ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES PRESENTADAS POR LOS ESTUDIANTES DE CICLO IV DE ITM CASTILLA, EN LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE ÁLGEBRA EN LOS CONTEXTOS DE JUSTIFICACIÓN

MARTHA MUÑOZ DÍAZ

CLAUDIA LILIANA RÍOS CARDONA

ASESOR

JOHN HENRY DURANGO URREGO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

MEDELLÍN

2008

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestros sinceros agradecimientos por la colaboración institucional de la Universidad de Antioquia, docentes y estudiantes del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) Campus Castilla por su respetuosa acogida y por ofrecernos los medios necesarios para la realización de la intervención pedagógica de la cual hoy damos cuenta.

De igual manera, agradecemos a los docentes que nos colaboraron proporcionando información importante para nuestro trabajo, especialmente al docente John Henry Durango Urrego por su dedicación, compromiso, constante acompañamiento y asesoría en el proceso que hoy se refleja en está propuesta.

Reciban un abrazo de agradecimiento cada una de nuestras familias por el gran apoyo y entusiasmo que nos brindaron a lo largo de nuestra carrera. Y todas las personas que de una u otra forma nos ofrecieron la colaboración para la realización de esta propuesta, gracias a nuestro empeño y a ustedes se logró llevar a cabo la intervención, que esperamos sea útil para futuras investigaciones.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debería ir encaminada a despertar en el estudiante el agrado por descubrir, explorar, conocer y aprender del contexto, identificando en su entorno las relaciones matemáticas implícitas que posibilitan la reflexión de los conceptos y el acercamiento a su vivir; momentos que a la par permitan dar cuenta del grado de comprensión que está adquiriendo; es por ello que el trabajo realizado hace énfasis en las relaciones entre lo teórico y lo "cotidiano" teniendo en cuenta lo relacionado con los conceptos básicos sobre el álgebra.

Los conceptos a trabajar son sin duda uno de los temas poco agradables para los estudiantes de bachillerato especialmente para los 8° y 9° donde se dedica gran tiempo al trabajo en pro de la generalización. Por ello se procura pasar de trabajar con casos particulares, para dar la oportunidad a el estudiante de que conjeture y extraiga relaciones importantes, entre las operaciones con expresiones algebraicas, para lo cual se ha decidido presentar varios talleres en busca de la aplicabilidad de dichos conceptos, intentando enlazarlos con los espacios que circundan al estudiante y las situaciones en las cuales se encuentra.

También se considera importante rastrear las posibles causas de dificultad, tomando como base las construcciones del estudiante, que en sus registros deja ver que tanto ha comprendido y en que forma lo ha hecho, ya que toda la producción personal es fuente de análisis e investigación para fundamentar propuestas que contribuyan al mejoramiento de metodologías y contenidos en el aula de clase.

Esta propuesta está basada en una intervención pedagógica implementada a lo largo de la práctica profesional docente, la cual se llevo a cabo en el grupo de ciclo IV que corresponde a los grados octavo y noveno del Instituto Tecnológico Metropolitano, campus Castilla, ubicado en la carrera 65 Nº 98ª-75 en Medellín, donde se realizó un acompañamiento a los estudiantes a lo largo del proceso de intervención de los talleres. En general se busca detectar las dificultades más frecuentes que presentan los estudiantes al momento de enfrentarse a conceptos básicos del álgebra. Luego de revisar cada uno de los registros, se procederá a destacar en los mismos las dificultades que se presentan para luego organizarlas, hacer un análisis de éstas e intentar dar una explicación de por qué ocurren, enmarcándolas dentro de los tipos de prueba propuestos por Balacheff (2000).

Capítulo 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN

Las dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos, se presentan con frecuencia en las aulas de clase, debido a diversas razones. Por lo cual se hace necesario un seguimiento a dichas dificultades, mediante la exploración y reconocimiento de los posibles factores que intervienen en estas, y así lograr establecer pautas que acerquen a los estudiantes a una mejor comprensión de los conceptos.

Algunos procesos y conceptos implícitos en el álgebra, particularmente, la generalización y conceptos asociados a ésta son referentes de gran importancia dentro de las matemáticas, por ser herramientas que permiten un acercamiento a la aprehensión de conceptos y métodos que le permitan al estudiante construir mecanismos para la modelación y la solución de diversas situaciones que se le presentan.

Es por ello que nos interesa analizar en la clase de matemática las dificultades que por diferentes razones se van haciendo acumulativas; donde el aprendizaje mecanicista aún se mantiene, considerando pertinente hacer énfasis en los procesos que integran el pensamiento algebraico y la relación que este tiene con los demás conceptos de la matemática; destacando además la importancia de la generalización dentro del contexto escolar, concepto importante dentro del pensamiento algebraico. Para lograr este objetivo se tendrán en cuenta las explicaciones, justificaciones, pruebas y posibles conjeturas que los estudiantes elaboran desde su propia experiencia.

1.2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Algunas de las investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico han mostrado una tendencia a indagar sobre las dificultades que presentan los estudiantes frente a conceptos o temas propios del algebra; a su vez estos trabajos han hecho énfasis en diferentes aspectos que intervienen en el proceso, como son el lenguaje algebraico, la asimilación conceptual, la didáctica y la enseñanza del algebra como tal, las ayudas tecnológicas, entre otras.

A continuación se presenta un breve recuento de algunas de estas investigaciones.

- **Lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir un equilibrio entre investigación y práctica.** María de los Ángeles Ortiz Capilla (1997)

En esta investigación partiendo de ejemplos prácticos se hace un llamado a la reflexión sobre algunas preguntas que han sido escasamente discutidas en el campo del algebra escolar. Además hace notar que aunque la investigación en didáctica del algebra ha ido en aumento, dicho trabajo ha tenido un impacto pequeño en la actividad diaria en las aulas de clase; situación que probablemente se debe a la poca difusión de los resultados obtenidos y a que los temas investigados están alejados de las preocupaciones habituales del profesorado.

- **Aportes de la investigación a la enseñanza del álgebra elemental.** Raimundo Olfos A

Con este trabajo el autor busca comunicar a los profesores y otros agentes del sistema educativo los resultados de estudios realizados en las últimas décadas que contribuyen a una mejor comprensión de los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje del algebra inicial, para así orientar la toma de decisiones e impulsar la renovación de las practicas en el aula. Para ello se muestra cómo de diferentes perspectivas y hallazgos de investigación señalan nuevos rumbos y fortalecen otros en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra elemental; además propone abrir una mirada mas integrada y compleja al fenómeno de enseñanza del algebra elemental fundada en la reflexión.

- **Empleo de los Asistentes Matemáticos para la asimilación conceptual del álgebra universitaria.** Ileana Miyar Fernández y maría de los Ángeles Legañoa (2007)

Esta investigación ofrece una metodología para la enseñanza del algebra, basada en el uso de los asistentes matemáticos para interrelacionar el aprendizaje conceptual con el procedimental que contribuye a resolver las insuficiencias que presentan los estudiantes en la asimilación de conceptos algebraicos. Este proceso fue llevado a cabo empleando el asistente matemático Derive, con el cual se puede ampliar, organizar, visualizar y realizar múltiples representaciones del conocimiento que se imparte, lo que contribuye a mejorar la comprensión conceptual en el estudiante.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con los tipos de prueba está la realizada por Nicolás Balacheff (2000) de la cual se ha tomado como referente las definiciones sobre los tipos de prueba que el autor plantea, para el desarrollo del trabajo que se presenta a continuación.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Cuales son las dificultades que presentan los estudiantes al momento de realizar explicaciones, justificaciones y pruebas cuando se les enfrenta a talleres relacionados con los conceptos básicos del algebra?

1.3.1 OBJETIVOS

1.3.1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar, interpretar y organizar las dificultades desde los contextos de justificación y prueba que emergen en los registros escritos presentados por los estudiantes al momento de intervenir talleres, en los que se abordan conceptos básicos sobre algebra.

1.3.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Evidenciar las dificultades en los contextos de justificación y prueba que presentan los estudiantes de ciclo IV (8º y 9º) del ITM Campus Castilla, a partir de unos registros escritos, recolectados a través de la intervención de talleres en la clase de matemáticas.

- Tener en cuenta la clasificación de los desfases pedagógicos propuestos por Orlando mesa, para relacionar las dificultades encontradas a lo largo de la intervención.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Para la implementación y desarrollo de la propuesta se tuvo presente los aportes hechos por Nicolás Balacheff (2000), en su trabajo: Los Procesos de Prueba en los Alumnos de matemáticas; lo más relevante de esta investigación para la intervención, son los cinco tipos de prueba que allí describe, dentro de los cuales se pueden incluir las justificaciones realizadas por los estudiantes intervenidos, al momento de enfrentarse a algunos conceptos básicos del álgebra[1]. También se tuvo como referente las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, vistas bajo el enfoque de problemas psicopedagógicos citadas por G. Gallego (2005), así como también algunos planteamientos expuestos por el grupo Azarquiel (1993), en el texto “ideas y actividades para enseñar algebra”.

Dada la importancia de estar acorde con los planteamientos del Ministerio de Educación nacional, en este caso, se retoman los Documentos Rectores como: Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

[1] Conceptos básicos: coeficiente, expresión algebraica, término, grado de un término, clases de término, términos semejantes, grado de un polinomio.

2.1 TIPOS DE PRUEBA SEGÚN NICOLÁS BALACHEFF (2000)

La propuesta de intervención diseñada, hace necesario un referente teórico donde tenga cabida la interpretación de los procedimientos realizados por los estudiantes, las justificaciones y argumentaciones dadas por ellos. Por lo cual los aportes realizados por Balacheff están acordes con los propósitos planteados en la investigación, que permiten un acercamiento a las dificultades que se presentan frente a los conceptos básicos trabajados en los talleres implementados en la clase de matemática.

A continuación se presentan las definiciones dadas para cada tipo de prueba:

> ***Empiricismo ingenuo****: Consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. Este modo de validación tan rudimentario e insuficiente, es una de las primeras formas de los procesos de generalización; el empiricismo ingenuo constituye una forma resistente de generalización.*
>
> ***Experiencia crucial****: Fue una invención de Francis Bacon (1620), que designa una experimentación cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera solo una de ellas. Teniendo en cuenta que si esta experiencia permite rechazar una hipótesis, no es posible afirmar que la otra es verdadera. Utilizaremos esta misma expresión para designar el proceso que consiste en verificar una proposión de un caso para el cual no se asume que "si funciona ahora, entonces funcionará siempre". Este tipo de validación se distingue del empiricismo ingenuo en que el individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve, aventurándose a la ejecución de un caso que reconoce tan poco particular como le es posible.*
>
> ***Ejemplo genérico****: Consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase. La formulación libera las propiedades, características y estructuras de una clase, estando*

siempre ligada a su categoría y a la exhibición de uno de los representantes.

***Experiencia mental**: Se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica pero las operaciones y las relaciones que inician la prueba nunca están designadas por su puesta en práctica. Las operaciones y las relaciones que sirven de preludio a la prueba nunca son escogidas por el resultado de su puesta en práctica. Este es el caso genérico. Esta prueba exige la implicación de la experiencia mental en cuanto remite de hecho a teoremas en acto veriricados en la práctica.*

***Calculo sobre enunciados:** Pruebas totalmente independientes de la experiencia, son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explicitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas.*

Teniendo en cuenta las características que presentan cada prueba se relacionaran las dificultades halladas, igualmente de este autor tomaremos lo que él describe como tipos de pruebas: pruebas pragmáticas o por ostensión y pruebas intelectuales, las cuales define así:

***Pruebas pragmáticas o por ostensión:** En el sentido de la psicología piagetiana, la forma más elemental de una prueba es la ostensión. , este tipo de pruebas recurren a la acción o a la ostensión.*

***Prueba intelectual:** Este tipo de pruebas son aquellas que separándose de la acción se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y sus relaciones, se fundamentan en la toma* *de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas.*[2]

De acuerdo a los tipos de prueba presentados se realizara la interpretación de las justificaciones y argumentaciones dadas por los estudiantes en las evidencias recolectadas, información que complementará la interpretación de las dificultades halladas.

2.2. ENFOQUE DE PROBLEMAS PSICOPEDAGÓGICOS

Las dificultades en el aprendizaje obedecen a diversos factores, es por ello que la perspectiva bajo la cual serán interpretadas las dificultades halladas en el desarrollo de la propuesta es la del enfoque de problemas psicopedagógicos que resume el profesor Gustavo Gallego.

Uno de los pilares de este enfoque es el concepto de desfase pedagógico, el cual hace referencia a "las dificultades de aprendizaje lógico-matemático, que se presentan debido a una falla en la relación entre un sujeto que aprende y unos conocimientos que se aprenden." Gallego (2005). Situación en la cual intervienen cantidad de factores como son la metodología implementada, los conocimientos previos que tienen los estudiantes respecto a un concepto o tema, sus vivencias personales y percepciones, así como el orden curricular establecido en las instituciones, entre otros.

[2] Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de* matemáticas. Santafé de Bogotá: una empresa docente.

Son innumerables los posibles desfases pedagógicos, que se presentan dentro de los procesos de aprendizaje y que hacen difícil su interpretación, es por ello que se tendrá en cuenta la clasificación presentada por Gallego (2005), citando a Orlando Mesa.

Clasificación de los desfases pedagógicos

> ***Los curriculares****: que tienen que ver con los problemas presentados con el manejo y presentación de los contenidos.*
>
> ***Los lingüísticos****, que abarcan todos los problemas presentados por la mala utilización del lenguaje como medio facilitador del aprendizaje matemático y el buen desarrollo del pensamiento matemático.*
>
> ***Los de motivación e interés****, que tienen que ver directamente con las metodologías utilizadas por los maestros en su práctica pedagógica.*
>
> ***La resolución de problemas****, como elemento fundamental para la elaboración de propuestas metodológicas de enseñanza de las matemáticas y alternativa de diagnóstico de dificultades de aprendizaje lógico-matemático.*

De la clasificación anterior se hará énfasis en los desfases curriculares, los lingüísticos y los de motivación e interés ya que la resolución de problemas debido a la variedad de elementos que la componen y su complejidad, amerita un tratamiento detallado y profundo que puede ser tratado en una investigación futura.

2.3. PLANTEAMIENTOS DEL GRUPO AZARQUIEL

El álgebra a lo largo de la historia de las matemáticas ha sido una de las áreas que deja ver en los estudiantes grandes vacíos, pues sus conceptos no son fáciles de aprender, comprender y aplicarlos en la vida cotidiana, es posible notar que en los niveles en los que comienza los estudios formales, es precisamente donde se observa que el fracaso en matemáticas aumenta. El estudio de símbolos, es uno de los conceptos con un grado de complejidad alto para los estudiantes, pues esto significa “la posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es, precisamente lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad”. Azarquiel (1993), es necesario entonces que el estudiante no solo conozca la teoría sino que entienda como utilizarla en un momento determinado, al tiempo que le permita indagarse y construir modelos para la solución de una situación que se le presente y de esta forma evidenciar si lo que aprendió, lo logró comprender y generalizar para aplicarlo en cualquier situación.

A lo largo de la implementación de la prueba escrita se busco que allí emergieran elementos correspondientes al algebra, entre ellos el proceso de generalización, uno de los mas relevantes, el cual se define en el texto como: “el camino que se sigue para incorporar el uso de símbolos algebraicos a situaciones en que resulta necesario: expresiones de regla, escritura de fórmulas, resolución de problemas, interpretación de expresiones, comprobaciones, etc…”Azarquiel (1993), referente a la utilización de este elemento los estudiantes presentan algunas dificultades, ya que no es muy estudiado en el aula de clase, solo se presentan algunas actividades en las que se implementa, pero no se profundiza.

La forma en que se trabajo fue con actividades en las cuales se debía traducir un enunciado presentado en un lenguaje natural a un lenguaje formal, ya que esto se convierte un uno de los primeros pasos para lograr una de las metas de la simbolización; a este proceso se le debe dedicar tiempo en el aula de clase ya que no se logra de forma autónoma, incluso conociendo y comprendiendo ambos lenguajes, sino cuando se logra establecer una relación entre estos, para lograr la correcta traducción que brinde las bases formales para realizar procedimientos acertados.

El algebra brinda la posibilidad de que conocimientos aprendidos en aritmética se puedan generalizar. Es así como poner un enunciado en ecuaciones es quizás otro de los temas del álgebra que le presenta a los estudiantes grandes vacios, pues es difícil reconocer cómo un enunciado en forma natural puede ser traducido a un lenguaje formal en términos algebraicos, además identificar los términos de la ecuación, donde va el igual y cómo está conformado cada unos de los lados de la igualdad. A pesar que los primeros años de la enseñanza del álgebra están designados para que los estudiantes aprendan a resolver ecuaciones y sistemas, esta tarea no es fácil de llevar a cabo, ya que se presenta una ruptura al pasar del trabajo con ecuaciones numéricas a ecuaciones en las cuales se emplean diversos símbolos que representan variables.

El algebra brinda múltiples posibilidades que de no comprender como se utilizan hay una tendencia marcada a divagar en el amplio camino de las matemáticas.

2.4. LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS

Teniendo en cuenta que la propuesta investigativa es en Educación matemática, se han tenido presente documentos rectores como son los Lineamientos curriculares donde se afirma que:

> *Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino, que al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma para actuar en y para ella.*

Por lo cual el estar presentes en el proceso educativo contribuye al desarrollo integral de los estudiantes.

Dentro de la propuesta investigativa son relevantes los procesos generales y los conocimientos básicos que poseen los estudiantes frente al tema de estudio, el contexto que rodea a la población, los cuales se definen en los lineamientos como:

- *Procesos generales: tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.*
- *Conocimientos básicos: que tiene que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.*
- *Contexto: tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales*

como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, debe tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

2.5. ESTANDARES DE MATEMÁTICAS EVALUADOS A LO LARGO DE LA IMPLEMENTACION DE LA PROPUESTA

2.5.1 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de noveno grado.

Desde los estándares de matemáticas se propone que el pensamiento variacional y sistemas algebraicos deben de ir encaminados a evaluar procesos de cambio. Al momento de la implementación de la prueba escrita de diversas formas se evidencio el trabajo de los siguientes estándares pertenecientes a este pensamiento:

- *Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.*
- *Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.*
- *Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.*
- *Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.*

2.5.2 Pensamiento espacial y sistemas geométricos de noveno grado.

En el pensamiento espacial, se destaca: Examen y análisis de las propiedades de los espacios en dos y en tres dimensiones, y las formas y figuras que éstos contienen. También herramientas como las transformaciones, traslaciones y simetrías; las relaciones de congruencia y semejanza entre formas y figuras, y las nociones de perímetro, área y volumen.

Este pensamiento no se trabajo directamente como el variacional y sistemas algebraicos, pero estos dos estándares al momento de la intervención se encuentran presentes.

- *Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).*

- *Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.*

Capítulo 3

METODOLOGÍA

La intervención fue realizada en el Instituto tecnológico Metropolitano Campus Castilla, distribuida en dos momentos, constituidos por la intervención de los talleres y la posterior interpretacion de las justificaciones y argumentaciones presentadas por los estudiantes.

3.1. DESCRIPCION DE LA POBLACIÓN

La población en la cual se realizó esta intervención corresponde a los grados octavo y noveno del Instituto Tecnológico Metropolitano, campus Castilla, grupo de ciclo IV, que contó con un total de 42 estudiantes; con ellos se realizó un acompañamiento en el área de matemáticas durante un año, tiempo en el cual se realizaron pruebas escritas y se presentaron conocimientos básicos y complementarios para este nivel, observando en ellos información útil para la investigación; presentando los resultados y conclusiones generales que se detallaron a lo largo de la implementación.

La población presenta algunas características especiales a diferencia de otro tipo de población que se encuentre en su mismo nivel, una de las más relevantes es la diferencia en sus edades, en el salón de clase la edad oscilaba entre 17 y 35 años, según información suministrada por ellos mismos, muchos de ellos son personas que han estado des escolarizadas por diferentes periodos de tiempo debido a diversas razones, por lo cual el aprendizaje de las matemáticas comentaban se les hacia difícil .

3.2. FILOSOFIA INSTITUCIONAL (ITM)

Por mandato legal y por compromiso misional el ITM ha asumido la responsabilidad indeclinable con la sociedad medellinense, de ofrecer un servicio público de carácter educativo y cultural, incluyente para todos los sectores sociales y con condiciones preferentes de acceso y permanencia para los individuos provenientes de los estratos mas carentes de oportunidades para participar equitativamente en el mundo social y laboral.

El programa de Educación de Adultos del campus de Castilla, constituye un nivel precedente de la educación superior, pero desde el punto de vista de la filosofía del ITM representa un espacio formativo y democrático, de convivencia ciudadana donde convergen individuos adultos de diferentes edades y disímiles experiencias de vida, quienes en su mayoría traen el reto de fortalecer su espíritu y capacitarse académicamente para abrirse un camino en medio de los conflictos y las desigualdades sociales.

El proyecto Educativo que orienta este programa está fundamentado en el Modelo pedagógico del ITM, que a su vez tiene como directrices la misión y los principios institucionales. La concepción que lo ilumina es la de formación integral centrada en la autonomía ética, intelectual y social de los individuos, como un requerimiento básico para la participación responsable y productiva en la vida familiar, social y laboral.

El Modelo Pedagógico consigna el concepto de formación como “la expresión del conocimiento que el ser humano tiene de sí mismo y de su relación con el mundo, de los valores que ha construido como sujeto individual y social, los principios y criterios que orientan su vida y su accionar y que le permiten gobernarse así mismo y lograr la mayoría de edad.”

La formación integral es, en consecuencia, una fortaleza interna de los individuos, construida a partir de su voluntad y decisión de aprender a aprender, aprender a ser, aprender a hacer y aprender a convivir.

La educación está constituida por acciones externas de múltiples dimensiones que confluyen sobre los sujetos para intervenir de manera integral su formación personal y social, es decir la afectividad, la moral, los estilos de vivir y de relacionarse con los otros; y la formación intelectual y la preparación para el trabajo.

Estas acciones no siempre corresponden a la educación institucionalizada e intencionada de la Escuela, la familia en gran medida da cuenta de la educación temprana, además, comparte y con frecuencia, se disputa con diferentes grupos sociales la influencia cultural sobre sus miembros.

El ITM asume su Modelo Pedagógico en al ámbito de la educación institucionalizada, en el contexto de los procesos de enseñanza y aprendizaje intencionados, como mediadores de la formación autónoma, con el supuesto de que la educación a lo largo de la vida debe ser la perspectiva de todos los individuos para el logro de la interacción inteligente con el entorno, en beneficio de su calidad de vida y la construcción colectiva de ciudadanía.[3]

3.3. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación que se asumió a lo largo del trabajo es la investigación cualitativa. Una de las características de la investigación cualitativa es ver las cosas desde el punto de vista de los participantes de la investigación que está siendo realizada, es decir, el investigador debe entender e interpretar qué está sucediendo, y esto es lo que se busca con el análisis de los registros escritos, analizar e interpretar la información que allí se presenta, categorizarla y tratar de hacer una observación detallada al por qué se da dicho evento, al igual que cualquier tipo de investigación tiene sus principios para evaluar, pues debe tener en cuenta las realidades de la investigación y las complejidades del fenómeno humano que se busca entender, por esto es importante tener presente el tipo de población en la que se desarrolla la investigación e identificar que grado de vulnerabilidad presenta al tema en cuestión.

Los criterios utilizados con mayor frecuencia para evaluar la calidad científica de un estudio cualitativo son la credibilidad, la auditabilidad y la transferibilidad (Castillo, E., & Vásquez, M).

La credibilidad se logra cuando el investigador, a través de observaciones, conversaciones y toma de registros con, y de los participantes en el estudio, recolecta información que produce hallazgos que son reconocidos por los

[3] Urrego Giraldo, Idilia, Directora de la Escuela de Pedagogía ITM, citado en Módulo de Pensamiento Lógico Matemático Ciclo IV, página 5.

informantes como una verdadera aproximación sobre lo que ellos piensan y sienten. En este trabajo se presenta a través de las observaciones algunos resultados que aproximan a este criterio la realidad en la que se trabajó y se exponen algunas de las evidencias encontradas en los registros analizados, de igual manera, los informantes pueden volver a la recolección de la información, pues se presentan los datos completos como anexos.

El segundo criterio del rigor metodológico es la auditabilidad, llamada por otros autores confirmabilidad, la cual hace referencia a la habilidad de otro investigador de seguir la pista o la ruta de lo que el investigador original ha hecho, por ello se hizo necesario en la investigación tener definidas varias de las decisiones e ideas relacionadas con el estudio, pues esto es lo que permite que otro investigador examine los datos y pueda llegar a conclusiones iguales o similares a las del investigador original siempre y cuando tengan perspectivas similares.

La transferibilidad o aplicabilidad es el tercer criterio que se debe tener en cuenta para juzgar el rigor metodológico en la investigación cualitativa. Este criterio se refiere a la posibilidad de extender los resultados del estudio a otras poblaciones. Castillo y Vásquez indican que se trata de examinar qué tanto se ajustan los resultados con otro contexto. En la investigación cualitativa la audiencia o el lector del informe son los que determinan si pueden transferir los hallazgos a un contexto diferente del estudio.

Capítulo 4

MARCO CONCEPTUAL

Al realizar el análisis de las dificultades a lo largo de la implementación de la propuesta se hace necesario marcar pautas que permitan un estudio más detallado, procurando realizar la interpretación respectiva a cada dificultad evidenciada. Para realizar el análisis se tendrá en cuenta cuatro momentos. El primer momento está dado por la recolección de los datos mediante los registros escritos presentados por los estudiantes, al tiempo que se realizará una revisión de cada uno de ellos, extrayendo la información necesaria para la sistematización de este trabajo.

Posteriormente en un segundo momento se dará la interpretación de las dificultades, tratando de justificar desde los conceptos inmersos de las matemáticas que allí se evidencian con alguna dificultad, teniendo presente lo observado en el acompañamiento realizado a los estudiantes en el proceso y los comentarios realizados por ellos en las socializaciones de los talleres respectivos.

El tercer momento está dado por la clasificación de las dificultades a la luz del marco teórico de Nicolás Balacheff, partiendo del tipo de razonamiento que se ve reflejado en los estudiantes al enfrentarse a la solución de cada uno de lo talleres propuestos.

Por ultimo se tendrá presente los desfases pedagógicos citados por Gustavo Gallego, ya que las dificultades evidenciadas obedecen a diversos factores, ofreciendo así una interpretación desde dos perspectivas complementarias.

De acuerdo al trabajo desarrollado por los estudiantes en los talleres planteados se han extraído las dificultades que se describen a continuación.

4.1 INTERVENCIÓN DE LOS TALLERES

Al grupo de estudiantes le fueron presentados varios talleres donde se daban enunciados que ellos debían plantear en forma algebraica y otros enunciados dados en forma algebraica para que operaran entre sí e hicieran uso de las propiedades entre los términos que los conformaban; dichos talleres fueron realizados durante las sesiones de clase y luego comentados a nivel de grupo, observando en cada uno la forma de argumentar el procedimiento.

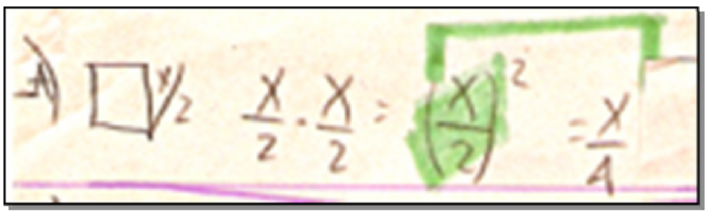
4.2. DIFICULTADES EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE ALGUNOS ENUNCIADOS ENMARCADOS EN GEOMETRIA

En la realización de este taller aparecen varias dificultades las cuales se ilustran con el fragmento del respectivo registro.

PRIMERA PARTE

D1. DIFICULTADES RELACIONADAS CON LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS.

D1.1. Al elevar una fracción algebraica al cuadrado, elevan sólo el denominador y no el numerador o viceversa.



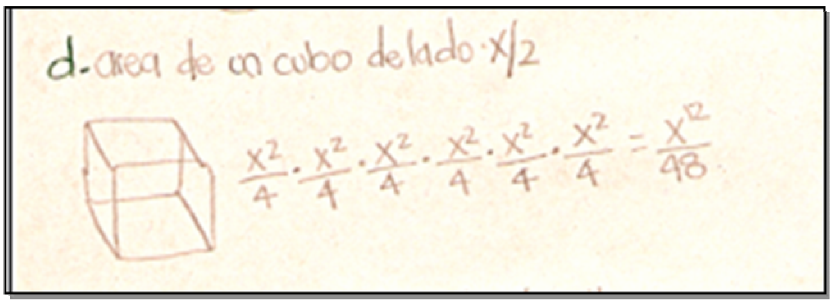
En esta dificultad se evidencia la carencia que tienen los estudiantes frente al conocimiento y manejo de las propiedades de los exponentes, concretamente la que refiere a los cocientes: un cociente elevado a un exponente, cada término se eleva a dicho exponente. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$

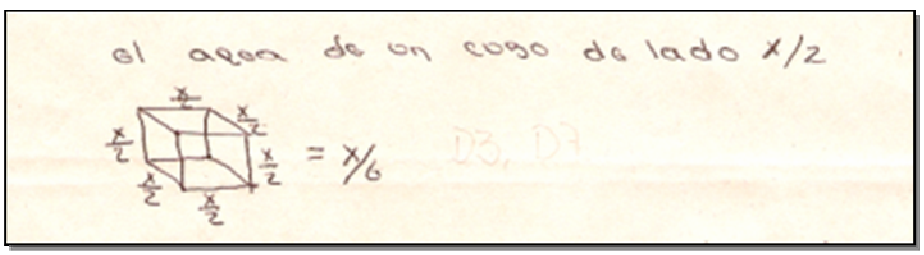
Se observa que los estudiantes distribuyen el exponente solo al denominador al tiempo omiten procesos en su numerador, además presentan procedimientos no apropiados al operar.

En esta dificultad el tipo de prueba utilizada es empiricismo ingenuo, pues el estudiante no reconoce las propiedades implícitas que se presentan en el enunciado planteado, sin realizar una verificación del procedimiento; el estudiante no hace uso de otra forma para validar el resultado hallado.

De acuerdo a los planteamientos de Orlando Mesa en esta dificultad prevalece el desfase pedagógico relacionado con lo curricular, ya que al no haber un manejo de las propiedades de los exponentes por parte de los estudiantes, lleva a pensar en la forma que han sido organizados y presentados dichos temas en grados anteriores y la recepción de los estudiantes frente a estos.

D1.2. Los estudiantes presentan dificultades en la multiplicación de fracciones algebraicas.





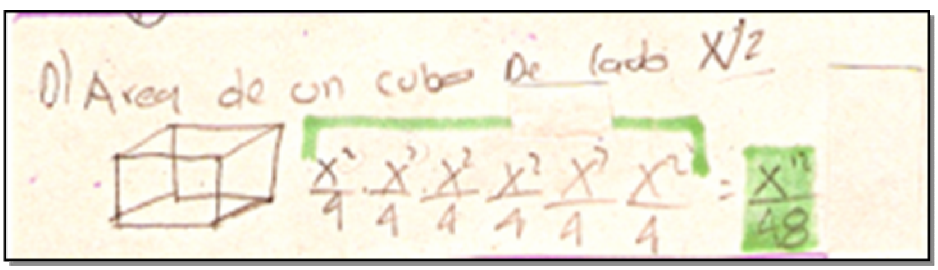
Esta dificultad es una de las más frecuentes, donde no hay claridad de cómo se multiplican fracciones, además cabe anotar el poco manejo de las propiedades de las potencias que para dichos casos, permitiría un desarrollo rápido y acertado de los procesos de validación.

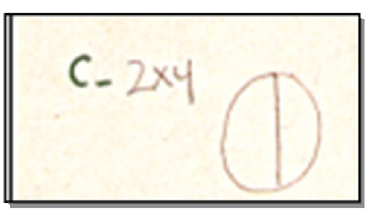
En esta dificultad el tipo de prueba observado en los registros es el empiricismo ingenuo, donde los estudiantes aunque plantean en forma escrita un algoritmo para resolver, no logran evidenciar el procedimiento a seguir y optan por operar de manera poco acertada, sin dar lugar a una verificación de la respuesta contrastándola con el enunciado.

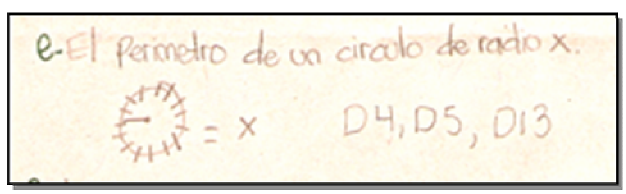
Respecto a los desfases se tiene que esta dificultad emerge del relacionado con los curriculares, donde no se muestra dominio de los procedimientos algorítmicos por parte de los estudiantes, situación que no es sólo del grado que cursan en la actualidad, sino que obedece al tratamiento dado a dichos procedimientos en años anteriores.

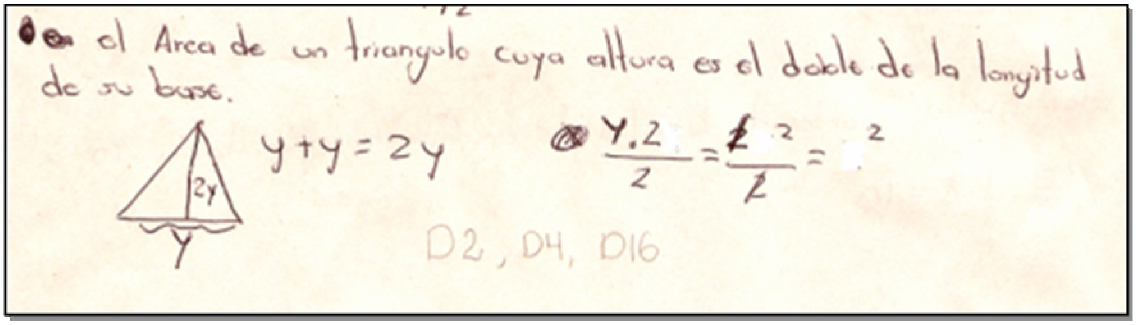
D2. DIFICULTADES RELACIONADAS CON TÉRMINOS ALGEBRAICOS.

D2.1. Los estudiantes no representan el enunciado dado en un lenguaje algebraico.







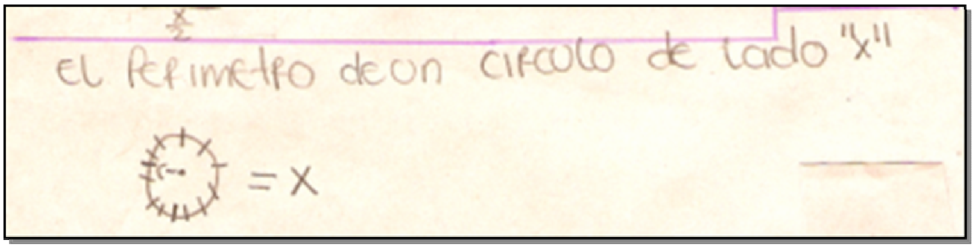


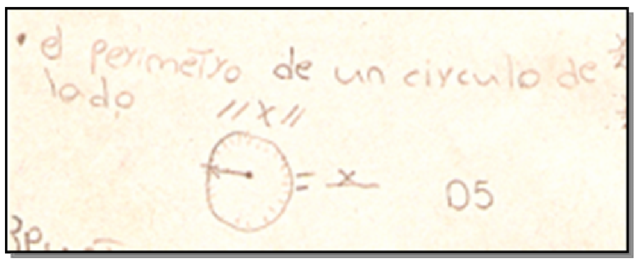
En esta parte se evidencia que el proceso de “representación” de un enunciado a un lenguaje algebraico, se necesita tener claridad en los conceptos que este proceso involucra, como son las representaciones de área, perímetro, volumen en términos algebraicos, donde se hace uso de incognitas.

Ante las carencias presentadas en el proceso de representación del enunciado, se evidencia el empiricismo ingenuo, donde los estudiantes no establecen relaciones entre los elementos del enunciado y el papel que desempeñan respecto a las representaciones algebraicas comunes de dicha figura, las llamadas “fórmulas”, ya que se hizo uso de figuras conocidas con las que se ha trabajado desde los primeros años de escolaridad.

En cuanto a los desfases se puede notar la influencia muy equilibrada de los curriculares, los lingüísticos y los de motivación e interés, ya que con base en las carencias conceptuales frente a las figuras presentadas y los elementos que las conforman, los estudiantes daban cuenta de la poca apropiación y manejo de dichos conceptos en grados anteriores, además muchos de ellos no mostraban deseos de hacer la representación, ya que no habia apropiacion de conocimientos básicos que permitieran hacerla, además se daba una “negación” a expresar lo que tenian en mente.

D2.2. Los estudiantes desconocen o no plantean en forma correcta la formula que representa el perímetro de un círculo en términos de su diámetro.





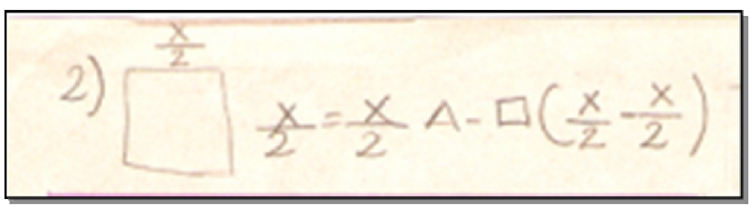
En esta dificultad se notan varios factores, uno de ellos la no identificación de los elementos relacionados con la circunferencia como el diametro, el radio. Tambien se destaca la poca apropiacion de las relaciones de perimetro de una figura con sus representaciones algebraicas, ya que estos son conceptos que se abordan desde la enseñanza básica pero que en su mayoría no son adoptados para posteriores usos.

En esta dificultad los estudiantes no identifican la relacion entre π (pi) y la longitud del círculo, además no tienen en cuenta la irracionalidad de π, la cual se deja ver cuando omiten dicha constante en los planteamientos.

Para este enunciado los estudiantes partian de pruebas pragmáticas, donde dejaban toda la justificación a la representación gráfica realizada, sin destacar en ella los elementos que la conforman como el diámetro, el radio entre otros, y las relaciones entre estos, limitandose hacer una gráfica que en muchos casos dista del enunciado. El tipo específico de prueba es el empiricismo ingenuo, ya que aunque en varias evidencias muestran gráficas acertadas, los estudiantes no logran dar respuesta correcta a la situación, debido al desconocimiento de las relaciones entre los elementos en juego como son el diámetro, el radio y la relación con π.

Los desfases siguen siendo de corte curricular, donde el estudiante con el desconocimiento de los elementos de la circunferencia, da cuenta de carencias en el trabajo de temas trabajados en grados anteriores.

D2.3. Los estudiantes desconocen o no plantean en forma correcta la formula que representa el área de un cuadrado en función del lado.

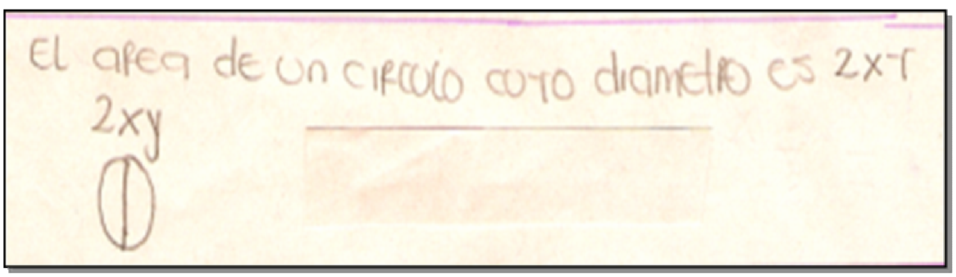


De nuevo identifican los elementos que conforman el cuadrado, como son sus lados y la relación de ser todos iguales, es más, muestran cierta confusión al plantear en su solución una gráfica triangular, la cual al preguntar que representaba, el estudiante no tenia claro que función desempeña o para que la utilizó.

Para este enunciado los estudiantes en su mayoría realizaron la gráfica para tratar de comprenderlo, remitiéndose de esta forma a una prueba pragmática, que a su vez desemboca en un empiricismo ingenuo, pues no logran identificar claramente los elementos del cuadrado estableciendo una representación algebraica de este.

El desfase que prima sigue siendo de corte curricular y referido a la presentación de los contenidos donde la escasa apropiación de los conceptos por parte del estudiante da cuenta de la poca conexión que encuentra entre los temas trabajados en grados anteriores y el actual. También se evidencia en algunos casos los desfases de motivación e interés por parte del estudiante, cuando abandona fácilmente la posibilidad de hallar una solución.

D2.4. Los estudiantes desconocen o no plantean en forma correcta la formula que representa el área de un círculo en función de su diámetro.

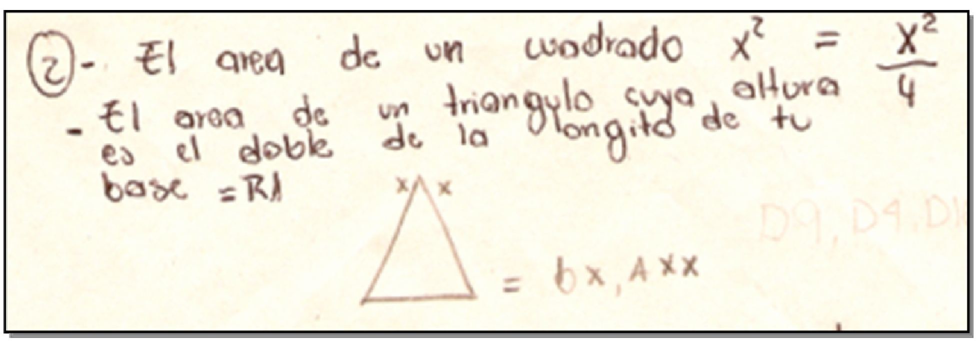


En esta dificultad aparecen de nuevo carencias conceptuales frente a la representación del área de un círculo y los elementos que lo conforman como es el radio y el número π (pi), tampoco hay claridad entre la relación de medida existente entre el diámetro y el radio, ya que no transforman la información dada en el diámetro para extraer el valor del radio de dicho círculo.

Similar a las situaciones anteriores el estudiante se ve en la necesidad de representar gráficamente el enunciado para acercarse a su comprensión y a una posible solución, por ello hace uso de una prueba pragmática, como es el empiricismo ingenuo, pues no logra identificar claramente las propiedades en juego y darle solución correcta a al enunciado planteado.

Respecto a los desfases siguen primando los curriculares donde participa el docente con la forma de presentar y trabajar los conceptos, ya que este proceso obedece a las experiencias vividas en grados anteriores. También se destacan los desfases de motivación e interés, ya que los estudiantes dejan fácilmente la posibilidad de encontrar una solución.

D2.5. Los estudiantes desconocen o no plantean en forma correcta la formula que representa el área de un triángulo en función de la altura y base.

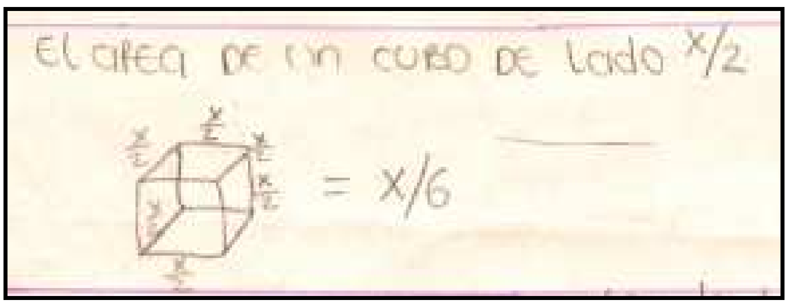


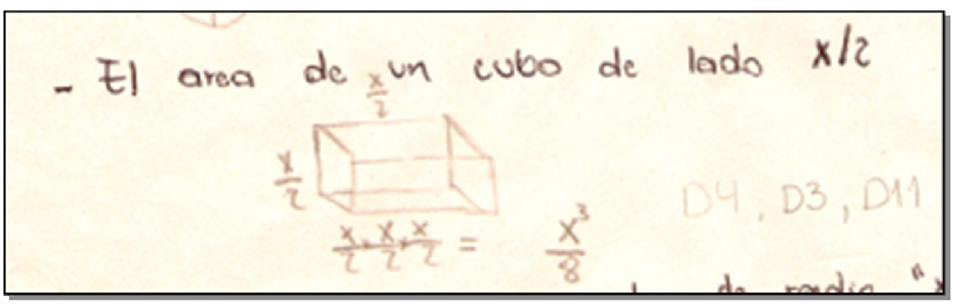
Las carencias conceptuales frente a los elementos que conforman los polígonos se hacen notar de nuevo, ya que los estudiantes no identifican en un triángulo la altura, la base y la utilidad que ofrece al momento de encontrar el valor de áreas triangulares. Presentan confusión entre área y perímetro del triángulo.

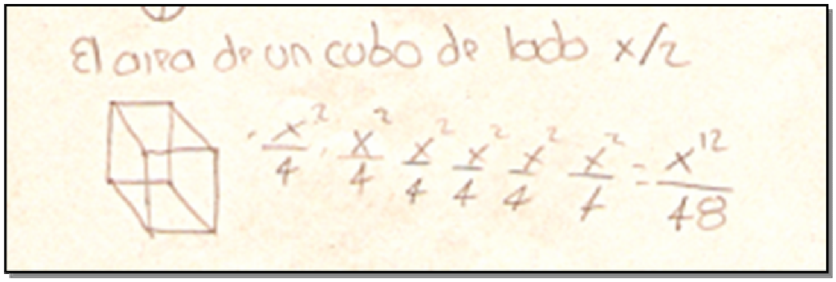
Para realizar un acercamiento a la solución del enunciado, el estudiante recurre a la representación gráfica, ya que esta es una de las posibilidades que le permite identificar las propiedades que se dan para hallar el área de un triángulo en función de su altura y su base, haciendo esto, que el tipo de prueba utilizada para esta situación sea de corte pragmático y el tipo de prueba el empiricismo ingenuo.

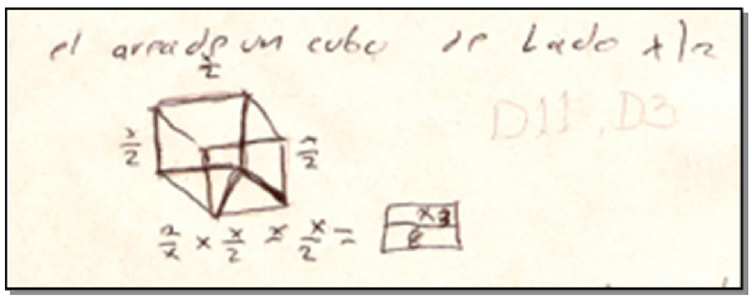
En lo que refiere a los desfases pedagógicos se pueden asociar los curriculares y de motivación e interés.

D2.6. Los estudiantes desconocen o no plantean en forma correcta la formula que representa el área de un cubo en función de su arista.







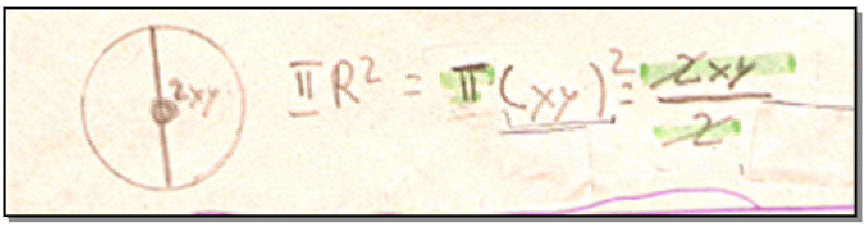


No se concibe aun la representación de un cubo como una figura que tiene volumen, por lo cual en algunos de los casos seleccionados cuentan con solo cuatro lados y apartan los otros dos, a esto se suma el agravante de presentar errores al operar entre dichas fracciones, lo cual aleja toda posibilidad de concebir la figura y la representación algebraica del enunciado.

Al igual que los anteriores apartados para tratar de realizar un acercamiento a la solución del enunciado propuesto, el estudiante en varias ocasiones se ve el la necesidad de representarlo gráficamente, para observar las relaciones existentes, obedeciendo este paso a una prueba pragmática, específicamente, empiricismo ingenuo pues el estudiante desconoce varias de las relaciones importantes existentes que se deben tener en cuenta para la solución.

Continúan los desfases curriculares y de motivación e interés, aunque en este caso se empieza a evidenciar el desfase lingüístico, donde el conocimiento del lenguaje propio de la matemática, marca diferencia para establecer un diálogo elocuente entre docente y estudiante, mediado por el conocimiento.

D2.7. Omisión de la parte numérica o literal de un término algebraico.



Esta situación en parte se debe al desconocimiento de algunos conceptos matemáticos; que aunque no son números como tal, también representan una cantidad, tal es el caso del conocido número pi (π), los estudiantes omiten estos signos solo por el hecho de presentarse así e ignoran que realmente estos también representa una cantidad numérica.

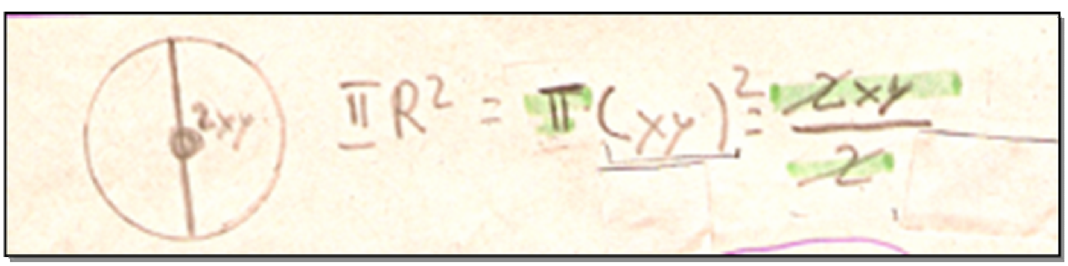
Se puede pensar también que los estudiantes desconocen algunos conceptos geométricos, en este caso el perímetro y el área de una circunferencia, pues para ellos es difícil entender que la circunferencia tiene perímetro ya que este concepto lo asocian con figuras planas, que contienen un número determinado de lados, además es común escuchar en los estudiantes que la circunferencia no tiene lados, por lo tanto no tiene perímetro, de hecho el gráfico que elaboran presenta confusiones ya que no identifican el perímetro de la circunferencia, debido a esto ignoran el número π (pi) como un número importante asociado al perímetro de la circunferencia.

En la mayoría de los casos que se presentó esta dificultad los estudiantes optaron por elaborar pruebas pragmáticas, ya que recurren a la acción o la ostensión, aun quedando un poco complicado entender el gráfico en el que se apoyan, el tipo de prueba específica es el empiricismo ingenuo.

Los desfases asociados son curriculares y motivación e interés, relacionados con la presentación y tratamiento de las propiedades de términos algebraicos.

D3. DIFICULTADES RELACIONADAS CON LA UTILIZACIÓN DE EXPONENTES

D3.1. Los estudiantes desconocen las propiedades de los exponentes.

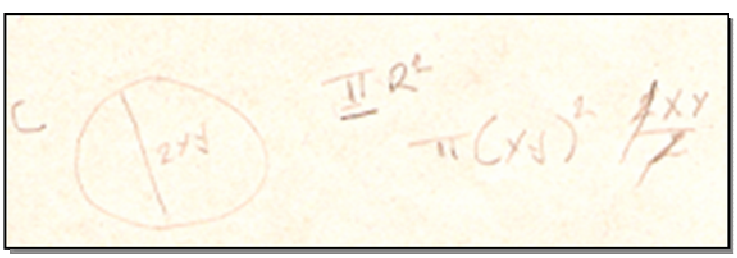


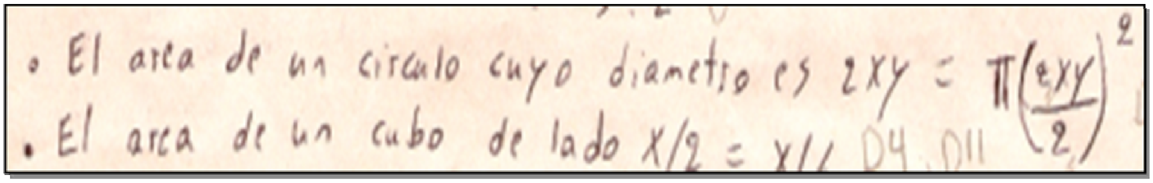
Aún sabiendo que las propiedades básicas de los exponentes en grado noveno son pocas, los estudiantes las desconocen, tal vez por que no identifican estos conceptos o porque con el pasar del tiempo se olvidan, normalmente las propiedades de los exponentes es un tema de sexto y de séptimo, pero al parecer solo se aprenden por un rato, quizá para el examen, ya que las evidencias en los registros, muestran un gran número de estudiantes que desconocen dichas propiedades, solo recuerdan en su gran mayoría que tener un número elevado al cualquier potencia se resuelve multiplicando tantas veces ese número, cuántas veces lo indique el exponente. En esta situación, a pesar de los estudiantes tener un gráfico que les presenta la situación en la cual necesitan utilizar las propiedades no lo hacen con claridad.

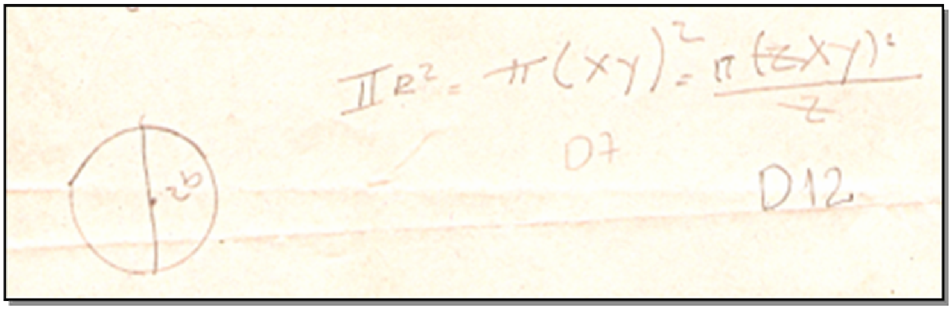
El tipo de prueba utilizado es el empiricismo ingenuo, ya que se limitan sólo a operar independiente de una validación posterior a un resultado encontrado.

El desfase asociado es de corte curricular, pues el estudiante no muestra conocer con claridad las propiedades de los exponentes, tema trabajado en grados anteriores, aunque también se pueden referenciar los desfases de motivación e interés.

D3.2. Los estudiantes al elevar un término algebraico a un exponente, lo resuelven colocando como coeficiente del resultado dicho exponente.







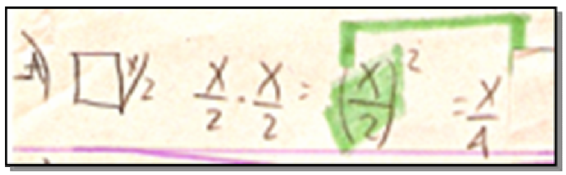
Esta dificultad es frecuente en los registros encontrados, en su mayoría los estudiantes colocan el exponente que acompaña el término algebraico como coeficiente del resultado y como denominador el mismo exponente, según sea el caso.

Esta dificultad radica generalmente debido a que los estudiantes desconocen las formulas que representan algunos conceptos geométricos como son: el área de un cuadrado, de un triángulo, de una circunferencia, de un cubo, el perímetro de la circunferencia, entre otros.

En su gran mayoría el tipo de prueba que los estudiantes emplean es el empiricismo ingenuo, puesto que tratan de dar respuesta al enunciado, sin pensar en generalizar para cualquier caso.

Esta dificultad radica generalmente debido a que los estudiantes desconocen las fórmulas que representan algunos conceptos geométricos como son: el área de un cuadrado, de un triángulo, de una circunferencia, de un cubo, el perímetro de la circunferencia; por lo cual se puede asociar a un desfase de tipo curricular, ya que desconoce varios de los conceptos que debiera tener claros, para poder abordar procedimientos algorítmicos.

D3.3. Al elevar una fracción algebraica al exponente cuadrado, elevan solo el denominador y no el numerador o viceversa.



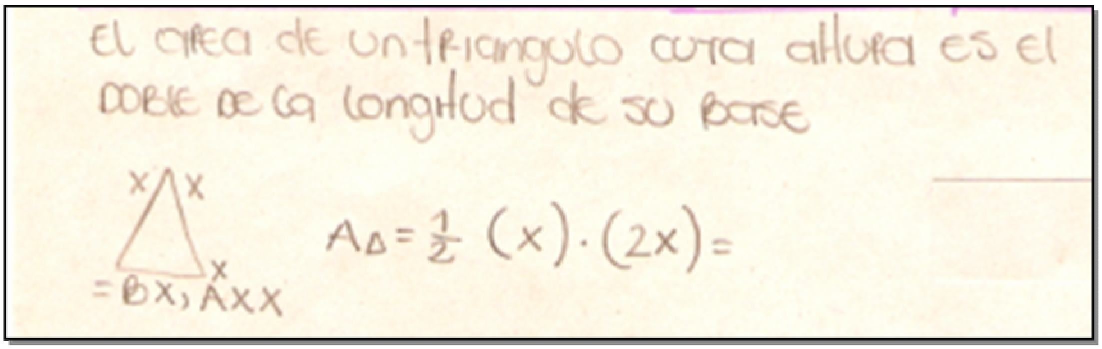
Esta dificultad tiene algo similar a la dificultad D3.1, ya que esta es una de las propiedades fundamentales de los exponentes $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$ y consiste en que al elevar una fracción a un exponente determinado, se debe de elevar tanto el numerador como el denominador, y los estudiantes en ocasiones ignoran esto, ya que solo lo hacen para alguno de los dos términos, no para ambos.

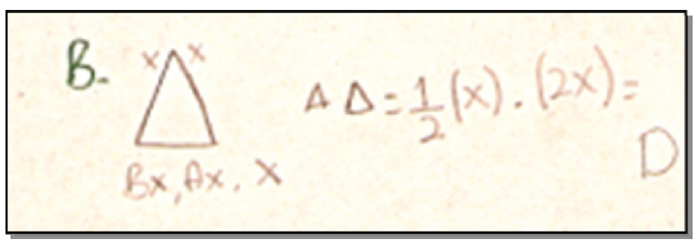
A pesar de que los estudiantes tienen en forma escrita la fracción y entre paréntesis, no reconocen fácilmente que la propiedad se debe cumplir para ambos términos de la fracción, debido al desconocimiento de esta lo aplican solo a un término.

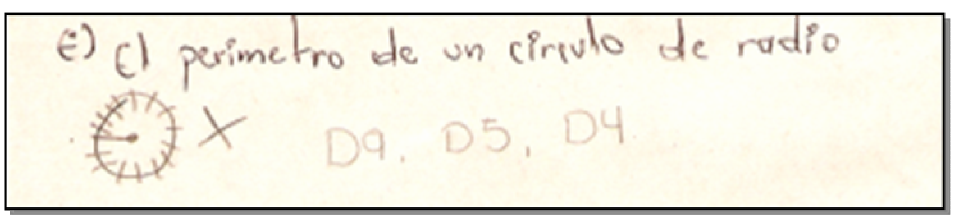
El tipo de prueba empleado es un empiricismo ingenuo y el desfase asociado es curricular, pues hay confusión y desconocimiento en el tema de las propiedades.

D4. DIFICULTADES QUE SE PRESENTAN AL MOMENTO DE ELABORAR UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

D4.1. Los estudiantes no diseñan un registro gráfico correcto, que les sirva de apoyo en la interpretación del enunciado.







Generalmente en esta dificultad lo que sucede es que los estudiantes, no saben identificar cuál es la gráfica correspondiente para el enunciado que están tratando de graficar, y mas aún cuando se les presenta un enunciado que tenga una característica dada, por ejemplo el área de un cubo con referencia a una de sus aristas, el área de un círculo dado el radio, los estudiantes realizan el gráfico del enunciado que se les pide analizar, pero no saben identificar cual es la característica geométrica que se les da y hacer uso de ella, esto generalmente trae complicaciones pues no identifican lo conocido.

La utilización de gráficas permite que los estudiantes realicen pruebas pragmáticas o por ostensión, de esta forma el tipo de razonamiento que utilizan es el empiricismo ingenuo y la experiencia crucial, definidas por Balacheff, inicialmente se les pidió a los estudiantes que realizaran el registro gráfico pensando en que éste, les sirviera de apoyo para una mejor interpretación del enunciado.

El desfase asociado es el de motivación e interés, puesto que los estudiantes no hacen el intento de graficar los enunciados, sin pensar en que esto puede servirles de apoyo para encontrar una respuesta.

D4.2. Los estudiantes no diseñan ningún tipo de gráfica que les sirva de apoyo para la interpretación del enunciado.

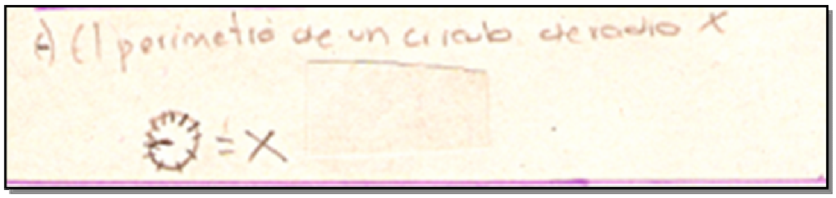
Es una dificultad poco frecuente, los estudiantes no diseñan ningún tipo de gráfica para la representación del enunciado, en algunos casos manifestaron que no sabían diseñarla, ni identificar los elementos que les proporcionaba el enunciado, y otros casos porque ellos no lo sintieron necesario, ya que solo con la fórmula les bastaba.

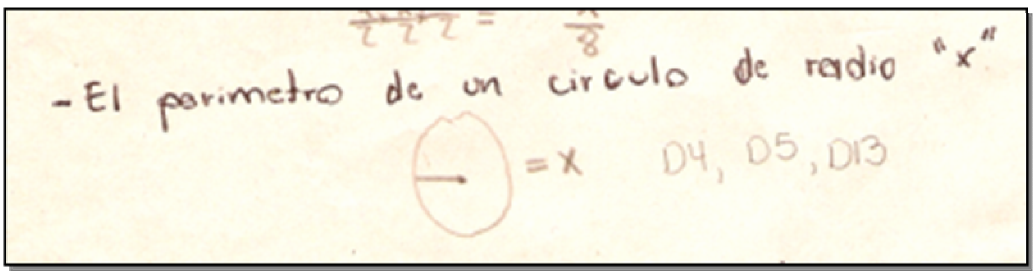
En este caso no se evidencia ningún tipo de validación, ni de prueba, pues los estudiantes abandonan el enunciado, sin atreverse a dar solución al planteamiento.

El desfase asociado es netamente de motivación e interés, pues el estudiante no se atreve a abordar de ninguna forma el problema.

D5. LOS ESTUDIANTES NO MANIFIESTAN POR ESCRITO ALGUN TIPO DE SOLUCION PARA EL ENUNCIADO.

D5.5. Los estudiantes diseñan una gráfica, pero no se atreven a dar una respuesta en términos algebraicos, valiéndose de la misma.



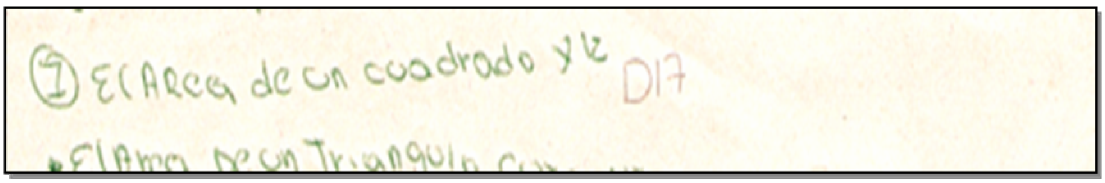


En esta situación el estudiante logra un acercamiento a una respuesta, al menos intenta identificar algunas relaciones a través de la elaboración de la gráfica, pero no logra avanzar más de este punto, debido al desconocimiento de los elementos que están presentes en la representación hecha.

Con la elaboración de la gráfica del enunciado hay un tipo de validación pragmática, pues necesita apoyarse en dicha representación para intentar darle respuesta al planteamiento realizado; el tipo de prueba que se emplea es el empiricismo ingenuo.

En su gran mayoría, el desfase pedagógico que se evidencia es de motivación e interés, pues a pesar de que el estudiante logra realizar un gráfico correcto, abandona fácilmente la situación.

D5.2. Los estudiantes plantean una fórmula, pero no se atreven a solucionarla.



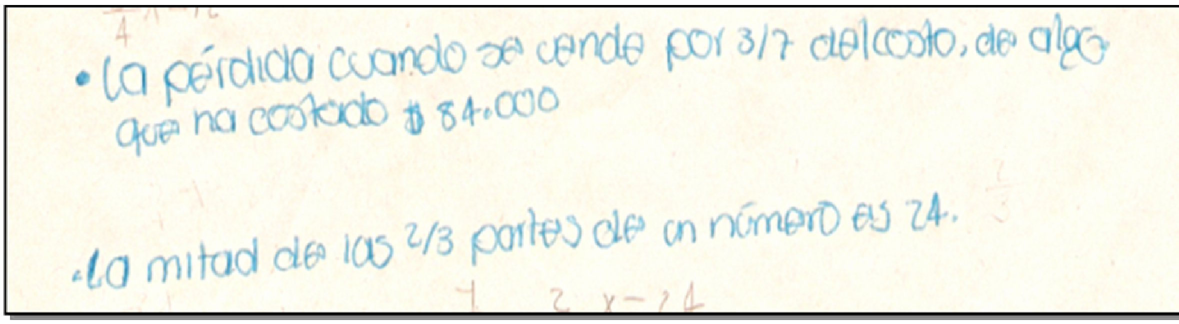
En esta dificultad intervienen factores como el desconocimiento de los elementos implícitos en la fórmula, el no tener claridad en las relaciones que se dan entre dichos elementos. Esta situación se evidenció especialmente al trabajar con la representación algebraica del área de un triángulo, allí aparecieron carencias conceptuales referidas al área, el perímetro, la altura y su base, ya que también fueron presentadas en los enunciados figuras como el cuadrado y cuerpos como el cubo, donde aparecieron situaciones similares.

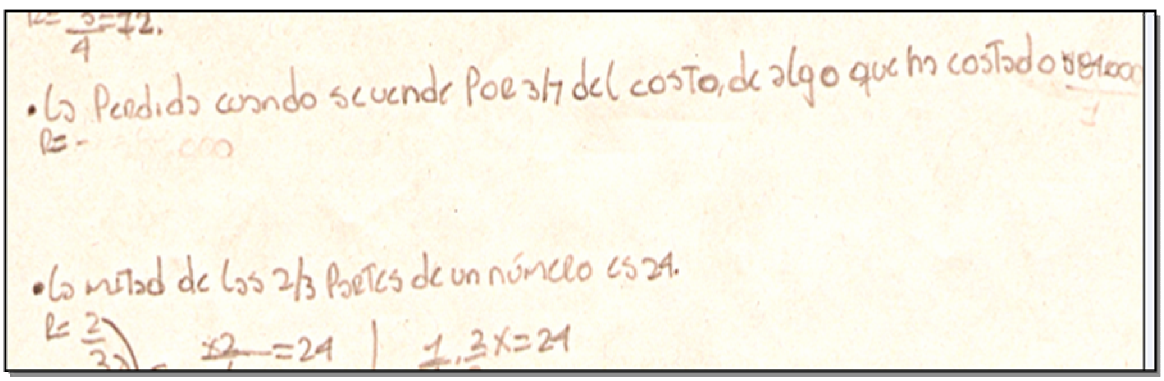
Es de anotar que no se presenta un tipo de prueba específico y los desfases asociados son curriculares, entre los cuales se destacan las carencias conceptuales; los lingüísticos, debido al poco manejo del lenguaje lógico matemático y de motivación e interés, ya que los estudiantes dejan fácilmente el trabajo de buscar posibles soluciones.

DIFICULTADES REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE ALGUNOS ENUNCIADOS ENMARCADOS EN GEOMETRIA

SEGUNDA PARTE

1. **No reescriben el enunciado en forma algebraica.**

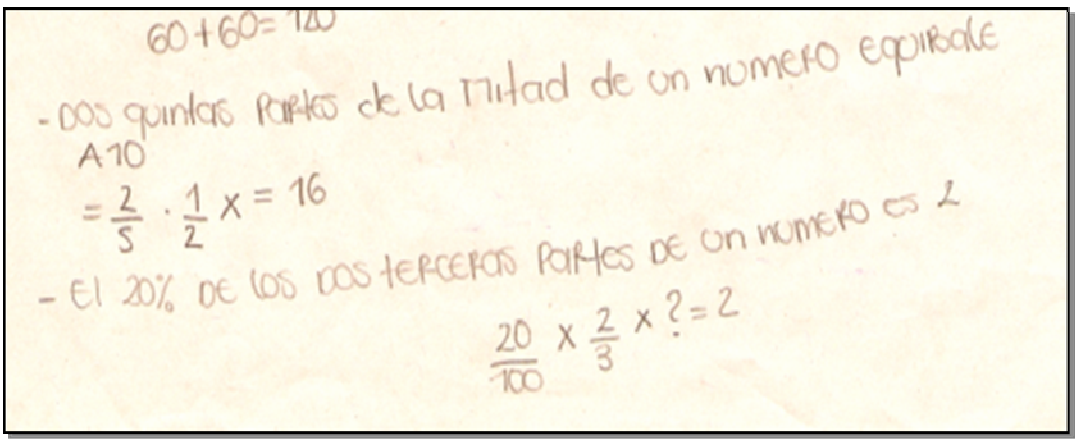




Una de las posibles causas por las cuales se presenta esta dificultad es porque los estudiantes no identifican, ni comprenden la incógnita que se pretende encontrar, además de otros elementos que se presentan en el lenguaje natural para ser transcritos al lenguaje algebraico que permiten encontrar la solución. Además se presentan dificultades en la traducción de un lenguaje natural a un lenguaje formal. También cabe anotar que en este tipo de situación los estudiantes no presentan ningún tipo de prueba que se pueda enmarcar según el tipo de razonamiento empleado.

Se podría pensar en esta situación que el desfase pedagógico que se presenta es: de motivación e interés, ya que el estudiante simplemente no elabora ningún tipo de razonamiento o muestra que permita hacer una interpretación más detallada.

2. Reescriben en forma incorrecta el enunciado a un lenguaje algebraico.

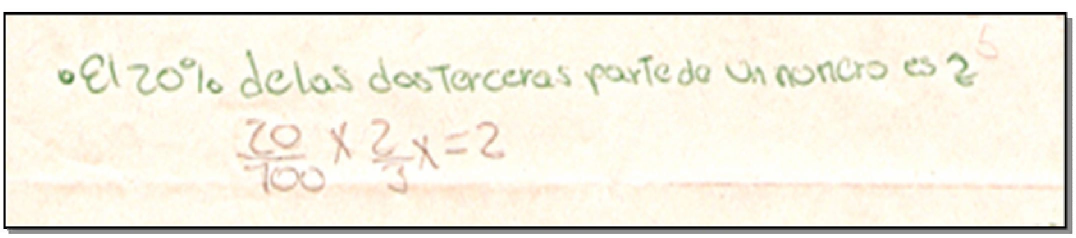

$60+60=120$

- Dos quintas partes de la mitad de un numero equivale A10

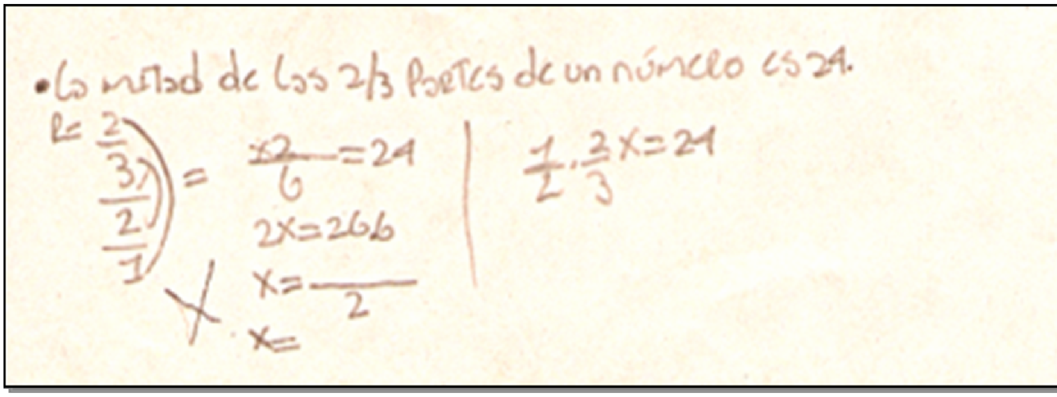
$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} x = 16$

- El 20% de los dos terceras partes de un numero es 2

$\frac{20}{100} \times \frac{2}{3} \times ? = 2$


• El 20% de las dos Terceras parte de un numero es 2

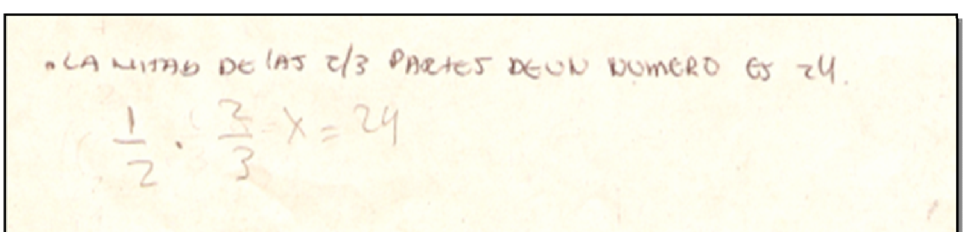
$\frac{20}{100} X \frac{2}{3} X = 2$



Es una dificultad similar a la anterior sólo que en este caso el estudiante trata de realizar algún acercamiento a la traducción, pero en ese intento obvia elementos importantes y su rumbo es poco claro al no saber cual es la variable activa en ese tipo de situación, en general se puede decir que el tipo de prueba empleada es el empiricismo ingenuo, un razonamiento no validado.

En este caso el desfase pedagógico asociado es curricular y lingüístico, pues el estudiante no tiene claro el lenguaje algebraico, además no conoce las propiedades para abordar este tipo de enunciados.

3. Plantean el enunciado en un lenguaje algebraico, pero no lo desarrollan.



$120 = 60 + 60 = 120$

- Dos quintas partes de la mitad de un numero equivalen a 10 $\frac{2}{5} \cdot X = 10$
- El 20% de las dos terceras partes de un numero es 2 $\frac{20}{100} \times \frac{2}{3} \cdot X = 2$
- las tres cuartas partes de la edad de Mateo equivalen 12 años $\frac{3}{4} \cdot X = 12$ años
- la perdida cuando se vende por 3/7 del costo, de algo que ha costado $ 84.000 $\frac{3}{7} - X = 84.000$
- la mitad de las 2/3 partes de un numero es 24 $\frac{2}{3} \cdot X = 24$

8

3. Expresa la siguientes frases como una ecuación algebraica en "X" y resolver para "X"

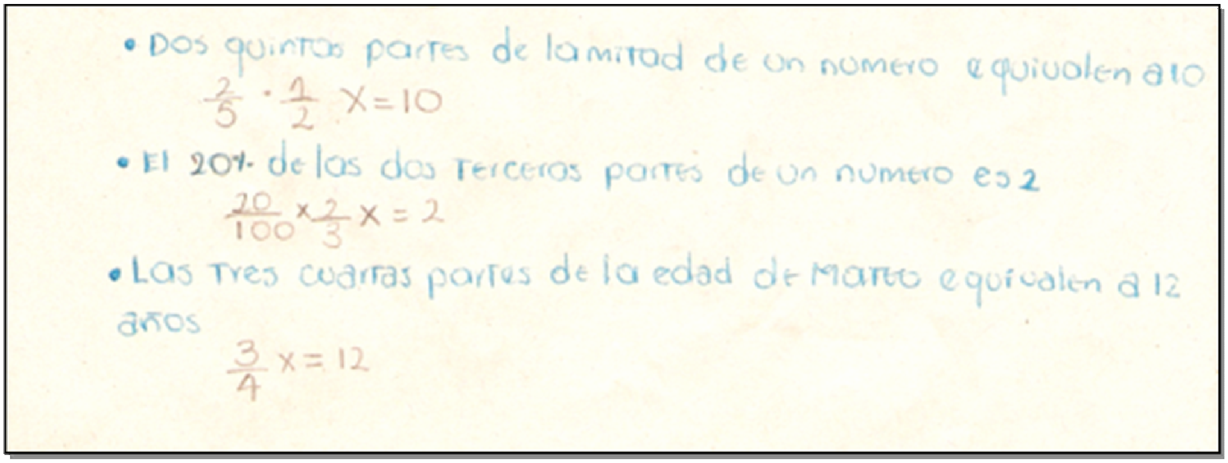
- $X + 2X = 120$

los tres cuartas partes de la edad de Mateo equivale a 12

$\frac{3}{4} x = 12$

- DOS QUINTAS PARTES DE LA MITAD DE UN NUMERO EQUIVALE A 10.

R/= $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot X = 10$



• Dos quintos partes de la mitad de un numero equivolen a 10

$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}X=10$

• El 20% de las dos terceros partes de un numero es 2

$\frac{20}{100}\times\frac{2}{3}x=2$

• Las tres cuartas partes de la edad de Mateo equivalen a 12 años

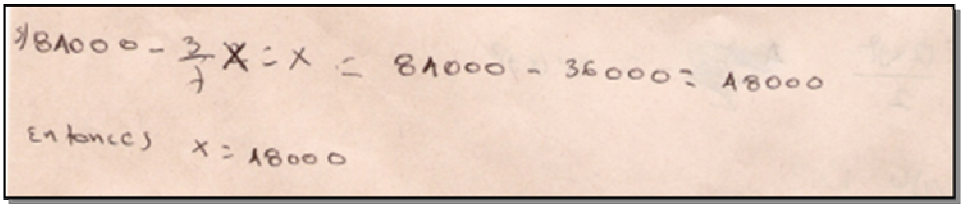
$\frac{3}{4}x=12$

Plantean el enunciado en un lenguaje algebraico, pero no lo desarrollan.

La dificultad radica directamente en la solución de ecuaciones algebraicas, pues los estudiantes están en la capacidad de identificar las variables que se tiene para la situación, las variables desconocidas, la ubicación de los diferentes elementos de la ecuación, pero no la resuelven. El tipo de razonamiento que emplean es un empiricismo ingenuo, ya que no dan paso a una validación de la respuesta hallada y se quedan solamente con un número o término algebraico encontrado, sin contrastarlo con el enunciado, verificando si cumple las condiciones planteadas.

El desfase evidenciado es curricular, ya que no hay claridad en el planteamiento de ecuaciones y cómo es el procedimiento algorítmico a realizar para resolverlas de manera adecuada

4. Reescriben algebraicamente el enunciado en forma incorrecta, sin embargo llega a una solución correcta.

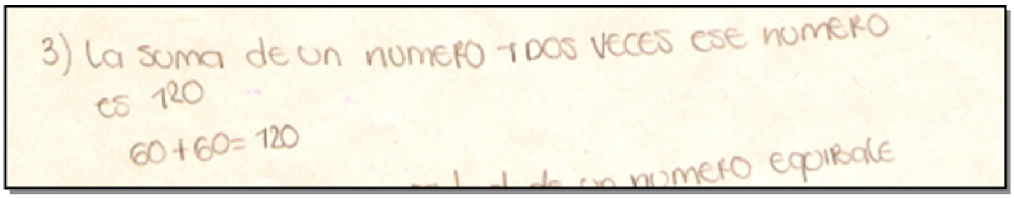


No reconocen con claridad los elementos inmersos en la situación, pues al momento de plantearla no lo hacen correctamente, sin embargo llegan a una situación correcta y es porque establecen mentalmente cuál es la incógnita que se pretende encontrar, ya sea por que prueban para casos particulares o simplemente por inspección llegan a la solución correcta.

El tipo de prueba en general que utilizan los estudiantes al momento de resolver esta situación es el empiricismo ingenuo, debido a que empiezan con el planteamiento de una ecuación, pero pasan a realizar una operación que obedece al tanteo, perdiendo continuidad en el procedimiento, situación que lleva a cantidad de resultados, donde no se cumple lo planteado en el enunciado, pero que el estudiante deja de lado, ya que no valida la solución encontrada y ni se entera que su solución no cumple lo establecido.

El tipo de desfase pedagógico que se pude evidenciar es curricular, ya que no hay claridad en la forma de cómo se plantea una ecuación de primer grado.

5. No plantean el enunciado en un lenguaje algebraico, sino que intentan numéricamente probar para un caso específico, que no hace el enunciado verdadero.

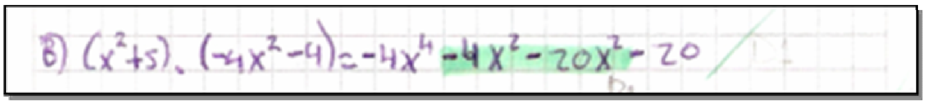


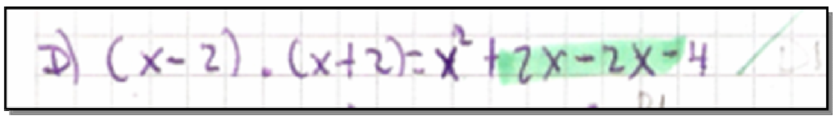
En esta dificultad de igual forma los estudiantes desconocen los elementos que están inmersos en la situación, se les dificultad la solución de una ecuación algebraica, pero intentan darle solución a la situación por medio de casos particulares, tratan de resolver la situación numéricamente.
En esta situación se presenta un tipo de prueba de empiricismo ingenuo, ya que los estudiantes intentan resolver solo para este caso específico y haciendo uso del tanteo, sin evidenciar un procedimiento algorítmico que justifique los valores hallados.

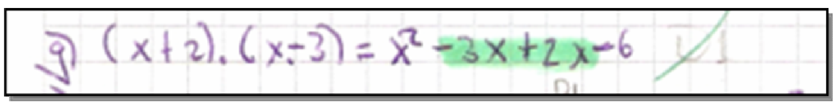
El desfase pedagógico asociado es curricular, ya que los estudiantes no hacen uso de elementos que les permitan abordar el enunciado; sin dejar de lado que los conceptos relacionados son una construcción realizada desde grados anteriores y por lo tanto deben ser base para comprender y realizar argumentaciones válidas.

DIFICULTADES OBSERVADAS EN OPERACIONES DE SUMA Y MULTIPLICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

D1. No reduce términos semejantes.





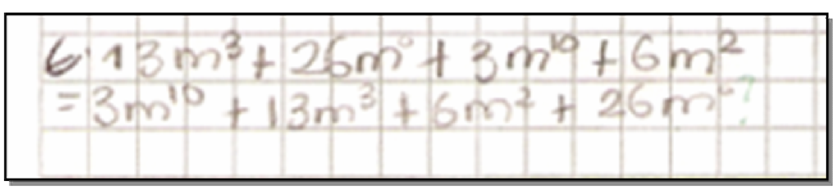


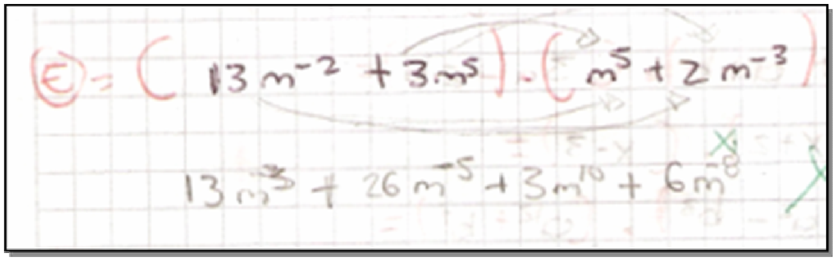
D2. Omite signos entre términos algebraicos.

D3. Dificultades referidas al exponente.

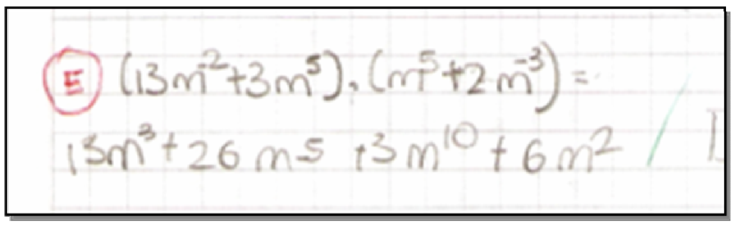
D3.1. Dificultad al multiplicar términos algebraicos en cuanto a la suma de sus exponentes, cuando las bases son iguales y sus exponentes son enteros negativos.

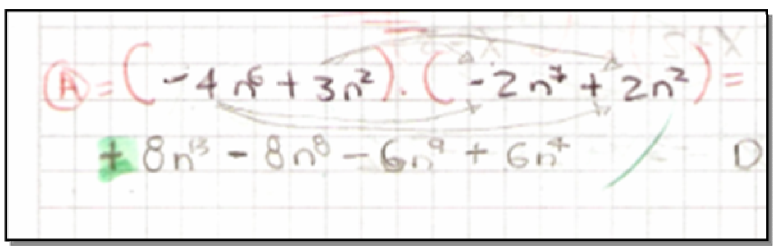
$(13m^{-2} + 3m^{5}) (m^{5} + 2m^{-3})$



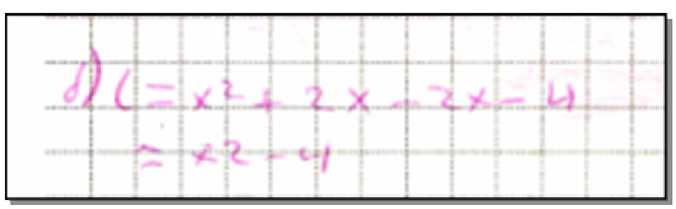


D3.2. No organiza la expresión en orden descendente (referente al exponente)



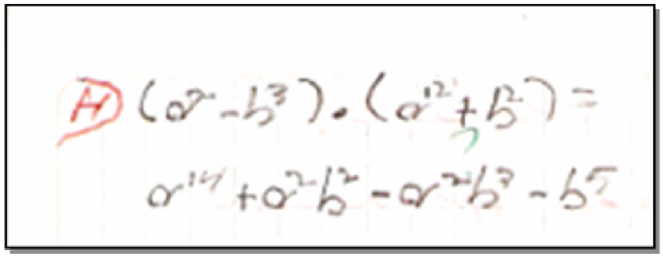


D3.3. Cuando una letra va acompañada de un exponente, este se toma como un término más de dicha expresión.

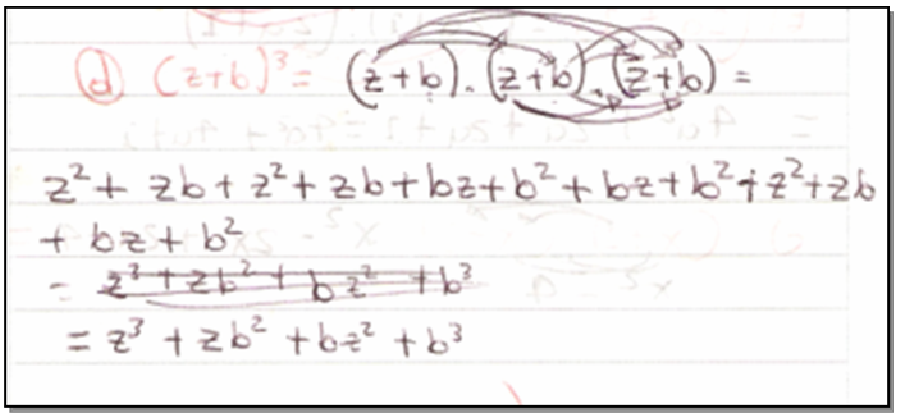


D3.4. Dificultad al sumar expresiones de igual base y diferente exponente, ya que los suman como términos semejantes.

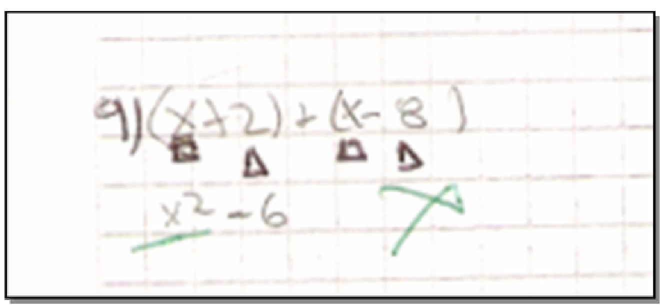
D3.5. Dificultad al multiplicar bases con diferentes exponentes.



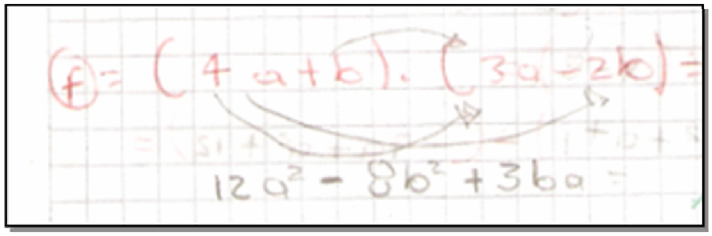
D4. Reconocen la propiedad distributiva, pero hay dificultad al operar los términos.



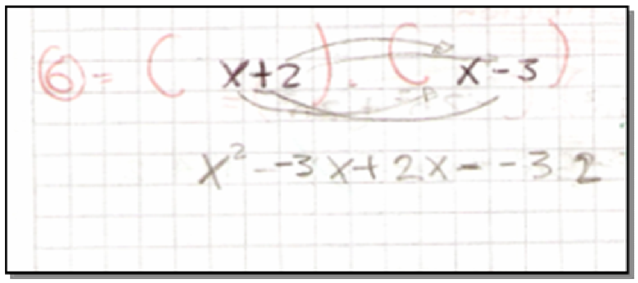
D5. Dificultad al elegir la operación a realizar con las expresiones algebraicas. Confusión si es suma o multiplicación.



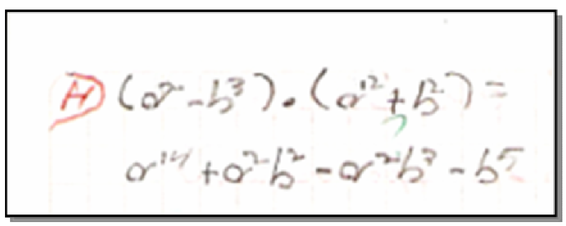
D6. Dificultad en operaciones de expresiones algebraicas con enteros.

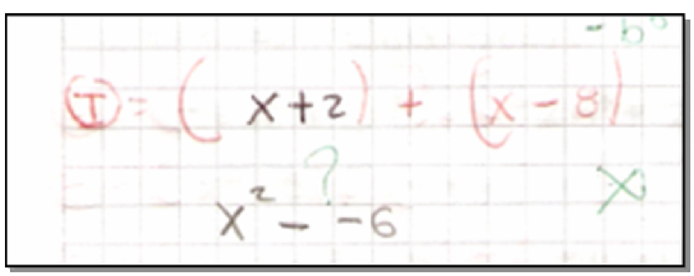


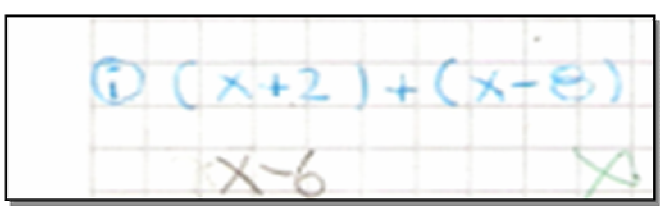
D6.1. Dificultad en la suma de fracciones algebraicas con enteros.

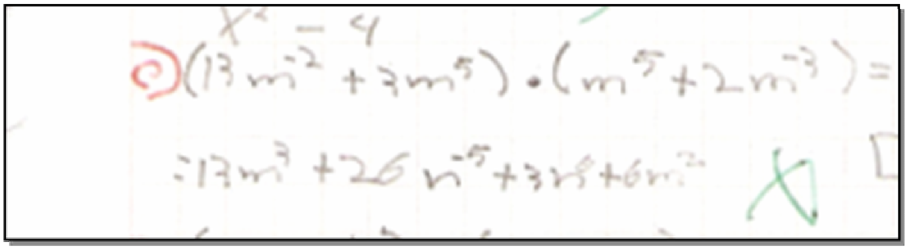


D6.2 .Dificultad en la multiplicación de fracciones algebraicas con enteros.



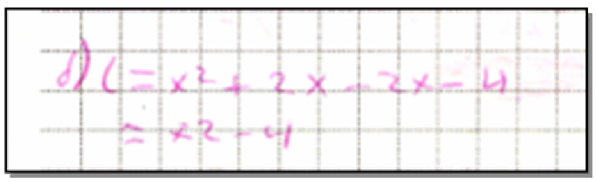






D7. Al multiplicar expresiones algebraicas, multiplica coeficientes y omite la parte literal.

D8. Conmuta el coeficiente con la parte literal.



Estos enunciados fueron planteados con la intención de obervar los procedimientos algoritmicos que realizan los estudiantes, ajenos a la traducción de un enunciado en lenguaje natural a un lenguaje lógico matemático como se venia haciendo.

En general las dificultades que se evidencian en este taller son de corte conceptual, ya que los estudiantes desconocen algunas formas de operar con los términos algebraicos y en muchas ocasiones no dan la importancia que merecen los signos y los olvidan, incurriendo en un error grave de procedimiento. Tambien se destacan las carencias que se presentan al trabajar con números enteros, ya que fue muy común el caso donde, un polinomio tiene enteros negativos y positivos, pero al operar los toman todos como positivos independiente del signo, lo que genera una inquietud grande, ya que los números enteros son abordados desde la primaria y aun no se concibe su estructura.

En estas dificultades se evidencia un tipo de prueba intelectual, especificamente la experiencia mental, donde el estudiante recurre a conceptos previos, para abordar los planteamientos dados, que le exigen apartarse de lo concreto y elevar su nivel de abstracción. Aunque en la prueba realizada algunos no acertaron en los procedimientos realizados, se destaca el esfuerzo realizado para afrontar la situacion, la cual se hacia dificil debido a las carencias conceptuales que presentaban los estudiantes.

Respecto a los desfases pedagógicos el que mas se asocia con las dificultades antes mencionadas es el curricular, fundamentado en las carencias presentadas por los estudiantes frente a las operaciones entre términos algebraicos, y el desconocimiento de conceptos básicos que permiten desarrollar el trabajo de manera satisfactoria.

SISTEMATIZACIÓN DE LOS TIPOS DE PRUEBA EVIDENCIADOS EN LOS REGISTROS ESCRITOS

Enunciado	**Tipo de prueba evidenciada**	**Tipo de validación (Pragmática o intelectual)**	**Tipo de Registro (simbólico o Gráfico)**
El área de un cuadrado de lado x/2	empiricismo ingenuo, experiencia mental	Pragmática-intelectual	Simbólico- Gráfico
El área de un triángulo cuya altura es el doble de la longitud de su base	Experiencia mental	Intelectual	Simbólico- Gráfico
El área de un círculo cuyo diámetro es 2xy	Empiricismo ingenuo, Experiencia mental	Pragmática-intelectual	Simbólico- Gráfico

El área de un cubo de arista x/2	Empiricismo ingenuo, Experiencia mental	Pragmática-intelectual	Simbólico- Gráfico
El perímetro de un círculo de radio X	Experiencia mental	Intelectual	Simbólico- Gráfico
La suma de un número y dos veces ese número o es 120	Experiencia mental, empiricismo ingenuo	Pragmática-intelectual	Simbólico
Dos quintas partes de la mitad de un número equivalen a 10	Experiencia mental,	Intelectual	Simbólico
El 20% de las dos terceras partes de un número es 2	Experiencia mental, empiricismo ingenuo	Pragmática-intelectual	Simbólico
Las tres cuartas partes de la edad de mateo equivalen a 12 años	Experiencia mental, empiricismo ingenuo	Pragmática-intelectual	Simbólico
Las pérdida cuando se vende por 3/7 del costo, de algo que ha costado $84.000	Experiencia mental empiricismo ingenuo,	Pragmática-intelectual	Simbólico
La mitad de las 2/3 partes de un número es 24	Experiencia mental	Intelectual	Simbólico
Otros registros (planteamiento de operaciones entre expresiones algebraicas)	Experiencia mental	Intelectual	Simbólico

CONCLUSIONES

- Se han realizado interpretaciones desde el marco teórico de la investigación y desde la metodología a diversas dificultades observadas en pruebas presentadas por los estudiantes del ciclo IV del ITM Castilla, referentes a las representaciones algebraicas de enunciados y operaciones entre dichas expresiones.
- Se realizó una clasificación de los tipos de validación y de prueba que los estudiantes utilizan al momento de argumentar sus procedimientos algorítmicos en relación con los diferentes enunciados, enmarcándolos dentro de la teoría de N. Balachefff, tomando como punto de partida las justificaciones realizadas por ellos.
- Una de las pruebas mas frecuentes de la cual hacen uso los estudiantes para justificar sus procedimientos algorítmicos es el empiricismo ingenuo, donde asumen la validez de un resultado, con solo realizar un procedimiento, sin dar lugar a una verificación, mediante otras formas.
- Teniendo en cuenta la clasificación de los desfases pedagógicos y las características que ofrece la población intervenida, cabe anotar que los factores relacionados con los desfases curriculares y los de motivación e interés fueron de gran importancia al desarrollar cada uno de los talleres presentados.

- En las dificultades se destacan los errores al momento de operar entre términos por desconocimiento de las propiedades que los rigen o la poca utilidad en el contexto dado.

- No hay claridad en los elementos que determinan el área de figuras como el triángulo, el círculo y cuerpos como el cubo, por lo cual las representaciones algebraicas se ven afectadas.

- El interpretar las dificultades desde dos marcos diferentes, permitió abordar los procesos individuales de justificación de procedimientos, de acuerdo a lo propuesto por Balacheff y complementar la interpretación con los factores externos al estudiante, que afectan su desempeño en el ámbito educativo, tratados en los desfases pedagógicos.

ANEXOS

TALLER 1

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE ALGUNOS ENUNCIADOS ENMARCADOS EN GEOMETRÍA.

PRIMERA PARTE

Exprese simbólicamente las cantidades propuestas en los siguientes enunciados.

- El área de un cuadrado de lado x/2
- El área de un triángulo cuya altura es el doble de la longitud de su base.
- El área de un círculo cuyo diámetro es 2xy
- El área de un cubo de lado x/2
- El perímetro de un círculo de radio "X"

SEGUNDA PARTE

Expresa las siguientes frases como una ecuación algebraica en "X" y resolver para "X".

- La suma de un número y dos veces ese número es 120.
- Dos quintas partes de la mitad de un número equivalen a 10.
- El 20% de las dos terceras partes de un número es 2.
- Las tres cuartas partes de la edad de Mateo equivalen a 12 años.
- La pérdida cuando se vende por 3/7 del costo, de algo que ha costado $84.000.
- La mitad de las 2/3 partes de un número es 24.

TALLER 2

OPERACIONES DE SUMA Y MULTIPLICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Realice las siguientes operaciones

a. $(-4n^6 + 3n^2)\ (-2n^7 + 2n^2)$

b. $(X^2 + 5)\ (-4X^2 – 4)$

c. $(4X^2 + 3X -9) + (-11 -13X + 9X^2)$

d. $(X – 2)\ (X + 2)$

e. $(13m^{-2} + 3m^5)\ (m^5 + 2m^{-3})$

f. $(4a + b)\ (3a - 2b)$

g. $(X +2)\ (X -3)$

h. $(a^2 – b^3)\ (a^{12} + b^2)$

i. $(X +2) + (X -8)$

j. $(-8a^2 + a + 1) + (-9a + a^2 + 12)$

Dificultades presentadas por los estudiantes al momento de analizar los registros escritos de la intervención				
Nombre de la dificultad	Interpretación	Elementos asociados al álgebra	Elementos asociados a la geometría	Elementos asociados a la aritmética
Al elevar una fracción algebraica al cuadrado, elevan solo el denominador y no el numerador o viceversa	Poco dominio en propiedades de los exponentes	Distributividad de los exponentes en un termino algebraico $(x/2)^2$		Propiedad de los exponentes en fracciones $x/2)^2 = x^2/4$
Dificultad en la multiplicación de fracciones algebraicas	Poca claridad en la propiedad distributiva. Carencias al hacer operaciones entre fracciones (x,+)	Multiplicación de términos semejantes. (x/2*x/2*x/2*x/2*x/2*x/2)		Multiplicación de fracciones (para este caso homogéneas)
No representan el enunciado dado en un lenguaje algebraico	No establecen relaciones entre el enunciado y una incógnita que permita traducirlo a una expresión algebraica	Incógnitas, expresión algebraica	Para algunos casos (enunciados) áreas y perímetros	Operaciones de x, +, -, /
Desconocen o no plantean en forma correcta la fórmula en	No se hace uso de otras alternativas como la gráfica, para llegar a una	Incógnitas, expresión algebraica	Área y longitud de una circunferencia	

correcta la fórmula en términos de su diámetro	grafica, para llegar a una posible solución algebraica. Carencias en conceptos de geometría plana: área y perímetro de una circunferencia.			
Desconocen o no plantean en forma correcta la fórmula que representa el área de un triángulo en función de la altura y base	Carencia en conceptos previos (perímetro y área de un triángulo)	Expresión algebraica, incógnitas	Área y perímetro de triángulos	Multiplicación y suma de fracciones
Desconocen o no plantean en forma correcta la fórmula que representa el área de un cubo en función de su arista	No se hace uso de otras alternativas como la grafica, para llegar a una posible solución algebraica. Carencia en conceptos de geometría plana (área y perímetro de un cubo). Dificultades con el pensamiento espacial. (x/2*x/2*x/2*x/2*x/2*x/2)	Expresión algebraica, incógnitas multiplicación y suma de expresiones algebraicas.	Área y perímetro de un cubo, elementos de un cuerpo geométrico (aristas)	Multiplicación y suma de fracciones
Omisión de la parte numérica o literal de un término algebraico	Poca concentración, mecanicismo. Omisión del coeficiente de un término o su exponente.	Coeficientes, incógnitas (variables), exponentes de una expresión algebraica, suma o multiplicación de términos algebraicos		Multiplicación, suma

Desconocen las propiedades de los exponentes	Poca claridad en conceptos previos referidos a términos algebraicos como es la + y x de expresiones semejantes	Expresiones algebraicas, propiedades de los exponentes en expresiones algebraicas, suma o multiplicación de expresiones algebraicas semejantes		Suma y multiplicación de términos con igual exponente
Al elevar un término a un exponente, lo resuelven colocando como coeficiente el exponente	Confusión y poca claridad en los elementos de una expresión algebraica			Propiedades de los exponentes
No diseñan una grafica correcta que les sirva de apoyo en la interpretación del enunciado	No relacionan el lenguaje del enunciado con una grafica. No se da una "conversión". Poca relación entre los contenidos teóricos y el enunciado.	Incógnitas, expresiones algebraicas	Áreas y perímetros de figuras	Fórmulas de áreas y perímetros de triángulos, círculos, cuadrados
Diseñan una grafica pero no se atreven a dar una respuesta en términos algebraicos, valiéndose de la misma	Mecanicismo, no establecen relaciones entre lo grafico y lo algebraico. Poco convencimiento de lo planteado (dudas)	Expresiones algebraicas, incógnitas	graficas	Operaciones entre términos
Plantean una fórmula	Poca claridad en lo	Expresiones algebraicas,		Operaciones de suma ,

pero no se atreven a solucionarla	planteado, poco manejo de conceptos previos.	incógnitas		resta o multiplicación entre términos
No reduce términos semejantes	No simplifica, no los reconoce	Expresiones algebraicas semejantes, simplificación		Multiplicación, división
Omisión de signos entre términos semejantes	Mecanicismo, poca concentración y concientización de lo que esta realizando	Signos de expresiones algebraicas		Signos
Dificultad al multiplicar términos semejantes en cuanto a la suma de sus exponentes, cuando las bases son iguales y sus exponentes son enteros negativos	Carencia en conceptos previos como términos semejantes, multiplicación de términos semejantes, carencias al operar (multiplicar) con enteros negativos	Operaciones con enteros negativos, términos semejantes, multiplicación de términos semejantes,		,Enteros negativos, multiplicación de enteros negativos
No organizan la expresión en orden descendente (referente al exponente)	No identifican los términos y sus exponentes para darle el respectivo orden, desconocen la regla para ordenarlo	Términos semejantes, orden de un polinomio		Exponentes y su orden
Cuando la parte literal va acompañada de un exponente, este lo toman como un término mas de dicha expresión	Poca claridad en las definiciones de los elementos de una expresión algebraica, poca concentración	Expresiones algebraicas y sus elementos constitutivos		
Reconocen la propiedad distributiva, pero hay dificultad al operar los	Carencias al operar entre términos u omisión de algunas “combinaciones”	Multiplicación entre polinomios, expresiones algebraicas		Propiedad distributiva

términos				
Dificultad al elegir la operación a realizar con las expresiones algebraicas	Poca claridad en el uso de paréntesis o signos de agrupación , las operaciones que estos indican y la forma de resolverlas	Suma y multiplicación de polinomios, signos de agrupación, resolución de operaciones		Propiedad distributiva, suma y multiplicación de términos
Dificultad en operaciones de expresiones algebraicas con enteros	Carencia en manejo de enteros	Suma y multiplicación de expresiones algebraicas con enteros negativos en sus exponentes		Suma y multiplicación de enteros negativos
Dificultad en la suma de fracciones algebraicas con enteros	Poco dominio al operar con fracciones	Expresiones algebraicas con coeficiente fraccionario, suma de fracciones algebraicas		suma entre fracciones
Al multiplicar expresiones algebraicas, multiplica coeficientes y omite la parte literal	Carencias al realizar operaciones entre expresiones algebraicas, confusión al operar con expresiones algebraicas	Expresiones algebraicas y sus elementos constitutivos, Multiplicación de expresiones algebraicas		Multiplicación
Conmuta el coeficiente con la parte literal	Carencias conceptuales en cuanto a los elementos que conforman una expresión algebraica	Expresiones algebraicas y sus elementos		Conmutatividad
Dificultad al sumar expresiones de igual base y diferente exponente	Los suman como términos semejantes	Expresiones algebraicas semejantes, suma de términos semejantes		Suma

No reescriben el enunciado en forma algebraica.	No identifican la incógnita, ni los valores que se dan para plantear el enunciado.	Ecuaciones de primer grado. Lenguaje algebraico. Despejar una incógnita.		Resolución de ecuaciones de primer grado. Operaciones entre fracciones. Equivalencias.
Reescriben en forma incorrecta el enunciado a un lenguaje algebraico.	No saben dar lectura al enunciado y llevarlo al lenguaje formal, aunque hay una aproximación no lo hacen de forma correcta.	Ecuaciones de primer grado. Lenguaje algebraico. Despejar una incógnita.		Resolución de ecuaciones de primer grado. Operaciones entre fracciones. Equivalencias.
Plantean el enunciado en un lenguaje algebraico, pero no lo desarrollan	No saben como hallar el valor numérico para la incógnita, a pesar de tener bien planteado el enunciado formalmente.	Ecuaciones de primer grado. Despejar una incógnita.		Resolución de ecuaciones de primer grado. Operaciones entre fracciones. Equivalencias.
Reescriben algebraicamente el enunciado en forma incorrecta, sin embargo llega a una solución correcta.	Identifican lo que se plantea en el enunciado pero al reescribirlo de forma algebraica comete errores pequeños, los cuales no les impide darles respuesta correcta al planteamiento.	Ecuaciones de primer grado. Lenguaje algebraico. Despejar una incógnita.		Dificultades en operaciones básicas en los diferentes conjuntos numéricos.
No plantean el enunciado en un lenguaje algebraico, sino que intentan numéricamente probar para un caso específico, que no hace el enunciado verdadero.	No identifica lo que se plantea en el enunciado, tratan de darle respuesta probando para un caso específico que no hace verdadero el enunciado.	Ecuaciones de primer grado. Lenguaje algebraico. Despejar una incógnita.		Resolución de ecuaciones de primer grado. Dificultades en operaciones básicas en los diferentes conjuntos numéricos.

Dificultad al multiplicar bases con diferentes exponentes	Poca claridad en términos semejantes	Términos semejantes , multiplicación de expresiones algebraicas		Multiplicación
Omisión de la parte literal	Mecanicismo y poca claridad en los elementos de la expresión algebraica	Expresión algebraica y sus elementos		

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Santafé de Bogotá: una empresa docente.
- Castillo, E., & Vásquez, M. (s.f.). *El rigor metodológico en la investigación cualitativa.* Recuperado el 30 de 04 de 2008, de http://colombiamedica.univalle.edu.co/Vol34No3/cm34n3a10.htm
- Gallego Girón, G. (2005). *Dificultades de aprendizaje en las matemáticas.* Cali: Poemia.
- Grupo azarquiel. (1993). *Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje, 33 "ideas y actividades para enseñar álgebra.*
- MEN. (2006). *Estándares Curriculares de Matemáticas.* Santafé de Bogotá.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santafé de Bogotá. Magisterio
- Mivar Fernández, I., & Legañoa, M. (s.f.). *Empleo de los Asistentes Matemáticos para la asimilación conceptual del álgebra universitaria.* Recuperado el 09 de 07 de 2008, de www.ead.urbe.edu/aiesad/docs/15%20de%20junio/metodologia%20para%20la%20asimilacion-ileana%20miyar-15.ppt
- Olfos A., R. (s.f.). *Aportes de la investigación a la enseñanza del álgebra elemental.* Recuperado el 09 de 07 de 2008, de http://www.sochiem.cl/sochiem/documentos/XII/Especiales/ces08.pdf

- Ortiz Capilla, M. A. (s.f.). *El lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir un equilibrio entre investigación y práctica.* Recuperado el 10 de 07 de 2008, de www.guiasensenanzasmedias.es/verpdf.asp?area=mates&archivo=GR102.pdf
- Villa Ochoa, J. A. (2006). *Módulo Pensamiento Lógico-Matemático. Ciclo IV Grados 8º y 9º, Programa de Educación Básica y Media para Adultos.* Medellín.