El cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico

María Yamile Galeano Ramírez

Delma Stella Ortiz Ruíz

Asesor

Guillermo Silva R.

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de la Enseñanza de la Ciencias y las Artes

Medellín

2008

Tabla de contenido

Introducción

A medida que el niño crece, irá desarrollando los métodos de cálculo mental que empleará a lo largo de la vida y que tal vez difieren de los que utilice en el trabajo escrito (Miaralet, 1962). El cálculo aritmético es ante todo, cálculo mental, es la primera aproximación independiente y universal en la vida del hombre a la matemática, es uno de los ejercicios más sanos para mejorar la concentración, la agilidad mental. Darle sentido a los números fuera de la escuela nos lleva a propiciar la construcción del pensamiento numérico; en este sentido, no basta con enseñar ejercicios de reconocimiento, tampoco basta con enseñar los procedimientos para ejecutar operaciones y reglas que establecen relaciones, ni enseñar a resolver unos cuantos problemas en los que se utilicen números; se trata de ayudar a construir herramientas intelectuales que permitan comprender y actuar en una gran variedad de situaciones que involucren diferentes contextos, es a partir de todo lo anterior que el cálculo mental cobra importancia ya que responde a la autonomía que la sociedad actual le demanda.

En este trabajo se implementa el cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico, que va más allá de resolver cálculos con la mente sino que, tiene en cuenta a su vez, la resolución de problemas, y ejecución de algoritmos y procedimientos.

Planteamiento del problema

"Las construcciones mentales que permiten comprender y resolver problemas que involucran los sistemas numéricos, que surgen en el pensamiento al operar con significados ligados a situaciones particulares, pero sobre todo con los esfuerzos por establecer relaciones entre los diferentes significados para reconocer lo que permanece invariable en ellos, se ha llamado concepto de número[1]". Con el fin de responder a lo anterior, se ha implementado el cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico en la adquisición de nuevos conceptos matemáticos y procedimientos.

Justificación

La enseñanza de la aritmética ha ido cambiando a través de las diferentes propuestas curriculares desarrolladas en los últimos veinte años, considerada como la más actual la promovida por los lineamientos curriculares. Se propone el desarrollo del pensamiento numérico entendido como la compresión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, como medios para comunicar, procesar e interpretar información.

El cálculo mental ha estado relegado del currículo matemático, y se ha dedicado a la enseñanza de conocimientos procedimentales dejando de lado los conocimientos conceptuales, Hiebert y Lefevre (1986, citado en Martínez 2000) hacen una distinción al respecto: "en el conocimiento conceptual los más importante es la red de conexiones entre los elementos de información. El conocimiento profundo de esa red permite su reorganización y reestructuración, su aplicación a nuevos elementos de información. El conocimiento procedimental presenta escasa o nula relación entre la información".

1 Castaño, J. Et, tal., MEN, 2007.

De ahí que se propone llevar a cabo una intervención que movilice dicho pensamiento mediante las situaciones de aprendizaje implementadas. Para tal efecto se tuvieron en cuenta las siguientes preguntas orientadoras:

— ¿Qué situaciones potencian la construcción de conceptos matemáticos a partir de la implementación del cálculo mental como estrategia didáctica?

— ¿Cuáles son las estrategias de cálculo mental más utilizadas por los estudiantes de grado 1º y 7º del Instituto Vicarial Jesús Maestro y la institución Javiera Londoño Barrio Sevilla?

Formulación del problema

¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento numérico, a través de la identificación de las estrategias de cálculo mental, empleadas por los estudiantes del grado primero del I. Vicarial Jesús Maestro y del grado séptimo de la I. E. Javiera Londoño Barrio Sevilla?

Objetivos

General

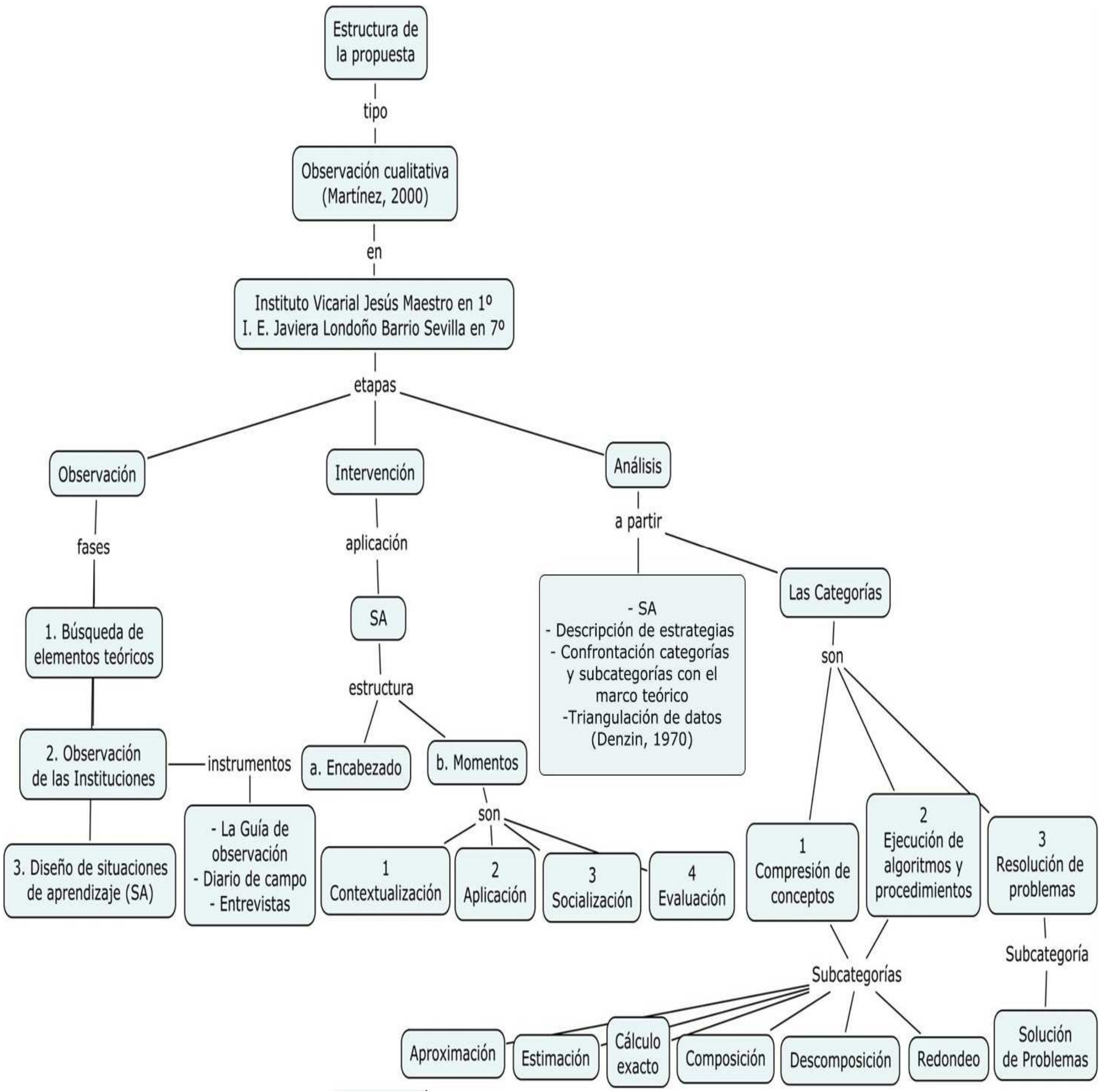
Identificar y promover estrategias de cálculo mental donde los estudiantes de 1º del Instituto Vicarial Jesús Maestro y de 7º de la IEJLBS, potencien el pensamiento numérico y la adquisición de nuevos conceptos y procedimientos.

Específicos

— Diseñar situaciones de aprendizaje que propicien la identificación de las estrategias mediante la socialización de los procedimientos utilizados.

— Describir y analizar las estrategias empleadas por los estudiantes en las situaciones de aprendizaje.

Estructura de la propuesta



Metodología

El proyecto se llevó a cabo bajo el modelo de investigación cualitativa, con la técnica etnográfica, la cual se apoya en la convicción de que las tradiciones, roles, valores, y normas del ambiente en que se vive se van internalizando poco a poco y generan regularidades. El objetivo del estudio etnográfico es contribuir a la compresión de sectores o grupos poblacionales con ciertas características (Martínez, 2000). La intervención se realizó en dos instituciones educativas a mencionar: Instituto Vicarial Jesús Maestro y la Institución Educativa Javiera Londoño barrio Sevilla.

A fin de reconocer el macrocontexto[2] y el microcontexto[3] se empleó una guía de observación (ver anexo No. 1) en la cual se tuvieron en cuenta las siguientes categorías. a) macrocontexto: ubicación geográfica, infraestructura, cotidianidad institucional, contexto socio cultural, documentos rectores de la institución y contexto general de las matemáticas y b) microcontexto: metodología, contexto general de las matemáticas dentro del aula y la relación entre estudiantes-maestros. Los elementos encontrados en el macrocontexto y en el microcontexto se sintetizan a continuación:

— El Instituto Vicarial Jesús Maestro ubicado en el barrio Manrique, en la car 45 No. 45-85, de carácter privado, que alberga una población total de 430 estudiantes. En este Instituto la intervención se realizó en el grado primero 1º, para esto se contó con una población de 29 estudiantes con edades entre los 6 y 7 años: 19 niños y 10 niñas. El nivel socio-económico de la población se ubica en estratos 1 y 2 especialmente.

---

2 El macrocontexto, entendido como el ambiente institucional general y el nivel que se le otorga a la matemática.
3 El microcontexto, entendido como el ambiente en el que está inmerso el estudiante en el aula.

— La I. E. Javiera Londoño ubicada en la calle 71 No. 51D-26, barrio Sevilla; de carácter público, con una población alrededor de 800 estudiantes. La intervención se realizó en dos de los grupos del grado 7º en 7-01 y 7-02, con una población en total de ochenta y seis estudiantes con edades entre los 12 y 15 años. El contexto sociocultural del que participa la institución está entre los niveles 1,2 y 3, son personas de escasos recursos en su mayoría con dificultades económicas, y familiares.

El trabajo realizado en las instituciones educativas constó de tres etapas generales:

1. Observación

Se llevó a cabo mediante las siguientes fases: 1) búsqueda de elementos teóricos; 2) observación de las instituciones Javiera Londoño Barrio Sevilla y el Instituto Vicarial Jesús Maestro, y 3) diseño de situaciones de aprendizaje.

2. Intervención

Constó de la aplicación de las situaciones de aprendizaje, entendidas como las que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución (MEN, 2007). Definición sobre la cual trabajaremos desde lo que hemos denominado situación de aprendizaje.

Las situaciones de aprendizaje tienen dos finalidades, una de carácter investigativo, que es en este caso identificar las estrategias de los estudiantes (objetivo investigativo) y la segunda es identificar los procesos de cálculo mental empleados por los estudiantes para afianzar recrear y conocer un concepto matemático (objetivo para los estudiantes).

Las situaciones de aprendizaje tienen la siguiente estructura:

a. Encabezado para la situación:
— Tema
— Fecha
— Grado
— Nombre
— Objetivo
— Duración
b. Momentos de la situación:
1. Contextualización.
2. Aplicación.
3. Socialización.
4. Evaluación.

3. Análisis

El trabajo se enfocó en el análisis cualitativo[4] “la palabra “análisis”, en su origen etimológico, quiere decir “separar” o “dividir” las partes de un todo con el fin de entender los principios y elementos que lo componen. Pero cuando el todo es un sistema o una estructura, la división o separación puede también destruir su naturaleza y llevarnos a no entender la nueva realidad “emergente”.

Las características del análisis realizado dentro de nuestro trabajo son:

— Identificación de las situaciones de aprendizaje más significativas dentro del proceso de intervención.

[4] Martínez, 2000.

— Categorización y análisis de las estrategias de los estudiantes. Estas categorías permiten identificar aspectos relacionados sobre cómo los estudiantes conciben los conceptos matemáticos inmersos en el pensamiento numérico.
— Descripción de las estrategias empleadas en la resolución de las actividades propuestas en las situaciones de aprendizaje.
— Confrontación del marco teórico con las descripciones, categorías y subcategoría de análisis para evidenciar el estado cognitivo de los estudiantes con respecto al pensamiento numérico y al cálculo mental, esto nos proporcionó los elementos que sustentan y apoyan nuestra reflexión y las conclusiones realizadas alrededor del nuestro objeto de estudio.
— Triangulación y sistematización de la información obtenida en los grados 1° del Instituto Vicarial Jesús Maestro y 7° de la I. E. J aviera Londoño. Se identificaron los procesos de cálculo mental más representativos y comunes en la solución de los ejercicios planteados en las situaciones de aprendizaje en ambos grados.

Para la confrontación de la información obtenida entre las dos instituciones educativas se empleó el método de triangulación, que nos permite confrontar los datos hallados en las diferentes instituciones educativas, para determinar las coincidencias y diferencias entre estos. Según Denzin (1970) la triangulación es la combinación de dos o más teorías, fuentes de datos, métodos de investigación, en el estudio de un fenómeno singular. Para efectos de este trabajo se empleó la triangulación de datos, que se refiere a la confrontación de diferentes fuentes de datos en los estudios y se produce cuando existe concordancia o discrepancia entre estas fuentes.

En el siguiente cuadro se muestra las categorías empleadas en el análisis de las situaciones de aprendizaje con sus respectiva subcategorías. Es de anotar que se abordan las mismas categorías para el grado 1º y para el grado 7º.

Categorías	Subcategorías
Comprensión de conceptos	• Aproximación • Estimación • Cálculo exacto • Composición y descomposición • redondeo
Ejecución de algoritmos y procedimientos	
Resolución de problemas	Solución de problemas

La recolección de la información se hizo a partir de los siguientes instrumentos[5]:

El diario pedagógico

Considerado como el relato escrito cotidiano de las experiencias vividas y de los hechos observados, redactado al final del día o al término de una jornada. El diario se enriqueció y ganó en objetividad en la medida en que se hicieron las reflexiones y análisis de cada una de las sesiones. La extensión de las reseñas diarias varía notablemente de acuerdo con la índole de las experiencias, y los objetivos que se perseguían.

La estructura abordada en el diario pedagógico consta de: fecha, hora, grado, tema o contenido (hacia referencia a un concepto matemático), estándar asociado (se hace referencia al estándar teniendo como referente los estándares de matemáticas propuestos por el MEN en el 2007), propósito (se plantea de acuerdo a la situación de aprendizaje abordada y lo que se pretende lograr con ella), actividades (señalaba previamente lo que se llevaba planeado), recursos (se hacia referencia a los diferentes implementos utilizados en cada una de las sesiones),

5 Entender por instrumentos los elementos que facilitaron, ampliaron o perfeccionaron la tarea de observación realizada por los maestros en formación.

descripción (se realizaba una descripción de los acontecimientos, comentarios y desarrollo de cada una de las sesiones), reflexión y análisis (se hacían comentarios y apreciaciones personales sustentadas y apoyadas en referentes teóricos).

Entrevistas

La entrevista es la comunicación interpersonal establecida entre investigador docente en formación y el estudiante (ver anexo No. 2), profesor (ver anexo No. 3) a fin de obtener respuestas verbales a los interrogantes planteados sobre el tema propuesto

Guía de observación, se utilizó en la observación del microcontexto y el macrocontexto con el fin de recopilar información de la institución y población en la cual se llevo a cabo el trabajo.

Referentes teóricos

La noción de número está presente desde muy temprana edad en los niños, está noción está implícita, es elemental y esencial en el desarrollo de habilidades y destrezas numéricas, por ejemplo las comparaciones constantes en las que se puede ver, a través de los juegos que conjunto contiene más o menos elementos al agregar o quitar. Lo anterior nos confirma que no sólo dentro del aula de clase, se vive la matemática. El entorno social proporciona herramientas básicas para el pensamiento matemático, en el que sumamos y restamos, dividimos y multiplicamos al compás de las compras, de los juegos, de cuánto pagamos en el bus y cuánto nos devuelven, y otras situaciones que nos llevan a darle sentido a los números.

Esto se traduce en la enseñanza de conceptos matemáticos en la práctica escolar, con el fin de promover el pensamiento numérico. Este es definido por Mcintosh (1992) en Ministerio de Educación Nacional [MEN, 1997] en los lineamientos curriculares:

> […] como la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones.

El pensamiento numérico se hace visible, en la medida en que se desarrollan estrategias[6] útiles al manejar números, y operaciones a través de los diferentes tipos de cálculo (mental, escrito, estimado, aproximado, exacto y mecánico), estos tipos de cálculo constituyen estrategias didácticas del pensamiento numérico, entendidas como cogniciones o conductas que influyen sobre el proceso de

6 A lo largo de este proyecto asumiremos el término de estrategia, como el conjunto de procesos que pueden facilitar la adquisición y utilización de la información, que pone en marcha el estudiante durante el aprendizaje, con la intención de que influyan efectivamente en su proceso de codificación y que facilitan la resolución de un problema o de las situaciones de aprendizaje. Así las estrategias no están prescritas y no se reducen a un solo procedimiento establecido.

codificación de la información, facilitando la adquisición y recuperación del nuevo conocimiento (Weinstein y Mayer, 1986).

Dentro de los tipos de cálculo identificados en la enseñanza de la matemática, el mental ha sido definido por diferentes autores, en la actividad escolar como:

> "Un tipo de cálculo en donde no se utiliza papel ni lápiz o cualquier otro implemento adicional. Sólo procesos mentales" (Hazekamp, 1986 citado en Martínez, 2000).
>
> "Conjunto de procedimientos que se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido para obtener resultados exactos o aproximados; este ayuda a generalizar y aumentar la velocidad del pensamiento matemático, pues las operaciones aritméticas en él se realizan a partir de los esquemas interiorizados de las relaciones simbólicas que poseen los niños" (Ríos Díaz, Alba et al, 2002, pp.20-21).
>
> "El cálculo mental es aquel que efectúan las personas sin ningún tipo de apoyo, únicamente de cabeza" (Martínez Montero, 2001, p. 37).
>
> "Conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados" (Cecilia Parra).

Las definiciones anteriores consideran elementos importantes en el cálculo mental, por lo que retomaremos algunos de estos, para proponer la siguiente definición como la que reúne las condiciones para respaldar el trabajo realizado en el aula de clase por las docentes en formación.

Se denominará cálculo mental, a la realización de cálculos sin tener en cuenta algoritmos preestablecidos, en la ejecución de un procedimiento razonado o mecánico para el cual se ha desarrollado rapidez, que no descarta la utilización de lápiz ni papel[7], debido a que la anticipación y reflexión en las situaciones de aprendizaje se consideran como parte de estos procesos mentales que llevan al estudiante a establecer caminos más seguros para llegar a algún tipo de repuesta.

7 Con esto asumimos que el cálculo mental también puede realizarse y de hecho se realiza con lápiz y papel, porque, los estudiantes validan en su mente los procedimientos que consideran necesarios para resolver determinada situación.

Así, la anticipación y manejo implícito de las propiedades de las operaciones como manifestación del pensamiento numérico se convierten en herramientas, que le permitan al sujeto determinar qué procedimiento es más útil y práctico en la solución de situaciones de aprendizaje mediadas por el cálculo mental como estrategia, dichas herramientas surgen como producto de la modelación y reflexión en torno a esta, en consecuencia ante una situación se pretende que un estudiante analice los datos y busque los pasos que considera importantes, verificando y justificando su elección.

Se crea, un desafío en el cual los estudiantes puedan plantear una relación entre lo que ya saben y lo que deben aprender. A estos se les debe permitir, articular sus procedimientos en las situaciones de aprendizaje que se les presenta, así ellos pueden avanzar en la construcción del conocimiento participando de diálogos donde el análisis y la reflexión sobre las producciones sea el eje principal, y las estrategias sean propias sin tener que utilizar sólo un algoritmo preestablecido.

En esta medida el cálculo mental es apoyo para la generación de algoritmos no convencionales o alternativos que aproximen a los estudiantes a procesos de matematización opuestos al aprendizaje mecánico, principal obstáculo para la generación de nuevas estrategias por parte de los estudiantes.

Consideramos las siguientes características[8] del cálculo mental como las más relevantes:

— Flexible, se debe entender que se busca sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular.
— Concreto, aplicado a unos referentes, a unas realidades concretas.
— Rápido, aunque no se debe considerar como su principal finalidad, se adquiere dicha destreza si se practica continuamente.

8 Características Retomadas de Martínez & Chamorro, 2000, 2003.

— Variable, quiere decir que se pueden seguir diferentes caminos para un mismo problema.
— Activo, significa que quien calcula tiene la facilidad de poder elegir la estrategia que va a desarrollar.
— Constructivo, se refiere a que las respuestas se van construyendo con resultados parciales, que se resumen después para obtener la respuesta final.
— Responder a la demanda social plantea una aproximación al cálculo que haga a los estudiantes capaces de elegir los procedimientos apropiados, encontrar resultados y juzgar la validez de las respuestas (Cecilia Parra).
— Hace uso explícito y consciente de las propiedades numéricas que necesite en cada ocasión.
— Aproximado o exacto en cuanto al resultado que obtiene.
— Útil o estimativo en cuanto a la función instrumental de que se suele revestir.

En esta forma el darle sentido a la pregunta, ¿Para qué incluir la enseñanza del cálculo mental dentro del currículo escolar?, nos lleva a considerar no solo las bondades que caracterizan a este tipo de cálculo, sino reconocer elementos importantes como los siguientes: 1) el desarrollo del cálculo mental como el objetivo último en el aprendizaje de las cuatro operaciones fundamentales[9]; 2) la norma lo propone en los lineamientos y en los estándares curriculares de matemática; 3) demanda social, que se ve reflejada en la autonomía del estudiante en su cotidianidad, siendo esta uno de los fines de la educación. Dicha autonomía llega con el cálculo mental; 4) posibilita mejoras en el momento de resolver problemas, porque pone de manifiesto las propiedades de las operaciones, ya que el uso de estas se hace de forma explícita, ayuda a mejorar y estructurar resultados, los estudiantes pueden visualizar el problema más fácilmente; 5) permite una mejor “lectura” de los números, y de toda la situación de aprendizaje en sí; 6) se trabaja con relaciones estrictamente matemáticas; 7) se

9 Fernández, 2004.

realizan descomposiciones de números diferentes a las tradicionalmente enseñadas, además de favorecer el aprendizaje de los algoritmos conocidos y saber cuándo y porqué utilizarlos[10]; 8) el cálculo mental es problema abierto ya que admite variedad de procedimientos en la solución de una misma situación, favorece la evolución consciente de las estrategias de cálculo.[11] En general son muchas las virtudes que se le atribuyen a la inclusión del cálculo mental dentro del currículo de matemáticas, sin embargo no podemos olvidar, siguiendo en la misma línea pero en un plano diferente la motivación, ya que este por sí solo es motivante para los estudiantes, en el sentido de que es útil para conseguir la atención, y predisponer para el trabajo matemático y constituye un regalo para el estudiante fatigado y cansado de lo arduo y abstracto[12].

Relacionados con el cálculo mental, hallamos el cálculo escrito, el aproximado, estimado, exacto, y mecánico. A continuación se desarrollará brevemente cada uno de éstos.

Cálculo escrito, es aquel, que aunque la mente interviene en su realización, utiliza apoyos de papel y lápiz (Martínez, 2000); puede ser más abstracto, es también exacto, puede ser razonado o mecánico, y es susceptible de emplear diferentes técnicas. El manejo de habilidades en el cálculo escrito no necesariamente va acompañado del concepto de número[13]; ya que en la realización del cálculo escrito se pueden seguir algoritmos preestablecidos y en ocasiones dar respuestas acertadas sin saber el porqué de dicha solución. Entre las características que lo identifican, encontramos: abreviado, se refiere al hecho de ocultar pasos relacionados con las propiedades asociativa, conmutativa y

10 Gabrielli, 2006.
11 Chamorro, 2003.
12 Fernández, Op. Cit.
13 Concepto de número, son construcciones mentales que permiten comprender y resolver problemas que involucran los sistemas numéricos. Es eso que surge en el pensamiento al operar una y otra vez con significados ligados a situaciones particulares, pero sobre todo con los esfuerzos que se hacen por establecer relaciones entre los diferentes significados para reconocer lo que permanece invariable en ellos (Alcaldía Mayor de Bogotá, 2007).

distributiva de las operaciones; puede ser automático, significa que no necesita ser comprendido para ser ejecutado; simbólico, se refiere a que se manipulan símbolos sin referencia al mundo real; analítico, este concepto hace referencia al hecho de que las cifras se manipulan separadamente y confiable, debido a que siempre se utiliza el mismo algoritmo para el mismo tipo de ejercicios[14].

El *cálculo exacto*[15] que desde un sentido coloquial se le asigna la connotación cuantitativa de no equivocado, y no-variabilidad; por consiguiente, se supone que un valor exacto tiene un alto grado de certeza y confiabilidad. De esta manera se relaciona lo exacto con la verdad, en oposición a la inexactitud que se define como alejamiento sistemático de la verdad. Lo que no implica que no exista por parte de los estudiantes una construcción de estrategias adecuadas para la solución de situaciones de aprendizaje, que exijan exactitud con los criterios de validez propios de la matemática, su carácter universal y general; es decir, los aspectos teóricos que fundamentan la matemática.

> "Desde el punto de vista matemático, el valor exacto está asociado a la precisión y la exactitud, las cuales amplían el campo conceptual matemático de los estudiantes. Se entiende por *precisión* el número de cifras significativas que representa una cantidad (esta característica la relaciona con los referentes básicos de los sistemas notacionales de los números, en especial con la noción de cifras significativas, el cual designa formalmente la confiabilidad de un valor numérico) y *exactitud,* se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa; es decir, la exactitud incorpora al error relativo como una de sus características".

El *cálculo estimado* se refiere a los juicios de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite[16] en esta medida el cálculo estimado se refiere únicamente a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse

14 Características retomadas de, Martínez J. 2000.
15 En el proceso de intervención, el cálculo exacto, fue asumido como una Subcategoría del cálculo mental.
16 Segovia et al., 2000.

sobre los resultados. Así el cálculo estimado no sólo debe ser considerado como un juicio que se emite sino también como un proceso, al respecto:

> Se entiende por cálculo estimado al proceso de producir una respuesta suficientemente cercana a una respuesta exacta y que permite tomar decisiones, según sea el caso (Reys, 1986, citado en Backhoff, E., Cortés, J. & Organista, J., 2005).

El cálculo estimado, significa, llevar a cabo operaciones mentales considerando un intervalo de posibles soluciones correctas. Comprender el concepto de estimación permite sentirse cómodo con un cierto error en los resultados[17]; cuando se hacen cálculos estimados se interrelacionan una serie de habilidades y conceptos, a la vez que se desarrolla un mejor sentido del número, debido a una mejor comprensión de la estructura del sistema de numeración, esto se ve reflejado en la destreza que adquieren los estudiantes para anticipar una situación y reflexionarla. Para Cecilia Parra (1994), el trabajo con cálculo estimado permite que el alumno se dé cuenta de que las matemáticas no son un conocimiento cerrado y totalmente construido.

Algunos casos donde se utilizan cálculos estimados son: 1) cuando un valor no se conoce y puede ser forzado a estimarse; 2) en valores que son diferentes por la imprecisión de los aparatos; 3) cuando se tiene que trabajar con números irracionales como el número pi 4) cuando una estimación lleva a otra estimación.

El *cálculo aproximado,* enfatiza, en los aspectos algorítmicos de la estimación; se trata de destrezas y de los conceptos previos que la fundamentan. La Obtención de un número como resultado de una operación aritmética a partir de datos análogos a los suministrados, pero conservando la operación. El cálculo aproximado, en cuanto cálculo, se sirve de las mismas estrategias y técnicas que el cálculo mental, del cual es tributario. Pero en los actos de sustitución de los

17 Cortés, J. 2005.

datos, y validación del resultado cuenta con técnicas propias: proceden de la medición con instrumentos de medida que por muy finos que sean siempre tienen un margen de error.[18]

Cálculo mecánico,[19] se refiere a la utilización de un algoritmo único o de un material (contador, de regla de calculo, calculadora, tabla de logaritmos, etcétera), sean cual fueran los números a tratar (Cecilia Parra).

En palabras de Frederic Udina (1992) el uso de las calculadoras anima el hábito de la investigación matemática. La calculadora constituye una ayuda para el alumno desmotivado por sus fracasos en el cálculo operatorio que probablemente resolverá mejor con la ayuda de este instrumento. El poco uso que se le ha otorgado a la calculadora dentro del aula de clase se ha convertido en una razón para que por fuera de ella se "abuse" de este instrumento siendo empleado incluso para resolver cálculos sencillos.

Sin embargo hay que aclarar que:

> "La disponibilidad de la calculadora no reduce de ninguna manera la necesidad de comprensión matemática por parte de la persona que la está utilizando" (Cockcroft 1982 citado en Frederic, 1992).

Es de esta forma que se habla de "pensar" la calculadora en lugar de "usarla"[20]. En la educación, la calculadora permite explorar ideas y modelos numéricos, verificar lo razonable de un resultado obtenido previamente con lápiz y papel o mediante el cálculo mental.

---

18 Segovia, et. al, Op. Cit.

19 Es de aclarar que cada vez que hablemos de cálculo mecánico en este trabajo, estamos haciendo referencia al cálculo que se realiza con la calculadora como un instrumento empleado en la solución de algunas de las situaciones de aprendizaje abordadas.

20 Las matemáticas escolares en el año 2001. Carlos Eduardo vasco.

Entre las razones que justifican la conveniencia de utilizar la calculadora en el aula de clase, Álvarez (1995), destaca:

- Permite que el estudiante continúe progresando en matemáticas, sobre todo aquellos que tienen grandes dificultades con las técnicas y algoritmos usuales de cálculo.
- Estimula la investigación matemática en los estudiantes: el obtener y comprobar los resultados de forma inmediata permite que el estudiante trabaje con menor dependencia del profesor, facilitando que elabore y compruebe sus propias conjeturas, y tome decisiones.
- Facilita la resolución de problemas, haciendo posible que el estudiante dedique su atención al análisis de la información inicial disponible, a la toma de decisiones sobre las acciones a realizar y a la verificación y critica de los resultados. La práctica de algoritmos deja de ser la tarea más importante.
- Libera grandes cantidades de tiempo que los estudiantes emplean en hacer cálculos.

En la solución de las actividades propuestas en las situaciones de aprendizaje sean de cálculo mental, escrito, estimado, mecánico o aproximado se exige el reconocimiento de la aplicación de estrategias.

Los ejes temáticos propuestos en torno al cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico, asumidos como categorías y subcategorías en el presente trabajo se especifican en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Categorías</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td>Comprensión de conceptos</td><td rowspan="2">• Composición y descomposición
• Estimación
• Aproximación
• redondeo
• Cálculo exacto</td></tr>
<tr><td>Ejecución de algoritmos y procedimientos</td></tr>
<tr><td>Resolución de problemas</td><td>Solución de problemas</td></tr>
</table>

Dentro de la comprensión de conceptos y la ejecución de algoritmos y procedimientos se visualizan: composición, descomposición, estimación, aproximación, cálculo exacto, y redondeo. No solo cumplen la función de ser procesos matemáticos, son a la vez subcategorías del cálculo mental como estrategia didáctica.

Se entiende por *compresión de conceptos* en el plano del pensamiento, una red de ideas sobre un aspecto particular del mundo. En este caso hacemos referencia a aquellos conceptos denominados subcategorías y a las relaciones que pueden establecerse entre ellos, esto implica saber cómo y dónde usarlos. “la comprensión de conceptos numéricos se puede iniciar con la construcción por parte de los estudiantes de los significados de los números, a partir de sus experiencias en la vida cotidiana, y con la construcción de nuestro sistema de numeración teniendo en cuenta actividades de conteo, agrupamiento y el valor posicional” (MEN, 1997), dicha red esta constituida por contenidos y por las relaciones entre si mismos. El desarrollo de esta competencia implica: el reconocimiento de conceptos matemáticos; la aplicación de conceptos matemáticos y el establecimiento de relaciones internas de cada concepto matemático y sus vínculos con otro (Programa de Evaluación de Aprendizajes [ANEP]).

Ejecución de algoritmos y *procedimientos*. El algoritmo, entendido como una secuencia lineal de acciones que deben ser ejecutadas, para conseguir un determinado fin (Martínez, 2000), que nos permiten identificar las estrategias empleadas por los estudiantes; los procedimientos son entendidos como métodos de cálculo, o conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, y que estaban ligados en su mayoría a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático (MEN, 1997). El desarrollo de esta competencia implica: el manejo de un repertorio de rutinas matemáticas; la selección del algoritmo apropiado a la situación planteada; la utilización correcta del algoritmo seleccionado y dominio de las destreza y capacidad de resolverlas propias actuaciones de manera hábil e independiente (MEN & ANEP, 1997, 2003*).*

Las subcategorías de la comprensión de conceptos y de la ejecución de algoritmos y procedimientos se exponen a continuación:

La *composición y la descomposición*, tiene que ver con aquellas relaciones que se establecen entre las partes y el todo. Se entiende por *composición* el proceso mediante el cual se combinan dos o más cantidades para encontrar la cantidad resultante o total. La composición está ligada a las estructuras multiplicativas y aditivas. *La descomposición,* es el proceso mediante el cual se conoce el todo y una de las partes, siendo necesario hallar la otra parte. De esta manera, la estrategia o el procedimiento utilizado para resolver situaciones de aprendizaje que impliquen la composición y descomposición determinan el nivel de abstracción que se ha alcanzado.

La *estimación* se define, como, la habilidad mental para hacer conjeturas en cálculo y medida con una información previa (Segovia et tal., 2000), se trata de una descripción recursiva. Se caracteriza por ser un proceso educable; valorar una cantidad o el resultado de una operación; el sujeto que debe de hacer la valoración tiene alguna información referencia sobre la situación que debe enjuiciar; la valoración se realiza por lo general de forma mental; se hace con rapidez y empleando números los más sencillos posibles; el valor asignado no tiene que ser exacto pero sí adecuado para tomar decisiones; el valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quién realice la valoración (Segovia et tal., 2000).

(Sowder, 1992 citado en Fernández, 2004), plantea que existen tres procesos claves que caracterizan los buenos estimadores: la *reformulación,* es el proceso de alterar datos numéricos para producir una forma más manejable mentalmente pero dejando la estructura del problema intacta; la *traslación,* se cambia la estructura matemática del problema a otra mentalmente más manejable y la *compensación,* se realizan ajustes que reflejan las variaciones numéricas resultado de la reformulación o traslación realizada.

Los buenos estimadores son los que tienen la habilidad de usar los tres procesos, mencionados, tienen un buen conocimiento de hechos básicos numéricos, del valor de posición, y de las propiedades aritméticas; son hábiles en el cálculo mental; son conscientes y tolerantes del error; y pueden usar y cambiar fácilmente de estrategias (Sowder, 1992 citado en Fernández, 2004), La estimación constituye entonces una estrategia del cálculo mental, en aquellas situaciones de aprendizaje en las que no se necesita un resultado exacto.

Algunas razones para enseñar la estimación según Segovia et tal., (2000) son: *utilidad práctica* en la cotidianidad ya que se emplea en multitud de situaciones reales; *utilidad en la escuela* ya que las nuevas tareas escolares precisan de la estimación y como recurso de aprendizaje escolar; además por *formación escolar* no solo de conocimiento, ya que completa la visión de la matemática, mejora el contenido de la actual instrucción; sino también de pensamiento porque potencia estrategias propias y conecta con la resolución de problemas.

Algunos autores no distinguen entre estimación y aproximación; otros como Fernández (2004), afirman que mientras la estimación es un ejercicio mental, la aproximación usualmente requiere de alguna herramienta. Alba Thompson llama a la estimación “una adivinanza educada visualmente, que generalmente se hace en el contexto del número de objetos de una colección, del resultado de un cálculo numérico o de la medida de un objeto”. Para los objetivos de este trabajo se hace una diferencia entre estos dos términos.

El sentido de la palabra *aproximación* que es la acción de sustituir un ente matemático ya sea un número, elemento de un espacio métrico entre otros, por otro suficientemente próximo; al segundo se le llama una aproximación del primero. El sentido de la palabra aproximación, que depende en cada caso del sentido dado a la expresión “próximo a” puede, en ciertos casos, parecer alejada de la idea intuitiva que de ella podría tenerse (Bouvier, 1984 citado en Segovia 2000). La aproximación es la búsqueda de un dato numérico suficientemente preciso para un determinado propósito (Segovia 2000).

En este sentido la aproximación es una parte importante de la estimación, sin embargo no la agota. La aproximación incluye procesos de sustitución de los datos originales por otros más sencillos, juicio de adecuación para estos nuevos datos y juicio de validez del procedimiento global. Es un procedimiento conveniente cuando las cantidades son grandes o complejas, aporta claridad y comprensibilidad a la situación, constituye un mecanismo de control para el cálculo exacto; sea éste mental, escrito o mecánico. Ya que anticipa márgenes de validez para el resultado obtenido por dicha vía. Ejercita estrategias de gran importancia en la aritmética y en el trabajo con la medida de magnitudes. Contribuye a la formación matemática y, al mismo tiempo, facilita el uso de la matemática en las situaciones cotidianas (Fernández, 2004).

El Redondeo es una forma usual para aproximar un número en la que se procede así: "si la primera cifra que se desecha es 0, 1, 2, 3 ó 4, entonces la última cifra se mantiene igual que en el número que redondeamos, este se conoce con el nombre de redondeo por defecto. Si la primera cifra que se desecha es 5, 6, 7, 8 ó 9, entonces la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad respecto del número que redondeamos, este tipo de redondeo se conoce con el nombre de redondeo por exceso", Segovia, 2000.

Otro eje temático del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables.

Resolver problemas es un término muy divulgado, y usado en el lenguaje habitual, y para lo que, sin embargo, no existe una definición concisa y clara, que haya sido universalmente aceptada. Gil et tal., (1992 citado en Martínez 2000) señalan que "existe un acuerdo general en caracterizar como problemas a aquellas situaciones que plantean dificultades para las que no poseen soluciones hechas". Estos mismos autores recogen la definición de Krulik y Rudnik y la ya clásica de Polya: "un problema es una situación, cuantitativa o no, que pide una solución para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos para obtenerla". Así Polya (1980) señala que "resolver un problema consiste en encontrar camino allí donde previamente no se conocía tal, encontrar una salida para una situación difícil, para vencer un obstáculo, para alcanzar un objetivo deseado que no puede ser inmediatamente alcanzado por medios adecuados".
Un problema aritmético según Montero (2000), presenta los siguientes rasgos:

— Se conocen una serie de datos numéricos y unas relaciones entre ellos, que aparecen en un contexto significativo.

— Hay uno o varios datos relacionados desconocidos cuya conexión con los iniciales está establecida en el contexto general.

— Se puede establecer una secuencia de operaciones aritméticas que permitan relacionar el dato desconocido en función de los conocidos.

— A partir de las relaciones establecidas se infiere los datos desconocidos mediante una combinación de operaciones y relaciones aritméticas, en las que el dato desconocido nunca se manipula como si fuera una cantidad más de las que intervienen en el problema.

Los diversos tipos de problemas matemáticos en que se emplean operaciones aritméticas le han dado paso a las denominadas estructuras aditivas y multiplicativas.

Desde el punto de vista cognitivo, una estructura es la arquitectura determinada por la cognición en un momento dado. Estas estructuras son de naturaleza abstracta y tienen su modelo en las estructuras matemáticas y lógicas; no pueden ser medidas directamente, sino que se infieren a partir de la observación de diversos conjuntos de conductas. En un sentido estricto la estructura cognitiva es la forma o patrón que toma la cognición de los individuos (Rosas, 2004).

Rosas (2004) y otros plantean que para Piaget, lo que define a la estructura no es la presencia de unos u otros elementos en un momento dado, sino las relaciones que se establecen entre ellos. Las leyes que rigen a la estructura, llamadas leyes de composición son las que la caracterizan como tal. Es en este sentido que la estructura como un todo, tiene propiedades distintas de las que caracterizan los elementos, propiedades que son resultantes de las relaciones o composiciones entre ellos. Estas relaciones son, por definición, abstractas. De esta manera dentro del cálculo mental la descomposición y la posterior composición de las operaciones, en la solución de problemas se convierten en estrategias no establecidas que conllevan a encontrar el camino o proceso de solución.

Entenderemos por problemas de tipo aditivo aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por estructuras aditivas entendemos las relaciones en juego que solo están formadas de adiciones o sustracciones (Vergnaud, 1990).

Dentro de la estructura aditiva el conocimiento y uso de los números para un niño que construye la noción de número, se torna en algo complejo cuya comprensión no consiste en un uso automático, sino en entender que esa serie de palabras número, están estructuradas bajo un sistema de numeración con reglas, relaciones y operaciones lógicas que el niño no solo debe seguir sino también comprender.

Se consideran la adición y la sustracción como operaciones que están estrechamente relacionadas en la estructura aditiva, entendiendo por adición la operación que corresponde a la reunión de conjuntos, conlleva a la acción de realizar una operación y encontrar el resultado de la misma. Se simboliza matemáticamente así: $a + b = c$. Matemáticamente se identifican propiedades alusivas a esta operación, en las cuales se busca hacer trasformaciones o cambios con los datos sin que cambie el resultado. En el caso de la adición se estudian los cambios de los sumandos que no afectan a la suma: *ley clausurativa, ley modulativa, ley uniforme, ley conmutativa, ley asociativa, ley de monotonía.*

La sustracción no se considera necesariamente como la operación inversa a la adición ya que tiene una significación propia; es decir no supone de la introducción previa de la adición. Al respecto:

> “La sustracción aparece en este esquema como una operación sui generis, que no supone de ninguna manera la introducción previa de la adición. Dar, perder, bajar, disminuir etc. son transformaciones que tienen significado por sí mismas. Evidentemente, corren a la par que las transformaciones opuestas: recibir, ganar, subir, aumentar, etc., pero de ninguna manera están subordinadas a ellas. La sustracción no exige ser definida como la inversa de la adición, tiene una significación propia” (Vergnaud, 1991).

Vergnaud plantea que existen varios tipos de relaciones aditivas y en consecuencia, varios tipos de adiciones y sustracciones. Así mismo este autor establece una clasificación de los problemas aditivos en seis tipos[21]:

— (Tipo I) composición de medidas: dos medidas se componen para dar lugar a una tercera; la posibilidad y pertinencia de esta composición la atribuye el individuo que opera en el problema dependiendo de cada contexto.
— (Tipo II) problemas de transformación de medidas: se trata de fenómenos en los que se produce una modificación en el devenir cronológico de los estados de las medidas, pasando de un estado inicial a un estado final mediante una transformación. En la mayoría de los casos de la solución de este tipo de problemas, la inversión de la transformación y el cálculo del estado inicial aplicando la transformación inversa al estado final. Lo que supone ya la consideración de la relación entre la adición y sustracción y de sus contextos asociados.
— (Tipo III) problemas de comparación de medidas: son aquellos en los que se establece una comparación, en términos aditivos de dos cantidades.
— (Tipo IV) problemas de composición de transformaciones: se trata de los problemas en los que dos transformaciones se componen en una tercera resultante de las otras dos.
— (Tipo V) problemas de una transformación sobre estados relativos: una transformación actúa sobre un estado relativo para dar lugar a otro estado relativo.

21 Vergnaud, Chamorro, 1991, 2003.

— (Tipo VI) problemas de composición de estados relativos: dos estados relativos se pueden componer, no se transforma uno en otro.

Para efectos de este trabajo, se retomó la clasificación de las estructuras aditivas simple[22] realizada por Castro E. (1995), la cual se centra en el lugar de la incógnita así:

Para la suma	Para la resta
a + b =?	a - b =?
a +? = c	a - ? = c
? + b = c	? - b = c
? = a + b	? = a - b
c =? + b	c =? - b
c = a +?	c = a -?

La estructura simbólica mostrada en la tabla nos permite visualizar la complejidad a la hora de formular y resolver problemas, ya que implica que el lenguaje empleado sea lo suficientemente claro como para evitar las ambigüedades que se pueden dar en el proceso de lectura.

Otras estructuras consideradas en la formulación y resolución de problemas son las *multiplicativas* la cual consiste

> […] "en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones" (Vergnaud, 1990).

22 Los problemas de estructura aditiva simple, son los que se resuelven por medio de una operación de suma o de resta. Están fundamentalmente determinados por dos estructuras básicas: La Estructura Simbólica y la Estructura Semántica se analiza desde dos puntos de vista, el gramatical y el lógico matemático, y de acuerdo a ellas, se clasifican según la posición que se le asigne a la variable (Martínez, 2000) .

Los problemas de multiplicación y división se pueden clasificar en dos tipos:

- (Tipo I) problemas de isomorfismo de medidas: se trata de situaciones donde se establece un isomorfismo[23] basado en la proporcionalidad entre dos campos de medidas. En todos ellos aparecen escrituras numéricas correspondientes a medidas de dos magnitudes distintas.
- (Tipo II) problemas de producto de medidas o combinación[24]: responden a un modelo binario de la operación. Se dispone de dos cantidades iniciales, ambas al mismo nivel. Deben considerarse las dos, simultáneamente, para resolver el problema. Según Vergnaud se refiere a la multiplicación de clases (para producir una combinación de las mismas) o la multiplicación de medidas (como en el caso del cálculo de áreas).

Para Vergnaud, la enseñanza de los conceptos pertenecientes al campo conceptual de las estructuras multiplicativas involucra la realización de situaciones que ponen en juego no sólo la realización de multiplicaciones y divisiones, sino que favorecen el establecimiento de relaciones entre estas operaciones y otros conceptos asociados.

De esta forma las categorías señaladas están estrechamente relacionadas; el estudio de las estructuras multiplicativas en la escuela tiene como meta integrar el estudio de la multiplicación y la división con los conceptos básicos y posibilitar que los alumnos desarrollen un pensamiento matemático más avanzado.

---

23 Un isomorfismo es una aplicación biyectiva entre dos conjuntos que "respeta" la operación que hay definida en cada uno de ellos (Chamorro, 2003).
24 Maza, 1991.

Resolver problemas del mundo real que requieran razonar con números y aplicar operaciones implica tomar una serie de decisiones como: decidir qué tipo de respuesta es apropiada (exacta o aproximada), decidir qué herramienta de cálculo es eficiente y accesible (mecánico, mental, etc.), escoger una estrategia, aplicarla, revisar los datos y resultados para verificar lo razonables que son, y tal vez repetir el ciclo utilizando una estrategia alternativa. Muchos de los procedimientos informales de cálculo descansan en tácticas o estrategias de cálculo mental.

Propuesta de intervención

El desarrollo del proyecto se apoyó en la implementación de situaciones aprendizaje, en pro de generar contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes, con el fin de superar el aprendizaje pasivo y estimular e identificar las estrategias de cálculo mental utilizadas por éstos. Para efectos de este trabajo, las situaciones giraron alrededor del pensamiento numérico y de los sistemas numéricos teniendo en cuenta los estándares propios de este.

Para las situaciones de aprendizaje se cuenta con la siguiente estructura:

a. Encabezado de las actividades que conforman la situación de aprendizaje:
— Tema
— Fecha
— Grado
— Nombre
— Objetivo
— Duración

b. Momentos de la situación:
1. Contextualización.
2. Aplicación.
3. Socialización.
4. Evaluación.

Contextualización de la situación, este primer momento consiste en ubicar al estudiante frente al tema a trabajar mediante una actividad motivadora (un juego, una historia, etc.).

Aplicación, en este momento se le da a los estudiantes las instrucciones precisas de como resolver las actividades de la situación de aprendizaje de manera individual o grupal en un tiempo determinado.

Socialización, en este momento los estudiantes comunican los procedimientos empleados en las actividades propuestas en las situaciones de aprendizaje, dando lugar a un espacio de verificación y confrontación entre pares académicos; lo que conlleva a promover la construcción de nuevos conocimientos y la adquisición de nuevas estrategias de cálculo mental.

Evaluación, se lleva a cabo en el transcurso de la actividad, teniendo en cuenta las preguntas generadas por los estudiantes y los procesos de discusión guiados por el docente en los que no solo, se tiene en cuenta las respuestas correctas sino también aquellas que no lo son. De esta forma el error, no es la usencia de una respuesta correcta sino el producto de la experiencia previa, la cual se busca transformar a partir de la validación entre pares. También se tiene en cuenta para la evaluación el producto terminado, es decir las actividades de la situación de aprendizaje de forma escrita.

A continuación se presenta una situación de aprendizaje modelo, abordada en el proceso de intervención, en el grado primero del Instituto Vicarial Jesús Maestro, que gira en torno a la calculadora como instrumento mediador en la identificación de las estrategias de cálculo mental.

Situación de aprendizaje con calculadora

Objetivo, identificar las propiedades de los números utilizando la calculadora, promoviendo la realización de cálculos inteligentes. Este uso inteligente incluye la necesidad de emplear estrategias de cálculo mental que permitan la experimentación y anticipación con los números, en esta medida podemos afirmar que la calculadora permite realizar las operaciones de una forma más rápida; pero no ayuda en la elección de la operación a usar en una situación particular. Es importante resaltar que el uso de la calculadora no reduce de ninguna manera la necesidad de compresión matemática por parte de la persona que la está utilizando (Udina, F. 1992).

Actividad con calculadora

Manejo de las operaciones básicas

Fecha: ____________________ Grado: __1___

Nombre: ____

Duración: dos horas clase

Tema: adición y sustracción con sustitución

Objetivo: identificar propiedades de los números utilizando la calculadora

2 [+] [=] [=] ....

5 [+] 5 [=] [=] ....

10 [+] 10 [=] [=] ....

1. Marca el mayor número de cada pareja, comprueba si suman el número que está en medio.

37 ________________ 45

26 ________________ 17

69 ________ 101 ________ 30

no es igual

2. Rellena con [+] [-]

47 [+] 12 = 59

68 [ ] 68 = 0

74 [+] 16 [ ] = 88

3. Rellena los [ ] con números adecuados

85 + [8] = 93

[29] - 34 = 63

120 + [11] - 45 = 120

4. suma el primero, tercero y sexto número de cada fila, comprueba si la suma está bien efectuada

73 46 12 0 15 25 = 100

64 40 18 36 19 18 = 101

5. escoge tres números que sumen 78

15 97 12 34 85 37

Escoge tres números que sumen 19

8 4 3 8 11 6

6. encuentra el total de las siguientes adiciones teniendo en cuenta que la tecla del número 9 está mala.

19 + 9 =

39 + 29 =

7. la suma de 21 y 32 es más o menos:

40 ~~50~~ 60

8. observa la siguiente pirámide de números:

9 - 1 = 8

98 - 21 = 77

987 - 321 = 666

9876 - 4321 5555

98765 - 54321 44444

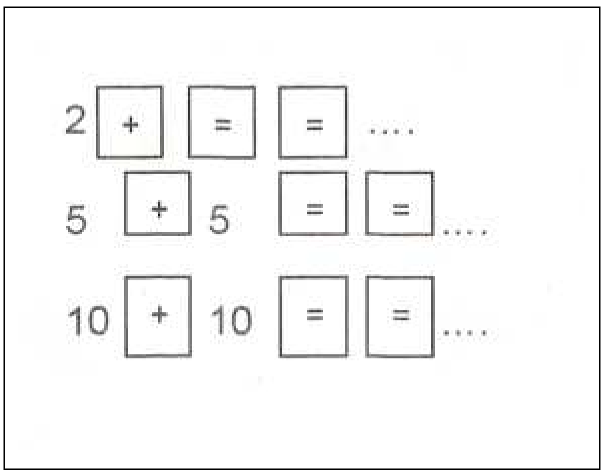
987654 - 654321

9876543 - 7654321 333333

98765432 - 87654321

987654321 - 987654321

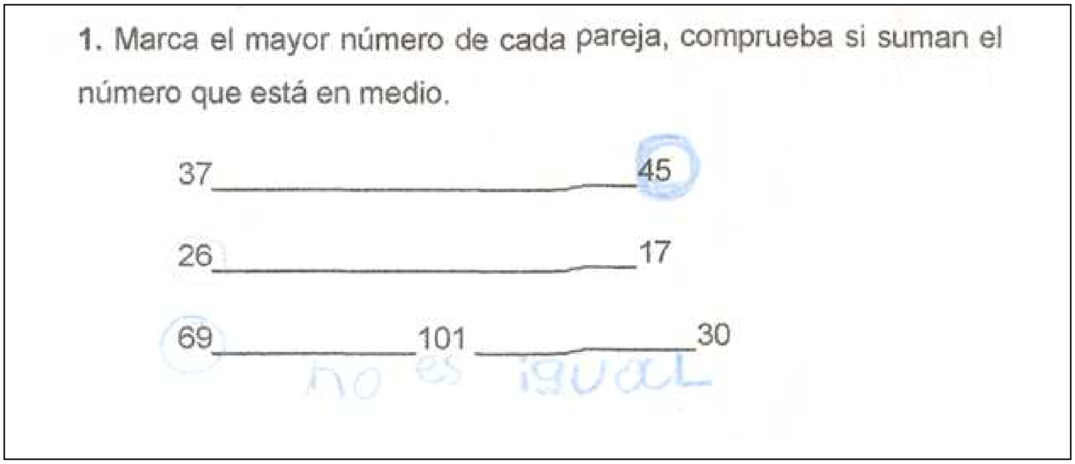
La clase se inició con la *contextualización* de la situación de aprendizaje, en la cual se abordó algo de historia que incluyó el uso y los diferentes tipos de calculadoras. Seguidamente se le propuso a los estudiantes intentar explorar la calculadora pero algunos no sabían ni encenderla, ni apagarla, por tal motivo se les debió explicar el uso y nombre de cada una de las teclas; se continuó con la exploración dirigida, que consistió en permitirle a los estudiantes el descubrimiento e investigación de patrones en secuencias numéricas. Esto se evidencia en la habilidad de algunos estudiantes para reconocer el patrón de secuencia y de adelantarse al número obtenido en la calculadora.



Actividad de exploración dirigida

En un segundo momento se aplicó la guía de trabajo con las indicaciones pertinentes.

La primera actividad, dirigida a indagar las estrategias de los niños con relación al valor posicional de los números



1. Marca el mayor número de cada pareja, comprueba si suman el número que está en medio.

37 ______________ 45

26 ______________ 17

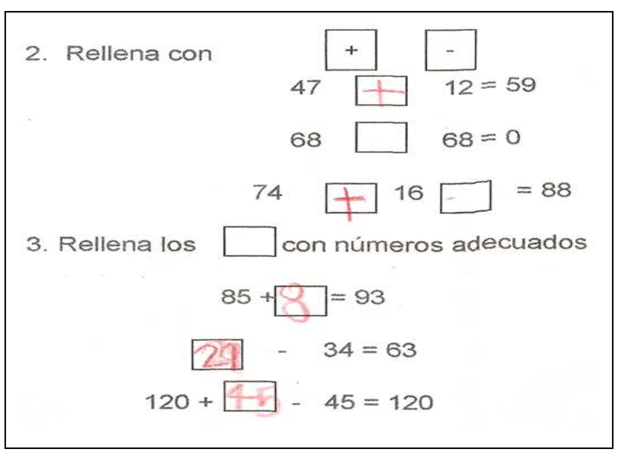
69 ________ 101 ________ 30

no es igual

Primera actividad

Segunda y tercera actividad, los niños en el proceso de solución para hallar el cálculo exacto debían hacer uso de los procesos de reversibilidad lo cual permite establecer relaciones de forma explicita entre la adición y la sustracción.

Dichas relaciones fueron evidenciadas en la justificación oral de los niños, en la que comunicaban las respuestas y los procesos empleados en la solución, por ejemplo: al preguntarles sobre el número que completaba la operación de 85+ ___=93, 12 estudiantes de 29 respondieron 8 “porque 93-8=85”.



2. Rellena con $\boxed{+}$ $\boxed{-}$

47 $\boxed{+}$ 12 = 59

68 $\boxed{}$ 68 = 0

74 $\boxed{+}$ 16 $\boxed{-}$ = 88

3. Rellena los $\boxed{}$ con números adecuados

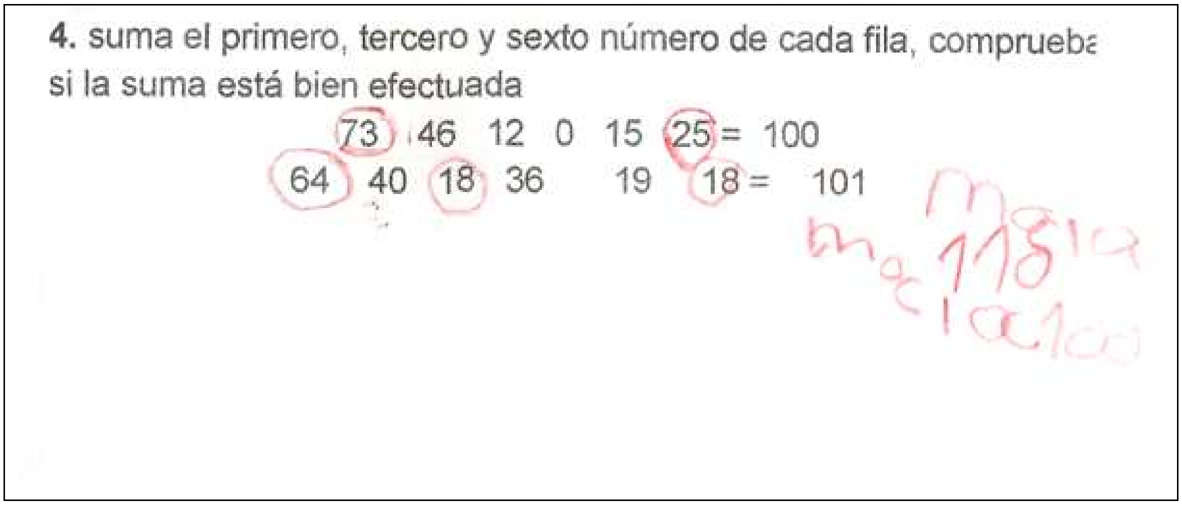
85 + $\boxed{8}$ = 93

$\boxed{29}$ - 34 = 63

120 + $\boxed{45}$ - 45 = 120

Actividad dos y tres

Cuarta actividad, se trabajó la calculadora como un corrector automático ya que los estudiantes tuvieron la oportunidad de comprobar en la calculadora los cálculos realizados previamente de forma mental.

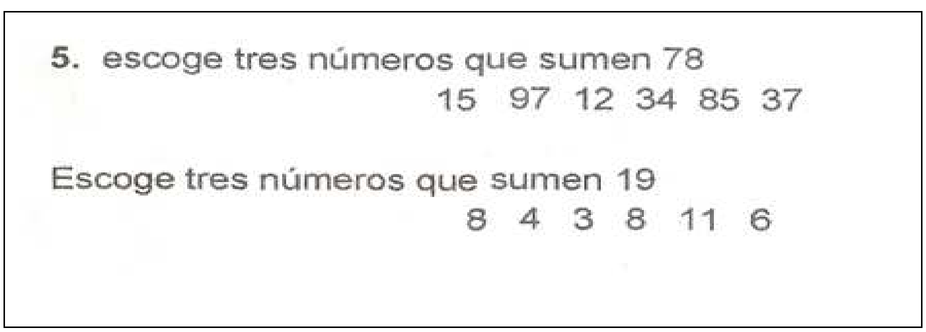

4. suma el primero, tercero y sexto número de cada fila, comprueba si la suma está bien efectuada

73 46 12 0 15 25 = 100

64 40 18 36 19 18 = 101

Actividad cuatro

Quinta y séptima actividad, entre una serie de números, los niños, para obtener un resultado específico hacen uso de los procesos de estimación. Los estudiantes lograron establecer los números indicados para la solución. Por ejemplo algunos descartaron inmediatamente el número 97 de la serie, argumentando que no podía estar incluido como sumando por ser mayor que el número propuesto como total.


5. escoge tres números que sumen 78

15 97 12 34 85 37

Escoge tres números que sumen 19

8 4 3 8 11 6

Actividad cinco

7. la suma de 21 y 32 es más o menos:

40 50 60

Actividad siete

Sexta actividad, este ejercicio favorece la composición y la descomposición, ya que permite que el estudiante encuentre equivalencias entre números, por ejemplo, entre las estrategias empleadas por los niños: 10 de los 29 estudiantes hicieron la descomposición del número 9 como 8+1, 7 de los 29 estudiantes hicieron equivalente el 9 como 10-1.

6. encuentra el total de las siguientes adiciones teniendo en cuenta que la tecla del número 9 está mala.

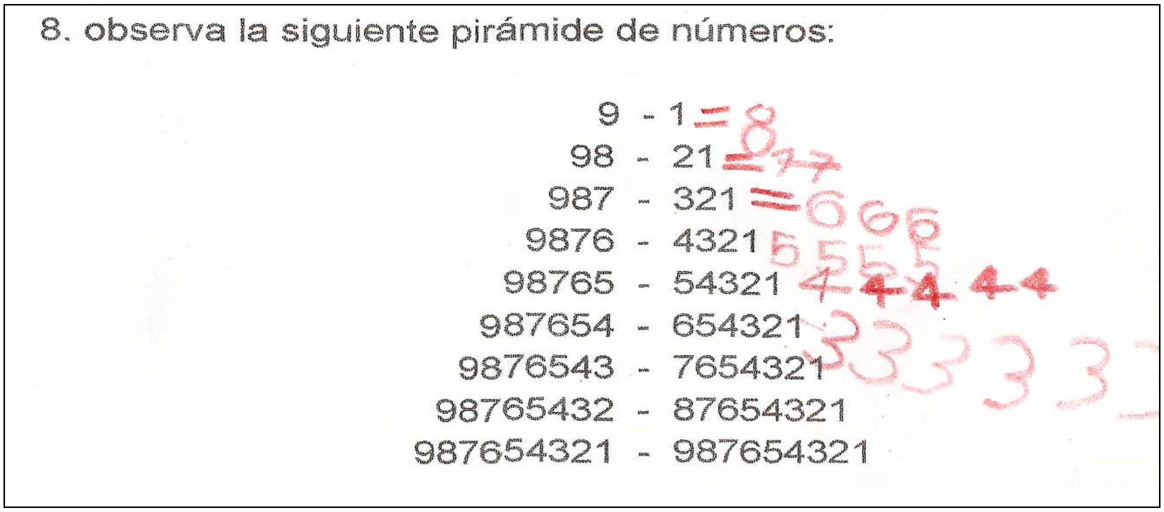
19 + 9 =

39 + 29 =

Actividad seis

Octava actividad, el desarrollo de esta actividad estuvo orientada por las siguientes preguntas: ¿Qué se obtiene al efectuar las operaciones indicadas?; ¿puedes anticipar el resultado de las últimas líneas antes de realizar el cálculo? ¿por qué puedes estar seguro de tu predicción?.

En esta actividad los niños lograron identificar regularidades al realizar las sustracciones, anticipándose al resultado.



8. observa la siguiente pirámide de números:

9 - 1 = 8
98 - 21 = 77
987 - 321 = 666
9876 - 4321 5555
98765 - 54321 44444
987654 - 654321 333333
9876543 - 7654321
98765432 - 87654321
987654321 - 987654321

Actividad ocho

La socialización de las actividades propuestas en la situación de aprendizaje se realizó en todo su desarrollo ya que esta fue motivante para los estudiantes y continuamente hacían comentarios con respecto a las estrategias elegidas y empleadas para la solución, lo que les permitía argumentarla y posteriormente validarla si esta era adecuada.

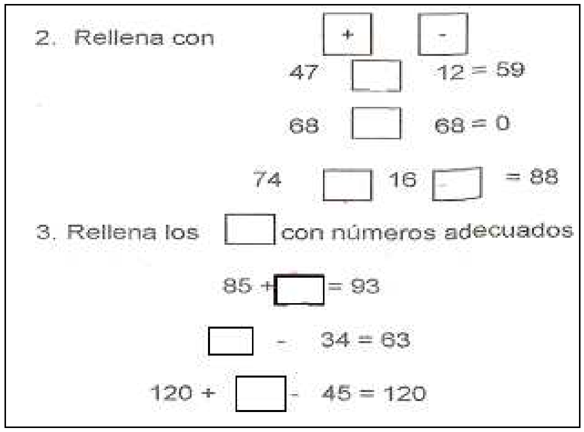
La evaluación, se realizó con la confrontación de las diferentes estrategias y a lo largo de todo el desarrollo de la actividad.

Análisis por categorías y subcategorías de las situaciones de aprendizaje

A continuación se analizan los resultados obtenidos en las situaciones de aprendizaje aplicadas en el grado primero del Instituto Vicarial Jesús Maestro y en el grado séptimo de la I. E. Javiera Londoño en el proceso de intervención. Con el fin de dar a conocer las estrategias de cálculo mental empleadas por los estudiantes.

Categoría 1. Comprensión de conceptos

En el desarrollo de la situación de aprendizaje con calculadora (ver anexo No. 4), en el punto 2 y 3, los estudiantes debían encontrar tanto los números como las operaciones adecuadas para llegar al resultado esperado (ver cuadro No. 1), actividad en la cual se observó que la estrategia más empleada por los estudiantes fue la composición y descomposición de números, encontrando equivalencias entre estos, en este caso, una adición se descompone en dos nuevas adiciones sencillas, lo que le facilita al estudiante llegar al resultado. Estos procesos llevados a cabo por los estudiantes revelan un uso adecuado de las propiedades de los números y operaciones sin ser necesariamente conscientes, lo que explica la utilidad educativa del cálculo mental.



2. Rellena con + -

47 ☐ 12 = 59

68 ☐ 68 = 0

74 ☐ 16 ☐ = 88

3. Rellena los ☐ con números adecuados

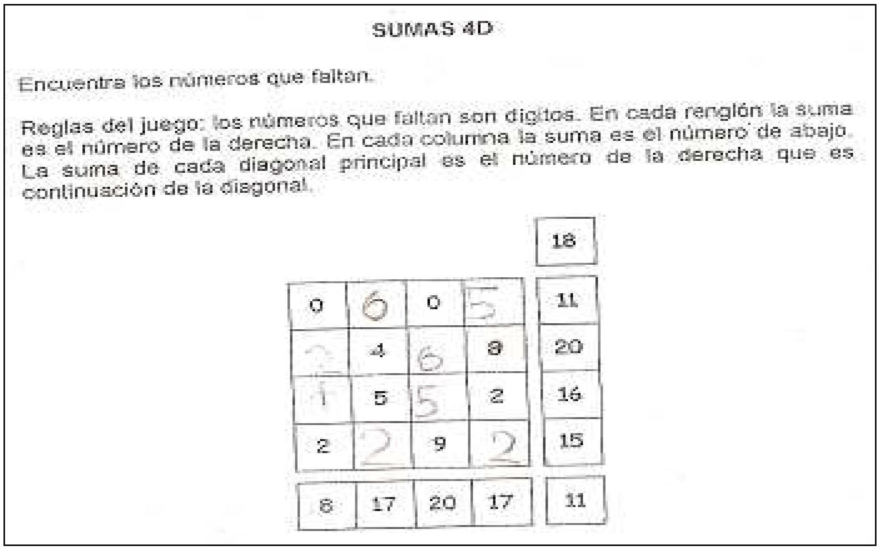
85 + ☐ = 93

☐ - 34 = 63

120 + ☐ - 45 = 120

Cuadro No. 1 Calculadora.

En la situación de adición y sustracción en el ejercicio sumas 4D (ver anexo No. 5), en la actividad propuesta sobre completar los números que faltan, los niños pusieron en práctica todos los conceptos relacionados con adición y sustracción como operaciones inversas, en este sentido hablamos de la reversibilidad como la estrategia empleada por los estudiantes en la solución de las actividad propuesta en la situación de aprendizaje. Durante el desarrollo de la actividad los niños mostraron dominio de las operaciones sin embargo, algunos olvidaban las reglas que tenía el cuadrado, ya que al hallar los números no cumplían completamente con los requisitos solicitados. Una de las estrategias empleadas en la composición y descomposición es la siguiente: “empecé por donde estaban los números más grandes, así me quedaba más fácil sumar y restar” (ver cuadro No.2).



Cuadro No. 2 Adición y sustracción.

En el grado séptimo se observó que los estudiantes a partir de las situaciones de aprendizaje, acceden a experiencias que les permiten establecer relaciones entre los conceptos matemáticos y aquellos procesos denominados subcategorías (Composición y descomposición, aproximación, estimación, redondeo cálculo exacto). Esto implica saber cómo y dónde usarlos.

Durante el desarrollo de la situación de aprendizaje de la calculadora,[25] los estudiantes aplicaron como estrategias: el planteamiento de hipótesis, la identificación de regularidades y patrones alrededor de problemas numéricos. Así mismo se observó que el uso de la calculadora se constituyó en una ayuda, ya que les da confianza y tiempo para usarla como un corrector automático para determinar el valor exacto solicitado.

Ocho estudiantes de veintiocho, poseen un mayor nivel de abstracción, ya que pueden establecer relaciones entre las operaciones aritméticas, haciendo uso de la reversibilidad como estrategia y de los conceptos asociados de *composición y*

25 Ver anexo No. 9, situación de aprendizaje de la calculadora grado séptimo.

descomposición y la información que se les da y la que se les pide. De este modo establecen relaciones numéricas de proporcionalidad, para reconocer lo que permanece invariable sobre lo que no (constante k, ver cuadro No. 3 y 5), esto implica que el estudiante debe crear criterios de validez y considerar los propios de la matemática.

1. Completa las siguientes tablas e identifica si son directamente proporcionales o inversamente proporcionales y responde las siguientes preguntas.

Tiempo (h)	Distancia (km)	K= $\frac{\text{Distancia}}{\text{tiempo}}$	K= $\frac{\text{Tiempo}}{\text{Distancia}}$
0.5	50	100	0.01
1.5	150	100	0.01
2.5	250	100	0.01
3.5	350	100	0.01
3	300	100	0.01
4.5	450	100	0.01
5	500	100	0.01
6	600	100	0.01
7	700	100	0.01
8	800	100	0.01

Cuadro No. 3 Proporcionalidad directa.

El uso de la calculadora le permitió a los estudiantes obtener y comprobar los resultados de forma inmediata; con esto se logró fijar su atención en el análisis de la información inicial disponible, a la toma de decisiones sobre las acciones a realizar; en la verificación y crítica de los resultados; en la identificación de relaciones numéricas a través del concepto de proporcionalidad directa, y estrategias tales como el tanteo, para conservar la proporcionalidad; y la ejemplificación, como un medio para expresar las regularidades.

Se observó de igual modo que los estudiantes a pesar de establecer relaciones numéricas en la realización de la tabla, veintidós presentan dificultades para considerar las regularidades teniendo que recurrir como estrategia al lápiz y al papel, como el soporte de los cálculos mentales. Esto evidencia por parte de los estudiantes una baja compresión sobre los números y las operaciones (*pensamiento numérico*), al no poder comunicar, procesar e interpretar información (ver cuadro No. 4).

c. Teniendo en cuenta que hay espacios sin llenar, que podrías hacer para que la proporcionalidad se continuará cumpliendo, explica tu estrategia. buscar algun número para que la proporcionalidad no

d. Sin utilizar calculadora estarías en la capacidad de llenar los espacios de manera ágil, explica como podrías hacerlo. Calculando en nuestra mente y tratar de ser agiles y rápidos

Cuadro No. 4 Respuesta sobre el cuadro No. 3.

La utilización de un algoritmo único como la multiplicación les permitió a los estudiantes, ser más agiles en la identificación de una regularidad, llenando las casillas de las constantes de una manera muy rápida (ver cuadro No. 5).

No. De obreros		No. De días	K= obreros × días	K= dias × obreros
Exacto	Redondeo			
120		2	240	240
100	24	2.4	240	240
80		3	240	240
50		4.8	240	240
53.333333	53	4.5	240	240
30		8	240	240
14.814814	15	16.2	240	240
9.7959183	10	24.5	240	240
5		48	240	240
3		80	240	240
8		30	240	240
6		40	240	240

Cuadro No. 5 Proporcionalidad inversa.

Se involucra la realización de situaciones que pone en juego el dominio de la multiplicación, de las propiedades y relaciones entre estas y otros conceptos asociados, en este caso el de la proporcionalidad inversa. A su vez se observa, veintiséis estudiantes de veintiocho que no logran expresar los elementos identificados y en su totalidad les falta enriquecer su vocabulario con términos matemáticos (producto, ley conmutativa de la multiplicación, entre otros) para justificar sus respuestas, lo que no implica que no comprendan lo que quieren decir.

> b. ¿Hay una constante de proporcionalidad o dos? Argumenta. porque hay un cociente

Cuadro No. 6 Punto b, proporcionalidad inversa

Los estudiantes muestran grandes dificultades al tener que considerar la composición y descomposición de los números para llenar cada casilla, de tal modo que se cumpla la proporcionalidad indirecta, al establecer relaciones entre las partes (No. de obreros, No. de días) y el todo (la constante), en este sentido identifican regularidades (proporcionalidad inversa), pero no están en la capacidad de nombrarla, y más si tienen que considerar en estos procesos un sistema numérico diferente al de los números naturales (ver cuadro No. 5).

Categoría 2. Ejecución de algoritmos y procedimientos

Categoría entendida como una secuencia lineal de acciones que deben ser ejecutadas, a partir de un conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, lo que implica: la selección del algoritmo apropiado a la situación planteada; la utilización correcta del algoritmo seleccionado y la capacidad de resolverlas de manera hábil e independiente.

En el grado primero, situación de calculadora en el ejercicio No. 2 (ver anexo No.4), se observó que los niños identificaron fácilmente y en forma acertada el valor posicional y en el momento de realizar el cálculo mental, quince niños de veintinueve utilizaron el cálculo escrito para no olvidar el número en el que “iban”, lo que les facilitó el cálculo. En este sentido el cálculo escrito fue necesario como soporte para un mejor desarrollo del cálculo mental.

Con relación al procedimiento mostrado ver cuadro No.7, en el momento de comprobar si los números laterales suman el número que esta en medio se observó que el estudiante descomponía el número hasta aproximarlo a la centena más cercana para facilitar el cálculo del resultado, lo que evidencia un dominio de la descomposición y recomposición de un número en sus unidades constitutivas.

Se observó que ocho niños de veintinueve en el momento de realizar algunos cálculos emplearon el conteo con los dedos, lo que les facilitaba llegar a la solución. Este soporte es válido para la edad ya que este método de contar con los dedos de las manos no es una ayuda innecesaria en la adquisición posterior del concepto de número. Al contrario procura exactitud en los cálculos y proporciona seguridad debido, a que, con los dedos de las manos el estudiante tiene a su alcance todos los hechos básicos de las operaciones elementales.

1. Marca el mayor número de cada pareja, comprueba si suman el número que está en medio.

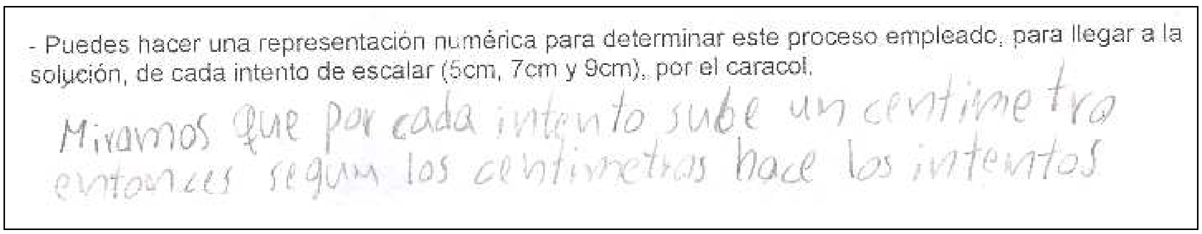
37__________________________45

26__________________________17

69_____________101 _____________30

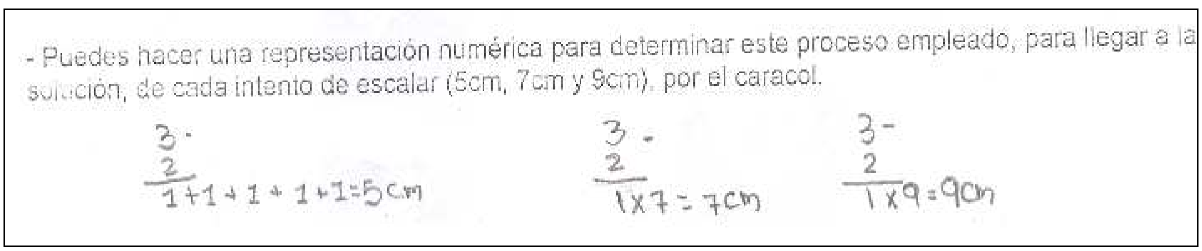
Cuadro No. 7 Ejercicio 3, calculadora

En lo que se refiere a la situación de aprendizaje de los números enteros del grado séptimo, (ver anexo No.7), dentro de las estrategias de cálculo empleadas por los estudiantes encontramos, que en su mayoría están ligados a la descripción como un camino para expresar los procesos realizados, y sólo tres estudiantes evidencian una expresión simbólica del lenguaje matemático, que sintetiza su pensamiento (ver cuadro No. 8 y 9).


- Puedes hacer una representación numérica para determinar este proceso empleado, para llegar a la solución, de cada intento de escalar (5cm, 7cm y 9cm), por el caracol.

Miramos que por cada intento sube un centimetro entonces segun los centimetros hace los intentos

Cuadro No. 8


- Puedes hacer una representación numérica para determinar este proceso empleado, para llegar a la solución, de cada intento de escalar (5cm, 7cm y 9cm), por el caracol.

3 -
2
1+1+1+1+1=5cm

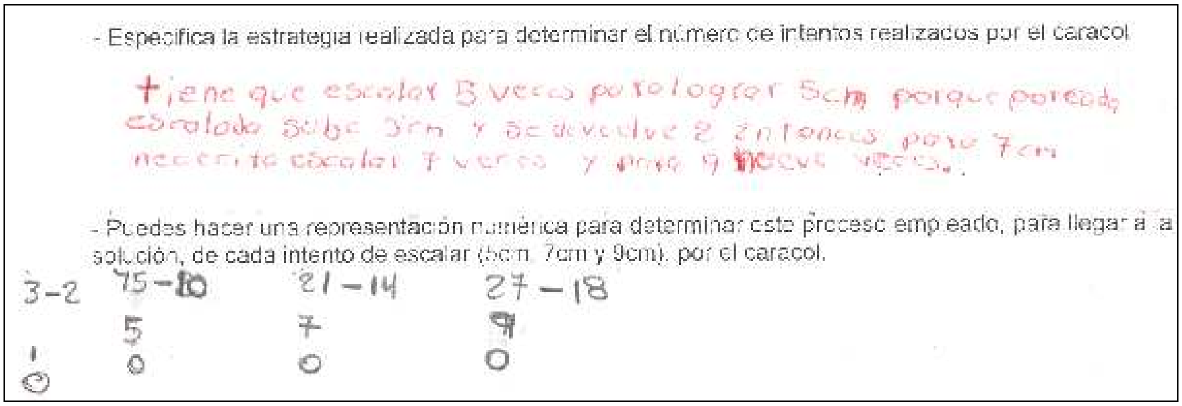
3 -
2
1x7=7cm

3 -
2
1x9=9cm

Cuadro No. 9

Cuatro de los cuarenta y dos estudiantes que realizaron esta actividad, no son consecuentes entre la escritura simbólica y la escritura gramatical de las estrategias (ver cuadro No.10).

Tres estudiantes de los cuarenta y dos con respecto a la pregunta presentada en el cuadro No. 10 describen como estrategia: “3-2=1, 15-10=5; 21-14=7, 27-18=9”, mientras que en forma escrita presentan como estrategia lo siguiente: “tiene que escalar 5 veces para lograr 5cm porque, por cada escalada sube 3cm y se devuelve 2 entonces para 7cm necesita escalar 7 veces y para 9 veces“.



- Especifica la estrategia realizada para determinar el número de intentos realizados por el caracol

tiene que escalar 5 veces para lograr 5cm porque por cada escalado sube 3cm y se devuelve 2 entonces para 7cm necesita escalar 7 veces y para 9 nueve veces.

- Puedes hacer una representación numérica para determinar este proceso empleado, para llegar a la solución, de cada intento de escalar (5cm, 7cm y 9cm), por el caracol.

3-2	15-10	21-14	27-18
1	5	7	9
0	0	0	0

Cuadro No.10

Los estudiantes buscan identificar regularidades, realizar operaciones y cálculos sin tener en cuenta algoritmos preestablecidos, y procesos de *composición* combinando dos o más cantidades para encontrar la cantidad resultante o total y de *descomposición* mediante los cuales conocen el todo y una de las partes, siendo necesario hallar la otra parte. Lo que demuestra un nivel de abstracción, a pesar de lo sencilla que pueda parecer la actividad.

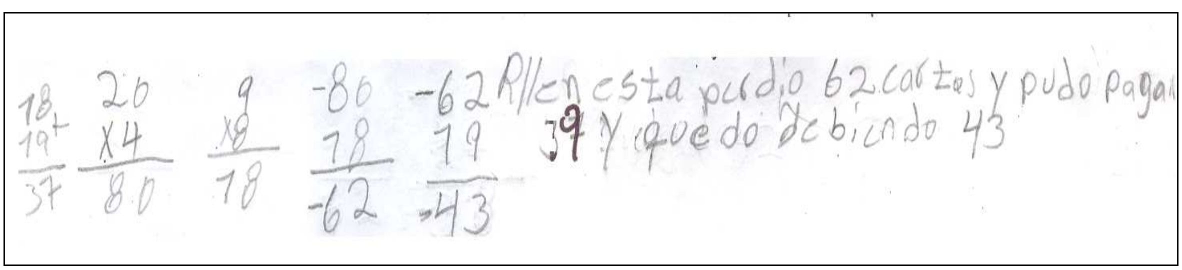
En los alumnos se evidencia la identificación de regularidades a partir de dos tipos de pensamiento, en uno se vale de toda la información de la situación de aprendizaje y en otro sólo utiliza aquella información que ve necesaria y verifica sus apreciaciones. Todo lo anterior nos lleva a identificar el *cálculo mental* como estrategia importante dentro de la solución de ese tipo de problemas.

Con respecto a la situación de aprendizaje: operaciones combinadas de los números enteros (ver anexo No.7), se observa que los estudiantes aún tienen una gran dificultad para realizar simbolizaciones de situaciones a partir de los números enteros, debido a que muchos anteponen la palabra “menos” a los números, para indicar que se “debe”.

Cinco estudiantes de veintiocho que trabajaron esta actividad, usan los números y las operaciones de forma flexible, de tal modo que pueden omitir algunas operaciones, esto indica un grado de compresión sobre estas, permitiéndoles realizar cálculos mentales, haciendo uso de las propiedades y relaciones entre operaciones. Pero a su vez es posible identificar que esta compresión se fundamenta básicamente en los números naturales, dejando de lado los números enteros.

De igual modo se puede observar que para cinco de los veintiocho estudiantes que realizaron esta actividad (ver anexo No.7), evidencia un bajo nivel cognitivo, al tener que realizar adiciones reiteradas para indicar un producto, lo que muestra dificultades en la compresión de las operaciones y sus propiedades. Veintitrés tienen un buen manejo de las estructuras multiplicativas y aditivas en la solución de las actividades propuestas en las situaciones de aprendizaje.

A su vez se observa poca economía de pensamiento en los estudiantes, al considerar que los números empleados en la situación no son muy grandes, lo que facilitaba la realización de cálculos mentales con el fin de agilizar y considerar los números enteros de manera explícita, dentro de los procesos de solución. Sólo cinco de los veintiocho estudiantes lograron realizar cálculos retomando los números enteros (ver cuadro No.11). Pero se evidencia una gran dificultad en darle sentido a estas operaciones.



Cuadro No. 11

Veintiuno de los veintiocho que realizaron esta actividad, evidencian tener un manejo de los *algoritmos* y *procedimientos*, para conseguir un determinado fin, pero en algunos casos se desligan de la situación, aceptando el resultado que se diera sin considerar esta como adecuada o no.

Categoría 3. Resolución de problemas

En la situación de aprendizaje sobre resolución de problemas de adición y sustracción con sustitución (ver anexo No. 6), se observó que los niños del grado primero en el problema Nº1 de composición de medidas (Vergnaud, 1991): Diana tiene 68 colores y se le pierden 16 ¿cuántos colores le quedan?. Veintidós niños de veintinueve respondieron acertadamente, esto pone en evidencia que asocian la palabra quitar con la sustracción.

En cuanto al segundo problema en el cual se les pregunta: Diana y Luisa están reuniendo fichas para su colección. Diana ha recogido 36 y Luisa ha recogido 24. ¿Cuántas fichas han recogido entre los dos? (problema de comparación de medidas), 24 niños de veintiocho respondieron acertadamente, esto debido a que es el tipo de problema al cual ellos están acostumbrados en la vida cotidiana. Además esto no implica conocer la operación inversa para dar respuesta.

Con relación al problema No. 4, transformación sobre estados relativos: a Camilo se le perdieron hoy 87 láminas. Si por la tarde perdió 37 ¿cuántos perdió en la mañana? En este, una de las respuestas fue 37, esto ocurre, porque los niños tienden a olvidar el contexto de los problemas y sólo se ocupan de los números.

En el grado séptimo, los estudiantes logran establecer relaciones numéricas a partir del contexto del problema y determinar la secuencia de operaciones más indicada y relacionar el dato desconocido en función de los conocidos. Pero se les dificultad realizar una lectura pausada y comprensiva para desarrollar una determinada pregunta de un problema planteado, mientras que otros operaron los números de las situaciones sin interpretar lo que se les estaba pidiendo. Por lo general los estudiantes resuelvan los problemas sin un plan preconcebido: leen sin saber lo que tienen que buscar en el enunciado, y escriben datos y calculan sin una regla o hilo conductor que una la pregunta con el resultado, y dé consistencia a los distintos pasos intermedios; como consecuencia frecuentemente inventaban definiciones.

Con relación a la ubicación de la información de la situación de aprendizaje de la calculadora se evidencian falencias en los conceptos previos con respecto a la proporcionalidad, ya que desligan el contexto del algoritmo establecido (proporcionalidad directa).

Como conclusión se puede retomar lo que plantea el MEN en los lineamientos curriculares:

*"*En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellas que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que se trabajan simultáneamente con las ideas que dan lugar al concepto de número".

Triangulación de datos

En la triangulación de datos se busca detectar estrategias comunes en la solución de las actividades planteadas en las situaciones de aprendizaje en los grados primero del IVJM y en el grado séptimo de la IEJLBS. En este caso se recurre a poblaciones heterogéneas en cuanto a nivel cognitivo lo cual incrementa la variedad de observaciones.

Categorías	**Puntos en común de los análisis realizados por categorías**
Compresión de conceptos	En cuanto a los procesos de estimación se observó en ambos grados, a lo largo del proceso, una evolución considerable en las estrategias empleadas por los estudiantes para enfrentarse a diferentes actividades. En el proceso de redondeo hay un avance en los estudiantes, en cuanto al uso del algoritmo. Sin embargo se observa dificultad cuando se trata de justificar las estrategias empleadas en la realización de redondeos. En lo que se refiere al cálculo exacto los estudiantes muestran avances en la implementación de estrategias para hallar la respuesta exacta por medio de cálculo mental; al igual que la justificación de las estrategias empleadas están apoyadas en procedimientos que dan cuenta que hay una compresión del algoritmo empleado.
Ejecución de algoritmos y	Cuando los estudiantes empleaban el cálculo mental salían a relucir en las diferentes estrategias las propiedades de las

procedimientos	operaciones de manera implícita. Se evidenció al finalizar la intervención que los estudiantes adquirieron rapidez en la ejecución de estrategias de cálculo mental. El principal apoyo en la realización de cálculos mentales lo constituyó la composición y descomposición no sólo de números, sino también de las operaciones en otras más sencillas. Se observó en los estudiantes el reconocimiento y utilización de los algoritmos de la suma y la resta. En ambos grados en el momento de realizar operaciones aritméticas, utilizaban las operaciones inversas para darle solución a un determinado problema. En diversas situaciones los estudiantes recurrían al cálculo escrito, a pesar de que el grado de dificultad no lo ameritaba.
Resolución de problemas	Al momento de tener que resolver un problema los estudiantes se ocupaban de los números omitiendo el contexto de la situación llevándolos a dar respuestas por ensayo y error.

Conclusiones

La intervención nos permite concluir:

— El cálculo mental optimiza el proceso de enseñanza aprendizaje, al potenciar el pensamiento numérico, al hacer uso explícito e implícito en los proceso de solución de los estudiantes de las propiedades de los números.

— Las situaciones de aprendizaje permitieron identificar las estrategias empleadas por medio de la confrontación de estas por parte de los estudiantes en los diferentes grados.

— Las estrategias que más emplean los estudiantes de grado primero del Instituto Vicarial Jesús Maestro y del grado séptimo de la I. E. Javiera Londoño son: descomposición de números en decenas, centenas y demás; adición reiterada; redondeo a decenas o centenas por defecto o por exceso; aplicación de las propiedades de la adición y el producto de forma implícita; estimación del intervalo más cercano a un número determinado; cálculo de mitades de números sencillos, reversibilidad, cálculo escrito, regularidades y patrones alrededor de problemas numéricos, ejemplificación, conteo con los dedos, identificación de regularidades.

— Del análisis efectuado, se pone en evidencia que el cálculo mental debe ser estimulado desde los inicios de la etapa escolar, para así mejorar el nivel cognitivo de los estudiantes de grados superiores.

Bibliografía

Castaño, J., Et al., Alcaldía Mayor de Bogotá, (2007). *Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático.* Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Álvarez, A. (1995), *Uso de la calculadora en el aula.* Madrid: Narcea, S.A., Ediciones.

Backhoff, E., Cortés, J. & Organista, J. (2005). Análisis de estrategias de cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores, *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 25,* pp. 543-558.

Castro, E., Castro, Encaranción., Rico, L., & Segovia I. (2000). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Castro, E., et al. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelación.* España: Ed. Síntesis.

Chamorro, M. del C (2003). *Didáctica de las matemáticas*. España: Pearson

Fernández, J. (2004). *Del cálculo mental.* Madrid: Printed in Spain.

Gabrielli, P. (2006). El cálculo mental o cálculo pensado. Extraído el 5 de diciembre, 2007, de http://patricia-gabrielli.idoneos.com/.

Herrera, F., & Ramírez I. *Situaciones de aprendizaje (SAE),* Universidad de Granada. Instituto de Estudios Ceutíes.

Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI .* Barcelona: Ciss. praxis educación.

Martínez, M. (1991). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación*. Bogotá: Círculo de lectura alternativa.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* España: síntesis.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2007). *Estándares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ríos Díaz, Alba et al, (2002). Propuesta de intervención pedagógica para desarrollar habilidades del cálculo mental en niños de preescolar y primer ciclo de básica primaria. Tesis de pregrado para optar el título de licenciados en educción preescolar y básica primaria, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Rosas, R. & Sebastián, C. (2004). *Piaget, Vigotsky y Maturana: constructivismo a tres voces .* Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.

Udina, F. (1992). *Aritmética y calculadoras .* Madrid: Síntesis.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: trillas.

Anexos

Anexo No. 1

Guía de observación

Institución Educativa: ____

Fecha: ________________

Hora: _________________

Situación: ____

Lugar: ____

Observador: ____

Medio técnico: ____

1. Ubicación geográfica

Dirección: ____

Teléfono: ______________________________

Barrio: ____

Ciudad: ____

2. Infraestructura

Estado general de la planta física: _______________________________________

____

____

Distribución

No. de aulas: ____

No. De baños: ____________________

Salas de Internet: ____________________

Biblioteca: ____________________

Aseo de la institución: ____________________

Cafetería: ____________________

Enfermería: ____________________

La portería: ____________________

3. Cotidianidad institucional

Horarios: ____________________

Descansos: ____________________

Intensidad horaria: ____________________

Jornadas: ____________________

Refrigerio: ____________________

Restaurante: ____________________

Relaciones Estudiantes-profesores: ____________________

Profesores - estudiantes: ____________________

4. **Contexto sociocultural:** ____

____

____

____

5. Documentos rectores de la institución

PEI: ____

____

____

Manual de convivencia: ____

____

____

Proyectos: ____

____

____

Historia: ____

____

____

Actas Consejo directivo: ____

____

Asociación de padres de familia (APF): _____________________________________

____

Consejo académico: ____

____

Resultados de pruebas ICFES: ____

____

____

Resultados de pruebas Saber: ____

Olimpiadas matemáticas: ____

6. Contexto general de las matemáticas

Hay periódicos: ____

Carteleras: ____

Tiramientos visibles a las matemáticas: ______________________________

7. Contexto general del aula de clase

Infraestructura del aula de clase: ______________________________

Metodología del profesor: ____________________________________

Contexto general de las matemáticas dentro del aula: ____________________

Relación entre estudiantes-maestros en el área de matemáticas: __________

Anexo No. 2

Entrevista a estudiantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1. Identificación:

Nombre: ____

Grado: ____

Institución educativa: ____

2. Posición frente a la matemática:

¿Te gusta la matemática? ¿por qué?____________________________________

____

¿Cómo ha sido tu rendimiento académico en el área**?**______________________

____

¿Para qué crees que te sirve la matemática en tu vida?____________________

____

¿Qué te gustaría aprender de la matemática?_____________________________

____

¿En qué te consideras bueno en matemáticas?____________________________

____

3. Relación maestro estudiante

¿Cómo te parece tu profesor?____

____

¿Cómo es tu relación con él?____

____

¿Qué hacen en clase?____

____

¿Cómo es la evaluación?____

____

4. Contexto escolar

¿Cómo te sientes en la institución?__________________________________

____

¿Qué opinas de tus compañeros?____________________________________

____

¿Estudias con tus compañeros fuera del colegio?_______________________

____

Anexo No. 3

Entrevista a docente

1. Identificación

Nombre:

Formación:

Años de experiencia:

Nivel de desempeño:

2. Metodología

¿Cómo desarrolla la clase?

¿Cómo evalúa a los estudiantes?

3. Recursos

Material: ____

____

____

Libros: ____

____

____

Tecnología: ____

____

4. Plan de área

Hace uso de los lineamientos curriculares: ________________________________

____

____

Reuniones de área y actividades y objetivos: ______________________________

____

____

Capacitación y/o actualización: ____

____

5. Interacción social

Comunicación con los padres de familia, informes, citaciones, solicitudes, horarios:

____

____

Estudiantes: ____

____

____

Anexo No. 4

Calculadora

Tema: Adición y sustracción con decenas.

Mediador: La calculadora.

Materiales: Calculadora.

Tiempo estimado: 4 horas

Actividad # 1: Exploración libre

Reconocimiento del instrumento y exploración libre. Esto se realiza con el fir apaciguar la curiosidad de los estudiantes con respecto a la calculadora.

Actividad # 2: exploración dirigida

La capacidad de operación repetida en la calculadora puede usarse par descubrimiento e investigación de patrones en secuencias numéricas.

1 $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ....

2 $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ....

5 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ....

10 $\boxed{+}$ 10 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ....

Actividad # 3: Ejercicios de aplicación

1. Marca el mayor número de cada pareja, comprueba si suman el número que está en medio.

   37______________________________45

   26______________________________17

   69______________101 ______________30

2. Rellena con $\boxed{+}$ $\boxed{-}$

   47 $\boxed{}$ 12 = 59

   68 $\boxed{}$ 68 = 0

   74 $\boxed{}$ 16 $\boxed{}$ = 88

3. Rellena los $\boxed{}$ con números adecuados

$85 + \boxed{} = 93$

$\boxed{} - 34 = 63$

$120 + \boxed{} - 45 = 120$

4. suma el primero, tercero y sexto número de cada fila, comprueba si la suma está bien efectuada

73 46 12 0 15 25 = 100

64 40 18 36 19 18 = 101

5. escoge tres números que sumen 78

15 97 12 34 85 37

Escoge tres números que sumen 19

8 4 3 8 11 6

6. encuentra el total de las siguientes adiciones teniendo en cuenta que la tecla del número 9 está mala.

19 + 9 =

39 + 29 =

7. la suma de 21 y 32 es más o menos:

40 50 60

La suma de 21 y 32 es más o menos

40 50 60

8. observa la siguiente pirámide de números:

9 - 1
98 - 21
987 - 321
9876 - 4321
98765 - 54321
987654 - 654321
9876543 - 7654321
98765432 - 87654321
987654321 - 987654321

¿Qué se obtiene al efectuar las operaciones indicadas? ¿Puedes prever el resultado de las últimas líneas antes de realizar el cálculo? ¿Por qué puedes estar seguro de tu predicción? Intenta de escribir con palabras lo que piensas.

Anexo No. 5

Descomposición

Tema: descomposición de decenas

Objetivo: descomponer decenas en unidades

Materiales: ficha de trabajo

Duración: 2h

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios de forma individual.

1. Completa las siguientes series:

	− 10	− 10	- 10	- 10	- 10	- 10	- 10	- 10	- 10
90	80								

	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9
90	81								

2. Completa las operaciones para obtener una centena

85+ ☐ 123- ☐ 100+ ☐ 90+ ☐

3. Coloreo:

Tres números que sumen 29	12	0	13	3	4
Tres números que sumen 38	20	4	14	7	6
Tres números que sumen 42	17	12	1	13	8

4. Une con colores cada término de la derecha con el correspondiente de la izquierda

40	2d+7u
84	43u
43	2d+20u
27	9d-6u

5. Adivina el número y escríbelo en el bombo del soldadito. Después colorea el soldadito libremente.
Si le sumo 12 da 23

6. Halla el término que completa las operaciones para que el resultado sea igual al señalado en el balón del jugador:

Encuentra los números que faltan.

Reglas del juego: los números que faltan son dígitos. En cada renglón la suma es el número de la derecha. En cada columna la suma es el número de abajo. La suma de cada diagonal principal es el número de la derecha que es continuación de la diagonal.

				18
0		0		11
	4		8	20
	5		2	16
2		9		15
8	17	20	17	11

Anexo No. 6

Resolución de problemas

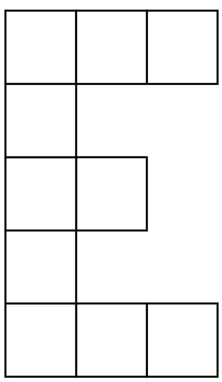
Tema: problemas de adición y sustracción

Objetivo: resolver problemas y justificar cada uno de los procedimientos empleados

Materiales: ficha de trabajo

Duración: 4h

Ambientación: escribe las centenas exactas, una en cada cuadro de la E, de tal forma que en ningún par de cuadrados vecinos haya centenas seguidas.



1. Resuelve los siguientes problemas de forma mental.

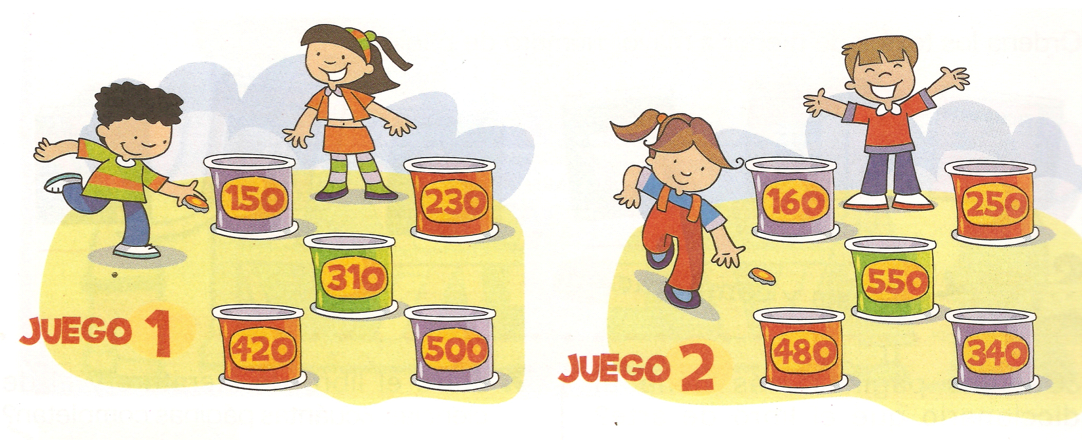
a) Diana tiene 68 colores y se le pierden 16 ¿cuántos colores le quedan?

b) Diana y luisa están reuniendo fichas para su colección. Diana ha recogido 36 y luisa ha recogido 24. ¿Cuántas fichas han recogido entre los dos?

c) En un parque una entrada para niño se reclama con 23 puntos y una entrada para adulto con 72 puntos. ¿Cuántos puntos más valen las entradas para adulto que para niño? ¿Cuál es la diferencia entre los puntos que necesitan para las entradas?

d) A Camilo se le perdieron hoy 87 láminas. Si por la tarde perdió 37 ¿cuántos perdió en la mañana?

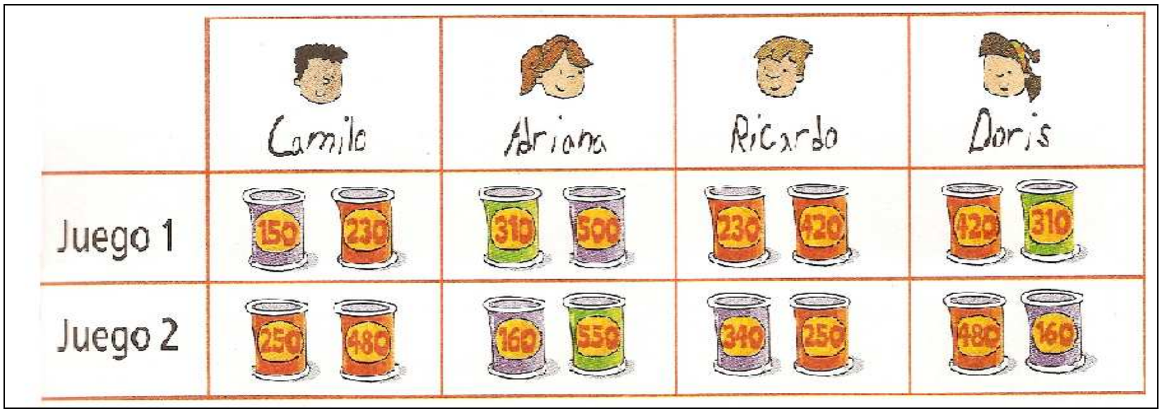
Estos niños se divierten jugando a insertar tapas dentro de los tarros, para acumular puntos.



2. Responde las siguientes preguntas e intenta justificar tus respuestas escribiendo porqué:
   - En el juego 1 ¿cuál tarro tienen el mayor valor? ¿cuál el menor valor?
   - En el juego 2 ¿cuál tarro tiene el mayor valor? ¿cuál el menor valor?

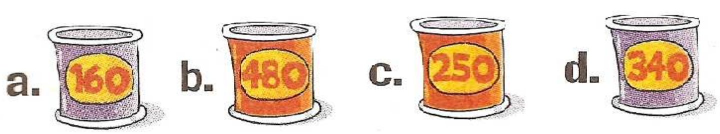
3. Organiza los números de cada uno de los juegos
   - Escribe los puntajes de los tarros del juego 1, de menor a mayor ,__,__,__,__,__
   - Escribe los puntajes de los tarros del juego 2 de mayor a menor ,__,__,__,__,__

4. En la siguiente tabla están los puntajes de algunos niños ¿cuántos puntos hizo cada niño?



Juego 1:___   Juego 1:___   Juego 1:___   Juego 1:___
Juego 2:___   Juego 2:___   Juego 2:___   Juego 2:___

5. ¿Cuántos puntos menos obtuvo Camilo en el juego 1 que en el juego 2?
6. En el juego 1 ¿cuántos puntos más que Doris obtuvo Adriana
7. Entre Ana y Paola hacen 800 puntos. Jaime y Juan hacen 350 puntos menos que ellas ¿cuántos puntos hicieron Ana y Juan?
8. Ricardo y Adriana tienen 950 puntos. Rafael y Doris acumularon 400 ¿cuántos puntos le faltan a la segunda pareja para tener los mismos de la primera pareja?
9. Juan acumuló 890 puntos en dos lanzamientos, en el juego2. Si una de las fichas cayó en el tarro 550, ¿en cuál de los tarros cayó la otra?



Anexo No. 7

Los números enteros

Fecha: ________________________________ Grado: ______________________

Nombre: ____

Teniendo en cuenta que cada avance con su retroceso es un intento, resuelve las siguientes situaciones.

Un caracol sube por una pared lisa, si por cada 3cm que sube se desliza 2cm. ¿al cabo de cuantos intentos logra escalar 5cm, 7cm y 9cm?

Escalar	Intentos

Especifica la estrategia realizada para determinar el número de intentos realizados por el caracol

Puedes hacer una representación numérica para determinar este proceso empleado, para llegar a la solución.

Podemos determinar de una manera ágil, el número de intentos realizados por el caracol para llegar a un punto cualquiera. Si es así, verifica si es posible que llegue a escalar 8cm. Si no, explica por que.

Un caracol sube por una pared lisa, si por cada 3cm que sube se desliza 1cm. ¿al cabo de cuantos intentos logra escalar 6cm, 8cm y 10cm?

Escalar	Intentos

Especifica la estrategia realizada para determinar el número de intentos realizados por el caracol

Puedes hacer una representación numérica para determinar este proceso empleado, para llegar a la solución.

Podemos determinar de una manera ágil, el número de intentos realizados por el caracol para llegar a un punto cualquiera. Si es así, verifica si es posible que llegue a escalar 9 cm. Si no, explica por que.

Anexo No. 8

Operaciones combinadas de los números enteros

Fecha: ______________________________ Grado: _____________________

Nombre: ____

Objetivo: realizar problemas en los que se pueda utilizar los números enteros para llega a su solución.

Federico, le esta contando a su amigo Santiago como le fue hoy el fuego de cartas, por lo que le da unas pistas muy interesantes sobre las que se tiene que basar para saber como le fue. Si llevaba 59 cartas, que conclusiones puede sacar Santiago, si:

En la primera partida, perdió 5 veces su edad en cartas, si tiene 8 años, ¿Cuántas perdió? Y ¿cuántas le quedaron, si le quedaron?

En la segunda partida, dijo, perdí el producto entre 20 y 4, restándole el producto entre 9 y 2. ¿Cuántas perdió en esta partida?, tendiendo en cuenta que le quedaban cartas de la partida anterior, ¿cuántas pudo pagar en esta ocasión y cuántas debe?

En la tercera partida dijo: pedí prestado a Juancho, el triple de lo que debía de la partida anterior. Y gane la cuarta parte de lo que tiene Antonio, que eran 864 cartas. Si pagó sus deudas a la partida y a Juancho, ¿cuánto le quedo, si le quedo?

Dada mi mala racha, decidí pedir prestado 4^3 cartas, con las que logré ganar la siguiente cantidad: la suma de 58, con el producto entre 9 y 8, con esto logre pagar todas mis deudas y me quedo algo. ¿Cuánto le quedo?, teniendo en cuenta las cartas a favor o encontra del punto c).

Dadas estas pistas Santiago pudo concluir: ganaste 52 cartas, descotando las que llevabas desde un inicio, de acuerdo a esto, en la cuarta partida cuantas ganó?

Anexo No. 9

Utilicemos la calculadora en la variación proporcional

Propósito: Utilizar la calculadora como medio para la observación de patrones y el establecimiento de conexiones numéricas a partir de fenómenos directamente relacionados con la variación proporcional.

Completa las siguientes tablas e identifica si son directamente proporcionales o inversamente proporcionales y responde las siguientes preguntas:

Tiempo (h)	**Distancia (km)**	**K=**	**K=**
0.5	50	100	0.01
1.5	150		
2.5			
3.5	350		
	300		
4.5			
5			

Si ubicas la anterior información en una situación que creas conveniente. ¿Cómo quedaría? ¿Sería directamente proporcional o inversamente proporcional?

¿Hay una constante de proporcionalidad o dos? Argumenta.

Teniendo en cuenta que hay espacios sin llenar, que podrías hacer para que la proporcionalidad se continúe cumpliendo, explica tu estrategia.

Sin utilizar calculadora estarías en capacidad de llenar los espacios de manera ágil, explica como podrías hacerlo.

2.

No. De obreros		**No. De días**	**K=**	**K=**
Exacto	**Redondeo**			
120		2	240	
100		2.4		
50		3		
		4.8		
		4.5		
		8		
		16.2		
		24.5		
5		48		
3		80		

Si ubicas la anterior información en una situación que creas conveniente. ¿Cómo quedaría? ¿Sería directamente proporcional o inversamente proporcional?

¿Hay una constante de proporcionalidad o dos? Argumenta.

Teniendo en cuenta que hay espacios sin llenar, que podrías hacer para que la proporcionalidad se continúe cumpliendo, explica tu estrategia.

Utilicemos el fix. Observa en qué casos te da un número decimal en los obreros y argumenta en qué situaciones es conveniente la existencia de estos y porqué no y qué podemos hacer para que el trabajo se cumpla en el tiempo estipulado.

Anexo No. 10

Análisis grado primero

Anexo No. 10

Análisis grado séptimo