EL CONCEPTO DE FUNCION CUADRATICA: UN ANALISIS DE SU DESARROLLO HISTÓRICO.

YADIRA MARCELA MESA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ASESOR: Mg. JHONY ALEXÁNDER VILLA OCHOA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2008

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiese sido posible sin la motivación principal que genera **mi hija,** el motor de mis sueños. Sin la paciencia y gran colaboración de **mi familia.** Sin el apoyo sincero y entregado de **mi mejor amigo** Conra y de **mi novio** Alberto.

Y tampoco hubiese sido posible sin la entrega, confianza, regaños, sabiduría, y el gran ser humano que es **mi asesor.**

A todos y todas, infinitas gracias y en esa medida en que estoy agradecida los y las amo.

Contenido

RESUMEN

La relación del hombre con el universo ha demandado conocimiento del mismo con el fin de manipularlo para su propio beneficio, por ende, cabe afirmar que las primeras manifestaciones matemáticas estuvieron relaciónadas con el entorno, de esta manera, la historia ha dado cuenta de procedimientos racionales que se validan mediante un sistema lógico y universal.

El concepto de función ha sido considerado como uno de los conceptos más importantes de las matemáticas, en parte porque a nivel histórico se ha consolidado como un modelo de procesos de variación (Posada, F., Villa, J., 2006, p. 60). En el primer capítulo se presentan los resultados de una indagación sobre los aspectos históricos y epistemológicos que estuvieron ligados a la consolidación del concepto de función cuadrática. En esta revisión se considera que una mirada a la historia debe ir más allá de un simple recorrido anecdótico y circunstancial, de esta manera la historia permite la identificación de ideas sobre la evolución de los conceptos, las concepciones y principales dificultades que ha afrontado hasta constituirse en su estado actual al tiempo que puede ofrecer reflexiones de tipo didáctico que posibilitaría el diseño de situaciones al interior del aula de clase. Adicionalmente el reconocimiento de la historia evidencia procesos de desarrollo de un pensamiento matemático, aunque no acabado, sin embargo sí requiere de sujetos que puedan aplicarla y transformarla, proponer e interpretar para aplicarlo de manera significativa al contexto en el que están inmersos.

INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (1998) en su documento Lineamientos curriculares de matemáticas, ha propuesto la elaboración y ejecución del currículo a partir de dos aspectos: los **procesos generales** que tiene que ver con el aprendizaje y el segundo aspecto asociado a los **Conocimientos básicos** que tienen que ver con procesos específicos y con sistemas propios de las matemáticas que desarrollan el pensamiento matemático. En relación con lo anterior, este trabajo se inscribe dentro del pensamiento variacional y sistemás analíticos, particularmente al abordar el concepto de función cuadrática como objeto de estudio y su pertinencia en el desarrollo del currículo de mátemáticas por medio de uno de los proceso generales en los que se hace mayor énfasis, la modelación matemática.

Si bien el objeto de investigación está definido como un objeto matemático, el interés de este trabajo radica en la construcción de este concepto a nivel histórico, atendiendo a la premisa de no concebir a los objetos matemáticos como productos acabados, implicando una mirada estatática, romper con esta perspectiva de las matemáticas implica identificar a los procedimientos, objetos y conceptos matemáticos a partir de su manifestación y concepción en el tiempo con el fin de servir como fuente de reflexión, especialmente para el docente en el momento de diseñar situaciones que permitan la transposición didáctica de tales objetos de aprendizaje. De esta manera, este trabajo presenta un análisis histórico de la construcción del concepto de Función cuadrática que comprende tanto su génesis, en tanto nociones identificadas en la literatura, como su comprensión actual, pretendiendo ofrecer una visión retrospectiva que evidencie los obstáculos presentados en su constitución, pero además que permita precisar en la concepción epistemológica de este objeto de estudio.

Para presentar el análisis histórico y su vínculo con la didáctica de este concepto se plantean los siguientes capítulos:

Capítulo 1: en este capítulo se abordará el problema objeto de esta investigación, así como las preguntas asociadas al mismo.

Capítulo 2: Se describe la manera en que se aborda el problema siguiendo aspectos propios de una investigación histórica, en la que se relacionan las fuentes de documentación tanto primarias como secundarias, parámetros de interpretación de los textos y la presentación de los hechos historiográficos que servirán de reflexión para la didáctica.

Capítulo 3: En este capítulo se presentan los hechos historiográficos y las reflexiones en cuanto a la epistemología de este concepto, permitiendo una interpretación de los hechos que se relacionan a la vez que se realiza un análisis restrospectivo de las situaciones presentadas con la constitución de este objeto matemático.

Capítulo 4: Una vez realizado el análisis histórico y epistemológico este capítulo permite la vinculación de la construcción histórica y epistemológica con la didáctica de este concepto, el centro del interés de un trabajo propio de la educación matemática. En este capítulo se presentan situaciones didácticas que de acuerdo con la reflexión histórica y epistemológica del concepto plantean vías de abordaje de este concepto como objeto de aprendizaje.

Capítulo 5: Aunque el proceso de investigación histórica es concluyente en sí mismo, es necesario para la autora algunas consideraciones finales a manera de reflexión en cuanto a este tipo de investigación para la formación docente en matemáticas y la visión de la educación matemática.

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le ofrece al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje, en este caso aprendizaje de las matemáticas. Y también como lo afirma Salkind (1999):

> *Entender la naturaleza histórica de un fenómeno es a menudo tan importante como entender el fenómeno mismo. Por la sencilla razón de que no podemos evaluar ni apreciar plenamente los avances logrados por la ciencia (...) sin entender un poco el contexto dentro del cual tuvieron lugar tales avances (p.* 205).

Además los Lineamientos curriculares afirman que "*El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa"* MEN (1998, p. 15). De esta manera, en la educación matemática la perspectiva histórica-epistemológica permite una mirada a la construcción de un objeto matemático a partir de los hechos que lo originaron, al respecto Tzanakis & Arcavi (2000, p. 206) afirman que la evolución de un concepto a través de la historia se basa en cuestiones concretas y problemas que no son evidentes si el objeto se presenta en su forma abstracta desde el principio. En este sentido, la historia de las matemáticas puede ayudar al profesor a tomar conciencia de los pro y los contra de la presentación de un tema a un nivel particular de la educación.

Por otro lado algunos estudios, entre ellos Posada y Villa (2006), evidencian la forma en que los procesos asociados al concepto de función son abordados de manera acabada y procedimental lo que implica aprendizajes no significativos en cuanto a la construcción del concepto por medio de situaciones didácticas diseñadas por los docentes pensadas en órdenes procedimentales y repetitivos que proveen los textos escolares y sin reconocer las dificultades propias del concepto en un orden epistemológico. En particular, el concepto de función cuadrática evidencia una abundante presencia en fenómenos de variación de la cotidianidad, pero éstos contextos de significatividad del concepto se pierden en la medida en que las situaciones no corresponden ni con la naturaleza del concepto ni con su relacionabilidad a un fenómeno de variación que exige un nivel mayor de comprensión del concepto.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Lo planteado anteriormente genera las siguientes preguntas de investigación, y deja otras tantas para ser llevadas a cabo en futuras investigaciones.

¿Cuáles fueron los principales momentos que desde la historia contribuyeron a la construcción del concepto de función cuadrática?

¿Qué elementos aporta el desarrollo epistemológico del concepto de función cuadrática, para la reflexión y el diseño de situaciones didácticas al interior del aula de clase?

OBJETIVOS

GENERALES

Identificar los diferentes momentos que desde la historia contribuyeron a la construcción del concepto de función cuadrática, por medio de la revisión de literatura al respecto con el fin de ofrecer elementos que permita reflexión por parte de docente en el momento de abordar este concepto en el aula.

ESPECÍFICOS

- Identificar obstáculos o dificultades en la consolidación del concepto de Función cuadrática como objeto matemático.
- Establecer algunos elementos epistemológicos que permitan a los maestros diseñar situaciones didácticas al interior del aula de clase.

2. METODOLOGÍA

Acercarse a un objeto de conocimiento con el interés de indagar por su presencia histórica y las implicaciones de sus manifestaciones, en difentes culturas o civilizaciones humanas, en la consolidación como objeto matemático del conocimiento exige una postura metodológica de la Investigación Histórica en lo que concierne al objetivo de la construcción histórica de dicho concepto.

Al respecto Salkind (1999) propone que una investigación histórica contempla los siguientes momentos para su desarrollo después de formulado el problema de investigación: Selección de las fuentes, verificación de su validez y de su exactitud, triangulación de la información y la intepretación de los datos. Para este trabajo investigativo se abordaron estos momentos de la manera en que se describe a continuación.

SELECCIÓN DE LAS FUENTES:

En una investigación cualitativa de carácter documental es posible recurrise a dos tipos de fuentes: primarias y secundarias. Las primeras son aquellas que se extraen de autoría de los protagonistas de la Historia que se indaga, sugiere información generada en el momento histórico en que acontece, las secundarias son aquellas fuentes generadas a partir de las primeras.

El primer paso consistió en una mirada a las fuentes secundarias de carácter historiográfico con el fin de identificar momentos históricos y conceptuales importantes en los que hubo manifestaciones asociadas a las nociones cuadráticas y que tuviese que ampliarse con otro tipo de fuentes, por ejemplo las primarias.

En este trabajo se tomó como referencia de tipo historiográfico las siguientes obras:

1. Boyer, C., (1969). Historia de las Matemáticas. Madrid: Alianza editorial.
2. Kline, M. (1992) El pensamiento matemático en la antigüedad a nuestros dias. I, II y III. Madrid: Alianza editorial.

Para confirmar la autenticidad de la fuente se debe depender de más de una evidencia y procurar las fuentes confiables que determinan los expertos como tales.

Una vez identificada la presencia de las nociones cuadráticas en diferentes épocas y culturas se seleccionaron las siguientes fuentes primarias :

1. Euclides (1999). Elementos I- VI. Madrid: Planeta de Agostini.
2. Descartes, R. (1637). The geometry. Estados Unidos : Dover Publications.
3. Galileo, G .(1638). Diálogos acerca de dos nuevas ciencias. Traducción. Buenos Aires: Editorial Losada.
4. Newton, I.(1687) Principios Matemáticos de la filosofía natural. Madrid: Editora Nacional.

LA AUTENTICIDAD Y EXACTITUD

En cuanto a las fuentes Salkind (1999, p.206) afirma que *"... es preciso evaluar los indicios tanto en cuanto su autenticidad como a su exactitud "* haciendo referencia a lo que por otros autores se conoce también como la crítica externa e interna respectivamente. De acuerdo con el primer criterio éste indaga sobre la originalidad y confiabilidad de los datos y en el que la comunidad de expertos discuten sobre este asunto, lo que implica para este desarrollo una recurrencia a ellos. En cuanto al segundo criterio, exactitud o crítica interna se refiere al grado de confiabilidad de la información, en ese sentido Salkind (1999) sugiere recurrir a expertos para determinar el nivel de exactitud, como los expertos se reúnen en agremiaciones académicas en didáctica de las matemáticas materializadas en algunas ocasiones en eventos académicos como congresos, reuniones, escuelas, simposios se participó en algunos de ellos con el fin de determinar la confiabilidad de esta investigación con respecto a lo histórico y a lo didáctico, se relacionan los eventos académicos, nacionales e internacionales en los que se participó con ponencia en la modalidad Historia y educación matemática.

HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS. THE HPM SATELLITE MEETING OF ICME.

Ponencia: Reflexión Histórica epistemológica y didáctica del concepto de Función Cuadrática.

Ciudad de México - 2008

> Resultados finales de la investigación a partir del análisis histórico y su vínculo con la pedagogía y la didáctica de las matemáticas. Este evento es el más importante en esta área en el mundo y se realiza solo cada 4 años.

XXII REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA -RELME.

Ponencia: Implicaciones didácticas del desarrollo Histórico del concepto de función cuadrática: El caso de Galileo Galilei.

En esta ponencia se muestró el papel que jugó Galileo para la formalización del concepto dentro de las matemáticas que no había sido explícito y como esta formalización tiene consecuencias a nivel didáctico para la construcción significativa del concepto por parte del estudiante.

Ciudad de México - 2008

XXI REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ponencia: Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de Función cuadrática.

En ésta se mostró avances de investigación.

Universidad del Estado de Zulia. Maracaibo Venezuela - 2007

XVI CONGRESO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Conferencia: Reflexiones didácticas de la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

Se presenta como semiplenaria (50 minutos de exposición y 10 minutos de preguntas) en la que se muestra el vínculo de la historia del concepto objeto de estudio y su transposición didáctica. Hace parte del proyecto de investigación del mi trabajo de grado.

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Medellín - 2007

VIII ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ponencia: La modelación y la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

Reporte de investigación en el que se evidencia el proceso de Modelación matemática presente en esta construcción como excusa para ser abordada en el aula en el momento de diseñar situaciones de aprendizaje de este concepto.

Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) - Universidad del Valle.

Cali - 2007

I ENCUENTRO DE MAESTROS EN FORMACIÓN DE LA LICENCIATURA EN EDUCACION BÁSICA CON ENFASIS EN MATEMÁTICAS

Ponencia: La importancia de la Historia de las Matemáticas en la comprensión de la función cuadrática.

Reflexiones acerca de la importancia de la Historia en el trabajo de grado y sus implicaciones didácticas.

Universidad de Antioquia - 2006

TRIANGULACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Sintetizar e integrar los datos corresponde a la elección del material que va a permitir responder a la pregunta o a solucionar el problema de investigación, pero que también en caso de haber hipótesis las sostiene.

El abordaje de los textos estuvo enfocado, como ya se ha mencionado, ha identificar las diversas manifestaciones que fueron encontradas en la literatura en relación con las nociones cuadráticas. Esto implicaba determinar lo que se nombraría por "cuadrático" y "cuadrado" que adoptara el enfoque o criterio para seleccionar y recolectar la informacion de carácter historiográfico e histórico.

En el análsis de las situaciones problemáticas encontradas, en la información sobre los procedimientos realizados y de la matemática construida hasta cada manifestación referenciada, se encontraron aspectos en común frente a lo conceptual, lo que permitió el establecimiento de los momentos conceptuales que se presentan en el siguiente capítulo. Cada momento conceptual caracteriza la naturaleza de las nociones cuadráticas y la importancia para la constitución formal del concepto de Función cuadrática.

La triangulación se realizó bajo las concepciones de cuadrado que se establecían en cada momento o el que se podía inferir a partir de los procedimientos utilizados para abordar situaciones en los que las relaciones cuadráticas abundaban.

INTEPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Corresponde al resultado del análisis que el investigador hace de la información recolectada. Como lo sugirió Salkind (1999) este tipo de investigación está sometida a validación por parte de expertos que dieran fe de los datos interpretados, por ello se realizó un esfuerzo por publicar como estrategia de divulgación, los artículos que lograron ser publicados pasaron por jurados con trayectoria y experiencia en Historia, así como las ponencias presentadas en diferentes eventos académicos en los que se convocó el área de Historia y Pedagogía de las matemáticas lo que implicaba que los evaluadores podían validar esos conocimientos lo que se vería reflejado en la exactitud de la información presentada. Algunas publicaciones corresponden a eventos en los que se participó con ponencia, estas ponencias de tipo histórico se presentaron ante comunidad de investigadores en este campo.

Publicaciones.

Artículo:

Elementos Históricos, Epistemológicos y Didácticos del concepto de función cuadrática.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 21 P. 922- 930. Editorial: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Ciudad de México 2008 ISBN: 978-970-9971-15-6. Disponible en http://www.clame.org.mx/documentos/alme21.pdf

Artículo:

Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática.

En HPM 2008 Proceedings as relevant to the HPM 2008 main theme No1: Integrating the History of Mathematics in Mathematics Education. Ciudad de México 2008

Disponible en: http://www.edc.uoc.gr/~tzanakis/ProceedingsHPM2008-Revised/1-20Mesa&VillaText.pdf

Artículo:

Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática

En: Revista Virtual Universidad Católica del Norte" - ISSN: 0124-5821. Volumen 2. Marzo de 2007. Diponible en:

http://201.234.71.135/portal/uzine/volumen21/articulos/5_Funciones_cuadr%C3%A1ticas.pdf

Artículo:

La importancia de Galileo en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA - HTEM, 4., Rio de Janeiro, RJ. Anais..., 2008. p.1-8. (ISBN: 978-85-61545-02-4) disponible en: www. limc.ufrj. br/htem4/papers/73. pdf

Para la presentación de esta investigación se ha optado por un plan que permita percibir los grandes temas, articulaciones y problemas abordados, con el fin de caracterizar las actividades y concepciones que se presentaron en la historia de manera que permita una lectura a partir de sus momentos conceptuales y las relaciones que pueden establecerse allí. Este tipo de presentación facilita al lector la comprensión sobre lo construido a nivel histórico y epistemológico en tanto se recurre a la fuente histórica, se realiza su interpretación a partir del establecimiento de sus implicaciones de orden didáctico.

3. GÉNESIS HISTÓRICA DE LAS NOCIONES CUADRÁTICAS

Las nociones de relaciones cuadráticas estuvieron presentes desde los mismos inicios de las matemáticas, según Kline (1992, p.18): *"La matemática, entendida como disciplina racional bien organizada e independiente, no existía antes de que entraran en escena los griegos de la época clásica*" sin embargo, algunas civilizaciones anteriores iniciaron la construcción de conceptos matemáticos. Para la presentación de las ideas encontradas en el recorrido histórico se realizará una clasificación de la presencia de las nociones asociadas a las formas cuadráticas en cuatro grandes momentos que caracterizaron su desarrollo: Las Ecuaciones, Las Cónicas, La Cinemática y Las Funciones.

1. LAS ECUACIONES:

El concepto de ecuación es uno de los más importantes del análisis matemático actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas, en la medida en que dos expresiones algebraicas se conectan con una expresión de igualdad donde el interés radica en encontrar el ó los valores particulares que la hace válida.

Para este análisis se ha identificado algunas culturas o civilizaciones y épocas que evidenciaron el trabajo con ecuaciones de tipo cuadrático pretendiendo inferir el concepto o noción de cuadrado que manejaban.

1.1 BABILONIOS

En algunos registros babilónicos se ha encontrado producciones de los cuales se puede inferir que tenían ciertas concepciones de elementos del álgebra, al respecto Posada y Villa (2006, p. 46) afirma: *"...pues desde los babilonios (5000 a. C hasta los primeros años del cristianismo) se encuentran registros en los cuales se evidencia que estudiaban algunos problemas que trataban con la variación continua, pero sólo desde un registro tabular'* .

De esta manera se observa una aproximación a la noción del concepto de función, aunque haciendo referencia a sus observaciones astronómicas, sin embargo una mirada a partir de las ecuaciones es posible identificar la forma en que trataban con situaciones de tipo cuadrático.

Situación:

"*Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado*" a esta situación afirma el autor *"En la notación moderna se puede escribir que lo que buscaban los babilonios era dos números* $x\ A\ x$ *tales que* $xx = 1$ *y* $x + x = b$ *Estas dos ecuaciones dan como resultante la ecuación cuadrática:* $x - bx + 1 = 0$". Kline (1992, p. 26)

Se evidencia entonces, que los babilonios se valían de una expresión, aunque ésta no sea simbólica, para resolver ecuaciones cuadráticas. Para ecuaciones de grado superior, Kline (1992) afirma que el procedimiento correspondía a la reducción de las expresiones a las de segundo grado.

En cuanto al papel de la geometría en esta cultura, con el fin de apreciar la concepción bajo esta mirada que posteriormente se encontrará más fuerte en la cultura griega, Kline (1992, p. 29) dice:

> El papel de la geometría en Babilonia fue prácticamente insignificante, no llegando a constituir una rama independiente de la matemática. Los problemas sobre divisiones de campos o sobre tamaños de ladrillos necesarios para alguna construcción se convertían inmediatamente en problemas álgebraicos.

Sin embargo no se podría inferir necesariamente que no se haya pensado geométricamente, ya que en esta misma lectura se observa que los problemas típicos, mostrados entre ellos en la cita, tenían como forma de representación la vía geométrica aunque no con la rigurosidad de los griegos, pero sí eran empleadas a manera de representación con el fin de comprender dichas situaciones sumándole importancia al razonamiento álgebraico.

1.2 GRIEGOS

Esta cultura está notablemente caracterizada por un pensamiento de carácter deductivo a la que se le atribuye el aporte a la Historia del pensamiento matemático del sistema axiomático para el estudio de las matemáticas y con grandes aportes en lo que a concepciones cuadráticas se refiere, entre ellos puede identificarse:

Euclides

En la obra *Los Elementos* puede observarse el manejo y tratamiento de las relaciones cuadráticas que les competía como puede verse a manera de ejemplo en la proposición 5 del libro II, en la que se realiza una demostración de forma retórica y deductiva de una de las propiedades de la división de segmentos.

> Proposición 5. Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segméntos desiguales de la (recta) entera, junto con el cuadrado de la (recta que está) los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Se evidencia un razonamiento puramente geométrico, las expresiones *"al cuadrado"* y *"es el cuadrado de..."* se describen de forma retórica dentro de un sistema deductivo que se desarrolla con el fin de darle generalidad a sus procedimientos, precisamente la deducción permite generar unas premisas generales para ser útil a los casos particulares, y son referidas a áreas y superficies.

Concepto: En los Elementos el término "cuadrado" se concibe como: *"...de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular".* también Puertas (1996), la traductora de esta obra, comenta que: *"para dibujar un cuadrado [Euclides] a partir de un lado la expresión dada es anagrápsai apó...que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado".* Lo anterior permite mostrar la idea de cuadrado como figura cuadrilátera que evoca una concepción a partir de áreas pero que se construye a partir de la acción de repetir ese mismo lado, obviamente teniendo en cuenta los ángulos rectos, es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica y coherentemente como se ha mostrado en este trabajo que para la época un segmento no correspondía necesariamente a una cantidad fija si no a una generalidad.

Esta es la demostración dada en los Elementos de la Proposición 5.

Córtese, pues, una recta cualquiera AB en (segmentos) iguales en el punto Γ, y en (segmentos) desiguales en el (punto) Δ”. Digo que el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB junto con el cuadrado de rA es igi

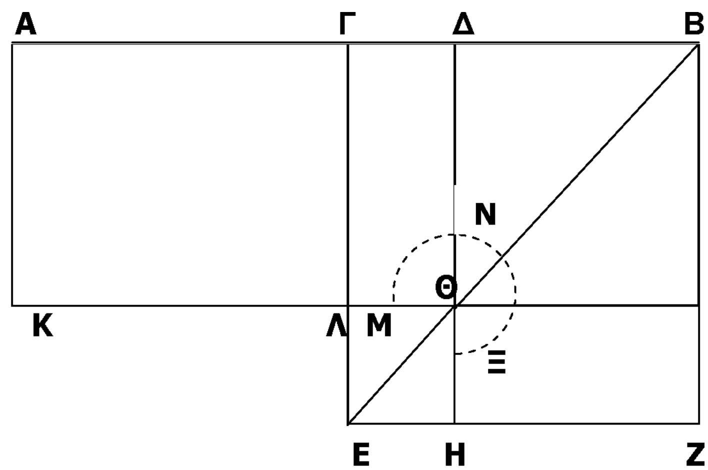


Fig. N° 1: Ilustración de la proposición 5 de los Elementos de Euclides

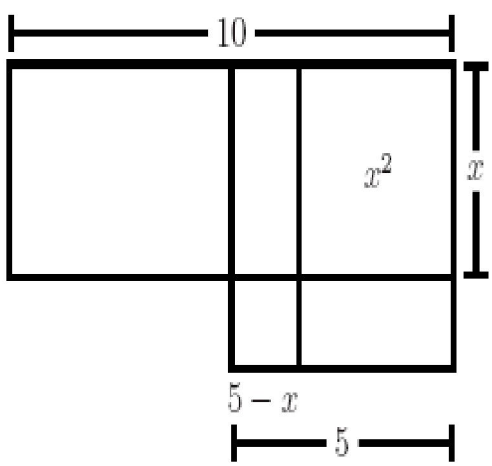
partir de TB el cuadrado TEZB [I,46], y trácese BE, y por el (punto) A trácese AH paralela a una de las dos (rectas) TE, BZ, y por el (punto) © trácese a su vez KM paralela a una de las dos (rectas) AB, EZ, y por el (punto) A trácese, asimismo , AK paralela a una de las dos (rectas) rA, BM [I,31] (…) Ahora bien, el gnómon MNE y AH es el cuadrado entero TEZB, que es el cuadrado de TB; por tanto, el rectángulo, comprendido por A, AB junto con el cuadrado de T es igual al cuadrado de TB.

Por consiguiente, si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta) que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad. Q.E.L.D

Con base en la demostración anterior se evidencia la relación entre la geometría y el álgebra que establecían los griegos, sin embargo esta es una afirmación retrospectiva porque el término álgebra no existía en ese tiempo pero que permite nombrarse así en tanto se pretende generalizar la medida de un segmento para aplicarlo en cualquier circunstancia en la que cumpla con las características de esta situación, en lo relacionado con las áreas cuadradas, es la manera de reducir el razonamiento a expresiones geométricas mediante la construcción rigurosa con regla y compás de tales problemas, de esta manera se muestra esta situación, tomado de Luque (2003 , p. 6) en el que se observa la relación entre lo aritmético, lo álgebraico y lo geométrico.

Solucionar la ecuación $10x - xX = 21$

Para ello se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 5 de los Elementos



$$\left(10x - x^2\right) + (5-x)^2 = 5^2$$
$$21 + (5-x)^2 = 25$$
$$(5-x)^2 = 4$$
$$5 - x = 2$$
$$3 = x$$

Este ejemplo y la historia en sí misma, ha dado cuenta que la expresión "cuadrado" como referente geométrico al hacer concreto este tipo de razonamiento, lo que lleva necesariamente a la concepción de área y ésta a su vez como una magnitud conmesurable que se totaliza aritméticamente. Es posible observar en el razonamiento de Euclides un análisis basado, no en un segmento con medida particular sino en un segmento en general, de lo cual se infiere cierto grado de generalidad, y aunque según Mason citado en Posada y Villa (2006) la expresión de la generalidad es una de las bases del pensamiento álgebraico, es posible pensar en un inicio de este pensamiento, tanto así que posteriormente esta generalidad sirve para el planteamiento del álgebra, pero no puede garantizarse la existencia de este pensamiento en los griegos, dado que sus razonamientos se basaban en las figuras geométricas más que en la relación cuadrática de la magnitud área con respecto a la longitud del lado. En este sentido se observa que las relaciones cuadráticas estaban firmemente ligadas a una interpretación geométrica y como punto central áreas de figuras planas, lo cual podría constituirse en un obstáculo dado que en términos de segmentos, los negativos no existirían por lo tanto la operación sobre estos elementos no se definiría.

Diofanto

El punto culminante del álgebra, greco-alejandrina, se alcanzó con Diofanto que no se basa en significados geométricos si no en las relaciones geométricas. Siendo esta última una relación entre las propiedades permitiendo verlas desde un punto de vista álgebraico. Diofanto plantea y resuelve ecuaciones indeterminadas de segundo grado, es decir, con varias soluciones, con lo que se podría observar en Diofanto la idea de variable. Plantea ecuaciones cuadráticas de la forma[1]:

$$ax^2 = 0$$
$$ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 = bx$$

[1] Esta idea es tomada de Kline, pero cabe acalarar que esta no era la notación para Diofanto, sólo se hace una aclaración de manera restrospectiva de la algebrización que planteaba Dioanto en sus situaciones algebraicas.

Resuelve problemas de este tipo:

> Encontrar dos números, tales que su suma sea 20 y su producto sea 26. Diofanto procede así: sea 20 la suma, 96 el producto y 2x la diferencia entre los números buscados. Luego los números buscados son: $10+x$, $10-x$. por tanto $100-x^2=96$, entonces $x=2$, y los números buscados son 12 y 8. Problema 27 del libro I (Diofanto cit op. Kline 1970, p.193).

Diofanto resuelve ecuaciones cuadráticas cuya forma más general es en nuestra notación, $y = Ax^2+Bx+C$, sin embargo considera sólo las raíces positivas, a diferencia de los indios[2] que sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales, en expresiones como $ax^2+bx=c$ usaban el método de completar cuadrados que no era algo nuevo para ellos. (Kline 1970, p. 253).

También es posible observar que la noción de "forma" cuadrática no era ajena a la matemática de la época, sin embargo en la mayoría de los casos se observa que se encuentra ligada a problemas relacionados con la solución de ecuaciones más que a la modelización de situaciones de variación y cambio, pero es un avance en cuanto se evidencia un desprendimiento del razonamiento meramente geométrico acercándose a un álgebra sincopada y con carácter de generalidad.

[2] Kline se refiere a los habitantes de la India, y no habla de hindúes como en gran parte de la literatura porque ésta hace referencia a la religión.

Concepto: Esta situación permite identificar en Diofanto un tratamiento aritmético de una relación que conduce a una forma de ecuación cuadrática. Se evidencia un tratamiento de la "incógnita" en la búsqueda de un número que debe hallarse de acuerdo con unas condiciones dadas en la expresión. Pero también en ese caso particular las ecuaciones pueden admitir varias soluciones, aunque optara por las positivas, para la incógnita permitiendo deducir una comprensión de la incógnita que se comporta de una manera cuadrática asociada con una segunda potencia en un contexto aritmético.

1.3 ÁRABES

Los árabes fueron quienes pusieron al álgebra su nombre, viene de un libro escrito en el siglo VIII por Al - khowarizmi (Matemático, geógrafo, astrónomo), este libro muestra el proceso de añadir y sustraer términos de expresiónes de la forma $^{ax}+^{bx}+^{c}$ y reconoce sólo las raíces cuadradas positivas, aún conociendo por herencia hindú la existencia de las raíces negativas pero el hecho de optar sólo por las positivas podrían confirmar aún más su carácter geométrico ya que los árabes dan soluciones algebraicas de las ecuaciones cuadráticas explican o justifican sus procesos geométricamente, hecho confirmado por historiadores y matemáticos, pudiendo afirmar que el álgebra de manera formal o explícita nació con la geométría, y por ende la concepción de situaciones generales de tipo didáctico también tiene su génesis en la geometría.

En esta cultura se presenta el uso de un álgebra sincopada, desde la generalidad que se vale de la geometría y de la que han notado una estrecha relación entre el álgebra propuesta por Al-Kuarismi con el Libro II de los Elementos, así como lo menciona Escohotado (1982, p. 39) en el prólogo de la obra Principia:

> (…) su alta capacidad [árabes] y su interés por la geometría y la aritmética que culmina con la formulación sistemática del álgebra por el famoso Al-Quaritmi no les conduce tampoco a hacer física matemática teórica. Es como si de alguna manera Grecia hubiese dado ya el marco genérico, y a los árabes sólo les interesase perfeccionar el cuadro con exactitud y sutileza.

Este es un ejemplo de situación planteada: *"un cuadrado y diez de sus raíces, son iguales a tres unidades, es decir, si sumamos diez raíces a un cuadrado, la suma es igual a treinta y nueve*" Kline (1992).

Concepto: cuadrado se concibe como una cantidad (aritmética), pero aún esta expresión se vale de una representación geométrica, por lo que se puede deducir que cuadrado es una cantidad que permite representarse geométricamente y con base en lo observado de la geometría euclidiana este concepto podría ser concebido en relación con la media proporcional. La raíz es concebido actualmente como la solución, pero entonces restringiéndose al campo geométrico la raíz de un cuadrado tendría que ser necesariamente un lado, ya que como se ha mostrado, el cuadrado se construye a partir del cuádruple de un segmento que forma ángulo recto.

Esta forma de visualizar las formas cuadráticas en la historia a través de la nociones de ecuación permite deducir que predominó una representación geométrica que marca un especial énfasis en un pensamiento de tipo geométrico, esencialmente, sin restarle importancia a su concepción aritmética, mostrando la necesidad de recurrir a sistemas de representación gráfica, aunque ésto no quiere decir que no haya habido pensamiento que se enfoca hacia el estudio de la variación, pues la asignación de un segmento no especifica un cantidad determinada si no que permite acomodarse para cualquier situación, pues el sistema deductivo que en el caso de los griegos y posteriormente de los árabes, fue posible inferir en términos de Posada y Villa (2006, p.46) un sentido variacional. De igual manera se rescata el papel que tiene la geometría en la génesis de las primeras ideas asociadas a las nociones cuadráticas. El reconocimiento de este papel sugiere un elemento para la reflexión en la implementación de su enseñanza. Sin embargo, es posible también observar que los números negativos estuvieron al margen de este proceso pues en las construcciones geométricas se restringen sólo a magnitudes positivas que obstaculizaba la concepción actual de cuadrado y de su proceso inverso, dada la dificultad desde lo existente de graficar cantidades negativas.

A nivel histórico entonces se puede sugerir dentro del currículo partir desde el trabajo con los números naturales, permitiendo elaborar nuevas situaciones que generen rupturas, pero éstas no para establecer dificultades de aprendizaje, si no que permitan consolidar los saberes escolares que han sido trabajados a la luz de re-construir conceptos, y cómo ha sido visto este proceso de validación a nivel histórico se consigue mediante la modelización. Y que las rupturas sean generadoras de nuevos saberes, ya que han sido en ellas en las que se ha posibilitado el conocimiento, la dificultad es entonces a nivel didáctico, donde el docente no posee herramientas que permitan realizar esa "subsanación" en el aula escolar.

2. LAS CÓNICAS

En cuanto a las cónicas, Kline (1992, p. 77) citando a Platón afirma: "*...antes de estudiar la astronomía, que trata de sólidos en movimiento, se necesita una ciencia que estudie tales* *sólidos*". A raíz de esta afirmación él y sus discípulos se dedicaron a la geometría del espacio, de la que demostraron teoremas y estudiaron propiedades de los sólidos, entre ellos, el cono. Al respecto Kline (1992, p. 77) dice: *"El descubrimiento más importante quizás de la escuela platónica fue el de las secciones cónicas, atribuido por el alejandrino Eratóstenes a Menecmo, un geómetra y astrónomo que fue discípulo de Eudoxo y miembro de la Academia platónica".*

Aunque no se sabe con exactitud lo que llevó al descubrimiento de las secciones cónicas, lo anterior evidencia que nace de la necesidad griega de estudiar el espacio físico en el que estaban inmersos. En la lectura de la historia de la matemática se afirma que las secciones cónicas son el resultado de algunas de las soluciones a los problemas típicos de la antigua Grecia tales como la duplicación del cubo, construcción de una cuadrado de igual área de un círculo y la trisección de un ángulo agudo.

2.1 GRIEGOS

Hipócrates

Hipócrates en la búsqueda de la solución del problema de la duplicación del cubo o el de la cuadratura del círculo, consigue la siguiente demostración.

> A este caso Hipócrates de Chíos (S V a.C) demostró que este famoso problema ... puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble. En nuestra notación algebraica, sean x e y tales que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$
>
> Entonces
>
> $$x^2 = ay \quad \text{y} \quad y^2 = 2ax$$

Y como $y = \frac{x^2}{a}$, de la segunda ecuación se obtiene que $x^3 = 2a^3$, que es la respuesta deseada, y que no puede construirse con regla y compás. Kline (1992, p. 70)

Concepto: según esta concepción el *cuadrado* es considerado como el producto de la media proporcional entre dos razones, se observa además que los problemas de la época, entre ellos la cuadratura del círculo es trabajado desde la teoría de las razones y las proporciones. Así mismo el procedimiento para hallar una raíz consistía entonces en la obtención del elemento que era a su vez consecuentes de las razones que hacían media proporcional y aunque Euclides no la define como un elemento primitivo en su demostración sí permite acercarse a esta noción por medio de la demostración de la proposición. Esta demostración confirma también la idea que ***raíz*** es un segmento y ésta se obtiene con la consecución de una cantidad que fuese media proporcional.

Según Kline (1992), Hipócrates debió haber razonado con base en la geometría, en particular en las secciones cónicas, este razonamiento remite a la geometría analítica que permite ver que x e y son las coordenadas del punto de intersección de dos parábolas o de una parábola y de una hipérbola.

Apolonio

Posteriormente, pero dentro de esta misma época, Apolonio de Perga (260 a.C) construye un tratado de las secciones cónicas, con base en los estudios de Euclides, Aristeo el viejo, Platón, Arquímedes, Menecmo; dándole una forma sistemática; aunque recopiló trabajos de estos matemáticos, su tratado no es sólo un compendio, es un tratado. Nombra a la parábola como tal y a las demás secciones cónicas, pero parábola se refiere a una superficie de la forma $y = x^2$ que está relaciónada con áreas. Pero Pappus, en sus libros "Colección matemática" libro VII proposición 238, establece una propiedad de las cónicas que según algunos historiadores, Apolonio no evidenció: *"el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias desde un punto fijo (foco) y desde una línea fija (directriz) están en razón constante es una cónica"* Kline (1992, p.177) cabe destacar que los conceptos de foco y directriz es una visión retrospectiva de Kline, puesto que para esta época Pappus no conocía la palabra directriz ni foco que son nombradas por la geometría analítica desarrollada mucho siglos más tarde. Y como lo anota De la torre (1997, p. 123):

> En las cónicas, Apolonio desarrolla exhaustivamente la teoría: estudia los ejes, los centros, los diámetros, las asíntotas y las cuerdas conjugadas. Según anota Rouse Ball, sólo se le escapó la idea de la directriz y no se percató del foco de la parábola; sin embargo en los tres primeros libros de su tratado están contenidas la mayor parte de las proposiciones que se encuentran en los textos modernos.

Sin embargo, Kline (1992) cuenta que es probable que hubiesen sido conocidas por Euclides en su estudio sobre las razones y proporciones, por lo que se reafirma el estudio de las razones y las proporciones para construir expresiones algebraicas que puedan representarse por la vía geométrica y que representen situaciones cuadráticas.

Situación planteada: en este pequeño apartado, no se presenta un problema, si no una afirmación en que González cita a Apolonio *«La Parábola tiene la propiedad característica de* *que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa xy el latus rectum l».*

Concepto: Cuadrado es sin lugar a dudas la expresión geométrica, a la que Apolonio trabaja desde la generalidad, vislumbrando un acercamiento al álgebra de las cónicas, si bien la parábola no puede construirse con regla y compás, se observa entonces que lo que puede haber es una transformación de áreas y se relacione con lo llamado la cuadratura de la parábola.

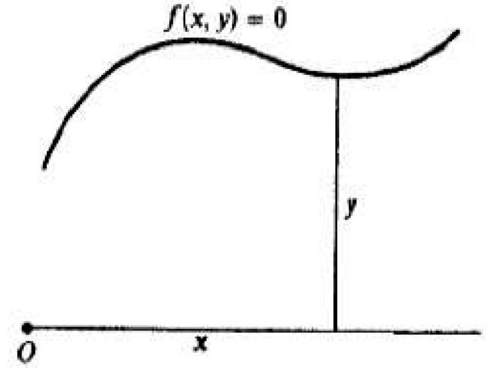
Representaciónes: Algebraica y Geométrica. Pero no es enteramente álgebra geométrica que fue el logro de los árabes posteriormente, si no que asignaban una generalidad y la recurrencia a cantidades por medio del estudio de las razones y las proporciones en las que se trataba de escribir el razonamiento, no contaban con símbolos que permitiera asignar generalidad. Sin embargo, el estudio de las secciones cónicas por Apolonio mediante una aproximación al uso de las coordenadas y algunos registros permite inferir que de no ser por los pocos recursos conceptuales (en relación con el álgebra) de los que disponía Apolonio hubiese dado un paso importante en la creación de la geometría analítica.

2.2 SIGLO XVII

Las secciones cónicas fue sin duda el paso más grande para afianzar la relación entre lo álgebraico y lo geométrico en relación con la cuadratura de superficies expresadas por el álgebra que Viete trabaja desde una álgebra simbólica que sirve de referencia para los trabajos de Fermat y Descartes al observar las relaciones entre la gráfica de una ecuación y su trazo por medio de los puntos generadores de la expresión.

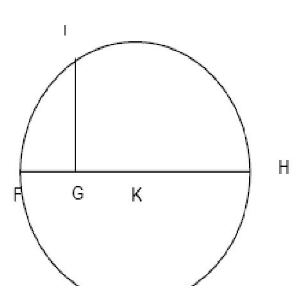
Descartes afirmaba que una parábola se construía punto a punto ante la imposibilidad de su construcción con regla y compás, hecho que permite relacionar a esta cónica con el concepto de función al observarse en esta afirmación una idea relación unívoca, para algunos casos, en el plano pero que se supera posteriomente al abordarla desde la generalidad.

Conceptos como razón y proporción, estaban ligados a la geometría ya que la pretensión griega era convertir esta disciplina en la base de toda la matemática, es así como la comprensión de expresiónes x^2 y x^3 se refieren a representaciónes geométricas de cantidades, por lo que el desarrollo del álgebra estuvo ligada al desarrollo de la geometría y viceversa, era así como se resolvían ecuaciones cuadráticas.



Siglo XVII: Para este entonces las ideas de cuadrado están maduras en cuanto a su concepción geométrica y aunque en Apolonio se observa como él no se restringe solamente a la geometría de regla y compás Vieté inicia la exploración retomando el tratado de las secciones cónicas y trata de simbolizarlas, al realizar esta actividad provocó el estudio bajo una perspectiva algebraica de esos lugares geométricos que como se verá a continuación madura este concepto desde una perspectiva analítica y funcional. Se logra la definición de las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y,

Situación planteada: Extracción de la raíz cuadrada.



> O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré más detalladamente más adelante".
>
> Descartes citado por Hernández (2002, p. 36)

Concepto: lo cuadrático está asociado con la expresión algebraica de una curva definida por Apolonio como parábola. En la situación presentada en la Obra de Descartes "La Geometría" se observa el proceso de extracción de raíces y como consecuencia ella es un segmento que se halla por medio de la obtención de media proporcional recurriendo a proposiones de la Geometría Euclidiana. Así que es el momento de la ruptura en la concepción cuadrática referida a área si no también como magnitud o cantidad, aunque ésta se representa con segmentos pero éstos tenían que ver con la concepción cartesiana de la extensión de la cantidad. Además, cuadrático es la expresión algebraica de una curva definida por Apolonio como parábola.

Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función. Vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos de manera conjunta.

3. LA CINEMÁTICA

Aunque en la historia de las matemáticas no se evidencia la relación entre el estudio del movimiento y las matemáticas si no hasta el siglo XIV con De Oresme y posteriormente con Galileo,Newton, entre otros; es interesante por la riqueza en cuanto a los procesos de modelación de estos fenómenos que son posibles en la medida en que la presencia de las formas o concepciones cuadráticas son empleadas para comprender los fenómenos mismos. Es importante identificar los fenómenos de variación que además posibilitaron el desarrollo del cálculo.

3.1 Oresme (1323 - 1382)

Es uno de los matemáticos de la época que utiliza el método gráfico para representar las latitudes de las formas. Mediante su aproximación geométrica frente a los fenómenos cinemático-aritméticos, abre una nueva vía para el estudio de los fenómenos de variación y cambio.

El objetivo de De Oresme era representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo esto lo explica en su tratado "De configurationibus qualitatum et motuun", en donde llega a afirmar: *"Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua "*. De donde se puede inferir que De Oresme interpretaba la noción de número como algo diferente a las magnitudes. (Ruiz, 1998, p. 113).

Según Ruiz (1998, p.114) De Oresme, siguiendo la praxis habitual, representó la extensio (magnitud "independiente", extensión) por una línea horizontal e hizo la altura de las perpendiculares proporcionales a las intensio (magnitud "dependiente", intensidad). Su propósito era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica. Afirmó que las propiedades de la figura podrían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

3.2 Galileo Galilei (1564-1642):

En Galileo Galilei así como en De Oresme se presenta un estudio del movimiento utilizando representaciones gráficas estableciendo relaciones entre cantidades covariables, una aproximación a la expresión de cantidades por medio de gráficas con características similiares a las que actualmente se conoce como cartesianas. Entre las variables que Galileo estudió se tienen: la velocidad, el tiempo y la distancia que son por naturaleza continuas pero se aproxima a su estudio y comprensión por medio de la discretización de ellas mediante un plano. En sus estudios, Galilei establece relaciones numéricas utilizando los números Naturales, según la situación presentada más adelante pero esto también permite deducir que se demadaba un conjunto más extenso (o denso) para establecer relaciones de correspondencia entre cualquier punto en movimiento, un espacio y un tiempo, ya que la parábola está concebida en su pensamiento como un punto en movimiento y como tal plantea en su obra de Diálogos como problema hallar "…el *espacio en el instante* t" permitiendo evidenciar el establecimiento de relaciones entre cantidades covariables en la medida en la que se aproxima a una representación gráfica de éstas, semejantes a las de De Oresme pero también con una diferencia en cuanto a la asignación de esas magnitudes y su aproximación un poco cartesiana. Así pues, a un número natural le correspondía un instante de tiempo, pero ésto a su vez mostraba los vacíos en ese espacio transcurrido entre una cantidad y otra, que podría llenarse con la construcción del Conjunto Real, y posteriomente llegar a ser nombrada como función en R, de manera que todos sus elementos estuvieran relacionados unívocamente, Una condición necesaria para ser función en R y estar dispuesta para el análisis Matemático.

Por la importancia de su pensamiento y de su obra para la construcción del concepto de Función cuadrática se hace necesario un establecimiento de las características evidenciadas en su obra, entre éstas se destaca el establecimiento de relaciones entre cantidades covariables, al tiempo que se aproxima la expresión de cantidades por medio de gráficas un poco cartesianas estableciendo para determinada cantidad una correspondiente de otra naturaleza.

Es aquí donde se reporta uno de los primeros entendimientos de la parabóla como una representación de un fenómeno de movimiento y de tipo cuadrático, ya que cuando habla a partir de los incrementos de la parábola afirma que éstos corresponden a la progresión de los números impares, es decir un crecimiento lineal de la forma $y= 2m+1$.

Seguramente si el término función hubiera existido para la época, Galileo lo hubiera manejado pero cabe la reflexión de que este concepto precisamente fue posterior porque fue el trabajo de la cuadratura quien lo particularizó, ya después de haber pasado por varias concepciones que fueron dando más forma, los conceptos no nacieron predefinidos, es la actividad matemática quien propone nuevos conceptos a partir de lo construido permitiendo confrontarla, proponer, conjeturar y validar.

Situación planteada:

TEOREMA II PROPOSICIÓN II

Si un móvil con movimiento uniformemente acelerado desciende desde el reposo, los espacios recorridos por él en tiempos cualesquiera, están entre sí como la razón al cuadrado de los mismos tiempos, es decir como los cuadrados de esos tiempos.

Supongamos que el fluir del tiempo desde un primer distante A, está representado por la extensión AB, en la cual se toman dos tiempos cualesquiera AD, AE; y sea HI la línea por la que el móvil desde el punto H, como primer principio del movimiento, desciende con movimiento uniformemente acelerado; y sea el espacio HL recorrido en el primer tiempo AD, y sea HM el espacio por el que se descendió el tiempo AE

Digo, que el espacio MH está, respecto a HL, en una razón que es la segunda potencia de la que tiene el tiempo AE respecto al tiempo AD; es decir, que los espacios MH, HLtienen la misma razón que tienen los cuadrados de AE y AD.

Pongamos la línea AC formando un ángulo cualquiera con la AB; y desde los puntos D, E, trácense las paralelas DO, EP; de las cuales DO representará el máximo grado de velocidad, adquirida en el instante D del tiempo AD; y PE el máximo grado de velocidad adquirida en el instante E del tiempo AE. Y puesto que hemos demostrado arriba, en lo referente a lo espacios recorridos, que son iguales entre sí aquellos de los cuales uno es recorrido por el móvil con movimiento uniformemente acelerado a partir del reposo, y el otro es recorrido durante el mismo tiempo por el móvil que marcha con movimiento uniforme, cuya velocidad es subdupla (media) de la máxima velocidad adquirida en el movimiento acelerado; es evidente que los espacios HM, HL son los mismos que, con movimientos uniformes cuyas velocidades fueran como las mitades de PE, OD, serían recorridos en los tiempos, EA y DA. Por consiguiente, si se demostrare que estos espacios HM, HL están en una razón que es la segunda potencia de la razón de los tiempos EA, DA, tendríamos demostrado lo que pretendíamos.

Pero en la cuarta proposición del libro primero se ha demostrado que los espacios, recorridos por móviles que marchan con el movimiento uniforme tienen entre sí una razón producto de la razón de las velocidades y de la razón de los tiempos; más aquí la razón de las velocidades es idéntica con la razón de los tiempos (pues la misma razón que tiene la mitad de PE en relación con la mitad e OD, o toda la PE en relación a todas las OD, la tiene también la AE respecto a la AD: luego la razón de los espacios recorridos es como el cuadrado de la razón de los tiempos: que es lo que había que demostrar.

De lo anterior se deduce que la misma razón de los espacios es el cuadrado de la razón de los máximos grados de velocidad [final], es decir, de la línea PE, OD, siendo PE a OD como EA es DA. Galileo (1636, p.236)

Galileo se vale de sus conocimientos geométricos y de las secciones cónicas para representar el movimiento por medio de segmentos que se discretizan con el fin de relacionar cantidades enteras. Esta representación es un acercamiento más al sistema de coordenadas cartesianas para relacionar las variables y desde allí analizar el comportamiento de dichas variables.

Si se observa en la historia se ha mostrado cómo Galileo sentó unas bases muy sólidas con lo aprendido por los otros grandes geómetras y matemáticos como lo afirmó en esta misma obra estudiada para esta reflexión, y posteriormente Newton como uno de los creadores del Cálculo infinitesimal se vale de los conceptos y propiedades construidas por Galileo para su teoría de la Gravitación donde los problemas de la caída de los cuerpos tiene una importancia vital.

Con base en los argumentos anteriores se hace necesario que los conocimientos matemáticos que se produzcan en el aula de clase lleve al estudiante a la exploración, manipulación, de lo que está en su entorno, y aunque ésto es bien sabido, en lo relacionado con el movimiento la riqueza cuadrática que se puede construir en estas situaciones. Es hacer de las aulas escolares espacios analógos a los laboratorios donde se esté validando conocimiento y que el ambiente creado por el maestro lleve a ingeniar alternativas de solución, análogos a los empleados por Galileo en sus experimentos de movimiento en un plano inclinado, en el momento en que surge la necesidad de medir el tiempo entonces buscar alternativas, y ésto demuestra que la necesidad en el sujeto está demandando de éste una "solución" y esto involucra en él un espíritu científico.

3.3 Isaac Newton

Este matemático y físico retoma los trabajos de Galileo para formalizar la teoría de la gravitación en los que su antecesor (Galileo) funda el campo de trabajo introduciendo conceptos que después Newton recoge y lo perfecciona gracias a los desarrollos matemáticos con los que se contaba para la época, entre ellos el hecho de contar con expresiones algebraicas, así como el conocimiento de la Geometría analítica y que posteriormente es uno de los fundadores del cálculo diferencial en el que el concepto de función esta intrínseco. En su obra *Principia* se observa también la riqueza de la expresión "cuadrado", por lo que es indudable su carácter funcional aunque no se hiciera explícito, pues esta obra es una muestra de quien concibe y formula expresiones cuadráticas y a la vez formula expresiones que son sometidas a un estudio en esta nueva rama de las matemáticas, por lo que cabe inferir como éstas no van por separado, y si durante la historia se les ha reconocido relación a la cuadratura con la función ésta se hace más tangible en la obra de Newton.

Situación planteada:

> Lema II: Si en cualquier figura AaEe, delimitada por las líneas rectas Aa, AE y la curva acE, se inscriben cualquier número de paralelogramos bB, Bc, Cd. Etc, comprendidos bajo bases iguales BE, EC, CD, etc... y lados Bb y Cc, Dd, etc paralelos al lado Da de la figura, y se completan los paralelogramos. aKbl, bLcm, cMdn, etc. Si la anchura de esos paralelogramos se supone que su número irá disminuyendo y su número aumentando infinitamente afirmo que las últimas razones que guardarán entre sí la figura inscrita AKbLcMdD, la figura circunscrita AalbmcndoE y la figura curva AabcdE son razones de igualdad). Newton (1687, p. 257).

Representación: Construcciones geométricas aplicando el álgebra que hasta el momento se había desarrollado, y hace un adelanto más para el desarrollo del cálculo, en el sentido de la integral.

Sin lugar a duda el movimiento es tan antiguo como la existencia misma, aunque con Aristóteles y posteriormente con De Oresme se observa un primer trabajo del movimiento hubo de esperar hasta el siglo XVII para un conocimiento físico - matemático más sólido del comportamiento de éste, pero este desarrollo no puede verse como algo lento, ya que la historia ha mostrado hasta este apartado como fue necesaria la construcción de algunos cimientos para ser concebida. Una reflexión importante es el continuo vínculo que existió entre las matemáicas y la física en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza. Newton en el prefacio de su Principia le da un reconocimiento, al proceso de modelización y lo lo asemeja a la mecánica en tanto el mecánico y la geometría en sí, el primero como el artífice y conocedor de las leyes que le rige a la mecánica en lo geométrico y el hecho de "funcionar" la mecánica no la así por si sola la geometría, si no en el conocimiento que tenga el artífice de ella.

Con base en los argumentos anteriores se hace necesario que los conocimientos matemáticos que se produzcan en el aula de clase lleven al estudiante a la exploración, manipulación, de lo que está en su entorno, y aunque esto es bien sabido, en lo relacionado con el movimiento la riqueza cuadrática que se puede construir en estas situaciones.

4. LAS FUNCIONES.

Muchas referencias a la historia de las matemáticas han establecido que el concepto de función como tal, es un concepto con unas raíces muy antiguas pero con una consolidación muy reciente en el campo formal de la Matemática, esto permite identificar procesos de variación en su constitución y formalización que dé cuenta de procesos inherentes al concepto mismo, permitiendo establecer la relaciones que aportaron a la consolidación del concepto de función cuadrática como objeto matemático a partir de su naturaleza y sus propiedades.

4.1 Newton

Representa la transición entre el estudio del movimiento y por lo tanto lo variacional, entre las ideas y representaciones intuitivas que se validan dentro del desarrollo algebraico.

Situación: Proposición XXX. Problema XXII. *"Descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada"* Newton (1687, p.345).

Este tipo de proposiciones es una muestra de la sinergia entre la geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, como objeto de estudio el movimiento, ya que la demostración de esta proposición ubica un plano cartesiano muy primitivo, que sólo consta de la intersección de dos rectas en ángulo recto pero donde cada eje está tomado como eje de referencia en tanto abcisa u ordenada, donde no está segmentado por cantidades numéricas, pero el tratamiento que se le hace es igual, traza curvas sobre él, y la proposición es clara en el sentido en que se dice *cualquier tiempo,* éste adopta una cualidad variable a la que corresponde un lugar geométrico que bien podría ser un punto en el espacio.

Concepto: Es un paso entre el concepto de función en tanto es posible hallar una relación para cualquier instante (variable) y un punto de la parábola (variable), y como fue visto anteriormente la parábola está dada por una ecuación de segundo grado.

4.2 Geometría Analítica

El análisis geométrico griego de Apolonio utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba Álgebra Geométrica. El Arte Analítica de Viete desarrolla el álgebra simbólica pero no usa coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, coordenadas y álgebra literal, Fermat y Descartes vislumbran la Geometría Analítica estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones definidas y su representación en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas, llamada la ecuación de la curva, expresión que al estar intrínsecamente vinculada a la curva, implícitamente resume sus propiedades geométricas, las cuales se ponen de manifiesto de forma palmaria mediante el cálculo álgebraico.

Del Rio (1996, p. 38) afirma que ni Descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas o de métodos analíticos, ni tampoco fueron los primeros en aplicar el álgebra a la geometría, la contribución independiente de cada uno reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Y agrega que *"Además si se añaden a esto los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir estrechamente la ecuación y la curva correspondiente, todo ello bastará para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica"*.

La geometría analítica hoy permite definir las ecuaciones del plano de la forma $P(\wedge y) = 0$, siendo P un polinomio de coeficientes reales y prueba las equivalencias entre las construcciones geométricas y las manipulaciones algebraicas, y las curvas son descritas mediante ecuaciones.

4.3 Descartes

El desarrollo de esta geometría fue esencial para la noción de función que se fue construyendo en esta misma época. Se acentúa el interés en la resolución geométrica de las ecuaciones álgebraicas con dos variables y como señala Del Rio (1996, 38) [Descartes] *"encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra"* por lo que ya tiene dos propiedades de la definición de función, la primera el considerar dos cantidades variables y la segunda una cierta relación de dependencia. Sin duda un aporte muy valioso de la Geometría analítica fue el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones.

Concepto: *"Descartes también rompió con la tradición al tratar las potencias como números y no como objetos geométricos. Ya no era un área si no un número surgido de la segunda potencia; su equivalente geométrico era la parábola; no el cuadrado".* Mankiewicz.(2001, p. 84) de esta manera *cuadrado* es concebido como una cantidad a diferencia de la tendencia mantenida al considerarla como un área al ser el resultado de una segunda potencia, por lo que se logra un desprendimiento al concebir x^2 no como un área si no como una cantidad.

Descartes citado por acerca de la parábola dice que *"no se puede construir con regla y compás, si no punto a punto y se debe por tanto, utilizar la ecuación para dibujar la curva exactamente"* Kline (1992, p. 414). La ecuación a la que hace referencia Descartes es la asignada por la curva, sea cual fuere. Esta afirmación dejaba a los descubridores del concepto de función una relación unívoca en el plano, es decir, que la función después que fue concebida como tal y como ahora habita en el desarrollo del análisis matemático y del cálculo, estudió las diferentes representaciones en el plano con base en las relaciones entre las variables.

4.4 Dirichelt:

Ofreció la definición de función más empleada ahora: *"y es una función de x cuando el valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y "* agregó que no importa si en todo este intervalo *y* depende de *x* de acuerdo a una ley ó más, si la dependencia puede expresarse por medio de una operación matemática". Kline (1992, p. 1252) Así como dice Cauchy (1821) citado por Kline (1992, p.1254)

> ... cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que esta entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable.

La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica.

Es decir, que las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano, al darle una generalidad por medio de su expresión analítica donde A, por ejemplo, deja de ser un punto como es usual nortarlos en la geometría griega pasa a ser el punto donde se relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad siendo *A* una pareja ordenada (x,y), una vez analizado este comportamiento de la curvas construidas por medio de una ecuación cuadrática se podía distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente fue llamada función cuadrática.

Con esta revisión histórica se observa que la modelación emerge como un elemento importante en el proceso de organización de fenómenos cada vez más vinculados a las matemáticas y menos a la cotidianidad. En este sentido, vale la pena anotar que con la representación algebraica de las funciones surgen nuevos niveles de comprensión y abstracción que posibilitan procesos de formalización. Desde esta perspectiva surge una noción de modelación como el proceso que posibilita la identificación y representación de relaciones entre cantidades variables y constantes.

4.5 Fermat

Fermat en sus investigaciones sobre las curvas partió del estudio de los geómetras griegos, sobre todo de Apolonio, con el fin de " *inaugurar un estudio general de los lugares geométricos que los griegos no habían llegado a hacer, logró plantear ecuaciones algebraicas y su correspondiente gráfico en un plano que no contaba con coordenadas negativas".* Afirma Kline (1992, p. 403) al respecto Collete (1986, p. 165) afirma que Fermat *"investiga la forma general de las ecuaciones de 1° y 2° grado, mediante transformaciones de coordenadas (traslado del origen y rotación de ejes) las reduce a sus formas canónicas simplificando así su tratamiento geométrico.*

Sin lugar a duda y como lo afirma Diudonné (1989), citado por Ruiz (años, p. 119) *"... el método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el siglo XVII; la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal'.* Puesto que el sistema de coordenadas relaciona dos variables en un conjunto numérico que posteriormente por algunas características especiales de estas relaciones construirían el concepto de función indispensable para el estudio del análisis matemático y el desarrollo del cálculo.

Es decir, que las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano, al darle una generalidad por medio de su expresión analítica donde *A* (por ejemplo) deja de ser un punto como es usual nortarlos en la geometría griega (Euclides y Apolonio) pasa a ser el punto donde se relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad siendo *A* una pareja ordenada (x,y), una vez analizado este comportamiento de la curvas construidas por medio de una ecuación cuadrática se podía distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente fue llamada función cuadrática.

4. IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

De acuerdo con los planteamientos de la perspectiva histórica y epistemológica en la investigación en la Educación matemática basados en la riqueza que el conocimiento histórico de un objeto matemático con una mirada epistemológica tiene en el que hacer didáctico, en este capítulo se reflexiona en la manera en que esta construcción histórica ofrece herramientas o elementos de análisis para el abordaje de dicho concepto como objeto de aprendizaje.

Con el fin de facilitar la lectura de estas implicaciones, se van a considerar de acuerdo con los momentos conceptuales que se identificaron en la construcción histórica y que son esenciales en las concepciones o nociones cuadráticas.

4.1 LAS ECUACIONES

En los elementos históricos de este primer momento, se identifican primeras manifestaciones de trabajo matemático en la cultura babilónica, estas estaban relacionadas primeramente en el orden de lo aritmético, pero su vinculación a la geometría permitía cierto grado de generalidad. De esta manera la vinculación entre geometría y aritmética hacía posible que las cantidades se estudiaran a partir de cierta generalidad aplicada para cualquier problema planteado generando un nuevo camino para el desarrollo de la geometría analítica a partir del estudio de las relaciones algebraicas.

El vínculo con la didáctica de las matemáticas radica en considerar la pertinencia entre la manera de abordar asuntos aritméticos, geométricos y algebraicos considerando aspectos esenciales en cuanto al manejo de la generalidad, de establecer relaciones entre las situaciones planteadas y cómo éstas permiten relacionar los aspectos esenciales para identificar una relación o noción cuadrática. Desde esta perspectiva surge una noción de modelación como el proceso que posibilita la identificación y representación de relaciones entre cantidades variables y contantes.

Un término clave en este concepto es el de variable y es importante como su definición se ha mantenido llamando variable a una cantidad que se considera, tiene que tomar sucesivamente muchos valores diferentes unos de otros. La relación de dependencia entre estas variables es fundamental además que las variables que intervienen son las que se pueden representar en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), además Euler que fue uno de los primeros en elaborar el cálculo diferencial e integral, no desde el método geométrico, si no en una teoría formal de funciones, de las que afirma que las funciones deben ser expresiones analíticas. Es decir que antes de la época de Euler el cálculo se referenciaba en la geometría. Por lo que los términos lineal, cuadrático, cúbico tuvo un significado a nivel gráfico particular según la expresión analítica.

Este trabajo permite inferir que si bien en la bibliografía investigada no se define formalmente la Función Cuadrática, se puede decir con los argumentos antes escritos que la historia da cuenta de que las situaciones cuadráticas después de ser estudiadas en el plano les fue asignada una generalidad por medio de su expresión analítica y al observar que algunas de ellas cumplían con la relación unívoca entre cantidades, fue nombrada como función cuadrática. Vale la pena anotar que obviamente fue construído el concepto epistemólogico de función sin hacer discriminación alguna por su grado, sin embargo las situaciones de carácter lineal son una referencia para la concepción de la cuadratura, en lo relacionado con la razón de cambio, como el acercamiento que mostró Galileo Galilei acerca del comportamiento de crecimiento de una situación cuadrática.

Precisar en la concepción de cuadrado es relevante al momento de trabajar con estas cantidades, ya que éstas fijan las "directrices" del trabajo por parte del estudiante. También este trabajo evidenció cómo las concepciones meramente geométricas obstaculizan el trabajo con la función cuadrática en cuanto no son considerados los números negativos y de esta manera el hecho de establecer relaciones en los diferentes conjuntos se ven sólo considerados los positivos, haciendo una relación restrictiva en un conjunto determinado y no en el producto RxR

Sobresalen los conceptos de cuadrado desde el punto geométrico, aritmético y algebraico,pero también estos coadyuvan para construir la noción cuadrática en el plano cartesiano a la luz de una expresión álgebraica de segundo grado.

En coherencia con lo expuesto, es posible afirmar que la función cuadrática como concepto se consolida una vez, el concepto de cuadrado es construido de manera significativa, y por otro lado el concepto de función significativamente construído permitirá acoger la cuadratura como una clase de comportamiento funcional, y tiene el agregado de que se cuenta con muchas situaciones cotidianas en las que se puede tomar referencia para ser modeladas, y lo mejor es que por ser de naturaleza tan cotidiana, le aporta más al estudiante para su vida como un ser competente.

SITUACIÓN DIDÁCTICA DE CAIDA LIBRE.

En el desarrollo histórico se pudo observar cómo en Galileo hubo cierta comprensión de la variación cuadrática. En la siguiente situación se pretende mostrar cómo la modelación de un fenómeno en el contexto de la física puede implementarse en el aula de clase realizando ciertos vínculos entre ambas asignaturas. Una versión de esta situación fue presentada en Villa (2008).

La situación ha sido pensada en tres fases, cada una de ellas diseñadas con el objetivo de seguir, *grosso modo,* las fases de un proceso de modelación según Bassanezi, R. (2002) y Villa (2007) que apunte al reconocimiento progresivo de las características de las razones de cambio que van a permitir la caracterización de la función.

La *primera fase* está diseñada de tal manera que los estudiantes se hagan una idea mental de la situación (momento 1. Captación cualitativa). Primero se les presenta el fenómeno de caída de un cuerpo y luego se les pide que describan las características del movimiento con lo cual deben procurar establecer y validar diferentes regularidades, de esta manera se espera que los estudiantes reconozcan las diversas cantidades que intervienen en la situación. (v.g. la altura del objeto, la velocidad con que cae, la aceleración, la resistencia del aire…) de igual forma se puede orientar a los estudiantes hacia el reconocimiento de relaciones de dependencia entre las cantidades. En este momento se pretende dejar en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar las relaciones matemáticas lo cual se hace evidente con la descripción cualitativa con diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

En la *segunda fase* se les plantea la experimentación con una guía directa de laboratorio con materiales especializados; para ello se les pedirá a los estudiantes que lleven un control de la situación mediante un cronómetro y regla graduada y que construyan una tabla de la situación. Con base en la tabla construida y en la trayectoria dejada por el objeto los estudiantes deben reflexionar y conjeturar sobre el problema; de igual manera se espera construir un gráfico cartesiano del comportamiento de las cantidades. Inicialmente los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de una tabla (momento 2. Cuantificación de la variación). Esto permitirá proponer algunas ideas que ayuden a los estudiantes a identificar esta característica de la razón de cambio en el momento de la intervención.

Una *tercera fase* incluye la simulación del fenómeno en el software *modellus,* con el cual se pretende que los estudiantes puedan interactuar mostrando simultáneamente las gráficas cartesianas de la posición, velocidad y aceleración. En este momento se espera la construcción de un modelo algebraico de las relaciones entre las magnitudes. (Momento 3. Construcción del modelo)

DESARROLLO DE LA SITUACIÓN

MOMENTO 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa] Se le estrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando se deja caer a cierta altura.

Se orienta el trabajo con el siguiente conjunto de preguntas:

- ¿Qué cantidades intervienen en la situación?
- ¿Cuáles de ellas son constantes y cuáles varían en las condiciones del problema?
- Presente un argumento del porqué el movimiento puede o no ser lineal.
- Realice una gráfica aproximada que represente la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el objeto.

MOMENTO 2. Cuantificación de la Variación. *[Captación numérica de la razón de Cambio]*

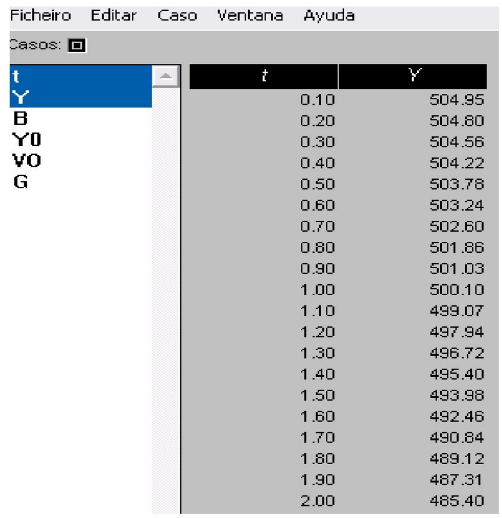
En este momento se le pide a los estudiantes que observen los valores mostrados por el software en la tabla No 1. Se les pide que:

Observen la tabla y describan la forma en como cambia la altura del objeto con respecto al tiempo.

- ¿Varía Linealmente? Justifique su respuesta.
- Copie los valores de la tabla y péguelos en un archivo de Excel.
- Calcule la *Razón de Cambio* de la altura del objeto con respecto al tiempo. ¿Observa alguna regularidad? Describa la forma en que *cambia* la *razón de Cambio,* y represéntela simbólicamente. (A esta razón de cambio se le llama velocidad).

TABLA 1.

GENERADA EN EL SOFTWARE MODELLUS



t	Y
0.10	504.95
0.20	504.80
0.30	504.56
0.40	504.22
0.50	503.78
0.60	503.24
0.70	502.60
0.80	501.86
0.90	501.03
1.00	500.10
1.10	499.07
1.20	497.94
1.30	496.72
1.40	495.40
1.50	493.98
1.60	492.46
1.70	490.84
1.80	489.12
1.90	487.31
2.00	485.40

- Calcule la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. (A este valor se le llama aceleración).

MOMENTO 3. Construcción del modelo.

En este momento se espera que el estudiante alcance a construir el modelo matemático de la situación determinando las gráficas cartesianas y las expresiones simbólicas.

- Construya en Excel una gráfica de la altura, velocidad y aceleración con respecto al tiempo.
- Compare los gráficos obtenidos con los presentados en el software *modellus.*

- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la velocidad y el tiempo.
- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la posición y el tiempo.

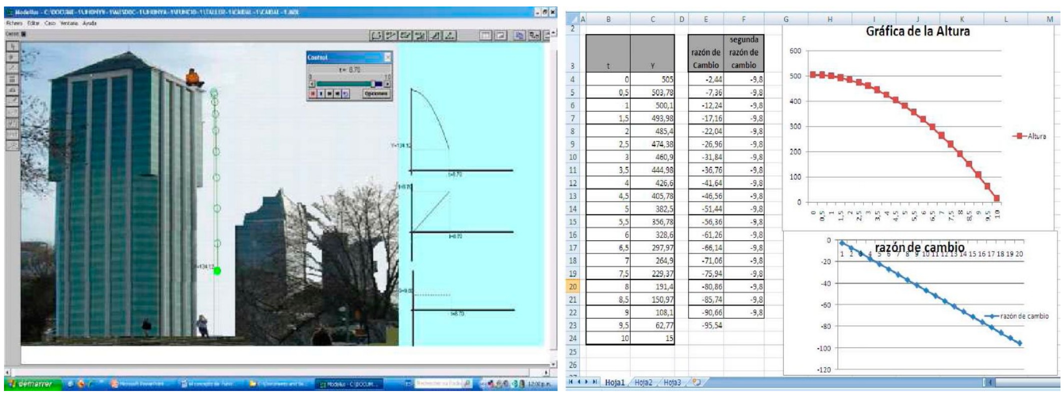


ILUSTRACIÓN 1. ANIMACIÓN EN EL SOFTWARE MODELLUS Y DE LA TABLAS Y GRÁFICAS CONSTRUIDAS EN EXCEL.

Finalmente, es posible considerar que para que en la escuela se pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función desde una perspectiva variacional se requieren tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio y la forma en cómo puede cambiar dicha razón.
- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- El reconocimiento de la variación lineal de la razón de cambio como elemento que identifica las funciones cuadráticas.

- La compresión de la función como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Si bien todo el proceso de Investigación Histórica es concluyente, es necesario realizar algunas precisiones finales en relación con el produco final de este trabajo. Al respecto, el planteamiento de la perspectiva Histórica y epistemológica de las matemáticas se confirma en la medida en que se ha podido reconocer que la construcción histórica de este concepto permite una mirada como un objeto matemático resultado de diferentes procesos que se interrealacionaron, esto implica de cómo el concepto de Función cuadrática no es posible verlo como un conocimiento impartido en un grado escolar en particular, en un momento de plan de estudio y de área específico, implica que es necesario reconocer a este concepto a partir de su génesis en los diferentes contextos en los que habitó y se desarrolló hasta constituirse en el objeto de aprendizaje actual, reconociendo fenómenos de variación que los involucran.

De manera particular, desarrollar este trabajo me permitió (me perdonan que cambie de estilo pero quiero hacerlo muy personal) ubicarme como educadora en una perspectiva diferente frente a la didáctica de las matemáticas, no puedo decir que mucho mejor, pero para mí mucho más significativa de lo que implica diseñar instrumentos o situaciones de aprendizaje de un objeto matemático. Estoy totalmente convencida, después de realizar este trabajo, de que nuestros estudiantes parten de nuestras creencias, y nuestras posturas, es eso lo que materializamos en nuestra actividad didáctica, por eso una mirada a la Historia permite una relación diferente con los objetos de nuestra actividad matemática en tanto éstos se evidencian como una construcción de tipo social, obedece a unas prácticas sociales que le dieron origen y allí se han transformado.

Tratando de leer esas construcciones permite identificar obstáculos de tipo epistemológico que dificultaron ciertos desarrollos, que son necesarios concebirlos para determinar y reflexionar en qué medida estos inciden en el aprendizaje de nuestros estudiantes.

Por lo tanto, a partir de esta experiencia es posible ratificar lo afirmado por Tzanakis y Arcavi quienes defienden el uso de la Historia para re-concebir la actividad matemática escolar, por la riqueza de elementos que dicha historia tiene tanto para la actividad investigativa en educación matemática en tanto genera nuevos espacios de discusión y planteamientos de la actividad, como para los docentes a la hora de abordar los conceptos matemáticos como objetos de aprendizaje.

6. BIBLIOGRAFÍA

Arostegui, J. (2001). *La investigación histórica* : teoría y método. Barcelona : Crítica.

Azcarate, C., y Deulofeu,J. (1996). *Funciones y sus gráficas.* Madrid: Síntesis.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* Sao Paulo: Contexto.

Boyer, C., (1969). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza editorial.

Collette, J P. (1986). *Historia de las Matemáticas II.* Medellín: Siglo XXI.

De la Torre, Andres (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes.* Medellín : Universidad de Antioquia.

Del Rio, J. (1996). *Lugares geométricos: Las Cónicas.* Madrid: Síntesis.

Descartes, R. (1637). *The geometry* Estados Unidos : Dover Publications.

Euclides (1999). *Elementos I- VI.* Planeta de Agostini: Madrid.

Galileo, G .(1638/2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias.* Traducción. Buenos Aires: Editorial Losada.

González, P. *Apolonio ¿262 a.C. -190 a.C?.* Extraído el 2 enero, 2007 de González.

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Hein, N., Biembengut, M (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (presidente), *Memorias del V festival internacional de matemática.* pp 1- 25 Puntarenas:Colegio universitario de Puntarenas.

Hernández, Víctor. La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿ y Apolonio?. Artículo de revista: Apuntes de Historia de las matematicas (on line). Vol 1. No. 1 2002

http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Kline, M. (1992) *El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros dias. I y II.* Madrid: Alianza editorial.

Lacasta, E; Pascual, J (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Madrid: Síntesis.

Losee, H (1989). *Filosofía de la ciencia e investigación histórica.* España : Alianza Editorial.

Luque, C; Mora, L; Torres, J (2003) Factorización Algebraica. En: *Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética.* Bogotá

Mankiewicz, R (2001). *Historia de las matemáticas.* Editorial Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Newton, I.(1687/1982) *Principios Matemáticos de la filosofía natural.* Traducción. Madrid: Editora Nacional.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico,* Jaén: Universidad de Jaén.

Salkind, N. (1999). Métodos de Investigación.

Sierpinska, A. (1992). Un undertanding the notion of funtion. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of funtion . Aspects of epistemology and pedagogy* (P. 25-58). USA: Mathematical Association of American.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen, *History in mathematics education: the ICMI study* (p. 201-240). Dordrecht: Kluwer.

7. ANEXOS

1. PUBLICACIONES PRODUCTO DE LA INVESTIGACIÓN

Mesa, Y. M., & Villa, J. A. (2007). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 21,* 1-18.

Mesa, Y. M., & Villa, J. A. (2008). Elementos Históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. En. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 21,* pp. 922-930. México: Colegio Méxicano de Matemática Educativa. Con acceso a través de. http: // www. clame. org. mx/ documentos/alme21.pdf

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2008). La importancia de Galileo en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En ; *Colóquio de história e tecnologia no ensino de matemática - HTEM, 4P.pp.* 1-8. Rio de Janeiro

2. PRESENTACIONES EN EVENTOS ACADÉMICOS.

De acuerdo con la metodología, fue necesario validar este proceso de investigación en la comunidad académica y científica para generar la autenticidad y validez de la investigación. Para esto se relacionan los eventos académicos nacionales e internacionales en los que se presentó ponencia derivada de este trabajo de grado.

HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS. THE HPM SATELLITE MEETING OF ICME.

Ponencia: Reflexión Histórica epistemológica y didáctica del concepto de Función Cuadrática.

Ciudad de México - 2008

Resultados finales de la investigación a partir del análisis histórico y su vínculo con la pedagogía y la didáctica de las matemáticas. Este evento es el más importante en esta área en el mundo y se realiza solo cada 4 años.

HPM 2008

The International Scientific Programme Committee of HPM 2008

Certifies

that: *Yadira Marcela Mesa*

has effectively participated in HPM 2008 and has given a communication entitled:

Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática.

Mexico City, July 18, 2008

Constantinos Tzanakis
Chair of the HPM
International Study Group

Ricardo Cantoral
Chair of the Local
Organizing Committee

14 -18 July
Mexico City

ICME

XXII REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA -RELME.

Ponencia: Implicaciones didácticas del desarrollo Histórico del concepto de función cuadrática: El caso de Galileo Galilei.

En esta ponencia se muestró el papel que jugó Galileo para la formalización del concepto dentro de las matemáticas que no había sido explícito y como esta formalización tiene consecuencias a nivel didáctico para la construcción significativa del concepto por parte del estudiante.

Ciudad de México - 2008

Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Otorga la presente

CONSTANCIA

a: YADIRA MARCELA MESA

Por haber presentado el Reporte de Investigación: IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DEL DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA: EL CASO DE GALILEO GALILEI, durante la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 22), celebrada del 1 al 4 de julio de 2008 en las instalaciones del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez S. Clame Presidente	Dr. Javier Lezama A. CICATA-IPN Legaria Comité Local	Dra. Gabriela Buendía Abalos Comisión de Reportes

XXI REUNION LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Ponencia: Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de Función cuadrática.

En ésta se mostró avances de investigación.

Universidad del Estado de Zulia. Maracaibo Venezuela - 2007


RELME XXI

XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Certificado de Ponente que se otorga a:

Yadira Marcela Mesa

Por la presentación de la Comunicación Breve titulada: ELEMENTOS HISTÓRICOS, EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Clame

22 al 26 de Julio de 2007, Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia. Maracaibo-Venezuela

Gustavo Martínez Sierra
Presidente del comité Latinoamericano de Matemática Educativa

XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME XXI

Hugo Parra S.
Coordinador General del Evento

XVI CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS

Conferencia: Reflexiones didácticas de la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

Se presenta como semiplenaria (50 minutos de exposición y 10 minutos de preguntas) en la que se muestra el vínculo de la historia del concepto objeto de estudio y su transposición didáctica. Hace parte del proyecto de investigación del mi trabajo de grado.

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Medellín - 2007

XVI CONGRESO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

PLAZA MAYOR - CENTRO DE CONVENCIONES - MEDELLÍN - 16 AL 19 DE JULIO DE 2007

Medellín, la más EDUCADA

La SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS

certifica que:

YADIRA MARCELA MESA

participó en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas realizado en Medellín del 16 al 19 de Julio de 2007 en calidad de:

Conferencista

Sergio Fajardo Valderrama
Presidente Honorario del XIV
Congreso Nacional de Matemáticas

Carlos Montenegro Escobar
Presidente de la Sociedad
Colombiana de Matemáticas

Medellín, 19 de Julio 2007

VIII ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ponencia: La modelación y la construcción histórica del concepto de función cuadrática.

Reporte de investigación en el que se evidencia el proceso de Modelación matemática presente en esta construcción como excusa para ser abordada en el aula en el momento de diseñar situaciones de aprendizaje de este concepto.

Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) - Universidad del Valle.

Cali - 2007