UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

LAS FRACCIONES COMO MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR.

Bibiana Patricia Quiroz Restrepo

Juan Carlos Vanegas Garcés

Trabajo investigativo para optar el título de

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática

John Jairo Múnera Córdoba

Asesor

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Medellín, Colombia

2009

AGRADECIMIENTOS

A **Dios,** por habernos permitido culminar este trabajo.

A **nuestras familias**, por su apoyo incondicional, educación y valores inculcados en cada uno de nosotros.

A la **Institución Pedro Luis Álvarez Correa; sede María Goretti**, por abrirnos sus puertas y permitirnos ser parte de la comunidad educativa durante el tiempo de práctica pedagógica.

A las estudiantes: **Melissa Agudelo, Laura Obando y Sindy Valencia**, quienes contribuyeron e hicieron posible nuestro trabajo de corte investigativo.

A las docentes **Beatriz Franco y Leticia Herrera** por su cooperación en el centro de práctica.

A nuestro asesor **John Jairo Múnera** por su apoyo y orientación antes, durante y después de la realización de este trabajo.

¡Para ellos, mil gracias!

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este es un trabajo que se centra en *c*aracterizar las relaciones que establecen los estudiantes al usar interpretaciones de las fracciones como medidor, partidor y operador, para abordar actividades e identificar la relación existente de las mismas con las formas como aprenden las fracciones desde el punto de vista escolar.

Nuestra labor pedagógica fue realizada en la Institución educativa Pedro Luis Álvarez Correa, Sede María Goretti; del municipio de Caldas, con 43 estudiantes del grado 4º, con edades comprendidas entre los 10 y 12 años.

Este es un estudio encaminado bajo el enfoque de Investigación cualitativa mediante un estudio de casos; por lo cual los análisis de los resultados se centran en tres estudiantes: Melissa Agudelo Quintero, Laura Obando Hernández y Sindy Johana Valencia Varela.

El presente trabajo está constituido por cinco capítulos, los cuales son:

En el primer capítulo se encuentra el planteamiento del problema, en el cual describimos el objeto de nuestra investigación, la importancia y pertinencia del estudio planteado. En este se incluyen los objetivos propuestos en la investigación, la pregunta y la justificación de la misma.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que respaldan nuestra investigación, en los cuales se abordaron autores que han investigado acerca de las interpretaciones de las fracciones como: Carlos Eduardo Vasco, Hans Freudenthal, Eduardo Mancera Martínez, entre otros.

En la metodología de la investigación, en el tercer capítulo, se hace explícita la caracterización de los participantes, así como una breve descripción de todos y cada uno de los instrumentos de recolección de información.

En el cuarto capítulo se muestran los resultados obtenidos del análisis de las categorías emergentes de la información, en la cual se hizo una debida triangulación entre las voces de los autores del trabajo, el marco teórico y las voces de los participantes.

En el quinto y último capítulo, se presentan las conclusiones de la investigación y posibles recomendaciones que pueden ser útiles a la hora de abordar un trabajo de investigación en la misma dirección.

Esto último puede ayudar a fortalecer los análisis que pueden presentarse en torno a esta investigación; por lo cual se hace la invitación a la comunidad educativa de continuar con el proceso de investigación, la cual puede aportar elementos valiosos que sirvan para mejorar las prácticas educativas de muchos docentes.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La enseñanza y aprendizaje de las fracciones a nivel escolar se ha convertido en un asunto muy complicado, en el sentido que éstas son entendidas desde la escuela, como un saber que surge de la aplicación de múltiples algoritmos y reglas que da el docente, las cuales los alumnos deben memorizar.

Esto causó que desde la década de 1980 se hayan venido realizando algunos trabajos, en la búsqueda de nuevas estrategias para potenciar el aprendizaje de las fracciones en los alumnos, de tal forma que el modelo basado en algoritmos pase a un segundo plano, para darle prioridad a la movilización y construcción de relaciones matemáticas asociadas a este eje temático.

Por lo tanto, en adelante, se presentan algunos trabajos, de corte investigativo y didáctico que se han llevado a cabo en este sentido. Para tal fin, éstos corresponden a tres de maestría, además de dos libros y dos artículos relacionados con el tratamiento de las fracciones desde un punto de vista escolar.

Un primer trabajo, titulado "*Estrategias de intervención pedagógica para la enseñanza de los Racionales en la Básica secundaria"* realizado por Arias (1996), en donde se considera que las fracciones son una cantidad expresada por el signo $\boldsymbol{n}/\boldsymbol{m}$.

En este, se hace además una descripción de los números Racionales, como un conjunto comprendido por los Números enteros, más todas las fracciones de la forma $\boldsymbol{n}/\boldsymbol{m}$ cuando $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son enteros y $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$.

Asegura también, que la adquisición del concepto de número racional se hace luego de interiorizar los significados o interpretaciones de las fracciones, los cuales se pueden construir a partir de los sistemas concretos que el alumno maneja; y además, reconocer las diferentes dificultades encontradas en su enseñanza.

En segundo lugar se consultó el trabajo "*Estrategias de intervención pedagógica para la enseñanza de los números fraccionarios",* realizado por Múnera (1997), en donde explicita que antes de realizarse una introducción a los algoritmos asociados a las fracciones es necesario que el estudiante interiorice sus diferentes interpretaciones, las cuales pueden ser conceptualizadas desde el tratamiento de magnitudes, por lo cual se hace necesario un tratamiento escolar donde se trabajen conjuntamente estos dos saberes.

Además de esto afirma que la mera enseñanza de las fracciones desde su interpretación como partidor es muy limitada, si se considera como una acción física y no matemática, es decir, que mientras no haya una reflexión sobre ella no puede haber movilización de procesos de pensamiento matemático.

Por otro lado, establece que el término $\boldsymbol{1/m}$ es considerado como la unidad fraccionaria. Esto debido a que se obtiene como subunidad, producto de la división de una unidad inicial en $\boldsymbol{m}$ partes iguales; y si una cantidad contiene exactamente un número $\boldsymbol{n}$ de estas subunidades, se denotará como $\boldsymbol{n/m}$.

Por último, se analizó el trabajo de Obando (1999), *"La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo".* Aquí el planteamiento realizado por el autor, es que el significado de las fracciones se construye a partir de las relaciones cuantitativas que se pueden establecer entre cantidades de una magnitud.

En este sentido determina la importancia de las unidades de medida que se utilicen para cuantificar cierta magnitud. Esto posibilita también, el desarrollo e introducción de algoritmos, además de la concepción de la fracción como una composición aditiva de varias unidades fraccionarias.

Es fácil ver cómo de estos tres trabajos se ha coincidido en plantear que cualquier fracción $\boldsymbol{n}/\boldsymbol{m}$ representa una cantidad $\boldsymbol{n}$ de partes, todas iguales con respecto a la cantidad de magnitud, cada una de las cuales mide $\mathbf{1}/\boldsymbol{m}$.

Respecto a los trabajos que reflexionan sobre la enseñanza de las fracciones, se sistematizaron las siguientes ideas:

El primero, *"El archipiélago fraccionario"* de Vasco (1996), allí se definen las fracciones como un sistema matemático, el cual no debe ser transmitido por el docente al estudiante, centrado en símbolos y operaciones; sino, más bien, desde la exploración de diversos sistemas concretos que sean familiares a los alumnos y así, permitirles amplios niveles de significados en la construcción de las fracciones. También enfatiza que las fracciones a nivel escolar no deben ser enseñadas desde la partición de objetos, ya que estas son acciones físicas bastante dependientes de la cultura ya que lo que verdaderamente se debe garantizar, son las acciones matemáticas.

Otro trabajo consultado "Las fracciones: la relación parte-todo" cuya autoría es de Llinares y Sánchez (2000). En este trabajo se afirma que algunos conceptos relacionados con las fracciones como fracción propia e impropia, además de las operaciones básicas, pueden ser construidos de una forma mucho más natural, desde un trabajo de aula orientado hacia el tratamiento de magnitudes continuas, como lo son la longitud, el área y el volumen, en situaciones concretas para los estudiantes.

Dentro de este mismo marco, dicen los autores que es necesario de valerse de modelos geométricos, como rectángulos y circunferencias, teniendo en cuenta sus propiedades figurales, además de algunos segmentos de recta.

También se tiene en cuenta "*La fenomenología didáctica de la estructuras matemáticas"* (Freudenthal, 1994), en donde se describe la importancia de la comparación numérica entre dos cantidades, la cual es una acción matemática que posibilita llegar a la conceptualización de las fracciones.

Para ello, interpreta las fracciones desde dos perspectivas, como fracturador y comparador.

El fracturador surge en la medida que una cantidad de magnitud es dividida en partes iguales, considerando luego, una comparación entre las partes y el todo.

El comparador trasciende mucho más allá de partir una unidad en partes iguales. Éste aparece en el momento en el cual se consideran dos cantidades de una magnitud que pueden estar juntas o separadas y que luego son comparadas con respecto a su valor.

Finalmente, se consideró el artículo llamado *“Significados y significantes relativos a las fracciones”,* en el cual Mancera (1992), da cuenta de la importancia de considerar las interpretaciones de las fracciones como subconstructos de los números racionales, llamados también significados de las fracciones.

Con relación a esto, es necesario desarrollar estrategias metodológicas en el aula con las cuales se pueda superar lo algorítmico y hacer un tratamiento de las fracciones en relación a cada una de sus interpretaciones.

Debido a lo anterior, se puede ver la necesidad de plantear un trabajo en que oriente la enseñanza de las fracciones desde sus interpretaciones teniendo en cuenta las cantidades de magnitud.

Ya desde el contexto escolar y de nuestras prácticas pedagógicas se pudo identificar que la enseñanza de las fracciones se hace a partir del uso de algoritmos y reglas que los estudiantes deben memorizar.

Esto se hizo posible, gracias a revisión de los libros de texto utilizados como guía para impartir las clases, de donde son extraídas las listas de actividades y ejercicios que deben desarrollar los estudiantes; también fueron analizados las notas de clase de las estudiantes participantes de nuestro trabajo, con el fin de contrastar el currículo desarrollado con el que es aprendido, en relación a las fracciones.

El texto Navegantes de la Editorial Norma, hace un tratamiento de las fracciones de forma sesgada, en el sentido en que realiza una clasificación de temáticas de acuerdo a ciertas definiciones, como lo son fracciones propias, fracciones impropias, fracciones homogéneas, operaciones con fracciones, entre otros.

A continuación presentamos un ejemplo, el cual trata acerca de la definición formal de la fracción, el cual se encuentra en el texto mencionado.

Para expresar una parte de una unidad que se ha dividido en partes iguales hacemos uso de los números fraccionarios. Estos tienen dos términos:

$$\frac{3}{4} \begin{array}{l} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denominador} \end{array}$$

El denominador indica el número total de partes en que se ha dividido la unidad; el numerador indica el número de partes que se toman o a las cuales se hace referencia.

En este texto predominan los ejercicios relacionados con la fracción operador, dejando de lado las demás interpretaciones, esto sin contar con un adecuado tratamiento desde contextos de magnitudes, agregando, que se hace uso de unidades de magnitud estandarizadas, lo cual se le hace difícil a los estudiantes comprender, debido a que éstas son aún muy abstractas para los ellos.

En el siguiente ejemplo, vemos cómo se le plantea un ejercicio a los estudiantes, referente a la suma de fracciones, casi inmediatamente que se presenta la definición formal de la fracción.

Lo anterior se hizo presente, cuando durante las clases en las que se enseñaban las fracciones, las definiciones rigurosas hacían parte de lo que la maestra cooperadora realizaba en el aula, entre las cuales estaban las de fracción homogénea, numerador, denominador, entre otros.

Luego de esto, se utilizaron algunas frutas, que eran llevadas previamente por los estudiantes al aula, las cuales eran partidas de acuerdo a una fracción que era dada por la docente. Los niños luego, simulaban un reparto equitativo, aunque siempre seleccionaban para sí, los pedazos de fruta más grandes.

Finalmente la docente pidió a cada estudiante la representación de una pizza, de 16 porciones, las cuales eran de tamaño desigual, de lo cual algunos estudiantes pudieron conjeturar que, si cada uno de ellos se comía un pedazo de la pizza, no se comían la misma cantidad, porque las “porciones” eran de diferente tamaño.

Todo esto les causó confusiones debido a que notaban, que aunque la misma fracción indicaba un mismo reparto en cuanto al número de pedazos, cada uno se comía diferente cantidad.

Todo este rastreo sirvió como base para realizar un trabajo que permitiera analizar ***las interpretaciones de las fracciones como medidor, partidor y operador*** en los estudiantes de cuarto de primaria de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa.

Por lo anterior, se decidió encaminar el presente trabajo con miras a responder el siguiente interrogante: **¿qué relación tienen las interpretaciones de las fracciones –medidor, operador y partidor- que utilizan los estudiantes al resolver actividades, con el proceso de aprendizaje de las fracciones en la escuela?** Para lo cual, se formuló el siguiente objetivo: ***caracterizar las relaciones que establecen los estudiantes al usar interpretaciones de las fracciones- medidor, partidor y operador- para abordar actividades, y su relación con la forma en que son abordadas en la escuela.***

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Elementos históricos asociados

Clásicamente las fracciones han sido consideradas a nivel escolar, como el número $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$ tal que $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números naturales y $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{o}$, presentación que aparece desligada de su proceso de construcción y uso.

Tener en cuenta la fracción desde su dimensión histórica ha posibilitado determinar algunos aspectos relevantes de gran valor didáctico y pedagógico, que pueden tomar significado en su enseñanza y aprendizaje.

La construcción de las fracciones históricamente estuvo ligada a situaciones de medición de magnitudes tales como la longitud y la superficie. Además, del tratamiento de cantidades de objetos o conjuntos, lo cual, en un comienzo, permitió darle sentido al número racional positivo, el cual se ha provisto de algunos significados a lo largo de la historia, en varias culturas.

Primero, surge el concepto de fracción, en las cultura Babilónica y Egipcia (Siglos XXV- V antes de J.C.); después apareció el de razón y proporción, que adquirió forma a partir de los planteamientos de Euclides.

Para esta disertación teórica se tienen en cuenta algunos aspectos referentes a la historia de las fracciones, con lo cual se esclarecen algunas raciones asociadas a las mismas y de sus interpretaciones como medidor, partidor y operador.

De acuerdo a lo anterior, se interpreta que el surgimiento de las fracciones está estrechamente relacionado con la necesidad de medir magnitudes. Esto lo afirma Juan Díaz Godino (2004, p. 111) cuando expresa que:

> *El concepto de número racional positivo se ha construido a lo largo de varios miles de años y durante muchos siglos, su definición estuvo ligada a contextos concretos de medida y reparto. En estas condiciones, surgieron los conceptos de fracción y razón que inicialmente fueron conceptos independientes. A partir de ellos, se sintetizó, posteriormente, el concepto de número racional positivo y, más tarde, el de número racional.*

Las ideas anteriores dan cuenta que la construcción de las fracciones es un proceso asociado a la cultura que no está desligado de los procesos sociales, producto de la interacción humana, en diversos contextos. Así lo evidencia las palabras de Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam (1951.p. 113) cuando dicen que:

> *La fracción es una ampliación del concepto de número que surge como una necesidad de índole práctica: el problema de la medida. Desde los orígenes de la civilización el hombre no sólo ha utilizado los números para contar conjuntos (rebaños, árboles, frutas,…) sino también para medir magnitudes (longitudes, extensiones, pesos, etc.)*

Fue entonces, en la búsqueda de nuevos métodos para expresar matemáticamente una cantidad, que en un comienzo la fracción adquirió la función de representar cantidades de magnitudes discretas y continuas en diversas situaciones de medida, así lo muestra la historia en la civilización egipcia y babilónica aproximadamente en el siglo XX a de J. C.

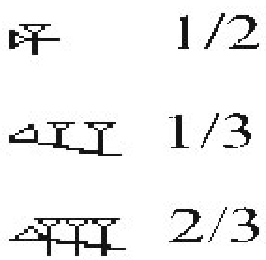
De esto da cuenta, algunos de los manuscritos encontrados en algunas regiones del Medio Oriente y del norte de África. Un ejemplo de ello, son los papiros de Rihnd y de Moscú de origen Egipcio, y algunos objetos de arcilla de origen Sumerio con los cuales se da testimonio del uso de las fracciones desde antes del nacimiento de la cultura occidental.

El uso y aparición de las fracciones se inició en la cultura mesopotámica en situaciones de reparto y medida, por ejemplo, algunas relacionadas con el comercio, debido a la necesidad de llevar un buen proceso de contabilidad. Aspecto que da cuenta de la habilidad para comparar numéricamente dos cantidades de magnitud. Así:

25 telas [al precio] de $\mathbf{7\frac{1}{4}}$ *siclos [de plata] pieza, su precio: tres minas* $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ *siclos [de plata].*

> *¿Cuántos siclos de plata tenía una mina del mismo metal?*
>
> *El precio final en forma de siclos de plata resultará de* $\mathbf{25\ x\ 7\frac{1}{4} - (25\ x\ 7) + \left(25\ x\frac{1}{4}\right) = 175 + 6\frac{1}{4} = 181\frac{1}{4}}$ *siclos de plata. De manera que* $\mathbf{181\frac{1}{4}}$ *siclos* $= \mathbf{3}$ *minas* $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ *siclos, por lo que* $\mathbf{180}$ *siclos* $= \mathbf{3}$ *minas* $\rightarrow \mathbf{1}$ *mina* $= \mathbf{60}$ *siclos. (Maza, 2000, p.40)*[1]*.*

En Mesopotamia, los babilonios lograron utilizar las fracciones en contextos de medida a pesar de que sus avances matemáticos tuvieron un gran desarrollo, en gran parte, en cuanto al manejo del álgebra. Por ejemplo, algunas fracciones las consideraron especiales por la forma en que se representaban gráficamente y en especial por su uso en la cotidianidad. Los símbolos y la fracción que representaban, son:



Estas fracciones “eran para los babilonios “totalidades”, en el sentido, de medida de cantidades y no de divisores de la unidad en partes, aunque,

[1] La mina y ciclo son unidades de medida que equivalen a 600 gramos y 11.5 gramos, respectivamente.

naturalmente, debieron surgir como medidas de cantidades que guardaban esas relaciones respectivas con otra cantidad tomada como unidad". (Kline, 2002, p. 22).

Por ejemplo, en la medida de longitudes la unidad más utilizada era el ***codo*** (50 centímetros aproximadamente) y algunos de sus submúltiplos son: el ***ampan***, que equivale a $\frac{1}{2}$ codo; el ***pie*** que equivale a $\frac{2}{3}$ de codo; y el ***dedo*** que equivale a $\frac{1}{30}$ de codo. (Taton, 1985).

Similarmente, los egipcios utilizaron las fracciones para resolver algunos problemas relacionados con la comparación de cantidades de magnitud. Para ello, retomamos uno de los escritos matemáticos más antiguos: el papiro de Rhind, que fue escrito entre los años 1600 y 1500 antes de J.C, el cual contiene 85 problemas, algunos de ellos, a fines al uso de las fracciones.

De acuerdo a Carlos Maza (2000, p. 98), la representación de las fracciones para los egipcios estaba restringida a la suma de fracciones unitarias, cuyo numerador es la unidad,[2] y de la forma $\frac{2n}{2n-1}$, con la particularidad de que ninguna de ellas se repetía. Por ejemplo, $\frac{8}{10}$ no se

[2] Es decir, de la forma $1/n$

expresaba como la suma de ocho veces $\frac{1}{10}$, sino que podían considerar esta como:

$$\frac{8}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \text{ ó } \frac{8}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

Con relación, a la forma en que los egipcios representaban cantidades fraccionarias, Vera (1946. p. 36), afirma que "lo más notable del papiro del Rhind es la descomposición de fracciones del tipo $\frac{2}{(2n+1)}$ para n= 1, 2, 3,…, 49, en suma de fracciones que tienen numerador la unidad" [3], lo cual se posibilitó en la medida que se usó una tabla que las contiene como una suma de varias fracciones unitarias.

Haciendo una transcripción desde nuestro lenguaje y sistema de numeración, algunos elementos de la tabla $\frac{2}{(2n+1)}$ son:

[3] Algunos ejemplos están consignados en la Tabla 1, de la siguiente página.

n	$\frac{2}{(2n+1)}$	*igual a:*
2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
3	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
10	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$
16	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$
28	$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$
30	$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
37	$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$
41	$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$
45	$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{119}+\frac{1}{130}+\frac{1}{170}$
49	$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$

ALGUNAS FRACCIONES DE LA TABLA $\frac{2n}{2n-1}$

Los seis primeros problemas del papiro del Rhind consisten en repartir entre diez hombres 1, 2, 6, 7, 8 y 9 panes.

En estos se puede distinguir que los egipcios no hacían ninguna diferenciación entre lo continuo y lo discreto, (asunto que fue luego esclarecido por los pitagóricos[4]), por lo que se limitan a un reparto equitativo de un conjunto de panes.

Por ejemplo el problema tres del papiro del Rhind dice:

"división de 6 panes entre 10 hombres. Cada hombre recibe $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$. Para probarlo, multiplicar $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ por 10" (Maza, 2000, p. 99).

Para solucionar problemas de este tipo, en un contexto de reparto, los egipcios se valían del resultado para dividir en partes iguales una cantidad. Por ejemplo, para el caso anterior, tomaban un pan y lo dividían en dos partes; para darle a los 10 hombres sería necesario partir 5 panes; finalmente quedaría un pan para repartir entre 10, el cual lo partían en 10, tocándole a cada uno un décimo más.

La introducción de las fracciones por los egipcios, a pesar de tener este modo de representación tan peculiar, está relacionada con las cantidades de una magnitud. A esto agrega Taton (1985), quien expresa que las fracciones tenían gran uso en las medidas de capacidad, como en la medida de cereales, y en

[4] Ver Maza Gómez, C. (2000). *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico.* Sevilla, SL-Utrera, p. 223-224.

las medidas agrarias, a través de un método por el cual la fracción $\frac{1}{2}$ es dividida un número determinado de veces por 2, del cual surgen las fracciones $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$.

2.2. Interpretaciones de la fracción como: medidor, partidor y operador.

Para efectos didácticos es necesario entender que cuando se habla de las interpretaciones de las fracciones (medidor, partidor, operador, razón y cociente), se hace en relación a sus significados y no a sus formas de representar o significantes (fracción propia, fracción impropia, número mixto, etc.)[5]

Múnera (1998) y Obando (1999) consideran que una fracción de la forma m/n representa una cantidad de magnitud, y que hace alusión a la suma de m unidades fraccionarias de un mismo orden. Es decir:

$$\frac{m}{n} = \underbrace{1/n + 1/n + 1/n + 1/n \cdots + 1/n}_{m\ veces}.$$

[5] Mancera (1992, p. 32-30) se refiere a las interpretaciones de las fracciones como los significados y los modos o formas de representarlas como los significantes.

De acuerdo a Behr y otros (1983) citados por Mancera (1992), establece que el concepto de medida fraccionaria, se refiere a cuánto hay de una cantidad con respecto a otra, estableciendo de este modo la comparación entre dos cantidades.

En consonancia a lo anterior, Múnera (1998) considera, para efectos didácticos los términos, fracción, número fraccionario y número racional.

> *Todo símbolo de la forma $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números naturales, que represente la cantidad de partes de una determinada magnitud o de un conjunto de objetos, lo llamaremos fracción.*
>
> *El símbolo $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$ donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son número naturales desprovistos de referencias concretas a procesos de medidas se considera como un número fraccionario. Este, desde el formalismo matemático, es definido como un par ordenado que representa una clase de equivalencia.*
>
> *Los Números Racionales son todos los números de la forma $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$ donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números enteros y $\boldsymbol{n}$ distinto de cero (p. 25).*

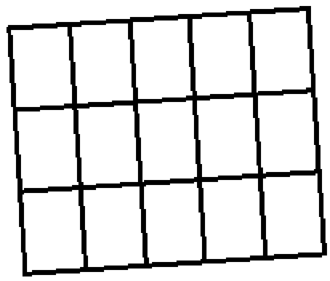
Con lo planteado hasta el presente podemos decir que las fracciones están relacionadas con las magnitudes y su cuantificación; son el resultado de un proceso de comparación entre cantidades, por lo cual es necesario que en el tratamiento escolar de éstas se tenga en cuenta algunos elementos epistemológicos con los cuales se pueda diferenciar los tipos de magnitudes: continuas y discretas. Distinción que hace brevemente Obando (1999, p. 120) de la siguiente manera:

> ***Lo continuo.***
>
> *Divisible infinitamente.*
>
> *Da origen a las unidades geométricas y a algunas unidades métricas.*
>
> *Está relacionado con las magnitudes.*
>
> *La unidad es divisible indefinidamente.*
>
> ***Lo discreto.***
>
> *Divisible un número finito de veces.*
>
> *Da origen a la unidad aritmética.*
>
> *Está relacionado con las colecciones.*
>
> *La unidad es indivisible.*

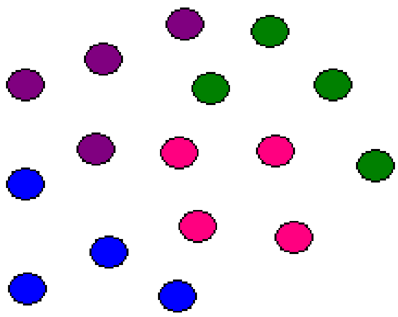
En este orden de ideas Freudenthal (1994) declara que las fracciones cobran significado en tanto que el todo puede ser continuo o discreto, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura[6].

Ejemplos:

1. Una superficie rectangular. Corresponde a un todo continuo definido, estructurado.



2. Un conjunto de canicas. Un todo discreto, definido y estructurado con respecto a cada uno de los colores.



3. Las estrellas que hay en el universo. Un todo discreto indefinido y estructurado con respecto a cada una de sus clases, (supernovas, enanas, agujeros negros, etc).
4. El agua que fluye por un río. Todo contínuo, indefinido y estructurado con respecto a los componentes químicos que la conforman.

[6] Se entiende que un todo es definido cuando es finito, indefinido cuando es infinito.
Cuando un todo es estructurado quiere decir que se divide de forma regular, es decir, cuando las partes son congruentes; cuando es carente de estructura el todo es dividido en partes inequitativas pero que guardan relaciones métricas entre sí.

2.2.1. La fracción como medidor.

La fracción como medidor está relacionada con los procesos de medida y adquiere sentido cuando se comparan numérica o cuantitativamente dos cantidades de una misma magnitud, las cuales pueden ser conmensurables o no.

Además, el surgimiento de la fracción unitaria $\mathbf{1}/\boldsymbol{n}$ posibilita cuantificar magnitudes cuando adquiere la función como subunidad de medida, con la cual se pueden establecer mediciones y comparaciones.

Comparar es uno de los procesos o métodos por los cuales se “causan fracciones”.[7]

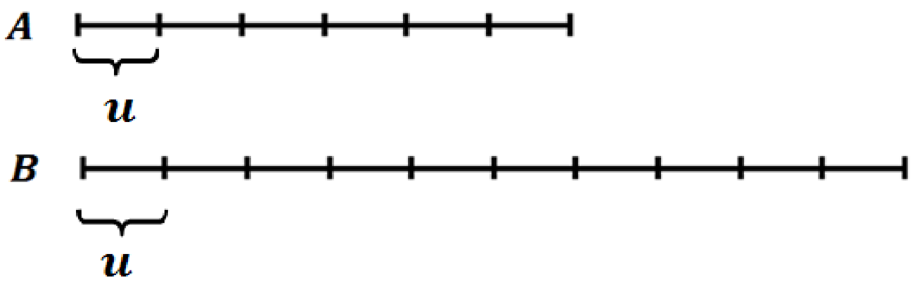
El proceso de comparación se puede hacer de dos maneras. La primera es:

> *Directamente: los objetos que han de ser comparados se colocan juntos, o se consideran de algún otro modo como si el más pequeño fuese parte del más grande, estrategia mediante la cual la fracción como comparador se reduce a la fracción como fracturador de un objeto concreto. (Freudenthal, 1994, p. 20)*

Ejemplo: dos segmentos que son comparados directamente.

Sean los segmento $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$,que son medidos con la unidad de medida $\boldsymbol{u}$, así:

[7] Otros métodos para causar fracciones son: fracturar, partir y dividir (Freudenthal, 1994)



Si se compara la longitud del segmento $\boldsymbol{B}$ con respecto a la longitud del segmento $\boldsymbol{A}$, la fracción resultante puede ser $\frac{6}{10}$.

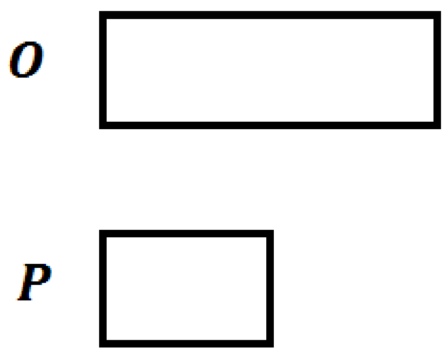
Por otro lado, si se comparara la longitud del segmento $\boldsymbol{A}$ con respecto a la longitud del segmento $\boldsymbol{B}$, la fracción resultante puede ser $\frac{10}{6}$

La segunda es:

> *Indirectamente: un tercer objeto, digamos una vara de medir, media entre dos objetos que son comparados siendo transferencia uno de uno a otro, o considerandose como si tranfiriera*[8] *(Ibíd. p. 20).*

Por ejemplo:

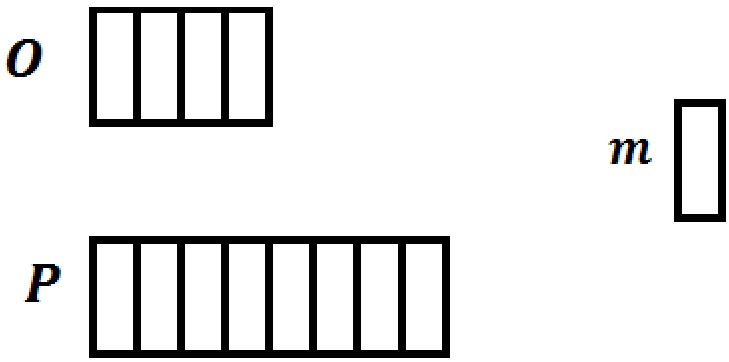
Sean las supeficies $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{P}$.



[8] Este tipo de comparación está relacionado la conmensurabilidad.

Para comparar estas dos superficies, es necesario que ambas tengan una cantidad de medida relacionada con una misma unidad. Esta última sirve de mediadora para realizar la comparación. Es decir que las dos superficies deben ser conmensurables de acuerdo a la unidad de medida a utilizar.

Sea, entonces la unidad de medida $\boldsymbol{m}$, con la cual se determina el área de cada una de las superficies y de esta menera proceder a la comparación de cada una con respecto de la otra, de la suguiente manera.



Si se compara el área de la superficie $\boldsymbol{P}$ con respecto al área de la superficie $\boldsymbol{O}$, la fracción resultante puede ser $\frac{4}{8}$.

Por otro lado, si se comparara el área de la supercicie $\boldsymbol{O}$ con respecto al área de la superficie $\boldsymbol{P}$, la fracción resultante puede ser $\frac{8}{4}$

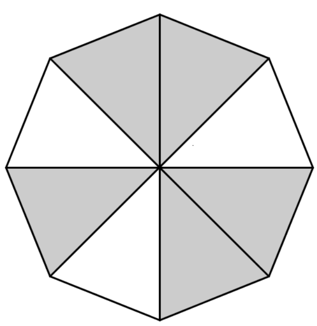
El trabajo escolar desde esta interpretación de las fraccion, permite un surgimiento de la fracciones propias e impriopias de forma natural, siempre y cuando se tenga en cuenta que es necesario distinguir, que la comparación a realizar debe ser numérica o cuantitativa, según las medidas establecidas o cantidades de magnitud.

2.2.2. La fracción como partidor.

Los partidores fraccionarios adquieren su función en el sentido en que una cantidad de magnitud es partida o dividida en partes iguales, con el fin de que algunas de esas partes sean comparadas cuantitativamente con el todo que las contiene.

Es en este caso, que la fracción unitaria adquiere también el carácter de medida fraccionaria, cuando representa la unidad de medida con la cual un todo, continuo o discreto es medido. Por ejemplo:

Sombrea los $\frac{5}{8}$ de de la superficie del siguiente polígono regular.



En este caso, cada uno de los triángulos en que es dividida la figura representa $\frac{1}{8}$, debido a que se está comparando cuantitativamente la región sombreada con respecto al todo. Además, también representa la unidad de medida, con la cual se podrá determinar la cantidad de superficie que tiene el polígono y la medida fraccionaria $\frac{5}{8}$, la cual representa la superficie sombreada.

Los partidores fraccionarios son tratados escolarmente como partidores de objetos físicos como naranjas, pizzas, sin hacer mención a qué magnitud se refiere la partición, a lo cual Vasco (1996) se refiere a esto como ciertas acciones físicas ligadas a la cultura, reiterando que "lo importante es caer en cuenta que los partidores fraccionarios no operan sobre objetos sino sobre magnitudes" (p. 27)

La fracción como partidor cobra importancia en la medida que divide o fractura una cantidad de magnitud. Esto lo corrobora Freudenthal (1994) cuando se refiere a la importancia de algunos métodos por los cuales el partidor fraccionario (o como él lo llama, "el fracturador"), actúa sobre las magnitudes. Los cuales son: fracturar, partir, romper, dividir, estimar, comparar, etc.

Estos procesos se ponen en juego cuando:

- ✓ Un líquido que se reparte en un número de vasos congruentes, en los que se compara las alturas del líquido. (Freudenthal, 1994)

- ✓ Partir o dividir en dos partes iguales una hoja de papel, en donde cada una de las partes represente la mitad de la superficie de la primera.
- ✓ Un objeto que es dividido en tres partes iguales, con respecto a su peso, estimando el peso de las partes con las manos o pesándolas con una balanza.

2.2.3. La fracción como operador.

El papel de la fracción como operador, es la de un transformador multiplicativo de una cantidad de magnitud. *"En este caso el símbolo* $\frac{m}{n}$ *representa la manera en que un objeto o una cantidad se transforma. Por ejemplo,* $\frac{2}{3}$ *aplicado a 90 reduce esta cantidad a 60." (Kieren, 1981, citado por Mancera, 1992, p. 36).*

Esto lo afirma Vasco (1996), cuando argumenta que el operador fraccionario es considerado como un transformador (achicador o agrandador) de una cantidad de magnitud el cual tiende a ser considerado como el producto de $\boldsymbol{m}$ por $1/n$, siendo esta última, una subunidad de medida. Este transformador es una acción mental la cual se puede entender también como una modificación, concibiéndose la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones.

Cuando esta interpretación de la fracción adquiere una connotación en relación con procesos de medida y comparación de magnitudes, se puede definir como un "número de medida"[9] o cantidad de magnitud, llamada medida fraccionaria, es por esto que la fracción adquiere la connotación, no como simple número sino, como índice de comparación.

A partir de 1976 Thomas Kieren (citado por Mancera, 1992, p. 33), habló de la necesidad de desarrollar la reversibilidad del pensamiento desde los operadores multiplicativos, lo cual los hace más complejos que las otras interpretaciones, posibilitando que estos se relacionen con el producto de fracciones.

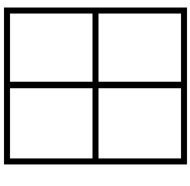
La fracción como operador se relaciona con un estado inicial y un estado final de una cantidad de magnitud que es transformada. Así:

a). Desde un estado inicial a un estado final.

> Pedro tiene 18 canicas, en el juego con sus amigos pierde $\frac{2}{6}$ de ellas. ¿Con cuantas canicas quedó?

b). Desde un estado final hacia un estado inicial.

> La siguiente figura representa los $\frac{2}{3}$ de una superficie. ¿Cuál es la superficie?



[9] Freudenthal (1994, p. 25).

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Este trabajo se desarrolla mediante la investigación cualitativa, a través de un estudio de casos; el cual es según Ghauri, Gronhaug y Kristianslund, (1995) citados por Silvia Sosa (2006) es "una investigación en profundidad para analizar el contexto y los procesos implicados en el fenómeno objeto de estudio, por lo que se puede considerar un estudio intensivo de ejemplos seleccionados en los que el fenómeno no se aísla de su contexto".

En un trabajo desde esta perspectiva investigativa, la revisión de textos o documentación inicial (marco teórico), corre paralela al proceso de formulación del problema, recolección de información y análisis de la misma. Su sentido tiene que ver con diversos aspectos de la investigación: focalizar el tema, plantear su importancia (justificación) en nuestro trabajo, así como depurar conceptualmente las categorías que van emergiendo, contextualizar la información y a los participantes.

El sentido de la exploración documental es constituir un referente teórico que guíe el trabajo investigativo, y no un marco cerrado para la interpretación y el análisis.

La Institución en la cual se intervino es la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa: Sede María Goretti, que está situada en el municipio de Caldas (Antioquia). Para el estudio, objeto de este trabajo, tomamos como referencia al grupo 4B. Este grupo está conformado por 43 estudiantes de ambos sexos, con edades comprendidas entre los 10 y 12 años. Los alumnos pertenecientes a este grado son de viviendas ubicadas tanto en la zona rural como en la urbana.

Para este trabajo se eligieron tres niñas: Melissa Agudelo Quintero, Laura Obando Hernández y Sindy Johana Valencia Varela.

Los criterios por los cuales se seleccionaron estas estudiantes, es que Melissa tiene un buen rendimiento académico, además de que, de acuerdo a la maestra cooperadora, es excelente en matemáticas, mientras que Laura y Sindy tienen un rendimiento académico, en casi todos los cursos en un nivel medio bajo, según la cooperadora.

También se tuvo en cuenta, para esta selección, que las estudiantes hubieran participado en el desarrollo de cada una de las actividades planteadas en el aula de clases.

En adelante se exponen algunas características de las tres estudiantes, participantes de este trabajo investigativo.

Melissa Agudelo Quintero.

Responsable y dedicada con los trabajos escolares. Es una niña muy activa que se interesa por las actividades planteadas, le gusta reflexionar acerca de las mismas. A pesar de que solamente tiene 10 años de edad, ha sobresalido en la institución como la mejor estudiante del grado 4º B, por lo cual su mamá, Erika Quintero, se siente muy orgullosa de ella.

Laura Obando Hernández.

Es una niña de 10 años muy activa e interesada por el qué hacer en la escuela. Se caracteriza porque es muy tierna y buena compañera.

En el aula de clases se encuentra su hermano gemelo, lo cual la hace sentir con mucha más confianza en su cotidianidad. Es buena estudiante, aunque se le dificulta un poco las matemáticas.

Sindy Johana Valencia.

Sindy es muy respetuosa, tierna y además en gran manera extrovertida, lo cual le causa muchos problemas relacionados con la disciplina. Le gusta acatar las órdenes. La forma de entablar amistad con otras personas es admirable a pesar de que tiene 10 años de edad. Le gusta la recreación, el deporte y la artística. Se le hace muy difícil las matemáticas porque a veces es muy distraída.

Cabe resaltar que se ponen los nombres originales de los participantes y no pseudónimos debido a que contamos con la aceptación por escrito de los padres, quienes firmaron un documento, permitiendo hacer públicos los nombres, talleres, videos y cualquier otro tipo de material utilizado en las intervenciones que contengan la voz o participación de las mismas. (Ver Anexos)

La información de nuestro trabajo se obtuvo mediante la observación, los diarios de campo y la reflexión teórica, las entrevistas y las actividades aplicadas.

La observación busca no distorsionar o perturbar la verdadera realidad del fenómeno que estudiamos. Tampoco se quiere descontextualizar los datos aislándolos de su contorno natural. Todo esto exige que la información sea recogida en la forma más completa posible (detalles, matices y aspectos peculiares sobre lenguaje, costumbres, rutinas, etc.).

En este trabajo de corte cualitativo pretendemos no definir unas variables a priori, ni mucho menos, limitarnos a variables preconcebidas, como hacen algunos de los investigadores experimentales, sino que adoptamos como estilo una cierta ingenuidad que nos permite ver cada aspecto del fenómeno como si fuera nuevo y no familiar y, por lo tanto, potencialmente significativo.

Los diarios de campo según la Corporación Región (2000, p. 1), posibilitan el registro instantáneo de las intervenciones y la lectura que cada participante va elaborando en el proceso. Estos se utilizan, posteriormente, para el análisis. Los diarios son “más que un registro anecdótico son una lectura personal de la cotidianidad del proyecto, que cobra su valor cuando se confronta y analiza con los de los demás participantes”.

En este, involucramos una reflexión teórica donde se explicitan las experiencias vividas en el aula de clase que aportaron a nuestro trabajo investigativo.

Las entrevistas etnográficas se realizaron con el fin de profundizar en los resultados obtenidos por las estudiantes en cada una de las actividades de clase y verificar que las construcciones matemáticas realizadas, en verdad fueran personales.

Actividades de clase

Las actividades que se muestran a continuación se realizaron a partir de los aportes teóricos, con el fin de analizar las relaciones, que establecen los estudiantes, relacionadas a la fracción como medidor, partidor y operador.

Actividad N°1.

Objetivos por ítem:

Ítem 1. Indagar acerca del uso de la fracción como medidor y como potenciadora de procesos relacionados a la comparación.

Ítem 2. Observar procesos y procedimientos que utilizan los estudiantes al utilizar la fracción como partidor.

Ítem 3. Determinar la forma en que se hace uso de la fracción como operador

Ítem 4. Reconocer la fracción como operador, considerando el estado inicial de una cantidad de magnitud para luego transformarla.

Ítem 5. Realizar comparaciones cuantitativas entre cantidades en las que se tenga en cuenta la unidad fraccionaria como base para realizar mediciones.

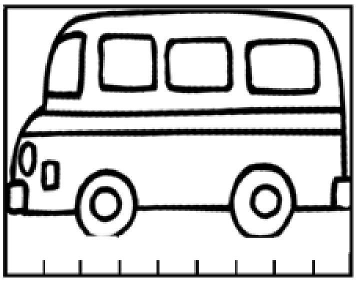
INSTITUCION EDUCATIVA PEDRO LUIS ALVAREZ CORREA,
SEDE SANTA MARIA GORETTI

Nombres: ____
____

Grado: ____________ **Fecha:** ______________________

1. De los 30 asientos que hay en el bus, la tercera parte está ocupada ¿Cuántos asientos están desocupados?

2. Colorea los dos tercios del largo del bus.



3. Una jarra puede llenarse completamente con ocho vasos de agua, si sólo tiene 3/8 de la cantidad de agua que le cabe ¿Qué cantidad de agua le hace falta para llenarse?

4. Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene los 3/8 de ellas ¿Cuántas canicas tiene ahora?

5. En un grupo de 6º de la institución hay 48 estudiantes, si los cinco octavos de ellos son mujeres, ¿cuántos hombres hay en dicho grupo?

Actividad N°2.

El alumno debe mediante diversas comparaciones establecer relaciones cuantitativas entre dos cantidades de magnitud, que faciliten las soluciones y así poder determinar fracciones.

Objetivos por ítem:

Ítem 1 y 2.[10] Comparar cuantitativamente dos cantidades de magnitud permitiendo la aparición de la fracción.

Ítem 3. Establecer relaciones numéricas entre dos cantidades, asociadas a la fracción como medidor, desde la ejecución de comparaciones numéricas entre un todo y sus partes.

[10] El ítem 1 es retomado desde los planteamientos de Freudenthal (1994, p. 29), y que luego fue modificado

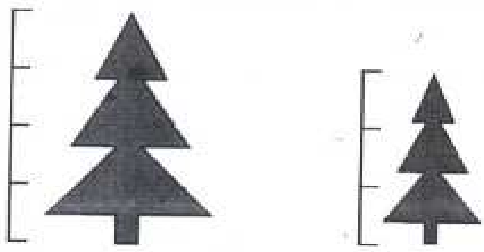
INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO LUIS ÁLVAREZ CORREA

SEDE: SANTA MARÍA GORETTI

NOMBRES: ______________________________
____
____

GRADO: __________

1. Observa con atención la siguiente gráfica



Según la gráfica

a) ¿Cuál es la altura del árbol pequeño comparada con la del árbol grande?

b) ¿Cual es la altura del árbol grande comparada con la del árbol pequeño?

2. Para llegar desde sus casas a la escuela, Camilo recorre cinco cuadras y Daniela debe caminar tres.

a. ¿Qué parte del recorrido de la casa a la escuela que hace Camilo, es el recorrido que hace Daniela?

b. ¿Cuánto es el recorrido que hace Camilo comparado con el recorrido que hace Daniela?

3. En el piso de una habitación se coloca un tapete que recubre cierta cantidad de baldosas, así como se presenta en la gráfica:

¿Qué parte del total de baldosas cubre el tapete?

Actividad N°3.

El estudiante debe identificar las unidades de magnitud, como lo son la longitud y la superficie que implican determinar una cantidad para establecer relaciones numéricas entre las mismas que conlleven al concepto de fracción.

Objetivos por ítem:

Ítem 1. Realizar comparaciones directas como instrumento para causar fracciones.

Ítem 2. Establecer relaciones cuantitativas entre dos cantidades de magnitud que conlleven a la aparición de la fracción.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO LUIS ÁLVAREZ CORREA

SEDE: SANTA MARÍA GORETTI

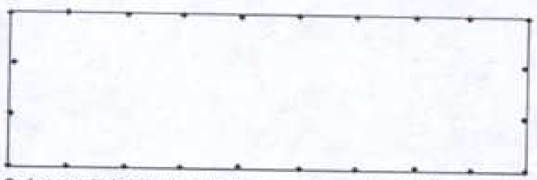
NOMBRES: ____

____

____

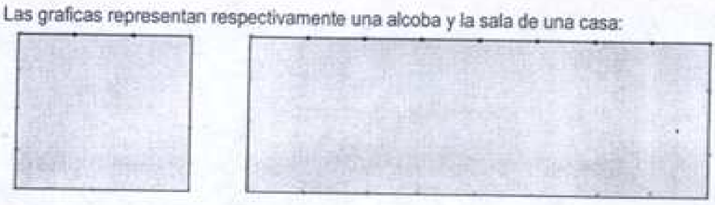
GRADO: ____________

1. Un jardín está rodeado por un alambre colocado en estacas, separadas una de la otra a una misma distancia, de la siguiente forma:



¿Cuánto es la longitud del lado menor del jardín de la longitud del lado mayor?

2. Las graficas representan respectivamente una alcoba y la sala de una casa:



a. ¿Cuánto es la superficie de la alcoba respecto a la sala?

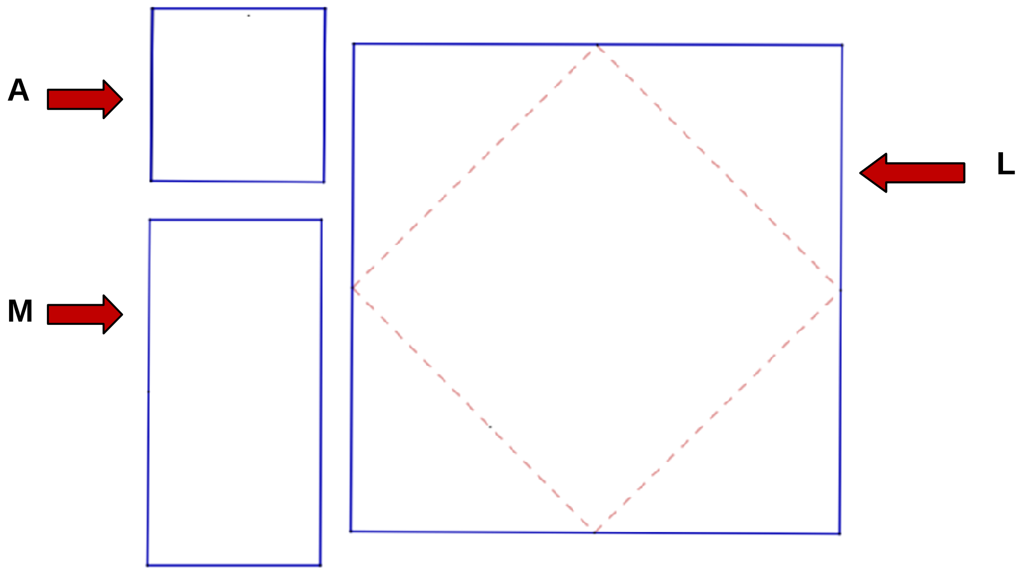
b. ¿Cuánto es la superficie ocupada por la sala respecto a la superficie de la alcoba?

Actividad N° 4 y 5: El estudiante, por medio de la yuxtaposición de superficies, debe descubrir y establecer relaciones métricas entre éstas; posibilitando de tal forma el reconocimiento de medidas fraccionarias.

OBJETIVO: Establecer comparaciones cuantitativas entre las partes en que es dividida cada superficie.

Actividad N°4

Para esta actividad se utilizaron como material de apoyo, tres superficies con las cuales los estudiantes deben establecer comparaciones cuantitativas entre ellas[11]. Éstas son:



[11] La relación métrica entre las superficies, en función de la superficie A son: $L = 8A, M = 2A$

MIDIENDO Y COMPARANDO SUPERFICIES

INSTITUCION EDUCATIVA PEDRO LUIS ALVAREZ CORREA, SEDE SANTA MARIA GORETTI

Nombres: ____
____
____

Grado: ____________ **Fecha:** ____________________

ACTIVIDAD #1

1. ¿Cuánto es la superficie A de la superficie L?

2. ¿Cuánto es la superficie M de la superficie L? Si usamos la superficie M para medir la superficie L.

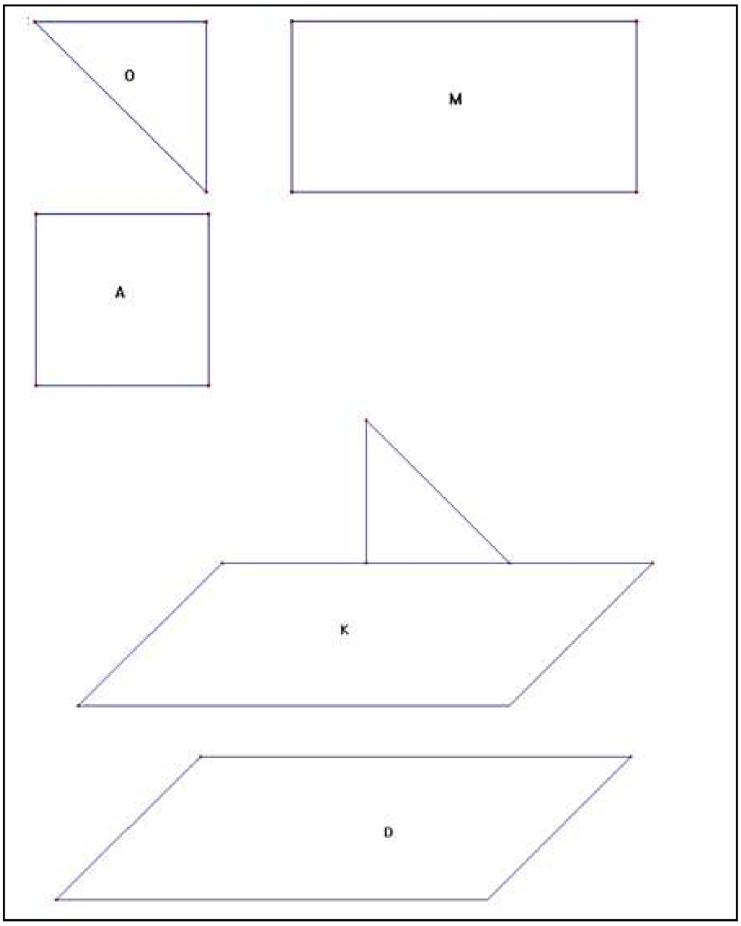
3. ¿La superficie A cuánto es de la superficie M?

4. Si empatas las superficies M y A, ¿Cuánto es la nueva superficie formada de la superficie L?

5. Si empatamos las superficies A y L, ¿Cuánta área es la superficie formada con respecto a la superficie L?

Actividad N°5.

Para el desarrollo de esta actividad, se hizo necesario, la utilización de otras superficies para establecer comparaciones que conlleven al surgimiento de la fracción[12].



[12] La relación métrica entre la superficies en función de la superficie $\boldsymbol{O}$ es: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{2O}, \boldsymbol{M} = \boldsymbol{4O}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{7O}, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{6O}$

MIDIENDO Y COMPARANDO SUPERFICIES

INSTITUCION EDUCATIVA PEDRO LUIS ALVAREZ CORREA, SEDE SANTA MARIA GORETTI

Nombres: ____
____
____

Grado: __________ **Fecha:** __________________

ACTIVIDAD #2

1. ¿Cuánto es la superficie O de la superficie K? Justifica o gráfica

2. ¿La superficie A cuanto es de la superficie D?

3. ¿Cuánto es la superficie O de la superficie M?

4. ¿La superficie M cuánto es de la superficie D?

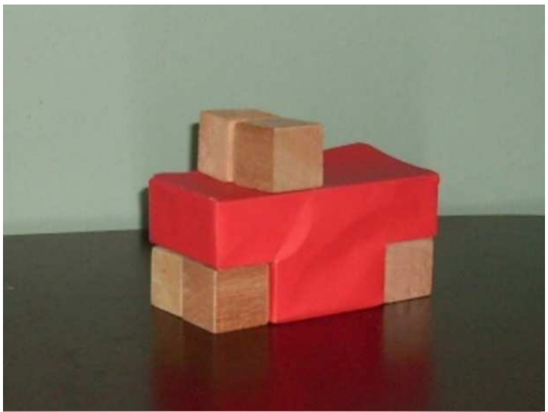
5. Si empatamos K y D, ¿Cuánto es la superficie A de la superficie formada?

6. ¿Cuánto es la superficie M de la unión de las superficies D y A?

Actividad N°6 y 7.

Materiales utilizados para desarrollar las actividades 6 y 7.

Se utilizaron 18 cubos de madera y un cuerpo geométrico realizado en cartulina. En el cual, caben 12 de los 18 cubos entregados a cada estudiante.

Actividad N° 6.

Objetivos por ítem.

Ítems 1 y 2. Tener en cuenta la fracción como operador para realizar transformaciones de cantidad de magnitud. (Estado inicial- estado final).

Ítem N° 3. Establecer relaciones cuantitativas que permitan considerar una cantidad de magnitud como una medida fraccionaria

Ítem 4. Recurrir a la fracción como operador, considerando el estado final para luego determinar el estado inicial de una cantidad de magnitud que es transformada.

Ítem 5. Identificar algunas fracciones equivalentes a partir de relaciones establecidas desde la fracción como medidor,

Ítem 6. Determinar, por medio de una fracción, la relación cuantitativa entre dos cantidades

MIDIENDO Y COMPARANDO VOLÚMENES (1)

INSTITUCION EDUCATIVA PEDRO LUIS ALVAREZ CORREA,
SEDE SANTA MARIA GORETTI

Nombres: ____
____
Grado: __________ **Fecha:** ________________

Con el material entregado resuelve las siguientes actividades.

1. ¿Cuántos cubitos son 3/4 del lugar ocupado por el cuerpo geométrico entregado?

2. Representa un cuerpo geométrico que contenga 3/6 de los cubos que caben en el cuerpo geométrico?

3. 8 cubitos ¿Cuánto es del espacio que ocupa el cuerpo geométrico?

4. Si el cuerpo geométrico entregado representa 6/8 de otro cuerpo geométrico, ¿Cuántos cubitos debe tener dicho cuerpo geométrico?

5. Representa con una fracción diferente a 12/18 la cantidad de cubitos que cabe en el cuerpo geométrico comparada con el total de cubitos entregados.

6. ¿Cuánto es la mitad de cubitos entregados de todo el espacio que ocupa el cuerpo geométrico?

Actividad N°7.

Objetivo: Reconocer la fracción como operador como un índice de comparación con el cual se puedan establecer relaciones numéricas entre dos cantidades de magnitud.

MIDIENDO Y COMPARANDO VOLUMENES (2)

INSTITUCION EDUCATIVA PEDRO LUIS ALVAREZ CORREA,
SEDE SANTA MARIA GORETTI

Nombres: ____
____

Grado: ___________ **Fecha:** ____________________

1. La mitad del espacio ocupado por el cuerpo geométrico entregado representa $\frac{3}{4}$ de otro cuerpo geométrico. ¿Con cuántos cubitos se debe formar dicho cuerpo geométrico?

2. Un cuerpo geométrico tiene la capacidad para contener 24 cubitos, si solamente tiene $\frac{9}{12}$ de la cantidad de cubitos que le cabe, ¿Cuántos cubitos hacen falta para llenar completamente el cuerpo geométrico?

3. Si una caja tiene capacidad para 48 cubitos y solamente está llena con $\frac{5}{8}$ de los cubitos ¿Cuántos cubitos le falta para llenarse?

4. ¿Cuántos cubitos son $\frac{10}{15}$ del espacio interior de una caja que se puede llenar con 30 cubitos?

4. CATEGORÌAS EMERGENTES.

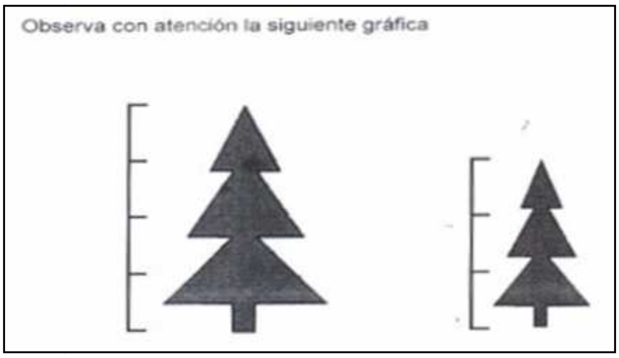
El trabajo que se presenta a continuación se realizó a partir de lo observado y analizado en las estudiantes, tomando como base el desarrollo de las actividades planteadas. Es decir, desde la interrelación de las voces de los participantes en la investigación, las orientaciones teóricas y los autores de este trabajo, se logró organizar la información obtenida en tres categorías que emergieron como sigue:

4.1. La fracción unitaria: una base para la construcción de relaciones.

Al momento de realizar un tratamiento de las fracciones desde las clases regulares que tienen las estudiantes, se hace desde conceptos matemáticos y definiciones que dificultan el aprendizaje de las mismas.

Esta categoría de análisis surge como tal, debido a que los sujetos de investigación, a partir de las actividades planteadas, conciben las fracciones, no como símbolos conformados por un denominador y un denominador, sino como una relación cuantitativa que aparece desde la adición de fracciones unitarias.

Esto se hizo evidente cuando se les planteó la siguiente actividad:

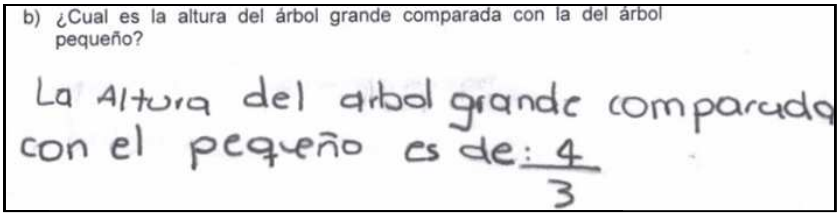


Según la gráfica, ¿Cuál es la altura del árbol grande comparada con la altura del árbol pequeño?

Esta actividad los estudiantes la resolvieron sin muchas dificultades, así lo muestra el trabajo que hicieron y las respuestas que dieron al realizar la socialización de su trabajo.

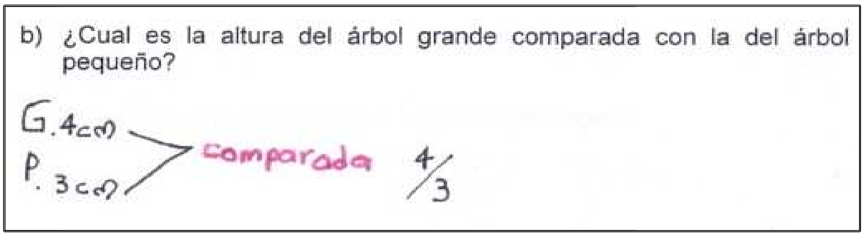
Las siguientes tres imágenes dan cuenta, respectivamente, del trabajo realizado por Melissa, Laura y Sindy

Melissa


b) ¿Cual es la altura del árbol grande comparada con la del árbol pequeño?

La Altura del arbol grande comparada con el pequeño es de: $\frac{4}{3}$

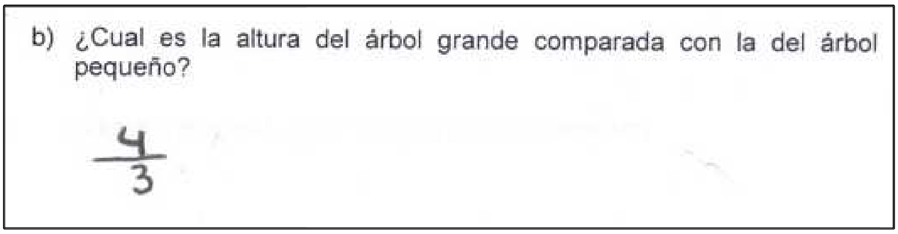
Laura


b) ¿Cual es la altura del árbol grande comparada con la del árbol pequeño?

G. 4cm

P. 3cm

comparada $4/3$


b) ¿Cual es la altura del árbol grande comparada con la del árbol pequeño?

$\frac{4}{3}$

Sindy

Como se puede ver, aquí no hay mucho que decir; si bien es cierto que sólo tienen una respuesta coherente con lo que se esperaba; también es seguro, que no da lugar para interpretar el comportamiento de las estudiantes frente a esta actividad o para interpretar que estaban pensando las niñas a la hora de indagar cómo llegó cada una a esa solución.

Veamos lo que sucedió en la entrevista con cada una de los estudiantes:

LAURA	***SINDY***	***MELISSA***
Docente: ¿de qué manera desarrollaste esta actividad? ***Laura:*** *Las unidades no son las rayitas sino el espacio que hay entre ellas y en las del árbol pequeño cada una de las partecitas expresa un tercio y si subrayamos* (mientras sus gestos indicaban una yuxtaposición la longitud de un árbol sobre el otro) *en el árbol grande esto, entonces, hay cuatro tercios.*	**Docente:** ¿Cómo hiciste para desarrollar esta actividad así? **Sindy:** en este árbol cada pedacito es uno de tres y en el árbol grande hay cuatro, entonces uno de tres, dos de tres, tres de tres y cuatro de tres.	***Docente:*** ¿De qué manera desarrollaste esta actividad para concluir la fracción $\frac{4}{3}$? ***Melissa:*** *Ah, "profe" hay cuatro tercios, porque hay tres unidades del pequeño que están en el grande.*

Con las entrevistas se puede esclarecer cómo las estudiantes determinan que la fracción unitaria $\frac{1}{3}$, adquiere la función de unidad de medida para poder fijar una comparación cuantitativa entre dos cantidades de longitud, asociandola, a una suma de fracciones unitarias. Así:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

En el segundo problema de la misma actividad se presentó una situación similar, de comparación entre dos longitudes. Éste es:

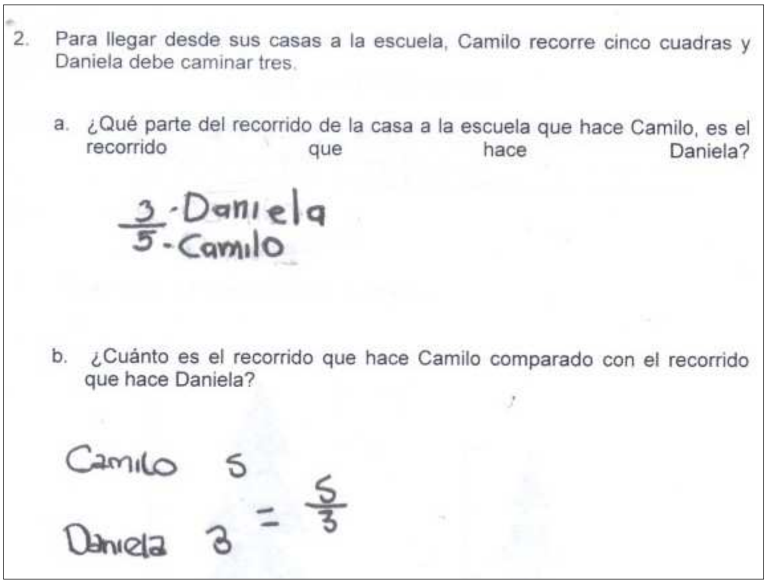
Para llegar de sus casas a la escuela, Camilo recorre cinco cuadras y Daniela debe caminar tres.

a) ¿Qué parte del recorrido de la casa a la escuela que hace Camilo, es el recorrido que hace Daniela?

b) ¿Cuánto es el recorrido que hace Camilo comparado con el recorrido que hace Daniela?

Las respuestas de las niñas se hicieron valer, al momento de desarrollar la socialización de la actividad dentro del aula de clase.

La primera en compartir su respuesta fue Sindy Valencia, quien se apoyó en una representación geométrica de las cuadras, para poder realizar las comparaciones, a pesar de que en la hoja de la actividad deja evidencias que para nosotros no son suficientes para realizar una interpretación acerca de su solución, por lo cual nos valemos de la intervención que realiza en el momento de la socialización.



2. Para llegar desde sus casas a la escuela, Camilo recorre cinco cuadras y Daniela debe caminar tres.

a. ¿Qué parte del recorrido de la casa a la escuela que hace Camilo, es el recorrido que hace Daniela?

$\frac{3}{5}$ - Daniela
- Camilo

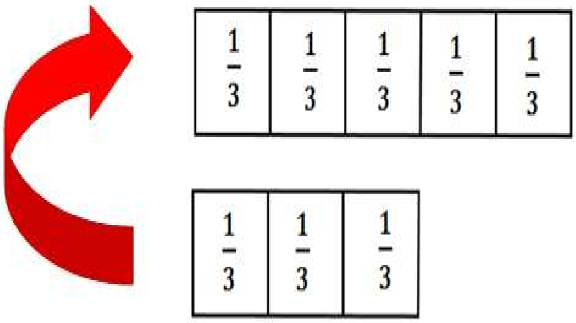
b. ¿Cuánto es el recorrido que hace Camilo comparado con el recorrido que hace Daniela?

Camilo 5

Daniela 3 $= \frac{5}{3}$

Sindy: *(*señalando el rectángulo que tiene tres unidades*), cada rectángulo de estos, representa un tercio, con este son dos tercios y así sucesivamente. (*Luego indicando el rectángulo de cinco unidades dice:) *ahora en este, como tiene las mismas unidades que el otro, este es un tercio, dos tercios, tres tercios, cuatro tercios y cinco tercios.* (Esto lo decía a la par que iba sombreando con una tiza la figura que habían construido).

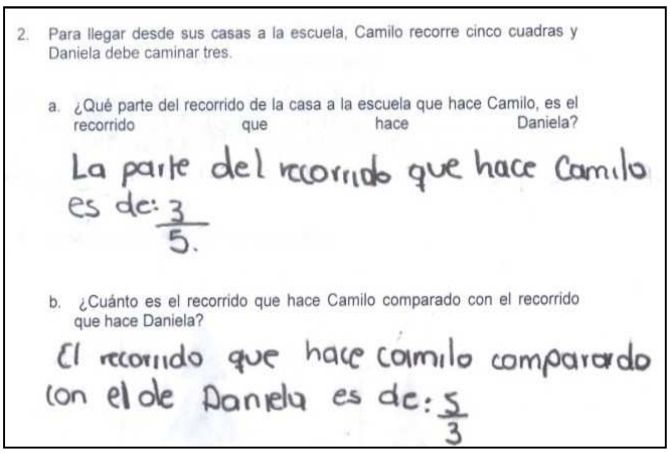
El procedimiento de Sindy para resolver el ítem, se explicita a través de la siguiente figura.



En el rectángulo de menor superficie, cada parte corresponde a $\frac{1}{3}$ de su superficie. Considerando una de éstas partes (unidad fraccionaria), como unidad de medida, Sindy realiza una "transferencia" de ésta unidad, del rectángulo menor al rectángulo mayor y determina su medida en función de la fracción $\frac{1}{3}$.

Melissa, apoyándose de la representación realizada en el tablero por su compañera Sindy, explica y valida sus ideas, las cuales plasmó en la actividad.

Esto se puede comprobar cuando realiza su intervención en la socialización de sus construcciones, lo cual se evidencia a través de la transcripción de su diálogo, el cual se muestra a continuación.


2. Para llegar desde sus casas a la escuela, Camilo recorre cinco cuadras y Daniela debe caminar tres.

a. ¿Qué parte del recorrido de la casa a la escuela que hace Camilo, es el recorrido que hace Daniela?

La parte del recorrido que hace Camilo es de: $\frac{3}{5}$.

b. ¿Cuánto es el recorrido que hace Camilo comparado con el recorrido que hace Daniela?

El recorrido que hace camilo comparardo con el de Daniela es de: $\frac{5}{3}$

Docente: *Melissa, ¿por qué te da en el primer interrogante, tres quintos?*

Melissa: si coloco en el rectángulo grande el rectángulo pequeño, entonces me queda que es tres partes de cinco, por eso $\frac{3}{5}$.

Docente: *¿y en el segundo interrogante por qué cinco tercios?*

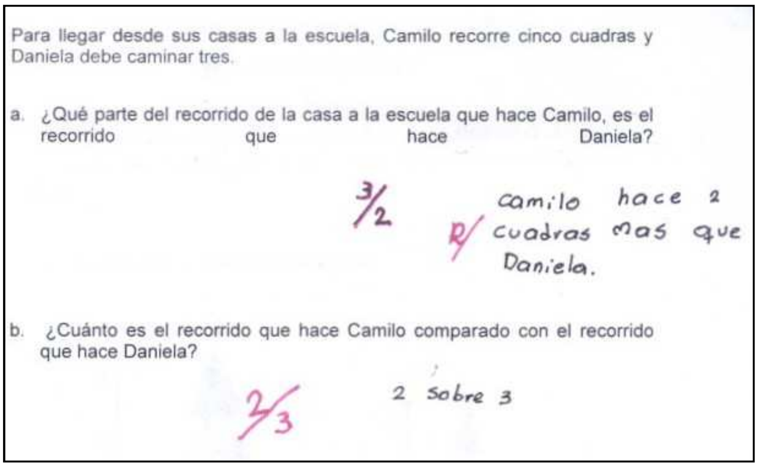
Melissa: $\frac{5}{3}$, *porque un cuadrito es* $\frac{1}{3}$, *y está cinco veces en las cuadras que recorre Camilo.*

De lo realizado por Melissa se puede inferir que la fracción unitaria se hace presente siendo el elemento que le proporciona concebir la fracción como una relación cuantitativa y no como un simple número.

Para el desarrollo y solución de este interrogante, Laura se apoya en la comparación de las dos cantidades de superficie y establece la diferencia entre ellas, lo cual hace que tenga, únicamente en cuenta, en el desarrollo de la pregunta, dos partes del "recorrido" de Camilo", por lo cual contestó de una forma no esperada, pero a pesar de esto, se puede notar cómo la fracción unitaria sigue teniendo la función como unidad de medida para dar cuenta de la fracción en su solución.

Esto se comprueba en la medida que comparte sus conclusiones con el docente y sus compañeros de clase en la socialización de la actividad. De lo cual, se realizó la transcripción de su intervención.

Docente: *cuéntale a tus compañeros qué fue lo que hiciste en ese problema.*



Para llegar desde sus casas a la escuela, Camilo recorre cinco cuadras y Daniela debe caminar tres.

a. ¿Qué parte del recorrido de la casa a la escuela que hace Camilo, es el recorrido que hace Daniela?

3/2 R/ camilo hace 2 cuadras mas que Daniela.

b. ¿Cuánto es el recorrido que hace Camilo comparado con el recorrido que hace Daniela?

2/3 2 sobre 3

Laura: *Daniela recorrió tres cuadras, y Camilo recorrió 5, entonces Camilo recorre dos cuadras más que Daniela. Por eso tres medios*.

Docente: *bueno, pero ¿por qué tres medios?, ¿cómo llegaste a esa solución?*

Laura: *si Camilo hace dos más que Daniela, entonces hay dos partes iguales y una está tres veces en lo que recorre Daniela.*

Docente: *listo, y en la segunda parte de la pregunta ¿qué hiciste?*

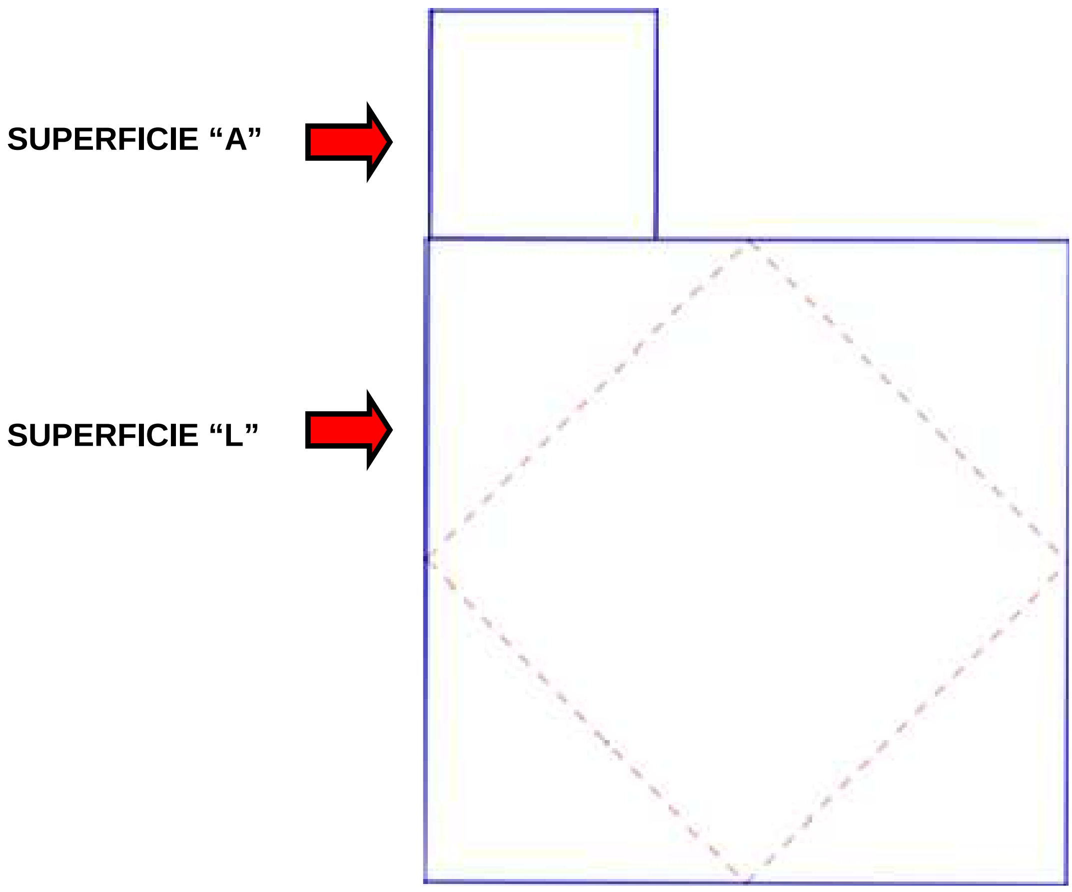
Laura: *yo puse dos tercios porque es al contrario de tres medios.*[13]

Lo realizado por las estudiantes permite ver como la fracción unitaria se convierte para ellas, en un insumo valioso para construir saber matemático relacionado con las fracciones propias e impropias, conceptos que son desarrollados desde el currículo escolar, clásicamente, como definiciones.

Igualmente cuando se les formuló una actividad en la cual debían utilizar las superficies A y L y se les preguntó: Si empatamos las superficies A y L,

[13] Esta explicación que da Laura acerca del numeral b no aporta ningún elemento valioso para desarrollar esta categoría de análisis, sin embargo está relacionada con la concepción de la fracción como inverso multiplicativo.

¿cuánto es la superficie formada con respecto a la superficie L? [14], en la cual era necesario para las estudiantes juntar dichas superficies para hallar la solución, de tal manera que las fronteras de las figuras se unían para constituir una nueva superficie. Así como lo muestra la imagen.



[14] Es necesario recordar que la superficie L es igual a 8 veces la superficie A.

Si empatamos las superficies A y L. ¿Cuánto es la superficie formada con respecto a la superficie L?		
LAURA	***SINDY***	***MELISSA***
$\frac{9}{8}$ = 9 de 8	$\frac{9}{8}$ Porqe la A cabe al la L 8 veces mas la A. $\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$

En la anterior tabla, vemos las soluciones de las tres estudiantes, en las cuales no dijeron el por qué se sus soluciones, por lo cual se les indagó para lograr más claridad acerca de sus realizaciones.

Veamos la explicación de cada estudiante, la cual nos ayuda a comprender el por qué de su respuesta. La pregunta que se le hizo a las estudiantes en cada uno de sus grupos, donde primaba la voz de las alumnas objeto de investigación, es: en tu hoja de respuestas solo enuncias la fracción $\frac{9}{8}$ sin explicar el por qué llegaste a ella, cuéntanos como desarrollaste la actividad.

> **Laura:** *la superficie A es un octavo de la superficie L; entonces en la superficie L hay ocho octavos, como nos dicen que hay que empatar las superficies A y L y decir cuánto es la superficie formada con respecto a L entonces sumamos una vez A a la superficie L. Nos queda* $\frac{9}{8}$ *ó nueve de ocho.*

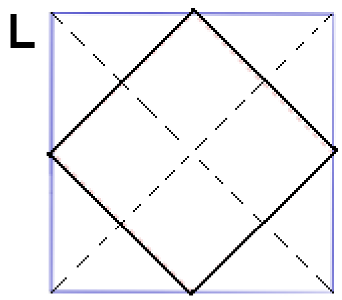
Luego, Sindy nos contesta a la misma pregunta planteada por los docentes; anteriormente.

Sindy: *Hay ¡profe! por lo mismo que copié; porque la A está ocho veces en la L, mas otra vez la A, entonces hay nueve veces la A. Y como en la L hay solamente 8 veces la A, entonces así, cuando junto estas dos* (refiriéndose a las superficies L y A)*, tengo nueve veces la A que es una de ocho de la L.*

Finalmente, se interrogó a Melissa.

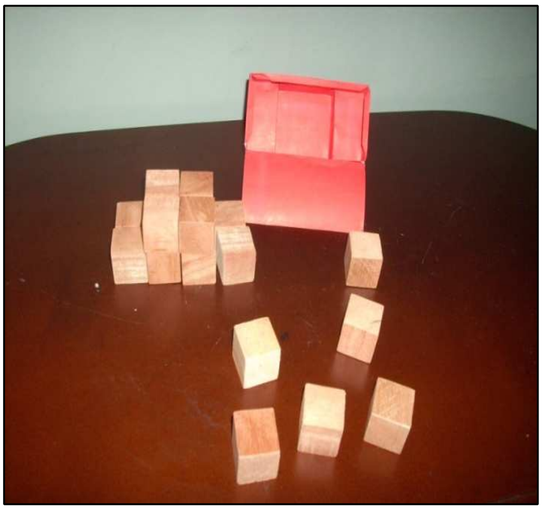
Profesor: Melissa, en tu hoja de respuestas solo enuncias la fracción $\frac{9}{8}$ sin explicar el por qué llegaste a ella, cuéntanos como desarrollaste este numeral.

La figura que se muestra a continuación ayudará al lector a comprender los procesos que realizó Melissa



Melissa: *Profe* (refiriéndose al cuadrado interior que tiene la superficie L) *en este cuadrado de adentro, hay cuatro (*se refería a cuatro veces la superficie A, porque así nos lo señalaba*), mire* (mientras hacía una repartición equitativa, del cuadrado interior en cuatro partes) *aquí uno, dos, tres y cuatro. Y por fuera, cada* *dos de los triángulos da una vez un cuadrado (*refiriéndose a la superficie A*). Por eso en L hay 8 veces A y como el ejercicio dice que hay que empatar otra A entonces nos da* $\frac{9}{8}$.

Nuevamente en esta actividad se pone en evidencia que las fracciones unitarias son el instrumento utilizado por las niñas, el cual está interiorizado en sus esquemas mentales, del cual hacen uso para resolver el problema que se les formuló y además realizar una acercamiento a la construcción del número racional desde lo que es familiar y concreto para ellas.

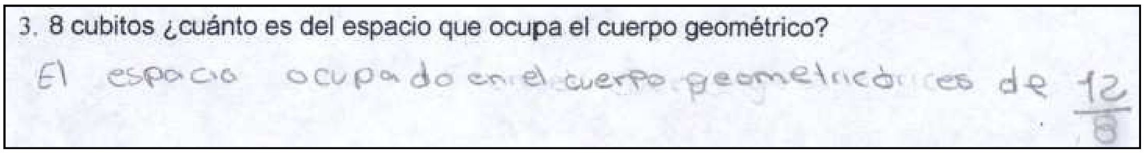


En la actividad N° 5, en donde se les preguntó acerca de cuánto espacio de todo el cuerpo geométrico[15], representan ocho cubitos, se reitera que las estudiantes entienden la fracción como una composición aditiva de fracciones unitarias.

En este trabajo Laura consigue solucionar el interrogante, identificando que cada uno de los cubitos de madera ocupa una doceava parte del espacio total que ocupa el cuerpo geométrico, aunque desde lo realizado en la hoja

[15] Es necesario recordar que el cuerpo geométrico tiene capacidad de doce cubitos.

del taller, confunde la fracción $\frac{12}{8}$ con $\frac{8}{12}$, pero por medio de lo que expresó a partir de sus realizaciones, entra en consonancia, que la fracción es entendida por la estudiante, como una composición aditiva de fracciones unitarias.

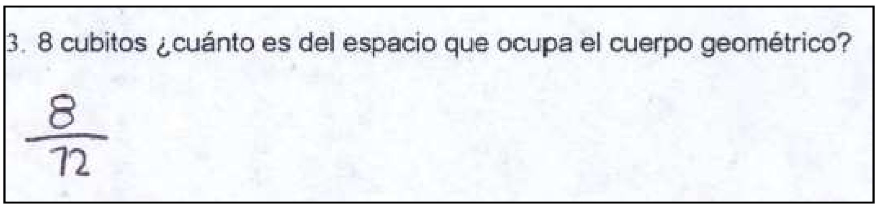

3. 8 cubitos ¿cuánto es del espacio que ocupa el cuerpo geométrico?

El espacio ocupado en el cuerpo geometrico es de $\frac{12}{8}$

En el diálogo establecido con Laura, aunque corto, debido a que muchos elementos de este no se centraban en la solución de la estudiante, se le preguntó:

> **Docente:** *¿por qué respondiste a la pregunta así?*
>
> **Laura:** *porque un cubito es uno de doce*[16]*,*

Luego de que Laura dio a conocer su solución, Sindy procede de forma similar para desarrollar esta actividad, aunque lo que escribe en la hoja del taller no nos permite profundizar acerca de los que realizó; por lo tanto también se le pidió a la estudiante sustentar el por qué de lo que hizo:


3. 8 cubitos ¿cuánto es del espacio que ocupa el cuerpo geométrico?

$\frac{8}{12}$

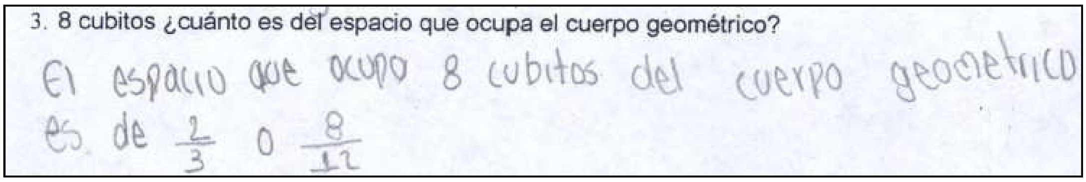
> **Sindy:** *la respuesta es ocho de doce.*

[16] La expresión "uno de doce" es utilizada por las estudiantes para expresar la fracción $\frac{1}{12}$.

Docente: *¿por qué es ocho de doce?*

Sindy: *porque cada cubito es uno de doce, pero por todos son ocho.*

De una manera mucho más abierta y profunda, Melissa responde la pregunta de tal forma que descubre una relación de equivalencia asociada a la fracción $\frac{8}{12}$, apoyándose del material disponible y por medio del reconocimiento de la fracción unitaria. Esto, para mostrarle sus hallazgos a sus compañeros y a los docentes allí presentes (cooperadora y autores de este trabajo).


3. 8 cubitos ¿cuánto es del espacio que ocupa el cuerpo geométrico?

El espacio que ocupa 8 cubitos del cuerpo geometrico es de $\frac{2}{3}$ o $\frac{8}{12}$

Docente: *Melissa explícales por favor a tus compañeros qué fue lo que hiciste.*

Melissa: *cojo ocho cubitos y me preguntan qué cuánto es el espacio que ocupan ocho cubitos. Puede ser dos de tres o ocho de doce.*[17]

Docente: *¿por qué Melissa?*

Melissa: *porque ocho cubitos me forman dos grupos de cuatro y… los doce me forman tres grupos de cuatro, entonces cogí dos no más. Profe!!! Otra fracción puede ser ocho de doce, por qué son 8 cubitos del total; porque tenía doce cubos y los divido en doce grupos cada uno de un cubito; y luego tomo ocho.*

[17] Las expresiones “dos de tres” y “ocho de doce” corresponde a una forma simple que la estudiante utiliza para referirse a las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$.

Luego de un momento, dice **Melissa:** *también se puede otra fracción, cuatro de seis*[18]*. Porque hago seis grupitos de dos y me dice que coja ocho cubitos. Entonces aquí hay, dos, cuatro, seis y ocho cubitos.*[19]

Melissa establece que la fracción unitaria es una unidad de medida, cuando para determinar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ de los doce cubos de madera, comprueba que respectivamente corresponden a cuatro y a dos cubos.

Concebir la fracción como una composición aditiva de fracciones unitarias, es decir, que la "fracción $\frac{n}{m}$ representa el resultado de sumar $\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}, n$ veces" (Obando, 1999, p. 131). Esto conlleva al proceso no sólo de partir una cantidad en partes iguales, sino que cobra valor para determinar mediciones y comparaciones. Este proceso posibilita al estudiante hallar la

[18] Melissa cuando expresa "cuatro de seis" hace referencia a la fracción $\frac{4}{6}$

[19] Ver las imágenes que evidencian el proceso en el cual consigue descubrir que ocho cubos de madera corresponden a cuatro sextos del espacio interior del cuerpo geométrico.

relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud en tanto que la fracción unitaria adquiere la función de unidad de medida, que le sirve a las estudiantes, de herramienta para desarrollar conceptos como fracción impropia, fracción propia y fracciones homogéneas, los cuales desde el trabajo escolar son concebidos desde definiciones simples sin ninguna relación entre sí.

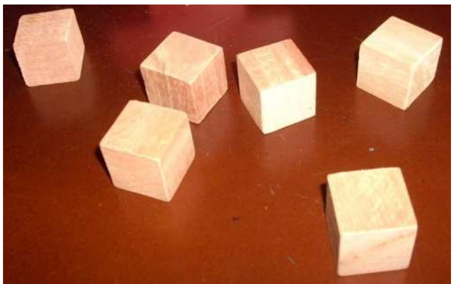
La fracción unitaria, considerándola como una subunidad de medida, es un elemento potente por medio del cual se puede establecer una cantidad fraccionaria (Múnera, 1997, p. 25), siempre y cuando ésta última es conformada por un "conjunto de unidades fraccionarias de un mismo orden". Esto lo afirma Obando et. al, (2004, p. 64) cuando dice que la medida fraccional aparece:

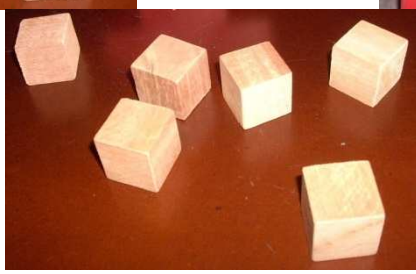
> *…cuando se desea medir una determinada magnitud en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Para obtener la medida exacta se deben utilizar los submúltiplos, y el resultado obtenido es la relación cuantitativa entre la magnitud medida y la unidad de medida utilizada. Ahora bien, si se hace necesaria la utilización de varios submúltiplos para la misma unidad de medida, entonces a partir de la regularidad que deben guardar el resultado se puede cuantificar en términos de cualquiera de las distintas unidades utilizadas: unidad o submúltiplos de la unidad de medida.*

4.2. De los partidores a la unidad fraccionaria

A parir de la solución de las actividades relacionadas a la fracción como partidor, con las estudiantes participantes de este trabajo, se pudo ver que es necesario hablar de fracciones unitarias a la hora de resolver situaciones que impliquen este tipo de interpretación. Aquí, se hace evidente, que el partidor se aleja del comparador, en ciertos momentos; no obstante, vuelve a emerger la unidad fraccionaria. Y esto se notó, cuando en una de las últimas actividades propuestas (Actividad Nº 6), en la cual se utilizó, un cuerpo geométrico de cartulina[20] y doce cubos de madera, entregados a cada equipo de tres estudiantes.

Esta actividad estaba relacionada con la fracción como partidor. En la cual se preguntó: ¿Cuántos cubitos son $\frac{2}{3}$ del espacio ocupado por el cuerpo geométrico entregado?

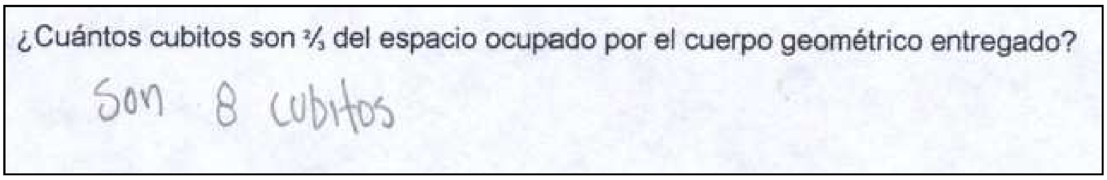




[20] En el cuerpo geométrico caben doce cubos de madera. (ver imágenes)

En adelante se presentan las soluciones planteadas por cada una de las estudiantes.

Melissa sólo dejó en su hoja de trabajo la siguiente solución sin ningún tipo de explicación:



¿Cuántos cubitos son ⅔ del espacio ocupado por el cuerpo geométrico entregado?

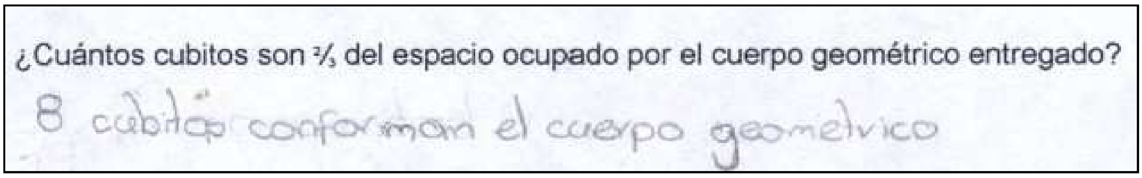
Son 8 cubitos

Debido a que no sustentó por escrito la solución se le indagó acerca del trabajo que realizó, en un dialogo, en el cual se descubre que la fracción como partidor es identificada como un reparto equitativo de cantidad de magnitud, en la cual determina comparaciones cuantitativas para establecer la congruencia de las partes y su relación con el todo.

> ***Docente:*** *¿Cuántos cubitos representan los dos tercios de la cantidad de cubos que caben en el cuerpo geométrico?*
>
> ***Melissa:*** *Primero los reparto en tres grupitos y me quedan de a cuatro.*
>
> ***Docente:*** *Entonces, ¿cuántos cubitos me representan un tercio del total de cubos?*
>
> ***Melissa:*** *Este* (señalándonos uno de los grupos), *o sea cuatro, me representa uno de tres o un tercio y son dos de tres o sea 8.* (Señalándonos dos grupos de estos).

Con relación al trabajo de Melissa, es importante ver cómo utiliza la fracción unitaria, como resultado de la partición de una cantidad.

Laura, por su parte, deja consignada la solución a esta misma actividad de la siguiente manera:


¿Cuántos cubitos son $2/3$ del espacio ocupado por el cuerpo geométrico entregado?

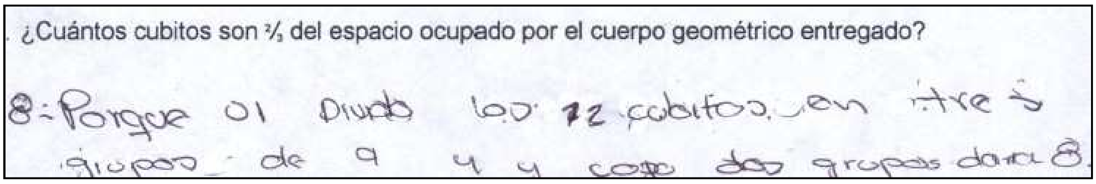
8 cubitos conforman el cuerpo geometrico

Aunque, como es claro, deja una respuesta que no nos permite indagar la forma como estaba pensando la actividad. Sólo pudimos darnos cuenta de ello después del dialogo más personalizado con la estudiante, veámoslo:

> ***Docente:*** *¿Cómo descubriste que 8 cubitos ocupan* $\frac{2}{3}$ *del espacio interior del cuerpo geométrico?*
>
> ***Laura:*** *si hay doce cubitos en el cuerpo geométrico hay que dividirlos en tres grupos.*
>
> ***Docente:*** *¿qué cantidad de cubitos debe tener cada uno de los grupos en que repartiste los doce cubitos?*
>
> ***Laura:*** *de a cuatro porque deben de ser iguales. Entonces si hay tres, hay que tomar dos.*

Podemos inferir que para Sindy la fracción como partidor es concebida como un reparto equitativo, lo cual se comprueba en la explicación que le da a lo que realiza en la actividad, esto es potenciado desde el reconocimiento de la fracción unitaria.

A Sindy, también le dió como respuesta 8 cubos, pero, a diferencia de sus compañeras explicita el porque de su soluciòn:



Es notable que Sindy demuestra sus hallazgos de forma escrita con una debida justificación del porqué de sus respuestas. El proceso que utiliza es dividir el total de los cubos que caben en el cuerpo geométrico, (es decir, doce), en tres grupos, de manera equitativa, y luego tomar dos de los grupos. Aunque hace caso omiso a la pregunta planteada por el docente al querer saber el porque de estos procedimientos, justificando, que: *“Profe, eso ya está ahí en la hoja”(Sindy).*

Se observa en las tres estudiantes tienen en cuenta la fracción como partidor de una forma que es más concreta para elllas, cuando ésta es concebida como una composición aditiva de fracciones unitarias (Obando, 1999), lo cual les da elementos para justificar sus soluciones y procesos.

En el marco de esta misma actividad, también se les planteó la siguiente situación: Representa un nuevo cuerpo geométrico que contenga $\frac{3}{6}$ de los cubos que caben en el cuerpo geométrico entregado. ¿Cuántos cubitos lo conforman?

La imagen siguiente, evidencia cómo procedió Melissa:

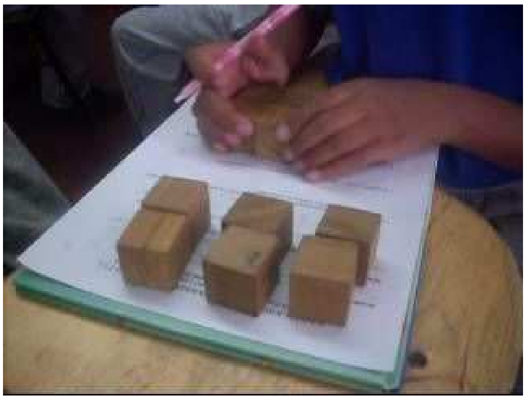
2. Representa un cuerpo geométrico que contenga $\frac{3}{6}$ de los cubos que caben en el cuerpo geométrico. ¿Cuántos cubitos lo conforman?

$\frac{3}{6}$ son la mitad de cubitos que ocupan en el cuerpo geometrico, 6 cubitos

Para entender un poco mejor lo que Melissa realizó se estableció con la estudiante un diálogo abierto, orientado por la siguiente pregunta:

Docente: *¿qué te llevó a solucionar así esta actividad?*

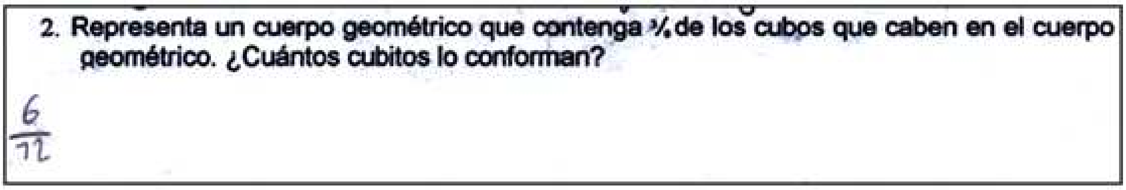
Melissa: *cojo los cubitos y los junto de a dos, así:*



Melissa: *Entonces un grupito es uno de seis, pero como me dice que son tres de seis, junto tres*.

Es fácil ver como de una u otra manera, la alumna Desarrolla la fracción como partidor, estaba pensando en fracciones unitarias, aunque la actividad se enfoca a trabajar las fracciones como partidores.

Como se puede ver en el trabajo de Sindy, la solución es $\frac{6}{12}$:



2. Representa un cuerpo geométrico que contenga ¾ de los cubos que caben en el cuerpo geométrico. ¿Cuántos cubitos lo conforman?

$\frac{6}{12}$

Con el propósito de conocer el por qué de esta respuesta se tuvo un conversatorio con esta como sigue:

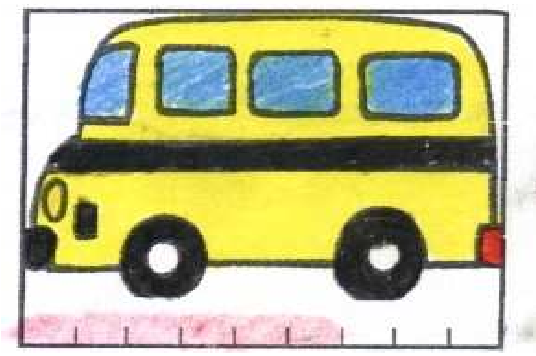
Docente: Sindy, explícanos cómo fue que obtuviste la fracción $\frac{6}{12}$ como respuesta.

Sindy: *hay que coger tres de seis. Los seis son de a dos cubitos entonces me queda lo mismo que seis de doce.*

De este trabajo se puede confirmar una vez más que las estudiantes aunque están partiendo una cantidad, lo hacen sin perder de vista la fracción unitaria para luego considerar la fracción como una suma sucesiva de dichas unidades.

También se les planteó, a las estudiantes la siguiente situación con el fin de utilizar la fracción como partidor para determinar repartos equitativos de una cantidad, para ellos se les presentó una gráfica en la cual una longitud debía ser fracturada en partes iguales. Este se muestra a continuación.

Colorea los dos tercios del largo del bus.



De acuerdo al interrogante Sindy realiza lo que se muestra en la imagen.

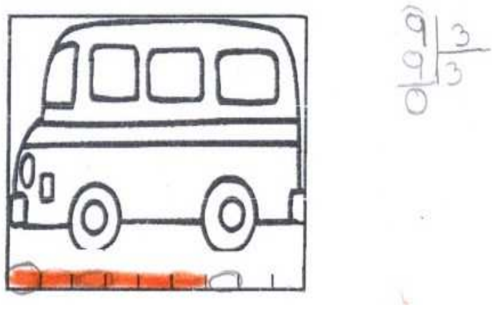
Debido a que la estudiante no expone en la hoja del taller sus procedimientos, se procede a dar a conocer las explicaciones que dio acerca de ellos:

Docente: *¿por qué coloreaste seis unidades de la longitud del bus y no lo hiciste de otra forma?*

Sindy: *es que dividí las nueve por tres y me dio tres, entonces pinté seis.*

Docente: *¿por qué seis?*

Sindy: *porque es dos por tres.*



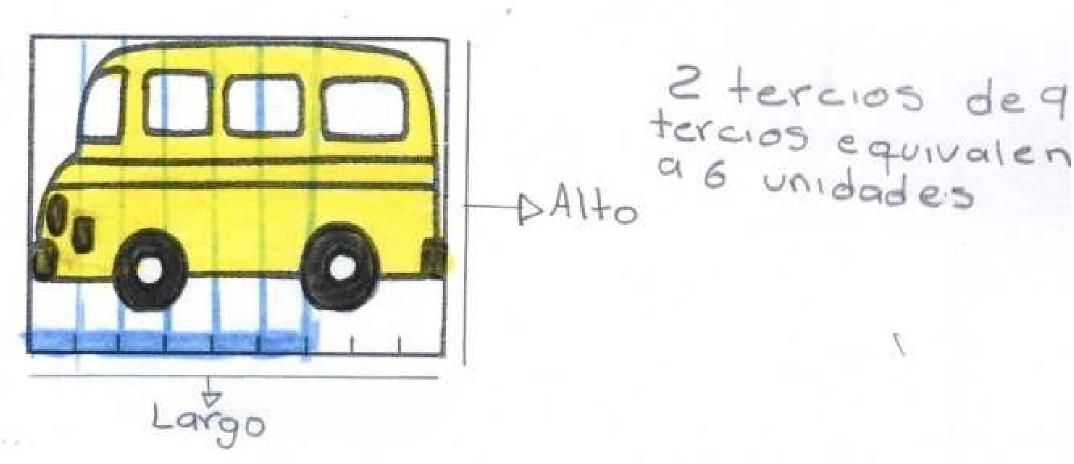
En este mismo ejercicio Laura realizó una partición de la longitud antes mencionada, aunque lo hace de una manera muy idéntica a Sindy, a pesar que en su taller explicita que entiende los tercios como una división.

La estudiante realiza la división acertadamente, pero no deja en claro qué procedimiento utilizó para solucionar esta actividad, por lo tanto, se le indagó por medio de preguntas así:

> **Docente:** *bueno, Laura. ¿Con qué fin realizaste esa división?*
>
> **Laura:** *es que hay nueve, entonces eso hay que dividirlo por tres, pero son seis porque son dos los que me dice en la pregunta.*

Con respecto a lo hecho por Sindy y Laura, inferimos de este trabajo, que implícitamente, cuando se hace el reparto de un todo en parte equitativas, la fracción unitaria entra en juego, no definida como un símbolo, sino como una cantidad de magnitud fraccionaria, que en este caso es $\frac{1}{3}$ de 9 unidades de longitud.

Seguidamente se presenta lo que fue realizado por Melissa, quien en sus explicaciones en la hoja del taller, explicita sus construcciones, aunque de una forma no muy clara.



Después de ver la solución de la pregunta se le planteó el siguiente interrogante:

> ***Docente:*** *¿Por qué dices que hay dos tercios de nueve tercios?*
>
> ***Melissa:*** *porque hay nueve partecitas en el busecito, pero las divido en tres y tomo dos de tres o sea seis.*

De este trabajo se puede dilucidar que la fracción cuando es concebida como una composición aditiva de fracciones unitarias, para las estudiantes, representa una cantidad de magnitud y no un símbolo o una operación alejada de los contextos de medición, lo cual implica el desarrollo de procesos asociados a la medida.

Todo lo anterior se valida, cuando Freudenthal (1994) hace referencia a la fracción como partidor en donde afirma que es mucho más importante que el estudiante construya relaciones a partir del reparto equitativo de una unidad.

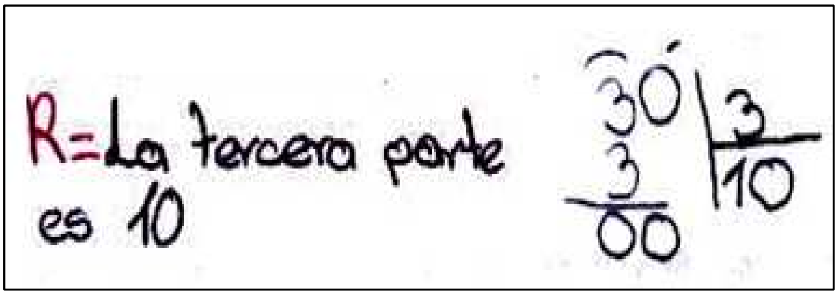
En este sentido, el desarrollo de las actividades por las estudiantes, estuvo en el marco de la fracción como partidor con ayuda de las fracciones unitarias, el cual al principio se realizó desde un referente concreto, como lo fueron el cuerpo geométrico y los cubos de madera, pero que logró un gran avance cuando las niñas no solamente la conciben como un reparto de cantidades discretas, sino también desde lo simbólico (ibíd., 1994), como ocurre con la actividad finalmente documentada.

4.3. La fracción como operador: un enfoque bastante abstracto para establecer relaciones entre una cantidad y una fracción de la misma.

El desarrollo de algunas de las actividades relacionadas con la fracción como operador generó en las estudiantes, gran dificultad para su solución, así se evidencia en el trabajo realizado por ellas.

En el primer interrogante de la actividad N°1, el cual es: de los treinta asientos que hay en un bus la tercera parte está ocupada, ¿Cuántos asientos están desocupados?

Laura identifica claramente que la tercera parte de treinta es diez, lo cual es fácil ver, que lo hace por medio de la división de treinta entre tres.



Para acercarnos mejor al trabajo realizado por Laura se estableció un diálogo, en el cual ella explicó su solución como sigue:

> ***Docente:*** *¿si la tercera parte de treinta es diez, cuánto es las dos terceras partes de diez?*
>
> ***Laura:*** *la tercera parte es diez y si es dos veces, es lo mismo que dos por diez, o sea veinte.*
>
> ***Docente:*** *si eso es cierto, según el ejercicio, ¿cuántos asientos están desocupados?*
>
> ***Laura:*** *pues veinte, porque a treinta le quito diez y me quedan veinte.*

Se hace evidente que la alumna, a partir del dialogo que sostuvo con los docentes, mejora su solución; sin embargo, no corrige en su hoja de respuestas.

Con respecto a la solución de Laura, podemos interpretar, que desde sus esquemas mentales, la fracción como operador le es difícil de conceptualizar, en tanto que requiere aplicar un algoritmo, ya que dentro del desarrollo de la actividad, manifestó que “no sabía qué hacer, una multiplicación o una división”

De forma similar a lo que hizo Laura procede Melissa, quien realiza una división para obtener su solución y determina que el cociente de dividir el 30 entre 3 es la solución al problema.

Al solicitarle el por qué de su solución, ella nos expresa que los asientos desocupados son 10 *porque: “hay treinta y hay que dividir por tres, entonces me da 10.”* Esto no permite ver algo nuevo, debido a que la estudiante responde mecánicamente

Por medio de la solución y la explicación que da la alumna, podemos decir que Melissa considera la fracción como operador en la medida en que utiliza el algoritmo para realizar la partición de una cantidad a nivel mental, apartándose de lo concreto, agregando que no manifestó, como sí lo hizo Laura, inconformidad por no saber qué algoritmo aplicar para determinar su solución.

Sindy responde a la actividad, dejando por escrito la solución que plantea, identificando la tercera parte de treinta.

La tercera parte de 30 es 10 / hay 20 asientos desocupados.

Para tener una visión más amplia de lo realizado por Sindy, se le indagó acerca de la solución que planteó:

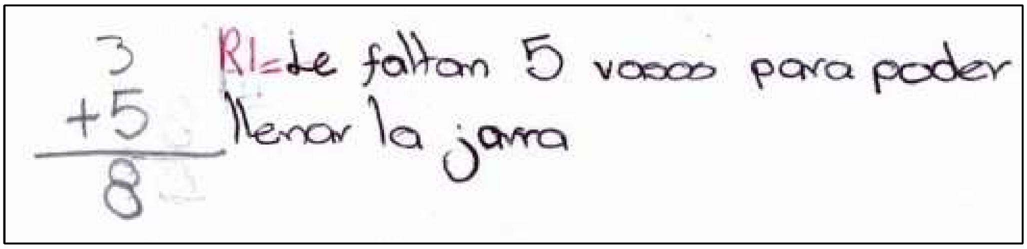
> **Docente:** *¿cómo descubriste que los asientos desocupados son veinte?*
>
> **Sindy:** *porque si la tercera parte de treinta es diez, entonces treinta menos diez es veinte.*

En este caso, pudimos inferir que la división de 30 entre 3 se hace implícita, lo cual implica, que de esta misma forma, se va caracterizando la función de la fracción como operador multiplicativo.

En otra actividad se les presentó la siguiente situación:

Una jarra puede llenarse completamente con 8 vasos de agua, si solo tiene $\frac{3}{8}$ *de la cantidad de agua que le cabe, ¿qué cantidad de agua le hace falta para llenarse?*

Laura desarrollo la actividad de la siguiente manera:



Interpretamos que la alumna, establece una relación entre el número de vasos que caben en la jarra y la fracción $\frac{3}{8}$**,** lo hace como una adición del número de vasos de agua que tiene la jarra y el número faltante para llenarla completamente, o sea, 5 vasos de agua.

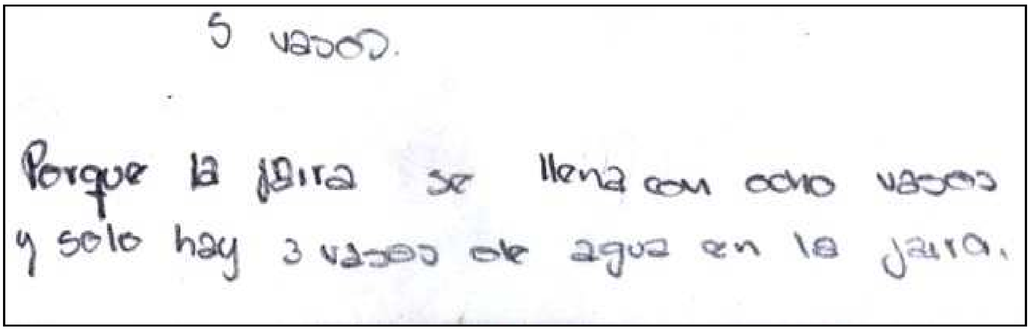
Con el propósito de conocer el por qué de su forma de proceder, se le hizo la siguiente pregunta:

> **Docente:** *¿cómo te diste cuenta que le faltaban cinco vasos para llenar completamente la jarra?*
>
> **Laura:** *porque si caben ocho y hay tres de ocho*[21]*, entonces necesito cinco para que me den ocho.*

[21] La expresión "tres de ocho" para referirse a la fracción tres octavos.

A partir de lo realizado por Laura podemos inferir que la fracción unitaria se hace presente en su solución, en el sentido que distingue la cantidad de partes, 5 y 3, que conforman el todo, es decir 8.

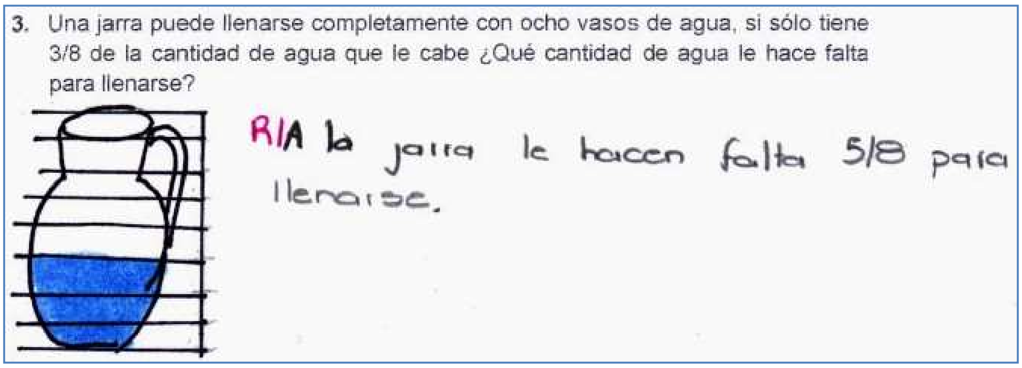
Sindy, soluciona el problema, aunque no explicita el porqué de sus respuestas, en la medida que no explica, de forma escrita, cómo determina que tres octavos de los ocho vasos de agua, son tres vasos.


5 vasos.

Porque la jarra se llena con ocho vasos y solo hay 3 vasos de agua en la jarra.

La estudiante, en sus declaraciones no aporta algo nuevo a lo que ya había planteado en la solución de la actividad, la cual realiza de manera escrita; aunque del trabajo planteado se interpreta que ella identifica las partes que constituyen en las cuales está conformada el todo, y luego valiéndose de una suma de unidades, establece la diferencia entre ambos.

Melissa, aunque llega a la solución esperada, lo hace de forma diferente a sus otras dos compañeras. Se vale de una representación gráfica de la situación, haciéndola mucho más concreta para ella, en donde identifica las unidades de medida, realizando particiones equitativas ilustrando el nivel al que llega el agua de acuerdo al número de vasos que puede contener.


3. Una jarra puede llenarse completamente con ocho vasos de agua, si sólo tiene 3/8 de la cantidad de agua que le cabe ¿Qué cantidad de agua le hace falta para llenarse?

R/A la jarra le hacen falta 5/8 para llenarse.

En una conversación abierta que se realizó con la estudiante, se le preguntó:

Docente: *¿cómo lograste llegar a esa solución?*

Melissa: *primero dibujé la jarra y la dividí en ocho partes, pero como hay tres en la jarra, entonces me quedan cinco pedacitos sin llenar.*

Vemos cómo, cuando Melissa realiza el gráfico de la situación que se le plantea, la fracción pasa, de actuar en una cantidad que se tiene en abstracto, como un número, a una cantidad desde lo concreto, haciendo posible una partición equitativa.

En esto se expresa el carácter de la fracción como partidor, cuando la fracción pasa de tener un carácter de operación mental a tener un aspecto que pide actuar sobre un objeto en concreto. (Freudenthal, 1994)

Seguidamente, se les planteó esta otra actividad:

Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene los $\frac{3}{8}$ de ellas, ¿Cuántas canicas tiene ahora?

A Laura le dio simplemente 24:

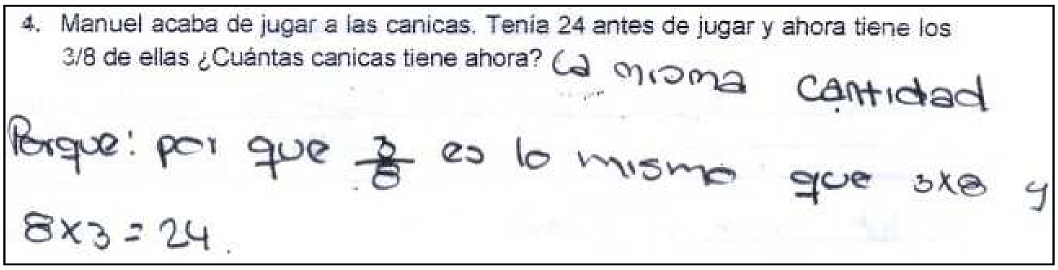
R/= Tiene 24 canicas.

Docente: *¿por qué dices que son 24 canicas las que le quedan a Manuel?*

Laura: *porque es lo mismo, si tenía 24, le queda lo mismo porque no perdió ninguna.*

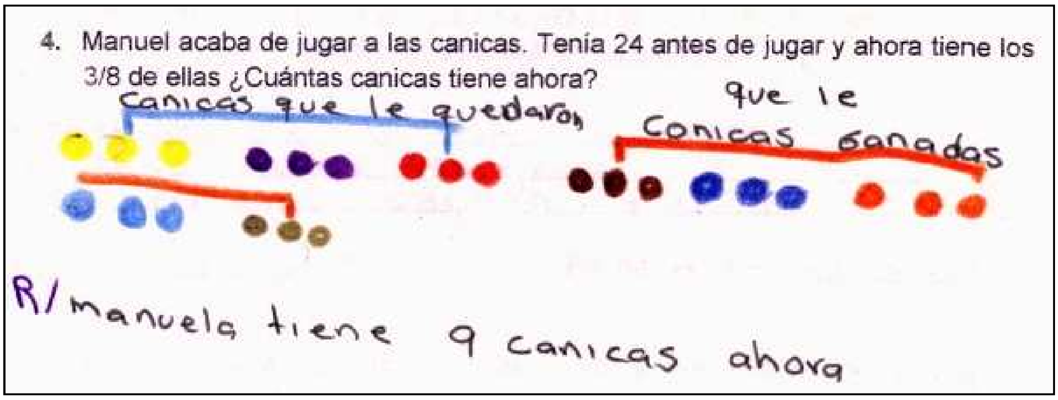
Podemos interpretar que Laura estaba esperando que en el enunciado estuviera explícito que Manuel perdiera cierta cantidad de canicas, para luego asociar la palabra “perder” a la simple aplicación de una operación o algoritmo.

Para Sindy la cantidad de canicas sobrantes también es 24. Se ve en sus explicaciones escritas que el soporte de tal respuesta es que Multiplica los términos de la fracción $\frac{3}{8}$. Veamos:



Para este caso, se interpreta que la fracción $\frac{3}{8}$ representa para Sindy, la multiplicación entre el tres y el ocho, ya que ella sustenta que Manuel queda con la misma cantidad de canicas debido a que el producto de los términos de dicha fracción, 8 y 3, es igual a 24.

Melissa, interpreta el problema de forma diferente a sus dos compañeras. Ella, como en la actividad anterior, se vale de una representación de la situación planteada, facilitándole así su solución:



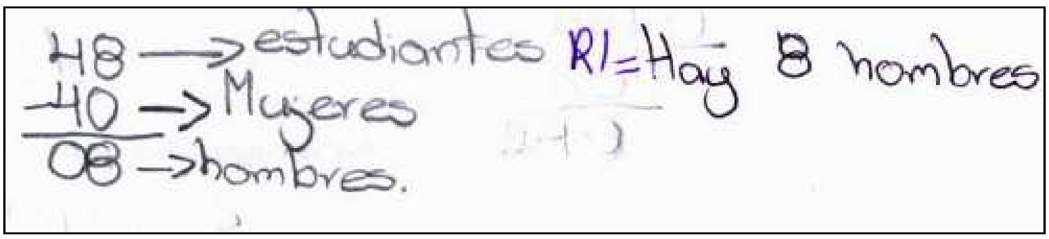
Para dar a conocer un poco mejor sus hallazgos, Melissa decidió voluntariamente explicarnos el por qué de su solución. Veamos:

Profe, primero dibujé las canicas en ocho grupitos iguales, pero como me dice que ahora tiene tres de ocho, entonces cogí tres grupitos y eso me da nueve canicas.

En relación a la solución de la actividad antes expuesta, Melissa representa gráficamente la situación planteada, realiza la partición, de tal forma, que la fracción $\frac{3}{8}$ no va a operar sobre una cantidad de magnitud en abstracto, como lo es el número 24, sino en una cantidad de objetos discretos, como la cantidad de puntos que la estudiante dibujó en la hoja del taller.

Veamos qué pasó cuando las estudiantes desarrollaron la siguiente actividad: en un grupo de sexto grado hay 48 estudiantes, si los cinco octavos de ellos son mujeres, ¿cuántos hombres hay en el grupo?

Laura no soluciona la actividad como se esperaba, interpretamos que multiplicó los términos de la fracción $\frac{5}{8}$ y asumió este producto, 40, como el número de mujeres, por lo cual, luego lo resta del total de estudiantes.

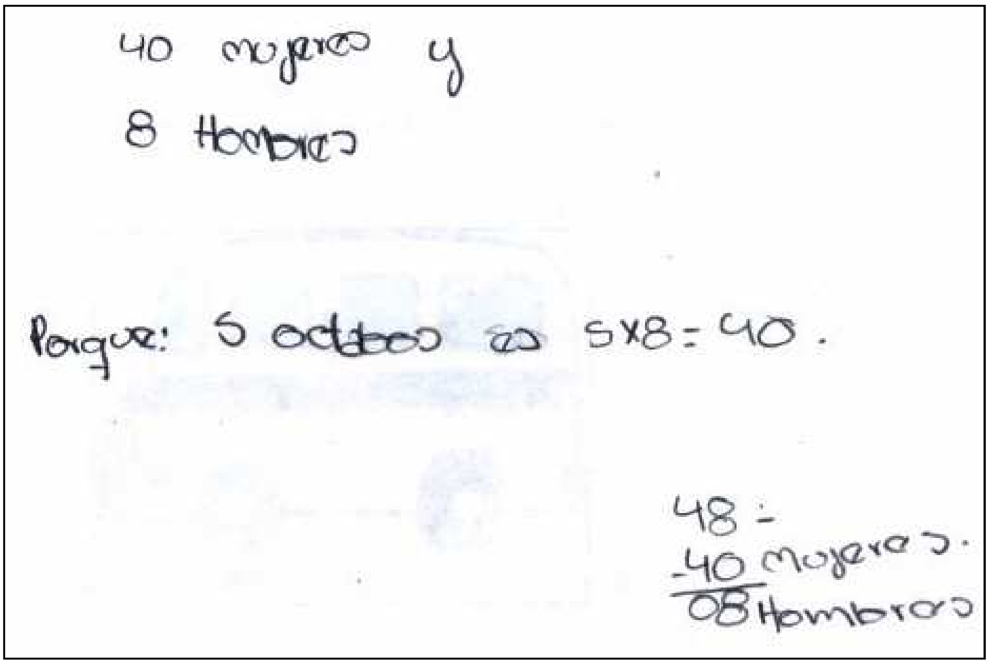


Con el fin de aclarar su solución se le indagó acerca de ellas mediante algunas preguntas:

> **Docente:** *¿cómo llegaste a esa respuesta?*
>
> **Laura:** *como hay 48 estudiantes y los cinco octavos son cuarenta, entonces 48 menos 40 es igual ocho.*
>
> **Docente:** *¿por qué dices que cinco octavos es igual a cuarenta?*
>
> **Laura:** *porque cinco por ocho cuarenta.*

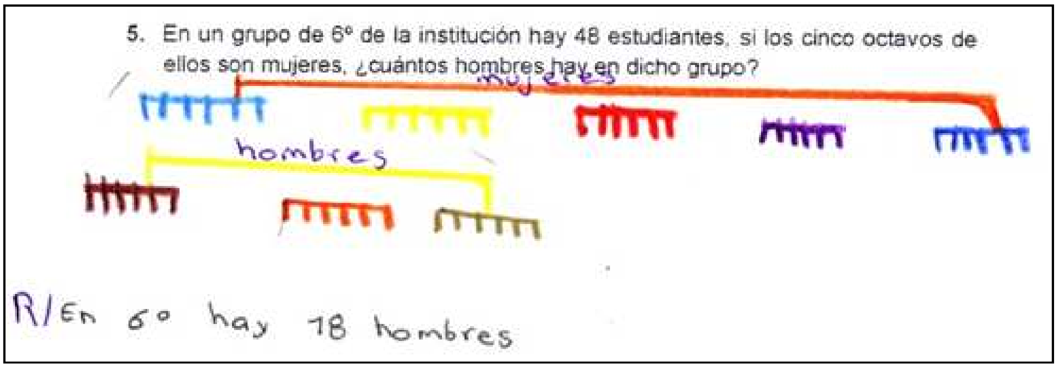
Se puede inferir que Laura incide en el error de asociar una fracción a un producto entre sus términos. Esto puede interpretarse, que para ella, la fracción como operador, indica el producto entre los dos términos de la fracción.

De una forma idéntica a Laura, Sindy reconoce la fracción como la multiplicación entre el número 5 y el número 8. A esto se agrega que la estudiante no accede a sustentar su solución.



Comprender la fracción como operador para Sindy, se hace difícil, cuando la concibe como una multiplicación entre sus términos, al parecer para la alumna, el cálculo de una fracción de una cantidad se reduce a multiplicar sus términos, dejando de la lado la cantidad a la que se le debe calcular dicha fracción.

Melissa aborda el probema de tal forma que realiza una representación de la situación que se plantea:



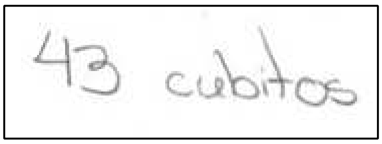
Melissa, a partir de lo que realiza, explica el cómo llega a esta solución, así:

> *Como son 48, entonces lo dividí en grupitos de a cinco, pero como me dicen que cinco de ocho son mujeres, entonces el resto son hombres o sea 18.*

En el desarrollo de esta actividad, por un lado, podemos ver cómo las estudiantes Laura y Sindy, solucionaron la mayoría de los ejercicios, de tal manera que interpretan la fracción como un producto entre los términos de la fracción (numerador y denominador). Por otro lado, Melissa, nuevamente se vale de una representación de la situación, haciendo mucho más concreto para ella la partición

En otro momento se les planteó el siguiente problema: una caja tiene la capacidad para 48 cubitos y solamente está llena con $\mathbf{\frac{5}{8}}$ de los cubitos ¿Cuántos cubitos hacen falta para llenar completamente el cuerpo geométrico?

Laura, al solucionar esta actividad no identifica la fracción como tal sino que la interpreta como el número 5, de esto se da cuenta a través de lo planteado en la hoja de la actividad, así como también, cuando responde al por qué se sus conclusiones.

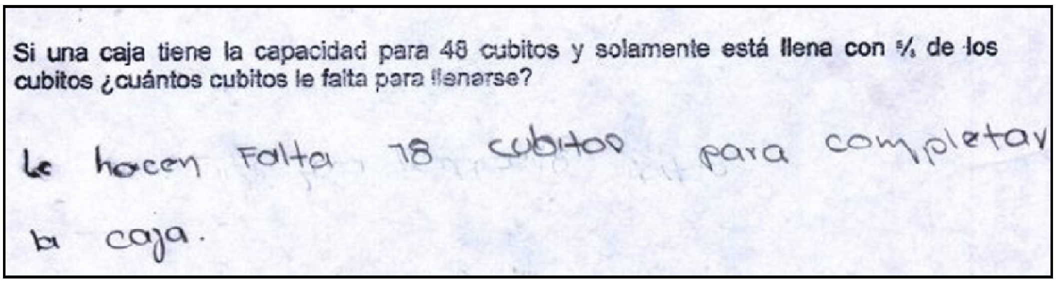


Docente: *Laura, justifica por qué tu solución.*

Laura: *muy fácil, 43, porque a 48 cubitos le resto 5.*

De lo realizado por Laura se tiene que la fracción $\frac{5}{8}$ es reducida simplemente al número 5. Esto se interpreta en tanto que la fracción es considerada como un número con las mismas propiedades de los números naturales, error que Godino (2004), describe como uno de los más comunes de los estudiantes al enfrentarse a problemas de fracciones.

La solución de Sindy se caracteriza por ser muy simple, pero no evidencia, a primera vista, el proceso por el cual pudiera sustentar su trabajo realizado.


Si una caja tiene la capacidad para 48 cubitos y solamente está llena con $\frac{5}{8}$ de los cubitos ¿cuántos cubitos le falta para llenarse?

Le hacen Falta 18 cubitos para completar la caja.

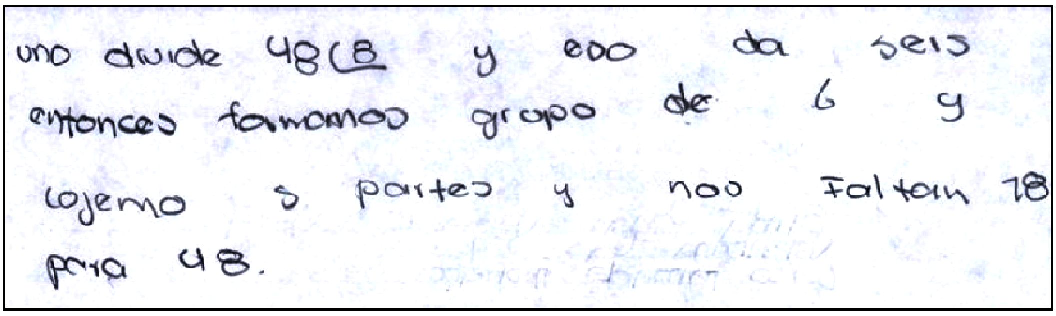
Debido al tipo de solución que le da Sindy a esta actividad, se realizó el siguiente diálogo con dicha estudiante.

Docente: *Sindy, cuánto espacio de la caja en la que caben 48 cubitos está libre.*

Sindy: *hay profe, pues es lo mismo que tengo en la hoja.*

Docente: *bueno, muéstrame.*

Sindy:


uno divide 48(8 y eso da seis
entonces formamos grupo de 6 y
cojemo 5 partes y nos Faltan 18
para 48.

En esta sustentación del trabajo realizado por Sindy se puede ver ahora que entra en juego el operador, cuando empieza a tomar significado como la división de 48 por 8. De acuerdo a esto inferimos que la estudiante comienza a concebir la fracción desde un referente mental y no tanto desde una representación concreta.

Melissa aprovechando que el material, los cubitos, estaba disponible, soluciona el ejercicio basándose en él, y aunque lo hace de forma simple en su hoja de respuestas, decide de forma voluntaria compartir sus hallazgos con algunos de sus compañeros y docentes

3. Si una caja tiene la capacidad para 48 cubitos y solamente está llena con $^5/_8$ de los cubitos ¿cuántos cubitos le falta para llenarse?

R/=18 cubitos

Melissa: *en la hoja nos dice que hagamos si una caja tiene la capacidad para 48 cubitos y solamente está llena con cinco de ocho de los cubitos ¿Cuántos cubitos hacen falta para llenar completamente el cuerpo geométrico?, entonces hicimos ocho grupitos de a seis.*

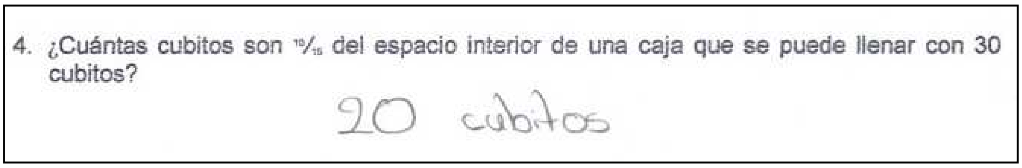
Melissa: *Y nos dice que cojamos cinco grupitos*

Melissa: *Listo, cinco grupitos. Entonces la pregunta nos dice, ¿cuántos cubitos le faltan para llenarse y hay tres grupitos de seis entonces nos faltan 18 cubitos para acabar de llenar?*

En la solución de la actividad interpretamos cómo Melissa nuevamente relaciona la situación planteada desde lo concreto, al conseguir la cantidad de cubitos requerida, debido a que para la actividad solamente se le proporcionó 18 de ellos.

Luego cuando se les formuló el interrogante: ¿Cuántos cubitos son $\frac{10}{15}$ del espacio interior de una caja que se puede llenar con 30 cubitos? Las estudiantes realizaron la solución de este de la siguiente forma:

Laura, realiza un reparto equitativo y compara las cantidades para determinar la misma cantidad de magnitud, y sustenta la solución en la socialización a sus demás compañeros.



4. ¿Cuántas cubitos son $^{10}/_{15}$ del espacio interior de una caja que se puede llenar con 30 cubitos?

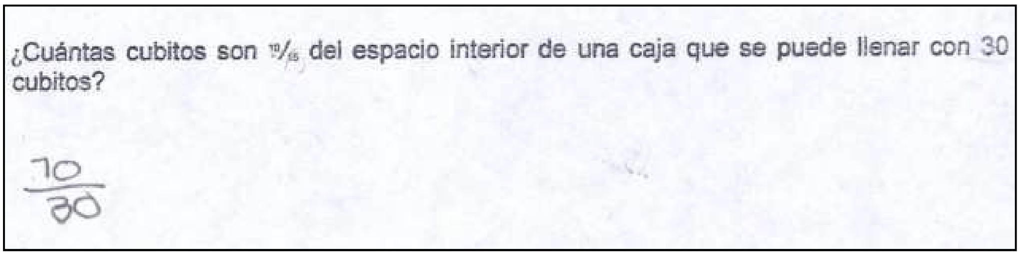
20 cubitos

En la socialización de sus resultados Laura dijo:

…*pongo en 15 partes los cubitos o sea de a dos. Y me dice que son 10 de quince, entonces me quedan 20 cubitos.*

De acuerdo a lo anterior Laura realiza ahora una operación mental, en la que interpreta correctamente la fracción como un operador multiplicativo, que parte una cantidad de magnitud, no desde lo concreto, sino desde la consideración de las cantidades de magnitud como objetos mentales.

La solución al problema planteada por Sindy, parece ser confusa, en tanto que considera una cantidad de magnitud, en función de una fracción equivalente a $\frac{5}{15}$, es decir $\frac{10}{30}$

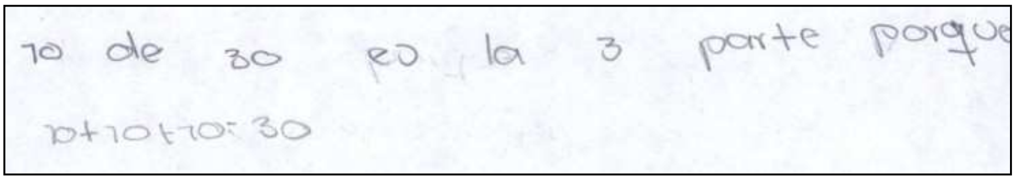


¿Cuántas cubitos son $^{10}/_{15}$ del espacio interior de una caja que se puede llenar con 30 cubitos?

$\frac{10}{30}$

Para entender la manera en que solucionó el ejercicio se le realizaron algunas preguntas:

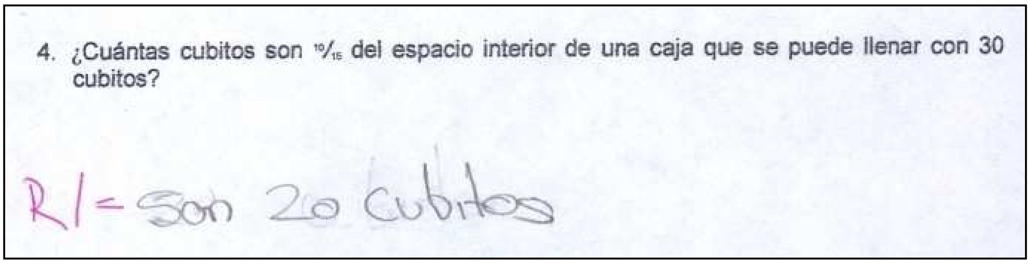
> **Docente:** *Explícame, ¿por qué la solución la expresaste como la fracción* $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{30}}$*?*
>
> **Sindy:** *bueno, tengo los 30 cubitos y como tomo diez de quince, entonces diez de quince son 20 cubitos y me quedan otros 10, diez de treinta que es la tercera parte porque 10+10+10+10=30. Lo mismo que tengo en la hoja.*



10 de 30 es la 3 parte porque
10+10+10=30

Con esta solución de Sindy, se puede identificar que entra en juego la fracción unitaria, desde una concepción mental de la estudiante, como referente para realizar la actividad. Esto posibilita entender que ella tiene en cuenta el operador desde su aspecto como fracturante. (Freudenthal, 1994)

Muy similarmente, Melissa le da sentido a la fracción como partidor, a pesar de que se trata de un problema asociado a la fracción como operador, cuando se vale de un conjunto de treinta cubos y los reparte en partes iguales.



4. ¿Cuántas cubitos son $^{10}/_{15}$ del espacio interior de una caja que se puede llenar con 30 cubitos?

R/= Son 20 cubitos

En lo que escribe en la solución no explicita la forma en la que llega a la solución por lo cual ella en su socialización realizó las siguientes aclaraciones:

Melissa: *aquí hay que hacer quince grupitos de a dos cubitos porque treinta dividido dos es quince. Entonces debo coger 10, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, y diez. Aquí ya están los 10. Entonces hay veinte cubitos y le faltan 10.*

Por medio de la solución y de la sustentación que le da a la actividad, Melissa, actúa de manera similar a las actividades anteriores, en las cuales toma un referente concreto para ella, que son los 30 cubos.

De lo documentado anteriormente, se puede ver cómo para las estudiantes, el operador fraccionario es un ente abstracto que adquiere algunos significados que son ajenos a su esencia, (como lo fue el de producto entre los términos de la fracción), por lo cual se valen de referentes concretos que impliquen realizar particiones equitativas, logrando de tal modo, el surgimiento de la fracción como partidor.

Con respecto a esto, se puede inferir que el operador fraccionario es un enfoque muy abstracto para las niñas, debido a que esta interpretación es una construcción mental y no física (Vasco, 1996), por lo que, para las estudiantes, es complicado, a menos de que ellas no hagan referencia a una representación de la situación que se les plantea, para luego considerar la solución del problema desde una partición.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- ✓ Las fracciones como medidores posibilitan, de manera natural, la aparición de fracciones unitarias, además de la comparación entre cantidades de magnitud.

- ✓ Es notable cómo desde la solución de problemas asociados a las interpretaciones de las fracciones, se puede llegar a todo lo que el currículo propone como temas separados, cuando en realidad corresponden a un mismo campo conceptual, donde hay una integración de contenidos, precisamente unidos por la conexión de relaciones tejidas entre ellos. Por ejemplo, en las actividades planteadas, sin proponernos trabajar fracciones impropias, aparecen de forma natural a partir de la comparación de dos cantidades y de la concepción de la fracción como una composición aditiva e fracciones unitarias

- ✓ El lenguaje, utilizado por los estudiantes, al referirse a una fracción determinada fluye de manera natural; por ejemplo: para la fracción $\frac{2}{3}$ estos la llamaban dos de tres; y no de una manera tan artificial como se presenta en la matemática escolar, donde lo que prima son los términos de la fracción, “dos tercios”.

- ✓ La concepción de la fracción como operador implica un nivel de pensamiento avanzado en los estudiantes, debido a su gran complejidad, por lo cual es mucho mejor que en la escuela, la enseñanza de las fracciones se oriente desde la interpretación como medidor y partidor.

- ✓ Comprender la fracción como operador constituye transformar una cantidad de magnitud al margen de situaciones concretas. Esto se evidencia cuando en la solución de las actividades implementadas los estudiantes necesitaban referirse al material concreto.

- ✓ En los trabajos de las estudiantes, la fracción unitaria estuvo presente, en relación a las tres interpretaciones retomadas para esta investigación, sin importar a cuál de ellas nos estuviéramos refiriendo. Esto determina que el tratamiento escolar de las fracciones, no es un asunto abstracto, con el cual los estudiantes deben de aprender definiciones y aplicar algoritmos, sino más bien, el de construir relaciones.

- ✓ Las interpretaciones de la fracción- medidor, partidor y operador- asumidas desde situaciones asociadas a las magnitudes, son vistas por las estudiantes como una suma sucesiva de fracciones unitarias, lo cual se logró cuando hacían referencia a cantidades de magnitud y no a objetos físicos.

- ✓ El trabajo escolar con las fracciones en la escuela debe hacerse enfocado desde la las magnitudes en contextos que sean concretos para los estudiantes, dejando en segundo lugar los procesos algorítmicos y las definiciones rigurosas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Granada: *Proyecto Edumat-maestros.* Recuperado el 15 de Febrero de 2009, en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para Maestros.* Granada, *Proyecto Edumat-maestros.* Recuperado el 15 de Febrero de 2009, en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Kline, M. (2002). *El pensamiento matemático desde la antiguedad hasta nuestros días*. Barcelona: Alianza Editorial.

La escuela del maestro. (2001). E*l diario de procesos.* Documento del Primer seminario taller "La escuela elegante". Medellín.

Maza Gómez, C. (2000). *Las matemátias de la antiguedad y su contexto histórico.* Sevilla: Grafitrés SL.

Munera Córdoba, J. J. (1997). *Estrategias metodológicas para la enseñanza de los números fraccionarios*. Tésis para optar al título de Magíster en Psicopedagogía. Universidad de Antioquia.

Obando Zapata, G. (1999). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte todo*. Tésis para optar al título de Mágister en Educación. Universidad del Valle.

Obando Zapata, G y otros (2006). *Módulo 1: Pensamiento numérico y sistemas numéricos.* Medellín: Editorial Artes y Letras Ltda.

Pastor Rey, J., & Puig Adam, P. (1951). *Elementos de aritmética racional.* Madrid: Nuevas Gráficas.

Sosa Cabrera, Silvia (2006) *La génesis y el desarrollo del cambio estratégico: un enfoque dinámico basado en el momentum organizativo* Tesis doctoral accesible a texto completo en http://www.eumed.net/tesis/2006/ssc/

Taton, R. (1985). *Historia general de las ciencias*. Barcelona: 1985.

Vasco Uribe, C. E. *El archipiélago fraccionario, En: Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. (Vol. II) Punto Exe Editores, 1996.*

Vera, F. (1946). *Historia de las ideas matemáticas*. Bogotá: Editorial Centro

7. ANEXOS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

SEMINARIO INTEGRATIVO Y TRABAJO DE GRADO

1803

Señores padres de familia:

Un cordial saludo.

A partir de nuestras intervenciones de clase en la Institución Educativa Pedro Luís Álvarez Correa, Sede Santa María Goretti del municipio de Caldas, hemos tenido a bien, considerar a su hija ***Melissa Agudelo Quintero*** como sujeto partícipe en el proyecto de investigación, "***LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR***"

Para ello les solicitamos por este medio, la autorización para que su hijo (a) nos pueda suministrar información acerca de algunos aspectos, socio culturales, comportamentales y académicos por medio de entrevistas, fotografías, videos, talleres de clase, grabaciones, entre otros.

De antemano agradecemos su atención.

Bibiana Patricia Quiroz. Juan Carlos Vanegas. John Jairo Múnera C.
Bibiana P. Quiroz Juan C. Vanegas
Estudiantes Investigadores. Asesor de la investigación.

Autorizamos la participación de nuestro hija ***Melissa Agudelo Quintero*** en la investigación "***LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR***"

Enira Maria Quintero
cc 43688578 de Caldas

Firma del padre. Firma de la madre. 3387045

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

SEMINARIO INTEGRATIVO Y TRABAJO DE GRADO

1 8 0 3

Señores padres de familia:

Un cordial saludo.

A partir de nuestras intervenciones de clase en la Institución Educativa Pedro Luís Álvarez Correa, Sede Santa María Goretti del municipio de Caldas, hemos tenido a bien, considerar a su hija ***Sindy Yohana Valencia Varela***, como sujeto partícipe en el proyecto de investigación, ***"LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR"***

Para ello les solicitamos por este medio, la autorización para que su hijo (a) nos pueda suministrar información acerca de algunos aspectos, socio-culturales, comportamentales y académicos por medio de entrevistas, fotografías, videos, talleres de clase, grabaciones, entre otros.

De antemano agradecemos su atención.

Bibiana Patricia Quiroz. Juan Carlos Vanegas. John Jairo Múnera C.

Bibiana P. Quiroz JUAN C. VANEGAS.

Estudiantes Investigadores. Asesor de la investigación.

Autorizamos la participación de nuestro hija ***Sindy Yohana Valencia Varela*** en la investigación ***"LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR"***

Rubén Valencia

70.690.943-

Firma del padre.

43682091.

Firma de la madre.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

SEMINARIO INTEGRATIVO Y TRABAJO DE GRADO

1 8 0 3

Señores padres de familia:

Un cordial saludo.

A partir de nuestras intervenciones de clase en la Institución Educativa Pedro Luís Álvarez correa sede Santa María Goretti del municipio de Caldas, hemos tenido a bien, considerar a su hija ***Laura Obando Hernández,*** como sujeto partícipe en el proyecto de investigación, "***LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR"***

Para ello les solicitamos por este medio, la autorización para que su hijo (a) nos pueda suministrar información acerca de algunos aspectos, socio-culturales, comportamentales y académicos por medio de entrevistas, fotografías, videos, talleres de clase, grabaciones, entre otros.

De antemano agradecemos su atención.

Bibiana Patricia Quiroz. Juan Carlos Vanegas. John Jairo Múnera C.

Bibiana P. Quiroz Juan C. Vanegas.

Estudiantes Investigadores. Asesor de la investigación.

Autorizamos la participación de nuestro hija ***Laura Obando Hernández,*** en la investigación "***LAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES COMO: MEDIDOR, PARTIDOR Y OPERADOR"***

Jorge Iván Obando Z. Yelly Hernández García.

Firma del padre. Firma de la madre. C.C. 22.069.542.

C.C. 71.391.196