

***GEOGEBRA COMO
SOPORTE EN EL
PROCESO DE
CONSTRUCCIÓN DEL
CONCEPTO DE
ÁNGULO***

***“Un análisis desde el
modelo de van Hiele”***

Universidad de Antioquia

***Ingrid Ivonne Acevedo Gutiérrez
Gabriel Jaime Londoño Yepes
Nadia Vanessa Ramírez Gutiérrez***

***Asesor
Mg. Jhony Alexander Villa Ochoa***



2008

**GEOGEBRA COMO SOPORTE EN EL PROCESO DE
CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO
“Un análisis desde el modelo de van Hiele”**

**INGRID IVONNE ACEVEDO GUTIÉRREZ
GABRIEL JAIME LONDOÑO YEPES
NADIA VANESSA RAMÍREZ GUTIÉRREZ**

ASESOR:

Mg. JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO
EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS
ARTES**

MEDELLÍN

2008

AGRADECIMIENTOS

Dios hizo la piedra...

El hombre hace la joya...

Agradecemos amorosamente a nuestros padres y hermanos quienes con su paciencia, amor y apoyo constante estuvieron presentes día a día en el desarrollo de nuestra licenciatura.

Agradecemos a la Institución Educativa Javiera Londoño Sevilla-Sede Sofía Ospina de Navarro, por permitirnos realizar la práctica docente que desde luego posibilitó la ejecución del proyecto de investigación, facilitando así los recursos humanos y logísticos necesarios para una adecuada intervención. De manera muy cariñosa y especial agradecemos al grupo de estudiantes que permitieron que este proyecto diera sus inicios y finalizará de manera adecuada para permear el conocimiento matemático en el ámbito escolar; ya que, ser parte de un grupo de estudio es abrir una puerta para acceder al conocimiento.

Agradecemos muy especialmente a nuestro asesor Jhony Alexander Villa Ochoa por su acompañamiento incondicional en la planeación, elaboración y ejecución del proyecto de investigación y demás profesores que de una u otra manera influyeron en nuestros pensamientos e ideas que permitieron reestructurar nuestro conocimiento hacia la enseñanza de las matemáticas.

¡Quien escribe en la mente de un niño, escribe para siempre!

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN	5
1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	7
1.1 REVISIÓN DE LA LITERATURA	7
1.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	13
1.3. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN	14
1.4. OBJETIVOS	15
1.4.1. <i>OBJETIVO GENERAL</i>	15
1.4.2. <i>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</i>	15
2. REFERENTES CONCEPTUALES	16
2.1 LAS TICS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS	16
2.2 EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE	22
NIVEL 1: RECONOCIMIENTO VISUAL	25
NIVEL 2. ANÁLISIS	25
NIVEL 3: CLASIFICACIÓN	25
NIVEL 4: DEDUCCCIÓN FORMAL	26
NIVEL 5: RIGOR MATEMÁTICO	26
Fase 1 Indagación	27
Fase 2 Orientación dirigida	28
Fase 3 Explicitación	28
Fase 4 Orientación libre	28
Fase 5 Integración	28
2.3. EL PENSAMIENTO ESPACIAL	30
3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	33
3.1. POBLACIÓN	33
3.2. “ESTUDIOS DE CASO MIXTO” COMO MÉTODO DE INVESTIGACIÓN	34
3.3. ELEMENTOS DEL DISEÑO	39
3.4. INTERVENCIÓN DIDÁCTICA	42
4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES	103
4.1 RESULTADOS	103
4.2. CONCLUSIONES	105
4.3 RECOMENDACIONES	106
5. BIBLIOGRAFÍA	108
ANEXOS	111

PRESENTACIÓN

Las nuevas tecnologías han brindado la posibilidad de estructurar y elaborar procesos que dinamizan el conocimiento, en este caso particular el conocimiento matemático, por esta razón, procesos como la visualización, la argumentación y el razonamiento que son propias del pensamiento espacial y los sistemas geométricos se han facilitado gracias a la implementación de software de geometría dinámica.

Entre los modelos educativos de mayor aceptación para describir el razonamiento geométrico se tiene el modelo de van Hiele; dicho modelo ha tenido gran aceptación a nivel internacional y ha sido extendido al análisis matemático y otras áreas en las cuales la visualización juega un papel importante. El modelo de van Hiele está compuesto de tres elementos que son: los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y la percepción insight, de los cuales el proyecto de investigación retoma los dos primeros.

Los niveles de razonamiento encauzan la atención en la construcción de un concepto determinado presentando algunas características y propiciando la creación de “*indicadores de nivel*” permitiendo identificar el proceso educativo a nivel geométrico del estudiantado. Aunque el modelo de van Hiele determina cinco niveles de razonamiento, en este trabajo de investigación se hace énfasis en los dos primeros niveles, dado que con el diagnóstico realizado a los estudiantes objeto de estudio se concluyó que éstos se encuentran en el nivel de razonamiento 1 (“visualización”), para luego pasar por cada una de las fases de aprendizaje planteadas a través de una serie de actividades realizadas por los estudiantes y así avanzar a un nivel superior de razonamiento, proceso que permite llegar al nivel de razonamiento 2 (“análisis”).

Diferentes estrategias didácticas para la construcción de un concepto son diseñadas por diferentes investigadores bajo los planteamientos y criterios que establecen los comandos en un software, permitiendo establecer e indagar el papel que tienen los instrumentos computacionales de las nuevas tecnologías en el ámbito escolar. Es así como el software Geogebra se utiliza, en esta investigación, como soporte educativo en la comprensión del concepto de ángulo y de sus propiedades, evidenciando los avances que estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria presentan en sus niveles iniciales de razonamiento según el modelo de van Hiele. El concepto de ángulo, su clasificación y sus propiedades se construyeron a partir de actividades didácticas desde la mirada de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele; éste tránsito por las fases permite la transición de un nivel de razonamiento al siguiente.

En este proyecto se hace referencia a los documentos elaborados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), e investigaciones realizadas por diferentes teóricos sobre el tema “Geometría Dinámica” como: Colette Laborde, Luís Moreno Armella, Alexander Jiménez Guzmán, Ana Cecilia Castiblanco Paiba, Henry Urquina Llanos, Leonor Camargo Uribe, Martin E. Acosta Gempeler entre otros; además describe el modelo de razonamiento de van Hiele y sus elementos; incluso se presenta la metodología utilizada desarrollada a partir de un conjunto de actividades pertenecientes a momentos respectivos, y se exponen conclusiones obtenidas a partir de la puesta en escena de las situaciones.



Imagen N°1. Sala de Sistemas

1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Introducción

En este capítulo se presentan los elementos que dieron génesis al presente proyecto de investigación. Dentro de estos elementos están las ideas desarrolladas por algunos autores, refiriéndose a las TIC's (Tecnologías de la Información y la Comunicación) y su aplicabilidad en la enseñanza de las matemáticas, particularmente a la rama de la geometría.

De otro modo, se da a conocer el problema de investigación que surge como una necesidad en el contexto de una Institución educativa, con el fin de mejorar los procesos de aprendizaje que tienen los estudiantes al momento de enfrentarse al concepto de ángulo.

Con base en lo anterior, se hizo necesario realizar una revisión de la literatura en la cual presentamos los resultados de una pesquisa con el fin de documentar nuestro proyecto de investigación y establecer el problema del mismo.

1.1 REVISIÓN DE LA LITERATURA

El auge de las TIC's en los últimos tiempos, ha tenido gran influencia en el ambiente escolar especialmente para el área de la tecnología computacional; la cual, desarrolla notablemente programas que influyen en las diferentes áreas del conocimiento. Éstas han tenido sus inicios en Colombia desde la Política Nacional de Ciencia y Tecnología (PNCyT) (Departamento Nacional de Planeación (DNP). 2000), la cual planteó adelantar la capacidad de utilizar las TIC's en la educación.

A partir de ahí se propuso, entre otras acciones, el desarrollo de una capacidad en el campo de la tecnología computacional introduciendo el uso intensivo de éstas en el sistema escolar, promoviendo el desarrollo de software con fines educativos (DNP. 2000, p. 6).

Algunas investigaciones han propiciado a las TIC's la introducción en el campo de la educación desde una perspectiva pedagógica. Una de ellas es la presentada por Laborde, C. (2003, p. 3) en la conferencia plenaria “Buscar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la noción de variación con geometría dinámica”, analiza que “los objetos matemáticos son esencialmente objetos variables” y “la geometría dinámica puede ser utilizada para hacer que los estudiantes caigan en cuenta de la importancia de la variación en matemáticas”. Dicha autora da a conocer:

El interés de trabajar con programas de geometría dinámica radica precisamente en el hecho de que los dibujos son dinámicos; el dibujo no solo representa un caso particular que ocupa una posición sobre la pantalla sino que, debido a la posibilidad de variar su posición, se pueden obtener distintos casos representativos del objeto geométrico. (Laborde, C. 2003, p. 4)

La investigación anteriormente mencionada nos permite evidenciar las siguientes conclusiones:

- Con los software de geometría dinámica se pueden proponer actividades imposibles de realizar con lápiz y papel (i.e. construcción de objetos dinámicos con comportamientos predeterminados).
- Con software de geometría dinámica se puede pedir la reproducción de dibujos dinámicos.
- La nueva tecnología crea curiosidad intelectual.
- Cabri Géomètre se constituyó en una ventana sobre las concepciones de los alumnos al permitir la exteriorización de su pensamiento.

De igual manera Moreno, L. (2002, a y b) viene desarrollando investigaciones a cerca de la utilización de las Tic's en la clase de matemáticas, entre sus publicaciones acerca del tema se reconocen: “Evolución y tecnología”; “Instrumento matemáticos computacionales”; “Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización” e “Ideas geométricas del currículum presentadas mediante Cabri Géomètre”. En “Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización”, plantea que los procesos de visualización en los estudiantes por medio de los entornos computacionales ayudan a experimentar las relaciones entre los códigos simbólicos y fenómenos visuales, incluso la identificación de características y el reconocimiento de figuras geométricas.

Por otro lado, Jiménez, A. (2005) presenta la investigación “Incorporación de tecnologías al aula de matemáticas”, donde propone un cambio actitudinal respecto al manejo de las computadoras en estudiantes; e incluso, el papel que cumple el estudiante frente al aprendizaje con la utilización de las TIC's. Adicionalmente, plantea cómo las TIC's pueden ser utilizadas por los educadores a la hora de desarrollar sus planes de estudio y en el momento de preparación y ejecución de sus clases de una manera dinámica y atrayente para el estudiante. Uno de los objetivos principales de esta investigación radica en explicar cómo con la implementación de las TIC's en las aulas de clase surgen cambios en las unidades didácticas, en la metodología, la evaluación, y en el quehacer de los maestros de matemáticas; con lo cual se concluye que los educadores adquieren una mejor competencia tecnológica y las instituciones desarrollan experiencias positivas en el uso de las TIC's en el área de las matemáticas.

Martín R. (2005) en “Las nuevas tecnologías en educación”, realiza sus aportes a las investigaciones sobre las TIC's, dando a conocer la utilización de las herramientas computacionales para el caso de software educativos, propiciando la

transferencia bidireccional de conocimientos¹, para tal caso, es Internet, la herramienta de la tecnología computacional que sirve como mediadora entre saberes, ideas y experiencias en donde se permite una comunicación virtual con el mundo real.

Con base en las investigaciones anteriores, se sustentan la aplicabilidad de la tecnología computacional en el contexto escolar; así dándoles una utilización propenderán por la adecuada construcción de conceptos en estudiantes de Educación Básica Primaria. Particularmente, se pretende centrar la atención en los efectos didácticos que el software geogebra tiene en el desarrollo del pensamiento geométrico según las fases iniciales del modelo de van Hiele.

Es así como a través de la historia la tecnología computacional muestra que su génesis estuvo enmarcada en la aplicación y manejo de material bélico; para luego pasar al intercambio de información entre científicos e investigadores, aplicabilidad que luego dará paso al intercambio de información (ideas, saberes, trabajos, proyectos, ventas, etc.) e incluso transmisión de software entre individuos de diferentes culturas y poblaciones.

La evolución de la tecnología computacional, ha proporcionado nuevas herramientas para el desarrollo de conceptos de las ciencias y las artes, en favor del conocimiento de los estudiantes; para lo cual, se posibilita el afianzamiento, la aproximación cognitiva y dinámica de los conceptos, conceptos que ligados a los saberes, están determinados por los diferentes contextos que circundan al individuo.

La tecnología computacional ha propiciado el intercambio de software entre sujetos, en la cual se dan a conocer programas computacionales que de una u

¹**Transferencia bidireccional de conocimientos:** Es la transferencia de todo aquello que hace parte del conocimiento entre ellos los saberes, las experiencias, actitudes, aptitudes, del maestro hacia el estudiante y de estudiante hacia el maestro.

otra forma afectan el desarrollo cognitivo de las personas. Por otra parte, propicia ambientes que promueven actitudes de investigación y exploración; facilitando, la aplicabilidad de las matemáticas en la transferencia de significados, explicación o ilustración de fenómenos y el vaticinio de resultados; logrando así, que la utilización de la tecnología computacional despliegue diferentes perspectivas de un problema sin que éste pierda sus características intrínsecas.

Existen gran variedad de software que son utilizados en diferentes contextos y en diferentes áreas del saber (la estadística, las finanzas, diseños gráficos, la medicina, etc.), incluso algunos software son utilizados y analizados en contextos escolares; éstos software reciben el nombre de “software educativos”.

En la revista de Educación y Tecnología (2005) los software educativos son considerados como:

[...] Recursos, programas y entornos creados con cualquier programa informático que tenga una influencia explícita en el aprendizaje, sea como instrumento de enseñanza (al crear material educativo o al ayudar a manipularlo) o como una forma de construcción de conocimiento (como al desarrollar procesos de información o de trabajo en equipo).

Algunos de estos software educativos son: Derive, Cabri II, Cabri Plus, Cabri 3D, CabriWe, Cinderella, Geup, Regla y Compás, Excl, DrGeo, WinGeo, Minos 2.2, WinPlot, Graphmatica, Rotate, WinStats, Poly, Fractint, Tesellmania, Kali, DP Graph, Polyhedron, Geometría, PoyRay, Moray, Clic, JClic y GnuWin entre otros. Algunos de ellos son de licencia demo gratuita y otros de licencia comercial.

Los software anteriormente mencionados, permiten la comprensión de conceptos para el área de las matemáticas, en especial para el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Respecto a las tecnologías computacionales aplicadas al Pensamiento Espacial, los Software de geometría dinámica tienen como principio el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas y las propiedades que presentan; e incluso, aporta a las metodologías de los docentes estrategias educativas, las cuales, son base para el logro de los Estándares Básicos de calidad planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para el grado cuarto; como lo son: *comparar y clasificar objetos tridimensionales básicos de acuerdo con sus componentes (caras y lados) y propiedades; comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características; identificar el ángulo como giros, aberturas, inclinaciones en situaciones estáticas y dinámicas; utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales; identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras; construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas; hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños; construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.*

El Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos es considerado según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN.1998):

Como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos en el espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones mentales [...], y los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. (p.56)

Así pues, el pensamiento geométrico se construye como una disciplina resultado de la necesidad del hombre de relacionarse con el mundo que lo rodea y de manipularlo de diferentes maneras, captándolo y apropiándose de él a través de

diferentes estrategias didácticas como en el caso de la utilización de software de Geometría Dinámica “Geogebra”.

1.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los conceptos abordados en el aula de clase, en especial para el área de las matemáticas, siempre han tendido a crear expectativa en educadores e investigadores de la educación respecto a la forma cómo pueden ser enseñados, arrojando creaciones y resultados que, de una u otra manera, afectan la educación de los estudiantes.

Múltiples estrategias y ayudas didácticas han predeterminado innovaciones para el campo de la educación; una de ellas es la utilización de las TIC’s (Tecnologías de la Información y la Comunicación), las cuales permiten la utilización de recursos para apoyar los trabajos y actividades docentes en el aula de clase.

Las TIC’s han tenido sus inicios desde la Política Nacional de Ciencia y Tecnología, las cuales han surgido fuertemente apoyadas por múltiples investigaciones como las de Laborde, C. (2003), Moreno L. (2002) y Jiménez A. (2005) entre otros, los cuales sustentan la aplicabilidad de las TIC’s en el entorno escolar, y de lo cual, dándoles una correcta utilización propenderán para el caso de este proyecto por la adecuada asimilación del concepto de ángulo y sus propiedades en estudiantes de cuarto grado de la Educación Básica Primaria.

Dado que los conceptos geométricos en los estudiantes son construidos paulatinamente, es posible considerar que las herramientas tecnológicas profundizan los conceptos en este caso el de ángulo y sus propiedades; además se ha observado que aunque las instituciones tienen poca o mucha dotación

tecnológica, su utilización requiere de información y apropiación. Para lo cual, se pretende utilizar o aprovechar el auge tecnológico junto con la motivación que despiertan en los estudiantes las TIC's para lograr un proceso adecuado de asimilación de conceptos geométricos.

Por lo tanto nuestro problema de investigación pretende dar cuenta de *“el papel que cumple el software Geogebra en la comprensión del concepto de ángulo y sus propiedades, y en los avances que estudiantes de cuarto grado de educación Básica Primaria presentan en sus niveles iniciales de razonamiento según el modelo de van Hiele”*.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Adicionalmente se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué ventajas tiene el software Geogebra en la comprensión del concepto de ángulo y el avance en los niveles iniciales según el modelo de van Hiele?

1.3. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La aplicación del software Geogebra promueve la comprensión del concepto de ángulo permitiendo así la transición en los niveles iniciales de razonamiento según el modelo de van Hiele.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Posibilitar en los estudiantes un avance en la comprensión del concepto de ángulo y sus propiedades utilizando como soporte el software Geogebra, buscando con ello la transición en los niveles iniciales de razonamiento del modelo de van Hiele.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las nociones que han alcanzado a desarrollar los estudiantes de grado cuarto, frente al concepto de ángulo.
- Construir y validar una propuesta que involucre las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele relativas al concepto de ángulo de sus propiedades, en la transición del nivel 1 al 2.

2. REFERENTES CONCEPTUALES

El capítulo dos hace una recopilación de los aspectos teóricos, que fundamentan y le dan estructura al presente proyecto de investigación. Se retoman diferentes fuentes y perspectivas teóricas, que posibilitan la elaboración de otros documentos e ideas, es decir, a partir del sustento teórico y su análisis surgen ideas que fortalecen y complementan las afirmaciones expuestas por los teóricos, además su interpretación permite desarrollar actividades y conclusiones que determinan el grado de pertinencia y la validez de este proyecto de investigación.

Entre los diferentes aspectos, se tiene en cuenta los planteamientos sobre los software de geometría dinámica y sus aportes a la educación matemática, el modelo de razonamiento de van Hiele y análisis de los diferentes documentos rectores del Ministerio de Educación Nacional para el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

2.1 LAS TICS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

En este apartado se desarrollan algunas ideas básicas sobre el uso de la tecnología en el área de matemáticas expuestas por diferentes investigadores, estableciendo cómo han cambiado paulatinamente la concepción sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y su aplicabilidad.

Según Laborde, C. (2003) los computadores se han convertido en una herramienta tecnológica de uso cotidiano para el matemático y el estudiante en la medida que permiten pensar y modelar, porque al presentarse una situación, quien la desarrolla debe estar en la capacidad para representar mentalmente las relaciones que se puedan presentar, permitiendo comprender la situación, buscar

y encontrar estrategias para interpretar y obtener información del objeto o situación.

Moreno, L. (2002, a. p. 82) al referirse al papel de las herramientas informáticas en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas, menciona las posiciones divergentes que se observan en las concepciones que hay sobre la cognición y las matemáticas. Al respecto plantea que: “Hay una tendencia que supone que las matemáticas son resultado de un intelecto puro, sin relación con alguna forma de tecnología”; analizando este problema desde diferentes perspectivas. La primera perspectiva se refiere a *la ejecutabilidad de las representaciones computacionales*, la segunda perspectiva trata aspectos centrales de la *mediación instrumental*, y en tercera y última perspectiva se refiere a las *herramientas computacionales*.

- ***La ejecutabilidad***

Se refiere a que una representación se puede procesar y manipular cuando está en el lenguaje computacional; por ejemplo la ejecutabilidad en una calculadora se produce cuando se introduce un comando y éste queda bajo el control interno del sistema, que como resultado efectúa una acción interna que da cuenta de un comando insertado, proceso que lleva el nombre de “*acto cognitivo exteriorizado*” ya que no se realiza en la mente humana. Es así como un instrumento ejecuta acciones, provee relaciones y proporciona resultados gracias a las características intrínsecas que posee para un fin determinado.

- ***La mediación instrumental***

Continuando con lo anterior, Moreno, L. (2002. a) establece que la mediación instrumental está fundamentada en el siguiente principio: “Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico”. En esta medida el computador y los diferentes software entendidos como instrumentos posibilitan

al estudiante el acceso a la información por consiguiente la adquisición de conceptos.

La medición instrumental comienza desde el momento en que se puede re-definir los objetos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables; de modo que al usar una computadora, además, de la misma disposición de un espacio de representación extrema, se tiene posibilidad de procesar esa información de cierta manera debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la máquina.

- ***Las herramientas computacionales***

Con respecto a esta perspectiva Moreno, L. (2002, a. p.82.) citando a Balacheff y Kapput (1996) plantea que estos autores han señalado que el mayor impacto es de carácter epistemológico afirmando que: “[...] las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen en pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material”.

Bajo estos planteamientos quien está en contacto con estos objetos, al manipularlos descubre propiedades y adapta las herramientas a sí mismo; para el caso de la geometría al construir una figura en un software de geometría dinámica ocurre que las reglas y las propiedades se van conservando.

Continuando con sus planteamientos; Moreno L. (2002, a.) establece que:

Los objetos sobre la pantalla son producidos y controlados desde el universo interno de la herramienta computacional, en términos informales, podemos decir que el universo interno equivale a la matemática instalada en el

procesador central de la calculadora, podemos afirmar que estos objetos sobre la pantalla son modelos manipulables de objetos matemáticos. (p.82)

Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la exploración y sistematicidad ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación. Además, la exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del ambiente. Los sistemas de representación permiten instalar aspectos de nuestro pensamiento en un medio estable y ejecutable en el caso de las computadoras.

Particularizando la enseñanza y el aprendizaje a la geometría el MEN (2004) propone que los software de geometría dinámica se consideran más que simples editores gráficos, estos han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación; dado que su componente fundamental son las figuras geométricas y sus relaciones, y a partir de las cuales se tiene la posibilidad de hacer diferentes conjeturas apoyados en su invariabilidad.

Al respecto Perry, Camargo, Samper & Rojas, (2006) se refieren a la geometría dinámica, bajo los planteamientos de Laborde (1998) quien afirma que:

La geometría dinámica es un universo virtual que provee un mundo “real” del campo teórico de la geometría euclidiana en la cual es posible manipular, en el sentido físico, las representaciones de los objetos geométricos, en la pantalla de un computador o calculadora, mediante figuras que mantienen intactas las relaciones geométrica utilizadas en su construcción, así como las implicadas por éstas. (p.67)

Un software de Geometría Dinámica permite que una figura conserve las relaciones geométricas declaradas en su construcción y las propiedades implícitas que éstas puedan tener dotando a las figuras de dinamismo, por consiguiente de

temporalidad y movimiento, confirmando la idea de que sus propiedades deben conservarse ante las posibles posiciones que la figura tome en la pantalla; conduciendo a consolidar un conocimiento matemático en construcción, es decir, con la manipulación de este tipo de programa los estudiantes podrán adquirir habilidades mentales que le darán acceso paulatinamente a la geometría formal.

El MEN (2004, p. 6) plantea dos principios fundamentales para trabajar con Geometría dinámica estos son:

Dudar de lo que se ve, significa no tomar por verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre; y ***ver más de lo que se vé***, significa estudiar una figura para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista, es decir, enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación.

Como se menciona en la literatura, a través del arrastre se distingue entre el dibujo, un objeto que tiene características requeridas y la figura, una representación caracterizada por las propiedades geométricas de cada una de sus partes, que permanecen invariantes desplegando las relaciones que subyacen de estas.

Los principios de la geometría dinámica favorecen directamente la articulación e integración de los procesos visualización y justificación; por medio de los cuales los estudiantes obtienen conclusiones o un discurso informal a partir de los objetos bi o tridimensionales, las relaciones y transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones en la pantalla del medio tecnológico; avanzando progresiva y significativamente a la geometría deductiva.

Sustentando lo anterior en el MEN (2004) expone que:

Los procesos de visualización y elaboración de discursos pueden favorecer una alternativa razonable consiste en comprender las relaciones y mutuas influencias entre los procesos de visualización y los procesos de organización discursiva de hechos geométricos para estrechar sus lazos, de manera que puedan superarse los obstáculos que representan tales relaciones y se logre un aprendizaje significativo. El trabajo complementario entre los procesos de visualización y la elaboración de discursos puede favorecer el pensamiento deductivo, pues se evidencia las relaciones de equivalencia o de inferencia entre distintos enunciados y así la deducción adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación. Es allí donde el trabajo en geometría dinámica cobra gran significación. (p.25, 26)

Y agrega que:

El potencial didáctico de la geometría dinámica va más allá de su poder ilustrativo, se trata de problematizar la visualización, hacerla operativa, de manera que surja de manera natural la necesidad de explorar, conjeturar, predecir, verificar. La elaboración de proposiciones geométricas adquieren sentido para los alumnos al responder ya sea necesidad explicitita de los fenómenos observados. (p. 26)

Finalmente el MEN (2004, p.27).haciendo alusión a la Geometría Dinámica concluye: “Los dibujos dinámicos ofrecen fenómenos visuales más fuertes que los dibujos estáticos. Una propiedad especial puede surgir como invariante en el movimiento, lo cual puede ser imposible de percibir en un dibujo estático.”

2.2 EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

En las últimas décadas ha existido una preocupación en reflexionar sobre la forma cómo se enseñan y se aprenden las matemáticas. En este sentido, existen diversos modelos que se aproximan a dicha realidad. En el caso particular del razonamiento geométrico existe el llamado “*modelo educativo de van Hiele*” que ha sido ampliamente estudiado y validado por diversas investigaciones e incluso ha sido explorado en áreas de las matemáticas fuera del campo geométrico.

Jurado, F. & Londoño, R. (2005) confirmando lo propuesto en los Lineamientos Curriculares afirman que:

El modelo van Hiele es una propuesta que parece describir con bastante exactitud la evolución desde las formas intuitivas iniciales, hasta las formas deductivas finales y está adquiriendo mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a la geometría escolar. (p.2)

Estos fundamentos, llevan a formular la importancia que tienen en el momento de elaborar proyectos para ser desarrollados en un contexto, gracias a su carácter descriptivo y secuencial.

Descripción del modelo

Desde los planteamientos Jurado, F. & Londoño, R. (2005, p.7) el modelo de van Hiele está compuesto por tres elementos principales estos son: *Los niveles de van Hiele*, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles; *Las fases de Aprendizaje*, son los procesos que conducen desde un nivel de razonamiento al siguiente y *la Percepción Insight*.

Según Jurado F. & Londoño R. (2005, p.7) tal como se utiliza actualmente, el modelo educativo van Hiele, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
3. El proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior de los estudiantes no será comprendida.
4. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz.

Los niveles de razonamiento

Estos son entendidos como el componente descriptivo, dado que identifica una secuencia de tipos de razonamiento, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de un individuo.

De la Torre (2003, p.10) cita a Hoffer (1983) quien presenta los niveles de van Hiele en los siguientes términos:

Nivel 0: Los objetos son los elementos básicos del estudio.

Nivel 1: Los objetos son propiedades que analizan los elementos básicos.

Nivel 2: Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.

Nivel 3: Los objetos son ordenaciones parciales de los enunciados.

Nivel 4: Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

Por su parte Jurado, F. & Londoño, R. (2005, p.8) sigue la nomenclatura de Llorens, J. & Pérez Carreras, P. (1997):

Nivel 0. Predescriptivo.

Nivel 1: De reconocimiento visual.

Nivel 2: De análisis.

Nivel 3: De clasificación, de relación.

Nivel 4: De deducción formal.

El MEN (1998, p. 56-61) establece:

Nivel 1: Reconocimiento Visual.

Nivel 2: De análisis.

Nivel 3: Clasificación.

Nivel 4: Deducción Formal.

Nivel 5: Rigor matemático.

Este proyecto de investigación asumirá la nomenclatura trabajada por el MEN (1998, p.56-61), dado que es un documento rector que orienta la educación matemática en Colombia y cuya adquisición es asequible para los educadores. En relación a la descripción de cada nomenclatura se retomarán diferentes ideas presentadas por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Jurado, F. & Londoño, R. (2005) y De la Torre (2003) dado que la verdadera importancia de los niveles radica en su descripción y características.

NIVEL 1: RECONOCIMIENTO VISUAL

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

Los estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

Aprenden el empleo de cierto vocabulario para identificar algunas figuras.

Perciben las figuras como objetos individuales, es decir, que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura u otras de su misma clase.

NIVEL 2. ANÁLISIS

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

Se limitan a describir el aspecto físico de las figuras: los reconocimientos, diferenciaciones, o clasificaciones de las figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

No reconocen explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

NIVEL 3: CLASIFICACIÓN

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

Los estudiantes se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de propiedades matemáticas, pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.

Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, además de deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

No relacionan unas propiedades con otras, por lo que no hacen clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

No son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.

NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

Este nivel comienza con la capacidad de razonamiento formal de los estudiantes, reconocen propiedades que se deducen unas de otras. Sus razonamientos se siguen apoyando de la presencia de objetos.

Los estudiantes pueden describir una figura, a partir de ellas dar definiciones matemáticamente correctas, además comprenden el papel de las definiciones.

Pueden entender una demostración desarrollada, pero no son capaces de construirla por sí mismos.

Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 5: RIGOR MATEMÁTICO

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

Los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.

Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos.

Además logran aceptar la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas, la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.

LAS FASES DE APRENDIZAJE

Las fases de aprendizaje son el componente didáctico del modelo, son una serie de pasos a seguir donde al final de ellas el estudiante habrá adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Según Jaramillo, C. & Esteban, P. (2006)

Las fases de aprendizaje le permiten al profesor diseñar actividades para que el alumno progrese desde un nivel de pensamiento al siguiente. Las actividades para cada una de las fases deben estar organizadas en módulos de instrucción, con apoyo de material tangible cuando este se necesario.
(p.116)

Las cinco fases son las siguientes expuestas en De la Torre (2003, p.12) son las siguientes:

Fase 1 Indagación

El maestro sostiene un diálogo con los alumnos acerca de los objetos de estudio, que le permite conocer las interpretaciones que los alumnos les dan a las palabras. Los alumnos por su parte entran en contacto con el vocabulario y con los

objetos de la materia que se van a estudiar mediante el intercambio de preguntas y observaciones.

Fase 2 Orientación dirigida

El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos pueden tomar conciencia de los objetivos que se persiguen y se familiarizan con las estructuras características.

Fase 3 Explicitación

Los estudiantes refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. La intervención del maestro en esta fase debe restringirse a lo mínimo indispensable y orientarse a facilitar la expresión explícita de las opiniones de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas del estudio.

Fase 4 Orientación libre

Los alumnos encuentran tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes. Esto le permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas.

Fase 5 Integración

Los alumnos revisan ahora los métodos que tienen a su disposición y lanzan una mirada de conjunto, con lo cual unifican los objetos y las relaciones y logran asimilarlos internamente en un nuevo dominio de pensamiento.

Soportando el modelo de razonamiento de van Hiele se establece las propiedades de los niveles de pensamiento.

Propiedades de los niveles de pensamiento

De la Torre (2003, p.13) de acuerdo con Usikin (1982) sostienen que los niveles de pensamiento van Hiele satisfacen seis propiedades; de igual modo Jurado, F. & Londoño, R. (2005, p.12) lo expresan en su tesis refiriéndose a la caracterización del modelo.

Propiedad 1: **(Secuencialidad fija)**. Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencia fija, esto es, “Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel $n-1$ ”.

Propiedad 2: **(Adyacencia)**. El objeto de percepción del nivel $n-1$ se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n .

Propiedad 3: **(Distinción)**. El nivel n requiere una organización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel $n-1$, esto es la percepción de una nueva estructura.

Propiedad 4: **(Separación)**. Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.

Propiedad 5: **(Especificidad del lenguaje)**. Cada nivel tiene un lenguaje específico, a tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles van Hiele, se manifiestan de manera notoria en la expresión verbal y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico.

Propiedad 6: **(Consecución)** El progreso de un nivel al inmediatamente superior puede darse de forma gradual.

Caracterización del modelo van Hiele

De la Torre (2005) explica que:

La aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permitan la detección de los mismos a partir de la actividad de los aprendices. Parece razonable, por consiguiente, asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: Los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales; deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual. (p.15)

2.3. EL PENSAMIENTO ESPACIAL

El pensamiento geométrico ha estado ligado a las representaciones que el hombre realiza del mundo. Desde tiempos inmemoriales, la geometría se involucró en las vidas de los hombres, desde el mismo momento en que se necesitó de ésta para representar y dar solución a problemas cotidianos.

Así, la geometría se constituye como una disciplina resultado de la necesidad del hombre de relacionarse con el mundo que lo rodea y de metrizarlo (Sepúlveda R. et al. 2005, p.71). Es así como el Ministerio de Educación Nacional de Colombia estructura el pensamiento geométrico de forma secuencial respecto al proceso conceptual del estudiante y de lo cual los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, lo estructuran como *Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos*, dado que el Pensamiento Espacial es “usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas” (Ministerio de Educación Nacional. 1998, 56) y los Sistemas Geométricos son “el

conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se constituyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN. 1998, p.56).

En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas, se plantea una *geometría activa* la cual parte de la “actividad del alumno y su confrontación con el mundo” (MEN. 1998, p.57), dicha geometría activa, consiste en “hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna” (MEN. 1998, p.57), razón por la cual, la geometría en el ámbito escolar debe permitir la interacción de los conceptos geométricos con las estructuras mentales a priori que el estudiante posee. Cabe aclarar que en sus primeros inicios, la geometría escolar debe permitir la manipulación de los objetos materiales para que luego de una manera u otra se pase por diferentes estados hasta que su razonamiento sea riguroso y las representaciones físicas de estructuras pasen a un segundo plano.

Según Sepúlveda R. et al (2005, p. 73-74), los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas se pueden agrupar en dos ejes temáticos los cuales son: las relaciones inter e intra figurales y transformaciones y relaciones espaciales. Para el primer eje Sepúlveda R. et al (2005, p.73-74) plantea que éste se compone del estudio de figuras y cuerpos geométricos, identificando elementos, propiedades y relaciones al interior de cada figura (intra figurales) y entre diferentes figuras (inter figurales). Para el segundo eje, el dinamismo de los sistemas geométricos toma prevalencia posibilitando así: “que el estudiante manipule los cuerpos geométricos, que active su capacidad mental, que en la construcción establezca relaciones, que adquiera confianza en si mismo y que se prepare para los nuevos retos de la ciencia y la tecnología” (Sepúlveda R. et al. 2005, p.74).

Es así como parte de este segundo eje, la *geometría dinámica* y la *geometría activa* toman importancia desde el punto de vista aplicativo-explicativo y donde los software de geometría dinámica permiten observar que los objetos matemáticos son esencialmente objetos variables como lo propone Laborde, C. (2003) y donde teóricos sobre el tema como lo es Luis Moreno Armella, Alexander Jiménez Guzmán, Ana Cecilia Castiblanco Paiba, Henry Urquina Llanos, Leonor Camargo Uribe, Martin E. Acosta Gempeler y otros, dan a conocer la importancia de los software de geometría dinámica y la aplicación de las TIC's desde el ámbito educativo.

Teniendo en cuenta el proceso cognitivo de los estudiantes respecto al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, el MEN (1998, p.58-59) plantea el desarrollo del pensamiento geométrico desde el *Modelo de van Hiele*, elaborado por los esposos holandeses Dina van Hiele y Pierre van Hiele, el cual consiste en cinco niveles, cada uno transversalizado por cinco fases, las cuales “son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven a un nivel superior de razonamiento” (Sepúlveda R. et al. 2005, p.90-93).

Cada uno de los aspectos mencionados anteriormente, permitirán en el proceso educativo el paso adecuado de un grado a otro, donde el saber estructurado del estudiante reflejará ciudadanos enfocados hacia la Ciencia y la Tecnología.

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se dará a conocer el método de investigación implementado, la importancia que tiene para el desarrollo de este trabajo e incluso se presentará el contexto en el cual se desarrolla y la unidad de análisis.

3.1. POBLACIÓN

La Institución Educativa Javiera Londoño Sevilla es una institución de carácter público, ofrece los niveles de Preescolar, Básica Primaria y Secundaria, Media Académica y Educación formal para adultos; está ubicada en la ciudad de Medellín, Barrio Sevilla (Calle 71 N° 51D-26 tel.: 211 82 99 – 211 66 66). La institución cuenta con dos sedes, las cuales son sede Juan del Corral y sede Sofía Ospina de Navarro. La comunidad educativa, está conformada por las familias de los barrios aledaños a ella, como Sevilla, Prado Centro, Moravia, El Bosque, San Pedro y Miranda. Tiene como visión trabajar integralmente por la promoción de la dignidad humana a través de la formación y la capacitación en la adquisición del conocimiento científico y técnico que posibilitan la toma de decisiones responsables para la vida y el trabajo.

En la primera parte de la investigación se contó con la participación de los estudiantes del grado 4^º5, conformado por 39 estudiantes de género mixto a los cuales se aplicó la prueba diagnóstica inicial (diagnóstico de los estudiantes mediante el modelo de van Hiele). De los 39 estudiantes se seleccionaron 10 de acuerdo al proceso realizado en el momento de la prueba para dar continuación al trabajo investigativo entre ellos y ellas 2 niños y 8 niñas. Los estudiantes fueron seleccionados según los siguientes criterios:

- Estudiantes entrevistados (Se escogieron cinco estudiantes de acuerdo a incoherencias presentadas en el momento de ubicarlos en la categorización de la actividad diagnóstica ya que sus respuestas no eran fáciles de interpretar).
- Estudiantes escogidos aleatoriamente (Se escogieron cinco estudiantes de manera aleatoria).



Imagen N° 2. Sala de Sistemas y Población

3.2. “ESTUDIOS DE CASO MIXTO” COMO MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

En todos los procesos de investigación, siempre se ha tenido presente un método de investigación en especial, el cual, dé a conocer fielmente el sentido, el proceso y las conclusiones que emanan como resultado de un proceso de análisis dispendioso y detallado de un fenómeno o problema.

Un método de investigación según Salkind (1999, p. 3-5) es un proceso regulado por una serie de pasos que el investigador debe dar para realizar una investigación en la cual se descubren conocimientos nuevos. Dichos

conocimientos son adquiridos por métodos diferentes entre los cuales se encuentran el método de investigación no experimental, el método de investigación experimental, el método de investigación cuasiexperimental y el método de investigación de estudios de caso, entre otros.

El método investigativo de estudios de caso según Stake (2003), Mertens (2005), Williams, Grinnell y Unrau (2005) (citados en Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 2) dan a conocer que este más que un método, es un diseño y una muestra. Definiciones se proponen, pero una de las más contundentes es la realizada por Yin (2003 citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 2) en la cual el método o estudios de caso es una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto en la vida real, retomando informaciones de análisis intensivos y descriptivos del mismo.

El método de investigación a implementar es el “estudios de caso mixto”, en el cual se guía el diseño, la ejecución y el análisis del proceso investigativo contextualizado, a partir de las tecnologías computacionales en el ambiente escolar y la transversalidad del concepto de ángulo y sus propiedades con los niveles de razonamiento del modelo van Hiele.

En el método investigativo de “estudios de caso” Yin (2003 citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 3) da a conocer siete componentes indispensables para un adecuado proceso investigativo. Los componentes son el planteamiento del problema, proporciones o hipótesis, unidad de análisis (población), fuentes de datos e instrumentos de recolección, lógica que vincula los datos con preguntas y proposiciones, criterios para interpretar los datos y por último reporte del caso (conclusiones de la tesis). Estos componentes son observados y desarrollados en el transcurso de la preparación, ejecución y recopilación de la información (estudios realizados, investigación aplicada, conclusiones) de la tesis de investigación.

De igual manera, la tesis manejará un método de estudios de caso instrumentales, dado que Stake (2000 citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 6) propone tres tipos diferentes de casos, los cuales son estudios de caso intrínsecos, estudios de caso instrumentales y estudios de caso colectivos. Para el método investigativo de estudios de casos instrumentales, el proyecto de investigación se examinará para proveer de insumos de conocimiento a algún tema o problema de investigación, refinar una teoría o aprender a trabajar con otros casos similares, suministro de información que será validada a través de la recopilación y análisis de datos los cuales son arrojados por el contexto enfocados a través de la unidad de análisis.

Por el número de casos y la unidad de análisis, el proyecto de investigación se basará en una unidad holística en la cual todo el caso es tomado para una sola unidad de análisis, determinándose así una propuesta de enseñanza enfocada hacia la construcción del concepto de ángulo y sus propiedades a través de software Geogebra. Dicho caso será tratado en un contexto determinado donde se desarrollará el proyecto de investigación bajo la mirada del método de estudios de caso, en el cual la unidad de análisis estará compuesta por estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Javiera Londoño, barrio Sevilla, Sede Sofía Ospina de Navarro.

Los datos recolectados serán de carácter mixto teniendo en cuenta que se utilizarán herramientas estandarizadas como pruebas diagnósticas, pruebas para evaluar la comprensión del concepto, pruebas actitudinales mediante de la motivación y el agrado por el desarrollo de la prueba, entrevistas personalizadas y grupales y pruebas procedimentales al interpretar y realizar adecuadamente las actividades planteadas, cuestionarios, etc., siendo ésta de carácter experimental cronológico (a través del tiempo), proceso que mediante un antes y un después del estímulo (aplicación del software Geogebra) estará demarcada por mediciones diferentes entre el contexto. Las mediciones se realizarán durante cada uno de los

cuatro momentos enfocados en el estudio de caso cuantitativo ABAB, tratándose de igual manera el estudio de caso cualitativo.

Para la metodología implementada se tuvieron en cuenta cuatro momentos según el “estudios de caso cuantitativo” desarrollado por Hernández et. a. (2006, p. 11-19): (ver: Diagrama 1) el primero, fase A, diagnóstico de los estudiantes mediante el modelo de van Hiele, estas pruebas estarán enfocadas en los conceptos adquiridos por el contexto bajo los lineamientos curriculares y los estándares básicos de calidad para el grado tercero de educación básica primaria; el segundo, fase B, incorporación y aplicación de las actividades mediadas por el software Geogebra con la finalidad de dinamizar el concepto y aplicación de las fases de aprendizaje que plantea el modelo de van Hiele; el tercero, fase A, evaluación mediada por el análisis de la intervención respecto a los niveles de razonamiento del modelo van Hiele; y por último, la fase B, contextualización de la intervención manteniéndose el monitoreo de la evolución cognitiva de los estudiantes según el modelo establecido. En los momentos establecidos se incluye el estudio de caso cualitativo describiendo así evolutivamente el desarrollo de las actividades y del estudiante luego de realizarse una planeación de éstas para pasar por un proceso de análisis, para que así las actividades que prosiguen sean planeadas de acuerdo a las conclusiones obtenidas a partir de los resultados anteriores, secuencia que se asume de acuerdo a las intervenciones realizadas.

Como técnica utilizada en la investigación, se utiliza el estudio de caso mixto “cuantitativo-cualitativo”. Para el caso cuantitativo se establecen las siguientes fases ABAB: fase A en la cual no hay tratamiento pero existe un análisis de la actividad realizada, fase B en la que se administra un tratamiento y se mide, posteriormente se retira el tratamiento y se continua con la evaluación que es la fase A con sus respectivo análisis. Finalmente, se vuelve a introducir el tratamiento y se mantiene el monitoreo, fase B; prosiguiendo con el proceso se aplica el estudio de caso cualitativo, en el cual se explican las cualidades

evolutivas de las pruebas realizadas, siendo éstos los análisis de los respectivos resultados (Hernández et. al., 2006, p. 11-27).

En relación al estudio de caso cualitativo Stake, R. (1998: p.15-17) plantea que los casos que son de interés para la educación pueden ser en su mayoría personas o programas, también puede ser un niño, un grupo de alumnos o incluso un programa innovador, donde el caso es algo específico, complejo y en funcionamiento.

Toda investigación basada en el estudios de caso cualitativo cuenta con hipótesis de investigación, preguntas de investigación (preguntas temáticas o preguntas básicas, preguntas informativas o evolutivas, preguntas generales (buscan la descripción necesaria para describir el caso)), el problema o “fenómeno”, conclusiones del caso estudiado y análisis o evaluación de los diferentes momentos por los que pasa la investigación (Stake, R. 1998, p. 25-40).

La característica primordial de la investigación cualitativa según Stake (1998, p. 20-23, 45-49) es la interpretación, para lo cual se destaca la presencia de un experto en el tema que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad el desarrollo del mismo y que al tiempo analice, describa y de a conocer los resultados obtenidos en la investigación, con la finalidad de reorientar las actividades planteadas. Las actividades que son programadas con rigurosidad pueden pasar por un proceso de reorientación dado que el método permite cambios de acuerdo a los factores que emergen del trabajo previo de cada estudiante, sufriendo éstas cambios en el proceso de construcción y aplicación de una fase a la otra.

Para Stake, R. (1998, p.41-44) los investigadores en estudio de casos cualitativos emplean el método de muestras, como método primordial para llegar a conocer un caso en particular de forma extensiva e intensiva, incluso éstos “perciben lo que

ocurre en clave de episodios o testimonios, presentan los acontecimientos con su propia interpretación directa y con sus historias”

3.3. ELEMENTOS DEL DISEÑO

En el siguiente apartado se presentará el desarrollo metodológico establecido para el proyecto de investigación, incluyendo cada uno de los momentos de acuerdo a las fases establecidas por el método de investigación implementado; de igual manera se dan a conocer las actividades por las que la investigación se desarrolla y la forma como cada una se analiza correspondiendo en primera instancia un análisis de la actividad, como segunda una descripción de la actividad y en la tercera los resultados de la actividad. Cada uno de los momentos esta intervenido por los *descriptores de nivel* ya que estos son los medidores cuantitativos de cada una de las fases del modelo de van Hiele. Es de anotar que al momento de la ejecución de las actividades, estas se recopilaron en medios magnéticos como video casete, casete de audio y medios digitales como fotos de los productos de los estudiantes en el software, los cuales permitieron a los investigadores un análisis más detallado y riguroso.

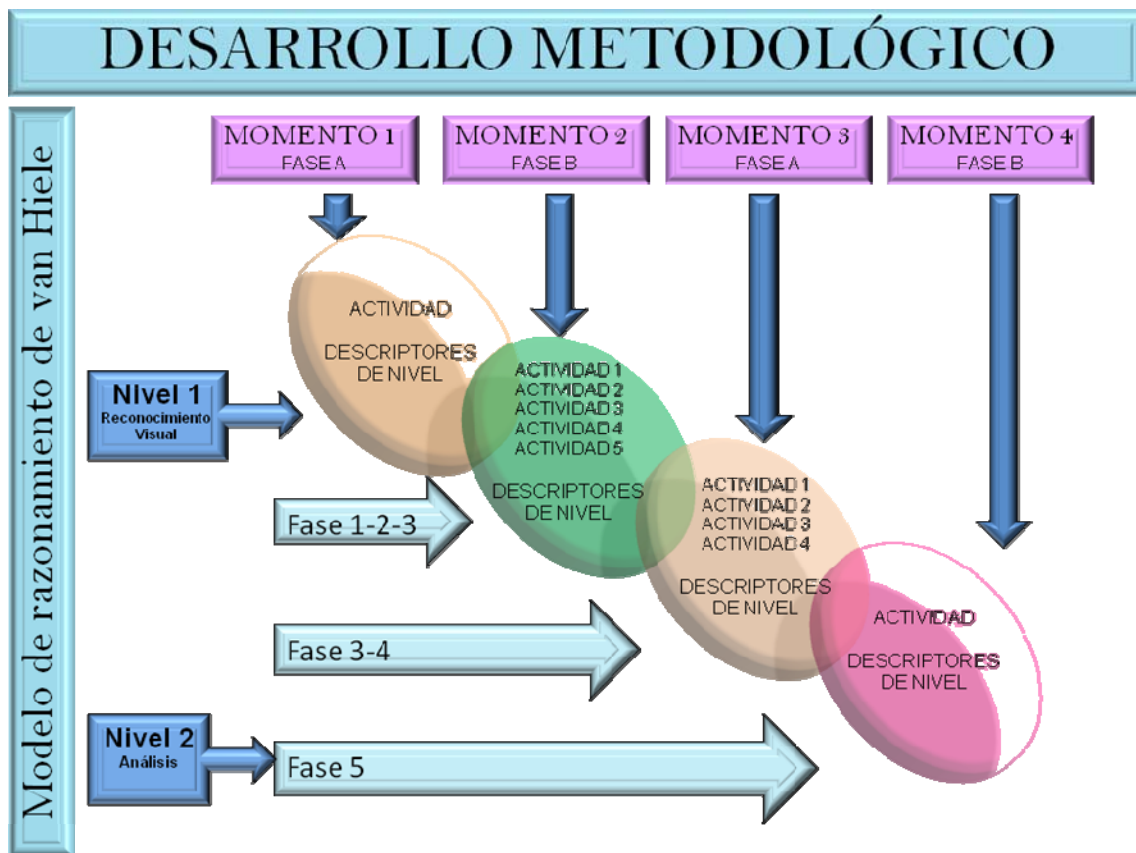


Diagrama 1

DESCRIPTORES DE NIVEL

Los descriptores de nivel, como su nombre lo indica, describen las cualidades que los estudiantes poseen en relación al concepto para así ser ubicados en un determinado nivel. Estos son tratados en cada uno de los momentos de acuerdo a lo desarrollado conceptualmente, determinando el avance que los estudiantes realizan de un nivel de razonamiento al siguiente.

DESCRIPTORES DE NIVEL 1 (D.N.1): RECONOCIMIENTO VISUAL

- (D.N.1.1) Tiene pocas nociones del concepto de ángulo y sus propiedades.
- (D.N.1.2) Utiliza expresiones imprecisas como “algo derecho”, “línea recta”, “regla” para describir atributos de los ángulos.
- (D.N.1.3) Reconoce los ángulos como una figura geométrica de acuerdo a imágenes visuales de sus partes constitutivas: “punta”, “abierto”, “rectas”.
- (D.N.1.4) Percibe los ángulos como objetos individuales (no dice agudos, rectos obtusos o llanos).
- (D.N.1.5) Identifica las partes constitutivas del ángulo pero no establece relaciones entre ellas.

DESCRIPTORES DE NIVEL 2 (D.N.2): ANÁLISIS

- (D.N.2.1) Describe las partes constitutivas del ángulo (lados, vértices, abertura).
- (D.N.2.2) Reconoce que el ángulo no depende de la longitud de sus lados.
- (D.N.2.3) Establece la medición del ángulo con la amplitud.
- (D.N.2.4) Clasifica los ángulos a través de atributos sencillos, por ejemplo, a través de su amplitud.
- (D.N.2.5) Describe formalmente los componentes del ángulo, utilizando adecuadamente el vocabulario usual.
- (D.N.2.6) Reconoce la amplitud de los ángulos como representantes de familias.
- (D.N.2.7) Describe tipos de ángulos mediante el uso explícito de sus propiedades en lugar de los nombres respectivos.
- (D.N.2.8) Reconoce los tipos de ángulo por sus nombres respectivos.

El siguiente cuadro es producto de los descriptores de nivel, dado que en este se recopila la información necesaria para ubicar a cada estudiante en cada nivel de acuerdo con los descriptores respectivos.

Estudiante	Descriptores de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptores de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1													
Est. 2													
Est. 3													
Est. 4													
Est. 5													
Est. 6													
Est. 7													
Est. 8													
Est. 9													
Est. 10													

Tabla N°1. Descriptores de Nivel

Convenciones

D.N.: Descriptor de Nivel.

Est.: Estudiante.

3.4. INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

MOMENTO 1

DIAGNÓSTICO DE LOS ESTUDIANTES MEDIANTE EL MODELO DE VAN HIELE “FASE A”

ACTIVIDAD: DIAGNÓSTICO

1.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “PRUEBA DIAGNÓSTICA”

La actividad diagnóstica cuenta con situaciones donde se busca identificar las nociones que tienen los estudiantes respecto al concepto ángulo y sus

propiedades; por lo que las actividades apuntan a reconocer aquellos conceptos básicos que según los documentos rectores como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de calidad, los estudiantes debieron haber adquirido en grados anteriores.

La actividad está desarrollada con base a las características que se presentan en los niveles iniciales del modelo van Hiele; es decir, se tienen en cuenta, los descriptores propios de cada nivel que permiten determinar e identificar a partir del modo de proceder de los estudiantes y los resultados obtenidos en la situación en que nivel de razonamiento se encuentran con respecto al concepto de ángulo.

Para este momento, la identificación de las fases involucradas no son determinadas, dado que, el diagnóstico establece el estado inicial de los estudiantes para diseñar actividades que propicien la comprensión del concepto requerido; razón por la cual en el diagnóstico no existe una relación recíproca del estudiante con el profesor, e incluso, no existe contacto directo con el concepto que ha de ser estudiado.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “PRUEBA DIAGNÓSTICA”

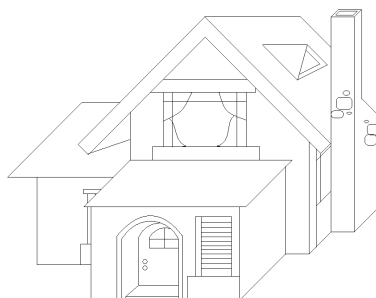
En esta actividad se presenta una imagen en la cual el estudiante debe clasificar en tres categorías (agudos, rectos, obtusos) los ángulos, utilizando colores (rojo, verde, azul) que permitan diferenciarlos. Se pretende hacer un rastreo de las posibles nociones que tienen los estudiantes respecto al concepto a trabajar.

En el momento que los estudiantes utilicen adecuadamente los colores para referirse al ángulo correspondiente, éstos se ubican y muestran características que ejemplifican el primer y segundo nivel ya que son capaces de establecer atributos de cada ángulo y son capaces de diferenciarlos por su nombre.

La prueba diagnóstica se inició con la participación de 39 estudiantes del grado 4º5; para lo cual a cada niño se le entregó en una hoja la guía del trabajo a realizar. Luego, se explicó la actividad diagnóstica cuando cada niño tenía en sus manos la actividad para que fueran comprobando y comprendiendo cada uno de los puntos planteados, después de explicar y de comprobar que cada niño tenía los materiales necesarios (colores) para la realización de la misma.

La actividad que desarrollaron fue la siguiente:

- a) En el siguiente dibujo se muestra una casa, pinta con colores los ángulos de la siguiente manera; con rojo los ángulos agudos, con verde los ángulos rectos y con azul los ángulos obtusos.

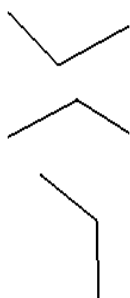


- b) Pinta las partes de la casa que sean parecidas a los siguientes dibujos.

Verde



Rojo



Azul



Materiales

- Ficha o guía de trabajo.
- Colores (rojo, verde, azul)

Estándares Relacionados (Ministerio de Educación Nacional. 2003)

- Diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales.
- Reconocer nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.

Indicadores de Logros

1. Comprende el concepto de ángulo e identifica sus elementos y clases.
2. Mide y construye ángulos.
3. Comprende nociones básicas de geometría.
4. Mide ángulos y los clasifica en rectos, obtusos y agudos y llanos

Contenido

Medida y clasificación de ángulos.

Proceso

- Clasifica ángulos.
- Identifica ángulos en una figura geométrica.
- Aplica los conocimientos adquiridos en grados anteriores en determinados contextos.

1.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “PRUEBA DIAGNÓSTICA”

Los estudiantes presentaron dificultad en el momento de comprender los enunciados; dado que preguntaban constantemente acerca de las acciones que debían realizar, lo que dio a entender que el concepto de ángulo no estaba bien estructurado puesto que éstos presentaron desconocimiento frente a los términos matemáticos en el momento de realizar la prueba.

Debido a la comprensión inadecuada del concepto de ángulo, algunos estudiantes contextualizaron la actividad al pintar la casa con sus respectivas partes y otros la realizaron teniendo en cuenta sus saberes previos.

En el transcurso de la actividad algunos estudiantes presentaron interrogantes referentes a algunos conceptos y palabras extrañas para su léxico que contenía la actividad, las cuales fueron: ¿recto es parado?, ¿los dibujos se pueden parar?, ¿los dibujos del segundo punto se pueden pintar en el primero? (la pregunta corresponde a si el estudiante puede pintar los dibujos del primero como se plantean en el segundo punto de la actividad), ¿recto es así? (señalan con la mano una línea recta horizontal), ¿se puede voltear la figura?, ¿no hay líneas acostadas?; también se produjeron las siguientes afirmaciones: ¡No entiendo que es la palabra obtuso!, ¡profesora, no se que es ángulo agudo!.

Respecto a esta segunda afirmación se presentó el siguiente protocolo:

Estudiante: ¡Profesora no sé que es ángulo agudo!

Profesora: ¿Sabes que es un ángulo obtuso?

Estudiante: Si, es un ángulo puntudo [*señala el techo de la casa*]

En el transcurso de la actividad se presentan diferentes preguntas dado que algunas expresiones de los estudiantes son difíciles de interpretar; es por esto,

que los profesores encargados de la investigación las proponen con la intención de salvaguardar apreciaciones personales de los estudiantes.

De esta actividad se establecieron las siguientes categorías de acuerdo a sus características particulares:

Actividad 1 a) Angulo-Color-Posición

1. No establecen relación con lo planteado.
2. Pintan parcialmente la casa sin relación.
3. Pintan totalmente la casa sin relación.
4. Pintan la casa según el contexto (techos y paredes de igual color).
5. Relacionan los lados con los ángulos.
6. Comprenden el concepto de ángulo.

Actividad 1 b) Visualización o reconocimiento de ángulos

1. No establecen relación con lo planteado.
2. Realizan parcialmente la actividad sin relación.
3. Realizan totalmente la actividad sin relación (Pintado de ángulos).
4. Pintan el polígono que contiene uno de de los ángulos dados.
5. Realizan parcialmente la actividad con relación.
6. Identifican el ángulo a través del reconocimiento de figuras dadas.

ANÁLISIS PRUEBA DIAGNOSTICA ACTIVIDAD Nº 1 a) ÁNGULO COLOR POSICIÓN		
CATEGORIAS	ESTUDIANTE	PORCENTAJE
1. NO ESTABLECEN RELACIÓN CON LO PLANTEADO	2	6,9
2. PINTAN PARCIALMENTE LA CASA SIN RELACIÓN	2	6,9
3. PINTAN TOTALMENTE LA CASA SIN RELACIÓN	12	41,4
4. PINTAN LAS CASA SEGÚN EL CONTEXTO	6	20,7
5. RELACIONAN LOS LADOS CON LOS ÁNGULOS	6	20,7
6. COMPRENDEN EL CONCEPTO DE ÁNGULO	1	3,4
TOTAL DE ESTUDIANTES	29	100,0

Tabla Nº2. Análisis de la Prueba Diagnóstica a) “ángulo-color-posición”. Categorización

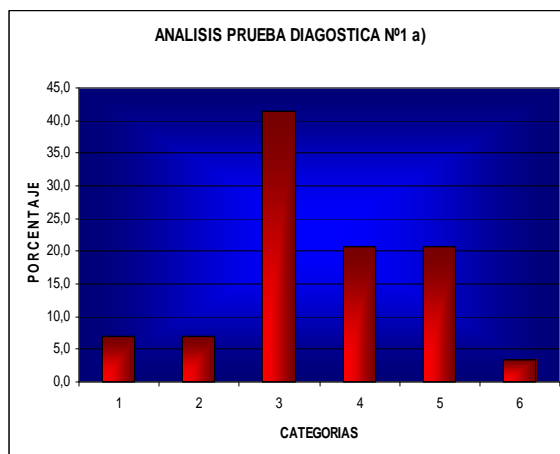


Tabla Nº 3. Análisis de la Prueba Diagnóstica a). Porcentaje

Un alto porcentaje de los estudiantes pintan la figura sin hacer relación a las partes de la casa y sin tener en cuenta las condiciones establecidas en el enunciado.

La misma cantidad de estudiantes que pintan la casa según el contexto, relacionan los lados de las figuras con las clases de ángulos.

ANÁLISIS PRUEBA DIAGNÓSTICA		
ACTIVIDAD Nº 1 b) RELACIÓN FIGURA – FIGURA		
CATEGORIAS	ESTUDIANTE	PORCENTAJE
1. NO ESTABLECEN RELACIÓN CON LO PLANTEADO	2	6,9
2. REALIZAN LA ACTIVIDAD PARCIALMENTE SIN RELACIÓN.	2	6,9
3. REALIZAN LA ACTIVIDAD TOTALMENTE SIN RELACIÓN.	6	20,7
4. PINTAN EL POLIGONO QUE CONTIENE UNO DE LOS ANGULOS DADOS.	9	31,0
5. REALIZAN PARCIALMENTE LA ACTIVIDAD CON RELACIÓN.	7	24,1
6. IDENTIFICAN EL ÁNGULO A TRAVÉS DEL RECONOCIMINETO DE FIGURAS DADAS.	3	10,3
TOTAL DE ESTUDIANTES	29	100,0

Tabla Nº4 Análisis de la Prueba Diagnóstica b) “relación figura-figura”. Categorización

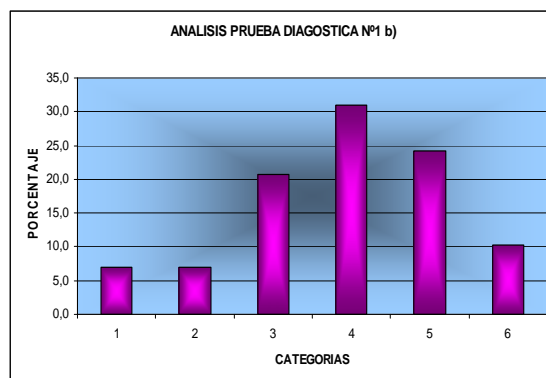


Tabla Nº 5. Análisis de la Prueba Diagnóstica b). Porcentaje

El porcentaje más sobresaliente de los estudiantes pintan completamente el polígono que contiene uno de los ángulos dados. Este comportamiento es semejante a aquellos que se ubicaron en las categorías que establecen que los estudiantes pintan la figura parcial o totalmente sin relación.

A partir de la prueba diagnóstica se infiere que algunos estudiantes no presentan características propias del primer nivel de razonamiento del modelo de van Hiele, dado que la manera de desarrollar la actividad se limitó a otros aspectos que no

dan cuenta de la comprensión del concepto de ángulo o poseen conocimiento del mismo.

Para complementar el trabajo y profundizar en los entendimientos de los estudiantes se desarrolla una entrevista personalizada. El guión de la entrevista se presenta en la tabla de la pág. 52

ANÁLISIS DE LA “ENTREVISTA PERSONALIZADA”

Ante la ambigüedad presentada por los estudiantes al momento de desarrollar la prueba respecto a la forma como pintan los ángulos en las figuras dadas, se realizó una entrevista en la cual se pretendía inferir las nociones que estudiantes tenían sobre los ángulos y sobre lo que pretendían dar a conocer al momento de realizarla. De esta manera se podría confirmar la categorización anteriormente realizada y ubicar adecuadamente cada uno de los estudiantes en los descriptores de nivel. Esta entrevista fue grabada en video y en audio con el ánimo de analizar con mayor profundidad entre el equipo de investigadores los resultados de los estudiantes.

DESCRIPCIÓN DE LA “ENTREVISTA PERSONALIZADA”

A partir de la caracterización realizada en la prueba diagnóstica se escogieron cinco estudiantes del “grupo diagnóstico²” con la finalidad de comprender las respuestas obtenidas dado que se presentó ambigüedad en algunas de ellas, entre las cuales se encuentran: “no saber si estaban pintando el ángulo o el polígono” ya que pintaban el contorno de la figura, “no era claro si pintaban por similitud de figuras o dependiendo de su forma”, incluso se presentó la confusión de algunos términos como es: “agudo”, “obtuso” y “paralelogramo”; lo cual se

² **Grupo Diagnóstico:** Grupo de persona a las cuales se les aplica una prueba determinada con el fin de establecer algunas causales iniciales en relación a conceptos que se trataran posteriormente.

buscó con la entrevista una interpretación más profunda y personalizada de los resultados, para así poder determinar cuál eran sus ideas y que tan estructurado estaba el concepto frente a lo pedido.

Así mismo la entrevista se realizó dado que el método de investigación cualitativo así lo sugiere, e incluso para el presente caso por la indagación del concepto de ángulo por parte de los investigadores, proceso por el cual quedan subsanadas apropiaciones e ideas que el estudiante pudiere tener respecto al concepto en mención. Es de mencionar que el método de entrevista es recomendado por Stake, R. (1998) dado que en algunos momentos de la investigación se requiere de la interacción entre el investigador y el investigado de manera directa y clara sobre un tema a tratar.

CANTIDAD DE LA MUESTRA

Cinco estudiantes del grado 4^o5 Institución Educativa Javiera Londoño Sevilla Sede Sofía Ospina de Navarro.

Para la entrevista se preparó un guión de preguntas el cual no fue rígido y permitía la formulación de preguntas emergentes, teniendo siempre presente que éstas debían ir dirigidas hacia el tema que se desea investigar. A continuación se presenta el guión que fue utilizado en la entrevista:

1. ¿Cuál es tu nombre?
2. ¿Para tí qué es un ángulo?
3. En el lugar en el que nos encontramos ¿A qué figura u objeto se te parece a un ángulo?
4. ¿Qué es para tí un ángulo agudo? ¿Qué crees tú que es un ángulo agudo?
5. ¿Qué es para tí un ángulo recto? ¿Qué crees tú que es un ángulo recto?
6. ¿Qué es para tí un ángulo obtuso? ¿Qué crees tú que es un ángulo obtuso?
7. ¿En los años anteriores has estudiando (visto/manejado) el tema de los ángulos?
8. ¿En esta figura (dibujo de la casa que ellos pintaron en la actividad diagnóstica) señala los ángulos agudos, rectos y los obtusos?
9. ¿Por qué no pintaste el dibujo o la gráfica (pregunta realizada a algunos estudiantes)?
10. ¿Qué partes de la casa son iguales? (semejanza, Congruencia, simetría)
11. Luego de dar la definición de ángulo (definición contextualizada a su lenguaje), puedes realizar la grafica del ángulo requerido
12. Según la figura que pintaste, señala en ella los ángulos agudos, rectos y obtusos.
13. ¿Por qué en el dibujo pintaste este ángulo? (señala el ángulo requerido)
14. Si tienes esta figura (señala una figura que sea polígono) ¿Cómo pintarías los ángulos que la conforman?
15. ¿Asociaste la gráfica (la casa) con una casa de verdad?
16. ¿Te imaginaste el dibujo como si fuera real?
17. Al momento de pintar los ángulos en la casa ¿Te la imaginaste real, de tal manera que fuera tangible (se pudiera tocar) para así señalar en ella los ángulos pedidos?



Imagen N°4. Entrevista



Imagen N°5. Entrevista

RESULTADOS DE LA “ENTREVISTA PERSONALIZADA”

Teniendo en cuenta las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes que desarrollaron la prueba diagnóstica; se llega a los siguientes resultados:

Los estudiantes asumen la palabra “recto” como un adjetivo del ángulo con el mismo significado que tiene con la palabra “línea” es decir, los estudiantes asocian lo recto con: “algo derecho, una línea derecha, es como una regla”. Esto se evidencia en las respuestas de los estudiantes cuando se les solicitó que señalaran los ángulos rectos y ellos pintaron en la gráfica de la casa segmentos de recta y para tal caso aristas de la construcción presentada.

Consecuentemente para algunos estudiantes el concepto de ángulo con sus respectivas propiedades carece de una definición convencional; ya que sus respuestas evidencian la ausencia del concepto.

AFIRMACIONES OBTENIDAS A PARTIR DE LA ENTREVISTA

Teniendo en cuenta las entrevistas realizadas se evidenciaron las siguientes respuestas.

Los estudiantes asocian el concepto de ángulo agudo a una “*forma con punta*” en una representación gráfica; dicha concepción es retomada en sus respuestas y en la manipulación de objetos de los cuales es posible observar sus concepciones. Algunas de las preguntas con sus respectivas respuestas son presentadas a continuación:

Profesor: ¿Para ti qué es un ángulo?

Estudiante 1: No sé.

Profesor: [*Mirando la gráfica de la casa*] ¿Qué parte de ahí se considera que es un ángulo?

Estudiante 1: Un triángulo [*señala el techo de la casa*]

Profesor: ¿Qué crees tú qué es un ángulo agudo?

Estudiante 1: Algo agudo

Profesor: ¿Qué es para tí algo agudo?

Estudiante 1: No sé.

Profesor: ¿Qué es para tí ángulo recto?

Estudiante 1: Algo derecho.

Profesor: ¿En qué parte de la casa puedes identificar el ángulo recto?

Estudiante 1: En la chimenea [*señala la chimenea y las aristas que la conforman, para así identificarse el ángulo recto como línea derecha*]

La concepción que tienen algunos de los estudiantes respecto al concepto de ángulo está relacionada con la estructura de polígono, dado que relaciona el ángulo con el nombre de algunos polígonos como lo es el caso de triángulo y rectángulo ya que este último es asociado a un cuadro si se hace como ejemplificación la casa donde vivimos o el lugar donde estudiamos.

Esta aseercción se evidencia en el siguiente diálogo:

- Profesor: ¿Qué entiendes tú por ángulo recto?
- Estudiante 4: Un ángulo recto es como un rectángulo, como el cuadro de la pared
- Profesor: ¿Por qué?
- Estudiante 4: Porque tiene unas puntas [*señala las esquinas del marco*]

Es de tener en cuenta, que el concepto de ángulo en los estudiantes frente al entorno carece de relación, dicha conclusión se evidencia al momento en que el estudiante no asimila o no responde a la pregunta de si en el medio que te rodea puedes observar ángulos con sus respectivas propiedades.

Esta aseercción se evidencia en el siguiente diálogo:

- Profesor: ¿Para usted qué es un ángulo agudo?
- Estudiante 3: [*No responde*]
- Profesor: ¿Qué se le viene a la mente cuando le preguntan por un ángulo agudo?
- Estudiante 3: [*No responde*]
- Profesor: Miremos la actividad [*se señala en el material impreso de la actividad diagnóstica la actividad correspondiente N° 1*]. A usted le pedían pintar un ángulo agudo ¿Qué color tenía el ángulo agudo según la actividad?
- Estudiante 3: [*No responde*]
- Profesor: Nos dice que el ángulo agudo debíamos de pintarlo con rojo, entonces usted en la casa pintó algunas partes rojas, ¿para usted eso es un ángulo agudo? [*se señalan los techos de la casa de la actividad N°1*]

Estudiante 3: Si

Profesor: ¿Y por qué?; ¿qué características tienen esas partes para que usted diga que eso es un ángulo agudo, por qué cree usted que eso es un ángulo agudo, por qué los pintó así?

Estudiante 3: [No responde]

Profesor: ¿En el medio que te rodea puedes observar ángulos con sus respectivas propiedades?

Estudiante 3: [No responde]

En esta última intervención el estudiante no dio respuesta alguna a las preguntas a causa de su timidez, estado que también fue evidenciado en el transcurso del análisis de la población.

DESCRIPTORES DE NIVEL

Teniendo en cuenta los análisis respectivos de esta actividad respecto al Momento 1 “Diagnóstico de los estudiantes mediante el modelo de van Hiele”, Fase A del método de investigación “estudios de caso mixto”, se ubicaron los estudiantes en los respectivos descriptores.

Estudiante	Descriptores de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptores de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1		X	X										
Est. 2			X	X									
Est. 3	X												
Est. 4	X												
Est. 5			X										
Est. 6		X		X									
Est. 7		X											
Est. 8		X											
Est. 9		X	X										
Est. 10	X												

Tabla N° 6. Descriptores de Nivel Momento 1

Convenciones

D.N.: Descriptor de Nivel.

Est.: Estudiante.

Tres estudiantes a partir de la prueba diagnóstica no dan indicio de conocer o tener nociones del concepto de ángulo y sus propiedades, dado que sus respuestas no muestran noción alguna del concepto.

Cinco estudiantes se ubicaron en el descriptor de nivel 1.2 al mostrar expresiones imprecisas en las actividades realizadas.

Dos de los cinco estudiantes de la entrevista y dos de la muestra general, fueron ubicados en el descriptor de nivel 1.3 al reconocer los ángulos como figuras geométricas de las imágenes presentadas.

Dos estudiantes, a partir de la prueba diagnóstica, presentan características propias del descriptor de nivel 1.4, al percibir los ángulos como objetos individuales independiente de su respetiva clasificación.

Se puede observar que algunos estudiantes tienen nociones poco claras respecto al concepto de ángulo, incluso no logran identificar la forma del ángulo, es decir, no reconocen su apariencia global; los demás estudiantes utilizaban expresiones imprecisas como “algo derecho”, “línea recta”, “regla” para describir atributos de los ángulos.

A partir del análisis de la prueba diagnóstica y la entrevista diseñada para este momento se determinó que varios estudiantes presentaban razonamientos propios del primer nivel, y las siguientes actividades apuntarían a que el razonamiento del grupo de estudio describieran su paso por el primer nivel y se diera la transición al segundo.

MOMENTO 2

INCORPORACIÓN Y APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES MEDIADAS POR EL SOFTWARE GEOGEBRA “FASE B”

Dentro de los procesos que favorece la geometría dinámica está el arrastre (dragging); con este proceso se puede alterar las condiciones secundarias en la construcción, sin que algunas partes constituyentes de la figura cambien. Otras partes dotan de dinamismo exteriorizando las relaciones geométricas que subyacen y conservan las propiedades iniciales para que el estudiante, a partir de la visualización, sea capaz de extraer resultados y conclusiones que le permitan la construcción de un concepto.

El estudiante empieza a familiarizarse con diferentes instrumentos que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación, entre ellas: páginas web, los software de geometría dinámica, entre otros. Dichos instrumentos constituyen nuevas representaciones para acceder al conocimiento. En esta investigación, la actividad diseñada en el programa Geogebra da la posibilidad que los estudiantes exploren, redescubran y generalicen propiedades.

Desde el modelo van Hiele el nivel de visualización se manifiesta en la medida que el estudiante reconoce la forma de un ángulo pero no logra hacer diferenciaciones en cuanto a las propiedades y a la clasificación que este puede tener. En la actividad se establecen y manifiestan algunas de las fases de aprendizaje que propone el modelo; inicialmente se da la fase de indagación donde el estudiante entra en contacto con el vocabulario mediante las observaciones y el diálogo establecido con el profesor; la fase orientación dirigida donde el profesor organizó secuencialmente las actividades en una página Web, buscando estimular al estudiante y buscar que ellos desarrollen la actividad seleccionando los diferentes

ángulos por su forma, y la explicitación en la medida de refinar el vocabulario al momento de ser socializado el concepto.

ACTIVIDAD 1: PRESENTACIÓN DEL SOFTWARE

1.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “PRESENTACIÓN DEL SOFTWARE”

Esta actividad se diseñó de modo que se tuviera una familiarización de los estudiantes con un software de geometría dinámica, lo cual es indispensable tanto para quien propone el uso de ellos, como para que los estudiantes tengan un conocimiento profundo de sus comandos y las funciones que de estos se despliegan; logrando así que las actividades posteriores a realizar se limiten al objeto de conocimiento, para el caso particular el concepto de ángulo.

La presentación del software se hace importante para los estudiantes seleccionados y para el maestro, dado que las inquietudes presentadas se resuelven con respecto a la función de los comandos en especial aquellos con los que se pretende realizar el dibujo de la figura geométrica “ángulos” que será el objeto de estudio.

Dado lo anterior, el estudiante al entrar en contacto con el software se familiariza con él; permitiéndole confianza y agilidad en el momento de realizar las actividades mediadas por el software Geogebra.

En relación con los software de geometría dinámica, el Geogebra más que ser un simple editor que permite realizar y arrastrar diagramas en la pantalla, es un entorno dinámico en el que las figuras ya no están detenidas en el tiempo, sino que se pueden moverse, posibilitando la invarianza de las propiedades de las figuras al momento de ubicarlas en diferentes lugares de la pantalla, es por esto

que el software Geogebra se retoma como un software interactivo en el que se “asocian”, la Geometría y el Álgebra, e incluso se diseñó con la finalidad de utilizarlo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel de la escolaridad media, pero en relación al concepto de ángulo y sus propiedades éste se puede utilizar en la educación básica dado que se pueden crear actividades dirigidas en las que el software sirve como mediador entre el concepto, el profesor y el estudiantes, permitiendo la creación de determinadas actividades dirigidas hacia el concepto.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “PRESENTACIÓN DEL SOFTWARE”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Selección de los estudiantes.
- Exposición en diapositivas del Software Geogebra.
- Manipulación dirigida del Software Geogebra.

La actividad se inicia con la selección del grupo de trabajo (experimental); conformado por 10 estudiantes los cuales fueron seleccionados de la siguiente manera:

- Cinco estudiantes que fueron entrevistados de acuerdo a la presentación de la prueba diagnóstica. La cual fue categorizada de acuerdo a las características presentadas por los estudiantes.
- Cinco estudiantes escogidos aleatoriamente.

Prosiguiendo con la actividad, se presenta a los estudiantes diapositivas con imágenes del programa en general, teniendo en relevancia aquellas sobre el objeto a estudiar.

Posteriormente se realizó una actividad dirigida por medio del video beam buscando que los estudiantes a partir de lo observado exploraran el programa.



Imagen N°6. Presentación del Software Geogebra

1.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “PRESENTACIÓN DEL SOFTWARE”

Teniendo en cuenta que los estudiantes son de barrios de la ciudad de Medellín, la cual cuenta con centros educativos donde se promueve la recreación, educación y cultura y son de carácter gratuito, y de lo cual la Política Nacional de Planeación promueve la incorporación de las TIC’s en el ámbito escolar y posibilita diferentes medios para su desarrollo, se presenta que los estudiantes tienen carencia frente a los conceptos básicos de sistemas como: *Guardar, guardar como, abrir, arrastrar*, dado que la orientación tecnológica esta dirigida hacia otros aspectos de la computación.

La motricidad fina con respecto al manejo del mouse y la variedad de funciones que se pueden ejecutar con él; como: señalar, arrastrar, clic derecho e izquierdo, desplazar, no ha sido desarrollada.

Los estudiantes mostraron interés por el trabajo en el momento de interactuar con el software.

A partir de la actividad dirigida los estudiantes reconocieron y aplicaron algunas opciones presentadas en cada uno de los iconos del software.

En la actividad los estudiantes entraron en contacto con el concepto de ángulo mediante la construcción y visualización de estos. Sin embargo no se introdujo.

Su definición formal, buscando, que a partir de las actividades, los estudiantes conjeturen y lleguen a la construcción del concepto.

La actividad se hace importante para conocer cómo están los estudiantes frente a las funciones básicas que necesita conocer quien interactúa con un computador para ejecutar una determinada función.

ACTIVIDAD 2: ÁNGULOS AGUDOS

2.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS AGUDOS”

Teniendo en cuenta que en el primer nivel de razonamiento del modelo de van Hiele, los estudiantes observan las figuras por su apariencia global y hacen descripciones basándose en la semejanza con otros objetos; para el trabajo con ángulos agudos se tiene en cuenta objetos que poseen en su estructura la forma del ángulo recto, tratando así que los estudiantes al final de la actividad establezcan estas características, y además comprendan cómo es la apariencia y la forma de un ángulo agudo cumpliendo la de ser derivado de una medida estándar como la del ángulo recto.

Por otra parte, las tres primeras fases de aprendizaje como componente didáctico son un aspecto fundamental en el desarrollo de las actividades entrelazando la labor docente con el dinamismo que provee el software, y este se refleja en la

medida que el profesor al establecer un diálogo con los estudiantes y conociendo los resultados de la prueba diagnóstica determina que saben los estudiantes frente al concepto (fase de indagación). En relación a la segunda fase, (fase de orientación dirigida) el profesor orienta la actividad buscando con ello que los estudiantes manipulen el software y puedan determinar qué ángulos están cumpliendo con la condición inicial; por último, los estudiantes reflejan la “fase de explicitación” en el momento que los estudiantes empiezan hacer uso del vocabulario que identifica el ángulo tratado, y donde el profesor realiza una intervención mínima refinando el vocabulario.

2.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS AGUDOS”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Presentación y descripción de la actividad de intervención “Construcción de ángulos agudos”.
- Realización de la actividad.
- Interacción entre profesores y estudiantes.

Los estudiantes junto con el profesor iniciaron con la presentación y descripción de la actividad mediante una página Web diseñada en el software Geogebra.

La actividad consiste en trasladar ángulos con ciertas características a un lugar específico (circunferencia de un color determinado) buscando con ello la clasificación de ángulo agudo.

Para la construcción de ángulo agudo se tuvo como referente objetos como la punta de un cuaderno, la punta de una baldosa, las esquinas del tablero, entre otros objetos, donde se les pidió a los estudiantes que seleccionaran a partir de cierta cantidad de ángulos aquellos que cumplieran con la condición de tener una amplitud menor que la amplitud de los objetos en referencia.

El desarrollo de la actividad sobre los ángulos agudos se evidencia en la siguiente imagen.

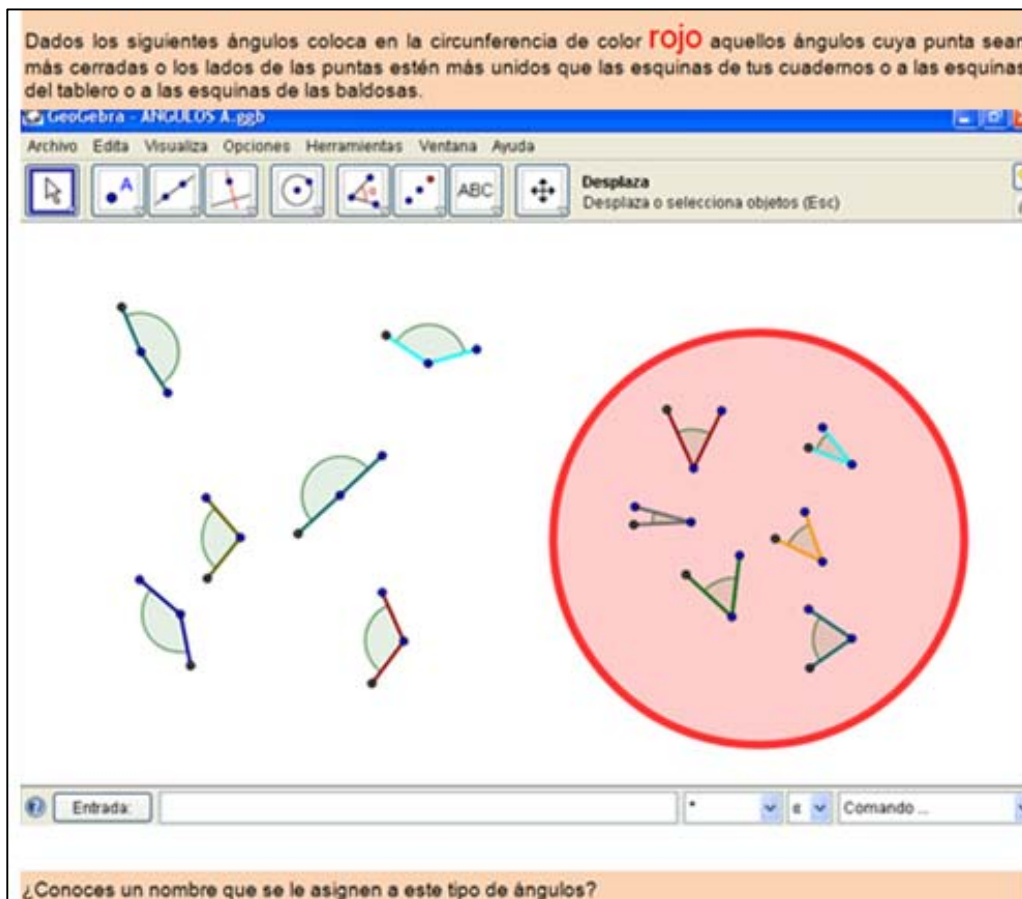


Imagen N°7. Ángulos Agudos

Terminada la actividad de *dragging* surge un diálogo propiciado por la pregunta ¿Qué nombre podría recibir esta clase de ángulo?

Las respuestas fueron:

Estudiante 9: Se pueden llamar ángulos obtusos porque miden menos de 90° .

Estudiante 9: También se pueden llamar ángulos puntiagudos porque tienen punta.

Estudiante 9: También se pueden llamar ángulos desiguales, porque no son iguales y algunos que son puntiagudos miden más de 90° .

Estudiante 9: Ningún ángulo es parecido porque hay unos más cerrados y otros más abiertos.

Estudiante 2: Los ángulos se pueden llamar agudos porque miden menos de 90°

Estudiante 5: Se pueden llamar puntas cerradas porque son cerradas.

Estudiante 6: Se pueden llamar ángulos rectos.

Estudiante 8: Se pueden llamar ángulos obtusos.

De cada una de estas respuestas presentadas se puede inferir que los estudiantes ya tienen ideas referentes a lo que es un ángulo y sobre todo, éstas pueden provenir de un aprendizaje en grados anteriores o quizás fueron influenciadas por los nombres que se presentaron en la actividad de la prueba diagnóstica.

Recopilando la información suministrada por los estudiantes se le dijo que los nombres tienen validez puesto que estas eran conjeturas y se presentaban algunas características de los ángulos; lo que conllevó a nombrar esta clase de ángulos como ángulos agudos estableciendo que estos tienen una medida más cerrada que los objetos referentes.

Además los estudiantes formularon que aquellos ángulos con una medida más cerrada de los diferentes objetos sin importar su amplitud eran agudos. Y que no importando donde quede la punta (vértice) es decir la “posición en la pantalla desde diferentes perspectivas” siguen siendo ángulos agudos.

2.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS AGUDOS”

Con las fases de aprendizaje se ha permitido que el razonamiento de los estudiantes ejemplifique las descripciones del primer nivel ayudando al progreso de los estudiantes para posteriormente sea alcanzado el nivel de razonamiento posterior.

El trabajo a priori en algunos comandos determinados (arrastre o dragging, borrado) permite un avance significativo en la ejecución manual del programa. Se puede afirmar esto porque los estudiantes realizaron rápidamente la actividad.

Cuando los estudiantes desplazan las diferentes figuras en toda la pantalla, éstos observan que algunas características son inmodificables como la amplitud de un ángulo lo que da validez a los principios propuestos por la geometría dinámica (la conservación de las propiedades inherentes a la figura).

Al desarrollar la actividad se presenta la ausencia de dos estudiantes dado que no asisten al momento de ser ejecutada la actividad por motivos de ausencia en la institución, lo cual limita su proceso secuencial frente al concepto.

En estas respuestas se pueden observar al menos dos características:

Estos estudiantes ofrecen la definición obedeciendo a la forma o posición de los ángulos, no alcanzan a observar invariantes frente a sus medidas.

Estos estudiantes utilizan nombres formales de ángulos, adquiridos de grados anteriores o de la prueba diagnóstica. Estos nombres solo se asignan por ensayo y error y no corresponden al nombre del ángulo. Solo el estudiante 2 asigno el nombre correctamente, dado que por conversaciones con el estudiante, éste tiene acompañamiento educativo en el hogar por parte de sus hermanas.

ACTIVIDAD 3: ÁNGULOS RECTOS

3.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS RECTOS”

Al igual que en la actividad de ángulos agudos, la semejanza con otras figuras cobra relevancia al momento de que el referente tiene la forma de ángulo recto, reconociendo tanto en lo observado en la pantalla del computador como en otros objetos (techo de la sala de computo, columnas, esquineros, etc.) que este posee una invariabilidad en su forma.

Las fases de aprendizaje se desarrollan de la misma forma que en la actividad anterior porque las primeras actividades fomentan en mayor medida la intervención del profesor.

3.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS RECTOS”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Presentación y descripción de la actividad de intervención “Construcción de ángulos agudos”.
- Realización de la actividad.
- Interacción entre profesores y estudiantes.

La actividad consiste en seleccionar y arrastrar a la circunferencia de color azul los ángulos cuya abertura es igual a las partes señaladas de los objetos referentes (cuaderno, baldosa, tablero, etc.); estos, se encuentran en diferentes posiciones en la pantalla.

El desarrollo de la actividad sobre los ángulos rectos se evidencia en la siguiente imagen.

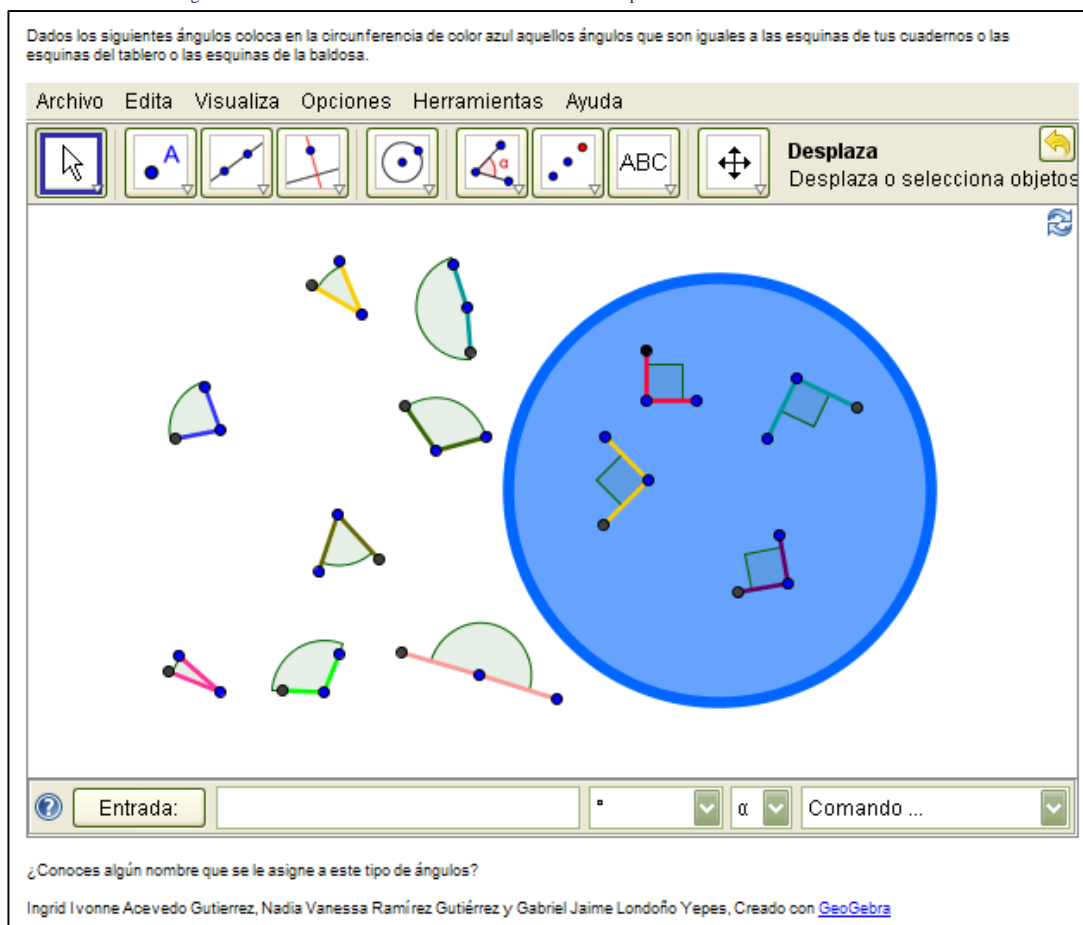


Imagen N°8. Ángulos Rectos

Dando secuencia a la actividad, se prosigue con el diálogo entre los alumnos y el profesor, donde se obtienen las siguientes afirmaciones a partir de la pregunta ¿Qué nombre podría recibir esta clase de ángulo?

Estudiante 2: Estos ángulos pueden llamarse ángulos obtusos porque miden más de 90° . Luego afirma reivindicando lo antes dicho que “Son rectos porque tienen un cuadrado y los cuadrados tienen las esquinas cuadradas.

Estudiante 2: Son rectos porque siempre van a tener la misma medida.

Estudiante 9: Son llamados ángulos con puntas rectos porque cuando forma el ángulo forma un rectángulo y estas cositas [señalización estándar del ángulo recto (rectángulo al interior del ángulo)] son rectas.

Estudiante 1: Pueden llamarse rectos iguales porque son rectos y son iguales.

Estudiante 4: Estos ángulos se llaman ángulos rectos porque la punta de la pantalla del computador es igual a los ángulos.

Reflejándose la fase de explicitación, el profesor acuerda con los estudiantes que los ángulos que cumplen con las características mencionadas por ellos reciben el nombre de los ángulos rectos. Las características fueron: Son siempre iguales a la punta de la pantalla del computador. Son siempre iguales independientemente de la posición (se mostró y se rotó el ángulo a través de la pantalla por lo que se notó que su abertura no difería).

3.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS RECTOS”

Los estudiantes mencionan los nombres en los que se clasifican los ángulos, pero no evocan las propiedades del ángulo.

El diálogo e interacción entre todos (estudiante- profesor) posibilita la adquisición de nuevos saberes, muestra de ello son las diferentes ideas que se expresan a través de una pregunta. Es decir, al momento de presentar la pregunta ¿Qué nombre reciben estos ángulos?, los estudiantes expresan ideas que caracterizan los ángulos con la condición establecida, que de una u otra forma reflejan el nombre que se maneja por convención matemática.

Los estudiantes participan activa y disciplinadamente; el lenguaje verbal es coloquial, no limitado por el profesor.

ACTIVIDAD 4: ÁNGULOS OBTUSOS

4.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS OBTUSOS”

La metodología de trabajo es similar a las actividades de ángulo agudo y ángulo recto, rescatando el razonamiento que poseen los estudiantes para el primer nivel, además ellos a partir de conocer la amplitud como característica de los ángulos trabajados anteriormente se hace más asequible el trabajo con el ángulo obtuso de modo que ellos descartan aquellas medidas trabajadas anteriormente.

La fase de explicitación para esta actividad se enriquece ya que el estudiante se ha apropiado de algunos términos lo que permite que éste tenga un vocabulario más preciso y adecuado al momento de expresar ideas y/o apreciaciones en relación al concepto tratado.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS OBTUSOS”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Presentación y descripción de la actividad (continuación).
- Realización de la actividad.
- Interacción entre profesores y estudiantes.

La actividad consiste en trasladar a una circunferencia de color verde aquellos ángulos que poseen una amplitud o abertura mayor a la esquina del tablero, la baldosa, o el cuaderno para hacer la clasificación del ángulo obtuso y menor a una línea.

El desarrollo de la actividad sobre los ángulos obtusos se evidencia en la siguiente imagen.

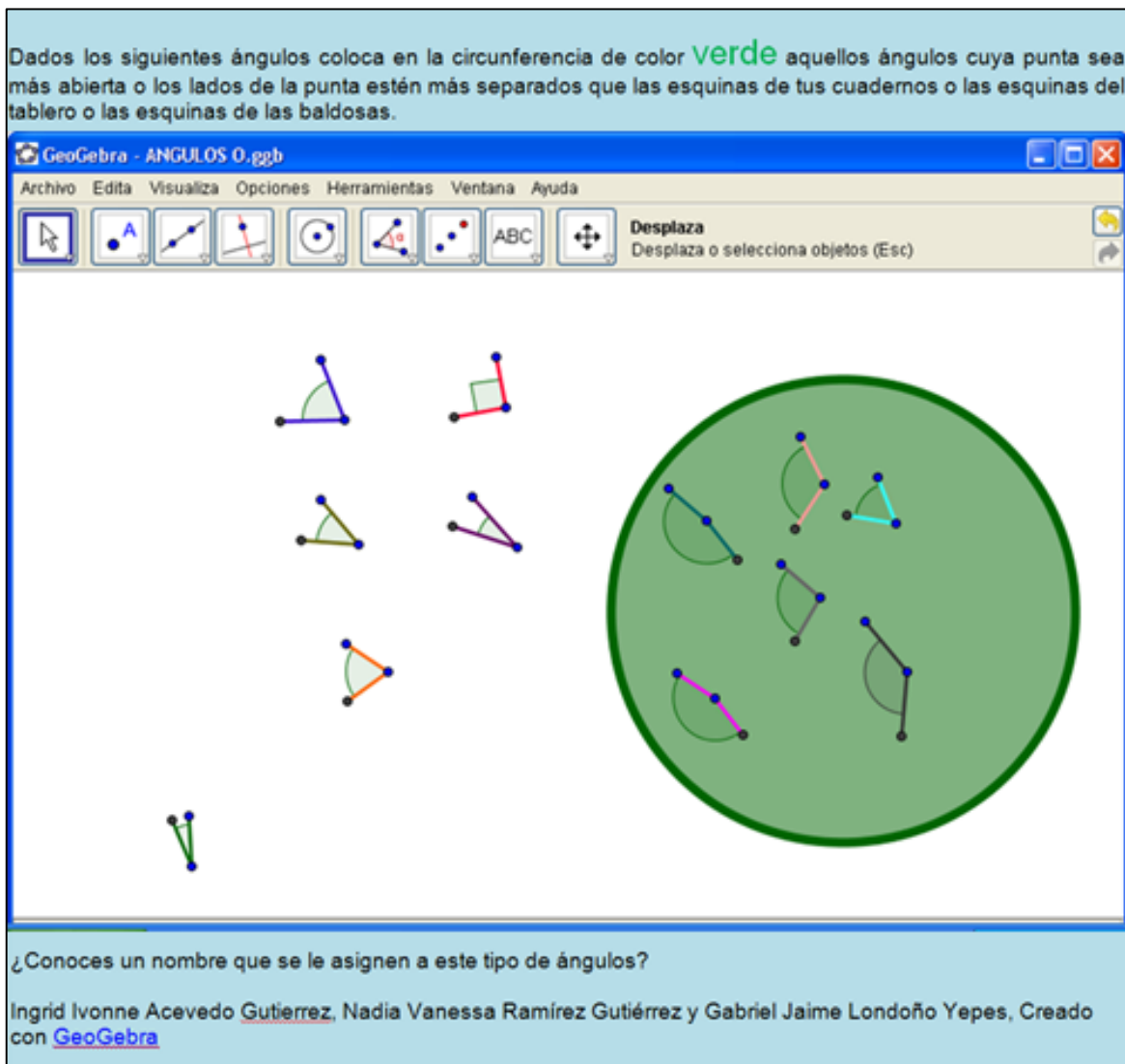


Imagen N°9. Ángulos Obtusos

Terminada la actividad se realiza la siguiente pregunta ¿Qué nombre podría recibir esta clase de ángulo?

Las respuestas son:

Estudiante 2: Si decía que metiéramos dentro de la circunferencia a los ángulos que eran más abiertos que el ángulo del cuaderno, es recto, entonces el ángulo que tenemos ahí es el ángulo obtuso.

Estudiante 9: Ángulos anchos, porque si usted ve que las puntas del cuaderno son un ángulo recto, y los ángulos agudos son más estrechos, estos se llaman ángulos anchos.

Profesor (a): ¿Qué parecido tienen estos ángulos con el ángulo recto?

Estudiante 1: Mire, el ángulo recto es más pequeño que los otros.

Aceptando las afirmaciones de “ángulo ancho”, que es más grande que el ángulo recto o que es más grande que la punta del cuaderno, se llega al nombre convencional de ángulo obtuso.

Para lo cual se entabla el siguiente diálogo.

Profesor (a): En el salón dónde pueden observar ángulos.

Estudiante 2: En las esquinas.

Profesor: Identifique un ángulo obtuso.

Estudiante 2: En todo el techo; porque es que mire que ahí sería la punta [señala la viga del centro], pero mire que todo el techo es el que está abierto

Profesor (a): Después de observar en el entorno las diferentes amplitudes de los ángulos se estableció que los ángulos agudos poseen una amplitud menor que la esquina de un cuaderno.

Los ángulos rectos son iguales a las esquinas del cuaderno del tablero y los ángulos obtusos aquellos cuya amplitud era mayor a la del ángulo recto. Entonces ¿Dónde puedes observar más ángulos?

Estudiante 2: En el cuaderno se pueden ver diferentes ángulos con diferentes amplitudes.

Para esta intervención se puede evidenciar que los estudiantes reconocen visualmente la clase de ángulo trabajado y de lo cual éste es una abertura producida por dos segmentos de recta. Al momento de visualizar el ángulo obtuso en el techo se reconocen las capacidades que el estudiante 2 tiene para observar del entorno las propiedades de los ángulos e incluso se reconoce que esta clase de ángulo está formado por dos semiplanos.

4.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS OBTUSOS”

A través del trabajo con el software mediado por el diálogo y las respuestas de los estudiantes se logra el reconocimiento de las propiedades básicas del concepto de ángulo obtuso. Además, se logra ver que los estudiantes empiezan a relacionar y diferenciar las características de este tipo de ángulo con las otras clases.

La orientación para esta actividad se vuelve habitual, ya que los estudiantes conocen la metodología tratada anteriormente. En esta, el vocabulario de los estudiantes es más preciso con el ángulo trabajado puesto que en las actividades anteriores habían desarrollado ideas similares a este.

ACTIVIDAD 5: ÁNGULOS LLANOS

5.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS LLANOS”

Los ángulos llanos son ángulos que cumplen la particularidad de tener la misma amplitud, por lo que su forma no difiere ante cualquier posición; para la actividad

“ángulos llanos” los referentes son líneas rectas y aquellos objetos que en su estructura tienen figuras semejantes a estos.

La actividad para este momento está diseñada con base en el primer nivel de razonamiento del modelo de van Hiele, sin olvidar que la edad y el grado de escolaridad son un factor determinante para su elaboración.

El aspecto didáctico que interviene se fundamenta en las tres primeras fases de aprendizaje del modelo de van Hiele corroborando así lo expuesto por los diferentes teóricos que se refieren a estas como los pasos para lograr la transición de un nivel de razonamiento al siguiente. Respecto las fases de indagación y orientación dirigida, son similares a las actividades anteriores, dado que se rigen bajo los mismos parámetros. Para la fase de explicitación, los estudiantes traen a colación los ángulos ya conocidos; además, dan características de este tipo de ángulos dado que se hace más fácil por la forma que posee.

5.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS LLANOS”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Presentación y descripción de la actividad (continuación).
- Realización de la actividad.
- Interacción entre profesores y estudiantes.

La actividad consiste en trasladar hacia la circunferencia de color amarillo aquellos ángulos en los cuales sus lados formen una línea recta; los estudiantes al realizar el arrastre tomaron una regla verificando que estos fueron totalmente “rectos”.

El desarrollo de la actividad sobre los ángulos llanos se evidencia en la siguiente imagen.

ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN N°1

Dados los siguientes ángulos coloca en la circunferencia de color **amarillo** aquellos ángulos cuyos lados formen una línea.

¿Conoces un nombre que se le asignen a este tipo de ángulos?

Ingrid Ivonne Acevedo [Gutierrez](#), Nadia Vanessa Ramírez Gutiérrez y Gabriel Jaime Londoño Yepes, Creado con [GeoGebra](#)

Imagen N°10. Ángulos Llanos

Luego del *dragging* se da a conocer la siguiente pregunta: ¿Qué nombre podría recibir esta clase de ángulo?

Estudiante 1: Rectos porque son derechos.

Estudiante 2: Obtusos porque tienen una abertura mayor a un ángulo recto.

Estudiante 9: Ángulo llano porque están derechos.

Para esta intervención se puede reconocer que los estudiantes reconocen la palabra llano con algo plano, al igual cuando describen corporalmente [señalan una línea horizontal con sus manos] el ángulo. También traen a colación lo tratado en los ángulos anteriores, ya que comparan las diferentes aberturas con sus nombres respectivos.

Las respuestas a la pregunta dieron paso a expresiones como recto, derecho, para luego convenir con los estudiantes que los que cumplen con esta característica reciben el nombre de ángulo llano.

5.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “ÁNGULOS LLANOS”

En las aseeraciones de los estudiantes se hace claro que una de las particularidades del ángulo llano es ser como “*algo derecho*”. Son evidentes las descripciones del primer nivel de razonamiento al momento de los estudiantes reconocer la figura por su forma y emplear un vocabulario impreciso.

Los estudiantes conocen la forma de un ángulo llano al hacer semejanza con una línea recta, e incluso la manera que identifican la amplitud que posee el ángulo con su abertura.

DESCRIPTORES DE NIVEL

Teniendo en cuenta los análisis respectivos de cada actividad respecto al Momento 2 “Incorporación y aplicación de las actividades mediadas por el software Geogebra”, Fase B del método de investigación “estudios de caso mixto”, se ubican los estudiantes en los respectivos descriptores.

Estudiante	Descriptor de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptor de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1				X	X			X			X		
Est. 2						X	X	X	X		X		
Est. 3		X											
Est. 4		X											
Est. 5				X	X			X	X		X		
Est. 6			X	X	X				X				
Est. 7		X	X	X									
Est. 8				X					X		X		
Est. 9				X	X	X			X			X	
Est. 10		X	X										

Tabla N°7. Descriptores de Nivel Momento 2

Convenciones

D.N.: Descriptor de Nivel.

Est.: Estudiante.

Para este segundo momento fase B intervención se presentó el software de Geometría dinámica Geogebra con las respectivas funciones de cada uno de los comandos; los estudiantes reflejaron interés y manifestaron satisfacción cuando interactuaron con Geogebra y conocieron cada una de las opciones que este programa les ofreció. En las demás actividades se trabajó los diferentes ángulos tomando como referente aquellos elementos que presentaban semejanza con la amplitud del ángulo recto y llano, donde los estudiantes seleccionaron aquellos que tenían una amplitud menor, mayor e igual; determinando en la tercera fase de aprendizaje “Explicitación” los nombres de cada ángulo de acuerdo a su amplitud.

A través de la observación de la tabla N°7, se refleja el progreso de los estudiantes frente a su estado inicial respecto al concepto de ángulo, el vocabulario empleado por ellos para referirse a los atributos de los ángulos aunque es impreciso refleja que hay apropiación, cabe rescatar como lo mencionan los autores al referirse a los niveles de razonamiento del modelo van Hiele, los estudiantes aún presentan razonamientos conformes al primer nivel, asimismo se refleja paulatinamente el avance que permite atribuir gran parte a la implementación de las primeras fases

del aprendizaje, sin dejar de lado lo que visualizan en Geogebra y cómo han adaptado la herramienta así mismos, haciendo conjeturas y conclusiones para construir conocimiento.

A partir de la tabla N°7 se pueden obtener los siguientes resultados:

Cuatro estudiantes a partir de cada una de las actividades desarrolladas utilizan expresiones imprecisas como “algo derecho”, “línea recta”, “regla” para dar a conocer sus ideas y los atributos de los ángulos.

Tres estudiantes se ubicaron en el descriptor de nivel 1.3 dado que expresaron los ángulos como puntas, abierto, rectas.

Seis estudiantes, fueron ubicados en el descriptor de nivel 1.4 dado que percibe los ángulos como objetos individuales y de lo cual no los llama por su nombre convencional.

Cuatro estudiantes a partir de las actividades presentan características propias del descriptor de nivel 1.5, al percibir las partes constitutivas de los ángulos no estableciendo relaciones entre ellas.

MOMENTO 3

EVALUACIÓN MEDIADA POR EL ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN RESPECTO A LOS NIVELES DE VAN HIELE “FASE A”

Las actividades del momento tres son realizadas con base en los resultados del momento dos reflejando de esta forma el aspecto cualitativo de la metodología

implementada, también se desarrolla la tercera y la cuarta fase de aprendizaje del modelo utilizado como sustento teórico, expresando con ello el componente didáctico de las actividades sin dejar de lado el uso de Geogebra; por otra parte, se tiene en cuenta la intervención de todos los estudiantes que participaron en la prueba diagnóstica, en busca de detallar el progreso del grupo de estudio.

ACTIVIDAD 1: CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL SOFTWARE

1.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL SOFTWARE”

Esta actividad tiene como finalidad que los estudiantes clasifiquen los ángulos de acuerdo a las particularidades que pueden observar para distinguir la amplitud, establecer cual es la medida de los ángulos y refinar su vocabulario en construcción de nuevos conceptos. De igual manera, los estudiantes emplean diferentes métodos para resolver la actividad, de acuerdo a sus preferencias y la facilidad para ellos, potenciando de esta forma la orientación libre.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL SOFTWARE”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Evaluación acerca de los conceptos trabajados en las actividades anteriores.
- Dragging (arrastre) ángulos.

La actividad inicia con la evaluación de los estudiantes respecto al trabajo de las actividades anteriores, ésta se planea en el software Geogebra y en el cual por medio de unas instrucciones se pide a los estudiantes que arrastren a las

circunferencias de color azul, amarillo, rojo y verde los ángulos rectos, agudos, obtusos y llanos respectivamente, sin que estos pierdan su amplitud; estos ángulos tienen la particularidad de poseer medidas que dan la posibilidad a los estudiantes de establecer una propiedad que tiene relación con los referentes antes trabajados y la amplitud de estos.

La actividad evaluativa se plantea en el software Geogebra de la siguiente manera:

APROPIACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE LA ACTIVIDAD DE INTERVENCIÓN N°1

Ubica en las respectivas circunferencias cada uno de los ángulos según correspondan su nombre a su amplitud.
En la circunferencia de color **AZUL** ubica los ángulos **RECTOS**.
En la circunferencia de color **AMARILO** ubica los ángulos **AGUDOS**.
En la circunferencia de color **ROJO** ubica los ángulos **OBTUSOS**.
En la circunferencia de color **VERDE** ubica los ángulos **LLANOS**.

De acuerdo a la actividad anterior, puedes dar a conocer características generales de cada uno de los conjuntos de ángulos y cuáles serían estas.

Ingrid Ivonne Acevedo Gutiérrez, Nadia Vanessa Ramírez Gutiérrez y Gabriel Jaime Londoño Yepes, Creado con [GeoGebra](https://www.geogebra.org/)

Imagen N°11. Clasificación de Ángulos en el Software

El trabajo realizado por uno de los estudiantes en la evaluación se puede observar en la siguiente imagen:

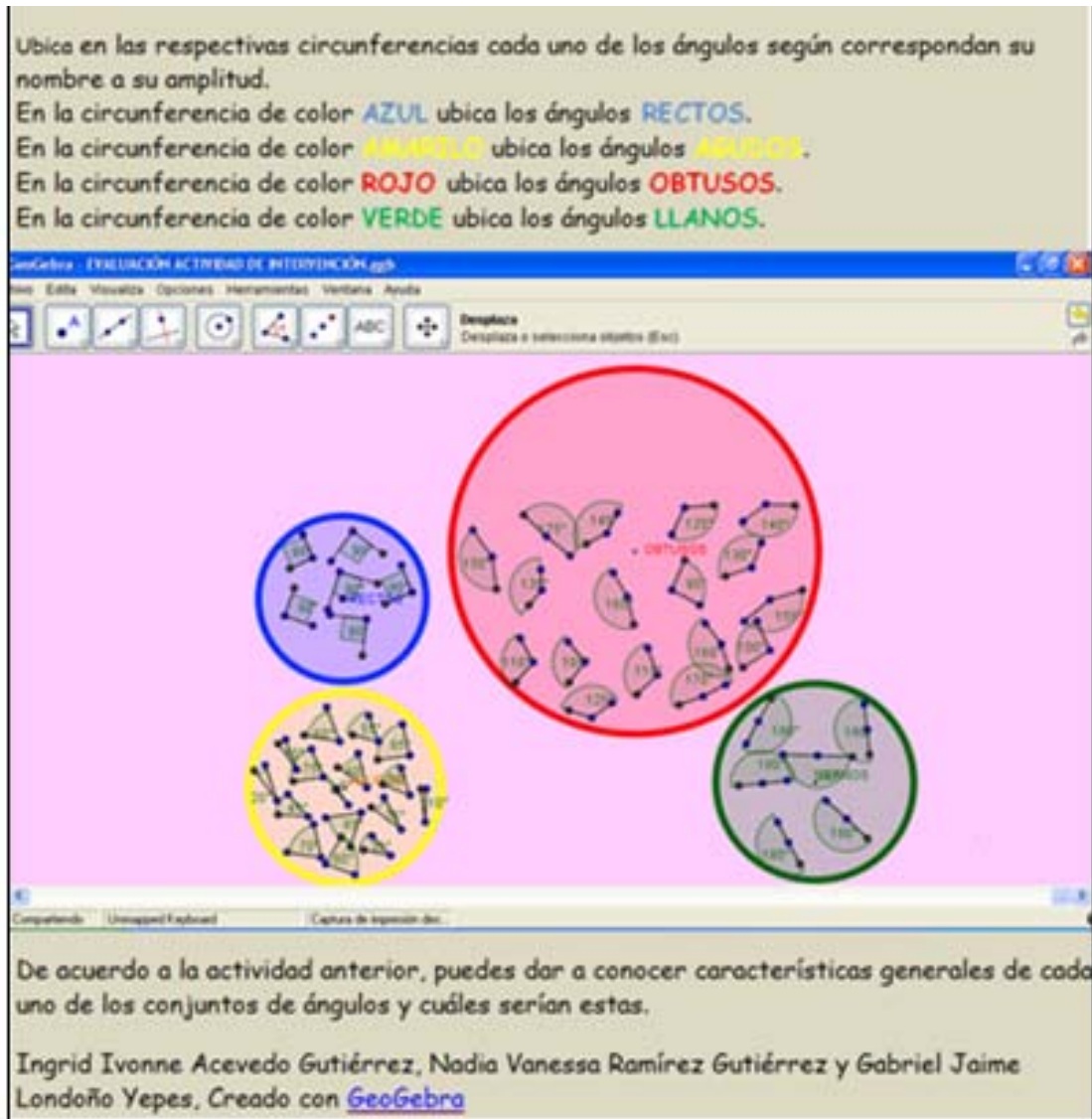


Imagen N°12. Trabajo Realizado por un Estudiante

Luego de realizada la actividad se pide a los estudiantes el reconocimiento de otras características de cada uno de los conjuntos de los ángulos para lo cual se producen las siguientes respuestas:

- Estudiante 1: Todos los ángulos que están en la circunferencia de color azul son iguales y tienen la misma medida la cual es 90° [dice 90 grados].
- Estudiante 2: Todos los ángulos de la circunferencia de color rojo están entre más de 90° [dice 90 grados] y menos de 180° [dice 180 grados].
- Estudiante 10: Todos los ángulos de la circunferencia de color verde son iguales.
- Profesor (a): ¿Por qué son iguales todos los ángulos de la circunferencia de color verde?
- Estudiante 10: Porque todos tienen la misma amplitud [señala el conjunto y el arco de circunferencia que representa el ángulo].
- Estudiante 2: Profesor, mire que todos los ángulos de la circunferencia de color verde miden lo mismo, 180° [dice 180 grados]
- Estudiante 9: Los ángulos de la circunferencia de color amarillo son más pequeños que el ángulo recto.
Mire profesor (a) [señala los ángulos de la circunferencia de color amarillo], la amplitud es más pequeña que la de los ángulos rectos.

1.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL SOFTWARE”

A través del desarrollo de la prueba se puede evidenciar que los estudiantes tienen en cuenta los elementos de referencia empleados en las actividades de intervención anteriores (puntas del tablero, del cuaderno, de la baldosa).

Estos logran relacionar el nombre de los ángulos con su respectiva medida, al distinguir la amplitud de los ángulos con sus respectiva medida para llegar a la conclusión de que los ángulos agudos poseen una medida menor a 90° (noventa

grados) que los ángulos rectos y llanos para lo cual poseen la medida de 90° y 180° (ciento ochenta grados) respectivamente y la cual esta no cambia, dado que poseen una medida estándar; de otro modo, establecen que el ángulo obtuso es mayor de 90° y menor de 180° .

ACTIVIDAD 2: DISEÑO Y GRAFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL PAPEL Y EN EL SOFTWARE

2.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “DISEÑO Y GRAFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL PAPEL Y EN EL SOFTWARE”

La prueba pertenece al momento 3 de la fase A del método investigativo estudio de casos Mixtos, el cual promueve las fases 3 y 4 “fase de explicación y fase de orientación libre”. Con la prueba, se busca que el estudiante exprese los conocimientos adquiridos a través de preguntas abiertas que no limita al estudiante a respuestas preconcebidas por el educador.

En esta actividad se hace uso tanto del software como del papel para observar como los estudiantes reproducen lo antes visto en otros medios, y así permitir el desenvolvimiento del estudiante en relación al concepto y evidenciar la aplicabilidad de este en otros contextos.

2.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “DISEÑO Y GRAFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL PAPEL Y EN EL SOFTWARE”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Organización del grupo de niños estudiados.
- Explicación de la prueba.
- Aplicación de la prueba.

La prueba inicia con la organización del grupo de personas estudiadas (10 integrantes).

Siguiendo el proceso se entrega el material de trabajo consistente en una hoja en blanco.

Luego se inicia la explicación de la actividad, de la siguiente manera:

- Marcar la hoja con el nombre completo.
- Dibujar cinco ángulos cualesquiera.

Cada estudiante después de tener clara la instrucción de la prueba, desarrolla la actividad sin ninguna intervención poniendo en juego sus experiencias con el concepto trabajado en las actividades anteriores.

Posteriormente los estudiantes construyen cinco ángulos utilizando las opciones que le presenta el software, actividad no dirigida por el profesor (a) dado que los estudiantes en actividades anteriores se habían enfrentado a este tipo de construcciones. Luego se pide a éstos que intenten arrastrar al lado izquierdo de la pantalla cada uno de los ángulos sin que estos pierdan su amplitud.

La actividad se evidencia en los siguientes trabajos escaneados y en fotos tomadas a lo reproducido en el software:

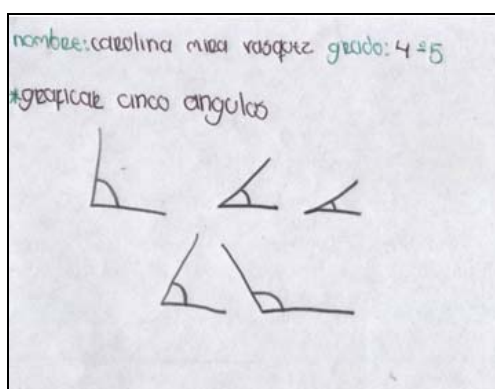


Imagen N°13. Trabajo Realizado por un Estudiante

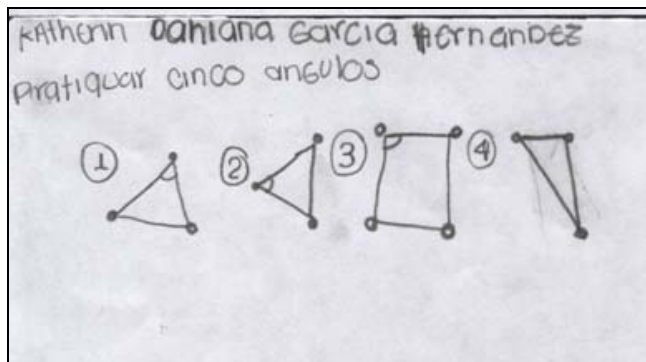


Imagen N°14. Trabajo Realizado por un Estudiante

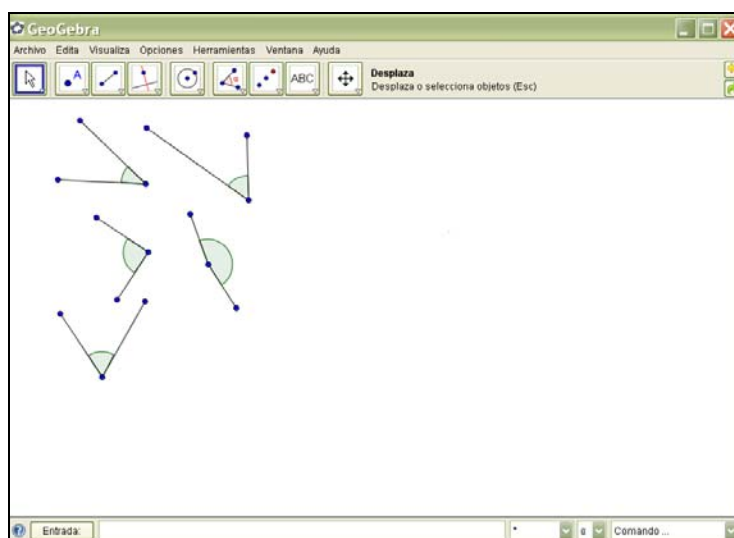


Imagen N°15. Trabajo Realizado en el Software por un Estudiante

2.4. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “DISEÑO Y GRAFICACIÓN DE ÁNGULOS EN EL PAPEL Y EN EL SOFTWARE”

Cinco estudiantes al momento de dibujar los ángulos, asociaron la forma como el software permite construir un ángulo al graficar el ángulo a través de tres puntos “extremos de los segmentos y vértices”. Se evidencia una transferencia visual de construcción, siendo ésta, uno de los contrapiés, dado que el estudiante siempre tendrá que construir estos puntos para realizar un ángulo.

Dos estudiantes reconocen el ángulo en algunos polígonos al dibujar triángulos y cuadrados y seleccionar uno de sus vértices como el ángulo solicitado. Se puede evidenciar la correspondencia entre ángulo y esquina o punta, igualmente ellos han introyectado el concepto a partir de la punta del cuaderno, la punta de la baldosa, etc., implementos presentados como referencias visuales para las actividades presentadas en el momento dos.

Tres estudiantes evidencian la adquisición del concepto de manera adecuada y coherente al presentar en sus dibujos los ángulos no limitados por la construcción del software (puntos referenciales del ángulo: extremos de los segmentos y vértices), además se puede observar la variedad de ángulos que se reconocieron y las diferentes posiciones que estos pueden ocupar, dado que al momento de interactuar con el software, los ángulos son trasladados y rotados sin perder sus propiedades, lo cual posibilita en los estudiantes la observación de la invarianza de propiedades respectivas.

El proceso de visualización cobra importancia en el momento que hay una interacción entre el software, el profesor y los estudiantes, al momento que los estudiantes comparan, señalan y realizan sus conjeturas a partir de lo tratado; dado que, la evaluación arrojó resultados positivos frente a la construcción que se les pidió.

Hay un grupo diverso de estudiantes, que a partir de sus aptitudes han mostrado afinidad frente al trabajo desarrollado; en la medida que hay disciplina, claridad de los conceptos y los estudiantes pretenden construir conocimientos ya que ante una duda los estudiantes buscan la interacción con el maestro.

ACTIVIDAD 3: EVALUACIÓN DE LA POBLACIÓN (GRADO 4^{to} GRUPO 5)

3.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DE LA POBLACIÓN (GRADO 4^{to} GRUPO 5)”

Teniendo en cuenta las fases del método investigativo de nuestra tesis el cual es el estudio de caso mixto, se aplicó nuevamente la fase A en la cual se evalúa en los estudiantes los procesos adquiridos anteriormente (fase B de intervención) y buscando así reconocer y observar en el grupo experimental el avance significativo del concepto trabajado.

3.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DE LA POBLACIÓN (GRADO 4^{to} GRUPO 5)”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Organización del grupo 4-5.
- Explicación de la actividad.
- Aplicación de la prueba.

La actividad se inicia con la organización del grupo 4^o5, integrado por 39 estudiantes entre niños y niñas, de los cuales 33 presentaron la prueba.

Seguidamente se entrega el material de trabajo a cada uno de los estudiantes; el cual consiste en una ficha de trabajo y 4 colores diferentes; luego se explica la actividad teniendo en cuenta que los estudiantes comprenden más el lenguaje verbal que escrito dado que tienen poca comprensión de lectura y en algunos casos la distracción imposibilita el correcto desarrollo de la misma.

El material de trabajo entregado es el siguiente:

Valoración de las actividades de intervención N°1- N° 2- N°3- N°4 y N°5

Dada la siguiente gráfica determina la clase de ángulos que se presentan señalándolos en ella y píntalos de la siguiente manera:

Rojo: ángulos agudos.

Azul: ángulo recto.

Verde: ángulo obtuso.

Naranja: ángulo llano.

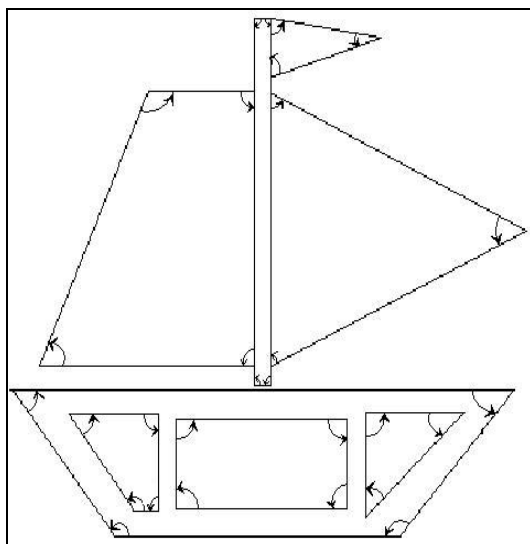


Imagen F°16. Ficha de Trabajo “Evaluación de la Población”

El trabajo realizado se puede evidenciar en el siguiente material de trabajo escaneado:

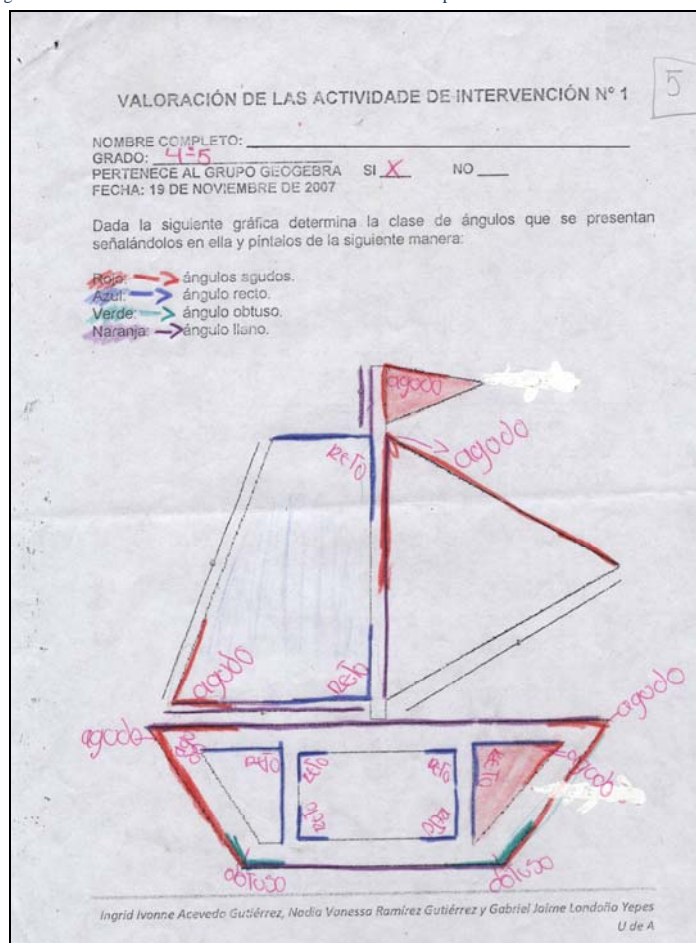


Imagen N°17. Ficha de Trabajo de un Estudiante “Evaluación de la Población”

3.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DE LA POBLACIÓN (GRADO 4^{to} GRUPO 5)”

Algunos estudiantes se dejaron influenciar por el contexto, ya que pintaron el barco de manera artística.

La gran mayoría de estudiantes que pertenecen al grupo experimental reconocieron las clases de ángulos en el dibujo presentado.

Los estudiantes que pertenecen al grupo experimental y en el cual su asistencia no fue continua, no obtuvieron el rendimiento esperado, dado que existen pocas intervenciones registradas.

ACTIVIDAD 4: EVALUACIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL (10 ESTUDIANTES)

4.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL 10 ESTUDIANTES”

La prueba pertenece al momento 3 de la fase A del método investigativo de estudios caso mixto la cual ésta diseñada para promover las fases 3 y 4 “fase de explicación y fase de orientación libre”. Este trabajo se diferencia de las anteriores pruebas, puesto que este se realiza en grupos y no de manera individual, permitiendo que el estudiante interactúe con el otro (relación entre pares) y que a través de sus opiniones y explicaciones se apropien más del concepto.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL 10 ESTUDIANTES”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Organización del grupo de personas estudiadas.
- Explicación de la prueba.
- Aplicación de la prueba.

La prueba valorativa inicia con 9 integrantes del grupo de personas estudiadas ubicadas en el ambiente de aprendizaje “la biblioteca” de la institución educativa Javiera Londoño Sevilla- Sede Sofía Ospina de Navarro, organizados en dos

grupos de 5 y 4 estudiantes respectivamente. Luego se entrega el material de trabajo consistente en una ficha de trabajo y 4 lápices de diferente color.

Teniendo en cuenta que cada estudiante tuviera el material de trabajo “la ficha”, se realiza un reconocimiento visual de los componentes de la misma, concluyendo que en esta se encuentra una casa, un sol, una silla, una mesa, una mariposa y un payaso. Esta introducción se realiza con la intención de relacionar lo trabajado en el momento 2 (Incorporación y aplicación de las actividades mediadas por el software Geogebra) con el contestó; de igual manera, ésta es una forma de realizar un análisis a priori del material de trabajo.

Dando continuidad se selecciona un lápiz de color rojo planteando la siguiente afirmación: “selecciona todos los ángulos agudos que encuentres”. Luego de esta afirmación se da un tiempo prudente para la selección de dicho ángulo. El planteamiento de las otras afirmaciones respecto a las otras clases de ángulos (rectos, obtusos, llanos) se propone de igual manera como la inicial, utilizando los colores azul, verde y amarillo respectivamente.

El material de trabajo es el siguiente:

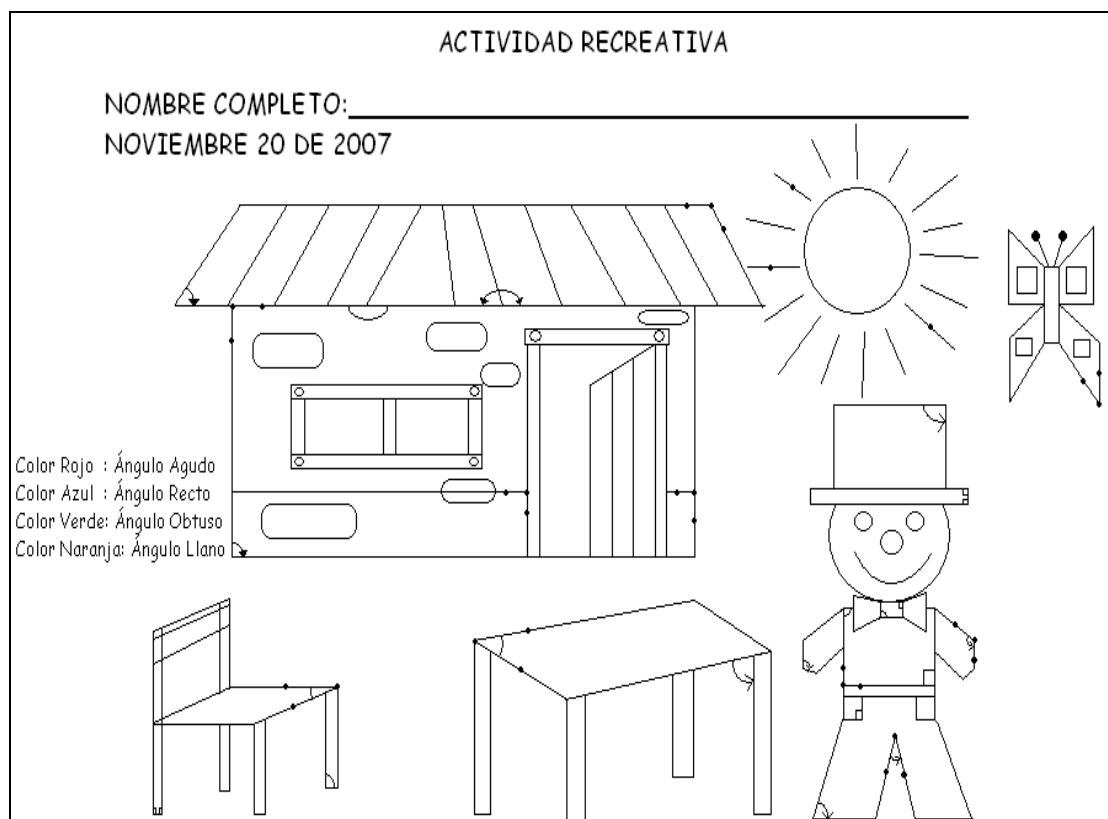


Imagen N°18 Ficha de Trabajo “Evaluación del Grupo Experimental”

A unos pocos minutos del desarrollo de la prueba se plantea la siguiente pregunta a los estudiantes ¿Cómo estaban pintados en el software los ángulos?, dado que dos estudiantes comienzan a pintar el polígono que contiene el ángulo, pero estos resaltan la esquina o la punta en donde visualizan el ángulo. La respuesta a esta pregunta fue dada por varios estudiantes los cuales pintan en su respectivo material el ángulo, explicando a sus compañeros la forma a utilizar. Luego surge otra pregunta: ¿De acuerdo a la forma como los ángulos estaban pintados, cómo los podrías pintar?, esta pregunta se subsana al momento de los dos estudiantes pintar sus respectivas fichas.

El trabajo realizado se puede evidenciar en el siguiente material de trabajo escaneado:



Imagen N°19 Ficha de Trabajo de un Estudiante “Evaluación de la Población”

En el dibujo se puede interpretar que el estudiante realiza una clasificación de los ángulos al observar que él utiliza los colores respectivos, lográndose ver un progreso de la prueba inicial a la presente, dado que estos no pintan por contexto como en la prueba inicial, sino por lo que se les está sugiriendo en relación a los colores.

4.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL 10 ESTUDIANTES”

El trabajo en grupo permite la correspondencia bidireccional del concepto entre pares.

Las apreciaciones de un estudiante pueden ser adquiridas por el otro estudiante para que éste sustente adecuadamente la actividad.

A través de material tangible, el software apoya la construcción del concepto de ángulo, familiarizando la actividad con las funciones y la presentación de éste, permitiendo expresar adecuadamente la solución de dicha actividad.

DESCRIPTORES DE NIVEL

Teniendo en cuenta los análisis respectivos de cada actividad respecto al Momento 3 “Evaluación mediada por el análisis de la intervención respecto a los niveles de van Hiele”, Fase A del método de investigación “estudios de caso mixto”, se ubican los estudiantes en los respectivos descriptores.

Estudiante	Descriptores de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptores de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1				X	X			X					
Est. 2						X	X	X	X	X			
Est. 3		X	X										
Est. 4		X											
Est. 5						X	X	X	X	X	X		
Est. 6						X	X	X	X		X		
Est. 7				X	X	X							
Est. 8							X	X	X		X		
Est. 9						X	X	X	X		X	X	
Est. 10		X	X										

Tabla N°8. Descriptores de Nivel Momento 3

Convenciones

D.N.: Descriptor de Nivel.

Est.: Estudiante.

Para este tercer momento los estudiantes conociendo los nombres de los ángulos identifican la medida que hace alusión a cada clasificación es decir logran identificar que los ángulos agudos tienen medida y amplitud menor que el ángulo recto y los ángulos obtusos tienen una medida mayor a la del ángulo recto y menor a la del ángulo llano, este tipo de razonamientos se fundamentan en los registros de audio, video y material físico.

Se logra ver como los estudiantes a través de la elaboración de ángulos en diferentes medios y perspectivas reconocen que estos no tienen un limitante en cuanto a la longitud de sus lados. También éstos llegan a la conclusión que la amplitud de un ángulo está en estrecha relación con su medida por lo que llegan a clasificar los ángulos por estos dos aspectos.

A partir de la tabla N°8 se pueden obtener las siguientes conclusiones:

Cinco estudiantes a partir de cada una de las actividades evaluativas describen las partes de los ángulos.

Cinco estudiantes se ubicaron en el descriptor de nivel 2.2 dado que expresaron que los ángulos no dependen de la longitud de sus lados.

Seis estudiantes, fueron ubicados en el descriptor de nivel 2.3 dado que percibe la medición del ángulo con la amplitud.

Cinco estudiantes a partir de las actividades evaluativas presentan características propias del descriptor de nivel 2.4, dado que clasifican los ángulos por su amplitud.

MOMENTO 4

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN “FASE B”

ACTIVIDAD 1: INTERVENCIÓN CON LOS POLIEDROS

1.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD “INTERVENCIÓN CON LOS POLIEDROS”

En esta actividad se presenta el desarrollo del modelo de van Hiele “Fase de interacción” en la cual el estudiante reconoce que el ángulo tiene diferentes relaciones y propiedades y que estos se pueden encontrar en diferentes contextos o en otras figuras geométricas, permitiendo reafirmar los diferentes atributos que poseen los ángulos en el contexto. Además se favorece lo que plantea la geometría dinámica dado que luego de reconocer las figuras en la pantalla se apropia de estas en el contexto.

En esta actividad se presenta al grupo de investigación, un conjunto de cuerpos geométricos buscando que cada uno de ellos identifique las clases de ángulos en la respectiva estructura tridimensional.

1.2. DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD “INTERVENCIÓN CON LOS POLIEDROS”

La actividad se desarrolla de la siguiente manera:

- Organización del grupo de personas estudiadas.
- Explicación de la Intervención.
- Aplicación de la intervención en la cual se socializa los conceptos adquiridos.

La intervención inicia con los 10 estudiantes pertenecientes al grupo de personas estudiadas el cual fue organizado en mesa redonda. Esta intervención se desarrolla en la biblioteca de la Institución Educativa Javiera Londoño Sevilla-Sede Sofía Ospina de Navarro. Se pone a disposición diferentes cuerpos geométricos con la finalidad de reconocer en éstos los diferentes ángulos que la componen, además contextualizar la situación buscando que los estudiantes encuentren los diferentes ángulos en los respectivos poliedros, para así observar en ellos la respectiva correlación del entorno con la geometría.

Se disponen diferentes cuerpos geométricos y figuras geométricas (“Poliedros regulares e irregulares” y “Polígonos regulares e irregulares”) como: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro, prismas de diferente base (triangulares, cuadrada, pentagonal, hexagonal, heptagonal, octagonal), pirámides de diferente base (triangular, cuadrada, pentagonal, hexagonal, heptagonal, octagonal), cuerpos redondos (esfera, cilindro, cono, cono truncado) para el caso de los poliedros; para los polígonos: triángulos, cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, trapecios y trapezoides), pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, circunferencias.

Se les entrega a los 10 estudiantes diferentes cuerpos y se les pide que a partir de lo trabajado anteriormente identifiquen en ellos los diferentes ángulos. De igual manera se desarrollan las siguientes preguntas:

¿Qué clase de figura tienes?

¿Qué figura es ésta? [*Se presenta una figura determinada*]

¿Ésta figura tiene ángulos? [*Se presenta la figura que se nombro*]

¿Por qué esta figura no tiene ángulos?

¿Por qué líneas ésta conformada la figura? [*Rectas o curvas*]

¿En dónde encontramos ángulos en la esfera?

Algunas respuestas producidas a partir de las preguntas fueron las siguientes:

- Profesor (a): ¿En dónde encontramos ángulos en la esfera?
- Estudiante 2: En ningún lado porque también es circular.
- Profesor (a): Explícanos por qué los ángulos son agudos, rectos, obtusos o llanos.
- Estudiante 2: El cuadrado en este pedacito [*señala una de las esquinas del cuadrado*] tiene el ángulo recto.
- Profesor (a): ¿Y el ángulo agudo, en dónde?
- Estudiante 2: En este triángulo [*Señala una de las esquinas del triángulo equilátero*].
- Profesor (a): ¿Por qué está conformada la figura? [*El profesor señala una figura determinada*].
- Estudiante 2: Por ángulos.
- Profesor (a): ¿Por qué son cuadrados?, ¿Por qué son triángulos? [*El profesor señala cuadrados y triángulos*]
- Estudiante 2: El triángulo tiene tres puntas y el cuadrado cuatro puntas y también el cuadrado tiene cuatro lados.
- Profesor (a): ¿Qué figura tienes?
- Estudiante 1: Un cuadrado.
- Profesor (a): ¿Qué ángulos puedes encontrar?
- Estudiante 1: Ángulos rectos.
- Profesor (a): ¿Ese objeto que tienes puede tener más ángulos?
- Estudiante 1: Si.
- Profesor (a): ¿Cuáles?
- Estudiante 1: Ángulos llanos.
- Profesor (a): ¿Dónde encontramos los ángulos llanos en ese cuadrado?
- Estudiante 1: Aquí [*Señala los lados del cuadrado*].

Imágenes de los estudiantes y los profesores interactuando con el medio.



Imagen N°20. Intervención con los Poliedros



Imagen N°21. intervención con los poliedros



Imagen N°22. Intervención con los Poliedros



Imagen N°23. Intervención con los Poliedros



Imagen N°24. Intervención con los Poliedros



Imagen N°25. Intervención con los Poliedros

1.3. RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD “INTERVENCIÓN CON LOS POLIEDROS”

Se puede evidenciar en la intervención la última fase de aprendizaje del modelo de razonamiento van Hiele, dado que los estudiantes unificaron el ángulo con sus relaciones.

El profesor proporciona a los estudiantes objetos para que los estudiantes identifiquen ángulos.

Se evidencia como los estudiantes a partir de la visualización de diferentes objetos relacionan el concepto de ángulo con sus diferentes propiedades. De igual manera, realizan una correspondencia del concepto con lo trabajado mediante el software.

Los estudiantes combinaron los conceptos adquiridos a través de las actividades de intervención evidenciándose al momento de manipular los poliedros.

La actividad permitió que los estudiantes se expresaran a través de un lenguaje mas apropiado.

La actividad permitió que los estudiantes buscaran ejemplos para explicarse entre ellos, esta interacción de pares es evidenciada a través del trabajo en grupo.

Se evidencia mayor destreza en la clasificación de los ángulos a causa de la conformación de familias respecto a las propiedades de cada una de las clases de ángulos.

El estudiante identificó en los poliedros las clases de ángulos y sus propiedades al momento de manipular el poliedro dado que su argumentación está en relación a lo conocido anteriormente. De igual manera, identificó características de los cuerpos, actividad que permitirá luego el diseño de futuras actividades en relación al concepto en mención.

A través de los objetos experimentales los estudiantes realizaron generalizaciones para el concepto de ángulo y sus propiedades, dado que estos realizaron agrupaciones (familias) de figuras, lo que permitió la identificación de los diferentes ángulos en cada una de ellas.

DESCRIPTORES DE NIVEL

Teniendo en cuenta los análisis respectivos de cada actividad respecto al Momento 4 “Contextualización de la intervención”, Fase B del método de investigación “estudios de caso mixto”, se ubican los estudiantes en los respectivos descriptores.

Estudiante	Descriptores de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptores de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1						X	X	X	X		X		X
Est. 2							X	X	X	X	X		X
Est. 3				X	X								
Est. 4				X	X								
Est. 5							X	X	X	X	X		X
Est. 6							X	X	X	X	X		X
Est. 7							X	X	X	X			
Est. 8							X	X	X	X	X		X
Est. 9							X	X	X	X	X	X	X
Est. 10				X	X								

Tabla nº9. Descriptores de Nivel Momento 4

Convenciones

D.N.: Descriptor de Nivel.

Est.: Estudiante.

Para este cuarto momento los estudiantes reconocen en los poliedros los diferentes ángulos que componen el cuerpo geométrico, además argumentan porque son agudos, rectos es decir según sea su clasificación. Los estudiantes lograron ver que los ángulos adquieren sentido en la medida que se relacionan con otros objetos geométricos además de identificar otras figuras como los polígonos que pueden ser objeto de estudio para futuras investigaciones.

A partir de la tabla N°9 se pueden obtener los siguientes resultados:

Seis estudiantes a partir de la actividad llevada a cabo bajo los poliedros describen los ángulos utilizando adecuadamente un lenguaje usual.

Seis estudiantes se ubicaron en el descriptor de nivel 2.6 dado que expresaron que los ángulos según su amplitud pertenecen a un grupo de familias.

Se evidencia que dos estudiantes continúan en el nivel 1, dado que sus participaciones al momento de desarrollar la actividad no se presentaron.

El estudiante 10 tiene un proceso lento dado a la inasistencia continua en el desarrollo de cada una de las actividades.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este apartado se presentaran los resultados obtenidos a partir del objetivo general y específicos, las conclusiones obtenidas a través del desarrollo de las intervenciones y las recomendaciones reflejo en pro de una evolución de la aplicación del concepto.

4.1 RESULTADOS

OBJETIVOS	ACTIVIDADES	INDICADORES Y PRODUCTOS
Avanzar en la comprensión del concepto de ángulo y sus propiedades utilizando como soporte el software Geogebra, buscando con ello la transición en los niveles iniciales de razonamiento del modelo de van Hiele.	El diseño de la secuencia de actividades lo cual se consolida una propuesta didáctica enmarcada en las fases del modelo de van Hiele.	Comparación de las tablas 11 y 12 de los descriptores de nivel del momento 1 y momento 4 respectivamente.
Identificar las nociones que han alcanzado a desarrollar los estudiantes de grado cuarto, frente al concepto de ángulo.	Diseño de prueba diagnóstica, entrevistas.	Descriptores de nivel. Categorías. Cuadro comparativo de los desarrollos conceptuales de los estudiantes. Documento técnico con las situaciones de aprendizaje diseñadas para el trabajo. Dos ponencias.
Construir y validar una propuesta que involucre las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele relativas al concepto de ángulo de sus propiedades, en la transición del nivel 1 al 2.	Presentación del software, actividad ángulos agudos, actividad ángulos rectos, actividad ángulos obtusos, actividad ángulos llanos, clasificación de ángulos en el software, diseño y graficación de ángulos en el papel, evaluación de la población (grado 4to grupo 5) , evaluación del grupo objeto de estudio (10 estudiantes), intervención con los poliedros	Descriptores de nivel. Resultados de cada momento.

Tabla N° 10. Sustentación de los Resultados

MOMENTO 1

Estudiante	Descriptor de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptor de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1		X	X										
Est. 2			X	X									
Est. 3	X												
Est. 4	X												
Est. 5			X										
Est. 6		X		X									
Est. 7		X											
Est. 8		X											
Est. 9		X	X										
Est. 10	X												

Tabla N° 11. Descriptores de Nivel Momento 1



MOMENTO 4

Estudiante	Descriptor de Nivel 1 Reconocimiento Visual					Descriptor de Nivel 2 Análisis							
	(D.N.1.1)	(D.N.1.2)	(D.N.1.3)	(D.N.1.4)	(D.N.1.5)	(D.N.2.1)	(D.N.2.2)	(D.N.2.3)	(D.N.2.4)	(D.N.2.5)	(D.N.2.6)	(D.N.2.7)	(D.N.2.8)
Est. 1						X	X	X	X		X		X
Est. 2							X	X	X	X	X		X
Est. 3				X	X								
Est. 4				X	X								
Est. 5							X	X	X	X	X		X
Est. 6							X	X	X	X	X		X
Est. 7							X	X	X	X			
Est. 8							X	X	X	X	X		X
Est. 9							X	X	X	X	X	X	X
Est. 10				X	X								

Tabla N° 12. Descriptores de Nivel Momento 4

En la lectura de los cuadros de los “*descriptores de nivel*” pertenecientes al momento 1 y momento 4 se identifica que el razonamiento matemático de los estudiantes frente al concepto de ángulo es diferente, reflejando con esto un progreso conceptual; bajo lo establecido en el modelo de van Hiele la mayoría de los estudiantes logra la transición del primer nivel de razonamiento “Visualización” al segundo nivel “Análisis”; a parte de reconocer los ángulos por su forma y de utilizar un vocabulario impreciso, en general los estudiantes reconocen los ángulos por su nombre, amplitud y medida, además de reconocen que estos son partes constitutivas de otros cuerpos geométricos.

El análisis del razonamiento de los estudiantes manifestado en los cuadros de los descriptores de nivel, permite establecer que hay pertinencia con la elaboración de las actividades mediadas por el software Geogebra, asimismo la implementación de las fases de aprendizaje del modelo en la medida que estas son tomadas como las directrices o pasos que aborda el profesor para facilitar el avance al nivel superior.

Es importante rescatar que el trabajo en las actividades transversalizadas por las fases de aprendizaje y el software al igual que con otros medios requiere presencialidad constante por parte de los estudiantes, dado que es un aspecto importante para que el estudiante tenga un progreso continuo y haya un retroceso con las metas planteadas por el profesor; situación que se expresa con los estudiantes 3, 4 y 10.

4.2. CONCLUSIONES

Geogebra fue implementado como un soporte en el desarrollo metodológico; dado que hubo complementariedad entre el trabajo con material físico y el trabajo virtual. El trabajo virtual le imprime un carácter dinámico a los ángulos permitiendo

visualizar muchas de sus propiedades, característica no siempre presente en otro tipo de material didáctico.

A través de los resultados se refleja las aseveraciones establecidas por los diferentes autores en otras investigaciones confirmando la idea que los software de geometría dinámica permiten identificar la invarianza y elaborar conjeturas que llevan al estudiante a consolidar un concepto; además se observa que los estudiantes presentan características propias de los niveles iniciales y como el apoyo en las fases de aprendizaje complementadas con el soporte del software facilita el avance de un nivel a otro.

Una metodología mixta permite aproximarnos a la realidad educativa de una manera más profunda no solo porque permite cuantificar algunos elementos del razonamiento de los estudiantes, sino interpretar los procedimientos, dificultades, cimientos, bases de estos y trascender de la visión tradicionalista de ganar o perder que deja de lado el carácter social de la educación.

4.3 RECOMENDACIONES

Ampliar la bibliografía con el fin de mejorar la sustentación de la hipótesis que se plantea.

Confrontar otros espacios de investigación fortaleciendo con ello la temática tratada.

Implementar los “descriptores de nivel” en otros contextos respetando la autoría y teniendo en cuenta el objetivo que se busca con la implementación de los mismo.

Un análisis profundo de las fases de aprendizaje dado que no hay muchas investigaciones que centren la atención en este componente del modelo de razonamiento.

El trabajo con el software, el modelo de van Hiele y el tratamiento de polígonos en los diferentes grados de la educación básica y media observando como es el modo de razonar y que niveles van alcanzando en cada grado.

Desarrollar una investigación en donde se evidencie la transversalidad entre los diferentes pensamientos y sistemas, dado que la enseñanza de la educación matemática hoy en día recomienda dicho aspecto.

5. BIBLIOGRAFÍA

CASTIBLANCO Paiba, Ana Cecilia; **URQUINA** Llanos, Henry; **CAMARGO** Uribe, Leonor; & **ACOSTA** Gempeler, Martin E. (2004). Potencial Didáctico de la Geometría Dinámica en el Aprendizaje de la Geometría. Serie documentos. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, D.C., Colombia. Pps 19-50.

De la TORRE G., Andrés F. (2003). Modelización del espacio y el tiempo. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. Pps 8-13.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACIÓN (DNP), (2000). Política Nacional de Ciencia y Tecnología 2000-2002. DNP – Conpes 3008: Santa Fe de Bogotá, D. C. Pps. 36.

EDUCACIÓN Y TECNOLOGÍA. Diciembre 14 de 2005. [Publicación en línea]. Disponible en: <http://edutec.perublogs.com/>. Formato doc. [Con acceso el 18 de noviembre de 2006]

HERNÁNDEZ Sampieri, Roberto; **FERNÁNDEZ** Collado, Carlos; & **BAPTISTA** Lucio, Pilar. (2006). Estudios de Caso. Metodología de la Investigación. México D. F. Editorial Mc. Graw Hill. Pps 1-27.

JARAMILLO López, Carlos Mario & **ESTEBAN** Duarte, Pedro Vicente. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele. Revista Educación y Pedagogía. Enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Número 45. Volumen XVIII. Medellín. Editorial Universidad de Antioquia. Pp. 116.

JIMENEZ Guzmán, Alexander. (2005). Incorporación de tecnologías al aula de matemáticas. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín. Pps 182.

JURADO Hurtado, Flor María & LONDOÑO Cano, René Alejandro. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto e suma de una serie vías áreas de figuras planas. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín. Pps 205.

LABORDE, Colette. (2003). Buscar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la noción de variación con geometría dinámica. Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas, Memorias del congreso internacional. Ministerio de Educación Nacional (MEN). Bogotá D.C. Pps 3-15.

MARTIN-Laborda, Rocío. (2005). Las nuevas tecnologías en la educación. Cuadernos sociedad de la información 5, fundación AUNA. Madrid. Editorial Fundación UNA/ELR. Página Web: www.fundacionauna.org

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio. Santafé de Bogotá. Pps 131.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). (2003). Estándares Básicos de Matemáticas. Santafé de Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá, D.C., Colombia.

MORENO Armella, Luis. (2002. a). Instrumentos matemáticos computacionales. Serie memorias. Seminario nacional de formación de docentes: Uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (MEN).Bogotá, D.C., Colombia. Pps 81-86.

MORENO Armella, Luis. (2002. b). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. Serie memorias. Seminario nacional de formación de docentes: Uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (MEN).Bogotá, D.C., Colombia. Pps 87-92.

PERRY Carrasco, Patricia; **CAMARGO** Uribe, Leonor; **SAMPER** de Caicedo, Carmen & **ROJAS** Morales, Clara. (2006). Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia. Pps. 67-68.

SALKIND J, Neil. (1999). Métodos de investigación. Tercera edición. México. Editorial Prentice Hall. Pps 3-5.

SEPÚLVEDA Quiroz, Ramón Emilio; **OSPINA** Noreña, Carlos Humberto; **GONZÁLEZ**, José Manuel; **OBANDO** Zapata, Gilberto; **QUINTERO** Tamayo, María Miriam. (2005). Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia. Medellín, Colombia. Pps 69-94.

STAKE, Roberto E. (1998). Investigación con estudio de casos. Traducido por Roc Filella. Madrid. Ediciones Morata, S. L. Pps 159

ANEXOS

Direcciones de páginas Web:

<http://www.matedu.cinvestav.mx/congresos/conferenciasp.html>

<http://www.iberocabri.org/memorias2002.htm>

<http://www.matedu.cinvestav.mx/lmoreno.html>

<http://edutec.perublogs.com/>

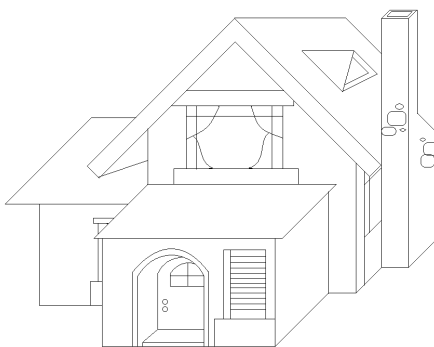
<http://www.fundacionauna.org>

ACTIVIDADES PLANTEADAS:

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Actividad

- a) En el siguiente dibujo se muestra una casa, pinta con colores los ángulos de la siguiente manera; con rojo los ángulos agudos, con verde los ángulos rectos y con azul los ángulos obtusos.

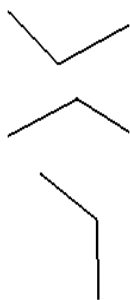


- b) Pinta las partes de la casa que sean parecidas a los siguientes dibujos.

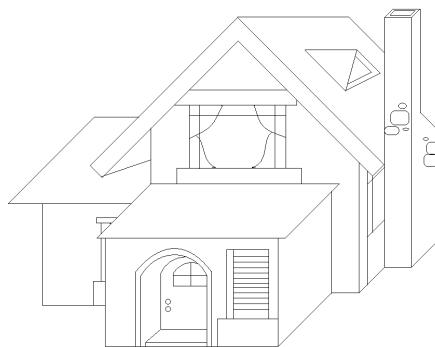
Verde



Rojo



Azul



ACTIVIDAD “EVALUACIÓN DE LA POBLACIÓN

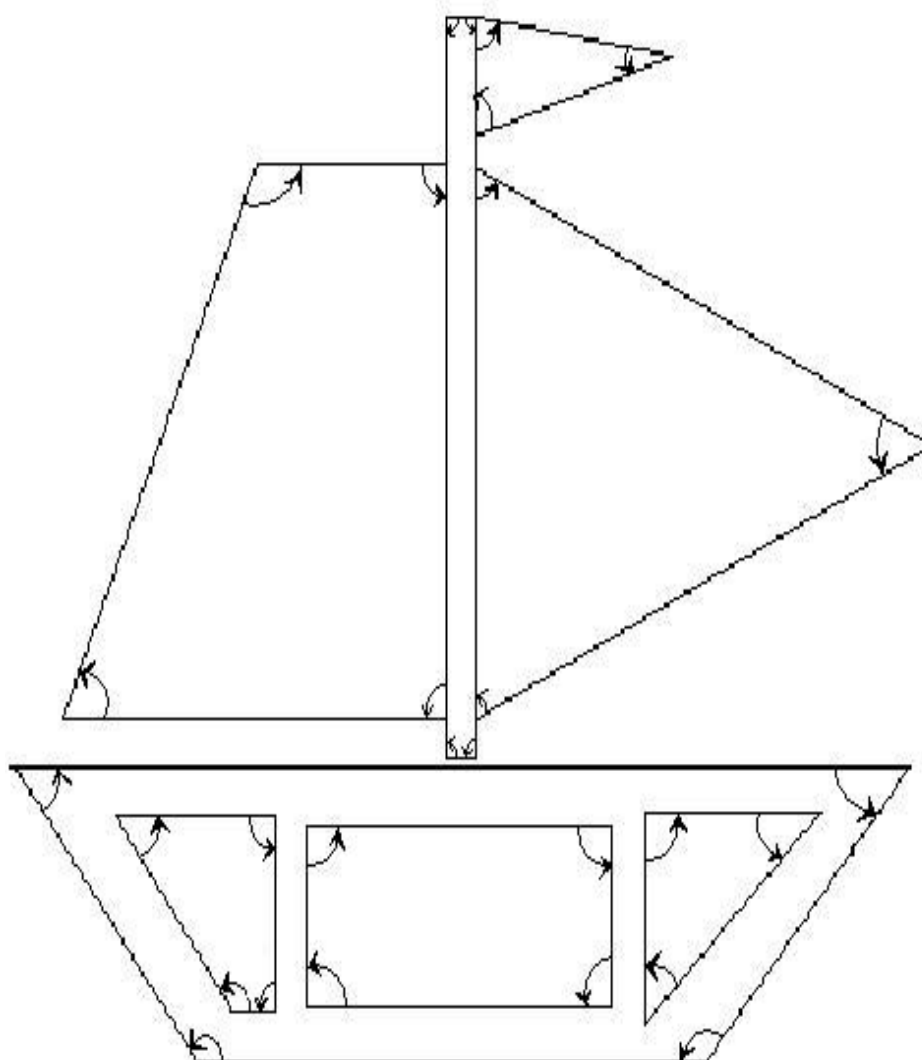
Dada la siguiente gráfica determina la clase de ángulos que se presentan señalándolos en ella y píntalos de la siguiente manera:

Rojo: ángulos agudos.

Azul: ángulo recto.

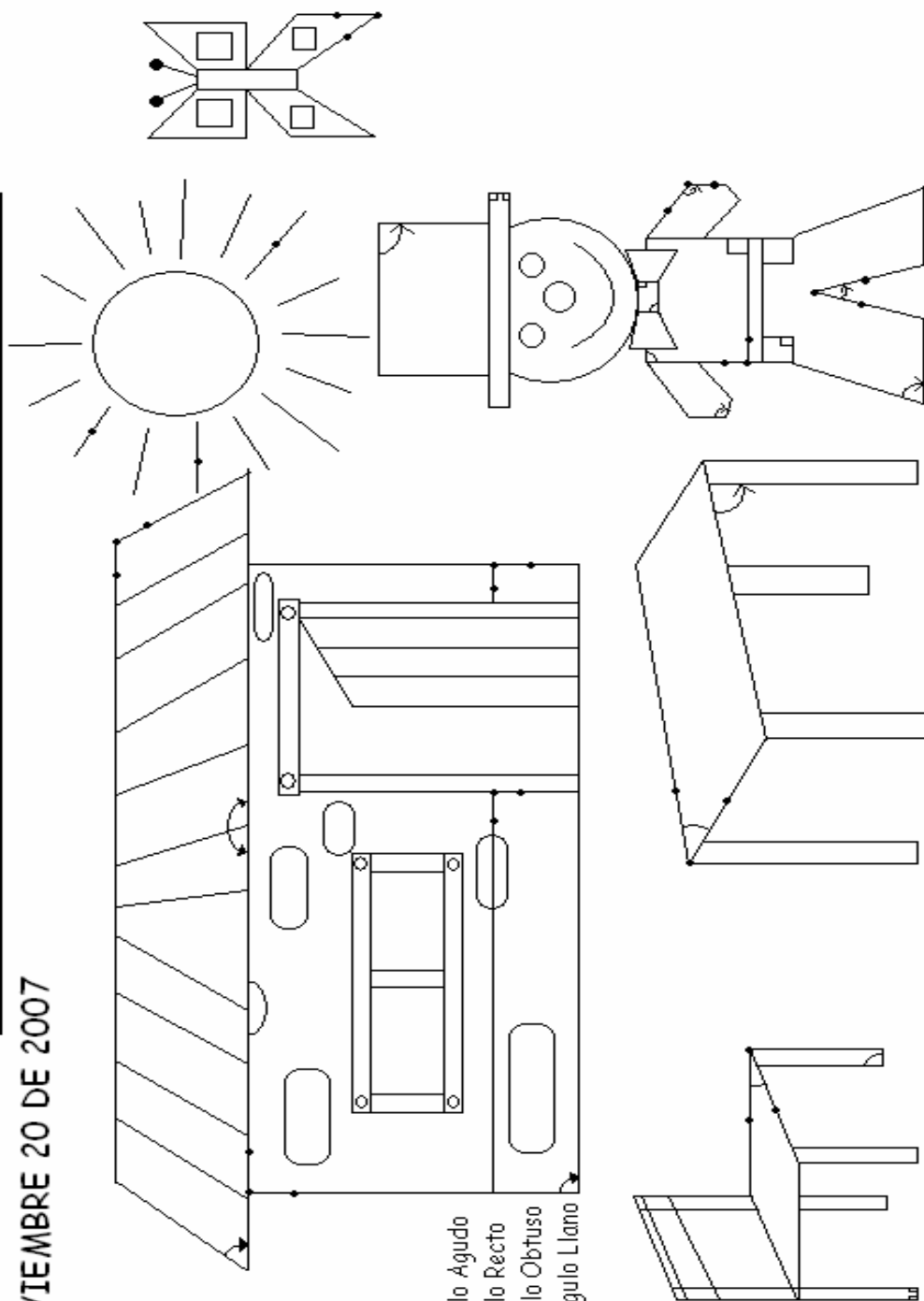
Verde: ángulo obtuso.

Naranja: ángulo llano.



ACTIVIDAD RECREATIVA

NOMBRE COMPLETO: _____
NOVIEMBRE 20 DE 2007



Color Rojo : Ángulo Agudo
Color Azul : Ángulo Recto
Color Verde: Ángulo Obtuso
Color Naranja: Ángulo Llano