APROXIMACIÓN A LA MODELACIÓN MATEMÁTICA, MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO POR NIVELES, DE VAN HIELE.

CARLOS ROJAS SUÁREZ
CARLOS MARIO CUARTAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
MEDELLÍN
2009

APROXIMACIÓN A LA MODELACIÓN MATEMÁTICA, MEDIANTE LA APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO POR NIVELES, DE VAN HIELE.

CARLOS ROJAS SUÁREZ
CARLOS MARIO CUARTAS

Trabajo para optar al título de
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

LIC.CARLOS ARTURO VENGOECHEA
ASESOR

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas
MEDELLÍN
2009

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Medellín, 15 de julio de 2009

“Coincidimos en concebir la practica pedagógica como el espacio en donde aplicamos, validamos, reestructuramos y afianzamos los principios básicos que orientan la labor docente.

Es allí en donde logramos tamizar los elementos teóricos que aplican para determinado contexto, ya que las realidades peculiares de nuestros instituciones muchas veces se bifurcan frente a éstos.” (Rojas & Cuartas, 2009)

RESUMEN

Dentro de la propuesta formativa para docentes en “licenciatura en educación básica con énfasis en matemática”, se hace necesaria la puesta en marcha de la práctica profesional, la cual se lleva a cabo en una institución educativa de carácter oficial. Dicha práctica se encuentra reglamentada mediante convenio que se rige por la Ley 30 de 1992.

En la primera fase de nuestra práctica profesional, dedicada a la observación diagnóstica, realizada en el segundo semestre de 2007, durante la lectura de las condiciones y desarrollo académico de la Institución Educativa Jaime Arango Rojas y, de los estudiantes del grado tercero (los cuales acompañamos hasta terminar el cuarto grado), encontramos que éstos no contextualizaban los conocimientos de la escuela ni los conectaban con su vida diaria.

En la segunda fase, dedicada a la formulación de la propuesta de intervención, decidimos adoptar la modelación como estrategia para relacionar tales elementos, además de dar cuenta de los requerimientos del MEN; ya que, trabajar sobre la modelación es una necesidad planteada desde los lineamientos curriculares de matemáticas.

En la tercera fase de nuestra práctica profesional, se aplicó la propuesta de intervención didáctica, la cual constó de dos actividades base enmarcadas en el concepto de fracción, orientada hacia el fortalecimiento del pensamiento métrico, y otra tercera encaminada hacia la observación del nivel de modelación alcanzado por los estudiantes.

En esta fase se orientó a los niños y niñas para que modelaran, apoyándonos en la articulación de la propuesta de Van Hiele y el proceso de modelación, ya que encontramos gran semejanza entre las fases de la modelación y las descritas por Van Hiele para avanzar de un nivel de pensamiento a otro.

En la cuarta fase, dedicada a la sistematización, análisis e interpretación de la información recolectada durante la intervención, buscamos evidenciar el desarrollo de modelos factuales, conceptuales o procedimentales que hayan alcanzado los estudiantes[1], de acuerdo al nivel de pensamiento en el que se les caracterizo, con base en la propuesta de Van Hiele.

[1] Se adaptaron y desarrollaron descriptores que pudieran dar cuenta del nivel de modelación alcanzado por los estudiantes.

SINTESI

Entro la proposta per gli insegnanti in formazione "laurea in educazione con enfasi in matematica", è necessario attuare la pratica, che avviene in un istituto di istruzione in veste ufficiale. Questa pratica è regolamentata attraverso un accordo che è disciplinata dalla legge 30 del 1992.

Nella prima fase della nostra pratica professionale, nella seconda metà del 2007, durante la lettura delle condizioni di sviluppo accademico dell'istituzione Jaime Arango Rojas, e degli studenti del terzo grado (chi abbiamo accompagnato fino al quarto grado). Ci abbiamo troviamo che loro non contestualizzavano delle conoscenze dalla scuola, né le collegavano alla loro vita quotidiana. Così, abbiamo deciso di adottare la modellazione siccome una strategia per realizzare il collegamento di tali elementi, in aggiunta ai requisiti del ministero dell'istruzione, già che il lavoro sulla modellazione è una necessità, sollevata dalle lineamenti curriculare di matematica.

Sono anche una forte somiglianza tra il processo di modellazione matematica e delle fase della strategia di sviluppo di Van Hiele, di passare da un livello ad un altro pensiero, così abbiamo deciso di collegare questa proposta con la modellazione, per portare gli studenti sviluppo di modelli di fatto, concettuale o procedurale.

Gli studenti sono stati valutati dopo l'attuazione e l'analisi delle due attività di base, all'interno delle quali sono volte a sviluppare le competenze nella costruzione di modelli matematici, e un terzo di essi specificamente progettato per riprodurre il processo di per sé, pemettendoci dimostra il livello di modellazione che avevano raggiunto.

Per esaminare il campo di applicazione del modello e lo status di studenti, a un certo livello di pensiero, si hanno adattato e sviluppato descrittori che potessero dare conto di questo processo.

AGRADECIMIENTOS

Después de haber trasegado por este camino, orientado hacia la formación de docentes en al área de matemática, son muchas las personas a quienes debemos agradecer por tan incomparable oportunidad, e innumerables las razones para hacerlo; por ello, en esta ocasión deseamos rendirle tributo:

Al señor nuestro Dios, pues desde nuestras más profundas creencias, lo consideramos el artífice de todas nuestras experiencias vocacionales.

A nuestras familias, ya que sin su apoyo y paciencia, la incursión y avance en nuestra vida académica no hubiera sido posible.

A los maestros que supieron anteponer sus valores al momento de enseñar, humanizando la matemática.

A nuestro asesor de práctica y entrañable amigo, Carlos Vengoechea, por ratificar a través de su actuar, la dignidad, valores y dominio conceptual que todos los verdaderos maestros deberían ejercer, al interior de la noble y arriesgada profesión docente.

En el liceo Jaime Arango Rojas, al coordinador Don Alberto, a las profesoras Josefina, Carmen y Nohora Luz y a los estudiantes de los grados 4A y 4B, que supieron acogernos con cariño y respeto en su seno, convirtiendo nuestra práctica profesional en una experiencia enriquecedora y memorable.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es el resultado de la aplicación y análisis en nuestro proyecto de grado efectuado en el marco de la práctica profesional, realizada de manera inicial con los alumnos y alumnas de los grados 3A y 3B, con los cuales respectivamente, finalizamos nuestra actividad, en los grados 4A y 4B de la Institución Educativa “Liceo Jaime Arango Rojas”.

La escuela debe buscar que los estudiantes logren interpretar el mundo que los rodea, a través de la matemática (matematizar), lo cual permite conocer y predecir fenómenos al interior del mismo; para ello se hace necesario que los estudiantes se enfrenten a situaciones cotidianas, que las analicen y que hallen en ellas los elementos recurrentes a fin de que intenten esbozar un modelo matemático (modelar) de acuerdo a su nivel de desarrollo cognitivo, que describa el comportamiento del fenómeno estudiado y que pueda ser extrapolado a otras situaciones que compartan similitudes en su estructura (concretizar).

En este sentido, la aplicación de la estrategia del modelo de desarrollo de Van Hiele, resulta una herramienta potente, según demostración realizada por DE LA TORRE (Tesis Doctoral, 2003), para guiar a los estudiantes en el proceso de modelación, a través de la implementación de las fases de aprendizaje, ya que permite mediante la elaboración de los descriptores para modelación, realizar un seguimiento comparativo del nivel que van alcanzando estos, al tiempo que los conduce a uno superior mediante el aprendizaje. Es decir, la dinámica interna de la estrategia de Van Hiele permite recrear el proceso de modelación en la medida que parte de una pregunta en la fase de indagación, se estudian los elementos inherentes al objeto analizado en la fase de orientación dirigida, se refina el vocabulario y se definen variables en la fase de explicitación. El alumno se enfrenta a una situación en donde debe reproducir el proceso incorporado en la fase de orientación libre, y por último, en la fase de integración los estudiantes con los métodos que tienen a su disposición realizan una mirada general unificando los objetos estudiados y las relaciones entre ellos, lo que en suma seria, lograr modelar por sus propios medios.

De otra parte, desde el ministerio de educación se está promoviendo el ejercicio de la modelación, con el objeto de que los estudiantes puedan dar respuesta a preguntas que los abordan diariamente, permitiendo contextualizar sus conocimientos escolares. Además, dentro de la estructura curricular planteada por el MEN, en los lineamientos de matemáticas, aparece la modelación como uno de los elementos constitutivos de la misma actividad matemática (MEN, 1998, p.51)

Finalmente, realizamos una aproximación y adecuación a los descriptores de aprendizaje que nos permitan identificar el nivel de desarrollo en que se encuentra un estudiante, fundamentados en los estándares de matemática, en DE LA TORRE (2003) y en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), en el proceso de modelación matemática y la transición entre niveles de modelación, para una muestra de 20 estudiantes de los grados 4A y 4B de la Institución Educativa "Liceo Jaime Arango Rojas" de Bello, Antioquia.

1. FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Desde 1998, en el MEN de Colombia, se han establecido claramente las directrices en torno a la enseñanza de las matemáticas, a través de los Lineamientos curriculares y de los Estándares básicos de competencia y su fundamentación teórica (2007), en donde también se propone el desarrollo del pensamiento matemático con la implementación de los siguientes procesos: elaboración, razonamiento, comparación y ejercitación de problemas, y la comunicación (MEN, 1998, p.74). Aquí también se muestran las principales nociones que hacen parte de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias del MEN con respecto a los procesos de modelación y resolución de problemas (MEN, 1998, p.51)

Por ello se pretende que el conocimiento escolar encuentre su significado en la dinámica: modelación-concretización, permitiendo que el alumno desarrolle estructuras lógicas para enfrentarse a la vida, ¡aprender para la vida!

De manera que, los principales aportes de nuestra propuesta investigativa se basan precisamente en la adaptación y definición de un conjunto de descriptores de modelación para estudiantes de cuarto grado de básica, ya que la mayoría de las investigaciones existentes apuntan hacia el trabajo basado en modelación en los últimos niveles de básica y/o primeros de universidad.

En este sentido, grupos de investigación de la universidad de Antioquia y Nacional, entre otros, han venido estudiando ampliamente el proceso de modelación matemática, así como, el impacto de su implementación en las aulas de clase; tal es el caso de Andrés Felipe de la Torre Gómez (2007), en su tesis doctoral "*La modelización del espacio y del tiempo*", Romulo Gallego Badillo "*Un concepto epistemológico de modelo para la didáctica de las ciencias* *experimentales*”, en Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 3 Nº 3 (2004), y Jhony Alexander Villa Ochoa “*Modelación en educación matemática. Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos*” (2008), para citar algunos.

2. MARCO CONTEXTUAL

La Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, está ubicada en el municipio de Bello (Antioquia), en la avenida 31 Nº 43a-20. La población estudiantil es mixta, aunque en un 95% son niñas generalmente entre los estratos 1 y 2.
A continuación presentamos una síntesis de las tendencias educativas definidas dentro del PEI de la institución, que nos permiten tener una visión general de la misma.

2.1 Misión de la institución. Formar personas competentes en las dimensiones del desarrollo humano, en el conocimiento de las ciencias y la tecnología, el desarrollo comunitario y en la búsqueda permanente de integración de proyecciones para el logro de una mejor calidad de vida a través de la aplicación real de la filosofía y objetivos institucionales.

2.2 Visión de la institución. En el 2006 la institución educativa Jaime Arango Rojas se reconocerá por la comunidad, como líder de la formación del desarrollo humano, el conocimiento tecnológico y la proyección comunitaria con actitud de servicio a los demás, en procura del bienestar mutuo para alcanzar una calidad de vida.

Esta información fue crucial para la primera fase de nuestra práctica docente, ya que nos permitió observar hacia donde se orientaban los esfuerzos educativos de la Institución, además de posibilitarnos comprobar la falta de actualización del PEI, en lo referente a las proyecciones futuras. En tal sentido, nuestro proyecto pretende ser un aporte significativo, que ponga en contexto la enseñanza de la matemática, permitiendo extrapolarla a la vida diaria de sus estudiantes.

Presentamos además, los resultados de la institución en matemáticas con respecto a las pruebas saber referidas a matemáticas del MEN y las ICFES:

2.3 Pruebas SABER. A continuación se presenta la escala valorativa de las pruebas SABER, tal como está definido por el MEN, seguido de las tablas comparativas de la Institución Educativa Jaime Arango Rojas, de manera que se pueda hacer una lectura objetiva de las mismas.

Los resultados se categorizan en 4 niveles, denominados con letras A, B, C y D.

Nivel A: no es un nivel de logro. Representa el porcentaje de alumnos que no alcanza el nivel de logro mínimo, y su interpretación en términos cuantitativos es que el máximo porcentaje de estudiantes que no alcancen los niveles mínimos sea inferior al 5% en cada uno de los dos grados evaluados.

Nivel B: En este nivel se ubican los estudiantes que son capaces de resolver problemas de rutina, contextualizados en un componente específico (numérico-variacional, geométrico-métrico o aleatorio), en los que aparece toda la información necesaria para su resolución y en los que se sugiere explícita o implícitamente la estrategia de solución. En este nivel se ubican los estudiantes que están en capacidad de expresar ideas utilizando ilustraciones, elaborar representaciones simples de objetos matemáticos, reconocer patrones, cantidades, atributos y condiciones propuestas en una situación problema. Argumentar utilizando representaciones icónicas, gráficas, pictóricas y justificar usando ejemplos. Modelar estructuras simples (estructura aditiva).

Nivel C: En este nivel se ubican los estudiantes que son capaces de resolver problemas rutinarios, que pueden estar contextualizados en más de una componente, en los que toda la información necesaria para resolverlos es explícita en el enunciado, pero que no insinúan un camino o estrategia para su solución, el estudiante debe estar en capacidad de reorganizar la información. En este nivel se ubican los estudiantes que están en capacidad de utilizar lenguaje natural, gráfico y/o simbólico para modelar situaciones aritméticas y describir propiedades y relaciones. Justificar estrategias y procedimientos usando ejemplos. Clasificar de acuerdo a relaciones y propiedades y usar un patrón para continuar una secuencia. Combinar estructuras para modelar situaciones (dos operaciones, una operación y una relación). Verificar soluciones y usar más de una estrategia para solucionar un problema.

Nivel D: En este nivel se ubican los estudiantes que son capaces de resolver problemas no rutinarios, que pueden estar contextualizados en más de una componente, en los que los datos no están organizados de manera que permitan realizar directamente una modelación (esto posibilita diferentes formas de abordar el problema), el estudiante debe descubrir en el enunciado relaciones no explícitas que le posibiliten identificar una estrategia para encontrar la solución. En este nivel se ubican los estudiantes que están en capacidad de hacer traducciones entre diferentes representaciones: icónicas, gráficas y simbólicas. Expresar en lenguaje natural relaciones propiedades y patrones. Argumentar el porqué de un procedimiento o estrategia. Modelar situaciones aditivas y multiplicativas (combinaciones), proponer diferentes estrategias para la solución de un problema y reconocer generalizaciones sencillas.

Niveles de competencia

Entidad	N Alumnos	Porcentaje			
		A	Nivel B	Nivel C	Nivel D
NACIONAL	**714.323**	**13,98**	**39,7**	**21,04**	**25,28**
ANTIOQUIA	88.823	9,47	46,44	23,22	20,87
BELLO	3.369	8,73	48,05	24,28	18,94
IE FONTIDUEÑO JAIME ARANGO ROJAS - ESCUELA URBANA MACHADO	35	0	76,47	5,88	17,65

Competencias

Entidad	N Alumnos	Comunicación		Solución de Problemas		Razonamiento	
		Prom	Desv	Prom	Desv	Prom	Desv
NACIONAL	**714.323**	**4,44**	**1,23**	**3,81**	**1,08**	**3,96**	**1,2**
ANTIOQUIA	88.823	4,1	1,14	3,65	1,04	3,67	1,16
BELLO	3.369	4,16	1,07	3,61	1	3,62	1,1
IE FONTIDUEÑO JAIME ARANGO ROJAS - ESCUELA URBANA MACHADO	35	4,32	0,97	3,35	1,08	3,34	1,06

Componentes

Entidad	N Alumnos	Numérico Variacional		Geométrico Métrico		Aleatorio	
		Prom	Desv	Prom	Desv	Prom	Desv
NACIONAL	**714.323**	**4,09**	**1,1**	**3,92**	**1,22**	**3,87**	**1,14**
ANTIOQUIA	88.823	3,85	1,05	3,55	1,13	3,63	1,13
BELLO	3.369	3,81	1,03	3,53	1,08	3,66	1,09
IE FONTIDUEÑO JAIME ARANGO ROJAS - ESCUELA URBANA MACHADO	35	3,81	1,09	3,5	0,88	3,36	0,88

Con respecto a las pruebas saber, encontramos que los estudiantes se hallan en su mayoría (76.47%) en el nivel B, lo que indica, según la clasificación enunciada anteriormente, que los estudiantes pueden resolver problemas de orden rutinario contextualizaos en un componente especifico, y para nuestro tema de interés, modelar estructuras factuales. Otra minoría de estudiantes, se sitúan en los niveles C y D, siendo capaces de solucionar problemas rutinarios contextualizados en más de un componentes especifico (5.88%) y aquellos de orden un poco más complejo (17.65%), respectivamente.

2.4 Pruebas ICFES. A continuación se presentan cuadros comparativos de los resultados en las pruebas ICFES del municipio de Bello, seguido de los niveles que alcanzo la Institución Educativa Jaime Arango Rojas entre el 2006 y 2008.

BELLO

2008

	MUY SUPERIOR		**SUPERIOR**		**ALTO**		**MEDIO**		**BAJO**		**INFERIOR**		**MUY INFERIOR**		**TOTAL**	
CIUDAD	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
BELLO	0	0,00	3	4,29	10	14,29	23	32,86	29	41,43	5	7,14	0	0,00	70	100
						18,57				74,29				7,14		100

	MUY SUPERIOR		**SUPERIOR**		**ALTO**		**MEDIO**		**BAJO**		**INFERIOR**		**MUY INFERIOR**		**TOTAL**	
Naturaleza	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
NO OF	0	0,00	3	4,29	5	7,14	6	8,57	11	15,71	1	1,43	0	0,00	70	37,1
OF	0	0,00	0	0,00	5	7,14	17	24,29	18	25,71	4	5,71	0	0,00	70	62,9
															NO OF	26

2007

	MUY SUPERIOR		**SUPERIOR**		**ALTO**		**MEDIO**		**BAJO**		**INFERIOR**		**MUY INFERIOR**		**TOTAL**	
CIUDAD	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
BELLO	1	1,54	4	6,15	6	9,23	24	36,92	27	41,54	3	4,62	0	0,00	65	100
						16,92				78,46				4,62		100

	MUY SUPERIOR		**SUPERIOR**		**ALTO**		**MEDIO**		**BAJO**		**INFERIOR**		**MUY INFERIOR**		**TOTAL**	
Naturaleza	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
NO OF	1	1,54	3	4,62	4	6,15	6	9,23	10	15,38	0	0,00	0	0,00	65	36,9
OF	0	0,00	1	1,54	2	3,08	18	27,69	17	26,15	3	4,62	0	0,00	65	63,1
															NO OF	24
															OF	41

2006

	MUY SUPERIOR		**SUPERIOR**		**ALTO**		**MEDIO**		**BAJO**		**INFERIOR**		**MUY INFERIOR**		**TOTAL**	
CIUDAD	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
BELLO	3	4,69	7	10,94	14	21,88	24	37,50	16	25,00	0	0,00	0	0,00	64	100
						37,50				62,50				0,00		100

	MUY SUPERIOR		SUPERIOR		ALTO		MEDIO		BAJO		INFERIOR		MUY INFERIOR		TOTAL	
Naturaleza	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
NO OF	3	4,69	5	7,81	4	6,25	5	7,81	5	7,81	0	0,00	0	0,00	64	34,4
OF	0	0,00	2	3,13	10	15,63	15	23,44	11	17,19	0	0,00	0	0,00	64	59,4
															NO OF	22
															OF	38

Liceo Jaime Arango Rojas:

2006 Alto

2007 Medio

2008 Inferior

Los resultados indican un decrecimiento en el nivel de rendimiento de manera progresiva y general en el área de matemática, lo cual es determinante para nuestro estudio ya que ello nos muestra que existen necesidades de aprendizaje a nivel de esta área. Entres ellas, la falta de contextualización del conocimiento escolar, elemento que dota de sentido el estudio de la matemática, permitiendo extrapolarla a la vida cotidiana de los estudiantes.

3. MARCO TEÓRICO

La inclusión de la modelación en el aula de matemáticas en Colombia se propone desde 1998 con la presentación, por parte del MEN de Colombia, del documento de los Lineamientos Curriculares. Por esta razón, definimos a continuación los conceptos básicos que nos guiaran a lo largo de nuestra investigación.

3.1 El concepto de modelo. Puede entenderse como un sistema figurativo mental, grafico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible (MEN). Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema (o estructura) que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cerca y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. Un modelo se produce para poder operar trasformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. En este sentido todo modelo es una representación, pero no toda representación es esencialmente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos aunque pueden estarse interpretando en un modelo. Analógicamente, todo modelo es un sistema, pero no todo sistema es un modelo.

3.2 Tipos de modelo. Debemos reconocer que podemos encontrar tres tipos de modelos, estos son el factual, el conceptual y el procedimental.

(1) El modelo factual es muy intuitivo, donde el estudiante no alcanza a percibir todas las relaciones posibles que al interior de éste puedan llegar a construirse (se emplea mucho la memoria, se ejercitan los algoritmos).

(2) El modelo conceptual es más elaborado y el estudiante ya alcanza a identificar características definitorias y ciertas reglas de conformación (se abstrae el significado sin tener que recurrir solo a la memoria).

(3) El modelo procedimental es el más elaborado de todos, se logra un nivel de abstracción mucho mayor, se elaboran mapas conceptuales, graficas y se establecen relaciones entre las características existentes.

3.3 Orígenes de la modelación. Desde la antigüedad, el ser humano ha elaborado modelos inmersos en un amplio abanico de complejidad con el ánimo de explicar diversos fenómenos de diferente orden, los cuales abarcan desde la misma existencia humana hasta el origen y destino del universo que la contiene. En esta línea, veremos cómo fueron apareciendo a lo largo de la historia modelos, desde los impulsados por la fe y apoyados en la intuición, hasta los concebidos en la experiencia y sostenidos por la razón pura.

Si bien, a lo largo de nuestras vidas elaboramos muchos modelos y como ya se menciono, de diferentes procedencias y aplicaciones; hemos de destacar a los precursores que en su momento orientaron y "modelaron" el destino de la humanidad brindándole modelos cada vez más elaborados que permitieron el "avance" y pervivencia misma de nuestra especie.

Veremos además, como aun ante la ausencia de mecanismos tecnológicos elaborados, sirviéndose de su intuición, el hombre comenzó a dar respuesta a cuestiones de orden principalmente cosmogónico y cosmológico, motor de la consolidación de los primeros modelos que dieron explicación a la naturaleza del hombre y del universo.

A continuación presentamos un breve recorrido del desarrollo de la modelos en la historia, que nos permite conocer la forma como el ser humano se ha visto en la necesidad de acudir a la modelación, para solucionar problemas de la vida diaria, al tiempo que justifica la necesidad de abordar la modelación como elemento necesario a desarrollar dentro del aula de clase, en el área de matemática.

3.3.1 Los antiguos egipcios (4500 a.c.). La geometría (medición de la tierra) tiene sus orígenes en la respuesta a las condiciones que la naturaleza puso para que los habitantes de las orillas del Nilo se las ingeniasen después de que éste se desbordara periódicamente.

Se sabe que los egipcios de entonces ya conocían (aunque no hay claridad del impacto del mismo en la época) la relación entre los catetos de un triangulo y su hipotenusa. Usando una cuerda anudada, de manera que los nudos distaban uniformemente, construían un triángulo en cuyos lados se podían contar 3, 4 y 5 nudos (la primera terna pitagórica), de este modo garantizaban la creación de un ángulo recto, artilugio matemático muy útil a la hora de realizar el trazado de las tierras que inundaba el Nilo. Se cree que esta fue la clave a la hora de trazar también las bases de las legendarias pirámides.

Lo que afirman los eruditos e historiadores es que a pesar de la potencia de la herramienta, los egipcios no parecían comprender las implicaciones de la misma, muestra de que su uso se equipara a la aplicación repetitiva de un modelo fáctico.

3.3.2 Parménides de Elea (540 a.c. – 470 a.c.). Filósofo griego. Apenas se conocen datos fiables sobre la biografía de Parménides. Su doctrina, todavía objeto de múltiples debates, se ha reconstruido a partir de los escasos fragmentos que se conservan de su única obra, un extenso poema didáctico titulado Sobre la naturaleza. Afirma que el intelecto es el único medio para hacer al mundo cognoscible; un mundo que propone inmutable, eterno, perfecto, único e indivisible. El cambio para Parménides no es más que aparente: un disfraz.

Zenón (llamado también de Elea por pertenecer a la escuela Eleática y no por ser originario de dicha ciudad), discípulo de Parménides y cuyas ideas se conocen a través de la Física de Aristóteles, intentó dar sustento lógico a la teoría del uno inmutable al esgrimir sus ilustres paradojas que "demuestran" una de las consecuencias inmediatas de la ausencia de cambios: la imposibilidad del movimiento. Entre las paradojas, la más conocida de las contradicciones de Zenón la inmiscuye al arquetipo griego de virtud, el hombre atlético todo acción: Aquiles, y al prototipo universal de lentitud, la tortuga, confrontándolos en una injusta competencia de velocidad.

Aquí podemos ver, la existencia de un modelo puramente intuitivo, aunque serviría de una herramienta muy poderosa en la actualidad para explicar la densidad de los números reales. La pregunta que movilizaría la verdadera investigación seria ¿Sabia Parménides del impacto matemático que intuitivamente estaba despuntando?

Lo cierto es que el universo que se concibe a nivel de estos filósofos destacados radica meramente en las disertaciones sobre un universo de las ideas desconcretizadas, de un universo que parece obedecer a las mas intimas de las cuestiones del pensamiento, el cual ya sabemos que sin un método ni regulación de sus afirmaciones, puede fallar.

3.3.3 Aristóteles (384 a.c. – 322 a.c.). Aristóteles estará de acuerdo con Platón en que hay un elemento común entre todos los objetos de la misma clase, el universal, la Idea, que es la causa de que apliquemos la misma denominación a todos los objetos del mismo género; admitirá, por lo tanto, que ese universal es real, pero no que tenga existencia independiente de las cosas, es decir, que sea subsistente.

Tampoco es capaz de explicar el movimiento de las cosas, que era uno de los motivos de su formulación. Pronto se distanciará de la Academia fundando el Liceo, más basado en la experimentación que en la pura especulación. El modelo de cosmos propuesto por el filósofo se basará en el de Eudoxio, único capaz de poder explicar, si bien no satisfactoriamente, los movimientos retrógrados de los planetas; pero para corregir estas imperfecciones y basándose en sus experimentos, introducirá en este modelo nuevas esferas cristalinas hasta alcanzar un total de 54.

Con Aristóteles se dejará ya claro y de forma definitiva conceptos como la esfericidad de la tierra y del universo, el origen de los eclipses y el movimiento de los planetas (a través de las esferas de éter en donde se hayan), no obstante también quedará fijado un modelo homocéntrico erróneo que se mantendrá en la cultura y la ciencia occidental hasta el Renacimiento, debido, entre otras circunstancias, a que los escolásticos de la Edad Media se hacen eco de sus formulaciones y las toman casi como un dogma.

Lo que hemos de destacar en el modelo Aristotélico, es precisamente la necesidad de experimentar, de manera que nos podemos aventurar a pensar que ya se estaba gestando un modelo procedimental, propio de las experiencias reproducidas en la experimentación, no la sujeción a las disertaciones cosmogónicas que anida aun en las mentes de los modelos facticos propios de las creencias que unen al hombre con sus divinidades.

3.3.4 Euclides (325 a.c. – 265 a.c.). Euclides es, sin lugar a dudas, uno de los tres mayores matemáticos de la Antigüedad junto a Arquímedes y a Apolonio. Quizás sea el más nombrado y también uno de Los mayores de todos los tiempos.

Se conoce poco de la vida de Euclides, sin embargo, su obra sí es ampliamente conocida. Todo Lo que sabemos de su vida nos ha Llegado a través de los comentarios de un historiador griego llamado Proclo. Sabemos que vivió en Alejandría, al parecer en torno al año 300 a.C. convocado por Tolomeo para fundar una escuela de estudios matemáticos llamada Primera Escuela de Alejandría. Por otra parte también se dice que estudió en la escuela fundada por Platón. El nombre de Euclides está indisolublemente ligado a la geometría, al escribir su famosa obra Los Elementos. Este es el libro más famoso de la historia de la matemática. Esta obra está constituida por trece libros, cada uno de los cuales consta de una sucesión de teoremas y en él se exponen las bases esenciales de la geometría.

A veces se añaden otros dos, los libros 14 y 15 que pertenecen a otros autores pero por su contenido, están próximos al último libro de Euclides.

Básicamente el modelo euclidiano destaca un nivel de rigurosidad a la hora de ordenar y darle bases epistemológicas a la organización de una geometría que describe con bases conceptuales claras la construcción de la misma.

3.3.5 Descartes (1596 d.c. – 1650 d.c.). Antes de la aparición de las ideas de Descartes y su racionalismo, la comprensión filosófica de la Naturaleza y el hombre desde la Edad media, se basaba en las categorías Platónico-Aristotélicas de las que se sirvió el cristianismo para combinar el pensamiento religioso con el racional. Con el Renacimiento, el cambio en los horizontes del pensamiento filosófico y científico se hace latente y se produce un enfrentamiento con la línea de pensamiento escolástico, que ha quedado relegada al quedar cortas sus miras ante los nuevos problemas inquisitivos a los que se enfrenta la humanidad. Se pone en duda la autoridad académica y eclesiástica, el sentido común y los datos de los sentidos.

Se hace necesaria la búsqueda de la verdad por medio de la investigación, así como por un método demostrativo, eliminando las fuentes de error y subjetividades, y de forma constructiva descubrir la esencia de las cosas a partir de la experiencia. Tomando como modelo científico las matemáticas con su sistema axiomático y su método hipotético-deductivo. Descartes va a intentar un camino de seguridad en medio de la duda.

Los métodos existentes solo llevan a la controversia entre los hombres, sus razonamientos habituales y difíciles, nos llevan al convencimiento íntimo de la verdad, se introduce la duda. Descartes busca un método por el cual la mente capte no sólo la verdad, sino la certeza de que no puede ser de otra manera. Es allí donde el hombre por primera vez “sabe que sabe”

Este método lo encuentra en los geómetras, e intenta aplicarlo a la filosofía, un método que le permite llegar a conclusiones ciertas y no meramente probables. Con el auge de las ciencias empíricas (experiencia), sobre todo con las Matemáticas, como modelo científico de certeza y exactitud, la Filosofía intenta aplicar un método filosófico que pueda generar verdad y certeza. ¿Es posible que la Filosofía pueda tener un método que le lleve a la certeza, lo mismo que las Matemáticas?

En el modelo de Descartes podemos observar claramente un procedimiento que permita la obtención de los resultados demostrados y demostrables, a nuestro modo de ver se funden los modelos conceptual y procedimental de una manera que podríamos tildar por primera vez de “artística” ya que Descartes logra matematizar el espacio.

Hasta ahora, hemos podido dilucidar que el proceso intimo que subyace al de modelación en cada uno de los autores tratados tiene como común denominador el dar respuesta a las condiciones propias sobre las que el hombre se indaga, (y que no puede dar respuesta sistemática por simple observación) o el de modificar las que se han establecido como consecuencia de modelos anteriores.

3.4 Modelo matemático. Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o un problema realista, abstrayendo la realidad, lo denominamos modelo Matemático. Así pues, la matemática, con su arquitectura, permite, por un lado la elaboración de modelos matemáticos, lo que posibilita una mejor compresión, simulación y previsión del fenómeno estudiado. Un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc.

Por otro lado, cuando se propone un modelo, éste proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno. Sin embargo, no siempre tales aproximaciones están de acuerdo con la realidad. Sea como sea, un modelo matemático retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada.

3.5 Matematización. Es el proceso de construcción de un modelo matemático. Matematizar una situación real, implica utilizar la matemática para construir un modelo; también es razonar matemáticamente para enfrentar una situación y resolverla. Lo importante es aprender a transformar, dominar e interpretar la realidad concreta o parte de ella, con la ayuda de la matemática. Mediante la matematización de situaciones se logra dar a la matemática su verdadero valor pragmático, lo que se constituye en una utilidad mucho más importante que la del simple cálculo. Para matematizar es necesario la formulación lógica y ordenada de los hechos, el análisis agudo de la situación, un adecuado uso del lenguaje, la búsqueda de analogías entre ésta y otras situaciones y el ordenamiento progresivo del razonamiento.

3.6 La concretización. Es el proceso de transferir un modelo matemático a la realidad. Es en la concretización donde se valida el modelo, verificando sus alcances al tiempo que reproduce el fenómeno abstraído.

Es importante anotar que el impacto didáctico de la concretización, es definitivo a la hora de estudiar el comportamiento del mundo que nos rodea, ya pone al alcance de los estudiantes los fenómenos que de otro modo no podrían ser estudiados. Tanto la matematización como la concretización deben ir desarrollándose y comprobándose mutuamente en un proceso dialéctico continuo y cada vez cualitativamente superior. Esta interacción del ciclo matematización-concretización obliga a una evolución del aprendizaje en el terreno de la matemática originando sucesivas situaciones que permitan una evolución del conocimiento y dominio de la realidad.

3.7 Modelación matemática. Según Bassanezi (2002) La modelación matemática es un proceso dinámico en su obtención y validación, es una forma de abstracción y generalización con la finalidad de previsión de tendencias. *La modelación consiste esencialmente en el arte de transformar situaciones de la* *realidad en problemas matemáticos cuyas soluciones deben ser interpretadas en el lenguaje usual*. Por ello la modelación es eficiente a partir del momento en que se hace consciente que estamos siempre trabajando con aproximación de la realidad o sea sobre un sistema, subsistemas de otro más grande, o una parte de él.

3.8 Fases de la modelación. Bassanezi propone cinco fases para la construcción de un modelo, las cuales encontramos íntimamente relacionadas con las fases de la propuesta de Van Hiele, por ello, mas adelante presentaremos un paralelo entre estas.

(1) La experimentación: es una actividad esencialmente de laboratorio, donde se procesa la obtención de datos. Los métodos experimentales casi siempre son dictados por la propia naturaleza del experimento y/o objetivo de la investigación.
(2) Abstracción: Es el procedimiento que debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos. En esta fase se busca establecer selección de las variables, problematización o formulación a los problemas teóricos en un lenguaje propio del que se esté trabajando, formulación de hipótesis y simplificación de datos.
(3) Resolución: el modelo matemático es obtenido cuando se sustituye el lenguaje natural de las hipótesis por un lenguaje matemático coherente y como un diccionario, el lenguaje admite sinónimos que traducen los diferentes grados de sofisticación del lenguaje natural.
(4) Validación: es el proceso de aceptación o no del modelo propuesto. En esta etapa los modelos junto con las hipótesis que le son atribuidas deben ser analizadas en confrontación con los datos empíricos, comparando su solución y previsiones con los valores obtenidos en el sistema real.
(5) Modificación: algunos factores ligados al problema puede generar un rechazo o aceptación de los modelos.

3.9 El modelo de Van Hiele. A continuación se presenta la versión simplificada por Hoffer de los niveles de pensamiento[2], tal como fueron aplicados por Van Hiele a la geometría, los cuales nos sirven como punto de partida para caracterizar a los estudiantes, una vez se haya aplicado la prueba diagnóstica asociada al concepto de fracción.

(1) Visualización: Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global, pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras.
(2) Análisis: Los alumnos analizan las propiedades de las figuras, pero no son capaces de interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades.
(3) Clasificación: Los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades, pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.
(4) Deducción: Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro, pero no reconocen la necesidad del rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.
(5) Rigor: Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor. Los alumnos comprenden las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

3.10 Las fases del aprendizaje. Con el fin de ayudar al alumno a pasar de un nivel de pensamiento dado al nivel inmediatamente superior, los Van Hiele hicieron una propuesta de carácter prescriptivo se debe seguir al impartir la instrucción correspondiente. Dicha propuesta se compone de cinco fases de

[2] Aunque la clasificación de los niveles de pensamiento elaborada por Van Hiele, se apoya en la geometría, no representan dificultad para definir descriptores asociados al pensamiento métrico.

aprendizaje, al final de las cuales el alumno habrá alcanzado el nuevo nivel de pensamiento.

La necesidad del aprendizaje para poder progresar en los niveles de pensamiento, fue establecida por P. van Hiele en 5 fases de aprendizaje:

(1) Indagación: El maestro sostiene un dialogo con los alumnos acerca de los objetos de la materia que se va a estudiar, lo que le permite conocer las interpretaciones que los alumnos les dan a las palabras. En esta fase se prepara el terreno conceptual para el estudio posterior.
(2) Orientación dirigida: El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos pueden tomar conciencia de los objetivos que se persiguen y se familiarizan con las estructuras características.
(3) Explicitación[3]: Los estudiantes refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. En esta fase, los alumnos empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio, a partir del cual podrán operar con eficacia en la solución de los problemas.
(4) Orientación libre: Los alumnos encuentran en esta fase tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes. Esto les permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas. Los alumnos llegan a hacer explicitas muchas de las relaciones entre los objetos de estudio cuando se les estimula a orientarse por sí mismos en el campo de investigación.
(5) Integración: Los alumnos revisan en esta fase los métodos que tienen a su disposición y lanzan una mirada de conjunto, con lo cual se busca que

[3] La explicitación no debe confundirse con las explicaciones dadas por el maestro, pues lo esencial en esta fase son las observaciones que los estudiantes formulan explícitamente más que las lecciones que reciben.

unifiquen los objetos y las relaciones y que los asimilen internamente en un nuevo dominio de pensamiento. La ayuda del maestro en esta fase consiste en proporcionar a los alumnos algunas vistas panorámicas de aquello que ellos ya conocen, teniendo cuidado de no presentarles ideas nuevas o discordantes.

Dentro del desarrollo de las 5 fases se busca que los estudiantes se den cuenta de sus capacidades, de sí mismos, de los que pueden lograr; para ello, la idea del reconocimiento de sus responsabilidades es fundamental. Ello implica básicamente acudir al insight.

3.11 El insight. Es la capacidad de darse cuenta, es tomar conciencia en forma súbita de una realidad interior, que normalmente había permanecido inconsciente. Es un poco como la "palmada en la frente" o cuando decimos "se me iluminó", aunque con un sentido más psicológico. Es una nueva comprensión, que conlleva normalmente cierta emocionalidad. Es conectar una vivencia, una conducta, un rasgo de personalidad o forma de ser, con su significado y/o su origen, lo que permite ampliar la conciencia y acceder a un mayor conocimiento de sí mismo”

Fundamentados en lo anterior buscaremos privilegiar:

(1) Procedimientos que resulten significativos con base en experiencias alusivas a la cotidianidad.
(2) Actividades o problemas en cuya realización deba recurrirse necesariamente a los procedimientos.
(3) La observación, de manera que los estudiantes sean capaces de discriminar los elementos variables y los que no lo son, en un conjunto de situaciones problema.

(4) La autonomía, de modo que los estudiantes se hagan consientes de su propio proceso.

(5) La interacción, con el objeto que los alumnos sean capaces de hacer una puesta en común de sus ideas y de sustentarlas.

(6) La necesidad de que los alumnos acudan a su bagaje de preconceptos con el ánimo de que los fortalezcan o reestructuren, al tiempo que los interconectan asimilando nuevos conocimientos.

3.12 la modelación matemática y las fases del aprendizaje de Van Hiele. Recordemos que Bassanezi propone cinco fases para la construcción de un modelo, las cuales encontramos íntimamente relacionadas con las fases de la propuesta de Van Hiele, por ello, para el diseño y aplicación de las actividades que nos darán cuenta del proceso de modelación matemática de los estudiantes, decidimos articularlas y presentarlas en el siguiente cuadro comparativo.

Fases para la modelación Bassanezi	Fases de aprendizaje Van Hiele
Experimentación	Indagación
Abstracción	Orientación dirigida
Resolución	Explicitación
Validación	Orientación libre
Modificación	Integración

4. PROBLEMATIZACIÓN

Después del tiempo que compartimos a lo largo de nuestra práctica profesional con los grupos de estudiantes y el análisis de las pruebas Saber e ICFES, pudimos evidenciar que la modelación no es un asunto preponderante dentro de la dinámica propia al interior de la clase de matemática; situación que nos impulsó a orientar nuestros esfuerzos hacia el desarrollo de habilidades, que permitieran a los estudiantes elaborar por sí mismos modelos matemáticos de acuerdo a su nivel de aprendizaje, para que respondieran a las demandas de la escuela al tiempo que los extrapolan a su vida cotidiana.

¿Por qué esta situación representa un problema?

Porque la contextualización de los conocimientos escolares conduce a la comprensión y aplicación de los mismos, y es precisamente la modelación, una de las opciones más favorables para potenciar dicha comprensión y contextualización. Naturalmente, siempre será un problema a futuro el hecho de que los estudiantes no logren comprender los contenidos de la escuela, con el agravante de que cada año el problema tenderá a crecer, dado el carácter acumulativo[4] del currículo escolar.

¿Qué ocurre si se resuelve este problema?

Pues creemos que, en la medida que los estudiantes logren darle coherencia y cohesión a los contenidos de la escuela, estarán en condiciones de resignificarla, es decir, se derivarían múltiples soluciones; una de ellas, puede ser la identificación de la escuela como una opción de vida, otra, la extrapolación de la

[4] El currículo está diseñado para que un conocimiento sucesor, contenga al antecesor a manera de prerrequisito.

matemática a la vida diaria, pero la más importante, la adquisición de elementos básicos, que le permiten al estudiantes darle lectura al mundo en que vive de manera analítica, al tiempo que lo modela.

¿Qué ocurre si no se resuelve este problema?

Pues a corto plazo, seguiremos teniendo estudiantes que deben acudir a los aprendizajes memorísticos, para dar cuenta de la evaluación y promoción escolar. A largo plazo, se tendrá una escuela completamente desarticulada a los contextos particulares a la cual subyace[5], sin mencionar el hecho de que, muchos de los estudiantes no lograran dar cuenta de las demandas de la escuela, traduciéndose esto en deserción masiva.

4.1 Formulación del problema. Surge entonces la pregunta de investigación:

¿CÓMO APROXIMAR A LOS ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA JAIME ARANGO ROJAS, APLICANDO LA ESTRATEGIA DE DESARROLLO DE VAN HIELE, A QUE DESARROLLEN MODELOS MATEMÁTICOS?

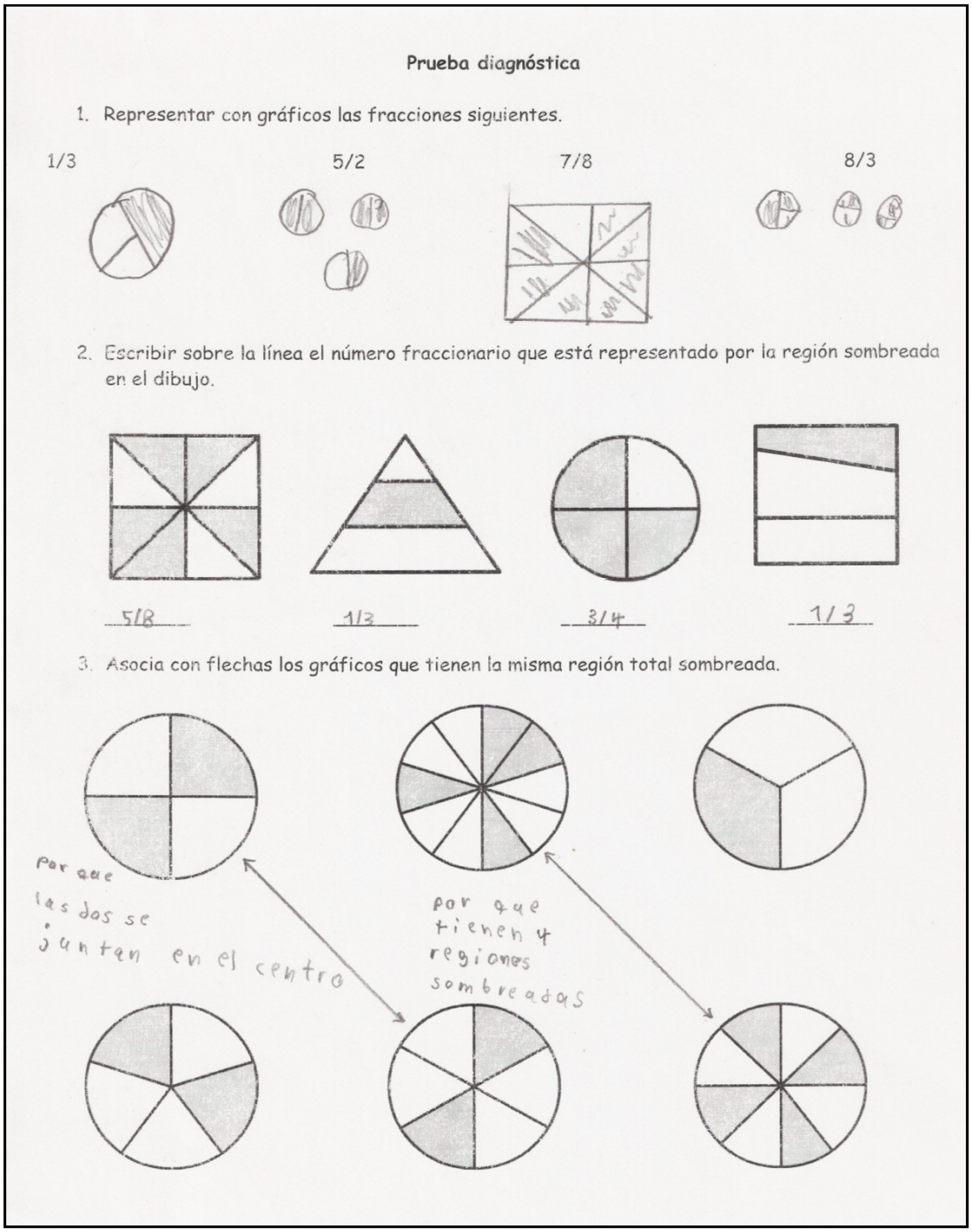
Para iniciar nuestro trabajo hacia la aproximación a la modelación con los estudiantes, diseñamos y aplicamos una prueba diagnóstica específica para identificar el nivel de pensamiento en el cual se encuentran éstos, con respecto a la caracterización establecida por Van Hiele y al trabajo con fracciones; ya que es un tema pertinente de acuerdo a la exigencias académicas enunciadas desde los estándares curriculares de matemática para el grado cuarto de la básica primaria, donde están ubicados los alumnos con quienes realizamos nuestra práctica profesional.

---

[5] Cabria preguntarse ¿Cuál sería entonces la función de la escuela?

4.2 Pruebas diagnósticas. A continuación presentamos algunas muestras significativas de las pruebas diagnosticas, con su correspondiente análisis general, las cuales nos permitirán caracterizar a los estudiantes más adelante.

Muestra A



Prueba diagnóstica

1. Representar con gráficos las fracciones siguientes.

1/3 5/2 7/8 8/3

2. Escribir sobre la línea el número fraccionario que está representado por la región sombreada en el dibujo.

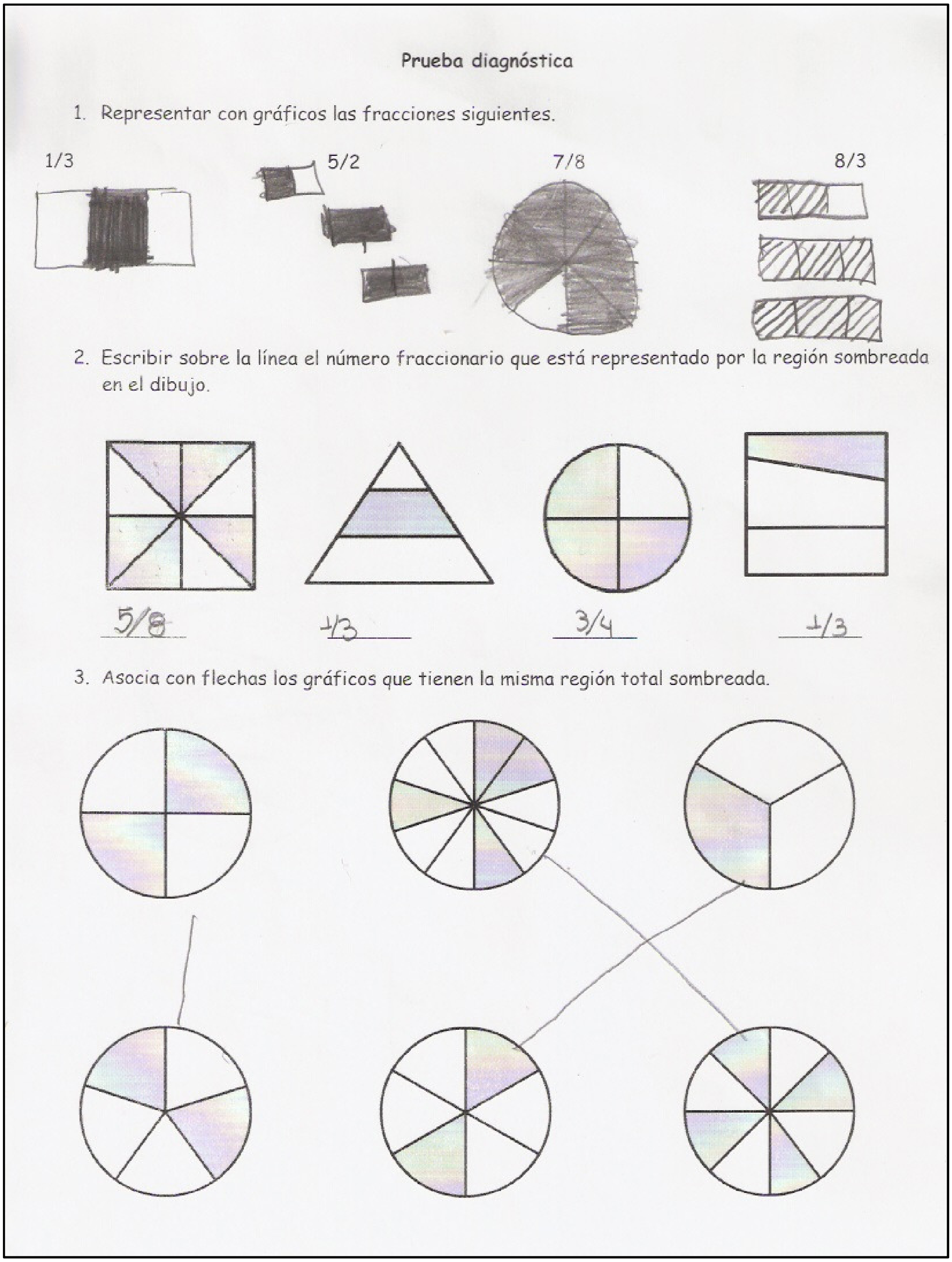
5/8 1/3 3/4 1/3

3. Asocia con flechas los gráficos que tienen la misma región total sombreada.

Por que las dos se juntan en el centro

por que tienen 4 regiones sombreadas

Muestra B



Prueba diagnóstica

1. Representar con gráficos las fracciones siguientes.

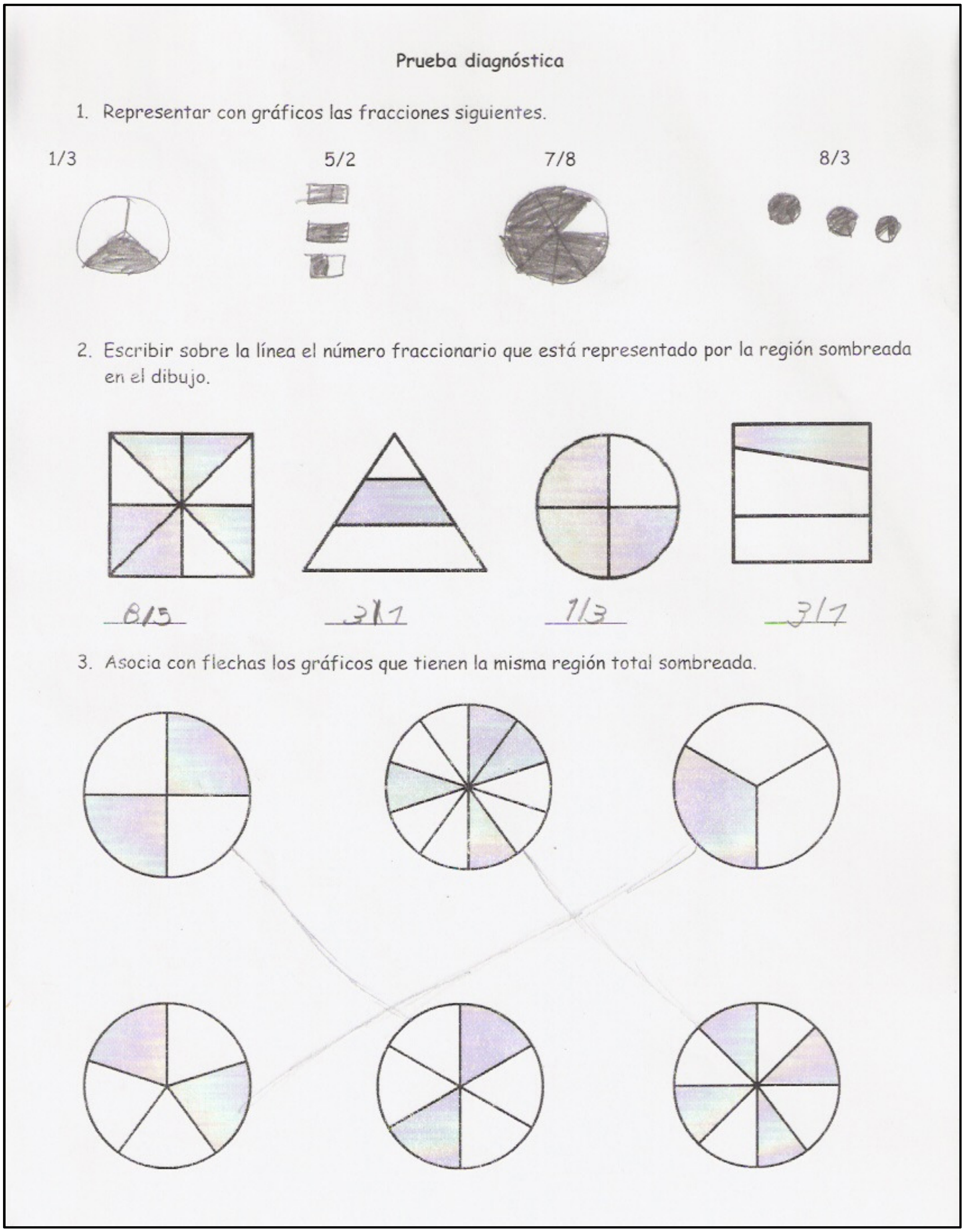
1/3 5/2 7/8 8/3

2. Escribir sobre la línea el número fraccionario que está representado por la región sombreada en el dibujo.

5/8 1/3 3/4 1/3

3. Asocia con flechas los gráficos que tienen la misma región total sombreada.

Muestra C



Prueba diagnóstica

1. Representar con gráficos las fracciones siguientes.

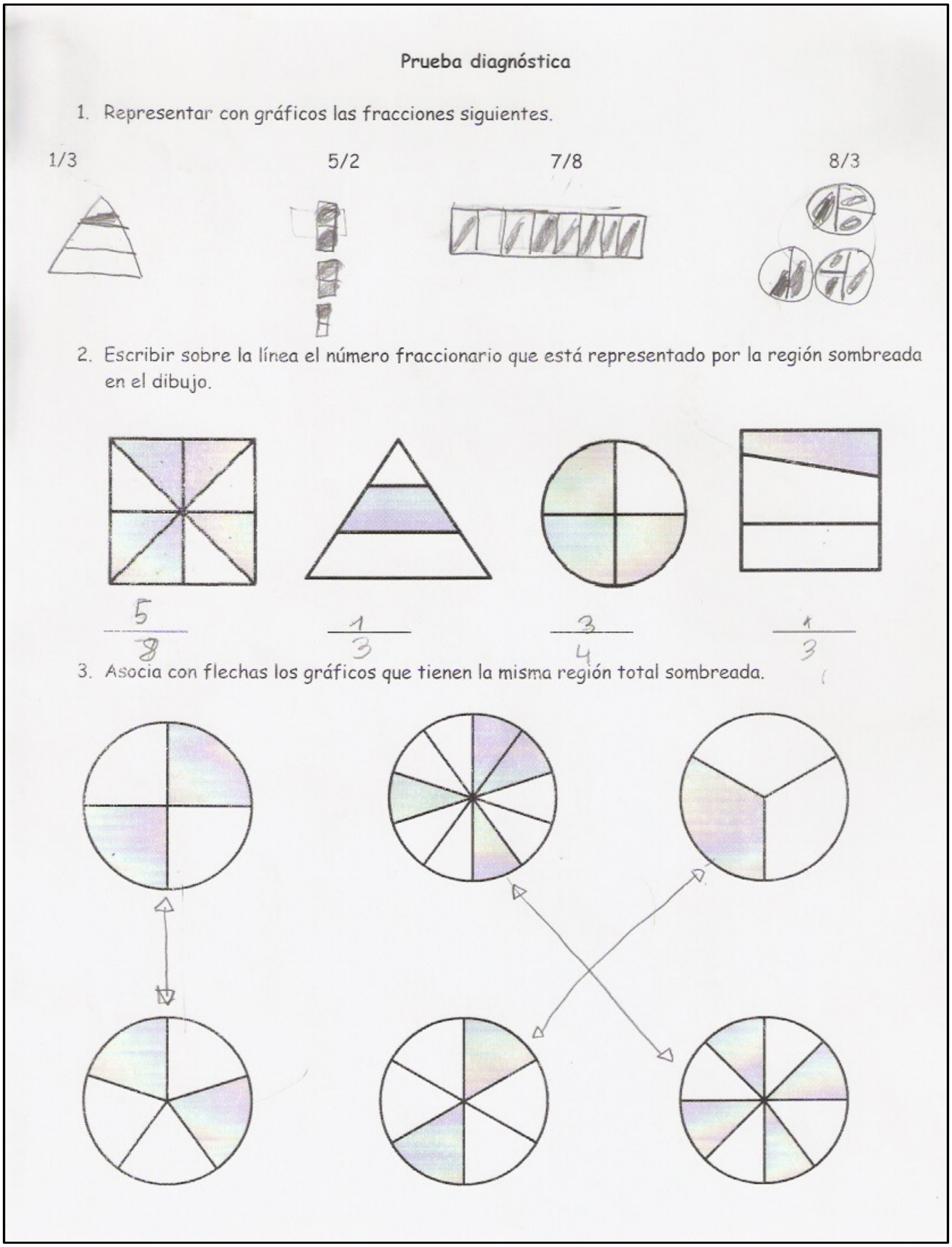
1/3 5/2 7/8 8/3

2. Escribir sobre la línea el número fraccionario que está representado por la región sombreada en el dibujo.

8/5 3/1 1/3 3/1

3. Asocia con flechas los gráficos que tienen la misma región total sombreada.

Muestra D



Prueba diagnóstica

1. Representar con gráficos las fracciones siguientes.

1/3 5/2 7/8 8/3

2. Escribir sobre la línea el número fraccionario que está representado por la región sombreada en el dibujo.

$\frac{5}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$

3. Asocia con flechas los gráficos que tienen la misma región total sombreada.

4.3 Caracterización cognitiva. Para la caracterización cognitiva, se diseñaron las pruebas diagnosticas teniendo como punto de partida los siguientes elementos:

(1) Los estándares de matemáticas para grado cuarto.
(2) Los lineamientos curriculares de matemáticas.
(3) La caracterización de los niveles de pensamiento según Van Hiele.

Con base en lo anterior, optamos por adoptar en nuestro trabajo el concepto de fracción, privilegiando el pensamiento métrico, dado que es uno de los conceptos más importantes que se abordan en cuarto grado, además de presentar dificultad a lo largo de la educación básica.

De acuerdo a la clasificación por niveles que realizan los Van Hiele y el desarrollo de los estudiantes, el cual pudimos evidenciar mediante la aplicación de la prueba diagnóstica, encontramos que éstos se hallaban en el nivel 2 (análisis).
Recordemos que en este nivel, según Van Hiele, *los alumnos analizan las propiedades de las figuras, pero no son capaces de interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades*. Lo que extrapolado a nuestro contexto particular-diagnóstico significa que *los alumnos asocian las partes en las que está dividida la fracción icónica con la figura en su totalidad, pero no son capaces de relacionar las proporciones entre las partes y el todo*[6]*.*

Basados en la adaptación anterior, establecimos que los estudiantes:

- Reconocen los términos de una fracción y los representan gráficamente.
- Reconocen los números fraccionarios, los leen y escriben.
- Analizan una fracción como parte todo.

---

[6] Para este proyecto de investigación, debimos adaptar, definir y articular (respectivamente) la propuesta de Van Hiele, los descriptores de modelación y los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas, a nuestro contexto particular.

- No comparan correctamente dos fracciones.
- No relacionan la proporción de las partes seleccionadas de la fracción como grafico, con lo que indica el número.
- No amplifican ni simplifican correctamente una fracción.

Lo que sigue, es conducir a los estudiantes, luego de la aplicación de dos actividades base que se presentarán más adelante y para las cuales se aplicarán las fases explicitadas también por Van Hiele, para que alcancen el nivel 3 (clasificación), a que elaboren modelos matemáticos; situación que se evidenciará con la aplicación de una tercera actividad.

Se espera que una vez aplicadas las actividades, los estudiantes avancen del nivel 2 (de análisis), según la clasificación de Van Hiele, al nivel 3 (de clasificación), en donde según Van Hiele, *los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades, pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones*. Lo que extrapolado a nuestro contexto particular significa que, *los alumnos relacionan las partes y las proporciones en las que está dividida la fracción icónica con la figura en su totalidad, además de extender tales proporciones a un proceso de medición básico*[7].

Basados en la adaptación anterior, definimos que los estudiantes podrán:

- Identificar correctamente un número fraccionario.
- Utilizar la fracción como representante de un proceso de cambio.
- Establecer el concepto de fracción equivalente y determinar cuando dos fracciones son equivalentes a una dada.
- Comparar y ordenar fracciones.
- Reconocer cuando una fracción es propia o impropia.

[7] Dentro de ésta propuesta investigativa, como elemento novedoso, se encuentra la extrapolación del concepto de fracción icónica, al de fracción como herramienta de medición.

- Simplificar y amplificar fraccionarios desde una propuesta grafica.
- Identificar el ángulo en situaciones de la vida cotidiana y puedan dibujarlo.
- Identificar las particiones de la unidad como patrón para medir ángulos.
- Desarrollar un modelo procedimental, que le sirva para solucionar situaciones cotidianas. Esto, dado que es en los procedimientos donde se puede evidenciar más claramente la estructuración y puesta en marcha de un modelo matemático.

4.4 Descriptores de modelación. Ahora, definimos formalmente los descriptores que nos permitirán evidenciar el paso del nivel de pensamiento 2 al 3[8], con base en los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas, que orientan las actividades para tal efecto, así como el nivel de modelación matemática alcanzado por los estudiantes.

4.4.1 Descriptores de nivel 2. Estándares relacionados:

- Interpretar las fracciones en diferentes contextos -medida, razones y cocientes. (Pensamiento variacional y sistemas analíticos)
- Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales (pensamiento métrico).
- Identificar el ángulo en situaciones de la vida diaria y dibujarlo. (Pensamiento geométrico)

Adaptación y definición:

- Reconoce los términos de una fracción y los representa gráficamente.
- Reconoce números fraccionarios los lee y escribe.
- Reconoce el círculo dentro del programa como una unidad punto de partida para medir, extendiendo esa cualidad a otras figuras.

---

[8] Según clasificación elaborada por Van Hiele y adaptación a nuestro contexto particular.

- Analiza de una fracción como parte todo.
- Sistematiza un camino para sumar y restar fracciones.
- Reconoce los diferentes tipos de ángulos gráficamente.
- Representa de manera icónica un ángulo.

4.4.2 Descriptores nivel 3. Estándares relacionados:

- Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa- peso, tiempo y amplitud angular) en diversas situaciones.(pensamiento métrico)
- Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones, (pensamiento métrico).
- Construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. (Pensamiento espacial y sistema geométrico).
- Identificar y explicar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras. (Pensamiento geométrico)

Adaptación y definición:

- Utiliza la fracción como representante de un proceso de cambio.
- Establece el concepto de fracción equivalente, sabe determinar cuando dos fracciones son equivalentes a una dada.
- Compara y ordena fracciones.
- Simplifica y amplifica fraccionarios.
- Identifica una fracción propia e impropia sin dudar.
- Reconoce con facilidad el camino más útil para solucionar situaciones cotidianas en donde se involucre el concepto de fracción.
- Compara y clasifica ángulos (agudo, recto, obtuso y llano)

- Asocia un ángulo generado por particiones iguales de la fracción icónica, a una fracción de la unidad.
- Sistematiza un camino para medir ángulos mediante la comparación de fracciones icónicas.
- Reconoce una unidad patrón de comparación.

5. OBJETIVOS

5.1 Objetivo general.

Aplicar una estrategia de enseñanza basada en la propuesta del desarrollo por fases de Van Hiele, que propicie el aprendizaje del proceso de modelación "matemática" por los estudiantes de cuarto grado de la básica primaria del Liceo Jaime Arango Rojas.

5.2 Objetivos específicos.

- Observar el proceso realizado por los estudiantes para resolver una situación de la vida real, a través de la aplicación de las fases de aprendizaje, que pretendemos los aproximen a un nivel de pensamiento superior.
- Construir los descriptores de nivel de apropiación de los procesos de modelación matemática, para determinar el nivel de modelación que alcanzan los estudiantes.
- Aplicar estrategias de intervención que propicien el proceso de modelación matemática en los estudiantes de cuarto grado de educación básica.
- Observar el nivel de progreso de los estudiantes en cuanto a la modelación matemática, con base en los descriptores planteados.
- Comparar el nivel de desarrollo en la construcción de modelos que poseen los estudiantes antes y después de la intervención didáctica.
- Orientar a los estudiantes hacia la adquisición de estrategias que les permitan modelar situaciones cotidianas, al tiempo que contextualicen los conocimientos escolares.

6. MARCO METODOLOGICO

En este apartado describimos el tipo de investigación realizada en nuestro proyecto de grado, lo mismo que la metodología empleada para la recolección de los datos estudiados, es decir, aquellos que nos permitieron concluir el nivel de modelación alcanzado por los estudiantes.

6.1 La investigación cualitativa. "La investigación cualitativa es aquella donde se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema. La misma procura por lograr una descripción holística, esto es, que intenta analizar exhaustivamente, con sumo detalle, un asunto o actividad en particular.

A diferencia de los estudios descriptivos, correlaciónales o experimentales, más que determinar la relación de causa y efectos entre dos o más variables, la investigación cualitativa se interesa más en saber cómo se da la dinámica o cómo ocurre el proceso en que se da el asunto o problema". Como lo manifiesta en la "investigación cualitativa", Dr. Lamberto Vera Vélez, p.1, documento electrónico.

Escogimos este tipo de investigación, dado que nos permite analizar a profundidad y de manera integral, el proceso de modelación realizado por los estudiantes al momento de solucionar un problema.

6.2 Cualitativa etnográfica. Dentro de la investigación cualitativa, encontramos una subdivisión de acuerdo a las características que la enmarcan. Nosotros optamos por la investigación de tipo cualitativa etnográfica, dado que combina tanto los métodos de observación participativa como las no participativas con el propósito de lograr una descripción e interpretación holística del asunto o problema a investigar, para nuestro caso, la modelación matemática. El énfasis es documentar todo tipo de información que se da en la solución de las pruebas que diseñamos, para orientar a los alumnos hacia el desarrollo de modelos matemáticos.

6.3 Instrumentos de recolección e interpretación de la información. Dentro de los instrumentos de recolección de información, se utilizaron fichas de observación, registro fotográfico y auditivo de eventos, fichas teóricas y entrevistas en profundidad alrededor de las actividades individuales realizadas a los estudiantes, en torno a la modelación.

Para rastrear el proceso y nivel de modelación matemática que alcanzaron los estudiantes, diseñamos cuatro pruebas, distribuidas de la siguiente manera:

(1) Diagnóstico, una prueba, que nos permitió caracterizarlos en un nivel de pensamiento, de acuerdo a los descriptores que adaptamos con base en la estrategia definida por Van Hiele y los estándares curriculares de matemáticas.
(2) Guiadas, dos pruebas con las cuales orientamos a los estudiantes hacia el desarrollo de modelos matemáticos, teniendo en cuenta el paso por cada una de las fases explicitadas por Van Hiele, equiparables a las fases de modelación referenciadas anteriormente.
(3) Modelación, dos pruebas, que nos permitieron seguir el proceso autónomo que realizaron los estudiantes, para dar cuenta de su solución. Es allí en donde analizamos el nivel de modelación al que llevaron, con base en los descriptores definidos antes.

Toda la información se recolectó mediante la observación directa y participativa, y posterior análisis de los procedimientos realizados por los estudiantes, durante la aplicación de las actividades.

6.4 Población y muestra. La población total sobre la que hicimos nuestra práctica, como se mencionó al principio, consta de los estudiantes de los grados 4A y 4B, del Liceo Jaime Arango Rojas, pero la muestra sobre la que se aplicaron las pruebas, fue de veinte estudiantes, diez de cada grupo elegidos de manera aleatoria. Esto, con el objeto de poder dar cuenta del tipo de investigación seleccionada (cualitativa etnográfica)

Cabe recordar que en la primera fase de la investigación, durante la etapa diagnóstica, logramos identificar los siguientes elementos determinantes en el contexto educativo de los estudiantes de la muestra:

(1) Predominancia de un modelo pedagógico conductista.
(2) Poco trabajo que potencializara la modelación matemática.
(3) Poco apoyo familiar en las tareas extra clase, para estudiantes.
(4) Disposición completa para el desarrollo del presente proyecto, por parte de los maestros cooperadores y administrativos, de la Institución Educativa Jaime Arango Rojas.
(5) Linealidad en los contenidos de matemática, de acuerdo a los lineamientos del MEN de Colombia.
(6) Ausencia de actividades institucionales, que potencien el desarrollo de proyectos matemáticos contextualizados. Como por ejemplo olimpiadas, talleres, concursos, etc.
(7) Predisposición por parte de los estudiantes, *frente al carácter complicado e inservible*[9] de la matemática.

6.5 Evaluación de la modelación. La evaluación fue implementada a la luz de los descriptores de nivel de pensamiento y de modelación, construidos, adaptados y articulados, teniendo como referencia la estrategia de Van Hiele y los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas; primero

[9] Esta situación se evidenció a partir de entrevistas individuales, registradas en medio digital, durante la fase diagnostica.

para caracterización en la etapa diagnóstica, luego, durante la aplicación de las pruebas base, y al final, para establecer el nivel de modelación que alcanzaron los estudiantes.

6.6 Directrices a tener en cuenta. Con el ánimo de rastrear el proceso de modelación al que pudieron llegar los estudiantes, privilegiamos la observación sobre la participación en tales procesos, registrando:

1. El reconocimiento de acciones que constituyen un procedimiento, prueba oral y de respuesta guiada.
2. La habilidad para generalizar un determinado procedimiento, observación de formas de proceder.
3. La demostración del grado de automatización del procedimiento, prueba de respuesta guiada.
4. La aplicación del procedimiento a situaciones particulares, sustentación por parte del estudiante.

7. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

Para la implementación de la propuesta didáctica, se diseñaron en total tres actividades principales, en la primera, denominada “Modelando con las tortas fraccionarias”, se da a conocer el programa que se creó para apoyar el concepto de fracción, desde la interactividad que permite éste; al tiempo que se va guiando implícitamente a los estudiantes hacia el desarrollo de un modelo matemático, paralelamente a la consecución de las fases descritas por Van Hiele, inmersas en la actividad.

En la segunda actividad, denominada “Midiendo ángulos con las tortas fraccionarias”, se buscó complementar la actividad anterior, permitiendo que los estudiantes reprodujeran el proceso de modelación por sí mismos, al tiempo que se conectaban al concepto de fracción con el de medición.

Al final, en la tercera actividad, se planteó una situación en donde los estudiantes debieron acudir al concepto de fracción para solucionarla, pero esta vez, sin ayuda del maestro. Además, se les pidió a los estudiantes, que justificaran de manera escrita el proceso por el cual llegaron a la solución. Es en esta última actividad, en donde se intentó, a la luz de los descriptores y análisis del proceso descrito en la solución dada por los estudiantes, determinar el nivel de modelación que alcanzaron.

Los descriptores que se definieron para la evaluación y análisis al final de las actividades, fueron los siguientes:

- Utiliza la fracción como representante de un proceso de cambio.
- Establece el concepto de fracción equivalente, sabe determinar cuando dos fracciones son equivalentes a una dada.
- Compara y ordena fracciones.

- Simplifica y amplifica fraccionarios.
- Identifica una fracción propia e impropia sin dudar.
- Reconoce con facilidad el camino más útil para solucionar situaciones cotidianas en donde se involucre el concepto de fracción.
- Compara y clasifica ángulos (agudo, recto, obtuso y llano)
- Asocia un ángulo generado por particiones iguales de la fracción icónica, a una fracción de la unidad.
- Sistematiza un camino para medir ángulos mediante la comparación de fracciones icónicas.
- Reconoce una unidad patrón de comparación.

7.1 Modelando con las tortas fraccionarias.

El manejo de los fraccionarios siempre ha sido “el dolor de cabeza” de todos los estudiantes, desde la primaria hasta la universidad, tal vez porque los procesos que se llevan a cabo durante las relaciones surgidas de las operaciones entre los mismos, nunca se alcanza verdaderamente a dilucidar.

Creemos que una primera aproximación geométrica, en función de espacio que ocupa cada fracción representada por medio de una ficha “plana”, conducirá más fácilmente a los estudiantes a comprender el manejo con los fraccionarios y a ser capaces de modelar situaciones en donde se evidencia una descomposición (inicialmente como parte todo) para aplicar el concepto de fracción.

Si bien las tortas fraccionarias ya existen, lo mismo que una serie de actividades para potenciar su uso, nuestra diferencia radica en (como lo diría Miguel de Guzmán) la aplicación tecnológica que le damos al concepto, en la medida que diseñamos un pequeño programa en macromedia flash, que simula las tortas fraccionarias, permitiendo un sencillo manejo de las mismas.

7.1.2 Fase de indagación

"Mi mama me ha mandado a la tienda"
Mediadores: tiza, tablero, anécdotas de los estudiantes, simulación de la tienda.

¿Qué hacemos?

El maestro comienza a preguntarles a los alumnos acerca de los mandados que diariamente muchos de ellos hacen para comprar productos en la tienda.
La idea es hacer una lista en el tablero, de varios de los productos que los alumnos enuncian, junto con su unidad de medida. El objetivo es identificar dentro de esas unidades de medida las palabras: un(o), medio(a), un cuarto, etc.

Preguntas

- ¿Y qué significa un medio de, un cuarto de etc.?
- ¿Podemos sacarle mitad, tercio, cuartos etc. a todos los productos que compro en la tienda? ¿porque?
- ¿De cuantos medios, tercios, cuartos, etc. se compone un producto de la tienda?
- ¿Qué obtengo si uno medios, tercios, cuartos, etc. de diferentes productos de la tienda?
- ¿Cuáles son los productos que se pueden comprar en la tienda por medios, tercios, cuartos, etc.? ¿Por qué?

Ahora pensemos en lo siguiente… en la tienda de Don Luis hay:

- ✓ 2 libras de arroz.
- ✓ 5 panelas.
- ✓ 8 paquetes de arepas.
- ✓ 3 bolsas de leche.
- ✓ 4 quesitos.

Si mi mama me manda a la tienda a comprar:

- ✓ $\frac{3}{2}$ de libra de arroz.
- ✓ $\frac{1}{4}$ de panela.
- ✓ $\frac{4}{2}$ de bolsa de leche.
- ✓ $\frac{3}{4}$ de quesito.

¿Cuánto le queda a Don Luis en la tienda después de la compra? ¿Cómo hago para saberlo?

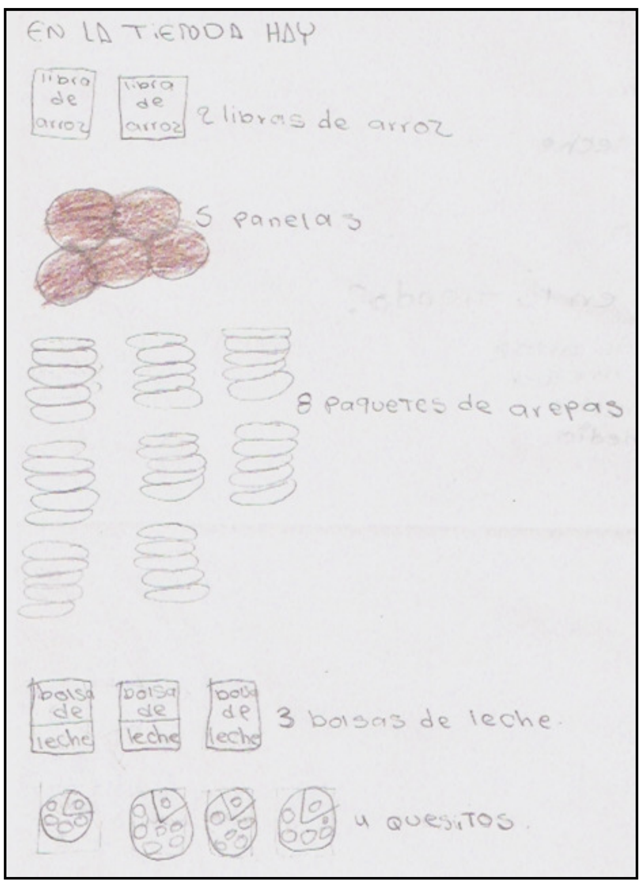
7.1.2.1 Aplicación de fase de indagación

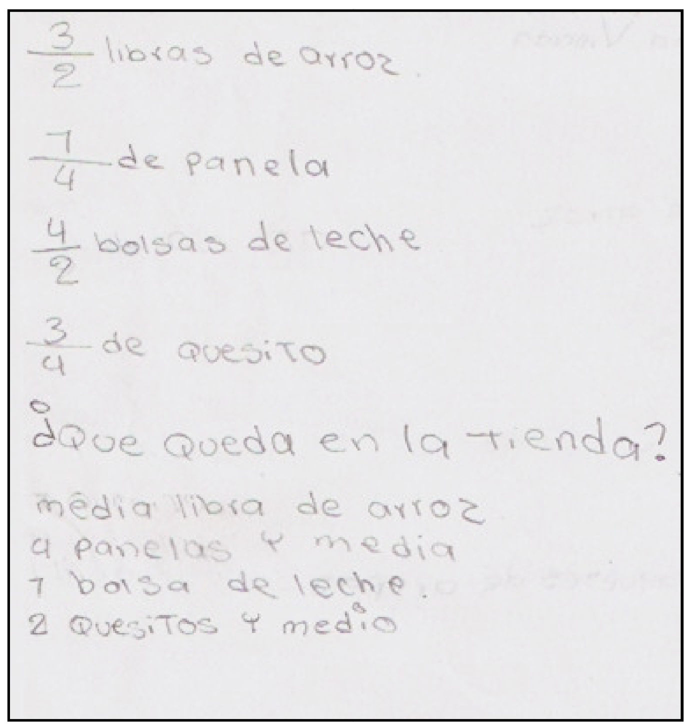
“Mi mama me ha mandado a la tienda”

A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

Muestra A

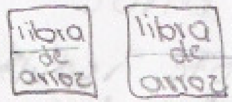




Muestra B

El la Tienda hay

2º libras arroz



5º panelas

8º paquetes de arepas

3º bolsas de leche

4º Quesito

debo comprar

$\frac{3}{2}$ libra de arroz

$\frac{1}{4}$ de panela

$\frac{4}{2}$ bolsa de leche

$\frac{3}{4}$ quesitos

¿QUE QUEDA EN LA TIERDA

solución

medio libra de arroz

hami me dio este resultado porque
yo parti las dos bolsas de arroz
en medio me quedaron 4 medios
y de esos 4 saque 3 y me
quedo media libra de arroz.

mequedaron 4 panelas
porque yo parti una panela
en cuartos y me quedaron
4 panelas.

me queda un quesito
porque yo parti 3 quesitos
en cuartos y me quedo
un quesito.

me queda una bolsa de leche
porque yo parti dos bolsas de
leche en medios y me quedo
una bolsa de leche

7.1.2.2 ¿Qué encontramos?

- Con respecto a la muestra A, vemos que los estudiantes realizaron una representación pictórica de los productos de la tienda para luego servirse de ellos en la medida que hicieron particiones de los mismos, pudiendo seleccionar las partes compradas. Aunque en esta prueba hay saltos grandes en cuanto a un proceso más detallado que permitiera sustentar la solución, es claro que los gráficos permitieron afrontar la situación, permitiendo llegar a su solución. Es claro, además que la asociación con las representaciones numéricas de las fracciones compradas, concuerda con las particiones que los estudiantes hicieron de los productos. Por último, aunque durante la prueba les solicitamos a los estudiantes que describieran con sus palabras el camino que les permitió llegar a la solución, pues no aparece dicha descripción en la muestra A.
- Con respecto a la muestra B, vemos también una asociación pictórica con las cantidades de producto que hay en la tienda junto con particiones que permiten determinar la cantidad comprada. Pero en esta ocasión hay una descripción del proceso, lo que permite evidenciar el camino que siguió la estudiante para poder solucionar la situación. Aunque algunas de las soluciones no concuerdan con lo que se planeó, es claro que el trabajo de fracción como parte-todo predomina en esta prueba. Lo interesante es la partición comprada que asume la estudiante de ese todo ya que parece estar tomando 1/4 de cada quesito, asumiéndolo como lo restante.

7.1.3 Fase de orientación dirigida

"Partiendo y repartiendo"

7.1.3.1 Primer momento

Mediadores: video beam, computador, pantalla.

Apoyados en el programa computacional desarrollado, el maestro les presenta a todos los estudiantes mediante la ayuda de un video beam, la primera aproximación al concepto de fracción como parte todo, esto nos permitirá que los estudiantes tengan la posibilidad de seguir cuidadosamente las indicaciones que se dan.

¿Qué veremos allí?

En el primer pantallazo ellos podrán observar una unidad representada por un circulo ubicado en la parte superior derecha (con fondo blanco); sobre éste se realizarán los primeros análisis que nos conducirán hacia las equivalencias, amplificación y simplificación, pero visto netamente desde el punto de vista geométrico. Verán además en el resto de la interfaz cinco círculos del mismo tamaño de la unidad en blanco, pero estos divididos en medios, tercios, cuartos, quintos y sextos.

De lo que se trata inicialmente es de explicarles como es el manejo básico del programa (como arrastrar y soltar), pues, para poder realizar las operaciones requeridas, ellos deben poder mover las fracciones de unidad en la pantalla correctamente.

¿Qué hacemos ahora?

Una vez explicado el funcionamiento del programa, les pedimos alternadamente a estudiantes que pasen y que nos ayuden a realizar las operaciones que a continuación describimos:

a. Vamos a “trasladar” las fracciones en que se dividieron las unidades sobre la unidad en blanco.

Creemos que esto los conducirá de primera mano a comprender que una unidad se puede expresar como 2/2, 3/3, 4/4… cosa que resultaría sumamente fructífero a la hora de comprender que todo numero natural se puede expresar como una fracción de la forma n/1.

Preguntas

- ¿Caben exactamente?
- ¿Por qué?
- ¿Cómo son las partes en que están fraccionadas las tortas con las que lleno la que está en blanco?
- ¿Tienen el mismo tamaño? ¿Cómo hacemos para saberlo?
- ¿Qué podemos concluir?

b. Vamos ahora a “llenar” la mitad derecha de la unidad en blanco con las partes (que se pueda) de una de las fraccionadas.

Creemos que esta operación los conducirá al concepto de equivalencia mediante una situación también geométrica.

Preguntas

- ¿Podemos llenar el espacio restante con las fracciones de otra de las unidades partidas?
- ¿Cómo deben ser las fracciones para que puedan llenar las dos mitades de la unidad?
- ¿Puedo llenar la unidad con todas las partes de diferente tamaño? ¿Por qué?
- ¿Qué podemos concluir?

Hay otra situación implícita de la que se puede sacar mucho provecho, y es la idea de que al realizar la equivalencia podemos saltar al concepto de amplificación y simplificación, en la medida de que comprendan que amplificar resulta en el seccionamiento en mayor número de partes de unas partes iníciales y viceversa para la simplificación.

c. Ahora vamos a sumar pedacitos de la unidad para ver que obtenemos; podemos comenzar con las del mismo tamaño para introducir el concepto de fracción homogénea, lo mismo para los de diferente tamaño buscando equipararlos a pedacitos iguales a fin de poderlos sumar… eso será la suma de heterogéneas.

Durante este proceso se debe ir incorporando un lenguaje más formal en torno a los nuevos conceptos.

Preguntas

- ¿Qué ocurre si partimos una fracción en partes aun más pequeñas e iguales?
- ¿Cómo se llamarían estas nuevas partes?

- ¿Qué pasa si uno de nuevo todas estas partes más pequeñas?
- ¿Cómo podemos definir una fracción equivalente?
- ¿Cómo podemos definir una fracción homogénea?
- ¿Cómo podemos definir una fracción heterogénea?

Ahora pensemos en lo siguiente… ¿Cómo podemos representar las siguientes fracciones?:

- ✓ 1/5
- ✓ 3/2
- ✓ 4/8
- ✓ 9/3
- ✓ 1/3
- ✓ 2/4

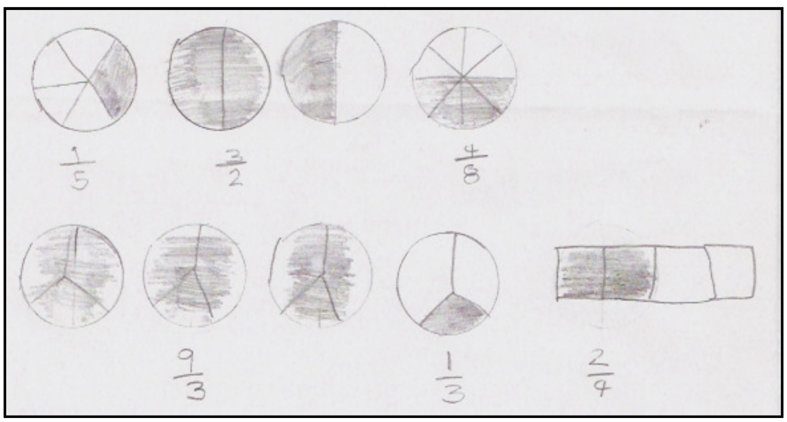
7.1.3.1.1 Aplicación primer momento

"Partiendo y repartiendo-representando"

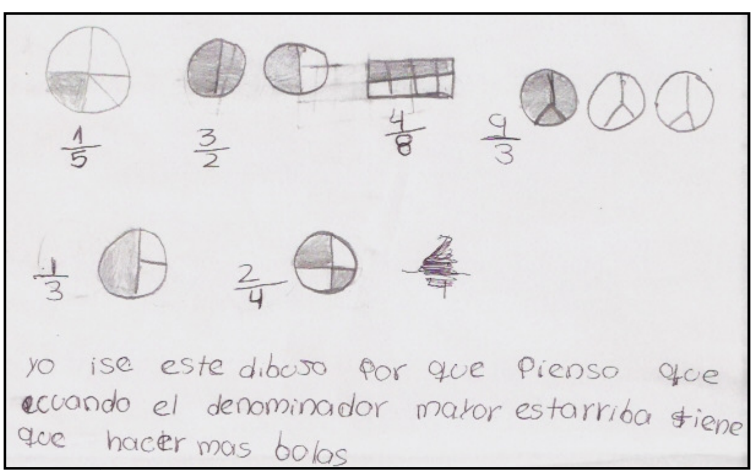
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

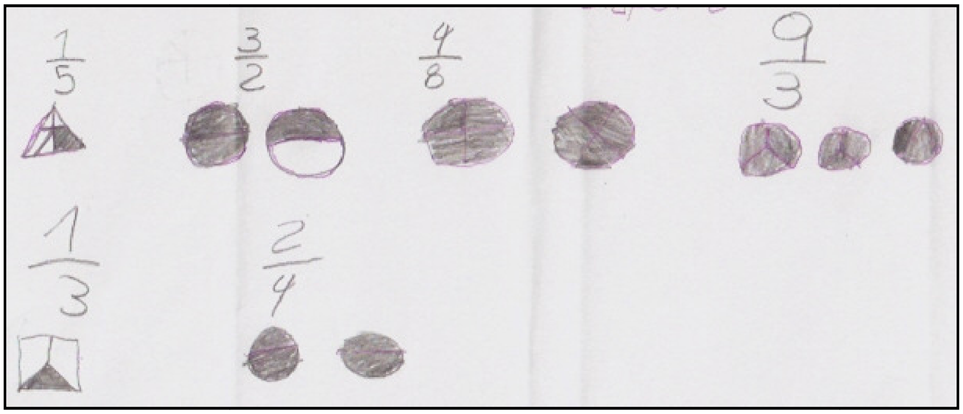
Muestra A



Muestra B



Muestra C



7.1.3.1.2 ¿Qué encontramos?

- Con respecto a la muestra A, vemos que los estudiantes realizaron las representaciones gráficas de las fracciones dadas utilizando diferentes formas para la unidad patrón (respectando las proporciones de las secciones), lo que permite evidenciar una extrapolación y conceptualización de la unidad misma.
- Con respecto a la muestra B, vemos que hay una sustentación (aunque un tanto confusa) de la representación, además no hay claridad en la proporcionalidad que deben guardar las particiones de las unidades. Lo verdaderamente interesante es que aparece en la sustentación una idea muy aproximada de las fracciones propias e impropias.
- Con respecto a la muestra C, se percibe una confusión entre la cantidad en que se parte la unidad y las que se toman de la misma. Por lo demás, la asociación y manejo con diferentes unidades patrón, en cuanto a la forma, es apropiada.

7.1.3.2 Segundo momento

Mediadores: tablero, tiza.

Ahora el maestro comienza a mostrar el manejo simbólico matemático de las acciones que se acaba de hacer, entre esto está el tratamiento numérico, en donde se ordenarán y conocerán conceptos como numerador, denominador, al comparar cuando son fracciones homogéneas o heterogéneas, propias o impropias. En esta etapa el maestro hace coincidir diferentes gráficos en el tablero a fin de que cada uno le sirva de unidad, para así poder representar diferentes fracciones y hacerles corresponder un número y viceversa.

En este momento se presenta las operaciones entre fracciones (el algoritmo), mostrando diferentes métodos de solución, primero con las fracciones homogéneas y luego con las heterogéneas.
Inicialmente asociando siempre a un modelo grafico para ir estructurando mejor lo que está sucediendo al interior de las operaciones.

Nota: esta fase es comparable con el momento de la modelación llamado "experimentación" en donde se procesa la obtención de datos" según Posada y Villa.

*Aquí hemos definido un momento de transición entre los momentos 1 y 2.

Preguntas:

Ahora pensemos en lo siguiente… ¿Cómo podemos solucionar las siguientes operaciones?

- ✓ 1/3 + 4/3 = 5/2 – 3/2 =
- ✓ 4/5 x 4/3 = 2/4 + 3/4 =

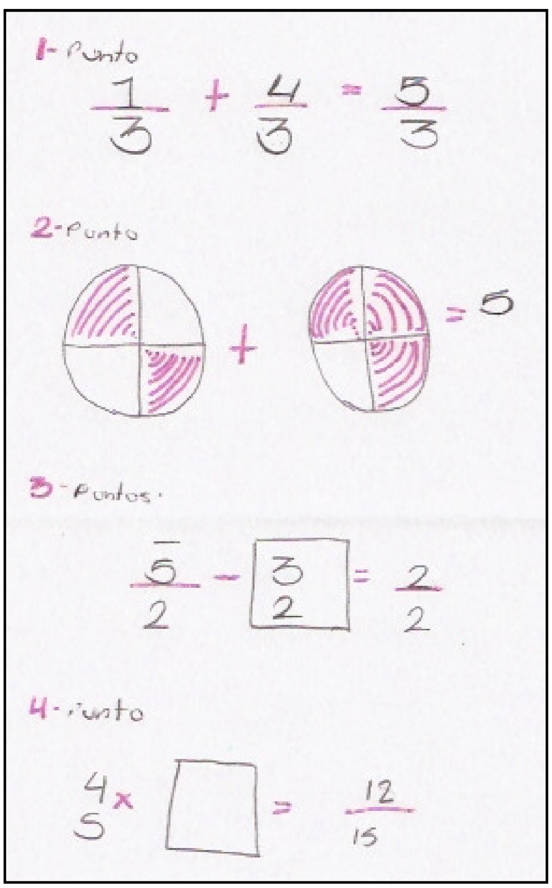
7.1.3.2.1 Aplicación segundo momento

“Partiendo y repartiendo-completando (transición)”

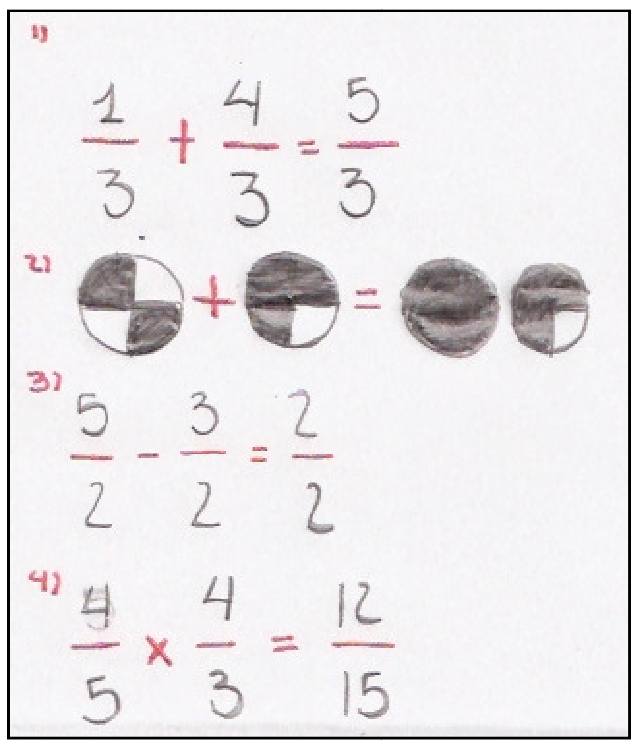
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

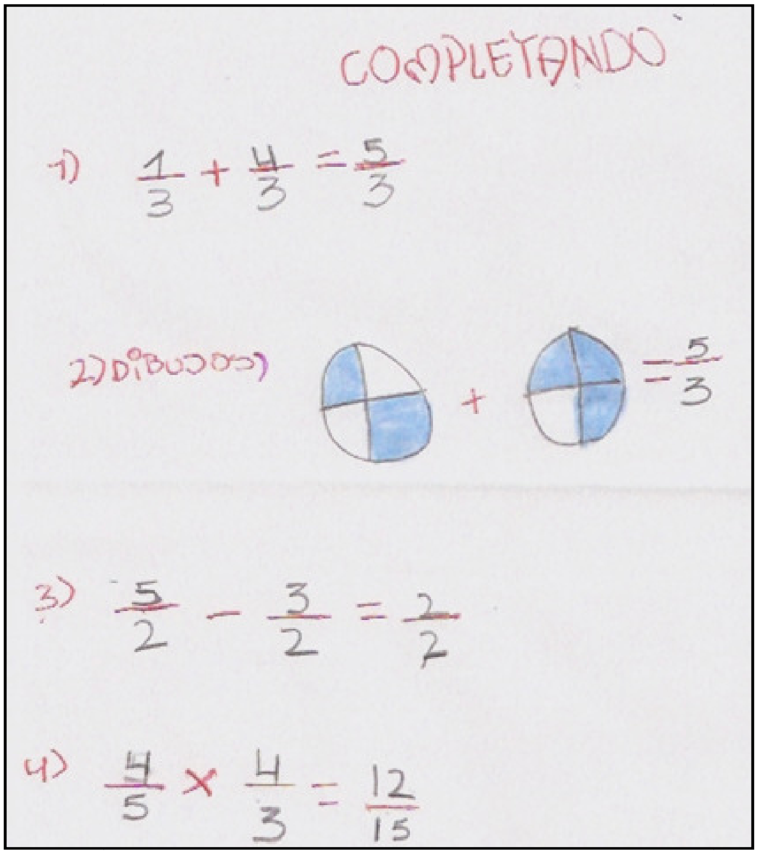
Muestra A



Muestra B



Muestra C



7.1.3.2.2 ¿Qué encontramos?

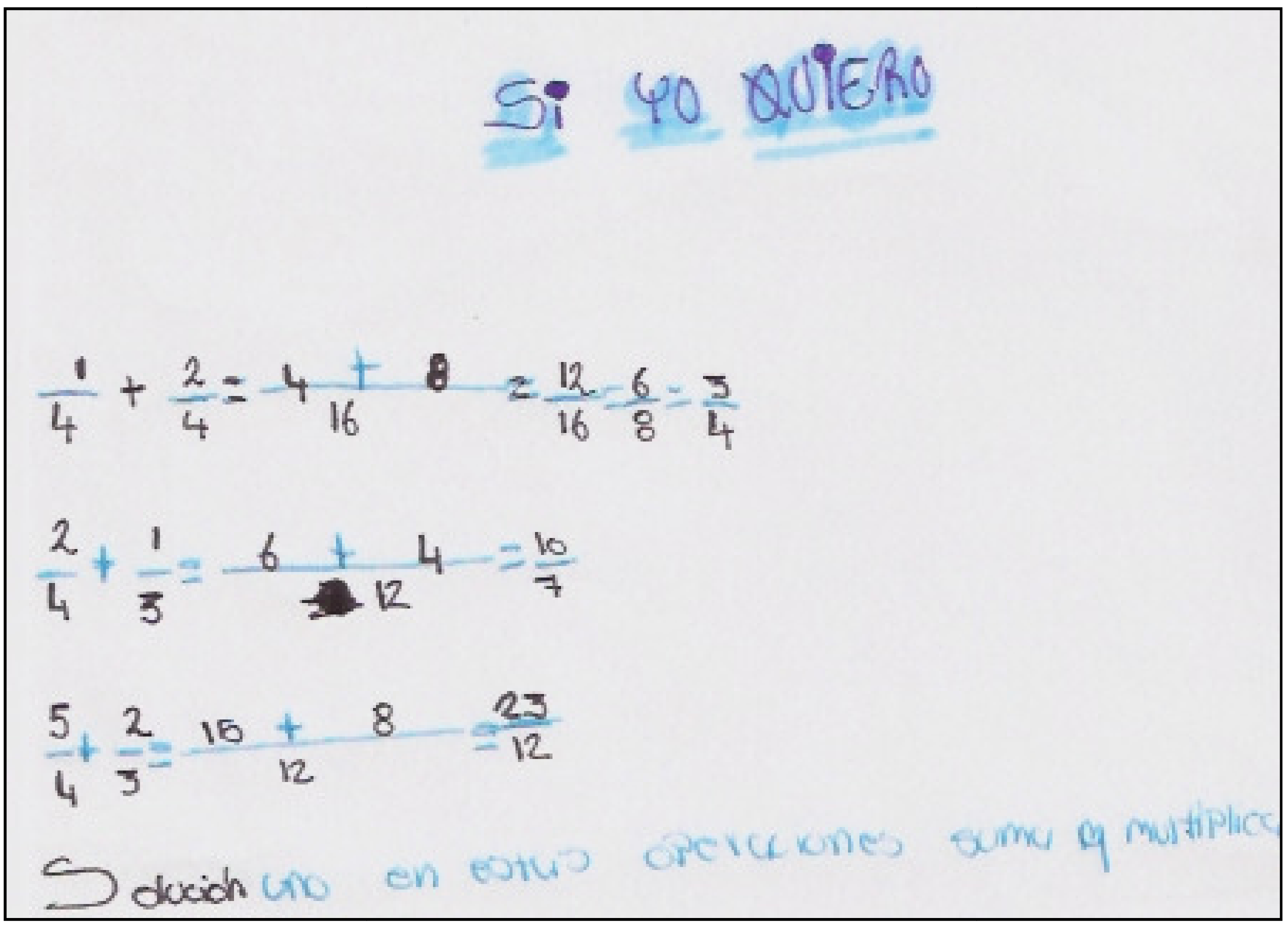
- Con respecto a la muestra A, vemos que el algoritmo de la suma y resta de fracciones homogéneas es aplicado correctamente, incluso se presenta una asociación a la representación icónica en el caso de la suma de fracciones homogéneas. Se evidencia que los gráficos resultan en un camino muy útil para realizar operaciones entre fracciones. No obstante, el algoritmo de la multiplicación presenta aquí dificultades. No se evidencia simplificación.
- Con respecto a la muestra B, hay gran concordancia con la muestra A pero se evidencia un manejo apropiado con la multiplicación de fracciones.
- Con respecto a la muestra C, destaca el error entre la suma icónica y su resultado numérico.

7.1.3.2.3 Partiendo y repartiendo – operando

A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

Muestra A



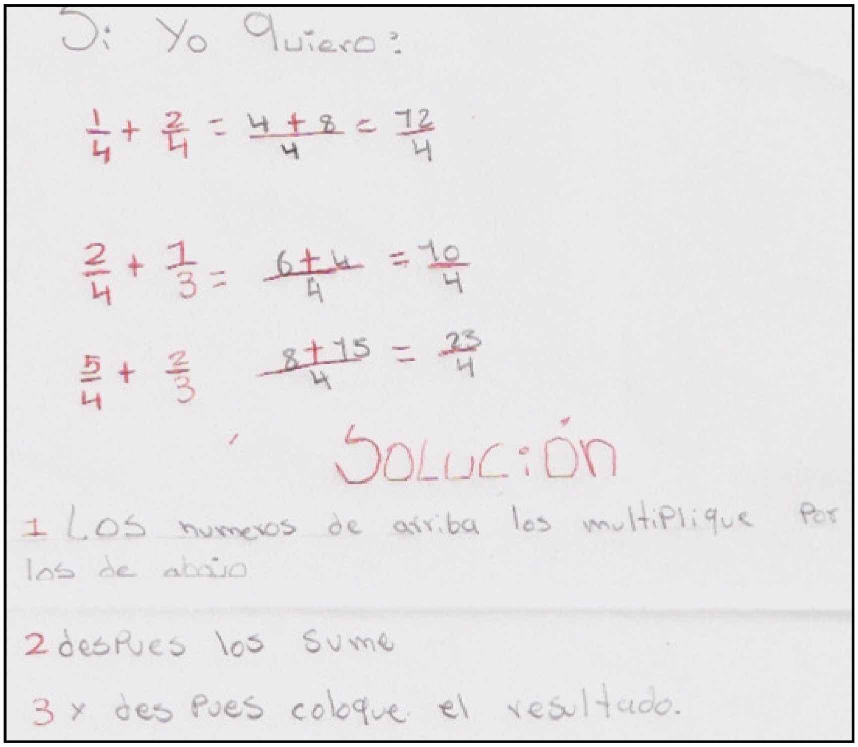
SI YO QUIERO

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4 + 8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

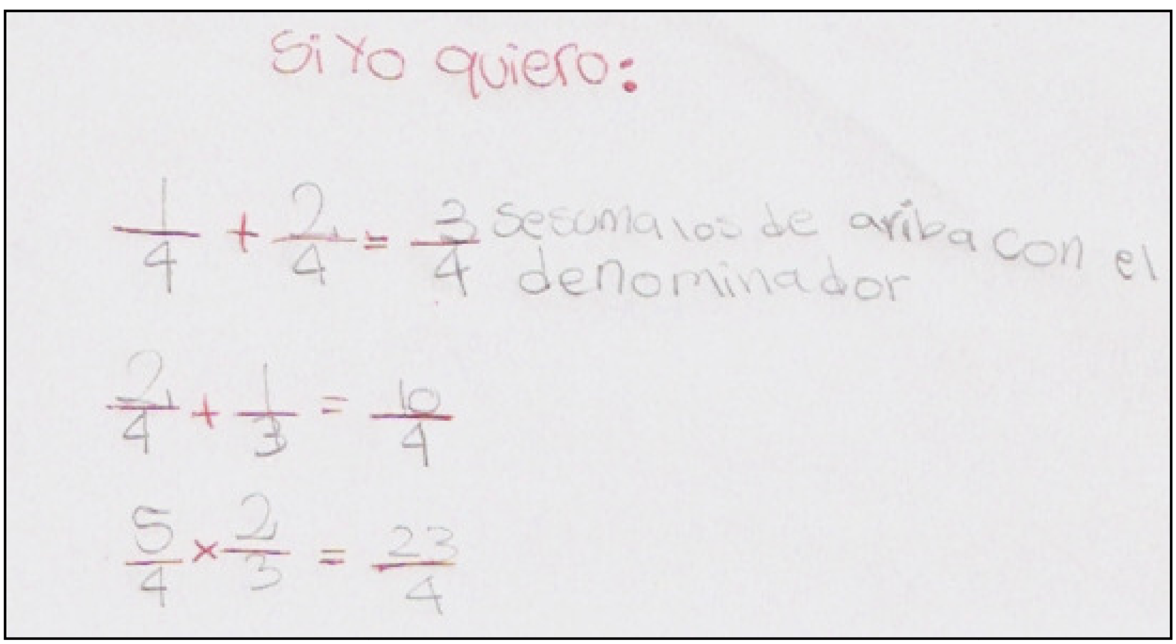
$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{6 + 4}{12} = \frac{10}{7}$

$\frac{5}{4} + \frac{2}{3} = \frac{15 + 8}{12} = \frac{23}{12}$

Muestra B



Muestra C.



7.1.3.2.4 ¿Qué encontramos?

- Con respecto a la muestra A, vemos que no hay claridad en la identificación de fracciones homogéneas. Parece ser aplicado un camino semejante al reconocimiento del mínimo común múltiplo para sumar y restas fracciones, pero aplicado a momentos incorrectos.
- Con respecto a la muestra B, se evidencia un manejo inadecuado de las fracciones homogéneas y heterogéneas con respecto a la suma y la resta. Hay una solución interesante en torno al camino para la misma, parece evidenciarse una mezcla del manejo de fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Con respecto a la muestra C, aparece una muy interesante justificación del proceso aplicado en la suma de las fracciones, en la medida que parece explicar la posibilidad de sumar los numeradores uno a uno, por la influencia de los denominadores iguales. Pero erra en la otra suma y la multiplicación.

7.1.4 Fase de explicitación

“En mi casa hay ratones”

Mediadores: tablero, tiza, cuadernos.

Encontramos en este momento una analogía con la etapa de la modelación denominada “abstracción”, proceso que debe llevar a la formulación de procesos. Es allí donde se deben seleccionar variables, formular problemas, formular hipótesis y simplificar el problema.

¿Qué hacemos?

Les contamos a los alumnos la historia de que cuando éramos niños, en nuestra casa había ratones, con tan mala suerte que en pocos días se habían comido buena parte del mercado.

Así pues les damos a conocer la lista de los alimentos que había antes de que los ratones llegaran y luego de que ellos partieran.

Cabe anotar que en esta fase el maestro está constantemente orientando al estudiante hacia la posible respuesta.

La idea aquí es que ellos logren encontrar las fracciones de comida que se comieron los ratones, para esto ellos deben:

a. Formular posibles caminos para encontrar la respuesta correcta.
b. Asociar unidades patrón a cada producto del mercado.
c. Reconocer que fracción del producto se comieron los ratones.
d. Formular la situación mediante las variables cuantitativas correspondientes.
e. Graficar la situación.
f. Llevar a expresiones concretas el problema.

Preguntas:

- ¿Qué tenemos que hacer para solucionar esta situación?
- ¿Cuál es el mejor camino para comenzar a trabajar en la solución?
- ¿Cuál es la operación que me sirve para solucionar la situación? ¿Por qué?
- ¿Se puede hacer un grafico para esta situación? ¿Sirve de algo?
- ¿Cómo se puede simbolizar con números la situación?

Ahora pensemos en lo siguiente…

En mi casa había:

- ✓ 3 platanos
- ✓ 1 libra de arroz
- ✓ 4 tomates
- ✓ 1 queso

Una mañana me levanté y fui a la despensa pero me di cuenta que los ratones se habían comido:

- ✓ $\frac{2}{6}$ de los plátanos.
- ✓ $\frac{1}{4}$ de queso.
- ✓ $\frac{2}{3}$ del arroz.
- ✓ $\frac{1}{2}$ de los tomates.

¿Cuánto de cada alimento quedó después de que los ratones comieron?

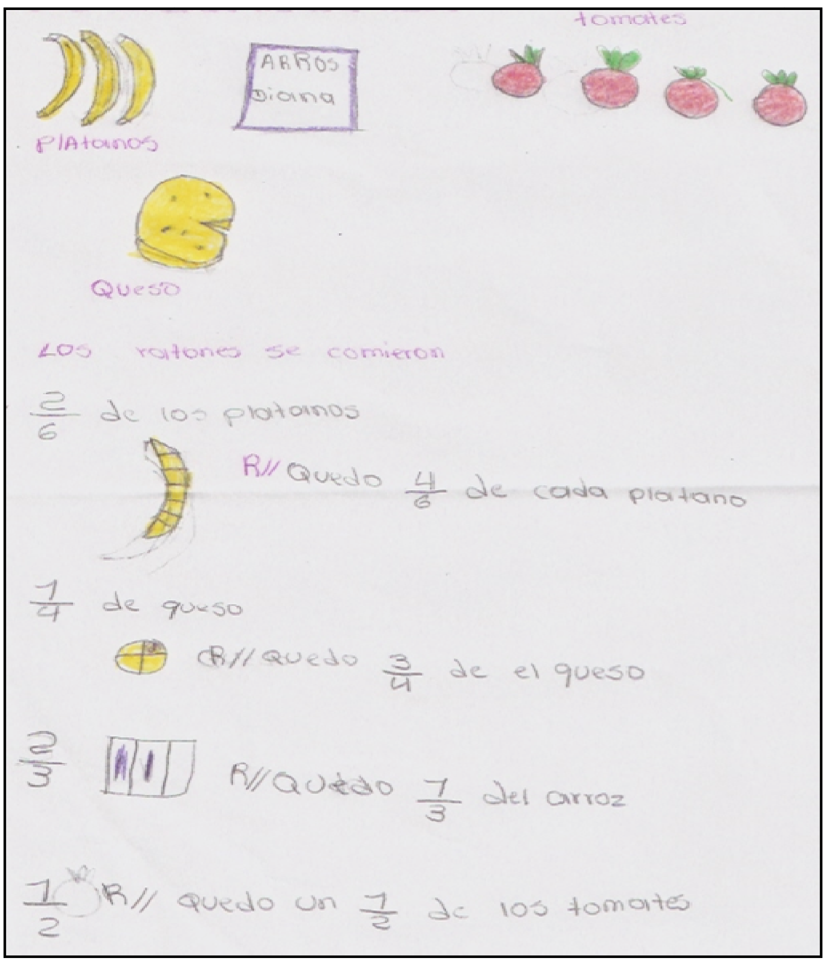
7.1.4.1 Aplicación fase de explicitación

“En mi casa hay ratones”

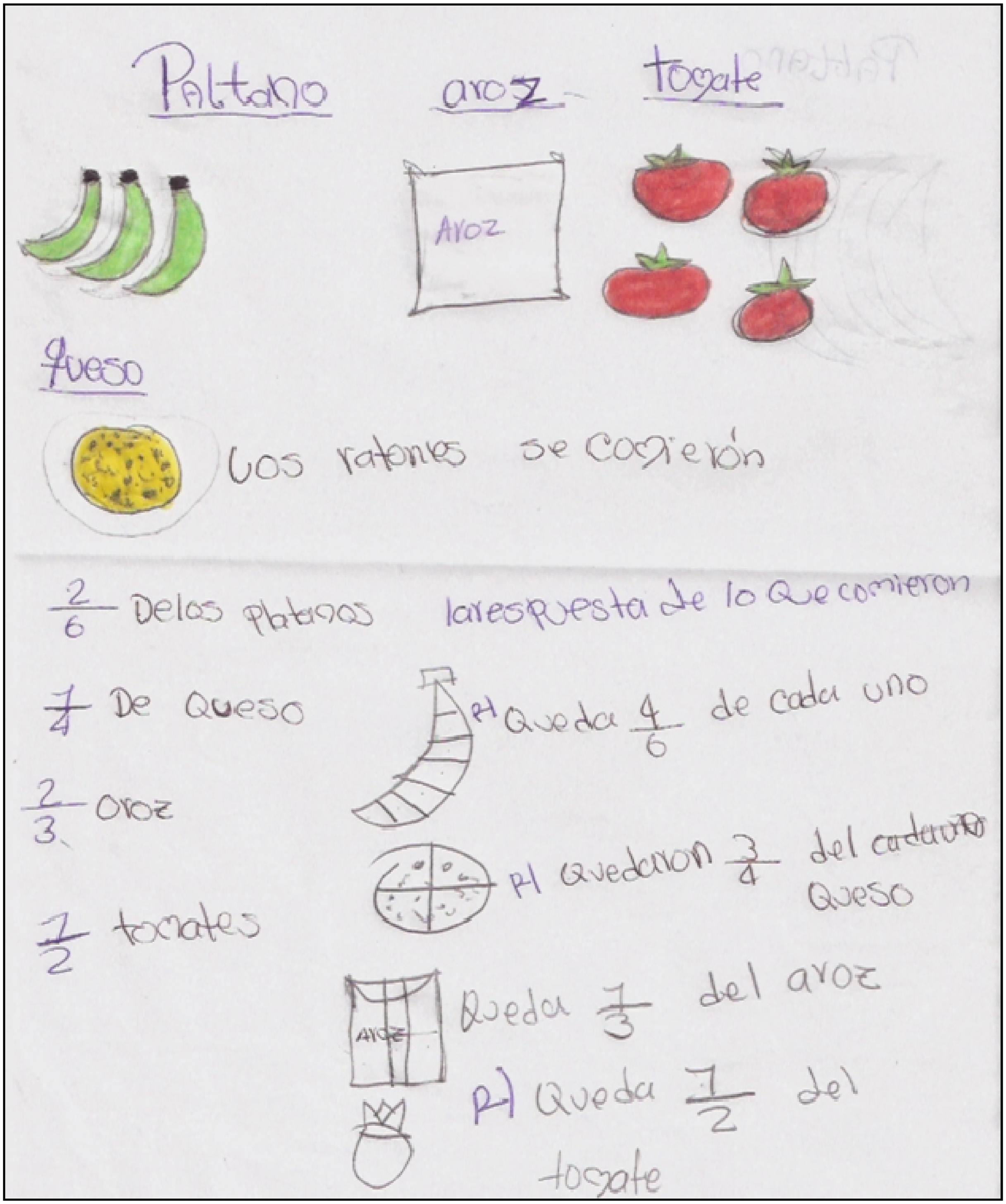
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

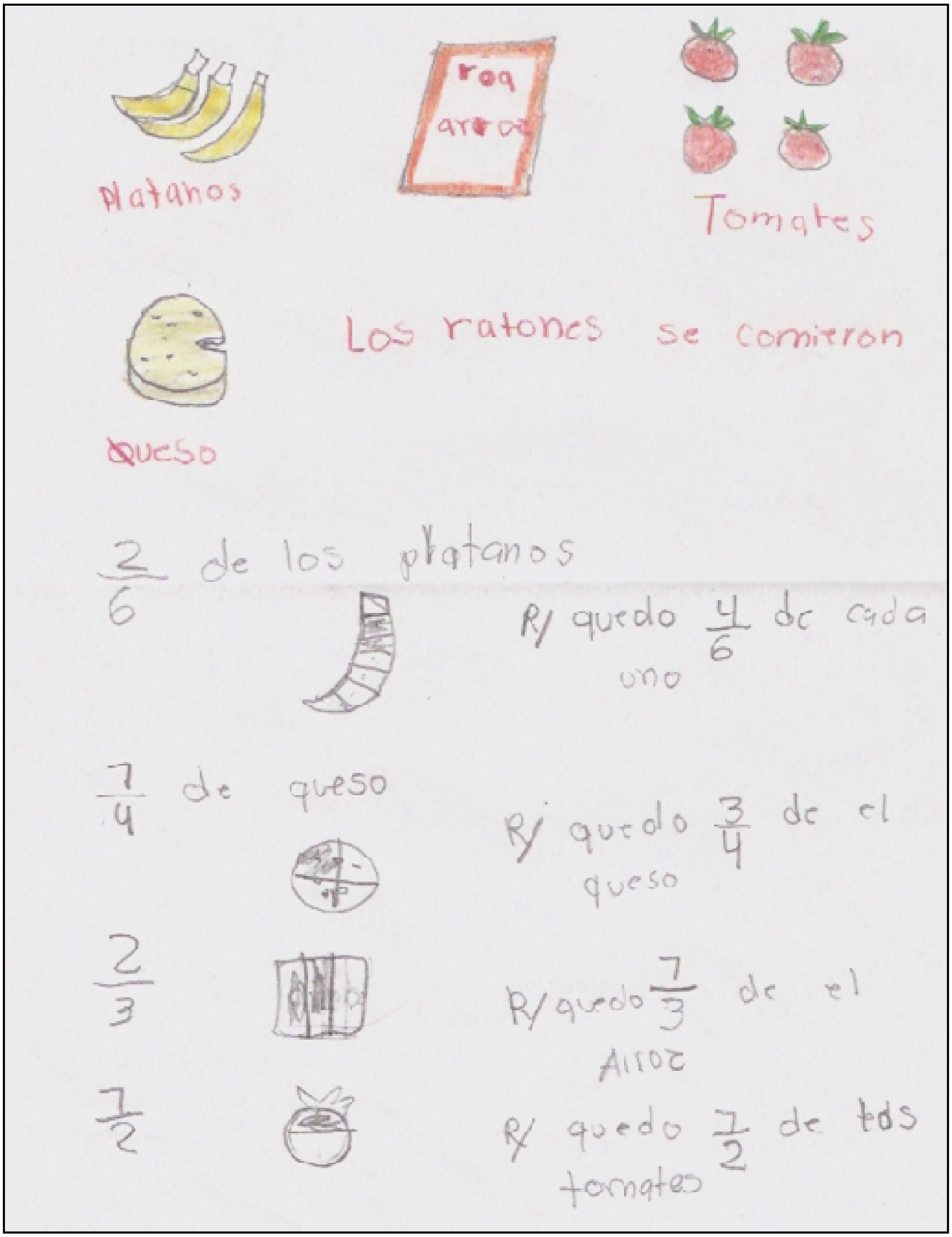
Muestra A



Muestra B


Paltano
aroz
togate
Aroz
Queso
Los ratones se comierón
2/6 Delos platanos
laresquesta de lo Que comieron
1/4 De Queso
2/3 aroz
1/2 tomates
R/ Queda 4/6 de cada uno
R/ Quedaron 3/4 del Queso
Aroz
Queda 1/3 del aroz
R/ Queda 1/2 del togate

Muestra C


Platanos
Tomates
Queso
Los ratones se comieron
2/6 de los platanos
R/ quedo 4/6 de cada uno
1/4 de queso
R/ quedo 3/4 de el queso
2/3
R/ quedo 1/3 de el Arroz
1/2
R/ quedo 1/2 de tds tomates

7.1.4.2 ¿Qué encontramos?

- Con respecto a la muestra A, vemos varios fenómenos interesantes; por ejemplo, para encontrar lo que resta de plátanos la estudiante tomó uno como muestra y lo dividió en sextos, pudiendo determinar que los ratones dejaron 4/6 de cada plátano. Es importante ver como se extiende dicho proceso a los otros 2 plátanos, generalizando y tomando como muestra solo uno de ellos. Pero para el caso de los tomates, es muy clara al determinar "quedó un medio de los tomates" y no de cada uno, aun cuando tomo también uno de muestra sobre el cual aplico la partición. En el caso del queso y arroz realizo particiones iguales de la unidad. Llama la atención como utiliza la unidad icónica acorde al producto que está manejando.
- Con respecto a las muestras B y C, queremos resaltar la gran afinidad con la solución anterior. Es importante anotar que aunque parece haber gran claridad en el camino que siguieron para la solución, no está claro el porqué de la decisión para adoptar el mismo.

7.1.5 Fase de orientación libre

"Me le mido a lo que sea…"

Mediadores: tablero, tiza, cuadernos, elementos que el alumno pueda identificar dentro y fuera del aula.

Es aquí donde el estudiante elabora el modelo matemático necesario para solucionar el problema al que se enfrenta, según Posada y Villa (2007).

¿Qué hacemos?

Vamos a plantearles a los estudiantes situaciones problema que requieran apoyarse en un proceso secuencial para dar cuenta de la solución de la misma.

Situaciones

- Si yo tengo 8 años y mi hermano tiene 1/2 de mi edad, ¿Cuántos años tiene mi hermano?
- Juan tiene 18 años y Pedro tiene 2/3 de esa edad ¿Cuántos años tiene Pedro?
- Yo tengo 15 años y mi papa tiene 5/2 de mi edad, ¿Cuántos años tiene mi papa?

Preguntas:

- ¿Qué debo hacer para poder solucionar estas situaciones? ¿Por qué?
- ¿Conozco un problema parecido?
- ¿Cuál es el camino más sencillo para solucionar esta situación?

Ahora pensemos en lo siguiente…

María tiene 18 años, Ana, su hermana, tiene 1/3 de la edad de María y José, su primo, tiene1/2 de la edad de Ana. ¿Cuántos años tiene José?

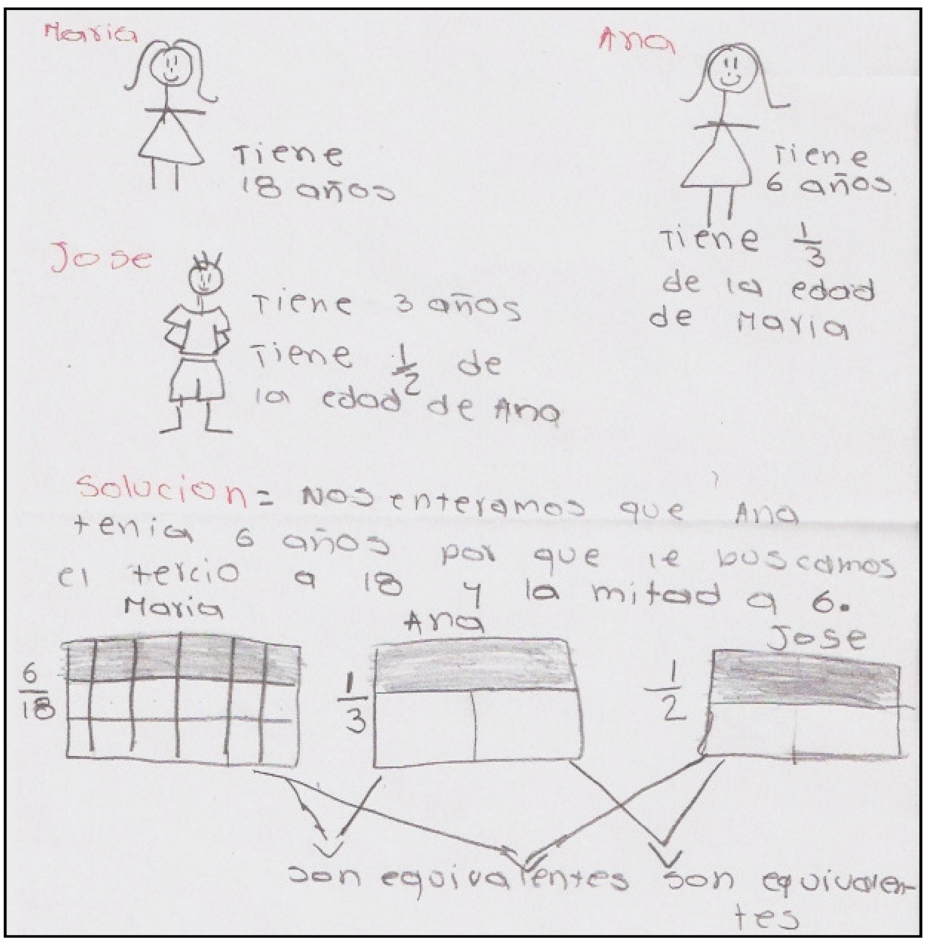
7.1.5.1 Aplicación fase de orientación libre

“Me le mido a lo que sea…”

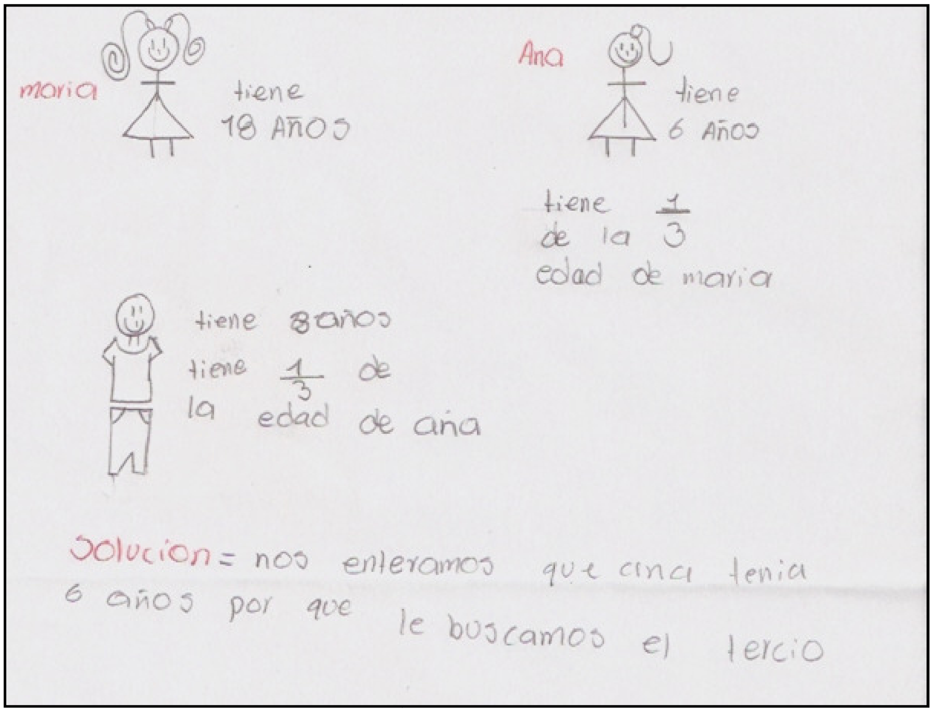
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

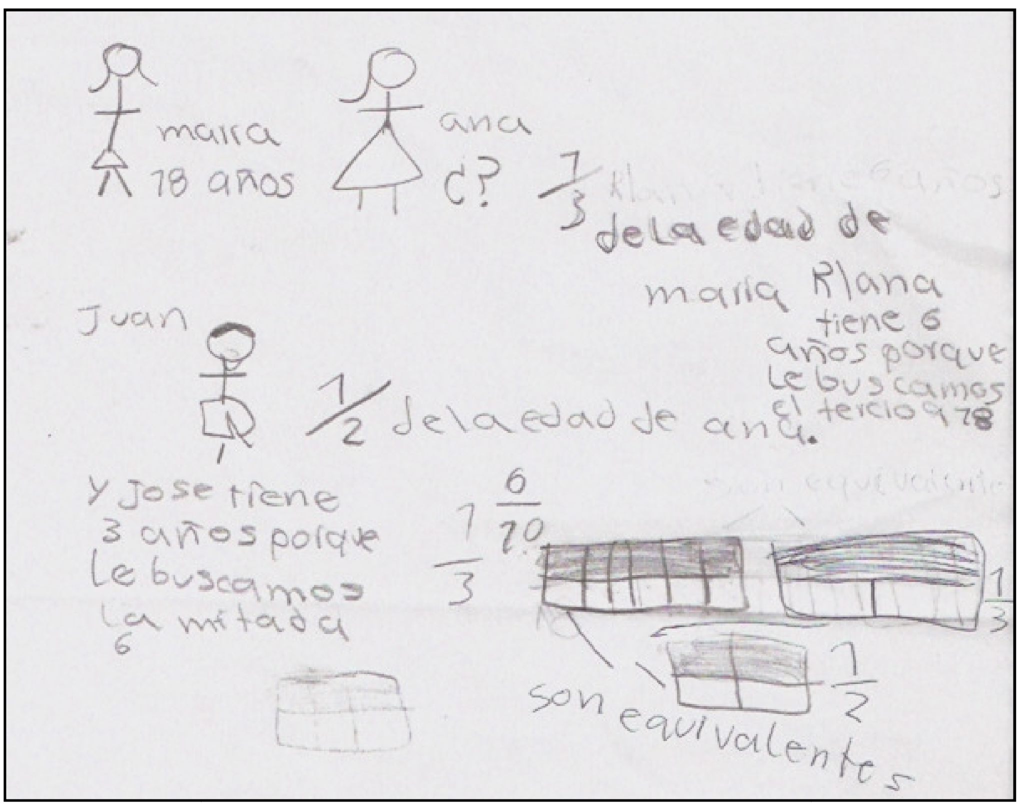
Muestra A



Muestra B.



Muestra C



7.1.5.2 ¿Qué encontramos?

- Con respecto a la muestra A, vemos primero que todo una explicación del proceso seguido, de otra lado una muy buena ayuda con los gráficos, pero lo que vemos con gran asombro es esa asociación (con flechas) de los procesos que permiten encontrar la solución a la situación. Incluso existe un referente (aunque equivocado) con respecto a las equivalencias que se desprende de dichas asociaciones. Lo que es claro, es que existe un camino bien definido para hallar la solución.
- Con respecto a la muestra B, vemos que hay una justificación pero solo de una parte del proceso, no obstante la solución aparece sin el auxilio de un proceso más claro (para quien lo interpreta).
- En el caso de la muestra C, como en la muestra A, hay un apoyo en los gráficos. Lo interesante es que tanto en la muestra A como en la B, aparecen unas particiones al interior de dichos gráficos un tanto desproporcionadas. Igualmente, no hay un manejo netamente numérico u operativo que conduzca a la solución.

7.1.6 Fase de integración

"Comparto lo que se"

Mediadores: socialización de las soluciones logradas.

¿Qué se hace?

Es aquí en donde luego de la socialización de las respuestas dadas por los estudiantes, nos ponemos de acuerdo en torno a la "manera" más apropiada de solucionar la situación.
Esta fase tiene mucho de la validación y modificación en la modelación enunciadas por Posada y Villa (2007).

Preguntas

- ¿Podemos utilizar estos mismo "métodos" para solucionar otro tipo de problemas?
- ¿Cuáles?
- ¿Estamos de acuerdo en las soluciones de nuestros compañeros? ¿Por qué?
- ¿Para qué situaciones de la vida diaria sirve conocer los fraccionarios?
- ¿Cuáles? ¿Por qué?
- ¿Podemos decir que sabíamos o no sabíamos trabajar con fraccionarios desde antes? ¿Por qué?

Por último, les pedimos a los estudiantes que traten de esbozar una situación en donde puedan aplicar el camino que encontramos con el problema anterior.

7.2 Midiendo ángulos con las tortas fraccionarias

Esta actividad es una extensión de los logros alcanzados con la primera actividad. Es aquí donde aprovechando el manejo con las tortas fraccionarias intentaremos que los estudiantes adopten el modelo de partición de la unidad en secciones iguales, a fin de que lo conviertan en una herramienta para medir ángulos divisores de 360º.

Si bien no es la “panacea” de la medición de ángulos, consideramos una aproximación adecuada a lo que en el futuro será el tratamiento y manejo con ángulos de cualquier tipo.

Ahora bien, medir siempre ha sido un proceso verdaderamente complejo cuando nos aventuramos a hacerlo, primero, porque definir un patrón para hacerlo resulta a veces tortuoso y segundo, porque la asimilación de los patrones convencionales es algo confuso, sin mencionar que cuando se nos intentan introducir tales ideas, muchas veces aquello deviene en una actividad infructuosa y carente de sentido.

Lo que pretendemos es asirnos de la primera aproximación que ya elaboramos con la actividad las tortas fraccionarias, para utilizar las secciones iguales resultantes de las particiones sobre la unidad como herramienta para medir ángulos divisores de 360 grados, al tiempo que conduzcamos a los estudiantes a la elaboración de un modelo procedimental sencillo pero práctico para medir y clasificar ángulos de manera asertiva.

Para ello nos centraremos en la representación icónica circular de la unidad y sus diversos seccionamientos, relacionando los arcos centrales que se generan en tales particiones con los arcos que subtienden, para compararlos con ángulos generados al azar para medirlos.

Teniendo en cuenta que medir no es más que comparar un objeto partiendo de una “herramienta”, creemos que asociar las secciones iguales de las particiones de la unidad con un ángulo, permitirá a los estudiantes clasificar y medir fácilmente un ángulo al tiempo que extrapola el concepto de fracción.

7.2.1 Fase de indagación

“Girando y dibujando”

Mediadores: tiza, tablero, el cuerpo.

¿Qué hacemos?

El maestro comienza a preguntarles a los alumnos si saben que es un ángulo y su relación con girar.
La idea es tomar un punto de partida y comenzar a dar vueltas con el cuerpo, tres vueltas, dos vueltas, una vuelta, media vuelta etc.
Luego repetimos la actividad pero dándole a cada estudiante una tiza, esta vez vamos a girar estando sentados en el piso, veremos qué pasa cuando al girar vamos trazando sobre el piso el camino que seguimos.

Preguntas:

- ¿Cómo es la figura que dibujamos cuando dimos vueltas en el piso?
- ¿Cómo es cuando dimos menos de una vuelta?
- ¿Qué nombre le podemos dar a esa figura que se genero cuando dimos una vuelta?
- ¿Qué sucedería si doy media vuelta y luego otra media partiendo desde donde quede? ¿Qué figura genere?
- ¿Cómo son las figuras que hicieron mis compañeros?

- ¿Será necesario dar más vueltas para hacer una figura más grande o más pequeña?
- ¿Cuántas vueltas debo dar para cerrar la figura?

Lo que se pretende aquí es que los estudiantes comprendan que la circunferencia que utilizaremos como unidad patrón, se genera con la ayuda de una sola vuelta, independientemente del tamaño de la misma.
Elemento muy útil a la hora de determinar la semejanza de ángulos, en tanto que, ángulos centrales iguales, barren espacios iguales, generando partes de torta fraccionaria (para nuestro caso) iguales.

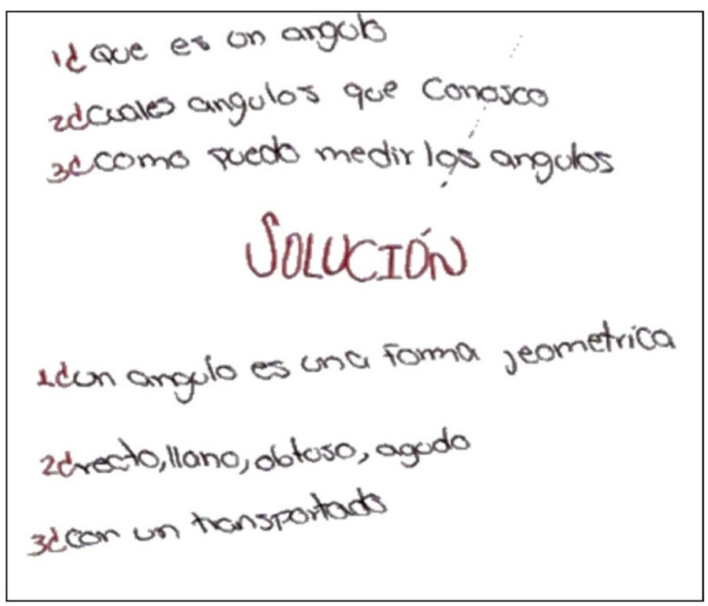
7.2.1.1 Aplicación de fase de indagación

“Girando y dibujando”

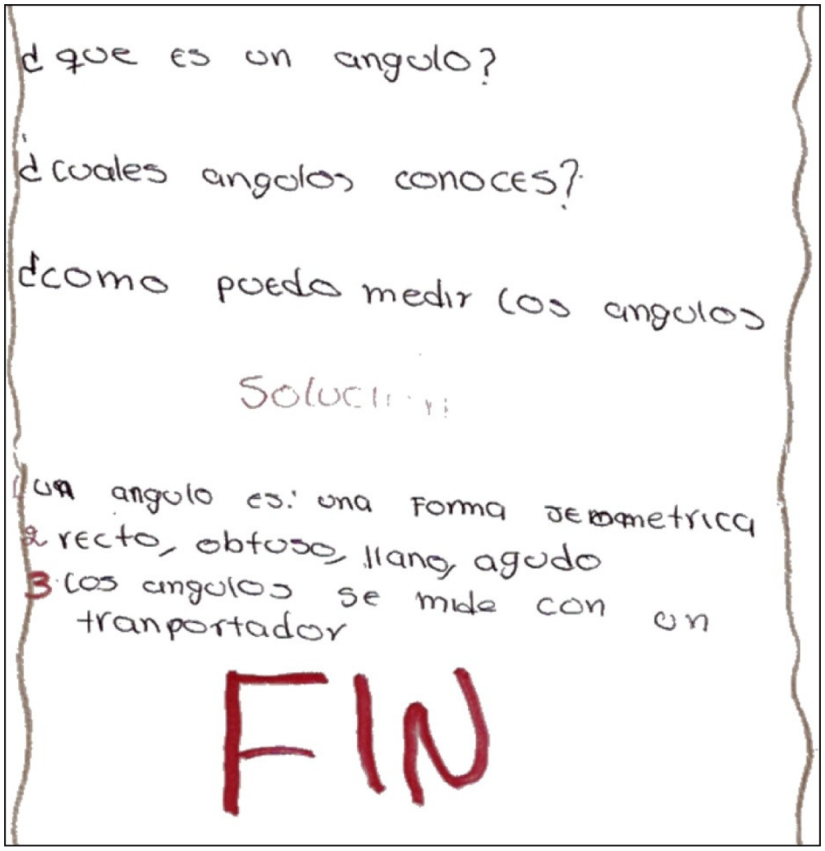
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

Muestra A


1¿que es un angulo
2¿cuales angulos que conosco
3¿como puedo medir los angulos
SOLUCIÓN
1¿un angulo es una forma jeometrica
2¿recto, llano, obtuso, agudo
3¿con un transportado

Muestra B



7.2.1.2 ¿Qué encontramos?

- Después de la introducción que realizamos con los niños, los gráficos que realizaron en el piso y las observaciones realizadas; vemos que existe una aproximación a lo que es un ángulo y además que tienen claridad en la clasificación primaria de los mismos.
- Es curioso, pero algunos al graficar obtuvieron espirales ya que se movían mucho hacia los lados mientras giraban. Igual ellos idealizaron los realizado enunciando que la gráfica se aproximaba a una circunferencia.
- Este tipo de actividades con el cuerpo motivan mucho a los estudiantes.
- Los instrumentos para medir ángulos tradicionalmente los conocen aunque manifestaron no manejarlos bien.

7.2.2 Fase de orientación dirigida

"Partiendo y midiendo"

Mediadores: tortas fraccionarias.

Apoyados en la primera actividad, retomamos la unidad patrón circular que se trabajó con el programa que diseñamos y las diferentes particiones que logramos de la misma.
Una vez establecida la figura que se genera cuando marco la trayectoria al dar vueltas, vamos a asociarla con la unidad partida en medios, tercios, cuartos, quintos etc.
Es aquí donde vamos introduciendo el término ángulo y sus tipos (agudo, recto, obtuso y llamo desde la percepción visual), como lo que me determina la abertura asociada al giro que doy con un punto de partida y otro de llegada.

Preguntas:

- ¿Cuántas vueltas debe dar para marcar cada una de estas partes de la torta?
- ¿Por qué?
- ¿Si tenemos giros iguales pero de diferente tamaño, son iguales?
- ¿Cómo son los ángulos que generan las particiones de la unidad en medios, tercios, cuartos, etc.?
- ¿Qué podemos concluir?
- ¿De qué tipo son los ángulos que generan las particiones de la unidad en medios, tercios, cuartas etc.?

Como en la actividad con el programa, ahora vamos ahora a “llenar” la mitad derecha de la unidad en blanco con las partes (que se pueda) de una de las fraccionadas.
Creemos que esta operación los conducirá al concepto de equivalencia de ángulos mediante una situación también geométrica, como se indico en el numeral 7.2.1.
Ahora vamos a sumar ángulos (desde las particiones de la unidad) para ver que obtenemos; podemos comenzar con las del mismo tamaño para retomar el concepto de fracción homogénea y luego heterogénea.

Durante este proceso se debe ir incorporando un lenguaje más formal en torno a los nuevos conceptos.

Preguntas:

- ¿Cómo podemos definir ángulos equivalentes?
- ¿Cómo podemos definir ángulos diferentes?

Ahora pensemos en lo siguiente… ¿Qué tipo de ángulos tendremos con las siguientes fracciones?

- ✓ 1/5
- ✓ 3/2
- ✓ 4/8
- ✓ 9/3
- ✓ 1/3
- ✓ 2/4

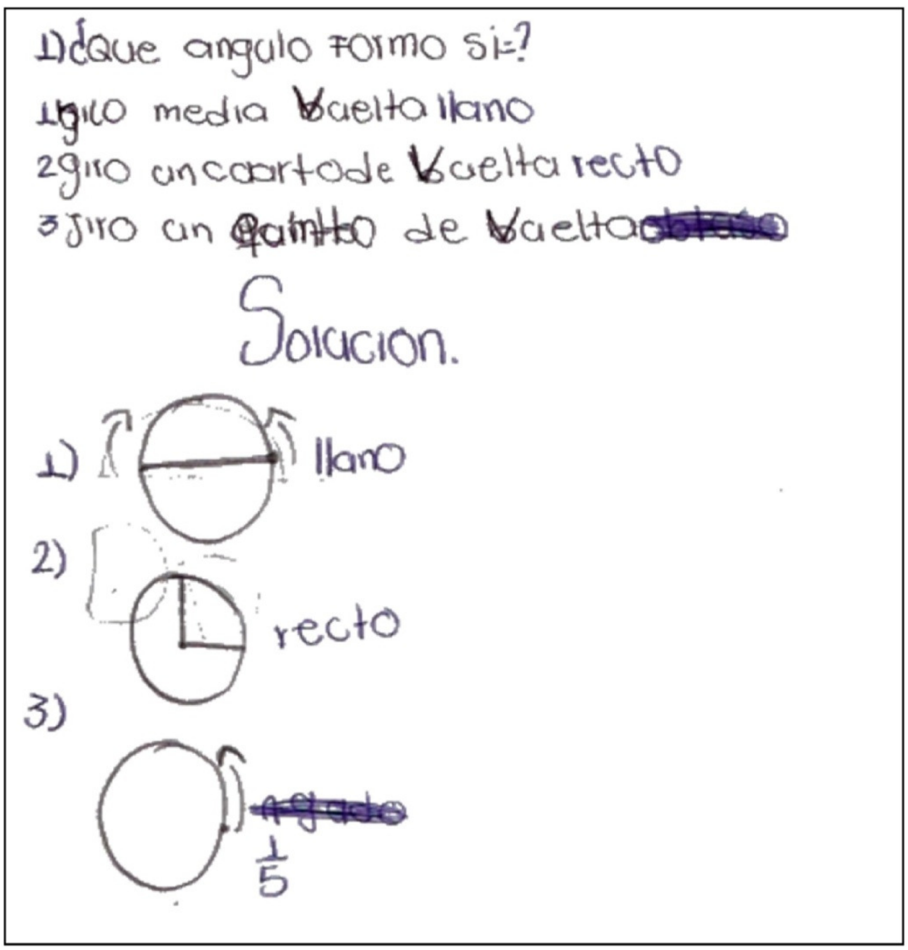
7.2.2.1 Aplicación de fase de orientación dirigida

“Partiendo y midiendo”

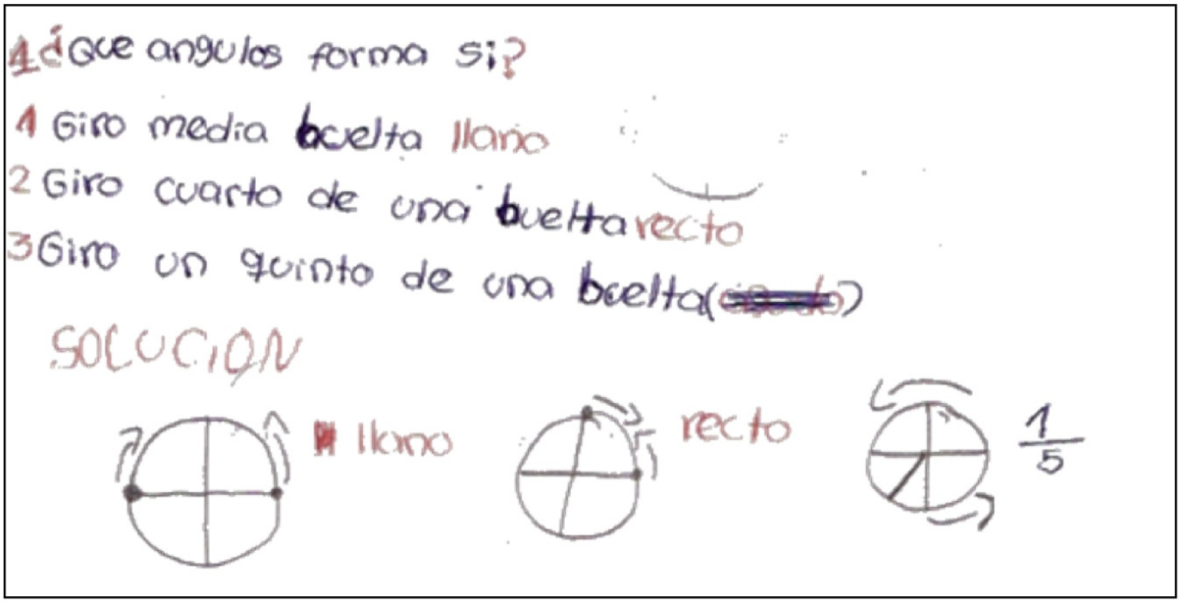
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

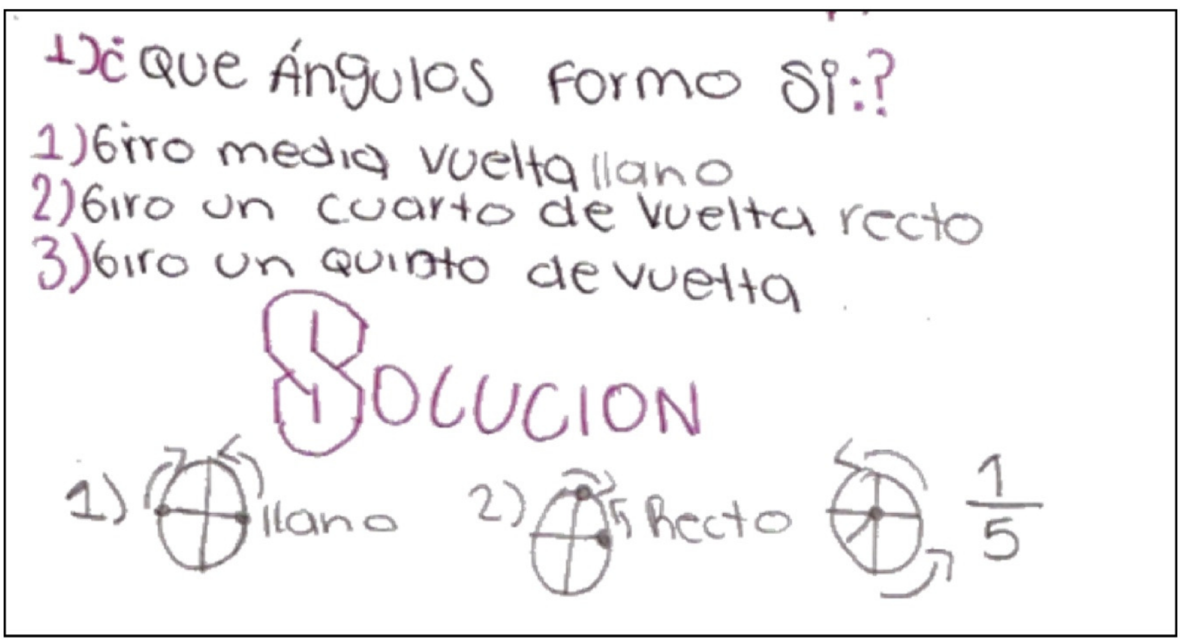
Muestra A



Muestra B



Muestra C



7.2.2.2 ¿Qué encontramos?

- Se puede evidenciar el barrido realizado al girar como actividad generadora de un ángulo y su asociación con ángulos de tipo recto, llano, agudo y obtuso.
- Las gráficas de la actividad obedecen a la partición de la torta fraccionaria en determinado número de partes.
- Vemos que hay cierta confusión al momento de graficar ya que las particiones no parecen iguales. Es interesante pues ya en la primera actividad esto había quedado subsanado.

7.2.3 Fase de explicitación

"Los ángulos centrales que forman las particiones de la torta fraccionaria"

Mediadores: tablero, tiza, cuadernos.

Encontramos en este momento una analogía con la etapa de la modelación denominada "abstracción", proceso que debe llevar a la formulación de procesos. Es allí donde se deben seleccionar variables, formular problemas, formular hipótesis y simplificar el problema.

¿Qué hacemos?

Les plantemos a los alumnos la necesidad de averiguar qué tipo de ángulos conforman las particiones de las tortas, cuando las dividimos en partes iguales. Cabe anotar que en esta fase el maestro está constantemente orientando al estudiante hacia la posible respuesta.

La idea aquí es que ellos logren encontrar los ángulos y que fracción de la vuelta completa representan.

El concepto de ángulo central se aborda en este momento. Consideramos que en la medida que los estudiantes identifican el tipo de ángulo central, pueden utilizar en el futuro la partición como instrumento "modelo" de medición.

Es también aquí donde se procura:

a. Formular posibles caminos para encontrar la respuesta correcta.
b. Asociar la unidad patrón a cada medida.
c. Reconocer que ángulo forma cada juego de caras.
d. Formular la situación mediante las variables cuantitativas correspondientes.
e. Graficar la situación.
f. Llevar a expresiones concretas el problema.

Preguntas:

- ¿Qué tenemos que hacer para solucionar esta situación?
- ¿Cuál es el mejor camino para comenzar a trabajar en la solución?
- ¿Se puede hacer un gráfico para esta situación? ¿Sirve de algo?
- ¿Cómo se puede simbolizar con números la situación?

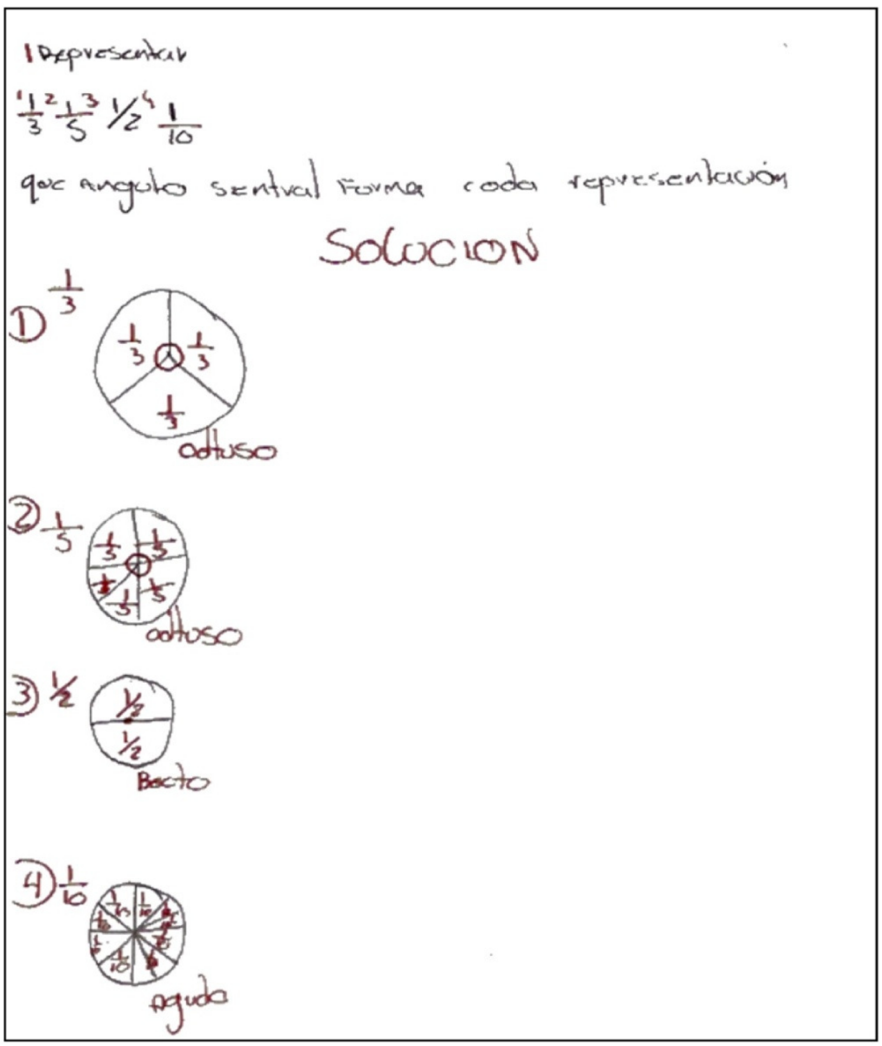
7.2.3.1 Aplicación de fase de explicitación

“Los ángulos centrales que forman las particiones de la torta fraccionaria”

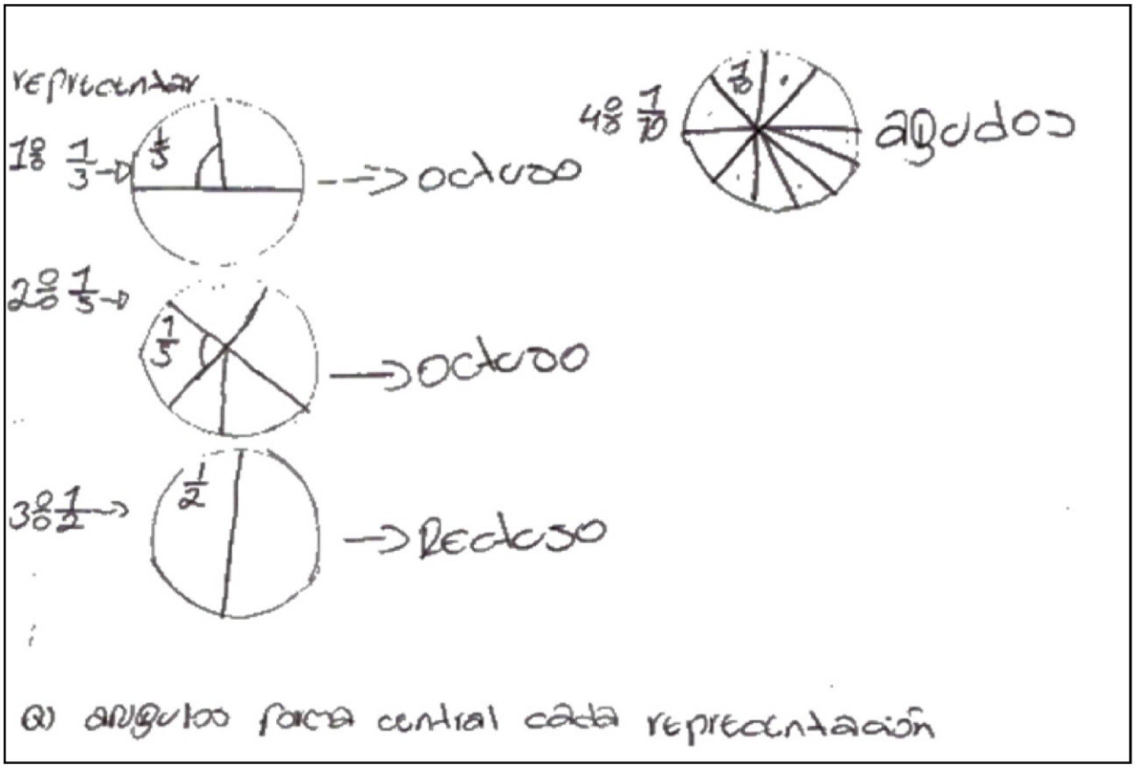
A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

¿Qué hicieron los alumnos?

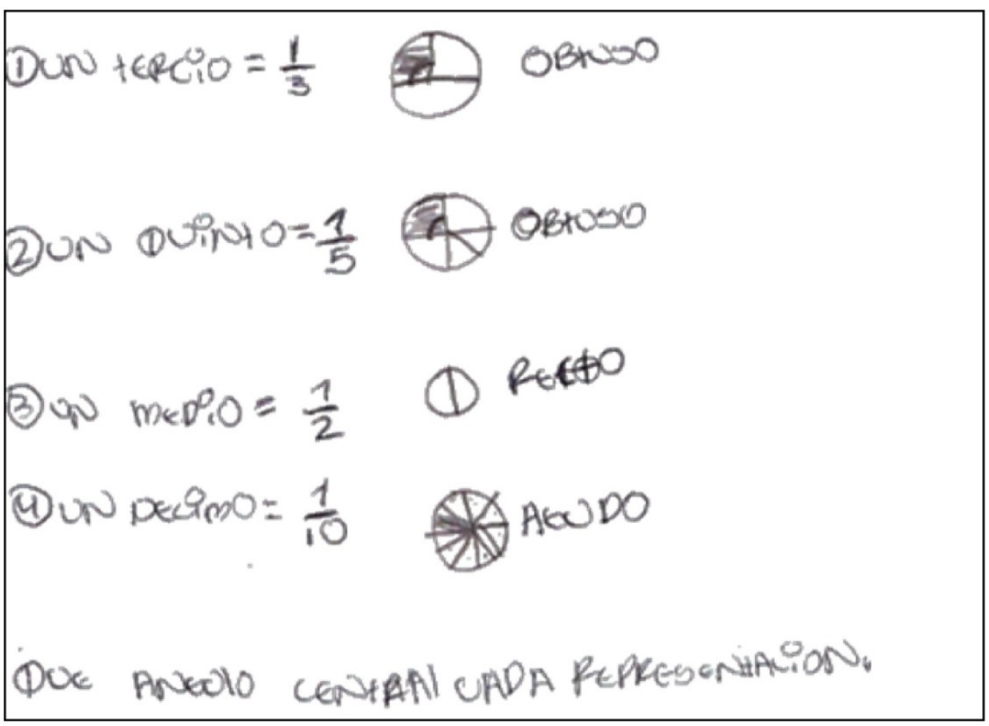
Muestra A



Muestra B



Muestra C



7.2.3.2 ¿Qué encontramos?

- En primera instancia, vemos que persiste el problema con la partición en secciones iguales.
- Hay coherencia entre los ángulos centrales graficados y la clasificación asociada de los mismos con los gráficos.
- Los alumnos coincidieron en que las particiones con las tortas fraccionarias resultan en una buena herramienta para general ángulos de diferentes tipos.

7.2.4 Fase de orientación libre

"Los grados que no enfrían ni calientan"

Mediadores: tablero, tiza, cuadernos, elementos que el alumno pueda identificar dentro y fuera del aula.

Es aquí donde el estudiante elabora el modelo matemático necesario para solucionar el problema al que se enfrenta, según Posada y Villa.

¿Qué hacemos?

Vamos a plantearles a los estudiantes situaciones problema que requieran apoyarse en un proceso secuencial para dar cuenta de la solución de la misma.

Situaciones:

- ¿Cómo son los ángulos internos que conforman las figuras planas conocidas?
- ¿Cómo deben ser los ángulos internos de un triangulo para que cuando los una por un vértice completen toda una vuelta de 360 grados?

Preguntas:

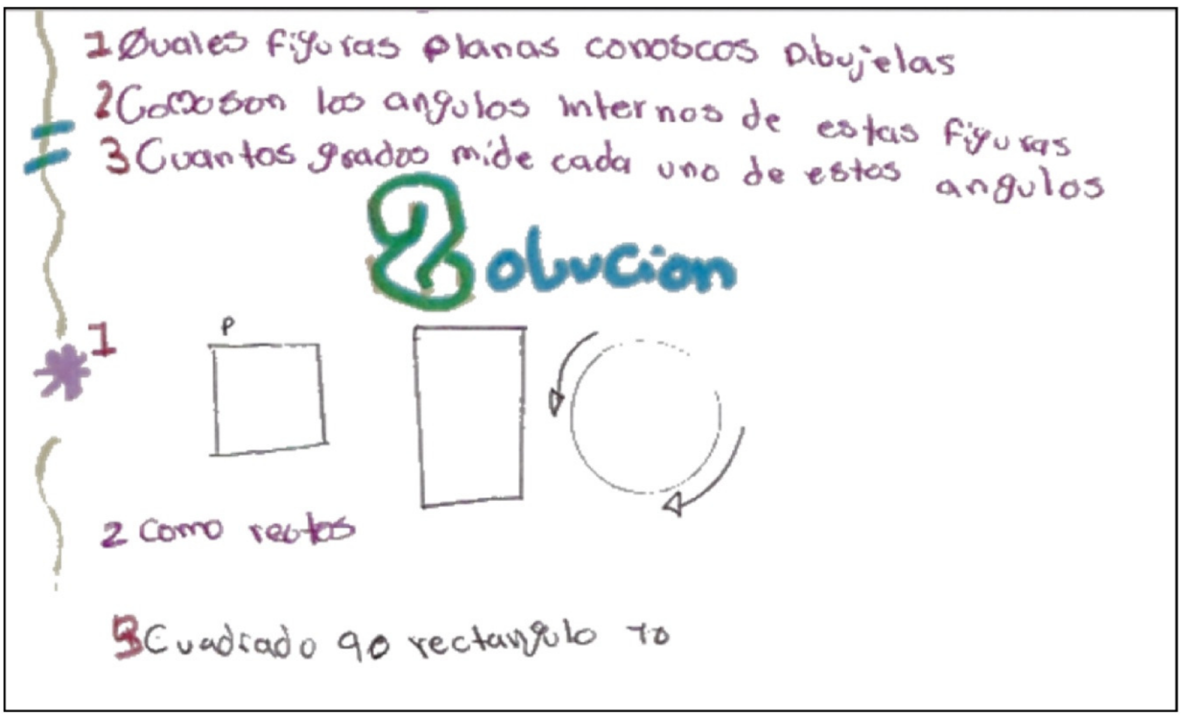
- ¿Qué debo hacer para poder solucionar estas situaciones? ¿Por qué?
- ¿Conozco un problema parecido?
- ¿Cuál es el camino más sencillo para solucionar esta situación?

7.2.4.1 Aplicación de fase de orientación libre

A continuación se muestran los resultados que consideramos más significativos y a seguir un análisis sobre los mismos.

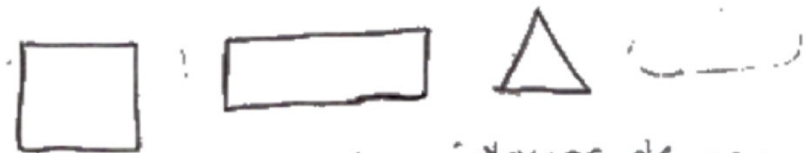
¿Qué hicieron los alumnos?

Muestra A



Muestra B

1 cuales fijuros planos conosco



2 como son Los agulos internos de esto

La malloria son retos y Los del triangulo son como mas agudos

3. cuantos Grados mide cada uno de sos angulos

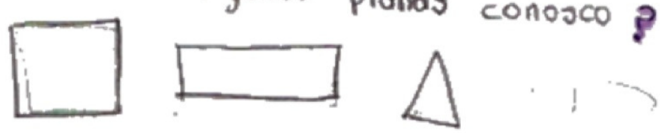
cuadrado 90.

rentangulo 90

triangulo 407040

Muestra C

¿1 cuales Figuras planas conosco?



como son los angulos internos de esta

la malloria de los angolos son rectos y los del triagulos son mas agudos

cuantos grados miden cada uno de estos angulos

cuadrado 90° grados

rectangulo 90° grados

triangulo 60° grados

7.2.4.2 ¿Qué encontramos?

- Los estudiantes se remiten básicamente al cuadrado, rectángulo y triangulo, a pesar de que se les mostraron anteriormente en diferentes posiciones, tamaños y tipos, se siguen fundando en las icónicas “culturales”.
- Hay una idea clara de los ángulos internos de las figuras y su clasificación general.
- Nos llama la atención las medidas que enuncia la muestra B en el triangulo, pues curiosamente su sumatoria es 180º.
- Llama también la atención la presencia de la circunferencia en la muestra A, pues no aparecen ángulos relacionados.

7.2.5 Fase de integración

"Comparto lo que se"

Mediadores: socialización de las soluciones logradas.

¿Qué se hace?

Es aquí en donde luego de la socialización de las respuestas dadas por los estudiantes, nos ponemos de acuerdo en torno a la "manera" más apropiada de solucionar la situación.
Esta fase tiene mucho de la validación y modificación en la modelación enunciadas por Posada y Villa.

Preguntas

- ¿Podemos utilizar estos mismo "métodos" para solucionar otro tipo de problemas?
- ¿Cuáles?
- ¿Estamos de acuerdo en las soluciones de nuestros compañeros? ¿Por qué?
- ¿Para qué situaciones de la vida diaria sirve medir ángulos?
- ¿Cuáles? ¿Por qué?

Por último, les pedimos a los estudiantes que traten de esbozar una situación en donde puedan aplicar el camino que encontramos con el problema anterior para medir ángulos.

7.2.6 Aplicación de fase de integración

“Comparto lo que se”

A continuación se enuncian los comentarios que sobresalieron en esta fase:

- Los estudiantes manifestaron que no habían pensado en esta “manera” para medir ángulos.
- Reconocen la dificultad que presenta este método pare medir ángulos de manera exacta, no obstante creen que les puede ser útil en el futuro.
- En su mayoría no reconocieron la dificultad que presenta una incorrecta partición en secciones iguales a la hora de clasificar los ángulos centrales generados.
- Hubo consenso en las respuestas puestas en común, con relación a la asociación entre las secciones de la torta fraccionaria (según partición dada), y los ángulos centrales generados allí mismo.
- Los estudiantes plantearon que es más fácil utilizar el trasportador para medir ángulos, aunque no lo manejan apropiadamente.

7.3 Prueba de modelación

En esta prueba, se buscó en los estudiantes, además de dar cuenta de la respuesta correcta, que explicitaran de manera escrita el proceso que los condujo a ella; lo que nos permitiría, mediante la comparación con los descriptores enunciados al principio, establecer la forma y nivel de modelación que lograron alcanzar, luego de la aplicación de las actividades precedentes.

La prueba constó de dos problemas base, los cuales enunciamos a continuación:

(1) *En la sala de cuidados intensivos del hospital veterinario para gatos MIAU, hay actualmente 14 gatos en observación; si estos representan los* $\frac{2}{8}$ *de la población total hospitalizada, ¿Cuántos gatos hay en el hospital?*

(2) *Con base en la cantidad de estudiantes de tu salón, llena la siguiente tabla y responde a las preguntas siguientes:*

CANTIDAD DE ESTUDIANTES DE MI SALÓN		
NIÑOS	*NIÑAS*	*TOTAL*

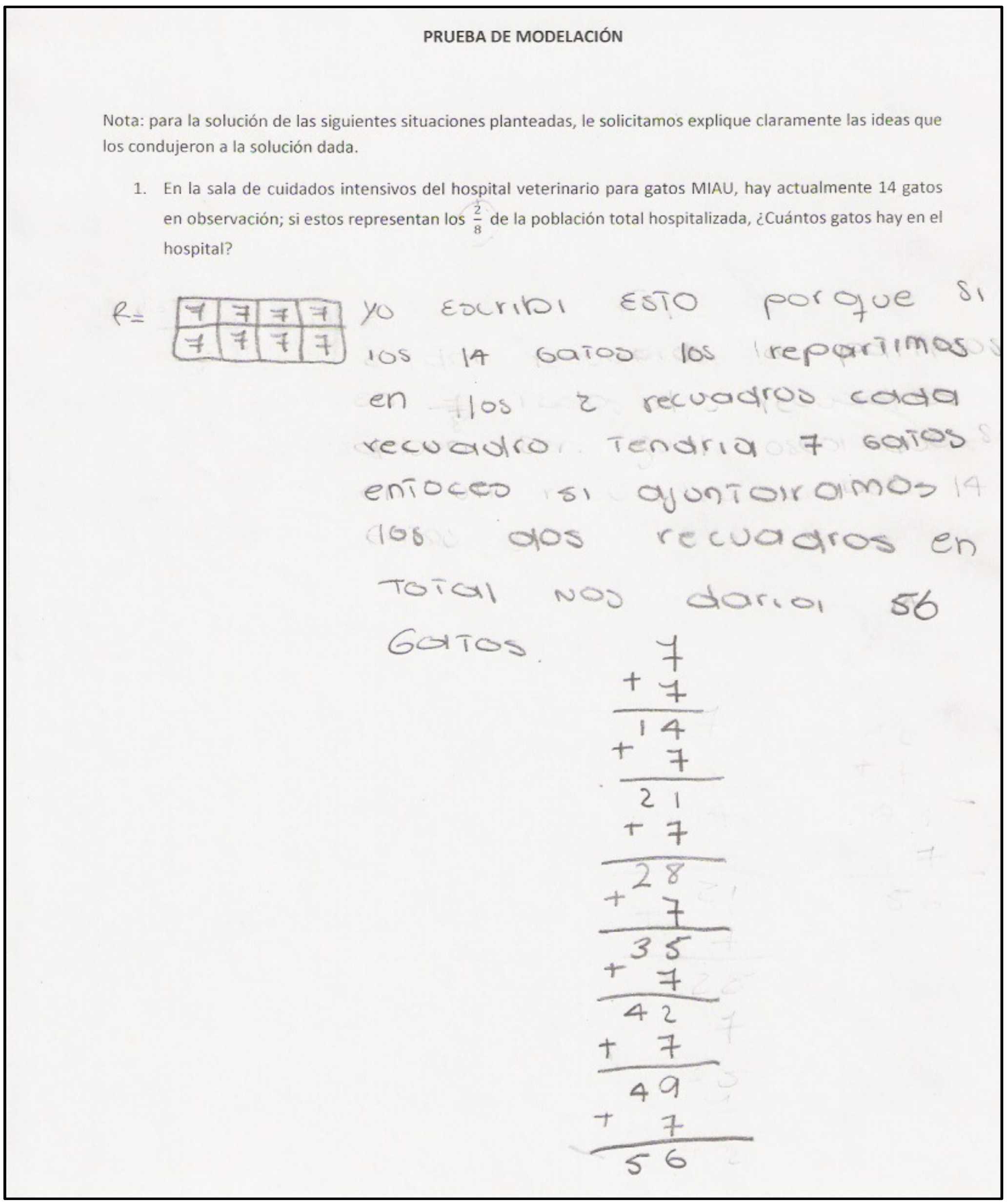
¿Qué fracción del total de los estudiantes son niños?
¿Qué fracción del total de los estudiantes son niñas?
¿Qué fracción del total representan la suma de los niños y las niñas?

7.4 Aplicación prueba de modelación

En la aplicación de la prueba de modelación no se discriminaron los momentos en fases, como en las anteriores actividades, ya que lo pretendido es precisamente que los estudiantes seleccionen el camino adecuado, según su criterio, para solucionarla, acudiendo al proceso orientado en las pruebas uno y dos, permitiéndonos evidenciar como y en qué nivel están modelando, con base en los descriptores y tipos de modelación definidos al principio.

A continuación presentamos algunas muestras significativas de las pruebas de modelación.

Muestra 1A



PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

1. En la sala de cuidados intensivos del hospital veterinario para gatos MIAU, hay actualmente 14 gatos en observación; si estos representan los $\frac{2}{8}$ de la población total hospitalizada, ¿Cuántos gatos hay en el hospital?

R=

7	7	7	7
7	7	7	7

yo escribi esto porque si los 14 gatos los repartimos en los 2 recuadros cada recuadro tendria 7 gatos entonces si ajuntairamos los dos recuadros en total nos daria 56 gatos.

$7 + 7 = 14$
$14 + 7 = 21$
$21 + 7 = 28$
$28 + 7 = 35$
$35 + 7 = 42$
$42 + 7 = 49$
$49 + 7 = 56$

Muestra 1B

PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

1. En la sala de cuidados intensivos del hospital veterinario para gatos MIAU, hay actualmente 14 gatos en observación; si estos representan los $\frac{2}{8}$ de la población total hospitalizada, ¿Cuántos gatos hay en el hospital?

Solucion

R=

7	7	7	7
7	7	7	7

yo escribi esto porque pense que el fraccionario me decia $\frac{2}{8}$ dos octavos me decia que partiera dos octavos en dos partes y en la sala de emergencia caben 7 gatos entoces es ahy 56 gatos porque 7x8=56 hay 56 gatos en total

Muestra 1C

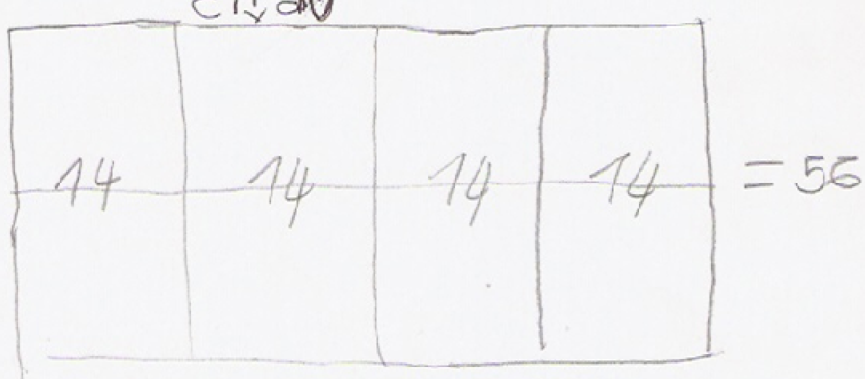
PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

1. En la sala de cuidados intensivos del hospital veterinario para gatos MIAU, hay actualmente 14 gatos en observación; si estos representan los $\frac{2}{8}$ de la población total hospitalizada, ¿Cuántos gatos hay en el hospital?

Solución

1) En el hospital hay en total 56 gatos.-
Ejemplo



Nosotros tubimos la idea de hacer estes dibujo o ejemplo por la razon de que si pusieramos 14 en cada casilla daria un mayor que el resultado

Muestra 2A

PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

2. Con base en la cantidad de estudiantes de tu salón, llena la siguiente tabla y responde a las preguntas siguientes:

CANTIDAD DE ESTUDIANTES DE MI SALÓN		
NIÑOS	NIÑAS	TOTAL
5	30	35

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niños?

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niñas?

¿Qué fracción del total representan la suma de los niños y las niñas?

Solución

1) $\frac{5}{35}$ por que en el salón hay 35 alumnos y hay 5 niños.

$\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$ un septimo es equivalente a cinco treintacinco avos.

2) $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$ yo ise esto por que para dar solución al problema era una forma facil.

3) $\frac{5}{35} + \frac{30}{35} = \frac{35}{35}$ yo lo hice asi porque sabria cuantos alumnos hay en total en forma de fraccionario

$\frac{35}{35} = \frac{7}{7} = 1.$

Muestra 2B

PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

2. Con base en la cantidad de estudiantes de tu salón, llena la siguiente tabla y responde a las preguntas siguientes:

CANTIDAD DE ESTUDIANTES DE MI SALÓN		
NIÑOS	NIÑAS	TOTAL
5	30	35

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niños?

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niñas?

¿Qué fracción del total representan la suma de los niños y las niñas?

Solución

1. $\frac{5}{35}$ por que en el salón hay 5 niños y 30 niñas

$\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$ yo lo ice haci porque fue lo que me vino a la cabeza.

2. $\frac{30}{35}$ yo lo respondi asi por que yo pienso que es asi

3. 35 porque asi dan entre todos

Muestra 2C

PRUEBA DE MODELACIÓN

Nota: para la solución de las siguientes situaciones planteadas, le solicitamos explique claramente las ideas que los condujeron a la solución dada.

2. Con base en la cantidad de estudiantes de tu salón, llena la siguiente tabla y responde a las preguntas siguientes:

CANTIDAD DE ESTUDIANTES DE MI SALÓN		
NIÑOS	NIÑAS	TOTAL
5	30	35

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niños?

¿Qué fracción del total de los estudiantes son niñas?

¿Qué fracción del total representan la suma de los niños y las niñas?

Solución

1. $\frac{5}{35}$ por que en total son 35 niñ(a)s y niños son 5.

$\frac{5}{35} = \frac{1}{7} =$ por que fue una forma facil.

2. $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$ por en total niñ(o)s son 35 y niñas son 30.

3. $\frac{5}{35} + \frac{30}{35} = \frac{35}{35} = \frac{1}{1}$ por fue algo dibertido deacer

CONCLUSIONES

Para elaborar las conclusiones, nos basamos en la caracterización que realizamos de los estudiantes, en los descriptores de modelación que diseñamos y adaptamos y, en el análisis y descripción de las pruebas aplicadas, siguiendo las directrices del método investigativo que elegimos, es decir, el cualitativo etnográfico, explicado en el marco metodológico.

Optamos por una tabla para presentar las conclusiones, en paralelo con los elementos descritos en el párrafo anterior, ya que de este modo, serán más evidentes los progresos alcanzados por los estudiantes.

Tabla de caracterización cognitiva

DESCRIPTORES NIVEL DE PENSAMIENTO 2	DESCRIPTORES NIVEL DE PENSAMIENTO 3
• Reconocen los términos de una fracción y los representan gráficamente. • Reconocen los números fraccionarios, los leen y escriben. • Analizan una fracción como parte todo. • No comparan correctamente dos fracciones. • La proporción de las partes seleccionadas de la fracción como grafico, no se ajusta a lo que indica el número. • No amplifican ni simplifican correctamente una fracción.	• Identifiquen correctamente un número fraccionario. • Utilicen la fracción como representante de un proceso de cambio. • Establezca el concepto de fracción equivalente y determinen cuando dos fracciones son equivalentes a una dada. • Comparen y ordenen fracciones. • Reconozca cuando una fracción es propia o impropia. • Simplifiquen y amplifiquen fraccionarios. • Identifiquen el ángulo en situaciones de la vida cotidiana y puedan dibujarlo. • Identifique las particiones de la unidad como patrón para medir ángulos.

	• Desarrollen un modelo procedimental, que le sirva para solucionar situaciones cotidianas. Esto, dado que es en los procedimientos donde se puede evidenciar más claramente la estructuración y puesta en marcha de un modelo matemático.

Tabla de descriptores de modelación diseñados, según los niveles de pensamiento dos y tres, articulados con los estándares básicos de competencia.

DESCRIPTORES NIVEL DE PENSAMIENTO 2	DESCRIPTORES NIVEL DE PENSAMIENTO 3
• Reconoce los términos de una fracción y los representa gráficamente. • Reconoce números fraccionarios los lee y escribe. • Reconoce el círculo dentro del programa como una unidad punto de partida para medir, extendiendo esa cualidad a otras figuras. • Análisis de una fracción como parte todo. • Sistematizar un camino para sumar y restar fracciones. • Reconoce los diferentes tipos de ángulos gráficamente. • Representación icónica de un ángulo.	• Sabe utilizar la fracción como representante de un proceso de cambio. • Establece el concepto de fracción equivalente, sabe determinar cuando dos fracciones son equivalentes a una dada. • Compara y ordena fracciones. • Sabe simplificar y amplificar fraccionarios. • Identifica una fracción propia e impropia sin dudar. • Reconoce con facilidad el camino más útil para solucionar situaciones cotidianas en donde se involucre el concepto de fracción. • Compara y clasifica ángulos (agudo, recto, obtuso y llano) • Asociación de un ángulo a una fracción de la unidad. • Sistematiza un camino para medir ángulos mediante la comparación de fracciones icónicas. • Reconocimiento de una unidad patrón de comparación.

Tabla de conclusiones de las pruebas base.

Al analizar las pruebas a la luz de los objetivos y descriptores planteados encontramos que:

LAS TORTAS FRACCIONARIAS COMO HERRAMIENTA PARA MODELAR	MIDIENDO CON FRACCIONES ICÓNICAS
• Los alumnos representan correctamente una fracción. • Hay claridad en el análisis de una fracción como parte todo. • La sistematización de un camino para operar fracciones definitivamente aparece muy asociada a las representaciones graficas. • La simbolización numérica de las fracciones en algunos casos es algo confusa. • El reconocimiento de una unidad patrón de comparación es definitivamente clara y sin dualidades con respecto a su forma (en el caso de los gráficos). No obstante, las proporciones al interior de la misma es dificultosa. • Los alumnos manifestaron la utilidad de los conocimientos adquiridos en el análisis de fenómenos de la vida cotidiana, como en procesos de compra, juegos y lenguaje natural. • El tratamiento del concepto de fracción, utilizando como mediador las tortas fraccionarias, le permitió a los estudiantes, desarrollar una nueva visión en torno a la amplificación y simplificación de fracciones. • Los alumnos lograron comprender los conceptos de fracción equivalente, propia e impropia, amplificación y simplificación.	• Los alumnos asociaron la partición de la torta fraccionaria, con la amplitud de un ángulo, y la utilizaron como herramienta de clasificación de ángulos rectos, llanos, obtusos y agudos. • A pesar de que la dificultad en las particiones a nivel proporcional continúa, los alumnos reconocieron en ella un camino útil para medir ángulos. • Los alumnos lograron articular los conceptos de partición fraccionaria de la torta con la de ángulo central. • Los alumnos aceptaron e incorporaron nuevos caminos útiles, para elaborar procesos de medición de ángulos.

Tabla de conclusiones de la prueba de modelación y pertinencia de la propuesta.

PRUEBA DE MODELACIÓN	PERTINENCIA DEL PROYECTO
• Los alumnos se apoyan en los gráficos fraccionados al momento de solucionar los problemas propuestos. • Hay claridad en las distribuciones equitativas, asociadas a las particiones de los gráficos utilizados en el proceso de solución. • La concepción de fracción como parte todo, es ahora percibida en un sentido bidireccional, permitiendo a los estudiantes partir de las partes para hallar el todo. • Los alumnos recurren a modelos gráficos, para apoyar el proceso de solución de los problemas planteados. • Los alumnos están recurriendo a modelos explicativos escritos, para dar cuenta de la manera en que abordan un problema. Situación que al principio no se daba generalmente. • Los alumnos lograron desarrollar modelos procedimentales, superando los fácticos, en la medida que restaron importancia a los conocimientos memorísticos, utilizando procedimientos de graficación que les permitieron analizar y solucionar las pruebas propuestas.	• La experiencia con los estudiantes nos permitió validar la articulación de la estrategia de Van Hiele, con el proceso de modelación matemática; es decir, es pertinente su implementación al interior del aula de clase, para apoyar las demandas del ministerio de educación nacional, en torno a dicho proceso. • Consideramos posible el acercamiento de un nivel de pensamiento, caracterizado según los descriptores de Van Hiele, a uno superior, mediante la asimilación de nuevos aprendizajes, dado que los comprobamos con los descriptores diseñados y adaptados para tal fin, al tiempo que detectamos los procesos de modelación alcanzados por los estudiantes.

RECOMENDACIONES

Después de haber experimentado la dinámica propia de la práctica pedagógica, consideramos importante se tengan en cuenta las siguientes recomendaciones, para orientar las futuras prácticas pedagógicas:

1. Permitir un poco mas de libertad en las propuestas investigativas, a los maestros en formación.
2. Reducir los espacios de tiempo destinados a la ejecución de la práctica (a los sumo a un semestre), enfocándola específicamente a la aplicación, recolección y análisis de la propuesta investigativa.
3. Orientar los esfuerzos hacia la distribución de los maestros en formación, para que realicen la práctica pedagógica en diversas instituciones oficiales, ya que pudimos encontrar en ellas, gran avidez de las investigaciones y teorías de vanguardia que estudiamos en la universidad.

BIBLIOGRAFIA

(1) DE LA TORRE, Andres, *La modelizacion del espacio y del tiempo*, Editorial Universidad de Antioquia, Mayo de 2003.

(2) GALLEGO BADILLO, Romulo, *Un concepto epistemológico de modelo para ladidáctica de las ciencias experimentales*, Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 3 Nº 3, 2004.

(3) GUALDRON PINTO, Edgar y GUTIERREZ RODRIGUEZ, Angel, *Una aproximacion a los descriptores de los niveles razonamiento de Va Hiele para la semejanza,* Universidad de Pamplona (Colombia) y de Valencia (España), respectivamente.

(4) BASSANEZI, R., *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto. 2002.

(5) DE LA TORRE, Andres, *El metodo socratico y el modelo de van Hiele,* Universidad de Antioquia.

(6) SEDUCA, *Estandares de matematicas,*2007.

(7) MEN, *Lineamientos curriculares de matematicas,*1998

(8) VERA VELZ, Lamberto, *La investigación cualitativa.* UIPR, Ponce, P.R.

(9) POSADA y VILLA, *El proceso de modelado en la educación matemática,* Universidad de Antioquia, 2007.