INTUICIONES COMBINATORIAS EN CUARTO DE PRIMARIA

HERNÁN DARÍO BEDOYA BUSTAMANTE
JAVIER ENRIQUE LÓPEZ BEDOYA
EDER AUGUSTO ECHAVARRÍA MENDOZA

ASESORA:
Lucia Zapata Cardona PhD.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Medellín, diciembre de 2011

INTUICIONES COMBINATORIAS EN CUARTO DE PRIMARIA[1]

HERNÁN DARÍO BEDOYA BUSTAMANTE
JAVIER ENRIQUE LÓPEZ BEDOYA
EDER AUGUSTO ECHAVARRÍA MENDOZA

Monografía para optar al título de Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

ASESORA:
Lucia Zapata Cardona PhD.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
2011

[1] Trabajo auspiciado por el Instituto colombiano para el desarrollo de la ciencia y la tecnología−Colciencias− bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309

DEDICATORIA

A aquellos que nos brindaron todo su apoyo, con amor.

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestros agradecimientos a:

Nuestras familias por su acompañamiento y preocupación durante toda nuestra formación personal y profesional.

Nuestra asesora: Lucia Zapata, persona incondicional quien con su experiencia aportó a nuestro fortalecimiento y formación personal y académica.

A nuestros participantes por su disposición, aportes y por ser la razón de ser del proceso de investigación desde nuestra formación personal y mejoramiento profesional.

A la Institución Educativa Capilla del Rosario por brindarnos la oportunidad de realizar nuestra práctica profesional y abrirnos sus espacios para nuestra investigación.

Al profesor Víctor Manuel Vega Vallejo por su valiosa dedicación y aportes a nuestras experiencias como docentes en formación e investigadores. A él infinitas gracias.

A los investigadores Christine Flanklin, Manfred Borovcnik y Pedro Rocha por sus valiosas recomendaciones a este estudio.

Al Instituto colombiano para el desarrollo de la ciencia y la tecnología -Colciencias- que bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309 nos brindó apoyo para realizar esta investigación.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En este estudio se exploran las estrategias intuitivas de estudiantes de cuarto grado al resolver problemas combinatorios. La información se recogió mediante entrevistas semi-estructuradas con ocho estudiantes en edades entre ocho y diez años. Se diseñaron tareas combinatorias que funcionaron como dispositivos en las entrevistas, las cuales fueron grabadas en video y audio. El análisis se llevó a cabo mediante el análisis de contenido con apoyo del software Atlas.ti. Los resultados revelan que los estudiantes tienen diferentes formas de aproximarse a la solución de problemas de tipo combinatorio. Algunos se aproximan usando estrategias de ensayo error, otros exploran mediante formas sistemáticas rudimentarias, otros mediante formas un poco más sistemáticas y además consistentes pero que no siempre ayudan a encontrar todo el espacio muestral, y otros logran encontrar un sistema consistente.

INTRODUCCIÓN

Diversos autores como Correia y Fernandes (2007), y Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1996) reconocen la importancia del trabajo combinatorio en la escuela porque favorece el desarrollo de las capacidades de razonamiento, es un componente esencial en el desarrollo formal y es la base de las matemáticas discretas. A pesar de esta reconocida importancia, la enseñanza de la combinatoria es poco trabajada en nuestro sistema educativo. Algunas de las razones de esta ausencia es el limitado número de estudios en enseñanza de la combinatoria y la poca disponibilidad de material de apoyo para los profesores. Otra razón que no se puede ignorar es la formación estadística que reciben los maestros hoy en día y la que recibieron los maestros formados hace algunos años; algunas propuestas curriculares o normativas del Estado permiten evidenciarlo. Por ejemplo, para el año 1963 según el decreto 1710, para el área de matemáticas en primaria sólo se contemplaba la aritmética y la geometría intuitiva (MEN, 1963). Para el año 1984 con los programas de renovación curricular, se contemplan los sistemas de datos que en particular para el grado cuarto sugerían la recolección, tabulación y representación de datos; además de la iniciación al análisis de datos. (MEN, 1985). Esto podría justificar que los docentes formados bajo estas perspectivas curriculares dieran mayor énfasis a la aritmética y posteriormente a los sistemas de datos pero no necesariamente a la combinatoria. Incluso actualmente la combinatoria no es un componente explícito en nuestros currículos. A pesar de esto, creemos que los estudiantes llegan al salón de clase con algunas nociones que podrían ser útiles a la hora de emprender la enseñanza de la combinatoria.

En este estudio se exploran las estrategias intuitivas de estudiantes de cuarto grado al resolver problemas combinatorios. Creemos que si podemos dar cuenta de las formas en que los estudiantes se enfrentan intuitivamente a problemas combinatorios podríamos tener más elementos para diseñar material didáctico y para orientar la enseñanza. También nos podría ayudar a mostrar que, si bien los estudiantes cuentan con algunas nociones, la instrucción es necesaria (Correia & Fernandes, 2007).

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Problema de investigación

La enseñanza de la estadística dentro de las aulas en los niveles de la educación básica y media dentro del contexto educativo colombiano ha estado marcada por la ausencia (Zapata, Quintero, & Morales, 2010), aún cuando en las propuestas oficiales del Ministerio de Educación Nacional (en adelante MEN), la estadística aparece como un eje sobre el cual se puede desarrollar el currículo (MEN, 1998; 2006). Sin embargo, este fenómeno no solo se presenta a nivel nacional; la ausencia de la enseñanza de la estadística en la escuela primaria y secundaria es una problemática presente en otros países. Así, por ejemplo, en España la estadística se incluye en los currículos, pero muchos profesores tienden a postergar su enseñanza para el final del año académico, incluso en ocasiones se omite ya que los maestros no se sienten cómodos con la enseñanza de la estadística (Batanero, 2002).

La presente investigación surge como respuesta a una necesidad observada en el contexto de la práctica docente. Nuestra práctica fue llevada a cabo en una institución educativa de carácter público de un barrio al suroccidente de la ciudad de Medellín. Fundamentados en nuestro contacto con la institución, los documentos oficiales y la observación de algunas clases de matemáticas descubrimos que los estudiantes reciben incipiente instrucción en el pensamiento aleatorio a pesar de los requerimientos de los estándares básicos de competencias en matemáticas, del Ministerio de Educación Nacional (2006) (2006).

De acuerdo a los citados estándares, en los grados cuarto y quinto se deben trabajar: representaciones de datos usando tablas y gráficos, comparaciones de diferentes representaciones de un mismo conjunto de datos, interpretación de información presentada en tablas y gráficos, posibilidades de ocurrencia de eventos, descripción y comparación de distintos datos de un conjunto, uso e interpretación de media y mediana, y problemas a partir de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos. La gran mayoría de las temáticas contempladas para estos grados dentro del pensamiento aleatorio hacen solo referencia al trabajo con la estadística descriptiva más que al trabajo con la aleatoriedad. Esto muestra una priorización de ciertas temáticas que muchas veces son empleadas para el trabajo transversal con otros pensamientos y no necesariamente para el trabajo dentro del pensamiento aleatorio como tal; como es el caso del uso e interpretación de tablas y gráficos que pueden ser usadas para apoyar el trabajo del pensamiento numérico.

Es necesario mencionar que en la institución de práctica hay un solo profesor responsable del área de matemáticas para los grados cuarto y quinto. Además, el plan de estudios del área está integrado y se presenta como un listado de temáticas propuestas para trabajar en el grado cuarto y quinto, sin una diferenciación específica de las temáticas correspondientes a cada grado. El profesor de acuerdo a las temáticas tratadas y al desempeño de los estudiantes en el grado cuarto, continúa o reorienta las temáticas que necesitan una mayor profundización en el grado quinto.

Por otra parte, en el plan de estudios de matemáticas de la institución propuesto para los grados cuartos y quintos, se le da mayor importancia al pensamiento numérico, relegando el trabajo con el pensamiento aleatorio (Vega, 2010). Por ejemplo, en el mencionado plan de estudios, en el componente del pensamiento numérico para el grado cuarto, se inicia el trabajo sobre la historia del número. Posteriormente, se aborda el uso cotidiano de las matemáticas y los números naturales. Allí se enfatiza en la escritura de números de varias cifras, para terminar con el valor posicional. Una vez introducido el valor posicional, se inicia el trabajo con las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) a partir de diversas situaciones (connotación dada por el maestro cooperador) cotidianas para los estudiantes y que involucran dichas operaciones. Una vez se ha trabajado con las cuatro operaciones, se continúa con los números fraccionarios donde se enfatiza principalmente la representación, escritura y comparación de fracciones.

De forma similar en el grado quinto, para este mismo pensamiento, el trabajo se centra fundamentalmente en el estudio formal de las fracciones, iniciando con la representación a partir de material concreto de las fracciones, amplificación y simplificación. También se hace un fuerte énfasis en la clasificación de las fracciones (homogéneas y heterogéneas), para luego centrar el trabajo en las operaciones con números fraccionarios (adición, sustracción, multiplicación y división) a partir de ciertas situaciones que involucran dichas operaciones.

En cuanto al pensamiento métrico, tanto para el grado cuarto como para el grado quinto, el trabajo se basa en la identificación de sistemas métricos y unidades de medida para luego trabajar las medidas de área y volumen. En relación al pensamiento espacial, en ambos grados, se desarrolla básicamente mediante la identificación y clasificación de cuerpos geométricos, con sus respectivos componentes (caras, aristas, vértices y ángulos). En este plan de estudio, no se contemplan temáticas asociadas al pensamiento variacional.

En lo que se refiere al pensamiento aleatorio encontramos que el plan de estudios contempla solamente la construcción y la lectura de tablas de información y gráficos de barras, el cálculo de la media, la determinación de la moda y la interpretación y aplicación de éstas en situaciones problema. Sin embargo, en nuestras observaciones de clase solo se evidenció la lectura de tablas de información para extraer datos en la solución de problemas relacionados con el pensamiento numérico, por lo que se dejó de lado el trabajo estadístico como tal. Si bien, la representación y la interpretación de tablas y gráficos fueron trabajadas, se dejó de lado la comparación de conjuntos de datos, la predicción de la ocurrencia de eventos, la distribución de datos y la formulación de problemas a partir de datos observados, consultados o que surgen de ciertos experimentos. El trabajo con algunas medidas de tendencia central como la moda y la media aunque están contempladas en el plan de estudios también se dejó de lado.

Parte del problema que planteamos en este estudio también se justifica en la falta de material de apoyo para la enseñanza de la estadística en la escuela, ya que son pocos los textos escolares que pueden usarse para trabajar en el aula pues abordan pocos temas. Ejemplo de esto, para el grado cuarto, son los textos como: Matemática Constructiva (Quijano de Castellanos & Pullas, 1994), Esplendor Matemático (Zapata & Guerra, 2001), Estándares Matemáticos (Guerra & Zapata, 2003) y el libro de actividades Pirámide (Grupo Editorial Norma, 2002) que cuentan con pocos temas para el pensamiento aleatorio en comparación con la abundancia de temas para el pensamiento numérico.

Además, de la falta de material de apoyo y la inequidad de los contenidos dentro de los planes de estudios, la formación estadística que reciben los maestros en muchos países como Canadá, México, Cuba y Reino Unido es muy básica, así lo plantea Rede (1986 citado por Toledo 2000). También, algunas personas tienen una concepción errónea acerca de la veracidad que ofrece la información estadística; es decir, las personas creen que la estadística miente (Araujo, s.f); debido posiblemente a que dentro de los resultados de las encuestas no se tiene en cuenta a toda la población, sino a unos pocos. Esto es una situación que se puede evitar si en la educación estadística se deja claro lo concerniente al trabajo con la población y la muestra y el valor que agrega a la inferencia el muestreo aleatorizado.

Finalmente, parte del problema se justifica también en que dentro de los estándares de competencias en matemáticas, para los grados cuarto y quinto, la combinatoria no está contemplada de manera explícita; razón por la cual, quizás muchos maestros no la abordan en el aula de clase. Sin embargo, en los estándares referentes al pensamiento numérico se plantean situaciones multiplicativas, y en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) se propone como un tipo de situación multiplicativa aquella que se denomina producto cartesiano y que según estos lineamientos resulta menos sencilla que una situación multiplicativa de razón. La situación multiplicativa tipo producto cartesiano puede considerarse como un problema combinatorio de esquema multiplicativo.

Por los escenarios discutidos en los párrafos previos, consideramos que la enseñanza de la combinatoria en la escuela es crucial para el desarrollo de los esquemas multiplicativos pero aún no hay una clara descripción en la literatura de cómo los estudiantes se enfrentan de manera intuitiva a problemas combinatorios. Consideramos que una descripción detallada de este fenómeno puede ser una contribución importante a la comunidad educativa. Esta investigación pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo solucionan de manera intuitiva los estudiantes de cuarto grado algunos problemas combinatorios?

1.2. Objetivo

Analizar las estrategias intuitivas de un grupo estudiantes de grado cuarto cuando solucionan problemas combinatorios.

2. JUSTIFICACIÓN

El pensamiento estadístico debe ir más allá del simple uso e interpretación de gráficos. La estadística, como lo propone Begg, (1997), citado por Batanero (2000, pág. 1)"[…] es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores y trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos" además, favorece la toma de decisiones acertadas en lo económico, político y social. El pensamiento estadístico debe estimularse desde los primeros años ya que permite razonar con la información dada, ponerla en contexto y generar nueva información. Estimular el pensamiento estadístico no necesariamente requiere la aplicación de algoritmos para solucionar problemas.

El marcado interés de la institución por favorecer el pensamiento numérico sobre el pensamiento aleatorio, evidenciado en el plan de estudios de matemáticas, nos hace pensar que es necesario emprender acciones para revelar las contribuciones del pensamiento aleatorio al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en la escuela primaria. Por esta razón consideramos necesario realizar un estudio que explore las intuiciones que exhiben los estudiantes, de cuarto grado, cuando resuelven problemas combinatorios. Hemos enfocado nuestros esfuerzos en el grado cuarto porque es el grado en el que desarrollamos la práctica docente por tres semestres consecutivos.

Sospechamos que debido a la falta de material didáctico disponible, la formación básica de los profesores y a la ausencia de la combinatoria en el plan de estudios de matemáticas para los grados cuarto y quinto, no se le ha dado la importancia a la combinatoria como un dispositivo potente en desarrollo del pensamiento matemático.

Sentimos que este estudio puede ser una contribución a la comunidad educativa para sensibilizarse con respecto a la importancia de la estadística en la escuela primaria. Además, puede ofrecer a los profesores ejemplos específicos de problemas combinatorios y una ilustración de como los estudiantes los resuelven. Sentimos que explicitar los aciertos y las dificultades de los estudiantes de primaria al resolver problemas combinatorios puede ser un aporte importante a la comunidad educativa para dimensionar las complejidades del pensamiento combinatorio y para orientar la toma de decisiones con respecto a la instrucción y evaluación.

Consideramos que este estudio puede constituirse en un referente para nuevas investigaciones que busquen potencializar no solo la enseñanza de la combinatoria sino también la de otras temáticas del campo de la estadística. Creemos que es fundamental, para la enseñanza, partir de las intuiciones de los estudiantes sobre conceptos matemáticos. Esto puede dar una indicación de los recursos que el estudiante pone en juego al enfrentarse a tareas combinatorias y de los recursos con los que el estudiante cuenta cuando llega al aula de clase.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

3.1. Marco Teórico

En esta sección discutiremos algunas ideas que fueron fundamentales en el desarrollo de esta investigación tales como: Intuición, combinatoria, problema, resolución de problemas y entrevista clínica. Las ideas de intuición, combinatoria y problema fueron la base para la construcción del instrumento que permitió estudiar las estrategias empleadas por los estudiantes. Estos recursos fueron analizados para identificar las estrategias intuitivas que los participantes evidenciaron cuando se enfrentaron a la solución de problemas combinatorios. Las ideas de resolución de problemas y las de entrevista clínica fueron esenciales para el diseño metodológico de este estudio.

La intuición, puede ser entendida como una actitud cognitiva que goza de ciertas características: es persistente, es flexible, tiene consistencia interna, generalidad y coercividad (Fischbein & Grossman, 1997; Fischbein, 1975 y 1987, citado por Silva, Fernandes, & Soares, 2004). Además, ciertos autores la asumen como una función de percepción y por lo tanto un proceso natural del ser humano (Lorenz 1993, citado por Ramirez, 2009), otros como una suma de experiencias (Memmert, 1976) o como un modo de conocimiento primario y fundamento absoluto de dicho conocimiento (Ferrater, 1994). Sin embargo, las intuiciones de las personas deben analizarse a partir de un sistema de respuestas observables (estrategias y argumentos) (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996).

Debido a estos aspectos, autores como Correia y Fernandes (2009) han considerado sus investigaciones a la luz de las estrategias espontáneas de sus participantes, esto es, las "[…] estrategias usadas por los alumnos antes de la enseñanza formal de un tema (Intuiciones primarias en la terminología de Fischbein, 1975)” (Correia & Fernandes, 2009, pág. 340). De esta forma, en esta investigación, entenderemos intuición como una idea o concepción, previa a la enseñanza formal de un tema, evidenciable mediante una acción espontánea que se genera a partir del enfrentamiento a un problema y que puede interpretarse o exponerse de acuerdo a las estrategias y argumentos empleados para la solución de dicho problema. Es decir, en este estudio no se considerarán intuiciones secundarias o posteriores a la enseñanza.

Otra de las ideas importantes en el presente trabajo es la de combinatoria, ya que es la temática principal de este estudio. Así, para efectos de esta investigación y teniendo en cuenta lo propuesto por Cameron, (1997, citado por Zapata, Quintero y Morales, 2010) y Ribnikov (1988, citado por Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1996) entendemos la combinatoria como la forma de seleccionar, listar, arreglar, organizar y clasificar los elementos de un conjunto, teniendo en cuenta la importancia del orden dentro de la selección de los elementos. De acuerdo con ciertos autores (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996; Silva, Fernandes & Soares, 2004), es necesario considerar algunos tipos de operaciones combinatorias (combinaciones, permutaciones y arreglos con o sin repetición) y el número y la naturaleza de los elementos que se deben combinar (personas, números, objetos). Según los citados autores, éstas son algunas de las variables que afectan el desempeño de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de combinatoria. Lo que sugiere que hay diferentes niveles de dificultad y diferentes estrategias de solución en los diferentes problemas.

Continuando con la descripción de las ideas importantes en este estudio proponemos que un problema debe ser una situación que pueda ser real o ficticia, para la que se puede o no determinar una solución, y por lo cual quien se enfrenta al problema no dispone de un medio matemático estructurado o de un plan claro (consecuencia de una enseñanza formal) para lograr resolverlo. Además, consideramos que los problemas pueden ser relativizados, ya que lo que para alguna persona en particular puede ser un problema, para otra puede ser tan solo un ejercicio; esto dependerá fundamentalmente de las herramientas matemáticas (conocimientos) y recursos cognitivos que el sujeto dispone para enfrentarse a la solución. Los problemas combinatorios pueden ser resueltos mediante estrategias intuitivas de ensayo y error o por la aplicación de una estrategia sistemática. Algunas, estrategias intuitivas son más sofisticadas que otras y el contexto en el cual estén enmarcadas también contribuye a la solución.

Consideramos que algunos aspectos de la resolución de problemas podrían ser apropiados para nuestra investigación por varias razones. Primero, estábamos interesados en las formas en que los estudiantes se enfrentan intuitivamente a problemas combinatorios y la resolución de problemas pone al participante en una condición en la que debe tomar alguna acción sobre el problema, con esto demuestra que quiere resolverlo, hasta que consiga dar por terminada la tarea (Puig, 1996; citado por Santos Trigo, 2008). Segundo, aunque nuestro interés inicial no era la instrucción, la resolución de problemas puede ayudar a la construcción de conceptos matemáticos, debido principalmente a la diversidad de estrategias que pueden ser utilizadas.

El principal objetivo de usar la resolución de problemas en este estudio fue ubicar al estudiante en una situación para la cual él no tuviera un medio matemático estructurado influenciado por la enseñanza y de esa manera asegurar que las intuiciones como actitud cognitiva pudieran aflorar. Estas tres justificaciones evidencian la resolución de problemas exclusivamente como la acción de exponer a una persona a resolver un problema.

Los problemas fueron presentados mediante entrevistas clínicas. Dentro de las entrevistas clínicas se realiza una planificación previa, de manera parcial, de los contenidos, tareas y preguntas que se le van a plantear al entrevistado; de allí que el formato más común en las entrevistas clínicas sea semiestructurado (Engelhardt, Corpuz, Ozimek, & Rebello, 2004). El objetivo de estas entrevistas es comprender los patrones de razonamiento de los estudiantes, sin tratar de cambiarlos, para esto es necesario realizar grabaciones y análisis de cada sesión de trabajo, donde a los participantes se les hacen preguntas reiteradamente para obtener la mayor cantidad de sus razonamientos y procesos de pensamiento, como sea posible. Además, las entrevistas clínicas pueden ser individuales o grupales y tradicionalmente han proporcionado detalles de la comprensión de los estudiantes y revelado áreas donde los estudiantes están confundidos (Engelhardt, Corpuz, Ozimek, & Rebello, 2004).

3.2. Marco de Referencia

En esta sección presentaremos tres grupos principales de investigación sobre el razonamiento combinatorio, recopilados por Silva, Fernandes y Soares (2004), liderados principalmente por Piaget, Fischbein y Batanero; y algunos planteamientos de estudios que han realizado investigadores brasileros. Algunos de estas investigaciones han estudiado el pensamiento combinatorio de los estudiantes antes de la instrucción en combinatoria y se ha encontrado que las intuiciones de los estudiantes no fueron intuiciones ciegas. Por el contrario esas primeras intuiciones llevaban implícito un esquema combinatorio y en ocasiones una computación asociada.

Las investigaciones de Piaget, referenciadas por Silva, Fernandes y Soeres (2004) sobre combinatoria han sido enfocadas principalmente a las influencias del razonamiento combinatorio en el desarrollo del pensamiento formal, a partir de una clasificación de problemas combinatorios según la operación que se requiere para solucionar el problema. De esta forma, Piaget distingue tres tipos de operaciones según Silva, Fernandes y Soares (2004): combinación, permutación y arreglos. La primera, la combinación, es entendida como una secuencia no ordenada formada por una cantidad de p elementos elegidos de una cantidad de n objetos disponibles. La segunda operación, la permutación, es asumida como una secuencia ordenada constituida por n elementos correspondiente a los n objetos disponibles y demanda una mayor complejidad que la combinación. Finalmente, la tercera operación combinatoria denominada arreglos es una secuencia ordenada constituida por p elementos de n objetos disponibles y que se considera como una síntesis de las combinaciones y las permutaciones.

Según Piaget e Inhelder es en el periodo de operaciones formales donde los adolescentes descubren espontáneamente procedimientos sistemáticos de enumeración y conteo en combinatoria, puesto que las tres operaciones combinatorias demandan la capacidad de coordinar la seriación y la correspondencia en una sola operación (Piaget e Inhelder, 1951; citados por Silva, Fernandes, & Soares, 2004; Batanero, Godino, & Navarro-Pelayo, 1996). Piaget trabajó principalmente mediante entrevistas clínicas aplicadas a niños y adolescentes, estudiando la influencia del razonamiento combinatorio en el desenvolvimiento del pensamiento formal.

A diferencia de Piaget, Fischbein considera que es necesaria la instrucción para que el niño adquiera las técnicas combinatorias, por lo que se interesó por los efectos de la instrucción en las personas (Roa, Batanero, Godino, & Cañizares, 1996) (Roa, Batanero, Godino, & Cañizares, 1996). Sus trabajos se desarrollaron principalmente con niños entre los 8 y los 15 años pero también realizó estudios con adultos apoyado en problemas combinatorios que siguen la misma clasificación según las operaciones combinatorias que distingue Piaget, estableciendo además una diferencia entre arreglos con y sin repetición. Para recoger la información de sus investigaciones, Fischbein empleó tests que evaluaban el desempeño combinatorio por la relación entre la capacidad combinatoria y el pensamiento lógico.

En las investigaciones lideradas por Batanero (1996) se plantea la necesidad de hacer hincapié en el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración. Estas investigaciones proponen otras formas de clasificar los problemas combinatorios. De esta forma, una primera clasificación está determinada por la cantidad de operaciones que intervienen en solución del problema, problemas simples o compuestos, siendo los simples aquellos en los cuales, para su solución, sólo se requiere de una operación, y los compuestos, aquellos en los que interviene más de una operación combinatoria. Una segunda forma de clasificar estos problemas está asociada al modelo combinatorio; así como se clasifican en problemas de selección, de distribución y de partición. Una tercera clasificación que trabaja el grupo de investigadores liderados por Batanero es la que trabajaron Piaget y Fischbein y que está ligada al tipo de operación combinatoria, combinación, permutación y arreglos. La Figura 1 esquematiza las clasificaciones de problemas combinatorios antes descritas.

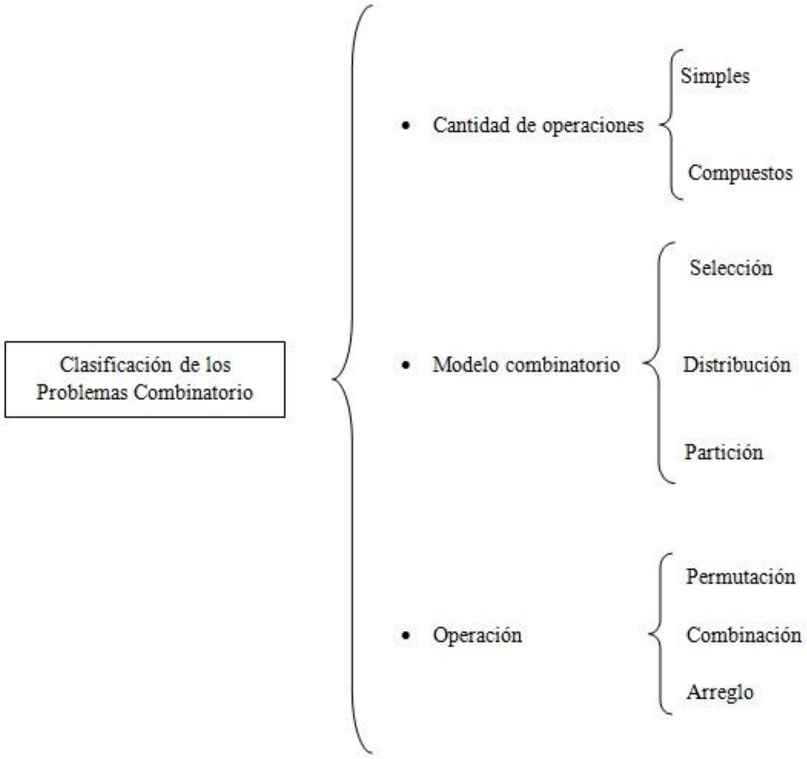

Figura 1. Esquema de clasificación de problemas combinatorios.

Este último grupo de investigadores empleó un cuestionario escrito que contempla varias tipologias de problemas combinatorios aplicado en bachillerato. Teniendo en cuenta los resultados de estas investigaciones, los investigadores que trabajaron con Batanero elaboraron una propuesta de desarrrollo del currículo combinatorio para el rango de edades de 10 a 18 años. En esta propuesta muestran los efectos de algunas variables de tarea en la dificultad del problema y en los tipos de errores de los estudiantes, planteando que estas variables deben ser tenidas en cuenta para evaluar el razonamiento combinatorio de los alumnos y para comprender las capacidades y concepciones de éstos (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996).

Por su parte, algunos autores como Correia, Fernandes, Silva y Soares (2007; 2004) centraron sus estudios en los últimos grados de bachillerato. Dentro de sus investigaciones para recoger información, utilizaron tests que contemplan varias tipologias de problemas combinatorios y que incluyen problemas de selección que envuelven tres tipos de operaciones combinatorias, combinaciones simples, arreglos simples con repetición y permutaciones simples con repetición. Éstos tests son presentados a los participantes de manera individual y realizando audiogravaciones de las sesiones de trabajo para realizar análisis descriptivos de las estrategias que se establecen a partir de categorias (Correia & Fernandes, 2007; Silva, Fernandes, & Soares, 2004).

4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este estudio está enmarcado dentro de un enfoque interpretativo del paradigma cualitativo de investigación (Latorre, del Rincón, & Arnal, 1996) (Latorre, del Rincón, & Arnal, 1996). Se ubica en un enfoque interpretativo porque busca comprender las estrategias intuitivas y los argumentos de solución que los estudiantes usan cuando se enfrentan a problemas de tipo combinatorio.

El paradigma cualitativo busca comprender e interpretar las construcciones subjetivas de las personas, sus sentimientos, percepciones, acciones y razones. En contraste con el paradigma cuantitativo cuyo propósito es verificar y explicar hipótesis, resultados y fenómenos cuantificables (Sandoval, 1996; Galeano, 2004). En esta investigación no se asumieron hipótesis *a priori* relacionadas con las intuiciones combinatorias de los participantes, ya que consideramos que el haberlo hecho nos habría conducido a una búsqueda para corroborar tales hipótesis, con el riesgo de que los datos recogidos no correspondieran a la intuición de los participantes sino a la influencia de las hipótesis preestablecidas.

Consideramos que las entrevistas semiestructuradas, donde algunas preguntas pueden surgir durante el proceso de recolección de información, fue la técnica más adecuada para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. Esta técnica de recolección es habitual en los diseños de las investigaciones cualitativas (Iñiguez, 1999). Además, las intuiciones de un participante no permiten una cuantificación y tampoco son observables, solo a través de las acciones que el sujeto realiza (estrategias y argumentos) podemos dar cuenta de estos constructos.

Para atender al propósito de este estudio se describen a continuación participantes, instrumentos, procedimientos y análisis.

4.1. Participantes

Los participantes de esta investigación son ocho estudiantes, cuatro mujeres y cuatro hombres (Carolina, Laura, Valeria, Mariana, Esteban, Mario, Beto y Julián)[2] con edades entre los ocho y diez años, con poca cultura escrita, pertenecientes a los estratos socioeconómicos uno, dos o tres y que cumplían las siguientes características:

- Cursaban cuarto grado de básica primaria (durante el año 2011).
- No habían recibido ninguna instrucción sobre combinatoria. Esto se comprobó con los diálogos tanto con los estudiantes como con los maestros de primaria, con el plan de estudios, con las observaciones dentro del aula de clase y con las actividades de combinatoria que presentamos en el grado cuarto en el año 2010.
- Tenían capacidad de comunicación y argumentación.
- Se sentían cómodos ante las cámaras; ya que las intuiciones de una persona solo se hacen evidentes a partir de las acciones y argumentos que éste presenta para dar solución a los problemas. Se necesitaba que estas acciones se hicieran explicitas en frente de las cámaras.
- Manifestaron su interés por participar en la investigación.
- Contaban con la autorización por escrito de sus padres. Tanto a los padres como a los menores se les dio a conocer la propuesta mediante el respectivo consentimiento informado según lo proponen Correa-Torres (2011) y Sañudo (2006) y se les pidió la autorización escrita.

[2] Los nombres son seudónimos para proteger la identidad de los menores.

Teniendo en cuenta estos aspectos se seleccionaron los estudiantes de una población total de ochenta estudiantes aproximadamente. Estos estudiantes participaron de entrevistas semiestructuradas en las que se les pedía resolver once problemas combinatorios. Se organizaron las entrevistas de tal forma que algunos estudiantes estuvieran en parejas y otros de manera individual. Entrevistamos tres parejas (niño-niño, niño-niña y niña-niña), a un niño y una niña individualmente por cada problema. En total se consiguieron cincuenta y cinco entrevistas para el análisis.

4.2. Instrumento

Para estudiar las intuiciones de los participantes en la solución de problemas combinatorios se diseñó un instrumento apoyado en la teoría combinatoria. Este instrumento incluyó varias tipologías de las técnicas de conteo en los enunciados de problemas combinatorios: principio multiplicativo, arreglos en los cuales importa el orden y arreglos en los que no importa el orden: Esta variedad en la tipología de los problemas podría asegurar la fiabilidad y validez de los instrumentos de recolección de información como lo proponen Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996). Los siguientes son los problemas incluidos en el instrumento[3].

Problema 1: Atuendos. Se tienen cuatro camisas (una roja, una amarilla, una verde y una blanca) y tres pantalones (uno amarillo, uno azul y uno verde), para vestir a un oso. Forme los conjuntos posibles con los que se puede vestir al oso.

Problema 2: Baile. Tres niños y tres niñas quieren bailar en una fiesta. Formen las parejas posibles.

---

[3] Algunos de estos problemas son adaptaciones de problemas propuestos en el libro Razonamiento Combinatorio (Batanero, Godino, & Navarro-Pelayo, 1996)

Problema 3: Monedas. De cuántas maneras puedo formar \$200 utilizando diferentes o iguales tipos de monedas (\$50, \$100, \$200 y \$500).

Problema 4: Salpicón. Tengo cuatro frutas y quiero hacer un salpicón con tres de ellas ¿de cuantas formas diferentes lo podría hacer?

Problema 5: Claves. Con los números 2, 5, 8 y 9. ¿Cuántas claves de dos números podríamos hacer?

Problema 6: Carrera. Tres niños están compitiendo en una carrera por tres medallas de oro, de plata y de bronce. ¿Cuáles son las formas diferentes en que esos tres niños podrían llegar para ganarse esas medallas?

Problema 7: Filas. ¿Cuáles son las formas posibles de ubicar dos niños y dos niñas en fila, de tal manera que las niñas no queden juntas y los niños tampoco queden juntos?

Problema 8: Mesa. ¿De cuántas formas diferentes se podrían sentar dos amigos, en una mesa de tres puestos?

Problema 9: Parejas. En una reunión hay cuatro personas ¿cuáles son todas las formas posibles de hacer grupos de dos, con esas cuatro personas?

Problema 10: Banderas dos colores. Se tienen tres papelitos de colores (amarillo, azul y rojo) y se quieren formar banderas con dos de esos papelitos, pero esos papelitos solo puede estar ubicados de manera horizontal. ¿Cuáles son todas las maneras diferentes de hacer esas banderas?

Problema 11: Banderas tres colores. ¿Cuáles son todas las banderas posibles, de manera horizontal, que se pueden hacer con tres papelitos de colores (amarillo, azul y rojo)?

Las razones por las cuales se presentaron varios de estos problemas se deben principalmente a sus características. Por ejemplo, El problema de los *Atuendos* (problema 1) es un problema de principio multiplicativo que cuenta con dos conjuntos de elementos claramente distinguibles (camisas y pantalones) y además dichos conjuntos no poseen el mismo cardinal, por lo que los participantes tienden a dar por terminada la solución una vez terminada la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos. Los problemas de principio multiplicativo son problemas de menor complejidad comparados con los problemas de arreglos. Por esta razón, las primeras exploraciones, de las estrategias empleadas por los participantes, se hicieron sobre este tipo de problemas. De ahí, que los dos primeros problemas (*Atuendos* [problema 1], con doce eventos posibles y *Baile* [problema 2], con nueve eventos posibles) se presentaron durante las dos primeras entrevistas a cada participante.

Los problemas de las *Monedas* (problema 3), el *Salpicón* (problema 4) y las *Parejas* (problema 9) son tipo arreglo en los cuales no importa el orden de selección de los elementos y el tamaño del espacio muestral es pequeño respecto a otros problemas. Para los dos primeros se tienen cuatro eventos posibles mientras que para las parejas se tienen seis eventos posibles.

Los problemas restantes (*Claves* [problema 5], con doce eventos posibles; *Carrera* [problema 6], con seis eventos posibles; *Fila* [problema 7], con ocho eventos posibles; *Mesa* [problema 8], con seis eventos posibles; *Banderas dos colores* [problema 10] y *Banderas tres colores* [problema 11] con seis eventos posibles), son problemas en los cuales el orden de selección o de ubicación genera eventos posibles diferentes dentro del problema. En estos problemas los estudiantes tienden a no considerar este orden, por lo que los eventos posibles que generan se reducen. Dentro de esta tipología de problema en la cual importa el orden se plantearon dos problemas que tienen una mayor demanda cognitiva, uno de permutación con restricción (*Filas* [problema 7]) y uno de permutación cíclica (*Mesa* [problema 8]). Estos problemas fueron los últimos que se les presentaron a los participantes.

Los problemas son cortos, lo cual facilita la retención y comprensión adecuada por parte de los participantes. Además, la naturaleza y el tamaño del espacio muestral son variados lo que permite obtener información de la combinación de varios componentes en las entrevistas.

4.3. Procedimientos

Con la intención de refinar y validar la pertinencia de los problemas y las entrevistas, tanto en el lenguaje como en el nivel de dificultad, realizamos un pilotaje con cinco niños del grado cuarto a quienes les presentamos varios de los problemas propuestos en el instrumento inicial. Allí se reestructuraron algunos de estos problemas que parecían ser difíciles de comprender por parte de los estudiantes. También se analizó la forma de presentar los problemas y los materiales durante las entrevistas. Este pilotaje fue importante para nosotros como investigadores porque era la primera vez que realizábamos un trabajo académico de este tipo y tuvimos que hacer varios ajustes.

Una vez refinado el instrumento y la forma adecuada de llevar a cabo la recolección de información, se realizaron entrevistas semiestructuradas con los participantes donde el protocolo fue el instrumento descrito anteriormente. Con cada participante o pareja de participantes la información se recogió en cuatro sesiones de trabajo de aproximadamente 20 minutos cada una. Debido a las dificultades de lectura y escritura que observamos en los estudiantes en nuestro trabajo en el aula de clase, decidimos presentar los problemas en forma oral para que la lectura no se convirtiera en una fuente de invalidación. Para la entrevista semiestructurada se tuvo en cuenta algunas preguntas orientadoras. Las preguntas no fueron, necesariamente, secuenciales;

pero surgió la necesidad de realizar preguntas adicionales de acuerdo a los caminos de solución tomados por los estudiantes o las apreciaciones de los investigadores. En las entrevistas se presentó material concreto que podía utilizar el participante si lo consideraba necesario para la solución de los problemas, salvo en el *Problema de las Claves* (problema 5). En este, a dos de los grupos entrevistados (Julián-Mario; Esteban) se les planteó el problema sin ofrecerles las siluetas de los cuatro números en físico, los participantes solo contaban con papel y lápiz como apoyo para la solución.

Las entrevistas fueron grabadas en video y en audio, para recoger fielmente las expresiones (verbales y no verbales), las estrategias de solución y los razonamientos de los participantes. Una vez realizadas las entrevistas, éstas fueron transcritas *verbatim* para facilitar el análisis posterior. Los videos fueron observados por los miembros del equipo investigativo en forma individual y en equipo. Además, se tuvo un seminario semanal del cual hacían parte nuestra asesora y otros compañeros investigadores, que desarrollaban, también, su trabajo de grado. Esto con el propósito de discutir los hallazgos y refinar el análisis.

4.4. Análisis

Se empleó la técnica del análisis de contenido, tal y como la proponen Porta y Silva (2003) para analizar en detalle y en profundidad el contenido del discurso utilizado por cada participante al enfrentarse a los problemas combinatorios. De manera general, el análisis de contenido, configura una técnica de análisis de datos que permite estudiar y cuantificar los materiales y contenidos utilizados por las personas dentro de un proceso de comunicación. Además, según Krippendorff (1980, citado por Porta y Silva, 2003) el análisis de contenido corresponde a una técnica destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias válidas que pueden ser reproducidos y aplicados a otros ambientes e investigaciones.

Dentro de esta técnica de análisis se determina el universo de la información que puede ser analizada, esto es, el conjunto global de la información que se obtiene durante el proceso de recolección. Una vez identificado el universo, se eligen los documentos sobre los cuales se va a realizar el análisis exhaustivo, lo que Rodríguez, García y Gil (1999) denominan la reducción de los datos, que consiste en la simplificación, el resumen y la selección de información para hacerla abarcable y manejable, una vez que todos los datos no aportan información relevante para la investigación. Del proceso de reducción de los datos se determina el cuerpo de unidades de contenido, que corresponde a fragmentos o partes del conjunto global y que constituye los núcleos de significado propio que serán los que se estudiarán.

Dentro de esta investigación, cada unidad de análisis corresponde a cada entrevista sobre cada uno de los once problemas propuestos. El análisis de cada entrevista fue pertinente porque permitió identificar y clasificar los argumentos y las estrategias empleadas por los participantes y reconocer el desempeño de éstos cuando trabajan de forma individual o por parejas. Como apoyo al análisis de la información que resultó ser voluminosa se empleó el software para análisis de información cualitativa Atlas.ti (versión 5.0) que permitió organizar las transcripciones, identificar patrones de respuesta, hacer notas al margen y sistematizar.

5. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En esta sección se describen los principales hallazgos relacionados con las intuiciones de los estudiantes con respecto a la combinatoria. La mayoría de las veces, los participantes emplearon sólo la estrategia de listar (ir nombrando cada una de los eventos posibles que se van encontrando) sin llevar un conteo de los eventos posibles que enunciaban. Esto sucedió especialmente cuando el espacio muestral era grande. Esto puede definirse como la estrategia básica para solucionar problemas de combinatoria, según investigaciones realizadas por varios autores (Correia & Fernandes, 2007; Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996; Roa, Batanero, Godino, & Cañizares, 1996; Silva, Fernandes & Soares, 2004). Además de la estrategia de listar, se consideraron varias estrategias complementarias que tuvieron lugar en las respuestas de los participantes dentro de un mismo problema. Estas estrategias complementarias fueron insumos importantes en la construcción de categorías de respuestas. Estas categorías son presentadas desde la más simple a la más sofisticada.

5.1. Categorías

5.1.1. Manipulación por ensayo y error. Esta categoría se caracteriza porque los estudiantes manipulan el material de apoyo dado por los investigadores para resolver el problema. Los participantes encuentran algunos eventos posibles pero no lo hacen de forma sistemática y no hay una estrategia clara para llevar el orden. Sólo manipulan los elementos sin una finalidad aparente. Para ilustrar esta categoría describimos a continuación algunos ejemplos.

En el problema de los *Atuendos* (problema 1), se les proporcionó a los participantes siluetas de cuatro camisas y tres pantalones en papel de colores. Además se les ofreció la silueta del oso. Muchos estudiantes, por ejemplo Esteban[4] y Mariana-Carolina se conformaron con hacer la correspondencia uno a uno hasta agotar uno de los conjuntos. Esteban, solucionó la situación de la siguiente manera: Vistió la silueta del oso con un atuendo (una camisa y un pantalón); a continuación, sobrepuso otros atuendos al que ya tenía y una vez terminó de formar los tres conjuntos posibles con esta estrategia y al quedar una camisa sin pantalón, el estudiante dio por terminada la tarea. Cuando se le preguntó por qué creía había terminado, él respondió: "No hay más fichitas de estás [pantalones]" (Esteban, Entrevista #1, 2011).

Cuando se les preguntó, tanto a Esteban como a Mariana-Carolina, qué harían con la camisa sobrante dieron respuestas como las siguientes:

> "La podemos guardar [la camisa] para otra ocasión" (Mariana & Carolina, 2011)
>
> "Solo hay una camisa y no hay más pantalones" (Esteban, Entrevista #1, 2011)

En el mismo problema de los *Atuendos* (problema 1), Laura, otra de las participantes, asoció cada pantalón con una única camisa pero no se conformó con estos tres eventos posibles. Ella continuó mostrando otras dos formas sin revelar un sistema organizado para hallarlas. Le faltaron siete eventos, de los doce posibles. Laura no llevó un conteo de los eventos posibles que había encontrado. A diferencia del problema anterior, Laura en el problema del *Baile* (problema 2), en el cual debía formar todas las parejas posibles con tres niños y tres niñas, solo realizó la correspondencia de cada niño

---

[4] Cada vez que se nombre un solo participante significa que se entrevistó individualmente, pero si se nombra a dos de ellos separados por un guión, por ejemplo Valeria-Laura, significará que se entrevistaron en pareja. Así si se nombran por ejemplo, Esteban y Laura, nos referimos a dos participantes entrevistados separadamente.

con una única niña y dio por terminada la tarea. Laura solo consiguió tres parejas de las nueve posibles.

En el problema del *Baile* (problema 2), aunque no se estableció como condición que las parejas de baile debían ser de géneros opuestos, solo Mario consideró este evento pero su compañero Beto refutó esta idea, apelando a sus experiencias de no haber visto a un hombre bailando con otro hombre. Este debate lo consideró también Laura en el problema de las *Parejas* (problema 9) donde quiso saber si podía formar parejas del mismo género. Laura quizás pensó en esta restricción influenciada por su solución en el problema del *Baile* (problema 2) donde no consideró este evento.

Dentro de las estrategias empleadas por los participantes en los problemas de principio multiplicativo (*Atuendos* y *Baile*) es visible que la primera, y en ciertos casos la única acción que realizaron los participantes, fue la de hacer corresponder cada uno de los elementos del primer conjunto con un solo elemento del segundo conjunto. Los participantes no asumieron que podían usar los elementos ya empleados, para formar nuevos eventos posibles. A pesar que los problemas de principio multiplicativo exigen una menor demanda cognitiva y están asociados con la multiplicación tipo cartesiana planteado en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), los dos problemas de este tipo tenían un espacio muestral grande, comparado con el de los demás problemas. Quizás esto dificultó llevar el conteo de los eventos posibles a la vez que se iban generando.

Dentro del problema de las *Filas* (problema 7), Julián-Mario realizaron sus manipulaciones por ensayo y error. En este problema Julián corrigió algunos de los eventos posibles que mostró su compañero Mario porque no satisfizo la condición del problema (que los niños no queden juntos ni las niñas no queden juntos).

Dentro de esta categoría, *Manipulación por ensayo error*, se observó que algunos participantes emplearon un registro escrito que les permitió tener mayor éxito en la solución de ciertos problemas y que fue contrastado con los eventos posibles que encontraron mediante la manipulación del material de apoyo. Se notó que apoyarse en el registro escrito y en el material concreto funcionó como un dispositivo de control en los casos donde el espacio muestral era relativamente grande y favoreció en la no repetición de eventos posibles.

El registro escrito para realizar el listado de los eventos posibles se evidenció en varios episodios. Por ejemplo, en el problema de los *Atuendos* (problema 1), Julián-Valeria lograron encontrar once de las doce posibles formas de vestir el oso, llevando registro en forma escrita mediante una lista a medida que iban encontrando una nueva forma. Este registro se muestra en la Figura 2, en la cual el primer nombre corresponde al color de la camisa y el segundo nombre al color del pantalón si no se hace referencia a un conjunto.

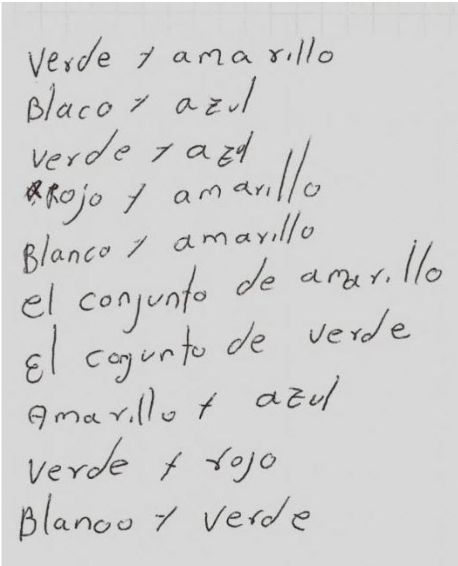
Verde y amarillo
Blaco y azul
verde y azul
Rojo y amarillo
Blanco y amarillo
el conjunto de amarillo
El cojunto de verde
amarillo y azul
verde y rojo
Blanoo y verde

Figura 2. Lista hecha por Julián-Valeria en el problema de los *Atuendos* (problema 1)

Es importante señalar que esta lista fue hecha siguiendo la estrategia de ensayo error. Aunque Julián-Valeria estuvieron cerca de encontrar todos los posibles atuendos esto no se debió a una estrategia organizada y sistemática. La lista les ayudó a verificar si un nuevo atuendo que encontraban estaba o no registrado.

Este apoyo escrito también se evidenció con Valeria-Laura. Mientras resolvían el problema de las *Claves* (problema 5), donde debían encontrar todas las claves posibles con dos de los cuatro números dados, utilizaron el registro escrito sin una estrategia sistemática aparente. Valeria-Laura iniciaron escribiendo algunas claves en el papel y a medida que se les ocurría una nueva examinaban en su registro si ya la habían escrito previamente y; en caso contrario, la escribían. Usando esta estrategia lograron obtener once de los doce eventos posibles, cuando se decide emplear las cuatro siluetas presentadas (2, 5, 8 y 9) puesto que no pueden utilizar más de un dos, un cinco, un ocho o un nueve (cuando no se usan las siluetas el espacio muestral es de dieciséis porque es posible formar claves como 22, 55, 88 y 99). En la Figura 3 puede verse el registro llevado por Valeria-Laura.

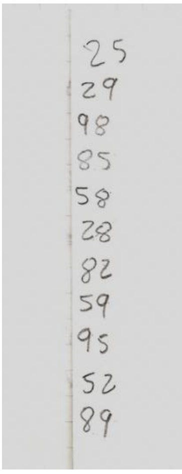

Figura 3. Registro escrito de Valeria-Laura resolviendo el problema de las *Claves* (problema 5)

La Figuras 4evidencia el registro escrito que usaron Julián-Mario para llevar un conteo de los eventos posibles que encontraron solucionando el problema de las *Claves* (problema 5).Los participantes primero escribieron los cuatro números dados en el problema (2, 5, 8, 9), luego registraron el número de los eventos posibles que iban encontrando a medida que avanzaban en la solución del problema. Por ejemplo, cuando formaron la clave 52, no escribieron dicha clave, sino que escribieron 1, haciendo alusión a que era la primera clave que encontraron y así sucesivamente hasta llegar al número siete que representaba que habían encontrado siete eventos posibles. Esta estrategia no es muy útil como estrategia de control si los participantes no recuerdan cual es la clave que se corresponde a los que ellos han escrito como posibilidad 1.

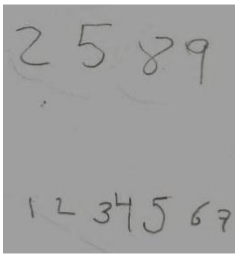

Figura 4. Registro escrito de Julián- Mario, para llevar el conteo en el problema de las *Claves* (problema 5)

La Figura 5 muestra el registro escrito de Julián-Mario solucionando el problema de la *Carrera* (problema 6), en el cual se debía encontrar las formas de premiar con tres medallas de oro plata y bronce a tres competidores. Los estudiantes realizaron el primer reparto de las medallas pero no registraron las posiciones en las que habían llegado los corredores, sino que escribieron 1, para referirse a la primera forma mostrada. Este procedimiento fue utilizado hasta llegar al número 3, que representan los tres eventos posibles que ellos encontraron. A los participantes se les ofreció para este problema tres siluetas de personas de colores diferentes (verde, azul y rojo). Esto les facilitó distinguir que corredores ya habían ocupado ciertas posiciones o a cuál de ellos le habían otorgado las medallas.

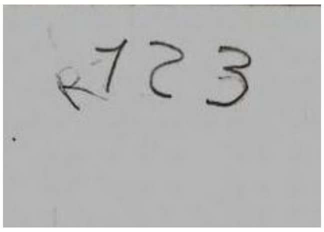

Figura 5. Registro escrito de Julián- Mario, para llevar el conteo en el problema de la *Carrera* (problema 6)

Creemos que el registro escrito fue un elemento importante que ayudó a los participantes, que hicieron uso de él, a solucionar algunos problemas. Debido a que el registro escrito de los eventos posibles permitió un mayor éxito en la determinación del número o de los eventos posibles de cada problema, garantizando la no repetición de estos eventos y también la posibilidad de saber cuántas se listaron simplemente contándolas. Por su parte, el registro escrito del número de eventos posibles garantiza llevar un conteo mientras se listan estos eventos pero no garantiza la no repetición.

5.1.2. Exploración de un sistema. Esta categoría se caracteriza porque hay evidencia de un intento por construir un sistema, así sea rudimentario, que le permita a los participantes encontrar algunas formas posibles y que fue observado, bien sea, inicialmente o durante del proceso de solución. Estos intentos no fueron suficientes para que los estudiantes lograran encontrar todos los eventos posibles que dan solución al problema en cuestión porque no fueron consistentes con la estrategia durante todo el proceso. Es decir, los participantes utilizaron varias estrategias en la solución de un mismo problema. Esto es, inician con una estrategia y sin concluir la aplicación, la abandonan para adoptar una estrategia diferente. No utilizan una estrategia para encontrar una respuesta y luego una estrategia diferente para encontrar otra respuesta que les permita comparar los resultados. Además, otra característica de esta categoría es que los estudiantes no siempre perciben que ya han terminado de solucionar el problema.

Así se evidenció en una entrevista a Esteban con el problema del *Baile* (problema 2) en el que debía decidir cuántas parejas de baile se podían formar con tres niños y tres niñas. Inicialmente, Esteban asoció cada niño con una niña, luego dejó fija una pareja e intercambió dos mujeres. Nuevamente, dejó fija una pareja pero esta vez intercambió a dos hombres. Continuó intercambiando dos mujeres más, y así logró encontrar hasta ese momento nueve eventos posibles, una de ellos repetido. Finalizó intercambiando nuevamente dos mujeres y consiguió mostrar once eventos posibles en total, dos de ellos repetidas. Esta secuencia se ilustra en la Figura 6. Una vez Esteban mostró sus eventos posibles, se le preguntó si había más formas y él argumentó que no las había, porque cada niño ya había bailado con cada una de las niñas.

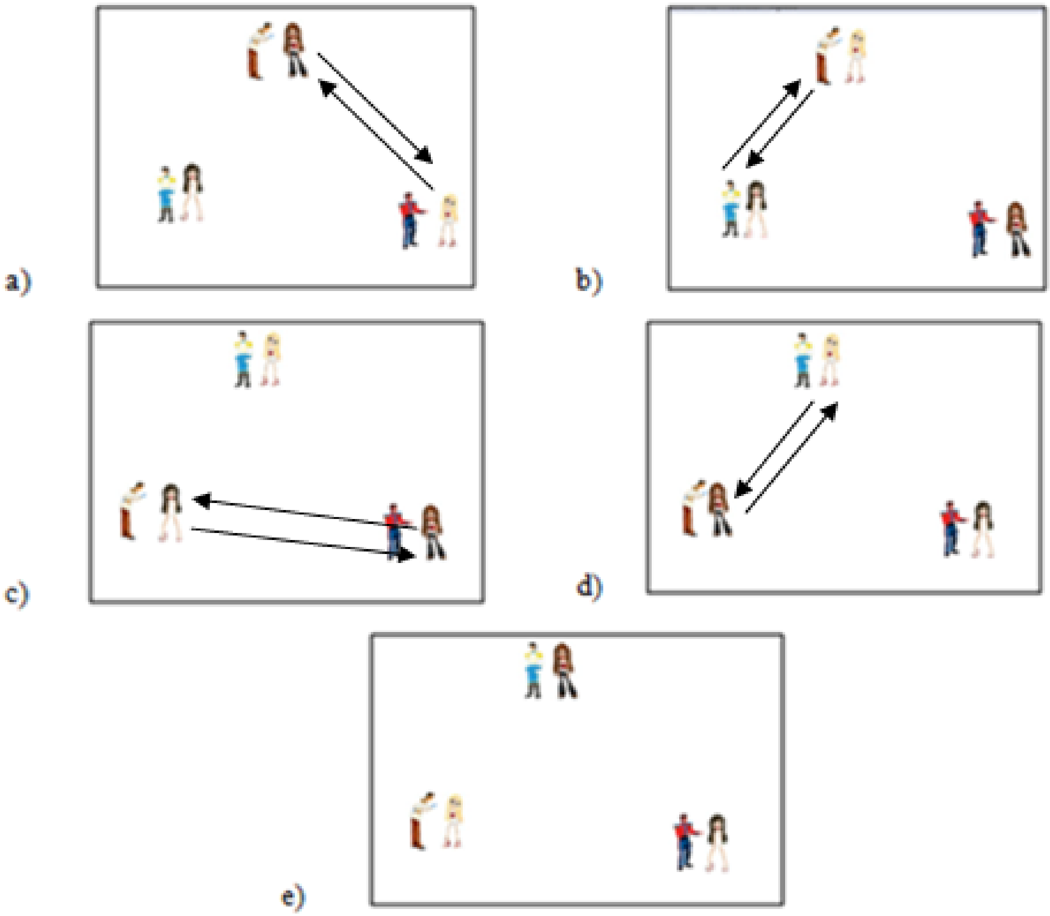

Figura 6. Secuencia de imágenes que representan la estrategia de Esteban en el problema del *Baile* (Problema 2)

Esta categoría también fue observada en el problema de las *Filas* (problema 7), en el cual se solicitaba armar una fila de niños con las restricciones que los dos niños y las dos niñas no podían quedar juntos. Esteban quien inicialmente formó parejas, influenciado quizás por lo que realizó en el problema del *Baile* (problema 2) y debido a que el material de apoyo presentado en ambos problemas era exactamente el mismo, mostró un indicio de un sistema. Primero formó una fila, (M1-H1-M2-H2)[5], luego intercambió los niños de posición (M1-H2-M2-H1) y así mostró las dos filas posibles cuando la niña M1 está en la primera posición. A continuación, formó otra fila

[5] H1y H2 representan los niños y M1 y M2 representan las niñas.

modificando las posiciones de las niñas, quienes ocupaban las posiciones uno y tres pasaron a ocupar las posiciones dos y cuatro (H2-M1-H1-M2). Hasta el momento parecía que Esteban tenía un buen indicio de un sistema, el cual consistía en mostrar las filas posibles cuando fijaba la posición uno. Esteban, sin embargo, no logró mantener la estrategia en todo el proceso, puesto que mostró un cuarto evento posible cambiando de estrategia (M2-H1-M1-H2), en la cual ordenó a los cuatro niños sin un sistema de formación claro y sin asociarse a la estrategia que traía. Este último movimiento parece responder a la estrategia descrita en la primera categoría *Manipulación por ensayo y error*. Tratando de retomar su primera estrategia, Esteban mostró una quinta fila basado en la última construida, en la cual intercambió a las niñas (M1-H1-M2-H2) pero dejó fijo esta vez a quien ocupaba la última posición. Esta última estrategia lo llevó a repetir las posiciones de la primera fila. Esta combinación de estrategias llevó a que Esteban no pudiera encontrar todos los elementos del espacio muestral. Esteban solo encontró cinco formas, de las cuales una era repetida, de las ocho posibles. Sentimos que si Esteban hubiese seguido una sola estrategia habría tenido más éxito con el número de formas y sospechamos que las habría encontrado todas.

En el problema de la *Mesa* (problema 8), en el que se pedía determinar el número de eventos posibles diferentes en las que dos amigos se pueden sentar en una mesa de tres puestos, se observó en algunos participantes una estrategia no sistemática y que no permitió garantizar que se encontraran todos los eventos posibles. Esteban, por ejemplo, al solucionar este problema, que en esencia es un problema de permutaciones circulares, hizo lo siguiente: Primero, manipuló el material de apoyo para mostrar uno de los eventos posibles. Luego, mostró un segundo evento intercambiando de puesto a los dos amigos pero usando las mismas dos sillas. Con esta estrategia Esteban formó dos eventos posibles manteniendo un puesto vacío. De haber mantenido la estrategia de dejar un puesto vacío e intercambiar en los otros dos puestos a los amigos, muy seguramente hubiese encontrado todas las formas posibles, pero no lo hizo. El cambió su estrategia de dejar un puesto vacio y operar en los dos restantes por girar en un mismo sentido a ambos amigos a la vez. Así, mostró otros dos eventos más. Él dijo haber determinado seis formas, cuando en realidad había encontrado cuatro. La secuencia de sus estrategias se ilustra en la Figura 7.

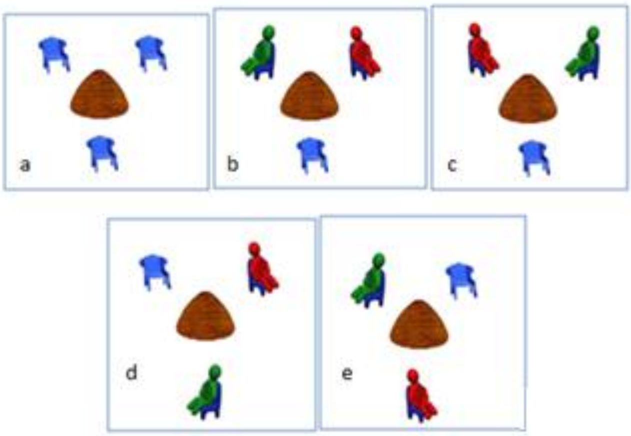

Figura 7. Secuencia de imágenes que representan las estrategias de Esteban en el problema de la *Mesa* (problema 8)

Solucionando el problema de las *Banderas de tres colores* (problema 11) Laura usó dos movimientos diferentes, traslación que consiste en cambiar uno de los colores a una posición diferente e intercambio que consiste en ubicar un color en la posición del otro y viceversa. Inicialmente, Laura comenzó trasladó el color del extremo inferior al extremo superior, luego recurrió a otras estrategias como intercambiar los colores de los extremos, más tarde intercambió los dos colores inferiores y finalmente intercambió los dos colores superiores. Esta última estrategia de Laura, de intercambiar los colores inferiores y luego los superiores, seguramente le hubiese permitido hallar todos los eventos posibles si ella la hubiese usado desde el principio y consistentemente. Laura logró conseguir cinco de las seis formas posibles. Esta combinación y secuencia de estrategias se ilustra en la Figura 8.

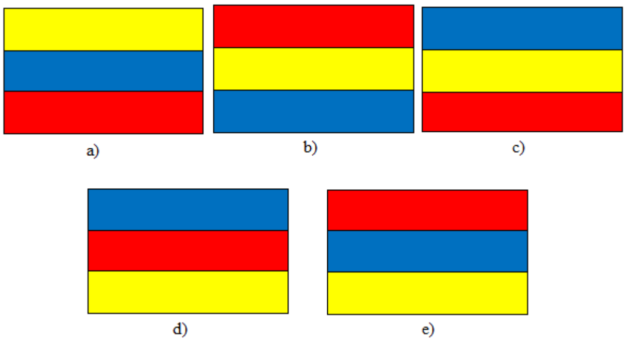

Figura 8. Secuencia de imágenes que representan las estrategias de Laura en el problema de las *Banderas de tres colores* (problema 11)

En este mismo problema, Esteban inicialmente mostró la estrategia de intercambiar los colores superiores y luego los inferiores, pero no la usó consistentemente en todo el proceso de solución, puesto que usó una nueva estrategia en el último movimiento que consistió en pasar la franja inferior al extremo superior. Por esta razón no logró obtener todas las posibles formas, consiguió determinar tres eventos posibles diferentes y uno repetido, de los seis posibles. Pensamos que si Esteban hubiese sido consistente con su primera estrategia es probable que los hubiera encontrado todos. La Figura 9 ilustra la secuencia usada por Esteban para solucionar el problema.

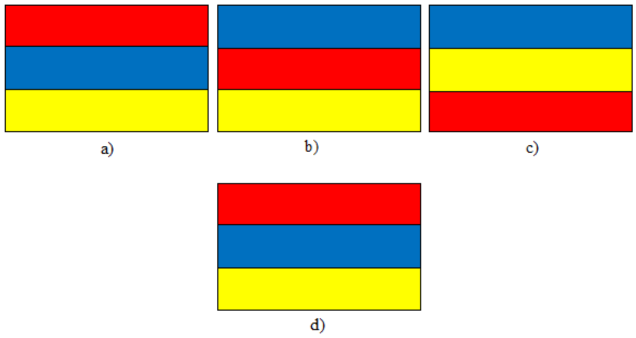

Figura 9. Secuencia de imágenes que representan las estrategias de Esteban en el problema de las *Banderas de tres colores* (problema 11)

5.1.3. Aproximación a un sistema. Esta categoría se caracteriza porque los participantes emplean una única estrategia consistentemente para listar los eventos posibles durante todo el problema y además expresan haber terminado pero no encuentran todos los eventos. Algunos encuentran muchos de los eventos posibles sin repetir y otros encuentran varios pero repiten algunos.

Esta categoría fue observada en la solución del problema del *Salpicón* (problema 4) donde Julián-Mario y Esteban intentaron conseguir todos los eventos posibles de hacer el salpicón con tres frutas de cuatro dadas. La estrategia usada fue la siguiente: Primero se formó un salpicón con tres frutas y se excluyó una. Luego sacaron una fruta del grupo de las tres escogidas y la cambiaron por la que habían excluido para armar otro posible grupo. Esta fue una estrategia usada consistentemente durante todo el problema. Sin embargo, Julián-Mario no fueron organizados para llevar el registro de la fruta que iban sacando, porque en dos ocasiones diferentes excluyeron la misma. Con esta estrategia encontraron cinco formas, una de ellas repetida (la Figura 10 ilustra la secuencia de la estrategia usada por esta pareja). Esteban por su parte, encontró cuatro formas, una de ellas repetida, debido a que excluyó la misma fruta dos veces. En un segundo intento, para llevar el conteo de las posibilidades realizadas, Esteban mostró cinco eventos posibles, porque nuevamente excluyó dos veces la misma fruta.

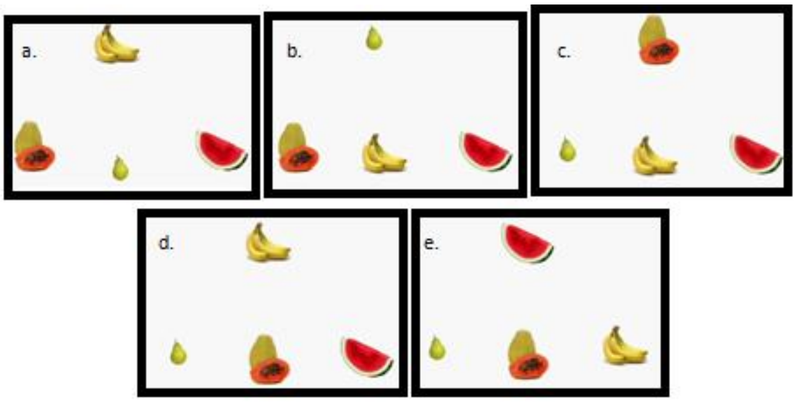

Figura 10. Secuencia de imágenes que representan la estrategias de Julián-Mario en el problema del *Salpicón* (problema 4)

Solucionando el problema de las *Claves* (problema 5), en el que se les pedía encontrar claves de dos dígitos con los números 2, 5, 8 y 9, Esteban quien trabajó sin las siluetas de los números (el problema se le presentó a este participante oralmente y sin material físico de apoyo), olvidó los números con los cuales debía formar las claves. Por esta razón, enunció claves que no hacían parte del espacio muestral y dijo "25 va una, 29 van dos, 25 van tres, 29 van cuatro, 52, 56 y 58, 59 y el 82, 85, 86, 89 y el 92, 95, 99, 98" (Esteban, Entrevista # 25, 2011) y anunció haber terminado. Esteban listó los eventos posibles dando cuatro claves con cada uno de los números del problema en la posición de las decenas y consecutivamente, en la posición de las unidades se observó que los dígitos iban en orden ascendente.

Posiblemente el tratar de llevar el conteo simultaneo de los eventos posibles lo llevó a repetir algunos, pues una vez dejó de llevar este conteo Esteban no repitió más posibilidades. Al estudiar la estrategia de Esteban sentimos que fue ordenado y sistemático, además usó una sola estrategia durante el problema. Creemos que de haber contado con las siluetas de los números, como otros participantes, y haciendo un uso consistente de esta misma estrategia, este participante habría listado todos los eventos posibles sin repetir ninguno. Teniendo en cuenta los resultados de Esteban en este problema sin material, consideramos que el material de apoyo pudo constituir una herramienta importante para solucionar ciertos problemas combinatorios, debido a que el contar con este material le permite ser más sistemático, no repetir, usar solo los elementos ofrecidos y además, en el caso de las claves, permitió reducir el espacio muestral de dieciséis a doce eventos posibles.

De forma análoga, en el problema de la C*arrera* (problema 6) en el que se les pregunta por las formas posibles de premiar a tres niños con medallas de oro, plata o bronce, Esteban establece una forma, luego intercambia dos de los niños, primero los dos últimos y luego los dos primeros. Aplica la misma estrategia en varios intentos y muestra cinco posibilidades diferentes y sin haber repetido ninguna. Un último movimiento con esta estrategia le hubiese permitido encontrar el evento posible faltante. Este participante argumentó que no existían más eventos posibles porque consideró que ya cada uno de los competidores había ocupado las tres posiciones. Esteban, como se describió en la categoría anterior (*Exploración de un sistema*), usó esta estrategia de intercambio sin ser consistente con ella en el problema de las *Banderas de tres* colores (problema 11).

En el problema de la *Mesa* (problema 8), en el que se deben encontrar las diferentes formas de sentar dos niños en una mesa de tres puestos, Laura primero ubicó los niños y luego los rotó a ambos en el mismo sentido. Con esta estrategia mostró tres formas y en el siguiente movimiento repitió el primer evento que ya había mostrado. Aunque Laura fue consistente con su estrategia (Ver Figura 11), esta no le permitió encontrar todos los eventos posibles. Pero si Laura hubiese intercambiado de lugar a los dos amigos de tal forma que no se hubieran ubicado siempre uno a la derecha del otro hubiera encontrado los otros tres eventos posibles para completar el espacio muestral.

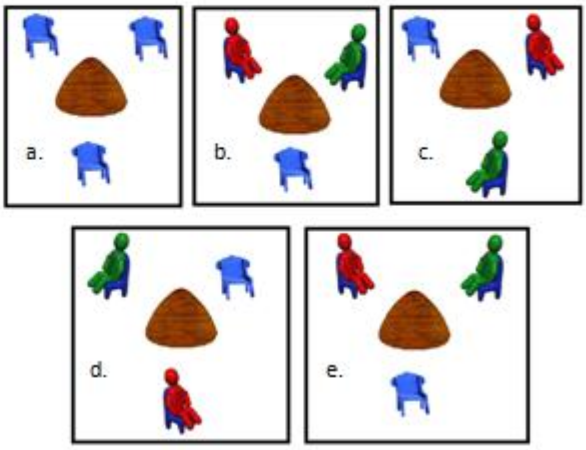

Figura 11. Secuencia de imágenes que representan la estrategias de Laura en el problema de la mesa (problema 8)

Dando solución al problema de las B*anderas de tres colores* (problema 11) Beto-Carolina usaron la estrategia de intercambiar alternadamente los dos colores inferiores y luego los dos superiores. Lograron obtener cinco de las seis formas posibles. Sentimos que de haber realizado la última rotación habrían mostrado la posibilidad que faltaba, como se ilustra en la Figura 12.

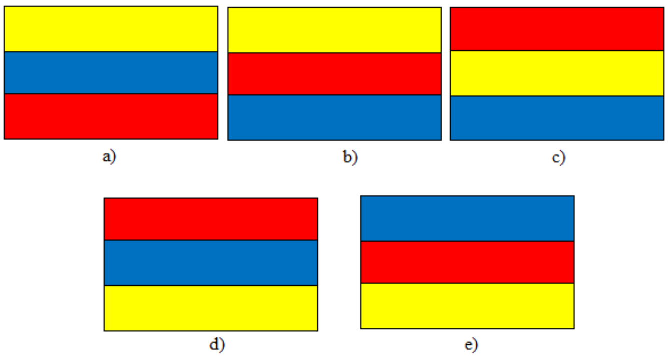

Figura 12. Secuencia de imágenes que representan la estrategia de Beto-Carolina en el problema de las *Banderas de tres colores* (problema 11)

Esta estrategia es similar a la usada por Esteban en el problema de la *Carrera* (problema 6) donde intercambió los dos primeros competidores y luego los dos últimos durante varios movimientos, logrando también encontrar cinco de los seis eventos posibles.

5.1.4. Encuentro de un sistema consistente. Esta categoría se caracteriza porque los participantes emplean una sola estrategia consistentemente durante todo el proceso de solución del problema que les permite obtener todos los eventos posibles del espacio muestral y sin repetición. Además, los estudiantes son conscientes de haber terminado el problema.

En el problema de las *Monedas* (problema 3) en el que debían encontrar las maneras posibles de formar $200, la mayoría de los participantes lograron obtener los cuatro eventos posibles sin repetir. Los participantes enunciaron primero las posibilidades obtenidas con monedas de la misma denominación, es decir, cuatro de cincuenta, dos de cien y una de doscientos. Luego mostraron la posibilidad formada por dos monedas de cincuenta y una de cien. En cuatro de las cinco entrevistas, los participantes fueron exitosos solucionando este problema. Solo Laura, quien trabajó sin material de apoyo, no contempló la moneda de doscientos como una posibilidad y argumentó que ese posible evento ya estaba contemplado en el enunciado del problema. Sospechamos que el éxito obtenido en este problema se debe a la familiaridad de los estudiantes con el manejo del dinero, y a que el espacio muestral es pequeño.

En el problema del *Salpicón* (problema 4) donde los participantes debían hacer combinaciones de tres frutas de las cuatro posibles, las parejas conformadas por Laura-Valeria y Beto-Carolina lograron obtener, sin repetir, todos los eventos posibles. La estrategia usada era armar un grupo excluyendo una fruta (por ejemplo la pera). Luego intercambiar la fruta excluida por una de las tomadas en el grupo armado inicialmente (puede ser sacar el banano e incluir la pera). Esta estrategia la usaron hasta excluir de a una vez cada fruta (Ver Figura 13). Laura-Valeria utilizaron esta misma estrategia otras tres veces para verificar el total de eventos posibles y en las tres ocasiones consiguieron el mismo éxito. Quizás el éxito de este problema este influenciado por el reducido número de elementos del problema y por su espacio muestral, ya que son solo cuatro posibles eventos.

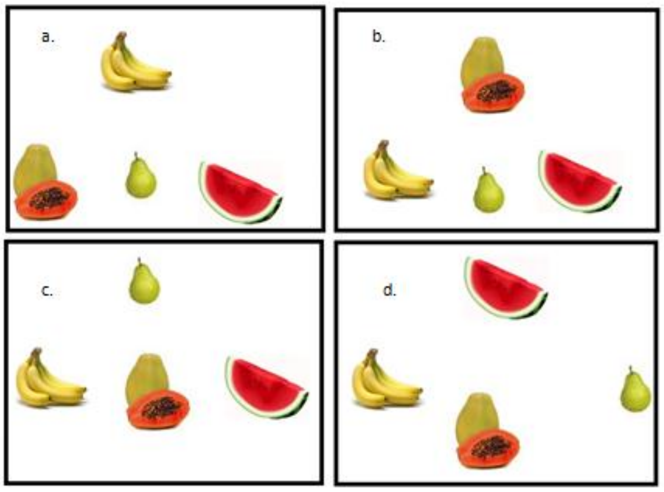

Figura 13. Secuencia de imágenes que representan la estrategia de Beto-Carolina en el problema del *Salpicón* (problema 4)

En el problema de las *Parejas* (problema 9), Esteban, Laura y Mariana-Valeria, encontraron todos los eventos posibles sin repetir. Estos participantes, asociaron cada uno de los dos hombres con una mujer y luego cambiaron las mujeres de compañeros. Por último formaron parejas del mismo género. Laura y Mariana-Valeria lograron llevar el conteo de los eventos posibles encontrados en este problema. Esteban no llevó el conteo pero argumentó haber terminado porque consideró haber reunido a cada persona con las otras tres. En este problema el material de apoyo posibilitó distinguir entre las parejas que se iban formando, además el número y la naturaleza de los elementos pudo haber facilitado la manipulación de los participantes puesto que es un número pequeño de elementos (dos niños y dos niñas), haciendo más fácil llevar el registro de los eventos posibles.

Otra evidencia de esta categoría la encontramos en la entrevista de Laura solucionando el problema de las *Banderas de dos colores* (problema 10). Ella seleccionó dos de los tres papelitos presentados y realizó con ellos las dos banderas posibles. Sucesivamente, seleccionó cada par de colores posibles y formó dos banderas con cada par. Laura mediante la manipulación del material físico de apoyo y siendo consistente con la estrategia utilizada consiguió los seis eventos posibles sin repetir, y declaró haber terminado. Sin embargo, verbalmente expresó haber realizado diez banderas diferentes. Aunque no hubo correspondencia entre sus acciones y sus palabras con respecto al número de banderas, nosotros observamos que Laura usó un sistema bien desarrollado para formar todos los eventos posibles.

De acuerdo a las evidencias presentadas, es necesario destacar de manera general que los participantes presentaron sus estrategias durante todas las entrevistas, una vez que, intentaron solucionar cada uno de los once problemas y sus manipulaciones no fueron solo por ensayo y error. El trabajo individual, exige en el participante tener que realizar varias actividades coordinadas, estas actividades consistían principalmente en recordar las condiciones del problema, el número de eventos posibles y la lista de éstos, para no repetir posibilidades. El trabajo en parejas permite que cada participante asuma algunas responsabilidades dentro de la solución del problema. Así por ejemplo, mientras uno de los participantes manipuló el material, el otro se encargó del registro escrito, llevó el conteo, pensó en otros posibles eventos o memorizó las que iban haciendo.

6. CONCLUSIONES

En esta última sesión, se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que pueden ser de utilidad a otros investigadores o docentes interesados en realizar estudios sobre la combinatoria. Además, estas contribuciones podrían aportar algunos elementos al campo de la educación matemática y estadística, como también a profesores interesados en el estudio de este concepto y en las complejidades de llevarlo al aula de clase.

Parece que el instrumento diseñado para recoger la información de este estudio fue una herramienta apropiada para estudiar las estrategias intuitivas usadas en la solución de los problemas combinatorios. El instrumento fue un dispositivo que nos permitió estimular la acción intuitiva y la argumentación de los participantes, las cuales nos ofrecieron evidencia de las estrategias y estas a su vez nos ayudaron a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. Las preguntas orientadoras usadas durante las entrevistas, permitieron una reorientación de los problemas o de sus planteamientos para facilitar la comprensión del trabajo a realizar. Las entrevistas por parejas arrojaron discusiones interesantes, una vez que los participantes debatieron sus creencias sobre la naturaleza del problema, realizaron correcciones de sus actos cuando consideraron que lo que propuso un compañero no era acorde al problema. Esto fue evidente en los problemas de las *Filas* (problema 7) y en el problema del *Baile* (problema 2). En el primero, con la condición de no ubicar ambos niños o ambas niñas en lugares continuos y en el segundo, con la creencia de que las parejas de baile se conforman con personas de géneros diferentes.

Los participantes siempre tuvieron una solución a los problemas propuestos, aún sin tener ninguna instrucción formal acerca de la combinatoria, incluso para problemas de un grado mayor de complejidad como el problema de la *Mesa* (problema 8) que corresponde a una permutación cíclica y el problema de la *Fila* (problema 7) que es una permutación con restricción. Este resultado nos llevó a pensar que los estudiantes cuentan con estrategias intuitivas de solución antes de llegar al aula. Lo que podría sugerir que como docentes podemos recapitular estas estrategias en la enseñanza de esta temática, estimulando mediante la exposición a resolución de problemas de tipo combinatorio. Los resultados también sugieren que es necesaria una instrucción que enfatice en la necesidad de ser sistemático y ordenado en las estrategias que se emplean para la solución de problemas combinatorios.

Para estimular a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento combinatorio es importante que el profesor proponga diversos tipos de problemas. Es decir, problemas de principio multiplicativo, arreglos en los cuales importa el orden, arreglos en los que no importa el orden, problemas de elementos de naturalezas diferentes (personas, números, objetos) y problemas de espacios muestrales diferentes (pequeños y numerosos).

Las estrategias intuitivas más recurrentes, en los estudiantes cuando se enfrentaron a problemas que involucran la combinatoria, fueron las *Manipulaciones por ensayo y error,* observadas en el 40% de las entrevistas. Los estudiantes asociaron los elementos del conjunto mediante correspondencia. Es decir, trataron de formar parejas haciendo corresponder cada elemento del primer conjunto con un único elemento del segundo conjunto y así sucesivamente hasta agotar el cardinal de uno de los conjuntos. Esta estrategia fue muy evidente en los problemas de principio multiplicativo. Sospechamos que esto se debe posiblemente a la naturaleza de estos problemas donde existen dos conjuntos claramente diferenciable.

Acudir a la estrategia del ensayo y error dejó de lado la posibilidad de emplear estrategias sistemáticas que les habrían permitido encontrar el número de combinaciones posibles dentro de los problemas propuestos. Dentro del aula, esta estrategia de solución de problemas debe ser valorada y tenida en cuenta por el profesor como una muestra por parte del estudiante de tratar de dar solución a los problemas a los que se enfrenta. El docente podría iniciar la enseñanza del concepto de combinatoria de manera que el estudiante explore problemas combinatorios intuitivamente antes de cualquier instrucción formal o teórica con el fin de reconocer que tipos de estrategias de solución utiliza.

Las estrategias de *Exploración de un sistema* y de *Aproximación a un sistema*, fueron estrategias usadas en porcentajes equivalentes dentro de las entrevistas, 21.8% y 25.4% respectivamente. En la categoría de *Exploración*, los estudiantes usaron más de una estrategia para solucionar los problemas. Esto evidencia la falta de consistencia en las estrategias y la falta de sistematización. En la categoría de *Aproximación* los estudiantes usaron una sola estrategia durante todo el problema. Una implicación importante de este hallazgo es que los estudiantes pueden llegar al aula con estas estrategias, las cuales deben tenerse en cuenta para la enseñanza de la combinatoria.

Consideramos que si bien las *Manipulaciones por ensayo y error* no son estrategias sistemáticas consistentes, el registro escrito y el material de apoyo constituyen recursos que favorecen el éxito en la solución de ciertos problemas combinatorios, principalmente en los problemas que involucran un gran número de posibilidades (espacio muestral). Los participantes entrevistados no poseían un esquema combinatorio desarrollado, es decir, no lograron coordinar el listado de los eventos posibles con el conteo de éstos. Por esta razón las exploraciones de problemas combinatorios son necesarias para incentivar el trabajo organizado y sistemático, donde el registro escrito podría favorecer la obtención de un número mayor de eventos posibles que dan solución a los problemas propuestos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araujo, C. (s.f). *La Incultura Estadística en Nuestra Soledad: Necesidad de Revisar la Enseñanza de la Estadística Básica.* Recuperado el 13 de Junio de 2011, de http://www.mat.puc.cl/archivos/File/SOBRE.DOCENCIA/A01%20La%20Incultura%20Estadistica%20en%20Nuestra%20Sociedad.pdf

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix , 15*, 2-13.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas internacionales de Enseñanza de la Estadística*, (págs. 1-19). Buenos Aires.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis S.A.

Correa-Torres, S. (2011). La ética en la investigación educativa y la protección de los sujetos humanos. *El Educador , 23* (2), 45-51.

Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2007). Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación* , 1256-1267.

Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2009). Processos de resolução de problemas de combinatória por alunos de 9º ano de escolaridade. *Actas do XX Seminério de investigação em educação Matemática* (págs. 339-353). Braga: Centro de investigação em Educação da Universidade do Minho.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004). *The Teaching Experiment – What it is and what it isn't.* Recuperado el 25 de Agosto de 2011, de http://www.phys.ksu.edu/personal/srebello/research/career/papers/TeachingExptPaper.pdf

Esteban. (12 de 05 de 2011). Entrevista # 25. (Eder, Entrevistador)

Esteban. (26 de Febrero de 2011). Entrevista #1. (Eder, Entrevistador)

Ferrater, J. (1994). *Diccionario de Filosofía* (Vol. 2). Barcelona: Ariel S.A.

Fischbein, E., & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoningEducational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics , 34*, 27–47.

Galeano, M. E. (2004). *Diseño de proyectos de investigación cualitativa.* Medellín: Fondo editorial Universidad EAFIT.

Grupo Editorial Norma. (2002). *Libro de actividades : pirámide 4.* Bogotá: Norma.

Guerra, D. T., & Zapata, B. A. (2003). *Estándares Matemáticos* . Medellín: Susaeta Ediciones.

Iñiguez, L. (1999). Investigación y evaluación cualitativa: Bases teóricas y conceptuales. *Atención Primaria , 23* (8), 496-502.

Latorre, A., del Rincón, D., & Arnal, J. (1996). Naturaleza de la investigación educativa. En A. Latore, D. del Rincón, & J. Arnal, *Bases metodológicas de la investigación educativa* (págs. 24-50). Barcelona: GR92.

Mariana, & Carolina. (26 de Febrero de 2011). Entrevista #1. (Eder, Entrevistador)

Memmert, W. (1976). Intuición y medios intuitivos. *Educación , 14*, 82-94.

MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1985). *Marcos Generales de los Programas Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (25 de Julio de 1963). *Ministerio de Educación Nacional Republica de Colombia.* Recuperado el Noviembre de 2011, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103714_archivo_pdf.pdf

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática , 8* (1), 26-39.

Porta, L., & Silva, M. (2003). *La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa.* Recuperado el 20 de Agosto de 2011, de En: http://www.uccor.edu.ar/paginas/ red/porta.pdf

Quijano de Castellanos, M. V., & Pullas, J. (1994). *Matemática constructiva, 4.* Bogotá: Libros & Libres.

Ramirez, C. A. (2009). Análisis de la intuición. *Revista de Psicología Universidad de Antioquia , 1* (1), 103-104.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matematica Avanzada. *Épsilon , 36*, 433-446.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). Aspectos básicos sobre el análisis de datos cualitativos. En G. Rodríguez, J. gil, & E. García, *Metodología de la investigación cualitativa* (págs. 197-218). Málaga: Aljibe.

Sandoval, C. A. (1996). Características comunes a las diversas modalidades de investigación de corte cualitativo y sus diferencias con las de corte cuantitativo. En C. A. Casilimas, *Investigación Cualitativa* (págs. 23-49). Bogotá: Icfes (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educacion Superior).

Santos Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática, XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática.*

Sañudo, L. E. (2006). La Ética en la Investigación Educativa. *Hallazgos-Producción de Conocimientos* (6), 83-98.

Silva, D. N., Fernandes, J. A., & Soares, A. J. (2004). Intuiçoes de alunos de 12º ano em combinatória: Um estudo exploratório. *Acta do I Encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (págs. 61-84). Braga: Centro de investigação em educação da Universidade do Minho.

Toledo, N. (2000). Principales tendencias de la estadistica en la escuela. *Ethos Educativo* (23), 42-48.

Vega, V. M. (2010). *Plan de estudios de matemáticas para los grados cuarto y quinto.* Medellín.

Zapata, B. A., & Guerra, D. T. (2001). *Esplendor Matemático 4.* Medellín: Susaeta Ediciones.

Zapata, L., Quintero, S., & Morales, S. (2010). *La enseñanza de la combinatoria orientada bajo la teoría de las situaciones didácticas.* Bogotá: 11 Encuentro Nacional de Matemática Educativa ASOCOLME.

ANEXOS

Anexo 1: Formato consentimiento informado

Consentimiento de Participación

Yo ____________________________________ estoy de acuerdo en permitir a mi hijo (a)____________________________________ participar en la investigación titulada "Razonamiento combinatorio en cuarto grado de primaria" que es conducida por los practicantes Hernán Darío Bedoya, Javier López Bedoya y Eder Echavarría Mendoza; estudiantes de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Entiendo que la participación de mi hijo (a) es voluntaria y puedo decidir permitirle: (a) no participar o (b) dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi hijo (a) sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es: Analizar las nociones intuitivas de los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Capilla del Rosario.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Estadística y mejorar el razonamiento lógico matemático de los estudiantes.

Procedimiento: Como participante en este estudio, mi hijo (a) será observado en clase, algunas veces podría ser video grabado y de ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información tendrá acceso limitado, será bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, en persona o por teléfono:

Eder A. Echavarría. M tel: 2722780 Cel: 3136380324 Javier E. López B. tel: 2261482
Hernán D. Bedoya B tel: 4072596 Cel: 3128078065

Consentimiento: Entiendo que firmando este documento estoy autorizando la participación de mi hijo (a).

Hernán Darío Bedoya	____________	____________
Nombre del investigador 1	Firma	Fecha
Javier López Bedoya	____________	____________
Nombre del investigador 2	Firma	Fecha
Eder Echavarría Mendoza	____________	____________
Nombre del investigador 3	Firma	Fecha
____________	____________	____________
Nombre de padre o acudiente	Firma	Fecha

____

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la asesora Lucia Zapata en el teléfono 2195727 de la Universidad de Antioquia.