las siguientes figuras?

a. 1) 2 triángulos 9 cuadrados   2) 2 triángulos y 5 cuadrados
3) 6 triángulos y 7 cuadrados   4) 6 triángulos y 11 cuadrados
5) 4 triángulos y 6 cuadrados

b. 1) 20 triángulos y 10 cuadrados   2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados   4) 28 triángulos y 14 cuadrados
5) 16 triángulos y 8 cuadrados

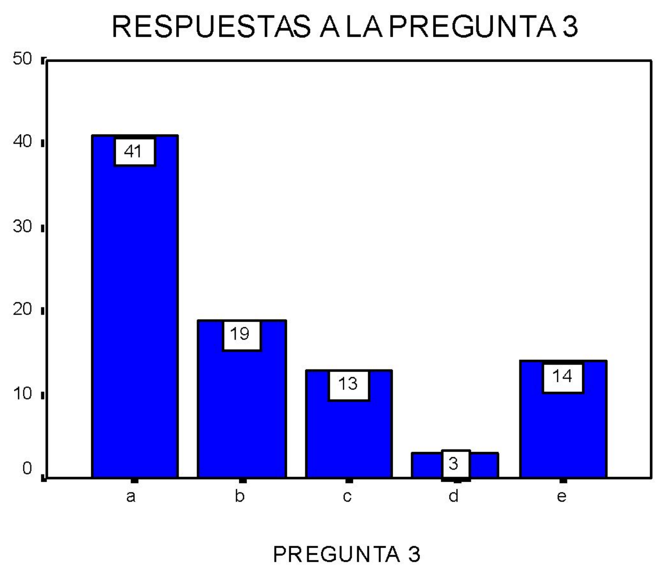
c. 1) 20 triángulos 9 cuadrados   2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 22 triángulos y 10 cuadrados   4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 15 triángulos y 8 cuadrados

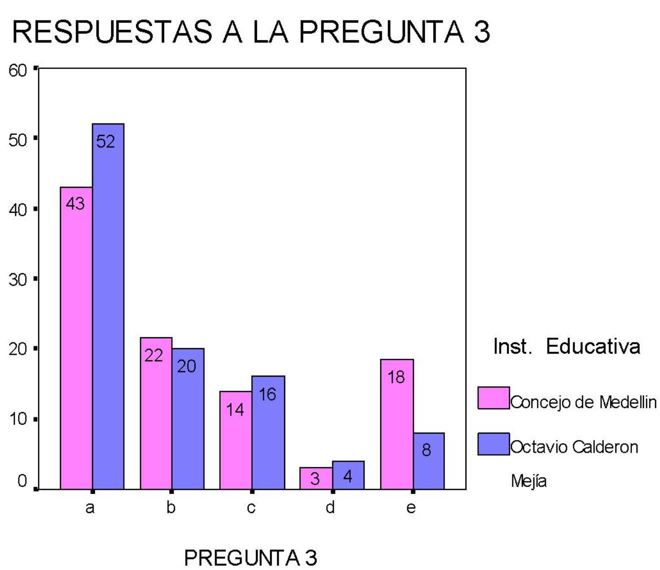
d. 1) 18 triángulos 10 cuadrados   2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados   4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 16 triángulos y 10 cuadrados

e. Ninguna de los anteriores

PREGUNTA 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	41	45,6	45,6	45,6
	b	19	21,1	21,1	66,7
	c	13	14,4	14,4	81,1
	d	3	3,3	3,3	84,4
	e	14	15,6	15,6	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





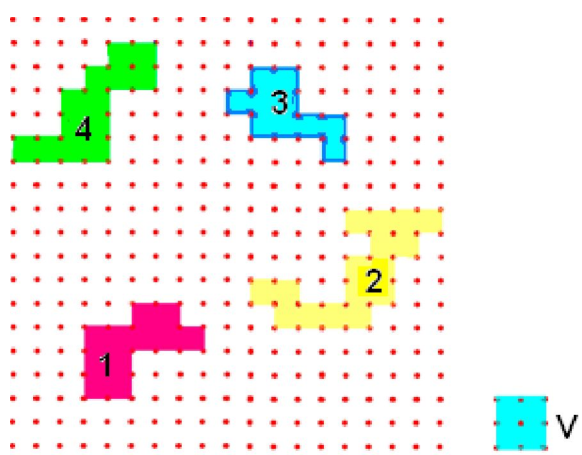
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción b.

En esta pregunta, pretendíamos que los estudiantes determinaran cuántas veces cabe el triángulo y cuántas veces el cuadrado en la figura (por separado). Por las respuestas obtenidas, suponemos que los estudiantes no tuvieron en cuenta la explicación dada al iniciar la pregunta, donde se aclaraba que el triángulo es la mitad del cuadrado, por lo tanto el procedimiento que realizaron fue contar sólo los cuadrados completos haciendo lo mismo con los triángulos.

Comparando los resultados de las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes de cada institución que contestaron de manera correcta es similar, pues solo presentan una diferencia del 2%.

Pregunta 4

Teniendo en cuenta el número de cuadrados que tiene v, observa con cuantas v se recubre cada una de las figuras dibujadas en el geoplano.



a. 1)3 2) 4 3) 2 4) 3

b. 1)2 2) 2 3) 1 4) 2

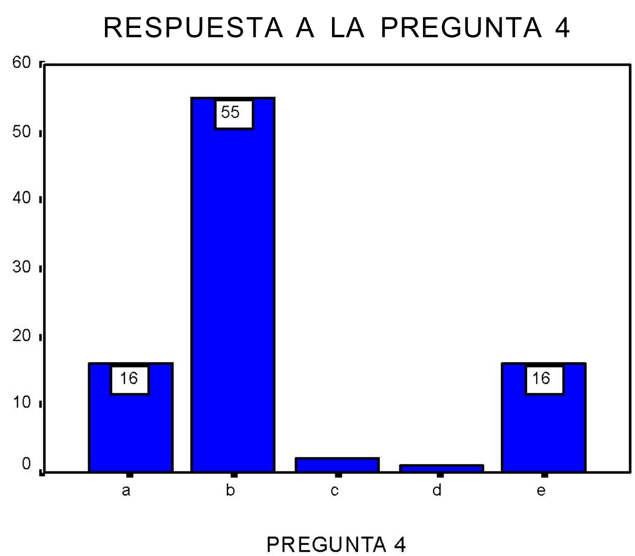
c. 1)1 2) 3 3) 3 4) 5

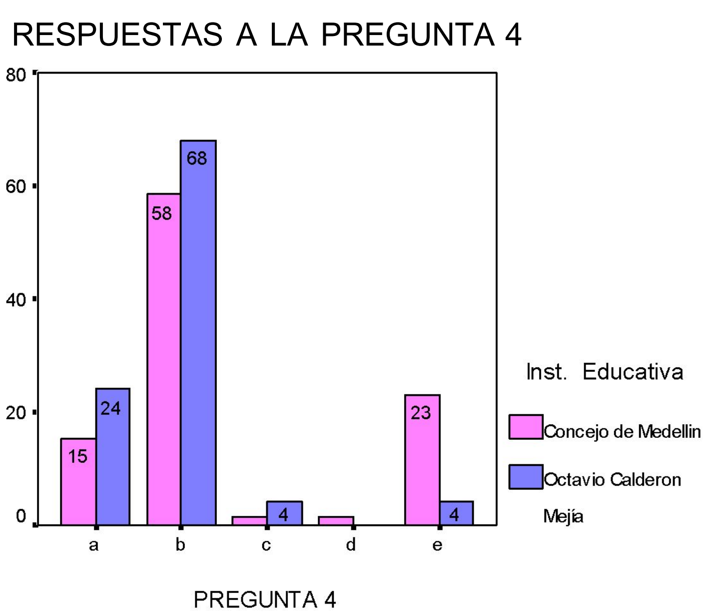
d. 1)4 2) 4 3) 2 4) 3

e. Ninguna de los anteriores

PREGUNTA 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	16	17,8	17,8	17,8
	b	55	61,1	61,1	78,9
	c	2	2,2	2,2	81,1
	d	1	1,1	1,1	82,2
	e	16	17,8	17,8	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





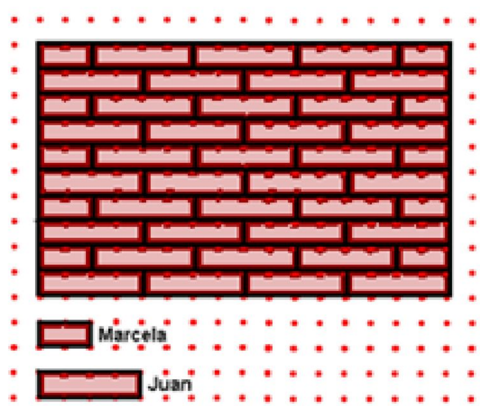
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción e.

En esta pregunta los estudiantes debían determinar cuántas veces estaba el cuadrado V en cada una de las otras figuras; para lograrlo, debían descomponer el cuadrado V y así decir cuántas veces cabía exactamente. Por las respuestas dadas concluimos que la equivocación se dio porque los estudiantes utilizaban esta unidad de medida como una plantilla sin tener en cuenta que se podía descomponer o mover sus partes.

Comparando las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes que contestaron esta pregunta de manera correcta, es mayor en la Institución educativa Concejo de Medellín con un 23%, mientras que en el Octavio Calderón Mejía solo es de un 4%.

Pregunta 5

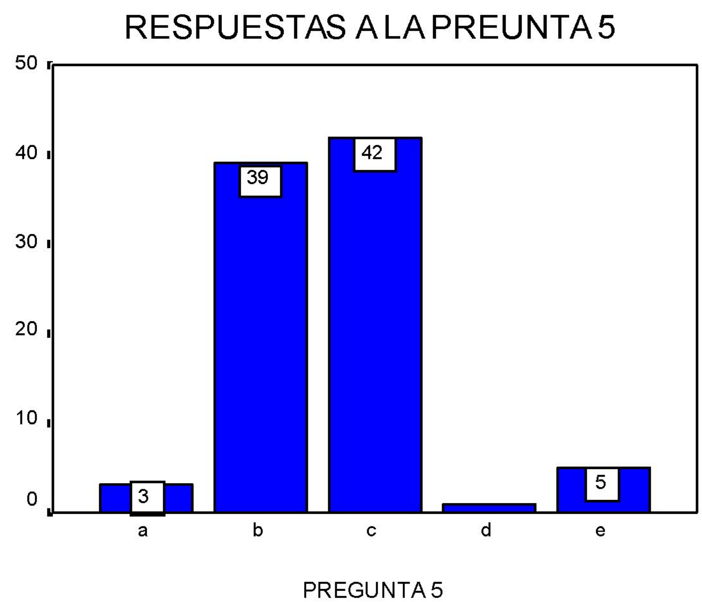
Marcela y Juan quieren construir un muro idéntico al de la figura utilizando cada uno de ellos un ladrillo de tamaño diferente. ¿Cuántos ladrillos necesitaría cada uno de ellos para construir el muro?

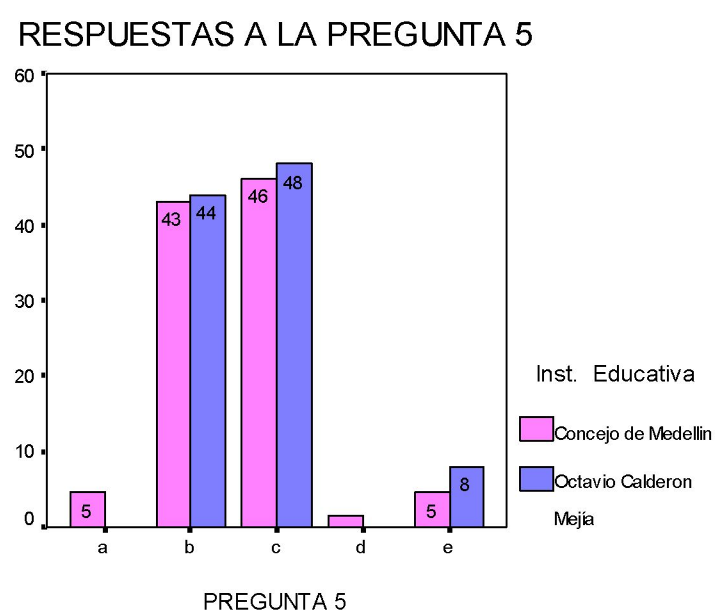


a. Marcela 35 y Juan 78
b. Marcela 10 y Juan 35
c. Marcela 80 y Juan 40
d. Marcela 120 y Juan 120
e. Ninguna de los anteriores

PREGUNTA 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	3	3,3	3,3	3,3
	b	39	43,3	43,3	46,7
	c	42	46,7	46,7	93,3
	d	1	1,1	1,1	94,4
	e	5	5,6	5,6	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





La respuesta correcta a esta pregunta es la opción c.
En esta pregunta les pedíamos a los estudiantes, que con cada ladrillo construyeran un muro como el que se les mostraba en el geoplano, pero lo que hizo la mayoría fue tomar cada ladrillo y con ambos construir el muro. Al igual que en las preguntas anteriores, los estudiantes no tuvieron en cuenta cada figura como unidad de medida, ni reconocieron que uno de los ladrillos contenía al otro dos veces, es decir, no tuvieron en cuenta que con cada uno por separado se debía construir el muro.

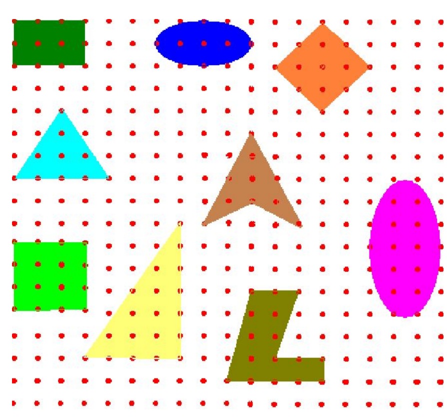
Además es importante resaltar, que cuando les decimos que el muro debe ser igual al de la figura, no lo toman en forma y tamaño sino en cómo está compuesta la figura, es decir, se fijaron en las veces que estaba cada ladrillo en el muro.

Comparando los resultados de las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes de cada institución que contestaron de manera correcta es similar, pues solo presentan una diferencia del 2%.

Otro de los aspectos que tendremos en cuenta para el análisis, son las preguntas en las que los estudiantes encontraron mayores dificultades a la hora de responder el test. Estas son:

Pregunta 1

Observa las siguientes figuras hechas en el Geoplano y responde.



¿Cuántos rectángulos y cuántos triángulos hay en el geoplano?

a. 1 rectángulo y 2 triángulos

b. 2 rectángulos y 1 triángulos

c. 3 rectángulos y 2 triángulos

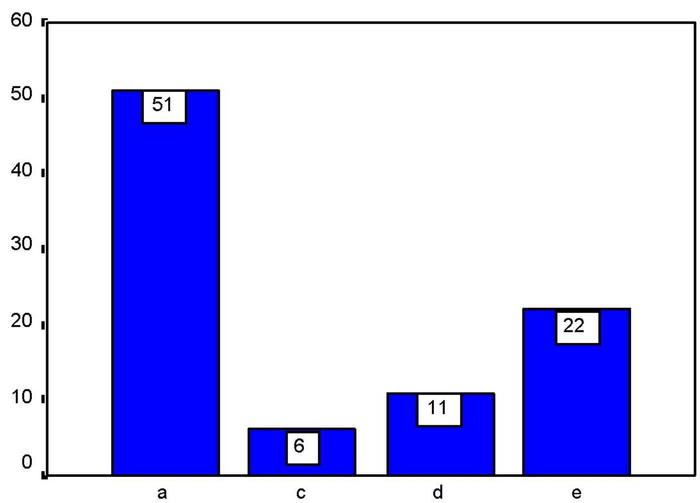
d. 3 rectángulos y 3 triángulos

e. Ninguna de los anteriores

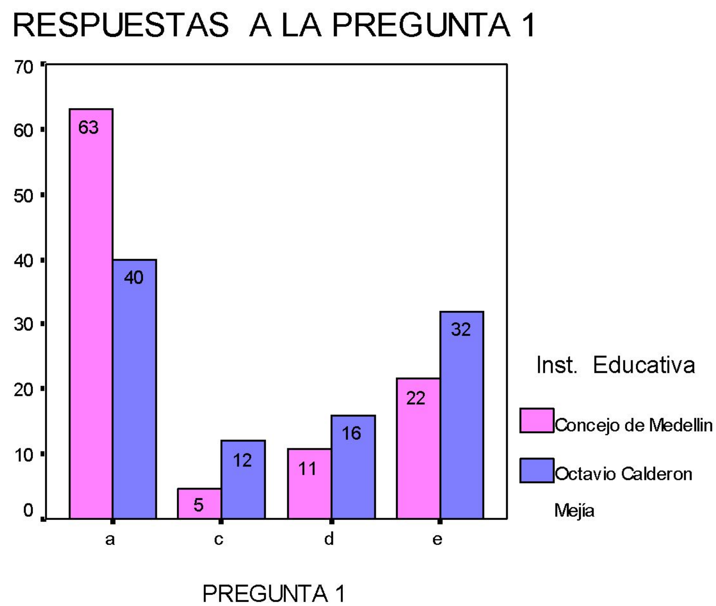
PREGUNTA 1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	51	56,7	56,7	56,7
	c	6	6,7	6,7	63,3
	d	11	12,2	12,2	75,6
	e	22	24,4	24,4	100,0
	Total	90	100,0	100,0	

RESPUESTAS A LA PREGUNTA 1



PREGUNTA 1



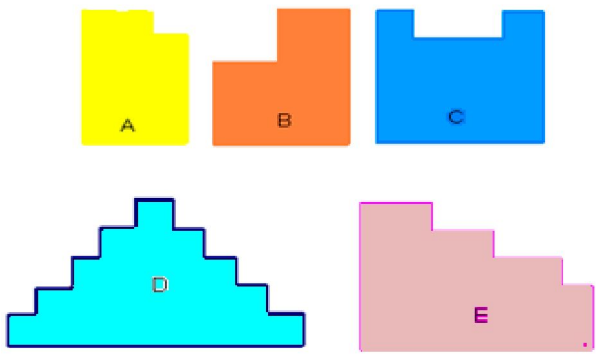
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción c.

Lo que pretendíamos con esta pregunta es identificar si los estudiantes reconocen algunas de las propiedades de las figuras planas, específicamente de los cuadriláteros; sin embargo también se preguntó por los triángulos, pero estos no eran tan relevantes en la pregunta, de tal modo que él reconociera que el rombo y el cuadrado también se pueden clasificar como rectángulos. Como vemos la mayoría respondió la opción ***a*** donde se dice que solo hay un rectángulo. Creemos que los estudiantes que respondieron esta opción relacionaron el concepto de rectángulo con la figura que tiene un lado mayor que el otro (largo, ancho) y no como el que tiene sus lados paralelos dos a dos y sus cuatro ángulos rectos.

Comparando las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes que contestaron esta pregunta de manera correcta, es menor en la Institución educativa Concejo de Medellín con un 5%, mientras que en el Octavio Calderón Mejía es de un 12%.

Pregunta 6

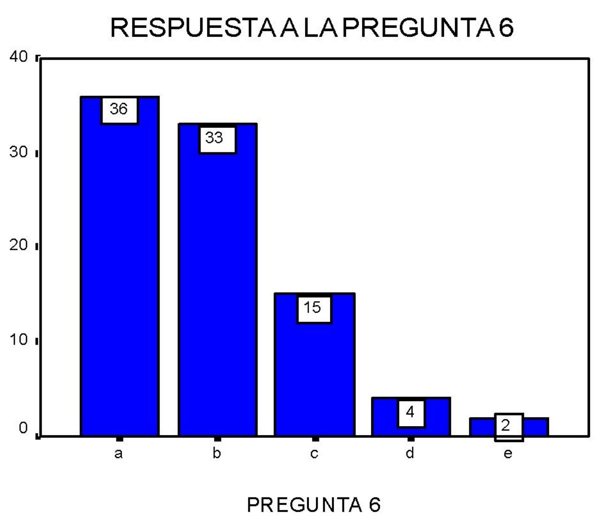
Determina cuál de las siguientes figuras ocupa mayor espacio y cuál menos

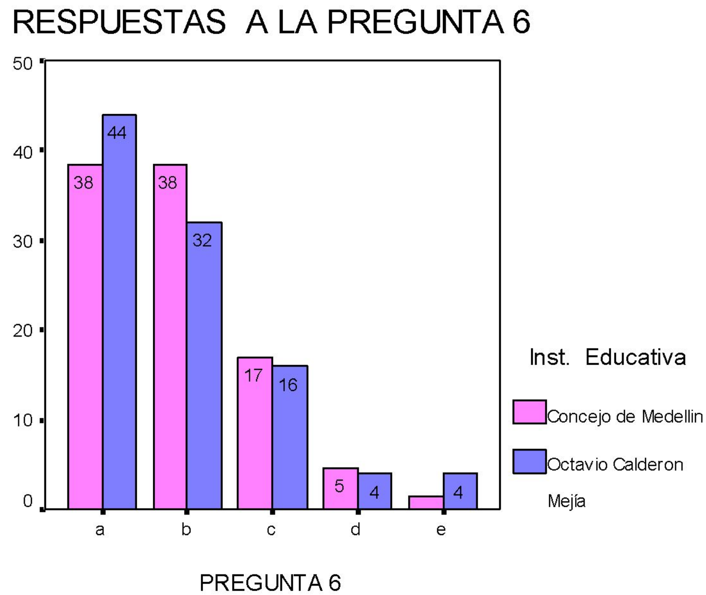


a. Mayor D menor A
b. Mayor E menor A
c. Mayor D menor B
d. Mayor C menor A
e. Ninguno de los anteriores

PREGUNTA 6

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	36	40,0	40,0	40,0
	b	33	36,7	36,7	76,7
	c	15	16,7	16,7	93,3
	d	4	4,4	4,4	97,8
	e	2	2,2	2,2	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





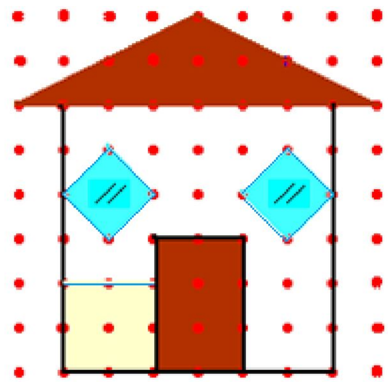
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción b.

En esta pregunta es claro que los estudiantes reconocen en su mayoría cuál es la figura que ocupa menor espacio, pero al momento de analizar el espacio ocupado por las figuras D y E, creemos que no seleccionaron una unidad de medida común para identificar cual era el mayor; sólo tuvieron en cuenta lo observado a simple vista.

Comparando los resultados de las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes de cada institución que contestaron de manera correcta es similar, pues solo presentan una diferencia del 6%.

Pregunta 8

Carlos necesita pintar el frente de su casa de color crema. Con un tarro de pintura solo pudo pintar la parte que se muestra en la figura. ¿Cuántos tarros más necesitaría para recubrir con pintura lo que le falta?

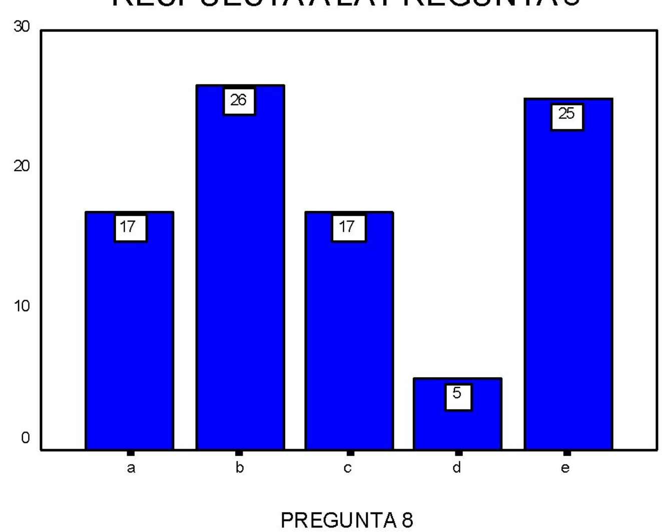


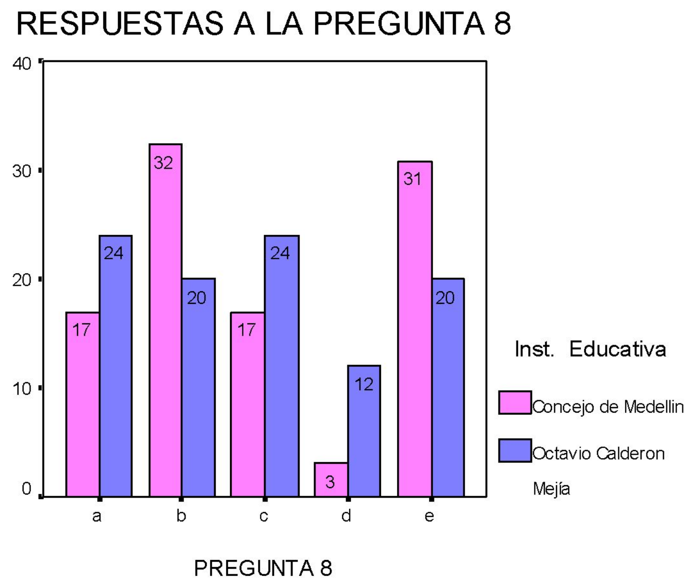
a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. Ninguno de los anteriores

PREGUNTA 8

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	17	18,9	18,9	18,9
	b	26	28,9	28,9	47,8
	:	17	18,9	18,9	66,7
	d	5	5,6	5,6	72,2
	e	25	27,8	27,8	100,0
	Total	90	100,0	100,0	

RESPUESTA A LA PREGUNTA 8





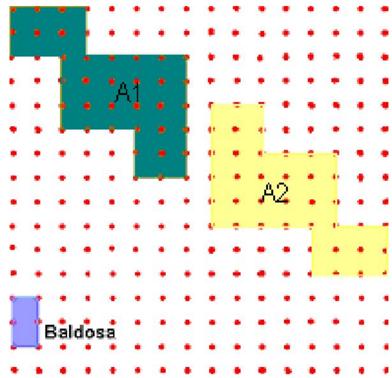
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción b.

En esta pregunta pretendíamos que los estudiantes determinaran según el dibujo, cuantos tarros más de pintura se necesitaban para pintar el frente de la casa, para esto ellos podían hacer dos análisis, el primero consistía en componer algunas figuras para poder determinar cuántas veces estaba la parte pintada y por ultimo contextualizar el problema, y definir que sí estaban hablando de tarros de pintura sin un tamaño definido, les tocaba comprarlos completos aunque sobrara; ya que en ninguna parte se les especificaba que podían comprar medios tarros o menos.

Comparando las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes que contestaron esta pregunta de manera correcta, es mayor en la Institución educativa Concejo de Medellín con un 32%, mientras que en el Octavio Calderón Mejía es de un 20%.

<u>Pregunta 17</u>

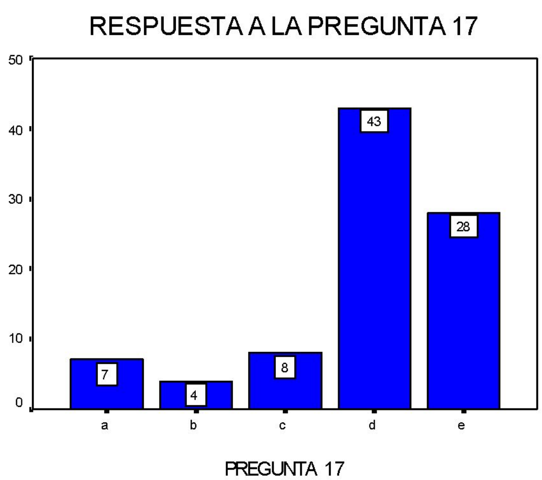
Pedro y Jaime fueron contratados para recubrir con baldosas el piso de dos apartamentos, utilizando una baldosa de igual tamaño (como se muestra en la figura). Pedro dice que el piso del apartamento 1 necesita más baldosas que el piso del apartamento 2 por el contrario Jaime dice que se necesitan igual número de baldosas para cada apartamento. ¿Quién tiene la razón Pedro o Jaime?

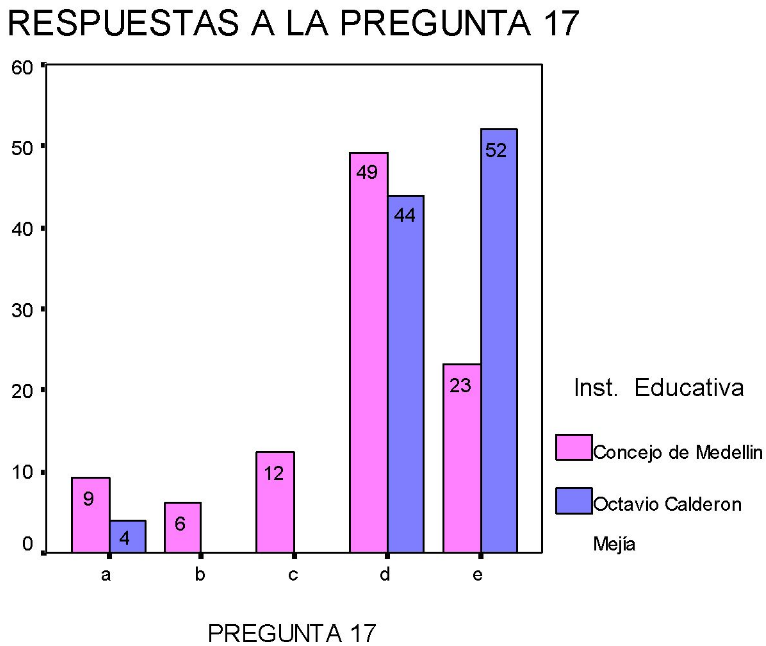


a. Pedro al afirmar que el apartamento 1 necesita más baldosines que el apartamento 2.
b. Jaime Al afirmar que el apartamento 2 necesita más baldosines que el apartamento 1.
c. Pedro y Jaime.
d. Pedro al afirmar que ambos apartamentos necesitan igual cantidad de baldosas.
e. Ninguna de las anteriores

PREGUNTA 17

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	7	7,8	7,8	7,8
	b	4	4,4	4,4	12,2
	c	8	8,9	8,9	21,1
	d	43	47,8	47,8	68,9
	e	28	31,1	31,1	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





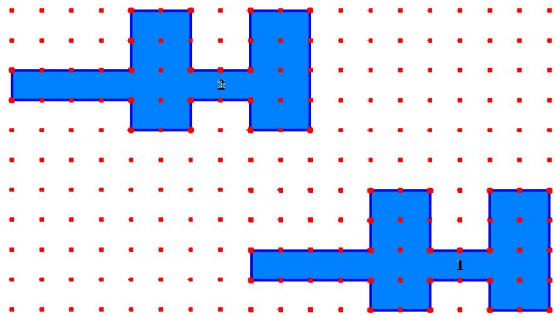
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción e.

Esta pregunta a simple vista parece muy sencilla pero a la vez la consideramos muy importante ya que tiene dos objetivos. El primero radica en que se reconozca que las dos figuras tienen igual área, y la segunda, quizás la más importante, pues es donde la mayoría de los estudiantes se equivocaron; consiste en identificar que tan atentos se encuentran frente a lo que se les está preguntando, dado que la opción de respuesta ***d*** parece ser la acertada solo que en el enunciado de la pregunta esto lo dice Jaime y no Pedro como lo asegura esta opción de respuesta.

Comparando las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes que contestaron esta pregunta de manera correcta, es menor en la Institución educativa Concejo de Medellín con un 23%, mientras que en el Octavio Calderón Mejía es de un 52%.

Pregunta 19

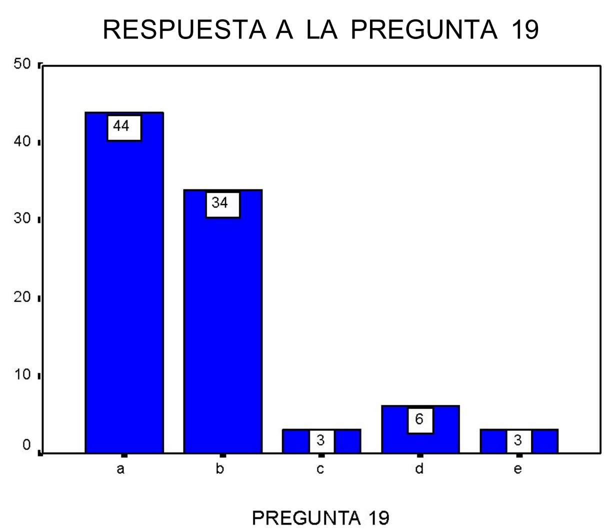
Observa las siguientes figuras y determina que pasó con la figura 1 en relación con la figura 2.

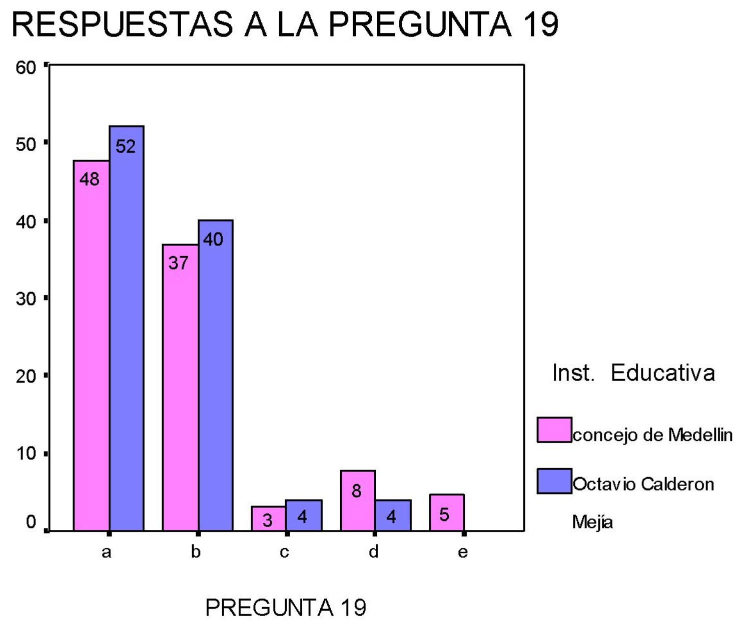


a. Fue trasladada
b. Es simétrica
c. Fue rotada
d. Fue trasladada y rotada
e. Ninguna de las anteriores

PREGUNTA

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	a	44	48,9	48,9	48,9
	b	34	37,8	37,8	86,7
	c	3	3,3	3,3	90,0
	d	6	6,7	6,7	96,7
	e	3	3,3	3,3	100,0
	Total	90	100,0	100,0	





La respuesta correcta a esta pregunta es la opción a.

Para responder esta pregunta correctamente se necesitaba que los estudiantes tuvieran claros los conceptos de simetría, traslación y rotación. Creemos que quienes respondieron la opción b (la cual consideramos representativa), lo hicieron por no tener claro los conceptos de traslación y simetría.

Comparando los resultados de las dos instituciones podemos decir que el porcentaje de estudiantes de cada institución que contestaron de manera correcta es similar, pues solo presentan una diferencia del 4%.

Cabe resaltar que el anterior análisis descriptivo se realizó solo con las preguntas más relevantes del test final, y con las que responden de cierto modo a algunas de las hipótesis planteadas al inicio de esta investigación.

4.2.2. CRITERIO DE SELECCIÓN

Este criterio consiste en elegir las preguntas que los estudiantes deben contestar acertadamente para poderlos ubicar en un determinado nivel de razonamiento; lo realizamos teniendo en cuenta los descriptores definidos en cada nivel para el concepto de área.

A continuación presentaremos las preguntas anteriormente seleccionadas de acuerdo a cada nivel, determinando cuales son las que se deben responder acertadamente (preguntas obligatorias).

NIVELES	PREGUNTAS NO OBLIGATORIAS	PREGUNTAS OBLIGATORIAS
NIVEL 1	1	2
NIVEL 2	6	3 , 8
NIVEL 3	14	4 , 5 , 7 , 10 , 11 , 12 , 13 , 15
NIVEL 4	9 , 18 , 19 , 22	16 , 17 , 20 , 21 , 23

Además, indicaremos cuales son las preguntas que se deben responder acertadamente para ubicarse en un nivel determinado:

NIVELES	PREGUNTAS ACERTADAS
1	2
2	1 , 2 , 3 , 8
3	1 , 2 , 3 , 8 , 4 , 5 , 7 , 10 , 11 , 12 , 13 , 15
4	1 , 2 , 3 , 8 , 4 , 5 , 7 , 10 , 11 , 12 , 13 , 15 , 16 , 17 , 20 , 21 , 23

También aclaramos que las preguntas que no se encuentran en la tabla anterior (6, 9, 14, 18, 19, y 22), hacen referencia a las preguntas que no son obligatorias para estar en un determinado nivel, pero que de una u otra manera dan continuidad al test aunque no son significativas al momento de evaluar el razonamiento frente al concepto.

4.2.3. ANÁLISIS DE K - MEDIAS

Este procedimiento intenta identificar grupos de casos relativamente homogéneos basándose en las características seleccionadas y utilizando un algoritmo que puede gestionar un gran número de casos. Sin embargo, el algoritmo requiere que el usuario especifique el número de conglomerados. Puede especificar los centros iniciales de los conglomerados si conoce de antemano dicha información. Puede elegir uno de los dos métodos disponibles para clasificar los casos: la actualización de los centros de los conglomerados de forma iterativa o sólo la clasificación. Asimismo, puede guardar la pertenencia a los conglomerados, información de la distancia y los centros de los conglomerados finales. Si lo desea, puede especificar una variable cuyos valores sean utilizados para etiquetar los resultados por casos. También puede solicitar los estadísticos F de los análisis de varianza. Aunque estos estadísticos son oportunistas (ya que el procedimiento trata de formar grupos que de hecho difieran), el tamaño relativo de los estadísticos proporciona información acerca de la contribución de cada variable a la separación de los grupos.

Ejemplo. ¿Cuáles son los grupos identificables de programas de televisión que atraen audiencias parecidas dentro de cada grupo? Con el análisis de conglomerados de k-medias, podría agrupar los programas de televisión (los casos) en k grupos homogéneos, basados en las características del televidente. Este proceso se puede utilizar para identificar segmentos de mercado. También puede agrupar ciudades (los casos) en grupos homogéneos, de manera que se puedan seleccionar ciudades comparables para probar diversas estrategias de marketing.

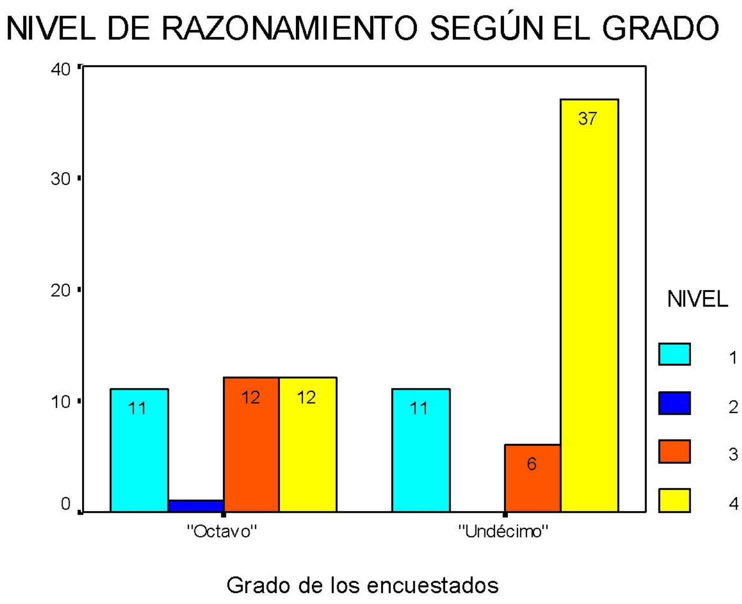
El análisis de K- Medias nos permitió, utilizando el criterio de selección especificado anteriormente, clasificar los resultados de la siguiente manera:

NÚMERO DE CASOS EN CADA NIVEL

NIVEL	1	22,000
	2	1,000
	3	18,000
	4	49,000
Válidos		90,000
Perdidos		,000

El siguiente análisis lo realizamos con el fin de justificar la hipótesis que enunciamos anteriormente referente a que el nivel de razonamiento de un estudiante en el concepto de área no depende de la edad cronológica ni del grado de escolaridad que tenga. Cabe resaltar, que este análisis se basa en la relación que se presenta entre los conglomerados (número de casos en que se ubica un estudiante en cada nivel) y algunas variables.

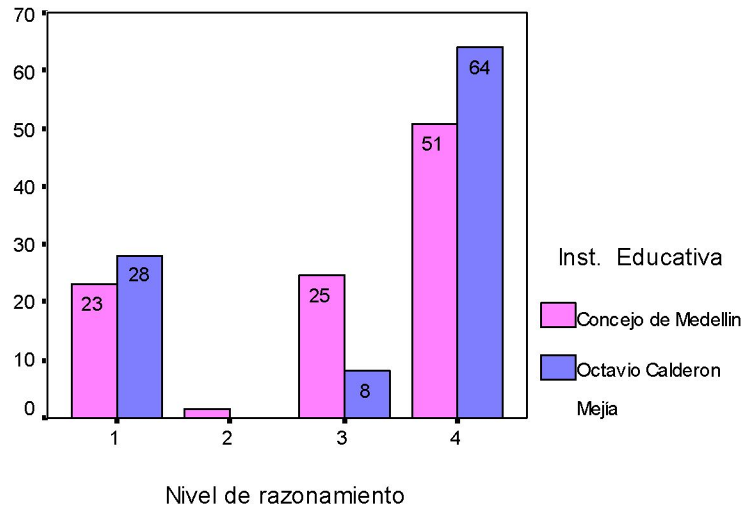
- **Nivel de razonamiento según el grado:** consideramos que esta relación es importante, pues nos ayuda a comparar el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes de ambas instituciones de acuerdo al grado en el que están. Podemos observar al analizar la gráfica, que en el grado octavo algunos estudiantes están ubicados en todos los niveles de razonamiento, mientras que en el grado undécimo no hay ningún estudiante en el nivel 2 (aunque esto no es representativo ya que en el nivel dos solo se ubicó un estudiante y es del grado octavo), y la mayoría de estos (37) están ubicados en el nivel 4 de razonamiento.



- **Nivel de razonamiento según la Institución Educativa:** Esta relación es de gran importancia en nuestra investigación, ya que nos permite observar las diferencias o similitudes que se presentan en las dos instituciones investigadas, en cuanto a los niveles de razonamiento. En la gráfica podemos observar que en el nivel 1, se encuentran casi el mismo porcentaje de estudiantes en ambas instituciones, también se nota claramente que en el nivel 2 solo hay un estudiante y es del concejo de Medellín, y por último; también podemos decir que el mayor porcentaje de estudiantes está en el nivel 4 de razonamiento con un 54.4%.

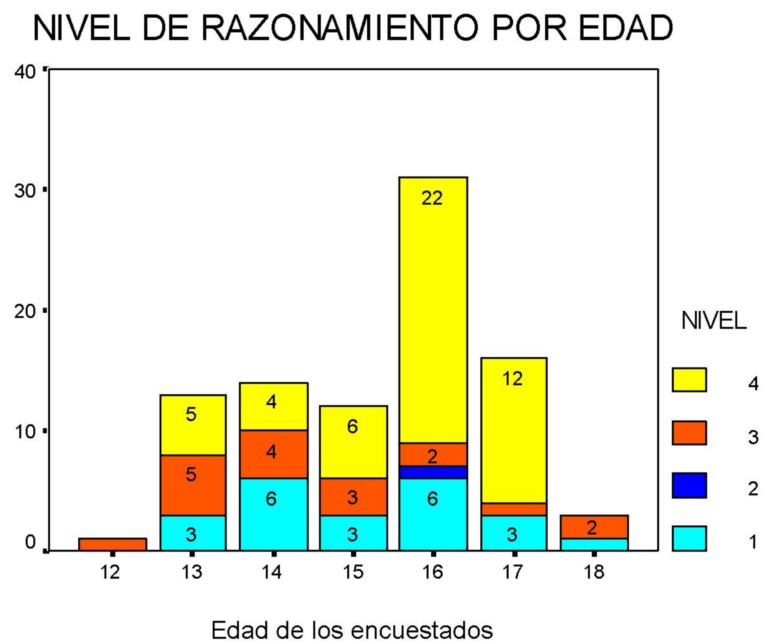
NIVEL DE RAZONAMIENTO

POR INSTITUCIÓN EDUCATIVA



S **Nivel de razonamiento según la edad:** consideramos importante esta relación ya que nos permite observar el número de estudiantes que están en los diferentes niveles de razonamiento, y así mismo verificar una de nuestras hipótesis, en la que según el modelo de van Hiele, el nivel de razonamiento de una persona frente a un concepto geométrico no depende de la edad cronológica. En la gráfica podemos observar que:

1. El único estudiante de 12 años, está en el nivel 3 de razonamiento.
2. Solo hay un estudiante en el nivel 2, y tiene 16 años de edad.
3. El mayor número de estudiantes de 16 años, están en el cuarto nivel de razonamiento.


NIVEL DE RAZONAMIENTO POR EDAD
40
30
20
10
0
22
12
5
4
6
5
4
2
3
6
6
3
3
3
3
2
12
13
14
15
16
17
18
Edad de los encuestados
NIVEL
4
3
2
1

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES POR HIPÓTESIS

Primera hipótesis: el nivel de razonamiento de un estudiante en el concepto de área no depende de la edad cronológica ni del grado de escolaridad que tenga.

- De acuerdo al análisis de K- Medias en cuanto al nivel de razonamiento según el grado, encontramos que casi todos los estudiantes tanto de octavo como de once están ubicados en los niveles del 1 al 4 (la mayoría en el nivel 4, el cual es considerado el más difícil de alcanzar), por ende, consideramos que el nivel de razonamiento es independiente del grado de escolaridad de los estudiantes. (gráfica de la página 96)
- Con relación a los análisis hechos en la investigación podemos concluir que la edad y el grado de escolaridad, no intervienen en la asignación del nivel en el que se encuentra un estudiante.

Segunda hipótesis: la dificultad al reconocer que figuras de diferente superficie tienen igual área

- Teniendo en cuenta los análisis de estadística descriptiva se puede decir por las respuestas dadas a las preguntas 3, 4 y 5 que los estudiantes tienen dificultades para reconocer que figuras de formas distintas pueden tener la misma área.

Tercera hipótesis: la utilización del lenguaje natural en el área de la geometría puede facilitar la comprensión de los conceptos de dicha área.

- Teniendo en cuenta que el test se realizó utilizando el lenguaje natural, podemos decir que el mayor número de respuestas acertadas (5, 7, 8, 9, 16 y 17), confirman esta hipótesis, pues hacen referencia a la fácil comprensión de los conceptos geométricos, por parte de los estudiantes, generando en ellos aceptación y deseos de contestar.

5.2. CONCLUSIONES GENERALES

- A través de los resultados, se refleja las afirmaciones establecidas por los diferentes autores en otras investigaciones, confirmando la idea que los estudiantes pueden estar en un nivel de razonamiento en cuanto a un concepto geométrico se refiere; además observamos que los estudiantes presentan características propias de los niveles.

- Podemos concluir que las hipótesis planteadas al inicio del trabajo se cumplen ampliamente a lo largo de la investigación; demostrando que:

  1. Efectivamente la edad y el grado de escolaridad son independientes y no intervienen en el nivel de razonamiento en el que se encuentra un estudiante.

  2. Además, que algunos estudiantes presentan dificultades al reconocer que figuras de diferente forma, tienen igual área.

  3. Si utilizamos un lenguaje adecuado para llevar los conceptos al aula, puede facilitar su conocimiento y fácil adquisición por parte de los estudiantes.

- Con relación al estudio del razonamiento de los estudiantes frente a un concepto matemático (en este caso área), podemos concluir que en general los estudiantes disponen de conocimientos básicos en geometría, lo cual nos permitió en cierto modo medir su nivel de razonamiento.

- La elaboración del test utilizado en la investigación nos permitió llegar a un estudio profundo del concepto de área, ampliando así nuestro conocimiento sobre éste y sus diversas formas de aplicación dentro del ámbito escolar.

- Realizando el rastreo bibliográfico en las distintas fuentes, tuvimos la oportunidad de enriquecer nuestro conocimiento, ya que nos posibilitó ahondar y reconocer la diferencia entre área y superficie, y a reflexionar sobre cuáles serían las mejores maneras de llevarlo a la enseñanza y a su fácil compresión.

- Consideramos que la enseñanza del concepto de área en gran parte de los libros consultados se hace utilizando la misma estrategia didáctica.

- Podemos decir con relación al test, que fue pertinente y nos ayudó a validar las hipótesis planteadas al inicio de la investigación.

5.3. RECOMENDACIONES

- Complementar el trabajo realizado con las fases de aprendizaje, para verificar si un estudiante puede o no avanzar de nivel, tal y como lo plantea el modelo de Van Hiele en su tesis, pues no hay muchas investigaciones que centren la atención en este componente.

- Confrontar otros espacios de investigación para fortalecer con ello la temática tratada durante todo el proceso.

- Ampliar la bibliografía con el fin de mejorar la sustentación de las hipótesis que se plantearon al inicio de la investigación.

- Implementar los "descriptores de nivel" en otros contextos, respetando la autoría y teniendo en cuenta los objetivos y las hipótesis para determinar si se validaron o no.

- Desarrollar una investigación en donde se evidencie la transversalidad entre los diferentes pensamientos y sistemas, dado que la enseñanza de la educación matemática hoy en día recomienda dicho aspecto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- American Psychological Association (APA) (1994). *Normas APA aplicables a la presentación de Trabajos de Grado.* Tomado de : www.monografias.com el dia 13 de marzo de 2008.
- Ardila, P. (2006). *Aciertos Matemáticos 1.* Bogotá: Editores Educar.
- Ardila, V. (1999). *Olimpiadas Matemáticas 6.* Santafé de Bogotá: Voluntad. Ardila, V. (1999). *Olimpiadas Matemáticas* 7. Santafé de Bogotá: Voluntad.
- *Área de un polígono regular.* Microsoft ® Encarta ® 2007. © 1993-2006 Microsoft Corporation.
- *Área del romboide.* Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.
- *Artículo de la Enciclopedia Libre Universal en Español.* (2007). Definición de rombo.
- Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Rombo
- *Artículo de la Enciclopedia Libre Universal en Español.* (2007). Definición de rectángulo. Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Rectángulo
- Ávila, T. (2006). *Aciertos Matemáticos 4.* Bogotá: Editores Educar.
- Baldor, J. A. (1983). Geometría Plana y del Espacio con una Introducción a la trigonometría. México, D.F. Editorial Ultra S.A. de C.V (pp. 203-233)
- Berrio, I. (1994). *Matemática Universal 9°.* Medellín: Bedout Editores S.A.
- Berrio, I. (1995). *Matemática Universal 8°.* Medellín: Bedout Editores S.A.
- Berrio, I. (1996). *Matemática Universal 6°.* Medellín: Bedout Editores S.A.
- Berrio, I. (1996). *Matemática Universal 7°.* Medellín: Bedout Editores S.A.
- Botero, O,. Velásquez, G,. Moreno, M,. & Otros. (2007). Diploma en el Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. *Modulo 6. Situaciones de aprendizaje*. Medellín: Editorial Artes y Letras Ltda. P. 92
- Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 6°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A. (pp. 321).

- Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 7°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A. (pp. 360).
- Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 8°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A. (pp. 360).
- Camargo, L., Samper, C., García, G., Serrano, C & Leguizamón, C. (2002). *Nuevo Alfa 9°. Serie de matemáticas con énfasis en competencias.* Santafé de Bogotá D.C: Editorial Norma S.A. (pp. 368).
- Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., Samper, C. (2004). *Espiral 5.* Bogotá D.C, Colombia: Editorial norma. (pp. 240).
- Crowley, ML. (1987): *The van Hiele model of de development of geometric thought,* en N.C.T.M. (1987), pp1-16
- *Definición de cuadrado.* Recuperado en julio 6, 2008. Disponible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Cuadrado
- *Definición de triángulo.* Recuperado en julio 9, 2008. disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo.
- Díaz, L. (1996). *Recreo Matemático 1°.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 96).
- Díaz, L. (1996). *Recreo Matemático 2°.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 96).
- Díaz, L. (1996). *Recreo Matemático 3°.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 128).
- Díaz, L. (1996). *Recreo Matemático 4°.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 143).
- Diccionario- web.com.ar. *Romboide.* Recuperado en julio22, 2008. Disponible en http://www.diccionario-web.com.ar/largo/romboide.html
- El modelo Educativo de Van Hiele. Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en La *Educación Básica y Media el Departamento de Antioquia. Modulo 6. Situaciones de aprendizaje. Pág. 90 -91.*
- Estructura e Insight. *Orígenes de la teoría de La Gestalt.* Recuperado en Julio 7, 2008. Disponible en http://gestalt.idoneos.com/index.php/311470.
- Forero, N. (1990). *Matemáticas 2.* Santa fe de Bogotá: Santillana.
- Forero, N. (1999). *Matemáticas 5.* Santafé de Bogotá: Santillana. (pp. 112,114 y 117).

- Gordillo, J., Páez, N. (2003). *Matemáticas Manual 7°.* Santafé de Bogotá: Cumbre ediciones. (pp. 160).
- Gordillo, J., Páez, N. (2003). *Matemáticas Manual 9°.* Santafé de Bogotá: Cumbre ediciones. (pp. 176).
- Gutiérrez, E. (1999). *Matemáticas 3.* Santafé de Bogotá: Santillana. (pp. 176).
- Horst Bussenius C. (2007). Insight. Recuperado en mayo 11, 2008. Disponible en http://www.unap.cl/p4_unap/site/artic/20070102/pags/20070102075029.html
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Estudios de Caso. Metodología de la Investigación. México D. F. Editorial Mc. Graw Hill. (Pp. 1-27).
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Llinares, MV Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384) fragmentos.
- *Los polígonos.* Microsoft ® Encarta ® 2007. © 1993-2006 Microsoft Corporation.
- Millan, J., Ochoa, C., Herrera, O. (1996! *Matemática en Construcción 6°.* Santafé de Bogotá. Oxfor. University Press. (pp.184).
- Millan, J., Ochoa, C., Herrera, O. (1996). *Matemáticas en Construcción 8°.* Santafé de Bogotá: Oxfor University Press.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Ley General de Educación.* Santafé de Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Santa fe de Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) *(2003). La Revolución Educativa Estándares Básicos De Matemáticas Y Lenguaje Educación Básica Y Media.* Talleres Departamentales de calidad de la Educación.
- *Movimientos en el plano.* Recuperado en julio 9, 2008. Disponible en: http://www.memo.com.co/fenonino/aprenda/geometria/geomet4.html
- Muñoz, H. (2006). *Aciertos Matemáticas 5* .Bogotá: Editorial Educar.
- Neira, C., Ochoa, C., Bautista, M (1996). *Matemáticas en Construcción 7°.* Santafé de Bogotá: Oxfor University Press.
- Neira, C., Ochoa, C., Bautista, M (1996). *Matemáticas en Construcción 9°.* Santafé de Bogotá: Oxfor University Press.

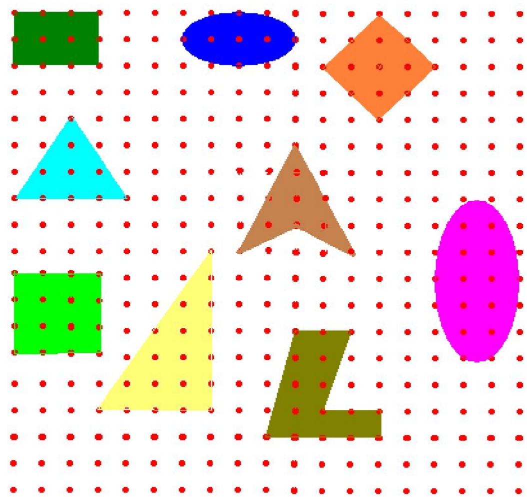
- Pablo. (2007). *Lenguaje natural.* Recuperado en junio 25, 2008. Disponible en http://lengua.laguia2000.com/general/los-tipos-de-lenguaje
- Palacios, R. (2003).*Herramientas Matemáticas 3.* Bogotá, Colombia: Santillana. (pp. 152-155).
- Ramírez, A., Ramírez, V. (1985). *Calculemos 3.* Bogotá, Colombia: Editorial Pime. (pp. 92).
- Ramírez, C. (2006). *Aciertos Matemáticos 3.* Bogotá: Editores Educar. (pp. 208).
- Ramírez, R., Páez, N. (2003). *Matemáticas Manual 8°.* Santafé de Bogotá: Cumbre ediciones. (pp. 176).
- Rodríguez, B. P. (1994). *Construyamos 1.* Colombia: Educar Editores. (pp. 174).
- *Rombo.* Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.
- Suárez, A., Beltrán, L. (1999). *Matemáticas 4 con tecnología aplicada.* Santafé de Bogotá. (pp. 132-133).
- Torres, B. (2000). *Olimpiadas Matemáticas 8.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 160).
- Torres, B. (2000). *Olimpiadas Matemáticas 9.* Santafé de Bogotá: Voluntad. (pp. 160).
- Traducción por Tomás Macías (E.U. de Profesorado de E.G.B. de Cádiz) Corregida por ángel Gutiérrez y Adela Jaime (Dpto. de Didáctica de la matemática de la U. de Valencia)
- *Trapecio.* Microsoft ® Encarta ® 2008. © 1993-2007 Microsoft Corporation.
- Valencia, Gloria (2006). *Definición de un Descriptor.* Seminario de Práctica Profesional II, Universidad de Antioquia. Medellín.
- Van Hiele, P. M. (1986): *Structure and Insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: N. York). Traducido al español.
- Van Hiele, P. M. (1986): *Structure and Insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: N. York).
- Wikipedia. La Enciclopedia Libre. *Teorema de Pitágoras.* Recuperado en julio 9, 2008. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras

ANEXOS

ANEXO 1

TEST FINAL

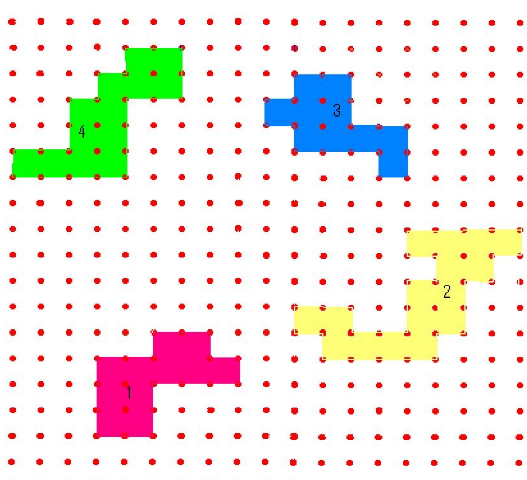
1. Observa las siguientes figuras hechas en el Geoplano y responde.



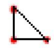
¿Cuántos rectángulos y cuántos triángulos hay en el geoplano?

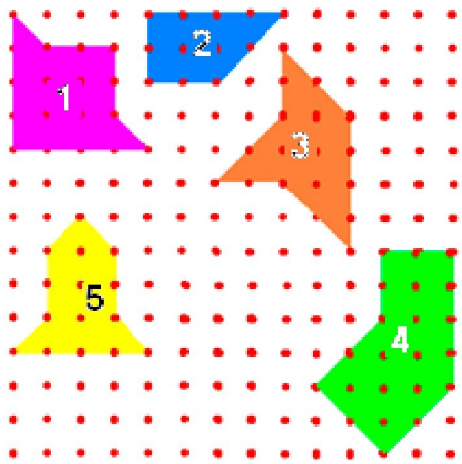
a. 1 rectángulo y 2 triángulos
b. 2 rectángulos y 1 triángulos
c. 3 rectángulos y 2 triángulos
d. 3 rectángulos y 3 triángulos
e. Ninguna de los anteriores

2. Describe cuantos lados tiene cada una de las figuras.



a. 1) 6 2) 12 3) 11 4) 11
b. 1) 8 2) 14 3) 12 4) 12
c. 1) 9 2) 20 3) 14 4) 13
d. 1) 10 2) 20 3) 12 4) 12
e. Ninguna de los anteriores

3.  Este es un cuadrado  Este triángulo es la mitad del cuadrado anterior.



¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados caben en cada una de las siguientes figuras?

a. 1) 2 triángulos 9 cuadrados 2) 2 triángulos y 5 cuadrados
3) 6 triángulos y 7 cuadrados 4) 6 triángulos y 11 cuadrados
5) 4 triángulos y 6 cuadrados

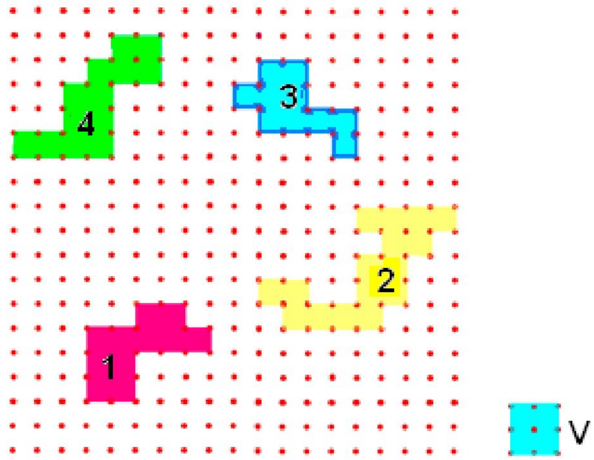
b. 1) 20 triángulos y 10 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 14 cuadrados
5) 16 triángulos y 8 cuadrados

c. 1) 20 triángulos 9 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 22 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 15 triángulos y 8 cuadrados

d. 1) 18 triángulos 10 cuadrados 2) 12 triángulos y 6 cuadrados
3) 20 triángulos y 10 cuadrados 4) 28 triángulos y 13 cuadrados
5) 16 triángulos y 10 cuadrados

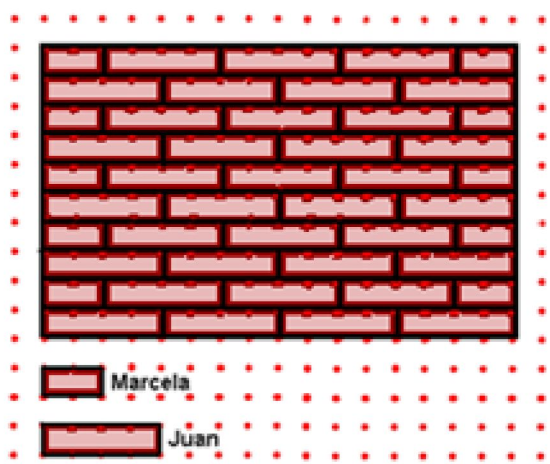
e. Ninguna de los anteriores

4. Teniendo en cuenta el número de cuadrados que tiene v, observa con cuantas v se recubre cada una de las figuras dibujadas en el geoplano.



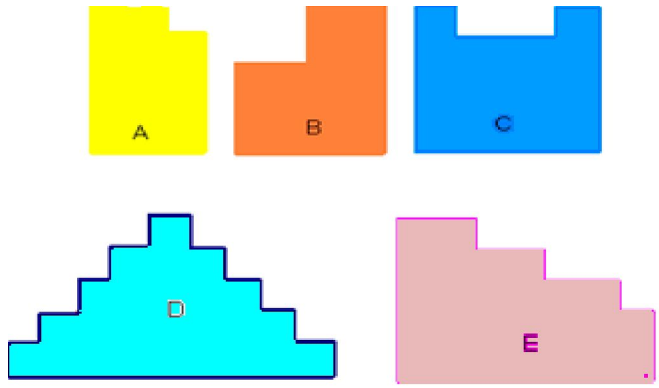
a.	1)3	2) 4	3) 2	4) 3
b.	1)2	2) 2	3) 1	4) 2
c.	1)1	2) 3	3) 3	4) 5
d.	1)4	2) 4	3) 2	4) 3
e.	Ninguna de los anteriores			

5. Marcela y Juan quieren construir un muro idéntico al de la figura utilizando cada uno de ellos un ladrillo de tamaño diferente. ¿Cuántos ladrillos necesitaría cada uno de ellos para construir el muro?



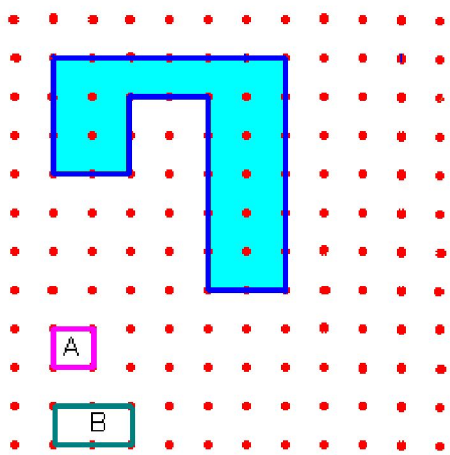
a. Marcela 35 y Juan 78
b. Marcela 10 y Juan 35
c. Marcela 80 y Juan 40
d. Marcela 120 y Juan 120
e. Ninguna de los anteriores

6. Determina cuál de las siguientes figuras ocupa mayor espacio y cuál menos



a. Mayor D menor A
b. Mayor E menor A
c. Mayor D menor B
d. Mayor C menor A
e. Ninguno de los anteriores

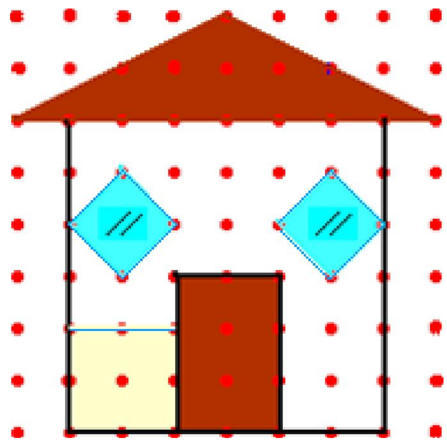
7. Marina quiere recubrir el mesón de la cocina utilizando uno de los dos baldosines



¿Cuántos baldosines necesita si va a utilizar el baldosín A y cuántos si va a utilizar el baldosín B?

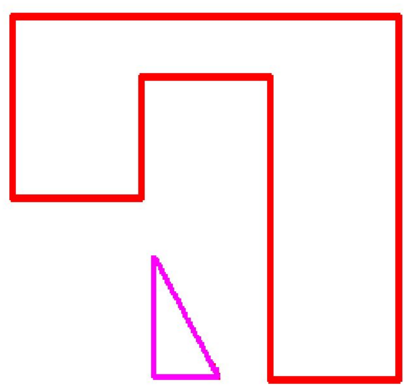
a. 21 baldosines de A y 15 de B
b. 20 baldosines de A y 10 de B
c. 30 Baldosines de A y 12 de B
d. 26 Baldosines de A y 12 de B
e. Ninguno de los anteriores

8. Carlos necesita pintar el frente de su casa de color crema. Con un tarro de pintura solo pudo pintar la parte que se muestra en la figura. ¿Cuántos tarros más necesitaría para recubrir con pintura lo que le falta?



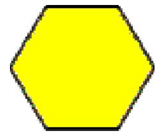
a. 5 tarros
b. 6 tarros
c. 7 tarros
d. 8 tarros
e. Ninguno de los anteriores

9. Marina quiere recubrir el mesón de la cocina con un baldosín triangular como el de la figura. ¿Cuántos baldosines necesita para cubrirlo?

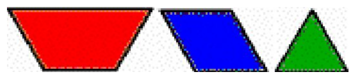


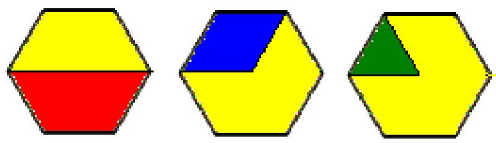
a. 11
b. 18
c. 31
d. 20
e. Ninguno de los anteriores

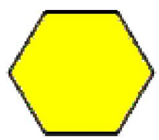
La figura siguiente es el hexágono regular.



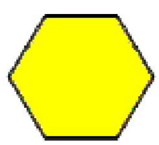
Las siguientes figuras pueden obtenerse como partes del hexágono regular.



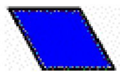
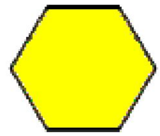


10. ¿Cuántos  hay en  ?

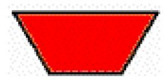
a. 4
b. 2
c. 6
d. 1
e. Ninguna de las anteriores

11. ¿Cuántos  hay en  ?

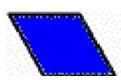
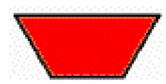
a. 12
b. 5
c. 6
d. 8
e. Ninguna de las anteriores

12. ¿Cuántos  hay en  ?

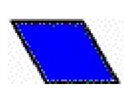
a. 2
b. 4
c. 3
d. 6
e. Ninguna de las anteriores

13. ¿Cuántos  hay en  ?

a. 3
b. 2
c. 4
d. 1
e. Ninguna de las anteriores

14. ¿Cuántos  hay en  ?

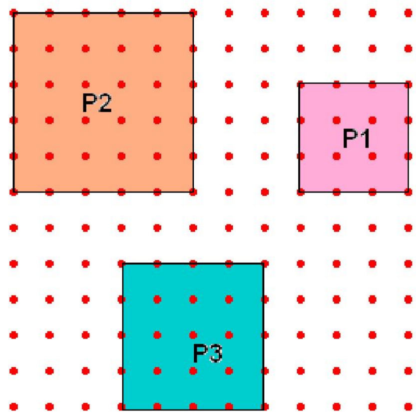
a. 4
b. 2
c. 3
d. 1
e. Ninguna de las anteriores

15. ¿Cuántos  hay en ?

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. Ninguna de las anteriores

16. Sebastián desea recubrir tres de los pisos de su casa con baldosín, para hacerlo contrata a una persona experta en este tipo de trabajos. Sebastián le dice a la persona encargada de realizar el trabajo que cada piso cumple las siguientes características:

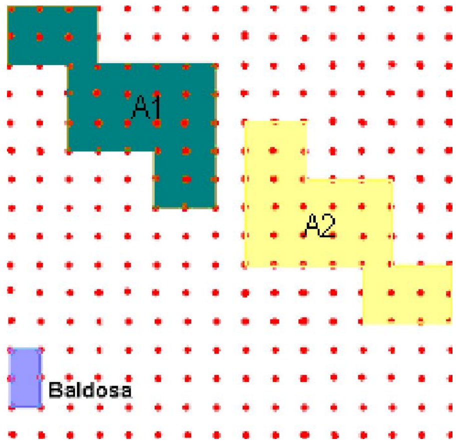
- Cada piso tiene la misma medida tanto de largo como de ancho.
- P2 tiene igual tamaño que la suma de P1 y P3.
- Todos los pisos están divididos en pequeñas partes iguales.
- Cada pequeña parte se gasta un baldosín.



La persona encargada de recubrir los pisos no está muy convencida de la segunda característica. ¿Cómo le explicarías al trabajador que P2 tiene el mismo tamaño que P1 más P3?

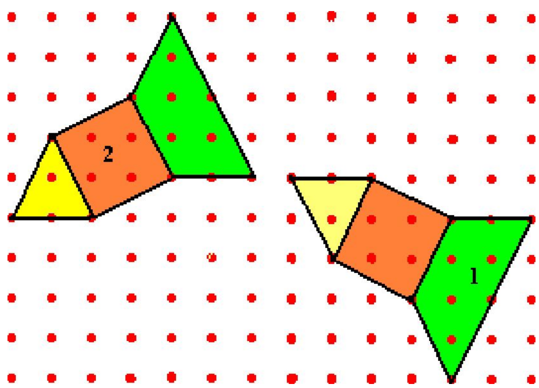
a. Sumar los baldosines que tienen P1 y P3 y comparar la suma con el total de baldosines de P2.
b. Restar los baldosines que tienen P1 y P3 y comparar la resta con el total de baldosines de P2.
c. Restar de P1 los baldosines que P2 y comparar la resta con el total de baldosines de P3.
d. Sumar los baldosines que tienen P2 y P3 y comparar la suma con el total de baldosines de P1.
e. Ninguna de las anteriores.

17. Pedro y Jaime fueron contratados para recubrir con baldosas el piso de dos apartamentos, utilizando una baldosa de igual tamaño (como se muestra en la figura). Pedro dice que el piso del apartamento 1 necesita más baldosas que el piso del apartamento 2. por el contrario Jaime dice que se necesitan igual número de baldosas para cada apartamento. ¿Quién tiene la razón Pedro o Jaime?



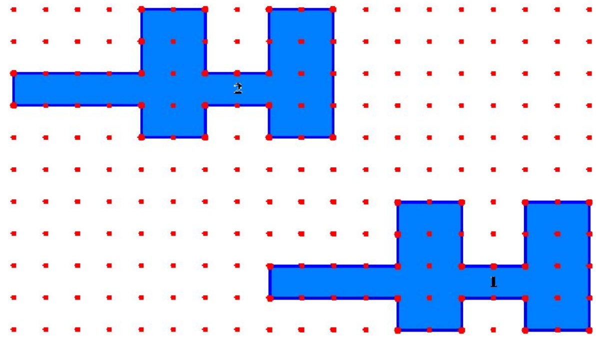
a. Pedro al afirmar que el apartamento 1 necesita más baldosines que el apartamento 2.
b. Jaime Al afirmar que el apartamento 2 necesita más baldosines que el apartamento 1.
c. Pedro y Jaime.
d. Pedro al afirmar que ambos apartamentos necesitan igual cantidad de baldosas.
e. Ninguna de las anteriores

18. Observa las siguientes figuras y determina que pasó con la figura 1 en relación con la figura 2.



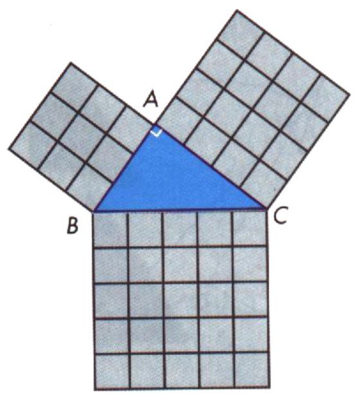
a. Fue trasladada
b. Es simétrica
c. Fue rotada
d. Fue trasladada y rotada
e. Ninguna de las anteriores

19. Observa las siguientes figuras y determina que pasó con la figura 1 en relación con la figura 2.



a. Fue trasladada
b. Es simétrica
c. Fue rotada
d. Fue trasladada y rotada
e. Ninguna de las anteriores

20. Observa el siguiente triángulo rectángulo ABC.



Si construimos un cuadrado en cada lado del triángulo rectángulo y lo dividimos en cuadrados iguales:

¿Cuántos cuadrados pequeños caben en cada cuadrado formado en los lados del triángulo?

a. Lado AB 12, lado BC 20 y lado AC 15
b. Lado AB 6, lado BC 10 y lado AC 8
c. Lado AB 9, lado BC 25 y lado AC 16
d. Lado AB 9, lado BC 25 y lado AC 14
e. Ninguna de las anteriores

21. Teniendo en cuenta la información anterior, responde:

¿Qué relación puedes ver entre el número de cuadrados de lado BC y el número de cuadrados de los otros dos lados?

a. El número de cuadrados del lado BC es la resta de los cuadrados de los otros dos lados.

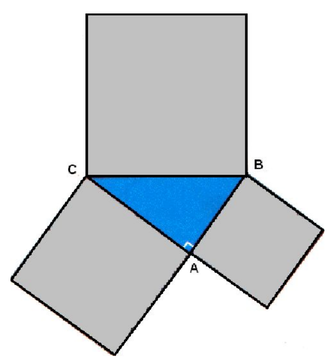
b. El número de cuadrados del lado BC es la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

c. El número de cuadrados del lado BC es el triple de los cuadrados de los otros dos lados.

d. El número de cuadrados del lado BC es el doble de los cuadrados de los otros dos lados.

e. Ninguna de las anteriores.

22. Si el triángulo fuera el siguiente, ¿Qué relación puedes ver entre el cuadrado de lado BC y los otros dos cuadrados?



a. El cuadrado del lado BC es la resta de los otros dos cuadrados.

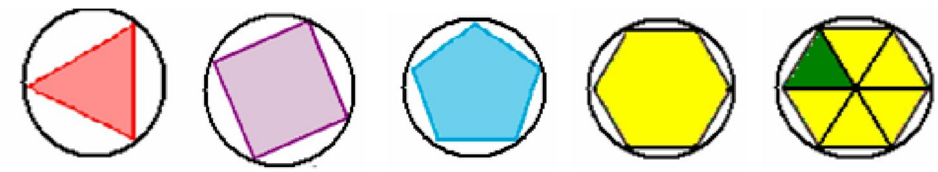
b. El cuadrado del lado BC es la suma de los otros dos cuadrados.

c. El cuadrado del lado BC es el triple de los otros dos cuadrados

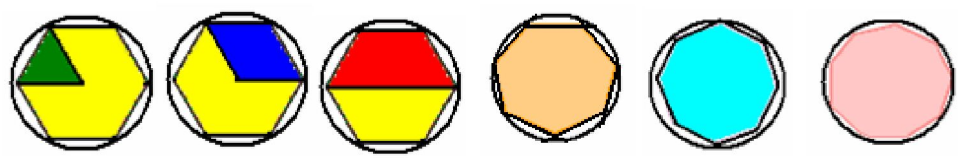
d. El cuadrado del lado BC es el doble de los otros dos cuadrados.

e. Ninguna de las anteriores.

23. Si quisiéramos recubrir el círculo con una de las siguientes figuras, ¿cuál de ellas utilizarías para hacerlo y por qué?



A B C D E



F G H I J K

a. C, porque cabe en el círculo
b. K, porque con ésta se podría recubrir casi todo el círculo
c. J, porque ésta tiene menos lados que k
d. E, porque está formada por más figuras
e. Ninguna de las anteriores

ANEXO 2

Prueba final real - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

37 : res6 0

	sexo	edad	grado	inst.ed	tiempo	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	res1	res2	res3
1	F	14	8	concejo de Mede	0:35	a	d	a	e	c	b	b	c	b	b	d	c	a	a	b	a	c	b	b	c	b	b	d	0	1	0
2	F	13	8	concejo de Mede	0:35	a	b	a	b	b	a	b	b	e	b	c	b	a	b	b	a	c	d	d	c	b	b	b	0	0	0
3	F	14	8	concejo de Mede	0:48	d	d	b	e	c	c	b	e	d	b	c	c	a	d	b	a	d	a	d	e	d	d	e	0	1	1
4	M	14	8	concejo de Mede	0:30	a	d	a	b	c	b	b	c	a	b	c	a	a	d	a	a	e	c	a	c	b	b	e	0	1	0
5	M	13	8	concejo de Mede	0:36	a	b	a	b	c	a	b	b	b	b	c	e	a	b	b	a	d	d	b	c	b	b	d	0	0	0
6	M	14	8	concejo de Mede	0:40	a	d	a	d	c	a	b	b	e	b	c	c	a	d	b	a	d	b	b	e	c	b	d	0	1	0
7	F	13	8	concejo de Mede	0:38	a	d	a	b	c	a	b	e	d	b	c	c	a	d	b	a	a	c	a	c	d	e	c	0	1	0
8	M	15	8	concejo de Mede	0:40	d	d	c	e	c	c	b	e	e	b	c	e	a	e	b	a	d	d	a	c	b	b	e	0	1	0
9	M	13	8	concejo de Mede	0:28	c	d	b	b	b	a	b	b	a	b	c	c	a	b	b	a	e	e	a	d	e	e	b	1	1	1
10	M	14	8	concejo de Mede	0:32	a	d	a	e	b	a	b	a	b	b	c	a	a	d	b	a	a	c	b	c	b	b	b	0	1	0
11	M	15	8	concejo de Mede	0:37	a	d	a	b	c	b	b	e	c	b	c	c	a	e	b	c	c	d	b	c	b	b	b	0	1	0
12	F	15	8	concejo de Mede	0:52	d	d	a	a	c	c	b	b	d	b	c	c	a	b	a	a	d	a	b	c	b	b	b	0	1	0
13	M	13	8	concejo de Mede	0:40	a	d	a	b	b	a	b	b	d	b	c	c	a	b	b	a	d	d	c	c	a	b	b	0	1	0
14	F	15	8	concejo de Mede	0:35	a	d	a	b	b	a	b	b	d	b	c	c	a	d	b	c	d	d	a	c	c	b	b	0	1	0
15	M	13	8	concejo de Mede	0:25	d	d	c	a	c	a	b	b	d	b	c	a	a	d	b	c	d	d	a	c	b	b	b	0	1	0
16	M	17	11	concejo de Mede	0:40	a	d	b	e	b	b	b	b	e	a	c	a	a	d	b	d	e	b	e	b	b	b	b	0	1	1
17	F	17	11	concejo de Mede	0:30	a	d	c	b	b	b	b	c	d	b	c	c	a	e	b	a	e	b	b	c	b	a	b	0	1	0
18	M	17	11	concejo de Mede	0:42	e	d	a	e	b	e	b	e	e	c	c	a	a	d	b	a	e	d	a	a	d	e	b	0	1	0
19	M	18	11	concejo de Mede	0:42	a	d	a	a	b	a	b	b	a	b	c	b	a	d	b	e	d	d	a	c	e	e	b	0	1	0
20	M	16	11	concejo de Mede	0:40	a	d	b	b	b	b	b	b	d	b	c	b	a	b	b	d	d	d	a	d	b	d	b	0	1	1
21	M	16	11	concejo de Mede	0:20	e	d	b	b	b	b	b	e	e	b	c	c	a	e	e	a	e	d	d	c	b	e	b	0	1	1
22	M	16	11	concejo de Mede	0:28	a	d	a	b	b	b	b	c	a	b	c	c	a	d	a	a	d	d	a	c	a	b	b	0	1	0
23	F	16	11	concejo de Mede	0:42	e	d	b	b	c	a	b	b	a	b	d	a	c	d	b	a	d	d	a	c	e	e	b	0	1	1
24	M	16	11	concejo de Mede	0:32	e	d	a	b	b	b	b	a	a	b	c	c	a	d	b	a	c	d	d	c	b	b	b	0	1	0
25	M	16	11	concejo de Mede	0:28	c	d	b	a	b	b	b	a	b	c	c	b	a	b	b	a	d	d	a	c	b	b	b	1	1	1
26	M	16	11	concejo de Mede	0:37	a	d	c	b	b	b	b	b	a	b	c	c	a	d	b	a	d	d	a	c	b	e	b	0	1	0
27	F	15	11	concejo de Mede	0:28	a	d	b	e	c	b	b	e	d	b	c	c	a	e	b	a	e	b	b	a	b	a	b	0	1	1
28	M	16	11	concejo de Mede	0:40	a	d	e	a	c	a	b	a	b	b	c	c	a	d	b	a	e	b	b	c	b	b	e	0	1	0
29	M	16	11	concejo de Mede	0:36	a	d	a	b	c	a	b	c	a	b	c	c	a	d	b	a	b	d	a	c	b	b	e	0	1	0
30	F	15	11	concejo de Mede	0:50	e	d	e	e	c	a	b	e	d	b	c	b	a	d	b	e	e	d	b	c	b	b	b	0	1	0
31	F	16	11	concejo de Mede	0:38	e	d	e	b	c	b	b	e	d	c	c	c	a	d	b	a	e	d	a	c	b	b	b	0	1	0
32	F	16	11	concejo de Mede	0:44	a	d	b	b	b	a	b	b	d	b	c	a	c	d	b	a	e	d	b	c	b	b	b	0	1	1

	sexo	edad	grado	inst.ed	tiempo	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11	p12	p13	p14	p15	p16	p17	p18	p19	p20	p21	p22	p23	res1
32	F	16	11	Concejo de Medellin	0:44	a	d	b	b	b	a	b	b	d	b	c	a	c	d	b	a	e	d	b	c	b	b	b	0
33	M	17	11	Concejo de Medellin	0:30	c	d	e	e	c	b	b	e	e	b	c	c	a	e	b	a	d	d	a	c	b	b	b	1
34	M	17	11	Concejo de Medellin	0:40	a	d	e	b	b	b	b	b	d	b	c	c	a	d	b	a	b	d	a	c	b	b	b	0
35	M	16	11	Concejo de Medellin	0:37	a	d	c	e	c	d	b	e	e	b	c	c	a	d	b	a	e	a	a	c	b	b	b	0
36	M	16	11	Concejo de Medellin	0:30	a	d	b	e	b	b	b	a	b	b	c	c	a	d	b	a	e	d	a	c	b	b	c	0
37	F	16	11	Concejo de Medellin	0:35	a	d	c	b	c	a	b	e	d	b	c	c	a	d	b	a	e	d	a	c	b	b	b	0
38	F	16	11	Concejo de Medellin	0:45	a	d	e	e	c	b	b	c	d	b	c	c	a	d	b	a	e	d	a	c	b	b	b	0
39	F	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:40	d	d	b	b	b	c	b	b	a	b	a	e	a	d	b	a	e	d	a	b	b	a	a	0
40	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	e	d	c	b	b	b	b	c	a	b	b	c	a	b	b	a	d	d	a	c	b	b	b	0
41	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	c	d	e	b	c	a	b	e	d	c	c	c	a	e	b	a	e	e	b	a	a	a	b	1
42	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:40	e	b	b	b	c	a	b	a	d	b	c	b	a	d	b	a	d	c	b	b	b	c	b	0
43	M	15	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	e	d	c	a	c	a	b	c	d	b	c	a	a	d	b	a	e	c	a	e	a	a	b	0
44	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	d	b	b	b	a	b	b	a	a	c	c	a	d	b	a	d	b	b	c	b	b	b	0
45	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:50	a	d	a	b	b	d	b	a	a	b	c	c	a	d	b	a	d	d	a	c	b	b	b	0
46	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:50	c	d	a	b	b	a	b	b	d	b	c	b	a	d	a	a	e	c	a	d	b	b	b	1
47	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	d	d	a	a	c	b	b	a	d	b	c	c	a	a	d	a	d	d	a	c	b	b	b	0
48	F	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	d	a	b	c	b	b	d	d	b	c	c	a	d	b	a	e	c	a	c	b	b	b	0
49	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	d	d	b	a	c	b	b	e	d	c	c	c	a	b	b	a	d	d	a	c	b	b	b	0
50	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	a	d	a	b	b	a	b	a	d	b	c	c	a	d	b	a	e	d	b	c	b	b	b	0
51	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:50	a	d	d	e	c	b	b	c	b	a	d	c	c	b	b	a	a	b	b	a	a	a	a	0
52	F	16	8	Concejo de Medellin	0:43	e	d	b	b	c	a	b	b	b	b	b	a	a	b	a	d	a	b	b	d	c	c	e	0
53	F	13	8	Concejo de Medellin	0:40	e	e	a	b	e	b	c	e	a	b	c	a	a	d	b	a	d	b	b	c	b	c	a	0
54	F	15	8	Concejo de Medellin	0:40	d	d	a	b	b	a	b	e	c	b	c	b	a	b	a	a	a	c	e	c	a	a	a	0
55	M	13	8	Concejo de Medellin	0:39	a	d	b	b	b	a	e	e	e	d	b	c	c	a	b	c	c	d	b	b	d	b	d	0
56	M	13	8	Concejo de Medellin	0:35	e	d	a	a	b	b	b	d	c	b	c	b	a	b	b	b	c	d	b	b	c	d	b	0
57	M	14	8	Concejo de Medellin	0:33	d	d	a	b	a	c	b	a	d	b	c	b	a	b	a	a	d	c	b	c	a	a	e	0
58	F	18	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	e	e	a	a	e	a	e	e	e	a	a	e	a	b	d	a	e	d	b	c	b	b	d	0
59	M	14	8	Concejo de Medellin	0:32	a	a	e	b	b	a	b	a	e	b	c	b	a	b	b	b	c	a	a	a	b	d	b	0
60	M	14	8	Concejo de Medellin	0:45	e	d	e	e	c	a	d	e	e	b	c	e	a	e	b	d	a	a	b	e	c	b	d	0
61	M	14	8	Concejo de Medellin	0:54	e	e	d	a	a	c	b	a	d	b	c	b	a	b	b	e	d	d	a	e	d	b	c	0
62	M	15	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	b	a	b	b	c	e	c	a	d	c	b	d	b	b	c	d	d	a	c	b	b	b	0
63	F	17	11	Concejo de Medellin	0:31	a	b	a	b	c	b	b	e	e	b	c	c	a	d	b	a	d	a	b	b	e	e	b	0
64	M	16	11	Concejo de Medellin	0:44	a	d	c	b	b	b	b	c	c	b	c	a	a	d	b	a	d	c	b	c	d	e	b	0
65	M	12	8	Concejo de Medellin	0:31	a	c	e	a	c	c	b	b	d	b	c	c	a	c	e	a	d	b	b	e	e	e	b	0
66	M	14	8	Concejo de Medellin	0:30	a	e	a	b	b	a	b	a	e	b	c	b	a	d	b	c	d	c	a	c	d	a	d	0
67	M	15	8	Concejo de Medellin	0:35	d	d	a	b	a	c	b	b	d	b	c	c	c	d	a	a	d	e	b	c	a	c	d	0
68	F	14	8	Concejo de Medellin	0:40	a	a	b	e	b	c	b	e	b	d	e	e	a	d	b	e	d	d	b	c	a	b	b	0

Vista de datos / Vista de variables

68	F	14	8	Concejo de Medellin	0:40	a	a	b	e	b	c	b	e	b	d	e	e	a	d	b	e	d	d	b	c	a	b	b	0
69	M	16	11	Concejo de Medellin	0:53	a	d	a	b	e	a	b	c	d	d	e	e	e	e	e	a	d	d	a	c	a	b	b	0
70	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	d	a	b	b	a	b	b	d	a	b	a	a	d	b	d	d	a	b	c	d	d	b	0
71	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	d	d	a	b	b	a	b	d	c	b	c	b	a	d	b	a	d	a	b	c	d	d	b	0
72	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	d	a	b	b	c	e	a	d	b	d	a	a	d	b	a	e	c	a	d	b	c	b	0
73	M	14	8	Concejo de Medellin	0:20	e	d	a	b	e	d	b	a	d	b	c	e	a	b	b	a	d	d	a	d	c	c	b	0
74	F	18	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	e	e	c	a	c	a	b	e	e	b	c	c	a	d	a	e	e	c	b	d	c	b	b	0
75	M	15	8	Concejo de Medellin	0:40	a	d	e	b	c	c	b	e	d	a	c	c	a	d	b	a	a	c	b	c	d	a	e	0
76	M	13	8	Concejo de Medellin	0:46	a	d	c	b	c	c	b	c	d	a	c	c	a	b	b	b	b	c	a	c	b	a	d	0
77	M	13	8	Concejo de Medellin	0:38	e	d	e	e	c	b	b	b	c	b	c	b	a	b	b	a	d	c	e	d	a	d	b	0
78	F	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	e	e	c	b	c	b	b	c	a	b	c	a	a	d	b	a	e	a	c	d	d	b	b	0
79	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	a	d	a	b	c	b	b	b	a	b	c	b	a	b	a	a	e	c	a	a	a	b	b	0
80	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:42	e	a	e	c	b	c	b	c	d	b	c	b	a	b	b	a	d	c	a	c	b	b	b	0
81	F	16	11	Concejo de Medellin	0:43	a	d	e	b	d	d	b	b	a	a	c	b	a	b	b	a	d	e	a	c	b	b	b	0
82	M	16	11	Concejo de Medellin	0:40	a	d	c	b	b	a	b	c	d	b	c	c	a	d	b	c	c	c	a	a	a	a	a	0
83	M	17	11	Concejo de Medellin	0:30	a	e	b	a	b	b	b	d	a	b	c	c	c	d	b	a	d	d	d	c	b	b	e	0
84	M	15	11	Octavio Calderon Mejia	0:40	a	d	a	a	c	a	a	a	d	b	c	c	a	b	b	a	d	b	d	c	c	e	d	0
85	M	16	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	c	d	a	b	e	e	e	d	e	d	c	e	a	d	b	e	e	c	a	c	b	b	b	1
86	M	17	11	Octavio Calderon Mejia	0:45	e	b	b	b	c	b	b	e	d	b	c	c	a	e	b	a	e	c	b	b	e	c	b	0
87	F	13	8	Concejo de Medellin	0:47	e	d	d	c	c	b	b	e	d	b	c	c	a	e	b	a	d	b	a	e	b	c	c	0
88	M	13	8	Concejo de Medellin	0:34	a	c	a	a	c	b	b	c	d	b	c	c	a	e	b	a	d	d	a	e	e	c	b	0
89	M	14	8	Concejo de Medellin	0:37	a	d	a	b	b	c	b	b	b	b	c	c	a	d	b	a	b	d	c	b	b	c	d	0
90	M	14	8	Concejo de Medellin	0:37	a	d	a	b	c	a	b	a	d	b	c	c	c	c	e	a	d	b	b	c	b	b	b	0

Las anteriores tablas, dan cuenta de la utilización del programa estadístico SPSS con las que realizamos la base de datos para el análisis tanto estadístico como de k-medias, en esta investigación.