

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
CENTRO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS Y
PEDAGÓGICAS -CIEP**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA:

**LOS PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN Y LA ORGANIZACIÓN DE LOS FENÓMENOS FÍSICOS:
EL CASO DE LOS FENÓMENOS MECÁNICOS Y TÉRMICOS.
Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas**

INFORME FINAL

Autores:

Angel Enrique Romero
Facultad de Educación
Investigador Principal

Luz Dary Rodríguez
Facultad de Educación

José David Rincón
Escuela Normal Superior Maria Auxiliadora

Julián Medina
Estudiante en formación
Licenciatura en Matemáticas y Física

Medellín, julio de 2002

**LOS PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN Y LA ORGANIZACIÓN DE LOS
FENÓMENOS FÍSICOS: EL CASO DE LOS FENÓMENOS MECÁNICOS Y TÉRMICOS.
Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas**

ÍNDICE

	Pág.
1. Consideraciones acerca de la relación entre la física y las matemáticas en el ámbito educativo	1
1.1 Introducción	1
1.2 Sobre la relación entre la física y las matemáticas	3
1.3 Propuestas de investigación en educación respecto a la relación física-matemáticas	6
1.4 La enseñanza de la física y su relación con la concepción de ciencia	9
1.5 La enseñanza de la física y la actividad de organizar fenómenos	11
1.6 Sobre el objeto de la investigación	13
2. Análisis de los cambios desde la perspectiva de sistemas y variables	18
2.1 Sistemas	18
2.2 Sistemas y variables como formas de ver	23
2.3 Clasificar y ordenar	24
2.4 Estrategias de análisis de los cambios	25
2.4.1 Estrategias de análisis diferenciales e integrales	26
2.4.2 Estrategias de análisis por estados y transformaciones	27
2.4.3 Estrategias de análisis por cambio global y por cambio variable	29
2.4.4 Estrategias de análisis por causalidad y por relación	30
3. El problema de la Medición.	33
3.1 Introducción	33
3.2 ¿Qué significa medir una propiedad física?	34
3.3 Clasificación y ordenación como procesos fundamentales de la medición	36
3.4 Magnitudes extensivas y magnitudes intensivas	40
4. La medición de la temperatura	50
4.1 Introducción	50

4.2 Fenomenología de lo térmico	51
4.3 La medición de la temperatura en la perspectiva usual	52
4.4 Hacia una conceptualización de la temperatura y su cuantificación	55
4.5 Hacia la construcción del concepto de calor	61
4.6 El fenómeno térmico desde la perspectiva de sistemas y variables	62
5. La cuantificación de la velocidad	65
5.1 Introducción	65
5.2 Análisis del movimiento desde una perspectiva fenomenológica	74
5.3 El fenómeno de caída desde la perspectiva galileana: Identificación de la velocidad instantánea como variable de estado	76
5.4 El fenómeno del choque inelástico de cuerpos: cuantificación de los estados de movimiento y sus cambios	82
5.5 Hacia la construcción del concepto de cantidad de movimiento y su conservación	87
6. Modelos de los estudiantes y su relación con la matematización de fenómenos físicos	92
6.1 Sobre el enfoque de modelización	92
6.2 Representación cartesiana como medio para identificar variables	94
6.3 Representación cartesiana como medio para establecer relaciones entre variables	99
6.4 Adecuación entre representaciones: un problema semántico	102
6.5 Modelos matemáticos como forma de explicar y anticipar el mundo físico	104
7. Análisis de la intervención didáctica	111
7.1 Análisis de resultados del pretest A	111
7.2 Análisis de resultados del pretest B	116
7.3 Análisis comparativo pretest-postest	122
7.3.1 Matematización de situaciones físicas a través del uso de representaciones	123
7.3.2 Comprensión y análisis de fenómenos físicos	128
7.3.2.1 Capacidad para usar e interpretar representaciones cartesianas para diferenciar magnitudes físicas	128

7.3.2.2 Capacidad para aplicar los conceptos físicos y sus relaciones en la construcción de argumentaciones	130
8. Conclusiones	132
Anexo. Talleres didácticos	135
Bibliografía	152

1. CONSIDERACIONES ACERCA DE LA RELACIÓN ENTRE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS EN EL ÁMBITO EDUCATIVO

1.1 Introducción

Usualmente los procesos de matematización y formalización son catalogados como uno de los aspectos que más dificultades causan a los estudiantes que toman cursos de física, tanto en el ámbito de la educación media como en el de pregrado. Son además de señalados por los docentes de física como uno de los factores de mayor incidencia en el fracaso académico de sus estudiantes, al punto de llegar a proponer una “desmatematización” de la física, es decir, una enseñanza de los conceptos y teorías físicas que no involucre la cuantificación de las magnitudes físicas ni el uso de formalismos matemáticos.

A lo anterior se suma el uso de las matemáticas que hace el profesor de física en las didácticas tradicionales: en ellas se confunde el proceso de matematización de los fenómenos físicos con la aplicación de fórmulas y algoritmos matemáticos a ciertas definiciones, con la intención de que el estudiante resuelva satisfactoriamente ejercicios y problemas encontrados en los libros de texto¹.

Esta situación puede estar siendo ocasionada por las concepciones que tienen los docentes de las relaciones que existen entre los procesos de matematización y la construcción de los conceptos físicos; concepciones que están basadas, a su vez, en determinadas formas de asumir el conocimiento matemático y el conocimiento científico.

En este sentido, la existencia de una estrecha relación entre la física y las matemáticas es un hecho, hoy día, universalmente reconocido. No obstante, tal relación no deja de ser

¹ Sobre Estas imágenes de ciencia tradicionales véase Granés, J y Bromberg, P., La difusión científica y la apropiación cultural de las ciencias. Revista Naturaleza, educación y ciencia, Universidad Nacional, Santa fe de Bogotá. No. 4, 1986

problemática y su explicitación ha sido una preocupación que ha inquietado tanto a científicos y matemáticos como a filósofos y epistemólogos de las ciencias a lo largo de la historia. Teniendo en cuenta que la manera misma de identificar y plantear una problemática obedece a formas particulares de considerar los elementos que intervienen en ella y sus posibles relaciones, el plantear adecuadamente la problemática concerniente a la relación entre la física y las matemáticas, sin lugar a dudas, contribuirá a esclarecerla.

Existen, en principio, dos formas de plantear la problemática en cuestión: preguntarse por el *por qué* se da la relación entre la física y las matemáticas y preguntarse por el *cómo* ocurre tal relación. Optar por cualquiera de las dos formulaciones implica asumir determinados presupuestos que es pertinente explicitar: Elegir la primera implica considerar que la relación no es “natural”, es decir, que las matemáticas y la física son disciplinas cuyos objetos de estudio y formas de abordarlos son de hecho diferentes y, por tanto, cuando se da alguna relación entre ellas es un hecho en principio extraño que es preciso explicar. Una ampliación de esta primera formulación puede ser enunciada de la siguiente manera: ¿Cómo puede ser que las matemáticas -consideradas en general como un estudio de abstracciones puras- se “utilicen” y “funcionen” con éxito en la física -considerada como la ciencia de lo concreto por excelencia? Tal como lo afirma el profesor J-M Lévy-Leblond, matemático e investigador de la Universidad de Niza, a esta manera de plantear la problemática subyace una cierta forma de asumir la física y las matemáticas que está basada en una perspectiva epistemológica que se apoya sobre pares de nociones opuestas: naturaleza-hombre, experiencia-teoría, concreto-abstracto (Lévy-Leblond, 1988: 77). Mientras el primer componente de tales pares está relacionado con el papel que se asumiría para la física, el segundo está relacionado con el papel que desempeñarían las matemáticas.

Elegir la segunda formulación, por su parte, no sólo implica asumir que la relación puede darse sino también que es posible explicitar la forma como ocurre tal relación e incluso adelantar análisis que posibiliten implementar estrategias didácticas adecuadas para la enseñanza; hecho que sólo es posible si se presuponen, de alguna forma, nexos entre ambas disciplinas. La problemática así formulada conducirá a que se trate de esclarecer las formas

particulares en que esta relación se materializa, análisis que se puede adelantar si se indaga paralelamente por los presupuestos epistemológicos que subyacen a las diversas formas de presentar la relación y por los conceptos físicos y matemáticos que en cada caso particular se involucran.

La formulación de la problemática que se asumirá en esta investigación corresponde a la segunda de las formulaciones arriba caracterizadas. Teniendo en cuenta esto, es claro que la forma como se puede avanzar en la caracterización de las relaciones entre la física y las matemáticas que posibilite el plantear propuestas pedagógicas es a través de la realización de estudios de casos de cómo se constituyen y formalizan conceptos físicos particulares; sólo así se podrá explicitar el uso de argumentos esbozados, las diversas representaciones utilizadas, el establecimiento de modelos y los grados de formalización involucrados en la identificación y cuantificación de las magnitudes relevantes para la constitución de un concepto particular. Se propone, entonces indagar cómo se materializa la relación entre la física y las matemáticas a propósito de la enseñanza de conceptos como el de velocidad instantánea, cantidad de movimiento, temperatura y calor. Se espera con esta investigación explicitar lo fructífera que puede ser esta forma plantearse la relación entre la física y las matemáticas en el contexto pedagógico.

1.2 Sobre la relación entre la física y las matemáticas

A lo largo de la historia son varias las perspectivas a través de las cuales se trata de asumir alguna interpretación del cómo se da esta relación. En este sentido Galileo afirmaba que:

«La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo; pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin las cuales es imposible entender una palabra»².

El matemático Hempel consideraba que

«Aunque la matemática no aporta en ningún caso nada al contenido de nuestro conocimiento de temas empíricos, es de todos modos completamente imprescindible como instrumento para la verificación y hasta para la expresión lingüística de este conocimiento»³.

A estas citas puede añadirse el comentario de Poincaré, según el cual

«Todas las leyes se extraen de la experiencia, pero, para enunciarlas, se precisa de una lengua especial: el lenguaje ordinario es demasiado pobre, y además es demasiado vago, para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas. Estas es, por consiguiente, una primera razón por la que el físico no puede prescindir de las matemáticas: éstas le proporcionan la única lengua en la que puede hablar»⁴.

Heisenberg, por su parte, afirmaba que

«La matemática es, por así decir, el lenguaje en que la ciencia plantea sus problemas y puede formular sus soluciones, pero el hecho de que se planteen problemas es regido por el interés hacia los procesos del mundo real y la voluntad de influir en ellos»⁵.

Aunque, como se percibe a través de las citas, las interpretaciones que se han propuesto para esta relación son muy variadas, en su mayoría están basadas en la consideración de que las matemáticas constituyen el *lenguaje* de la física. Este enunciado, sin embargo, lejos de ser la estricta connotación que aparenta, está cargado de muchos presupuestos ontológicos y epistemológicos que es necesario explicitar.

En un primer intento de análisis se puede identificar algunas interpretaciones a tal enunciado: por una parte, se tienen los enfoques que consideran que el lenguaje al que se

² Galileo. El Ensayador. Ed. Sarpe. Madrid 1984. p. 21.

³ Hempel. C. G.. Sobre la naturaleza de la verdad matemática. En Newman. J. (Ed). Sigma: el mundo de las matemáticas. Tomo 5. p. 22.

⁴ Poincaré. H.. La valeur de la science. Citado por Lévy-Leblond. J-M.. op cit. p. 76.

⁵ Heisenberg. W.. La imagen de la naturaleza en la física actual. Ediciones Orbis S.A.. Barcelona. 1985. p. 50.

refiere la expresión es de la naturaleza, es decir del objeto de conocimiento; por otra parte se tienen las perspectivas que asumen que el lenguaje es del individuo, es decir del sujeto que conoce. En el primer caso, se considera que el objeto se impone al sujeto y las matemáticas son pensadas, por tanto, como el lenguaje de la naturaleza que el sujeto cognoscente debe aprehender para comprenderla; las estructuras lógico matemáticas, desde esta perspectiva, sintetizarían las formas como se comporta el mundo exterior. En el segundo caso, por su parte, se asume que el sujeto de conocimiento se impone al objeto y las matemáticas son concebidas entonces como formas de pensamiento a las cuales el objeto de conocimiento, los fenómenos físicos en este caso, deben traducirse y asimilarse para que resulten comprensibles. Incluso hay perspectivas que adoptan enfoques intermedios en donde tanto el sujeto como el objeto tiene la misma importancia en el aporte a las estructuras lógico matemáticas y, por tanto, el poseer una de tales estructuras es característico de todo conocimiento físico (Malagón, 1988: 7)⁶.

A pesar de las diferencias, estas perspectivas tienen una base común: tanto los objetos de estudio de los fenómenos físicos como las estructuras lógico matemáticas están ya dadas, son universales en el sentido que existen independientemente de los individuos y, por tanto, lo único posible de hacer es “descubrirlos”, aceptarlos y tratar de hacer uso de ellos, pero nunca construirlos. En un ambiente tal, resulta difícil evidenciar la posibilidad de desarrollar pensamiento científico, en tanto que lo que se gana se reduce a una destreza de tipo operacional: se adquiere una serie de herramientas que contribuye muy poco a que los individuos, los estudiantes, sienten las bases de posibles cosmovisiones propias, de modos estructurados de construir explicaciones significativas a los fenómenos naturales, en síntesis, se ven imposibilitados para generar modos de significar y de construir el mundo físico.

⁶ Malagón, J. F., La relación física y matemáticas en Galileo. Tesis de Maestría en Docencia de la Física, Universidad Pedagógica Nacional. Santafé de Bogotá. 1988. p. 7.

1.3 Propuestas de investigación en educación respecto a la relación física-matemáticas

La forma de plantear y abordar la problemática concerniente a la relación entre la física y las matemáticas, conducente a considerar las matemáticas como lenguaje de la física, está igualmente muy difundida en el ámbito escolar; siendo tal vez la más generalizada aquella concepción que considera que el lenguaje al que se refiere la expresión es del individuo, es decir del sujeto que conoce. No obstante, de forma similar al análisis adelantado anteriormente, esta concepción tiene diversas connotaciones que, en rasgos generales, puede dividirse en dos clases de enfoques, esta vez dependiendo de la forma como se concibe el lenguaje en su relación con el pensamiento: el lenguaje como instrumento de expresión del pensamiento o el lenguaje como intrínsecamente ligado a él.

En la primera, las matemáticas son asumidas como un medio de expresión y de cálculo, hecho que conduce a concretar la relación entre la física y las matemáticas a través de una *relación de aplicación*: las matemáticas intervienen en la física como un instrumento meramente técnico y, por tanto, en situación de exterioridad respecto a los objetos de estudio y al sujeto cognoscente. Es precisamente esta concepción la que permite plantear como estrategias curriculares y didácticas el adiestramiento del estudiante en el uso de herramienta matemática o la completa omisión de ella, según sea el caso de que se considere a las matemáticas como una herramienta útil y adecuada o no para la comprensión y análisis de los fenómenos físicos. Las siguientes propuestas didácticas ejemplifican este enfoque y sintetizan algunos trabajos pedagógicos que en los últimos años se han adelantado a propósito de la relación física y matemáticas.

Se trata, en primera instancia, de un curso de física para estudiantes flojos en matemáticas (Teaching Physics with Math to Weak Math Students)⁷. El curso está basado en la consideración de que la mayoría de estudiantes de nivel medio presentan insuficiencias en el manejo de procedimientos algebraicos, hecho que, según el autor, puede ser un problema

⁷ Vondracek, M., Teaching Physics with Math to Weak Math Students. The Physics Teacher, Vol. 37, Jan. 1999, pp. 32-33.

para los profesores que no quieren hacer un curso de física estrictamente “conceptual”, es decir, una enseñanza de la física sin formalismo matemático. Para resolver esto, el autor propone dedicar un tiempo suficiente al comienzo del curso para que los estudiantes se vuelvan expertos en resolver la ecuación $a b = c$, para cualquiera de las tres variables, con la intención de que a lo largo del año cuando vean relaciones físicas de la misma forma (como $v = dt$, $a = F m$ o $I = V R$), las puedan usar rápidamente en la solución de problemas. En segundo lugar, se tiene la realización de un curso de física conceptual (Teaching by Conceptual Exploration)⁸. El curso surge como reacción al hecho de que un alto porcentaje de los estudiantes del primer año en la universidad presentan un aprendizaje de tipo memorístico y operatorio, y que incluso quienes claman por “entender” física asumen tal entendimiento como la capacidad para resolver los típicos problemas de texto. Para cambiar esto, los autores diseñaron un curso de física centrado en la presentación de ideas y conceptos físicos libre de matemáticas y en la generación de interpretaciones verbales y escritas del entendimiento de ellos. Luego de un análisis de los resultados proponen la realización de curso integrados a través de tres fases secuenciales: una introductoria, que trate exclusivamente de la dinámica conceptual de elementos de física; otra de transición, que introduzca la enseñanza de modelación matemática y solución de problemas y, finalmente, una fase madura que sumerja al estudiante en la modelación matemática del mundo físico y de las ideas abstractas.

Sin embargo, surgen preguntas como: ¿Existe una única forma de asumir y representar los conceptos físicos? ¿Conceptos físicos como el de velocidad, fuerza, aceleración, temperatura, calor, etc., se reducen a ser considerados y/o representados como relaciones de la forma $a b = c$? ¿Cómo es posible cuantificar las nociones de velocidad, fuerza o grado de calor, surgidas de la experiencia sensible? ¿Los conceptos físicos son independientes de las estructuras lógico matemáticas -la velocidad instantánea, por ejemplo, es independiente de la noción de límite o derivada?

⁸ Linder, C. J. y Hillhouse, G., Teaching by Conceptual Exploration. The Physics Teacher, Vol. 34, Sept. 1996, pp. 332-338.

En la segunda clase de enfoque, las matemáticas tienen con la física una *relación de constitución*, es decir, se considera que sin las matemáticas no sólo es imposible especificar y expresar los conceptos y procesos del pensamiento físico, sino incluso generarlos. Desde esta perspectiva, al examinar las teorías físicas resulta difícil encontrar un concepto físico que no esté ligado a uno o varios conceptos matemáticos. A pesar de lo ineludible que puede parecer esta forma de asumir la relación, está igualmente cargada de muchos presupuestos sobre el papel de la experiencia y el uso de las matemáticas para su organización y formalización. A modo de ejemplo de los presupuestos que se tienen en este enfoque se puede citar la propuesta de una línea de trabajo e investigación en enseñanza sobre la relación entre la física y las matemáticas:

«De hecho, la Matemática nos ofrece la oportunidad de desvelar y descubrir las causas y los efectos de los fenómenos inaccesibles a la vía experimental y avanzar en el estudio cuando han sido agotados todos los recursos instrumentales disponibles. Desde el punto de vista de la enseñanza de la Física, la herramienta matemática se transforma en una parte de la Física misma, pues cualquier razonamiento basado en hechos físicos conocidos no puede expresarse ni desarrollarse sino a través de su tratamiento matemático. Así, la Matemática constituye el medio de expresión y comunicación universal de la Física. Por ello sería descabido destacar, a nivel del alumnado, la importancia de su estrecha relación y evitar, en lo posible, toda idea de disociación entre ambas ramas del saber»⁹.

No obstante, ¿Qué relación existe entre la experiencia sensible y las formalizaciones propiamente dichas? ¿Hasta qué punto el diseño experimental es independiente de la conceptualización y de la formalización misma?

Esta diversidad de enfoques y soluciones pone de presente que el problema de explicitar la relación entre la física y las matemáticas no está concluido. Más aún, las preocupaciones enunciadas son completamente vigentes toda vez que se quiera proponer estrategias pedagógicas y didácticas pues, como lo han afirmado y justificado muchas investigaciones, a toda propuesta pedagógica y didáctica en el campo de la enseñanza de las ciencias o las matemáticas subyace una determinada perspectiva de lo que se asume como conocimiento

⁹ Martínez, J., ¿Hacia una visión matemática de la física? Enseñanza de las Ciencias, Vol.2, No. 1, 1984, p.79

científico y conocimiento matemático. En este sentido, a partir de los análisis adelantados anteriormente, se considera que asumir las matemáticas como el lenguaje de la física no permite comprender ni visualizar de qué forma se establece y explicita esta relación: por una parte, asumir las matemáticas como un método universal de representación de las ciencias -en particular de la física-, que se apoya por su parte en un método experimental igualmente universal, es una posición demasiado vaga que explica de un modo excesivamente general tal adecuación de las matemáticas al conocimiento científico y al estudio de la naturaleza en su conjunto (Lévy-Leblond, 1988: 80); de otra parte, desde este enfoque las estructuras lógico-matemáticas son dadas como algo acabado, donde toda idea de génesis y desarrollo es excluida pues las estructuras formales son preformaciones y el sujeto es sede o teatro, pero no actor de ellas.

1.4 La enseñanza de la física y su relación con la concepción de ciencia

La consideración a cerca de los anteriores cuestionamientos remite a abordar la problemática de la enseñanza de la física en general, y por extensión a su relación con las matemáticas en particular, en un contexto más amplio. Al ser la relación con los *productos* de la ciencia la forma más generalizada e inmediata de ponerse en contacto con la empresa científica -y en mayor grado en países como el nuestro que, reducidos a la calidad de consumidores de ciencia, permanecen ajenos a la actividad de producción-, no es de extrañar que se tienda a considerar la enseñanza de las ciencias, y en particular de la física, como una actividad de *transmisión* de saberes, técnicas y procedimientos científicos, de *hecho* ya acabados y formalizados. La disociación entre la actividad científica y sus productos ha llevado a asumir la ciencia como un cuerpo de hechos, conceptos, leyes, teorías y técnicas formalizadas, convirtiéndolos en los “contenidos” eje de la enseñanza. Esta separación entre la *actividad* científica y los *productos* generados por ella conduce, por tanto, a la “cosificación” de los mismos y pone al sujeto -maestro o alumno- en una relación de exterioridad frente al conocimiento científico: Si bien el individuo animado por tal concepción generalmente asume que hay un proceso para llegar a tales resultados,

considera que no es necesario, ni pertinente, ni posible involucrarse en el proceso de elaboración y formalización de tales productos. Al identificar los resultados con el conocimiento, considera que lo que se trata es de asimilarlos y de hacer uso de ellos; pero en esa asimilación se teme alterar y distorsionar el producto: se busca manejar los conceptos independientemente de las preguntas y problemáticas que los constituyeron y se ve como posible considerar cada concepto por separado. Los conceptos y las leyes adquieren existencia ontológica, son en sí mismos la realidad objetiva. En este contexto, preguntas como las siguientes carecen de sentido: ¿Por qué es necesario establecer un concepto, una ley o un principio dado? ¿Qué tipo de estructura lógico matemática le subyace? ¿A qué problemáticas responde? ¿Qué tan válido o pertinente resulta el problema planteado?

Si se asume así la física, no es raro encontrar que el centro de la enseñanza sea la transmisión de información y que se desconozca tanto los procesos de construcción y formalización de los conceptos físicos como los modelos explicativos de los estudiantes, pues de lo que se trata es de acercarlos lo más rápidamente posible a tales “productos científicos” sin importar los contextos de su significación. Esta forma de asumir la física a todas luces tiene nefastas implicaciones culturales, pues a través de ella se perpetúa una *relación de exterioridad* en la que el maestro y, a través suyo, el estudiante se asumen únicamente como consumidores y transmisores de un cierto saber, pero no como posibles productores del mismo. ¿Cómo contribuir a cambiar esta relación de exterioridad con el conocimiento?

Con el ánimo de abordar estas problemáticas de una forma significativa, se propone en esta investigación considerar la física no como un cúmulo de productos científicos (conceptos, leyes, teorías) de hecho organizados y formalizados, sino como la *actividad* misma de su producción: una actividad relacionada con la elaboración y formalización de explicaciones a fenómenos naturales con la intención de anticiparse a la acción; son precisamente estas explicaciones las que circulan en una comunidad a manera de cánones que prescriben la naturaleza del mundo y que regulan los lazos de pertenencia a una visión compartida del

mismo¹⁰. Así, esta actividad está necesariamente relacionada con el entramado de creencias, compromisos epistemológicos y estrategias cognitivas particulares (uso de analogías, establecimiento de modelos, grados de formalización, representaciones utilizadas, etc) puestas en juego por quienes la practican: científicos, maestros y estudiantes. Ahora bien, ¿cómo propender por la enseñanza de una actividad si no es creando y propiciando espacios para que se practique y ejecute tal actividad? En este sentido, ¿es posible iniciar o continuar –en el caso de que ya en la escuela se haya iniciado– a los jóvenes en la actividad de construcción de explicaciones a situaciones y problemáticas del mundo natural y en su formalización y matematización, sin permitir que se *viva* tal actividad?

Es importante reconocer, por una parte, que a la vez que se practica esta actividad de construcción de explicaciones para la organización y formalización de la experiencia sensible, se pone en juego concepciones de mundo que responden a determinados compromisos cognitivos, ideológicos y epistemológicos y, por otra, que para que surjan nuevas explicaciones se hace necesario un cambio de dichos compromisos, es decir, un cambio en las concepciones de mundo, lo cual a su vez posibilita el surgimiento o la visualización de nuevos problemas.

1.5 La enseñanza de la física y la actividad de organizar fenómenos

Las anteriores consideraciones plantean la necesidad de reflexionar sobre un aspecto que suele ser dejado de lado o asumido como obvio: el sentido de la enseñanza de la física. ¿Se trata de enseñar los conceptos y teorías, tal como se nos presentan en los libros de texto, ya formalizados y acabados? Y, en este sentido, ¿cuáles conceptos y teorías son las que deben enseñarse a sabiendas de que para una misma clase de fenómenos, como los mecánicos, existen diferentes perspectivas teóricas, como la newtoniana, la eulariana o la lagrangiana?

¹⁰ Ver a este respecto los interesantes análisis de J. Bruner en Educación: puerta de la cultura. Especialmente Cáp. 5 las narraciones de la ciencia. Bruner, J. La educación, puerta de la cultura. Ed. Aprendizaje Visor.

¿O acaso ha de buscarse con la enseñanza de la física mostrar a los estudiantes el carácter dinámico de la física, destacando preguntas, métodos y respuestas que los físicos y otros pensadores se han planteado sobre los diferentes fenómenos naturales a lo largo de la historia? O más bien ¿se trata de hacer de la enseñanza una actividad en la que se generen condiciones para propiciar la organización de los fenómenos físicos por parte de los estudiantes y del maestro mismo?

En esta investigación se opta por la última alternativa por cuanto ella implica orientar de manera directa el ejercicio pedagógico a la formación en la actividad de producción de conocimientos más que a la adquisición o distribución de los resultados: no se trata pues de buscar formas didácticas más adecuadas para la enseñanza de una teoría en particular, como la mecánica newtoniana, o de sustituir tal teoría por otras formulaciones o dar un panorama de las diferentes versiones y representaciones de la misma teoría; en cualquiera de estos casos el acento se haría en las teorías, es decir, en los productos y no en la actividad y con ello se orientaría la enseñanza hacia la asimilación, distribución y uso de los saberes y no hacia la producción de conocimiento.

Se considera que un enfoque tal para la enseñanza de la física contribuiría significativamente a la generación de condiciones culturales para dejar de ser simples consumidores de la ciencia y, lo que es más importante aún, para generar una capacidad investigativa para resolver nuestros propios problemas.

Esta alternativa plantea un cambio radical de compromisos por parte de estudiantes y de profesores. El compromiso ya no es con las teorías como la mecánica o la termodinámica, es decir, con las formas de organizar los fenómenos mecánicos y térmicos ya constituidas. El compromiso es involucrarse en la actividad misma de organizar los fenómenos mecánicos y térmicos. Y ello no supone una actividad solipsista, implica una nueva relación con el conocimiento, con los productos científicos, con los planteamientos de los científicos y con la información en general, en la medida en que posibilita establecer un

diálogo con los diferentes pensadores con miras a avanzar en la elaboración y estructuración particular de toda la clase de fenómenos abordados.

1.6 Sobre el objeto de la investigación

Una práctica pedagógica basada en esta perspectiva ha de dirigir sus esfuerzos en el diseño de actividades a propósito de la producción de conocimiento, más que en la transmisión y asimilación del mismo, es decir, que privilegie la pregunta *cómo se conoce* por encima de la pregunta *qué se conoce*.

En los últimos años han venido surgiendo propuestas de investigación en la enseñanza de la física que, teniendo esta intención de base, tematizan más explícitamente las posibles formas como se dan las relaciones entre la física y las matemáticas a través de estudios de caso: se trata de la indagación histórico epistemológica de la física con fines pedagógicos, de la modelización en física y del enfoque de resolución de problemas. Dada la relevancia de estas propuestas en la investigación que se desea adelantar, es pertinente hacer una breve descripción de algunos de sus aportes.

Los análisis histórico epistemológicos de la física han contribuido a superar la relación de confrontación entre los pares naturaleza-hombre, experiencia-teoría, concreto-abstracto característicos de formas tradicionales de asumir la relación entre la física y las matemáticas. Por una parte, han mostrado que no existe una única manera de concebir la materialización de dicha relación, pues tal adecuación no es universal ni ahistórica: depende tanto de las estructuras de los sistemas matemáticos como de los conceptos y las magnitudes físicas en consideración (Paty; 1994). Es así como una gran variedad de estudios histórico epistemológicos muestran que no hay una única vía de estructuración cuando se aborda el estudio de los fenómenos físicos. Análisis de las obras de autores como

L. Euler¹¹, P. S. Lagrange¹² y planteamientos como el de H. Hertz¹³ muestran que existen diversas formas de abordar y organizar los fenómenos mecánicos, que no son equivalentes, sino que los conceptos y las representaciones involucradas en cada una de ellas corresponden a formas particulares de concebir y abordar el mundo.

Es posible evidenciar esta diversidad de enfoques, por ejemplo, en las formas como Newton y Euler consideran lo que es la fuerza: desde la perspectiva newtoniana la fuerza se concibe como una entidad que existe exterior e independiente de las interacciones mismas y dado que la segunda ley explicita una relación causa-efecto entre la fuerza y el elemento diferencial de velocidad, se asume que conocidas las fuerzas que intervienen en una situación particular es posible determinar las aceleraciones de los cuerpos que están presentes o viceversa. Para Euler, en contraste con la concepción newtoniana, el mundo es un *plènum* de materia y, por tanto, las interacciones se realizan por contacto, hecho que implica asumir que las fuerzas no son independientes de los cuerpos y de las interacciones mismas; el principio euleriano de la mecánica no obedece a una relación causal sino que a la vez que formaliza las relaciones existentes en la caída de los cuerpos, establece las relaciones que deben cumplir las llamadas fuerzas (Romero, 1996)¹⁴.

Por otra parte, los análisis histórico epistemológicos contribuyen a la constitución de un marco conceptual apropiado: matematizar un fenómeno físico no consiste en sobreponer un aparato matemático sobre el fenómeno, se requiere ante todo construir la posibilidad misma de matematizarlo, es decir, de construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo; en este sentido, por ejemplo, estudios histórico epistemológicos muestran que en los procesos de matematización de fenómenos

¹¹ Romero, A. E. La mecánica de Euler: ¿una mecánica del continuo? Revista Colombiana de Física. No. 2. 1995.

¹² Torres, B. y Ayala, M. M. La mecánica Analítica de Lagrange. Física y Cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias. No. 3. 1996.

¹³ Hertz, H. Principles of Mechanics. Especialmente la Introduction. Dover Publications. 1956.

¹⁴ Romero, A. E. La mecánica euleriana: una mecánica del continuo. Tesis de grado. programa de Maestría en Docencia de la Física. Universidad Pedagógica Nacional. Santafé de Bogotá. 1996.

físicos no intervienen los números como tales, sino su estructura: la estructura del conjunto de magnitudes físicas de la misma clase es isomorfa con la estructura de los números reales.

Para Galileo, por ejemplo, la velocidad es una magnitud de la misma categoría que el espacio y el tiempo, es decir, no es una magnitud “derivada” como se considera en los libros de texto hoy día; este aspecto es una consecuencia del razonamiento geométrico utilizado para abordar el problema del movimiento, pues en la geometría de Euclides -base del análisis de Galileo- sólo es posible establecer proporciones entre magnitudes homogéneas. Este razonamiento geométrico, si bien es más restringido del algebraico, es mucho más amplio que el aritmético, pues hace posible establecer relaciones de mayor generalidad y teorizar sobre ellas: la base de las relaciones de dependencia entre las magnitudes son las proporciones para las que hay definidas operaciones y transformaciones. Se puede afirmar, entonces, que Galileo a partir de axiomas y definiciones y haciendo uso de todas las herramientas que le daba la geometría y su operatoria, transforma el movimiento a la certeza y claridad de la geometría pues, de este modo, sus leyes se enuncian de modo geométrico. Por tanto, su racionalización del movimiento es formalmente igual a un sistema geométrico (Malagón, 1988: 95).

Tomando como base estos aportes dados por la indagación histórico epistemológica de la física con fines pedagógicos y por el enfoque de la modelización en física, y teniendo en cuenta la manera como se ha formulado inicialmente el problema, es claro que la forma como se puede avanzar en la caracterización de las relaciones entre la física y las matemáticas que posibilite el plantear propuestas pedagógicas es a través de la realización de estudios de casos de cómo se constituyen y formalizan conceptos físicos particulares; sólo así se podrá explicitar el uso de argumentos esbozados, las diversas representaciones utilizadas, el establecimiento de modelos y los grados de formalización involucrados en la identificación y cuantificación de las magnitudes relevantes para la constitución de un concepto particular.

En este orden de ideas, en esta investigación se indagará por la forma como se materializa la relación entre la física y las matemáticas a propósito de la formalización de los conceptos fundamentales para la organización de los fenómenos mecánicos y térmicos, a saber: velocidad (instantánea), cantidad de movimiento, temperatura y calor. La intención a la que obedece la elección de los fenómenos mecánicos y térmicos para la realización de esta indagación es doble: por una parte, los cursos usuales de física, tanto en el nivel medio como en los cursos introductorios en el nivel universitario, asumen como contenido disciplinar las teorías de la mecánica clásica y la termodinámica, hecho que implica que realizar análisis conceptuales y elaborar propuestas alternativas para la enseñanza de estos dos campos específicos puede tener un gran impacto en el rumbo que tome la enseñanza de la física en estos niveles. Por otra parte, los individuos a las edades que se propone la aplicación didáctica -incluso antes- tienen ya una base experiencial de los fenómenos mecánicos y térmicos, adquirida a partir de su desenvolvimiento en la vida cotidiana, lo suficientemente elaborada y organizada como para comenzar a realizar un proceso de formalización y de exploración cognitiva de los criterios para adelantar tal formalización. Se considera que con otra clase de fenómenos físicos, como pueden ser los magnéticos o eléctricos, tal base experiencial no se encuentra suficientemente elaborada, incluso en edades adultas, hecho que encaminaría la investigación en otra dirección.

En particular, la investigación se centrará, por una parte, en realizar una indagación conceptual respecto a los procesos involucrados en la cuantificación de las magnitudes elegidas (velocidad instantánea, cantidad de movimiento, temperatura y calor); procesos que, entre otros aspectos, comprende:

- La construcción conceptual de las variables relevantes como magnitudes físicas y su caracterización (magnitudes intensivas o extensivas).
- Las formas de determinación de estas magnitudes tanto teórica como experimentalmente.
- El establecimiento de las escalas de medición.

- Las formas de representar y formalizar las relaciones entre las magnitudes identificadas (representaciones simbólicas, geométricas, algebraicas).

Por otra parte, con base en el análisis anterior, se diseñará y aplicará un conjunto de estrategias didácticas alternativas a través de las cuales se logre identificar y clasificar los modelos y procesos de modelización puestos en juego por los estudiantes a propósito de la solución a situaciones problemáticas relacionadas con la cuantificación de las magnitudes físicas de velocidad instantánea, cantidad de movimiento, temperatura y calor. En esta parte se prestará especial atención a:

- Los problemas que se dan en el proceso de construcción de las magnitudes físicas, en particular en lo que respecta a su carácter de variación continua.
- Los procesos lógicos y las formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes cuando intentan cuantificar las magnitudes físicas propuestas.
- Las diferentes simbolizaciones y representaciones utilizadas por los estudiantes en su intento de formalizar las relaciones entre las magnitudes en consideración.

Finalmente, es necesario plantear que esta investigación es apenas una fase de una indagación mucho más amplia que puede involucrar, entre otros aspectos, la construcción de propuestas epistemológicas generales sobre la forma como se da la relación entre la física y las matemáticas en la enseñanza, el diseño de modelos didácticos adecuados para abordar el problema de la matematización de los fenómenos físicos y las concepciones de los profesores y de los alumnos sobre la matematización.

2. ANÁLISIS DE LOS CAMBIOS DESDE LA PERSPECTIVA DE SISTEMAS Y VARIABLES

2.1 Sistemas

El término *sistema* es usado en múltiples contextos y con diversos significados, muy probablemente debido a la forma no diferenciada en que este término se utiliza en el lenguaje cotidiano. De hecho ya desde 1947 Ludwin Bertalanffy resaltaba su uso generalizado:

«Si alguien se pusiera a analizar las nociones y metáforas de moda hoy por hoy, en la lista aparecería “sistemas” entre los primeros lugares. El concepto ha invadido todos los campos de la ciencia y penetrado en el pensamiento y el habla populares y en los medios de comunicación de masas»¹.

En el contexto de la enseñanza de las ciencias, el significado atribuido a este término hoy día más difundido no dista mucho del significado como se utiliza en el lenguaje cotidiano: se considera que un sistema es un conjunto de partes reunidas para obtener un resultado o conformar un todo; es en este sentido que usualmente se habla de sistema de gobierno, sistema monetario, sistema económico, sistema solar, sistema métrico, sistema operativo, sistema de ecuaciones, sistema de partículas, sistema circulatorio, entre muchos otros.

Esta forma de considerar lo que es un sistema obedece a una forma de pensar y proceder a través de la cual se asume que el examen de una entidad investigada puede abordarse satisfactoriamente a través de la separación de sus partes constitutivas, el estudio de dichas partes independientemente y la posterior reconstitución de la entidad al reunir las partes estudiadas. Este modo de pensar y proceder es conocido como el *método analítico* y se ha

¹ Bertalanffy, Ludwin von.. Teoría general de los sistemas. Fundamentos, desarrollo y aplicaciones. Fondo de cultura económica. México. 1976. p. 1.

constituido a lo largo de la historia como el modo de pensar y proceder característico de la ciencia clásica.

Este método analítico es válido únicamente bajo algunas condiciones, a saber (Bertalanffy, 1976: 17-18):

- Que no existan interacciones entre partes o que sean tan débiles que puedan dejarse a un lado; sólo así es posible separar las partes -real, lógica y matemáticamente- y luego volverlas a juntar.
- Que las relaciones que describen el comportamiento de las partes sean lineales; sólo entonces queda satisfecha la condición de aditividad, es decir, que los procesos parciales puedan ser superpuestos para obtener el proceso total.

Lo cierto es que la gran mayoría, si no todos, los fenómenos y procesos estudiados contemporáneamente tanto en las ciencias sociales como en las ciencias naturales no satisfacen estas condiciones.

En este sentido, a través de esta forma de pensar y proceder se oculta la característica más relevante de la idea de sistema: la interacción entre sus partes. De hecho Bertalanffy considera que:

«Un sistema puede ser definido como un complejo de elementos interactuantes. Interacción significa que elementos p , están en relaciones R , de suerte que el comportamiento de un elemento p en R es diferente de su comportamiento en otra relación R' . Si los comportamientos en R y R' no difieren, no hay interacción, y los elementos se comportan independientemente con respecto a las relaciones R y R' »².

Teniendo en cuenta esto, los sistemas, más que un simple conglomerado de partes, han de ser considerados como entidades cuyo estudio no es posible de ser adelantado a través del mencionado método analítico, pues sus partes no son posibles de ser aisladas del sistema como totalidad: los elementos constitutivos del sistema y sus comportamientos son

identificados y establecidos precisamente en la medida en que se identifican y establecen las posibles relaciones e interacciones entre ellos, vía la identificación de propiedades variables y sus relaciones. En este orden de ideas, identificar un sistema y abordar su estudio es dar cuenta de las diversas relaciones establecidas entre sus elementos constitutivos, es decir, de la fenomenología de los elementos y sus relaciones.

El hecho de centrar la atención en las relaciones y en las estructuras -relaciones de relaciones- hacen posible la identificación de formas de comportamiento similares en elementos de origen muy diverso:

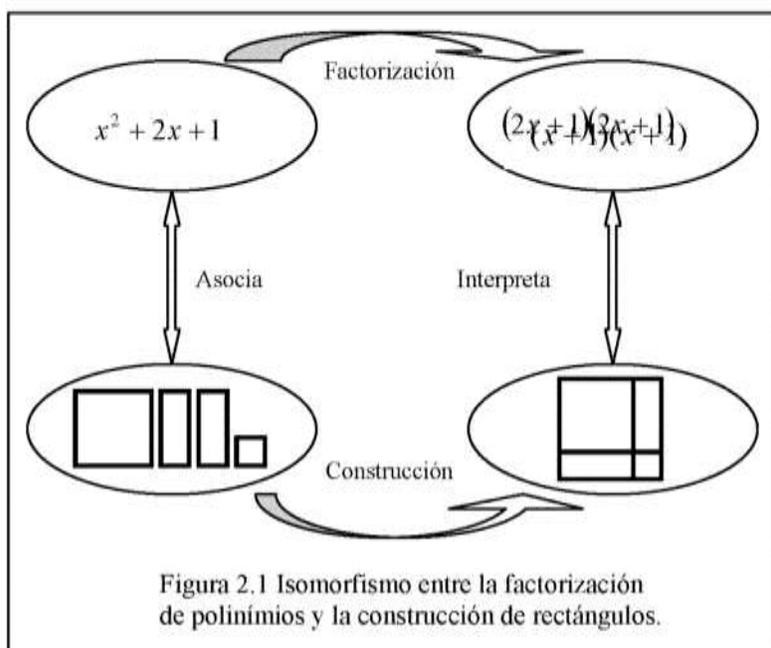
«Se puede aplicar, señala Bertalanffy, una ley exponencial de crecimiento a ciertas células bacterianas, a poblaciones de bacterias, de animales o de humanos, y al progreso de investigación científica medida por el número de publicaciones de genética o de ciencia en general. Las entidades en cuestión, bacterias, animales, gente, libros, etc., son completamente diferentes, y otro tanto ocurre con los mecanismos causales en cuestión. No obstante la ley matemática es la misma»³.

Esta posibilidad de identificación de correspondencias o similitudes se debe precisamente al hecho que las entidades consideradas se asumen como sistemas, es decir, complejos de elementos en interacción, más que como un conglomerado de partes. En este sentido, puede afirmarse que el establecimiento de dichas estructuras análogas, comúnmente denominadas *isomorfismos*, entre clases de fenómenos analizados es, entonces, tanto objetivo como consecuencia del enfoque por sistemas y variables.

Un caso simple del uso de un isomorfismo para establecer relaciones entre dos campos disciplinares diferentes se puede ejemplificar con el procedimiento de factorización de polinomios a partir de una representación geométrica de los términos del polinomio utilizado (Falk de Losada, 1992). Este isomorfismo es esquematizado como se muestra en la figura 2.1, donde se ilustra cómo el concepto de isomorfismo permite comprender conceptos algebraicos por medio de la geometría; en particular se muestra cómo el

² Ibidem p. 56.

³ Ibidem p. 33.



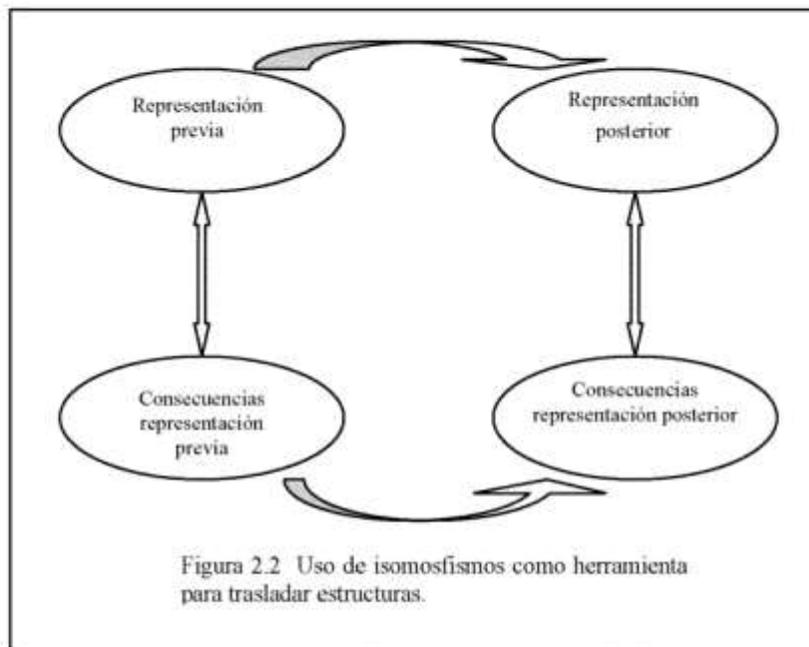
concepto de factorización de polinomios puede entenderse mediante el manejo de áreas: cada término del polinomio $x^2 + 2x + 1$ se representa por un área y el proceso de *factorización* de polinomios se asocia al proceso de *construcción de rectángulos* con las áreas que han

representado cada término del polinomio. Usualmente, encontrar los factores del polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede ser un procedimiento dispendioso que implica el manejo de algoritmos de división de polinomios. Cuando se representa cada término del polinomio por un área, como se muestra en la Figura 2.1, el procedimiento de factorización se hace semejante al proceso de *construcción* de un rectángulo sin que sobre ningún elemento. El área de este rectángulo está dada por $(x+1)(x+1)$ que posteriormente puede ser interpretado en el campo del álgebra como la factorización del polinomio $x^2 + 2x + 1$.

Generalizando el esquema anterior, podríamos tener el esquema para el isomorfismo en la ciencia como se muestra en la figura 2.2.

De esta manera el esquema muestra como el isomorfismo, es un concepto que además de permitir establecer las inter-relaciones entre diferentes campos, fenómenos, conceptos, permite el crecimiento de los confines de la ciencia.

Por otro lado lo más común en la física es pensar que solo hay modelos matemáticos con los cuales se puede entender y aplicar la física, sin embargo la posibilidad de un



isomorfismo entre estas dos ciencias permite también pensar que hay conceptos matemáticos que se pueden entender a partir de modelos físicos. Los desplazamientos en el espacio y los vectores en \mathbb{R}^3 es un ejemplo de ello: se puede mostrar fácilmente que la composición de desplazamientos en el espacio físico tridimensional guarda la misma estructura que la adición de vectores en \mathbb{R}^3 , ambos satisfacen la estructura de grupo abeliano. Es en este sentido que los desplazamientos se pueden definir como vectores y los vectores se pueden visualizar a través de desplazamientos en el espacio.

Teniendo en cuenta que todo conocimiento científico usa modelos y sobre la base de tales modelos es que se construyen los particulares puntos de vista sobre la realidad, el análisis y comprensión de los fenómenos físicos vía el enfoque por sistemas y variables, se convierte en un importante medio para controlar y estimular la construcción de modelos y procesos de modelización, pues favorece la transferencia de relaciones o principios de análoga estructura entre fenómenos de origen diferente, permitiendo el empleo de modelos mejor conocidos para fenómenos menos familiares o más complicados.

2.2 Sistemas y variables como formas de ver

Desde una perspectiva fenomenológica los sistemas y las variables más que ser los elementos constitutivos del mundo físico, son considerados como estrategias cognoscitivas, como formas de mirar, de organizar y de formalizar el mundo particularmente importantes en la física. Se habla, entonces, de un modo de ver por espacios abstractos de sistemas y de un modo de ver por espacios abstractos de variables.

En términos generales, la forma de ver por sistemas es un proceso de discretización, una operación cognoscitiva de separar en elementos particulares (individuales) un continuo o un agregado según unos criterios puestos en juego por el sujeto cognoscente. En este sentido, este proceso de discretización, de individuación, no se refiere únicamente a objetos que pueden ser separados los unos de los otros, sino también a acciones, fenómenos o a procesos que se desenvuelven en el tiempo. A pesar de la diversidad de los criterios usados para realizar tal discretización, puede afirmarse que éstos se relacionan con la necesidad y el interés cognoscitivo de identificar la invariabilidad de relaciones y la estabilidad relativa de dependencias ante la serie de cambios que continuamente se suceden tanto espacial como temporalmente.

Complementariamente, no se puede ver por sistemas sin ver simultáneamente por variables y viceversa. El modo de ver por variables, de forma análoga al modo de ver por sistemas, es un proceso de discretización, de identificación selectiva de determinadas posibilidades de cambio y de diversos modos de variar dentro de todo el conjunto de propiedades que caracterizan un objeto, fenómeno o proceso. En este sentido, los nombres de las variables corresponden a la capacidad que tiene el sujeto de identificar diferencias y cambios: mirar según una variable quiere decir tener la capacidad de hacer confrontaciones entre individuos según un aspecto o propiedad escogida como criterio de comparación.

«Para poder organizar el mundo en sistemas, suprasistemas y subsistemas es necesario aprender a reestructurar continuamente los modos de ver que nos permiten controlar el universo fragmentario de los objetos y de los episodios: desarrollando capacidades de

pensamiento que capten las más abstractas conexiones funcionales entre eventos, que miren las interacciones, las dependencias y los controles recíprocos: que pongan juntos, separen, distinguen, interpretan hechos no inmediatamente conexos: que impongan organización y coherencia al material de la realidad».⁴

Desde esta perspectiva, sistemas y variables son formas de ver y formalizar el mundo complementarias pues la identificación de variables, de relaciones entre variables y de estructuras de relaciones que permanecen en el espacio y/o en el tiempo es lo que posibilita la identificación y constitución de los sistemas.

2.3 Clasificar y ordenar

Es necesario percatarse del hecho que el proceso de identificación de relaciones y de su permanencia característico del modo de ver por sistemas, no es posible de llevarse a cabo sin identificar paralelamente ciertas *características comunes* y cierta *propiedades variables* a través de las cuales se individúa el sistema mismo. La identificación de tales características hacen posible la conformación de grupos o clases definidas, precisamente, a través de las características escogidas como criterio de agrupación; esta identificación, entonces, hace posible la acción de *clasificar*, es decir, de ver un esquema común o una serie de relaciones estables en elementos -objetos, fenómenos, procesos- diversos. Por su parte, la identificación de propiedades variables pone en evidencia eventuales diferencias o cambios al interior de una clase determinada; la identificación de propiedades variables, en este sentido, hace posible la acción de *ordenar*, en virtud a las diferencias percibidas al interior de una clase según los resultados de una comparación respecto a la propiedad elegida.

Como afirma Guidoni, para clasificar se debe poder ver un esquema común en individuos diversos; se reúne así, bajo un mismo nombre común de clase, aquello que se puede -que

⁴ Guidoni, P. & Arcà, M. Guardare per sistemi, guardare per variabili. Emme Edizioni, Torino, 1987, p. 10.

se quiere- considerar esquemáticamente igual desde el punto de vista escogido (Guidoni, 1987: 19).

La clase de las sillas, la clase de las frutas, la clase de los mamíferos, la clase de los movimientos acelerados, la clase de los procesos adiabáticos, la clase de los círculos, la clase de los fenómenos mecánicos, la clase de los fenómenos térmicos entre innumerables más, son construidas por el sujeto precisamente por la identificación y reconocimiento de ciertas características y relaciones comunes en una serie de elementos diversos (objetos, propiedades, procesos) que hacen posible incluso su denotación por el mismo nombre.

Complementariamente, al interior de una clase se pueden diferenciar los elementos según cierta propiedad variable o cierta variación de una relación y ordenarlos según los grados que tome dichas propiedades o relaciones: las sillas se pueden diferenciar según su altura o peso y se pueden, por tanto, ordenar de mayor a menor altura o peso; los movimientos acelerados se pueden diferenciar según rapidez de cambio de velocidad y ordenar de acuerdo a la gradación de esta relación; los círculos se pueden diferenciar según el tamaño de su radio y ordenar de acuerdo a los posibles valores.

Clasificar y ordenar son, entonces, procesos complementarios estrechamente ligados con los modos de ver por espacios abstractos de sistemas y por espacios abstractos de variables.

2.4 Estrategias de análisis de los cambios

Guidoni considera que comprender y dominar cognoscitivamente el cambio es particularmente difícil tanto para el desarrollo del conocimiento común como para el desarrollo del conocimiento especializado.

En un intento por analizar más cuidadosamente este proceso de conocimiento Guidoni resalta la existencia de cuatro estrategias cognoscitivas diferentes pero complementarias y

afirma que sólo reconocidas y usadas en conjunto ellas permiten comprender y representar los procesos de cambio, a la vez que permiten poner en evidencia el vínculo profundo que une las estructuras-base del conocimiento común y aquellas del conocimiento formalizado o científico; éstas son las estrategias de análisis diferenciales e integrales, las estrategias de análisis por estados y transformaciones, las estrategias de análisis de cambio global y cambio variable y las estrategias de análisis de causalidad y relación.

2.4.1 Estrategias de análisis diferenciales e integrales

Este conjunto de estrategias se evidencia en el hecho que es posible analizar los cambios localmente o globalmente, según su modo de suceder en el tiempo.

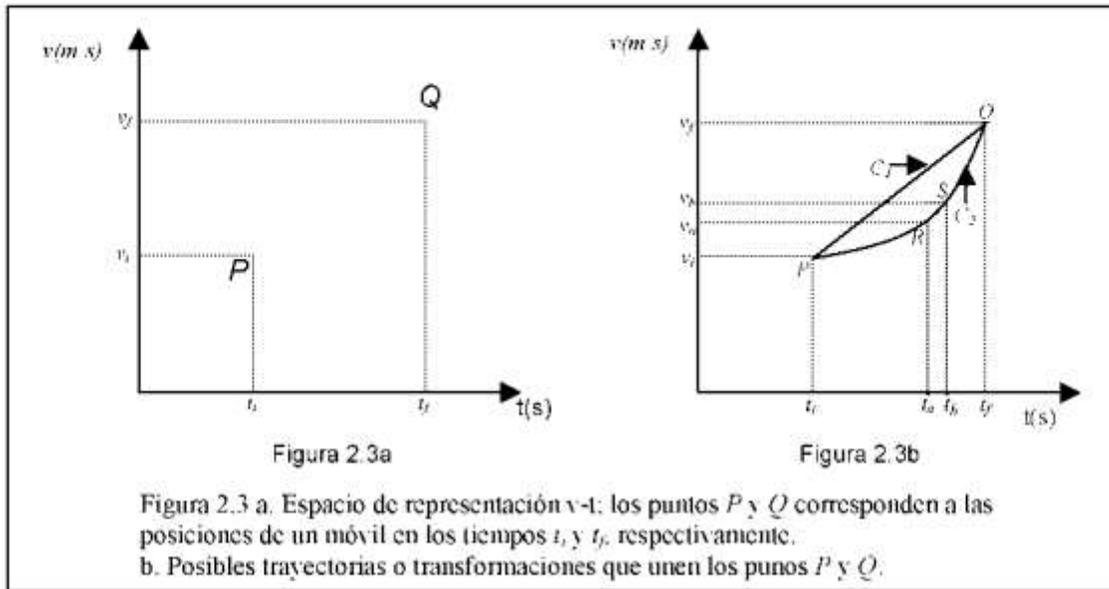
«Podemos ver, afirma Guidoni, controlar, describir las situaciones mientras éstas cambian ante nuestros ojos momento por momento; alternativamente, podemos considerar el cambio total de una situación confrontando un inicio con un fin, referidos a los extremos de un intervalo de tiempo terminado»⁵.

Para hacer posible esta confrontación es necesario identificar una propiedad variable y hacer un seguimiento de su cambio en el tiempo. Estos modos diferenciales e integrales de mirar el cambio ofrecen alternativamente el paso de juicios que captan diferencias momentáneas sobre *cómo están pasando las cosas* (diferencias entre situaciones sincrónicas) a juicios que captan diferencias entre situaciones iniciales y finales, también momentáneas, pero lejanas entre sí en el tiempo y que informan sobre *cómo han andado las cosas* (diferencias entre situaciones diacrónicas).

A continuación se muestra un ejemplo en el cual se evidencian las estrategias de análisis diferenciales e integrales.

Considérese un auto que viaja a lo largo de una carretera de forma tal que para el tiempo t_i el auto tiene un grado de velocidad v_i y para el tiempo t_f un grado de velocidad mayor v_f . Estas variables son denotados por los puntos P y Q en el espacio de las variables $v-t$.

⁵ Ibidem p. 25.



Existen muchas posibles líneas que unirían a los puntos P y Q , pero claramente no todas representarían la transformación real. Mirar de modo integral el proceso de cambio de la velocidad implica centrar la atención exclusivamente en el punto inicial $P(t_i, v_i)$ y el punto final $Q(t_f, v_f)$, como se muestra en la figura 2.3a; desde esta forma de ver el *cambio integral* de la velocidad se representa como $\Delta v / \Delta t$, donde Δv es el cambio de velocidad instantánea en un intervalo total de tiempo Δt , siempre positivo. Esta rapidez de cambio de la velocidad corresponde a la inclinación de la recta C_1 que une los puntos P y Q (Figura 2.3b). Mirar en forma diferencial implica determinar la variación de la velocidad para un intervalo de tiempo Δt mucho más pequeño. Si la trayectoria que une los puntos P y Q es la curva C_2 , es necesario identificar una nueva variable, que de cuenta de la *variación diferencial* de la velocidad respecto al tiempo. Una mirada a la línea C_2 muestra que esta nueva variable aumenta positivamente a medida que avanza el tiempo.

2.4.2 Estrategias de análisis por estados y transformaciones

Este conjunto de estrategias se fundamenta en el hecho de que es posible analizar los hechos y eventos alternativamente según formas de permanencia y según formas de cambio.

«Se pueden, en efecto, captar configuraciones de aspectos y de entrecruces invariables (o casi invariables) en el tiempo y caracterizarlas como *estados*. Por contraste, se pueden captar configuraciones temporales de cambios parciales o totales e identificarlas genéricamente como *transformaciones*»⁶.

Desde esta perspectiva, cada transformación se puede considerar como un trayecto que conecta dos estados (uno inicial y otro final) o como un trayecto que conecta entre sí una secuencia de estados instantáneos; correlativamente, todo estado puede ser visto como un inicio o un fin de una transformación.

En cierto sentido esta esquematización es drástica dado que desde ella el cambio es considerado como una sucesión de permanencias instantáneas. No obstante, es un esquema que está presente ya en la estructura misma del lenguaje y de la experiencia cotidiana: se sabe que un objeto o sistema está en una condición particular en un momento dado (el estado de ánimo de una persona es triste o su estado de salud es bueno, un gas confinado está a una presión y temperatura determinada), se sabe también que un objeto o sistema no puede estar con dos grados diferentes de la propiedad que identifica el estado simultáneamente (una persona no está triste y feliz al mismo tiempo, un gas confinado no está a dos grados de temperatura diferentes simultáneamente); se sabe, además, que los objetos o sistemas cambian de condición, que pasan de una condición a otra.

En el ejemplo anterior, el punto $R(t_a, v_a)$ representa un estado que puede ser visto como inicio o resultado de una transformación, similarmente ocurre con el punto $S(t_b, v_b)$; el trayecto que une a los dos estados R y S representa una transformación, que puede a su vez ser vista como una sucesión de estados. La idea de estado, por lo tanto, implica la idea de *instantaneidad*, mientras que la idea de transformación implica un desarrollo o cambio en el tiempo de la variable de estado.

⁶ Ibidem p. 26.

2.4.3 Estrategias de análisis por cambio global y por cambio variable

Generalmente en los fenómenos y procesos muchas variables cambian simultáneamente; incluso las mismas relaciones entre grupos de variables pueden cambiar en el tiempo. No obstante en un fenómeno o proceso particular no todas las variables o grupos de variables cambian al mismo tiempo o de la misma forma. Esta pareja de estrategias describe la posibilidad de analizar las transformaciones y/o los procesos según el cambio en el tiempo del grupo de variables que los caracterizan y, alternativamente, según el cambio de una sola variable respecto a cualquier otra (el tiempo en este sentido es considerado como una variable más).

«Mientras una torta se cocina completamente, señala Guidoni, muchas propiedades particulares varían en el tiempo, con reglas de cambio diversas: el color primero es claro, luego rápidamente se va volviendo más oscuro: la cantidad de agua disminuye primero lentamente, luego rápidamente y luego de nuevo lentamente... Y mirando solamente el modo con el cual cambian las relaciones que ligan entre sí las diversas variables (que a su vez son variables muy complejas) podemos decir de la torta que mientras más blandita, más buena, que entre más oscura, más seca, que cuando está más clara tiene más sabor de harina»⁷.

Estas estrategias de análisis conllevan a evidenciar que varían en el tiempo no solo las variables individuales sino también sus relaciones, aspecto que es particularmente importante para dinamizar los procesos de formalización por cuanto al mirar las diferencias entre los posibles estados que puede tomar un sistema, es factible establecer relaciones entre las variables que caracterizan tales estados; es decir, a través del uso de esta estrategia se puede aprender a considerar directamente cómo cambia una variable respecto a otra que cambia a su vez, excluyendo del análisis la forma según cada variable, independientemente, varía en el tiempo.

Estas ideas se pueden ejemplificar a través de la siguiente situación. Cuando una cierta cantidad de gas confinada en un recipiente es sometida a un proceso de calentamiento, se

⁷ Ibidem p. 27.

percibe que muchas variables, tales como el volumen, la presión, la temperatura, la densidad, cambian simultáneamente.

Analizar el proceso a través de la estrategia de cambio global implica realizar comparaciones del conjunto de variables en dos estados del proceso diferentes: de hecho si se presta atención a dos momentos durante esta transformación se puede constatar que en un instante inicial t estas variables pueden adquirir valores particulares (V_1, T_1, P_1, D_1) , mientras que en un instante posterior $t + \Delta t$ estas mismas variables adquieren otros valores (V_2, T_2, P_2, D_2) , tales que $V_2 > V_1, T_2 > T_1, P_2 > P_1, D_2 < D_1$.

Complementariamente, analizar el proceso a través de la estrategia de cambio variable implica centrar la atención en dos de estas variables y describir la forma como una de ellas cambia una respecto a la otra, que a su vez puede variar; aquí el tiempo puede adquirir el estatus de variable independiente y, por tanto, se puede describir la forma como cambian cada una de las otras variables respecto al tiempo. La representación cartesiana se convierte en una representación privilegiada para aislar las variables seleccionadas y, por tanto, para dar cuenta de la forma como se correlacionan.

2.4.4 Estrategias de análisis por causalidad y por relación

Este conjunto de estrategias se funda en la posibilidad de considerar como coligadas o dependientes entre si propiedades que cambian juntas en el tiempo, pero unas veces esta dependencia toma la forma de una relación causa-efecto y otras veces toma la forma de una relación funcional.

«A veces, al interior de un entrecruce de variables que cambian conjuntamente, una sola es aislada y considerada causa del cambio de todas las otras. O bien se va a buscar al exterior del entrecruce de variables una posible causa común para los cambios de todas: en este caso a ninguna variable se está asignando un rol específico de causa o de efecto, mientras se pone en evidencia la correlación entre diversas variables y su diverso modo de cambiar»⁸.

⁸ Ibidem p. 27.

Estas estrategias son particularmente importantes por cuanto ponen en evidencia dos formas diferentes de asumir la idea de causalidad, hecho que a su vez implica la diferenciación de dos formas de asumir el significado de conocer y realizar una explicación. Se tiene, por una parte, una perspectiva basada en la relación causa-efecto donde, como consecuencia de privilegiar una clase particular de variables al asumirlas como causas del cambio de las otras variables identificadas, se considera implícitamente que conocer es dar cuenta de las causas de los cambios; las causas, entonces, se ontologizan en el sentido que son consideradas con existencia propia, exteriores a los cambios y a las interacciones mismas.

Alternativamente, se tiene una perspectiva basada en la noción de función, caracterizada por la intención de identificar relaciones entre clases de cambios sucedidos. Desde esta perspectiva no se privilegian variables o cambios particulares sino que se considera que todo cambio de alguna variable que caracteriza un sistema está necesariamente acoplado con al menos un cambio de otra variable. Como consecuencia de esto, se asume que conocer es dar cuenta de la forma como se suceden tales cambios y sus relaciones, es decir, de las fenomenologías de las situaciones donde se suceden los cambios.

Cuando se tiene una cierta cantidad de gas (aire por ejemplo) confinado en un recipiente de paredes rígidas a través de un émbolo, se percibe que si hay cambios de temperatura hay, simultáneamente, cambios de volumen y cambios de presión. No obstante, no se afirma que el cambio de temperatura es la *causa* de los cambios de volumen y presión o viceversa; se dice, en cambio, que los cambios de temperatura, volumen y presión están relacionados de tal manera que para cada estado de este sistema se satisface que

$$PV \propto T.$$

En contraste, se afirma usualmente que el flujo de una cantidad de calor es la causa del cambio de temperatura que experimenta una cierta cantidad de líquido; de igual manera se considera que los cambios de estado de movimiento experimentados por un cuerpo son

ANÁLISIS DE LOS CAMBIOS DESDE LA PERSPECTIVA DE SISTEMAS Y VARIABLES

causados por fuerzas externas que actúan sobre él. No obstante, las cantidades de calor surgen y son posible de ser determinadas precisamente en virtud de los cambios de temperatura; de la misma forma es debido al cambio de los estados de movimiento que experimenta un cuerpo que es posible determinar y cuantificar las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo; en otras palabras, ni las cantidades de calor ni las fuerzas son posible de ser determinadas por fuera de las interacciones térmicas o mecánicas. En estos casos ¿cuál es la causa y cuál el efecto?

En la enseñanza de la física usualmente se privilegia, en el análisis de los cambios, la relación causa-efecto. No obstante, como se ha mostrado, este privilegio no goza de una fundamentación explícita y clara y ha cerrado la posibilidad de ver otros aspectos relacionados con el análisis de los cambios que pueden llegar a ser más eficientes tanto cognoscitiva como disciplinalmente.

3. EL PROBLEMA DE LA MEDICIÓN

3.1 Introducción

Generalmente la física se considera como una ciencia de carácter experimental y, por lo tanto, como una de las disciplinas científicas que más estrecha relación tiene con la medición. No obstante el consenso que hay a este respecto, el carácter experimental atribuido a la física y la naturaleza que adquiere su relación con la medición están determinados por la forma como se asume el experimento y el papel que se le atribuye tanto en la construcción conceptual, como en el análisis y comprensión de los fenómenos físicos mismos.

La medición, en su acepción más fundamental, se identifica con la acción o acciones por medio de las cuales se compara una propiedad de un objeto o sistema con otra de la misma clase asumida como patrón; el resultado de tal comparación es un número. No obstante, los fundamentos que le subyacen y las implicaciones que tiene, pocas veces son abordados en la enseñanza de la física: usualmente el proceso de medición se reduce a la mera aplicación de un instrumento preestablecido al cuerpo o sistema en consideración y a la lectura del valor numérico obtenido en la escala del instrumento; este valor numérico se asume, entonces, como el resultado de la medida y representa el valor que toma tal propiedad¹.

Esta forma de asumir la medición determina una particular manera de concebir el papel que juega el experimento en física: el experimento no sólo es visto como independiente de las organizaciones conceptuales hechas a propósito de una clase particular de fenómenos sino que, vía la medición, es el que decidiría si una organización conceptual es válida o no pues a través de él se sometería a prueba las correspondencias entre tales organizaciones y la evidencia de los hechos naturales.

¹ La proliferación de instrumentos tecnológicos ha acrecentado esta problemática pues, a través de un mismo instrumento se puede obtener valores numéricos de diferentes propiedades físicas.

En este sentido, el experimento conlleva en el ámbito pedagógico graves inconvenientes que impiden una adecuada comprensión del proceso de organización de la experiencia sensible y de la construcción conceptual característicos de la actividad científica. Por una parte, se asume una clara separación entre teoría y experimento al considerar que en la construcción conceptual el aspecto experimental no interviene y que, de igual forma, para la realización de un experimento la perspectiva teórica no influye, pues de lo que se trata es de tomar datos; si existe una relación entre teoría y experiencia ésta se reduce al cotejo de los resultados obtenidos y los esperados vía el análisis estadístico y la teoría de errores. No es de extrañar, entonces, que desde esta perspectiva el complejo problema de la medición se convierta en un asunto de la precisión de los instrumentos y de las técnicas de medida. Por otra parte, el sujeto quien realiza la experimentación es considerado como totalmente externo tanto a la organización teórica y conceptual, como al diseño del experimento mismo: la experimentación como tal sólo parece después de que la teoría está construida.

¿Hasta qué punto los instrumentos de medida son externos e independientes de las mismas organizaciones conceptuales?

Estas consideraciones ponen de manifiesto que realizar una reflexión sobre la medición es de fundamental importancia en la enseñanza de la física. Se pretende propiciar y poner en práctica una visión del experimento en estrecha relación con las construcciones conceptuales; de hecho muchos conceptos físicos han surgido precisamente de una organización de la experiencia sensible y muchos diseños y técnicas experimentales para la cuantificación de magnitudes físicas tienen sentido sólo a la luz de su significación conceptual.

3.2 ¿Qué significa medir una propiedad física?

En las matemáticas como en la física se habla usualmente de *magnitudes* tales como la longitud, el área, el volumen, la masa, el tiempo, la densidad, la temperatura, la velocidad

entre muchas otras. Estas magnitudes se abordan en la enseñanza en estrecha relación con la noción de medición: se trata de aquellas propiedades que son susceptibles de asignárseles valores numéricos -cifras-, identificándose tal asignación con el proceso de medición. La medición, por su parte, como ya se ha mencionado, se entiende como la comparación de una magnitud con otra de la misma clase tomada como patrón, siendo el resultado de esta comparación un número real.

Se afirma usualmente, por ejemplo, que la longitud o el peso son magnitudes por cuanto a un cuerpo con una longitud -alto, largo o ancho- o un peso determinado puede asignársele *unívocamente* una cifra que representa el valor que adquiere tal propiedad, cuando se la compara con un valor establecido como patrón de comparación. No obstante, el proceso de tal asignación, los presupuestos que le subyacen y las implicaciones que tiene pocas veces es analizado en la enseñanza de la física.

Cuando se comparan dos cuerpos A y B respecto a la propiedad peso, por ejemplo, puede asignárseles los valores de 1 y 4 respectivamente. No obstante lo trivial que puede parecer esta asignación, es necesario percatarse que ésto no sólo significa que el segundo tiene mayor peso que el primero sino, además, que respecto a esta propiedad juntando cuatro cuerpos similares al primero se puede obtener el valor del segundo.

Estas consideraciones sugieren que cuando se habla de medición y, por lo tanto, de cuantificación es preciso centrar la atención no en las cifras asignadas sino en las implicaciones que tiene el hecho de asignar valores numéricos a propiedades para representarlas, pues cuando se hace tal asignación no solo se está utilizando símbolos, sino que se está *trasladando* la estructura de los números en consideración a dichas propiedades. Como afirma Campbell,

«Las propiedades medibles de un objeto tienen que parecerse de algún modo a la propiedad de ser número, puesto que pueden representarse adecuadamente por los mismos símbolos [las cifras]»².

Lo anterior permite afirmar que indagar si una propiedad es o no una magnitud implica preguntarse si tal propiedad es susceptible de ser medida; hecho que a su vez implica preguntarse por la estructura que se le está asignando a tal propiedad.

3.3 Clasificación y ordenación como procesos fundamentales de la medición

Como se mencionó en el capítulo anterior, en virtud de la identificación de características comunes o de relaciones estables en objetos, fenómenos o procesos se hace posible la conformación de *clases* definidas a través de las características o relaciones escogidas como criterio de agrupación; la identificación de propiedades variables al interior de una clase determinada, por su parte, hace posible la *ordenación* según los resultados de una comparación respecto a la propiedad elegida.

El concepto de clase es ya un concepto comparativo: los elementos -objetos, fenómenos o procesos- que conforman una cierta clase son semejantes en alguna propiedad, y comparar dos elementos cualesquiera es buscar lo que es igual y diferente en ellos. Tal como lo afirma Wartofsky, al realizar una observación, ya se está realizando una clasificación; lo que se selecciona son rasgos o características que, según las circunstancias o las convenciones, reciben el nombre de *propiedades*, *atributos* o *cualidades* (Wartofsky, 1973: 206). Es precisamente en este sentido que, desde la perspectiva fenomenológica, se afirma que no son los cuerpos -objetos, fenómenos o procesos- los que contienen las propiedades sino, por el contrario, el conjunto de propiedades relativamente estables es lo que nos permite identificar a un cuerpo como tal.

² Campbell, Norman. Medición, 1921. En Newman, J. (Ed). Sigma: El mundo de las matemáticas. Tomo 5. Ediciones Grijalbo S.A., Barcelona, 1994, p. 187.

A través de este proceso de identificar características comunes en una serie de elementos diversos el sujeto -quien realiza la clasificación- le confiere a tales elementos una estructura que se operacionaliza en una serie particular de relaciones: la relaciones de equivalencia.

«Así pues, en general, cualesquiera dos cosas que se comparen, si se consideran como miembros en común de cierta clase, se consideran por tanto como equivalentes en cuanto determinada propiedad, que constituye la condición de pertenecer a esa clase. Dicho de otra manera: de las cosas que comparten cierta propiedad cabe decir que generan la clases correspondiente a dicha propiedad, y por diferentes que puedan ser en otros aspectos, muestran una relación de equivalencia por lo que se refiere a tal propiedad»³.

Esta relación de equivalencia se caracteriza por satisfacer ciertas propiedades formales conocidas con los términos: reflexividad, simetría y transitividad (Wartofsky, 1973: 210).

- Reflexiva: Cualquier miembro x de la clase es equivalente a sí mismo ($x \sim x$)
- Simétrica: Cualesquier par de miembros de la clase son mutuamente equivalentes (si $x \sim y$, entonces $y \sim x$)
- Transitiva: Si dos miembros de la clase son equivalentes a un tercero, son equivalentes entre sí (si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$).

Al comparar de esta forma elementos -objetos, fenómenos o procesos- con respecto a una propiedad, sólo se establece distinción entre elementos a los que se les atribuye dicha propiedad y elementos a los que no se les atribuye. No obstante, al interior de una clase de equivalencia, es decir, entre los elementos que comparten una propiedad, puede percibirse cambios o diferencias específicas que posibilitarían la división de la clase en subclases de equivalencia. Al interior de la clase de los polígonos, por ejemplo, pueden identificarse diferencias según el número de lados que dividirían esta clase en las subclases de los triángulos, los cuadriláteros, los pentágonos, etc.; al interior de la clase de los triángulos, por su parte, pueden identificarse diferencias según la longitud relativa de sus lados que dividirían esta clase en las subclases de los triángulos equiláteros, los triángulos isósceles y

³ Wartofsky, Marx. Introducción a la filosofía de la ciencia. Tomo I. Alianza Editorial, Madrid, 1973, p. 209.

los triángulos escalenos. Pero de acuerdo con esta división no puede afirmarse que un pentágono sea “más polígono” que un triángulo, o que un isósceles sea “menos triángulo” que un equilátero.

Sin embargo, algunos cambios o diferencias percibidas al interior de una clase de equivalencia si posibilitan tal interpretación: Cuando al interior de una clase se identifican propiedades variables es posible realizar, vía la comparación, una ordenación según las relaciones de *mayor que* o *menor que* establecidas entre los grados que adquiere la propiedad elegida. Al interior de la clase de los círculos, por ejemplo, se percibe fácilmente que la longitud del radio es una propiedad variable, al compararse según la mayor o menor longitud de su radio, los elementos de esta clase pueden, entonces, ser ordenados. De igual forma, al interior de la clase de los cuerpos materiales puede identificarse el peso como propiedad variable; un conjunto de cuerpos puede, entonces, ordenarse según el mayor o menor peso que se les pueda atribuir.

En este sentido, a través del proceso de identificación de propiedades variables al interior de una clase de equivalencia dada, el sujeto le confiere a tal clase una estructura que se operacionaliza en una serie particular de relaciones: las relaciones de orden. Estas relaciones se caracterizan por satisfacer ciertas propiedades formales, a saber: irreflexividad, asimetría, transitividad, y conectividad.

- Irreflexividad: Cualquier elemento de la clase no puede ser mayor ni menor a él mismo.
- Asimetría: Para cualquier par de elementos a y b de la clase se tiene que o $a < b$, o $a > b$, o $a = b$.
- Transitividad: Si a , b y c son elementos de una clase, tal que $a < b$ y $b < c$, entonces se cumple que $a < c$.
- Conectividad: Para cualquier dos elementos a y b de una clase tales que $a < b$, siempre existe un elemento c tal que $a < c < b$.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones es necesario percatarse que a la base de todo proceso de medida se encuentran las acciones intelectuales de clasificar y ordenar: no es posible realizar un proceso de medición si al interior de una clase de objetos, fenómenos o procesos -definida a través del reconocimiento de ciertas características comunes o relaciones estables- no se ha identificado previamente unas propiedades variables que posibiliten una ordenación según la comparación entre los grados percibidos en la propiedad elegida.

En este sentido, debe tenerse presente que la posibilidad de realizar dicha ordenación depende del grado de diferenciación de la propiedad en cuestión, pues a todas las propiedades físicas no es posible realizarles esta transferencia de estructura de la lógica de las relaciones de orden. Se ha definido, por ejemplo, la dureza de un cuerpo diciendo que A es más duro que B si lo raya. De acuerdo con esta definición se pueden ordenar cuerpos según su grado de dureza: el diamante raya al vidrio, el vidrio al hierro, el hierro al plomo, el plomo a la cal. Pero para que haya un orden tiene que ocurrir que en *todos* los casos en que A sea más duro que B y B más duro que C , A sea más duro que C . No obstante, se encuentra que esta regla tiene excepciones cuando se intenta incluir en ella todos los cuerpos y no sólo los ejemplos citados. Por lo tanto dicha definición no posibilita asignar un orden a la propiedad de dureza y no permite, por lo tanto, la medición de esta propiedad (Campbell, 1921: 197-198).

No obstante, el proceso de medición de una propiedad física no sólo implica la asignación de una estructura de orden, también implica la asignación de una estructura que posibilite su representación por cifras y su cuantificación. ¿Qué significa cuantificar las magnitudes físicas?

3.4 Magnitudes extensivas y magnitudes intensivas

Campbell se refiere a la medición como la atribución de cifras a propiedades para representarlas y señala, en un primer análisis, que las propiedades que pueden ser representadas por cifras, es decir susceptibles de ser medidas, son aquellas que cambian por la combinación de cuerpos semejantes. Identifica tres reglas para que se dé esta posibilidad (Campbell, 1921: 190):

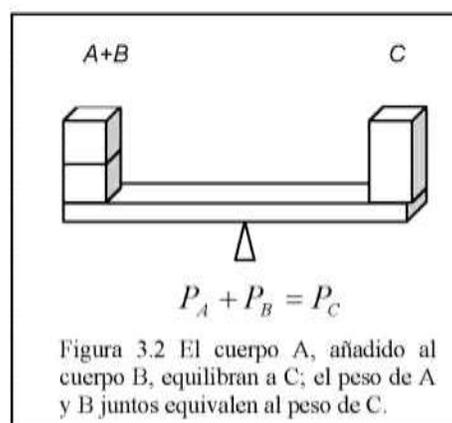
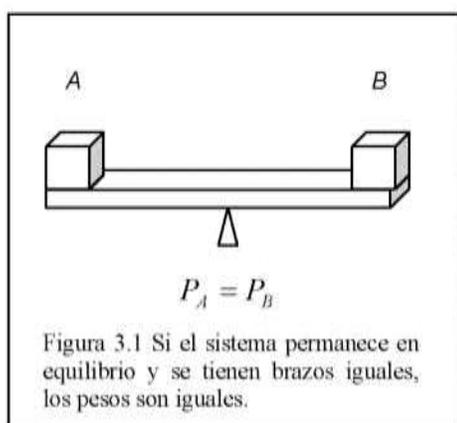
- Dos objetos que respecto de esa propiedad sean lo mismo que un tercer objeto, sean lo mismo el uno que el otro.
- Por la adición sucesiva de objetos podamos construir una serie normal, un miembro de la cual sea lo mismo, respecto de la propiedad, que cualquier otro objeto que deseemos medir.
- Iguales añadidos a iguales produzcan sumas iguales.

Teniendo en cuenta esto, según el autor las propiedades que, inicialmente, son posibles de ser medidas son aquellas que se conocen hoy como propiedades *extensivas*, es decir aquellas que se les puede atribuir una estructura aditiva.

No obstante la generalidad de estas reglas como criterio para determinar si una propiedad extensiva es o no mensurable, Campbell señala que para poder constatar el cumplimiento de estas reglas es necesario decidir cuándo dos valores de una magnitud dada son iguales y cuándo se componen y, dado que estas condiciones dependen de la naturaleza de cada propiedad, la posibilidad de su determinación y cuantificación está condicionada al conocimiento de la fenomenología de la propiedad en cuestión.

Considérese, por ejemplo, el caso de magnitudes como la longitud y el peso. Como se ha comentado anteriormente, previo a la contrastación de las tres reglas establecidas es necesario identificar cuándo se afirma que las magnitudes en cuestión son iguales y cuál es el procedimiento para adicionar tales magnitudes, ambos aspectos directamente

relacionados con la fenomenología de las propiedades en consideración. Por una parte se dice que dos varillas rectas tienen la misma longitud si pueden disponerse de tal forma que los extremos de una queden contiguos con los extremos de la otra, al superponerlas. Se asume además que estas dos varillas están sumadas respecto de la longitud cuando se disponen de tal forma que un extremo de una es contiguo a un extremo de la otra y que las dos juntas formen una sola varilla recta.



Teniendo en cuenta ésto, la propiedad de longitud satisface las tres reglas mencionadas:

- Dos varillas que sean iguales en longitud a una tercera, son iguales entre sí.
- Sumando sucesivamente varillas unas a otras puede obtenerse una varilla que sea igual a cualquier otra varilla propuesta.
- Varillas de igual longitud sumadas a varillas de igual longitud producen varillas iguales en longitud.

Por otra parte, se considera que dos objetos tienen el mismo peso cuando colocados en los extremos de una balanza de brazos iguales, el sistema queda en equilibrio -ninguno de los cuerpos tiende a bajar (figura 3.1). Esos cuerpos se consideran sumados respecto al peso cuando se colocan simultáneamente en el mismo lado de la balanza a la misma distancia del punto de apoyo (figura 3.2).

Una vez identificados estos procedimientos para determinar la igualdad y la suma respecto de esta propiedad, puede verificarse que se satisfacen las tres reglas:

- Si el cuerpo A equilibra al cuerpo B y el cuerpo B equilibra a C , hecho que implica que si el peso de A es igual al peso de B y el peso de B es igual al peso de C , entonces el peso de A es igual al peso de C .
- Añadiendo continuamente cuerpos a un lado de la balanza puede construirse una colección de cuerpos que equilibre cualquier otro cuerpo colocado en el otro lado de la balanza
- Si el cuerpo A equilibra al cuerpo B y el cuerpo C equilibra al cuerpo D , entonces A y C colocados juntos en un mismo lado de la balanza equilibran a B y D colocados simultáneamente en el otro lado -a iguales distancias del punto de apoyo.

En un intento de explicitar las reglas propuestas por Campbell para determinar si una propiedad física es mensurable se pueden discriminar las siguientes condiciones (Wartosky, 1973: 220):

- Para cualesquier grados de magnitud x e y existe un grado de magnitud z , tal que $x \oplus y = z$.
- La suma $(x \oplus y)$ de cualesquier grados de magnitud es mayor que x o y .
- Si se suman cualesquier grados de magnitud x , y en el orden $x \oplus y$, la suma será igual, en grado de magnitud, a la suma de estos mismos grados en el orden $y \oplus x$.
- Dados los grados de magnitud $x = x'$ e $y = y'$, la suma $x \oplus y$ será igual a la suma $x' \oplus y'$.
- Para cualesquier tres grados de magnitud x, y, z , la suma de $x \oplus y$ y z será igual a la suma de x e $y \oplus z$.
- Dado cualquier grado de magnitud x inferior a otro grado y , existe una suma de iguales grados de magnitud $(x \oplus x' \oplus x'' \dots)$ superior a y .

En la teoría de magnitudes expuesta por Rey Pastor en sus Elementos de análisis algebraico se expresa que :

«Magnitudes son entes abstractos entre los que está definida la igualdad y la suma. Cada uno de los estados de la magnitud se llama cantidad de esta magnitud.

La magnitud se llama *escalar*, de *una dimensión* o magnitud *propriadamente dicha*, cuando además de las relaciones de igualdad y de suma existe entre sus cantidades la relación de *ordenación*, es decir, cuando entre cada dos elementos existe una relación que representamos por el signo $<$ y que se lee: *menor que*, la cual cumple las condiciones siguientes:

I. *Ordenación*. Entre dos cantidades distintas cualesquiera existe una, y sólo una, de las relaciones $x < y$ o $y < x$ (que también se escribe: $x > y$). Si es $x < y$, $y < z$, es también $x < z$.

II. *Postulado de Arquímedes*. Dadas dos cantidades cualesquiera, tales que $0 < x < y$, existe un número natural n tal que $nx > y$.

III. *Ley de monotonía*. Si $x < y$ y z es una cantidad cualquiera, se verifica: $x + z < y + z$.

IV. *Divisibilidad*. Dada una cantidad cualquiera x y un número natural n , existe otra cantidad y tal que $ny = x$.

Puesto que de cada magnitud hay cantidades desiguales, vamos a asignar un símbolo [cifra] a cada cantidad de modo que, recíprocamente, cada símbolo corresponde a una sola. Un sistema apto para esta representación o correspondencia biunívoca es el de los números racionales»⁴.

Fernández de Tronconiz en su Análisis algebraico dedica el capítulo V presentar los elementos de la teoría de magnitudes. En este capítulo expone un resumen de los postulados que deben satisfacer los elementos de un conjunto A para constituirse en magnitud⁵:

Conjunto homogéneo	Magnitud	Magnitud escalar	Magnitud racional	Magnitud real
Igualdad	Igualdad Suma	Igualdad Suma Ordenación	Igualdad Suma Ordenación Divisibilidad P. Arquímedes	Igualdad Suma Ordenación Divisibilidad P. Arquímedes Continuidad

⁴ Rey Pastor, J. Elementos de análisis algebraico. Citado por De la Torre, A. *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Editorial Universidad de Antioquia. 1997. pp. 78-79.

⁵ Fernández de Tronconiz, A. Análisis algebraico. Talleres Gráficos Ordorica, Bilbao, España. p. 146.

Teniendo en cuenta esto, puede afirmarse que si se tiene la clase que define la magnitud, las cantidades de dicha magnitud dotadas de la relación de igualdad y una ley de composición interna de adición, constituyen un semigrupo conmutativo. Si la magnitud es unidimensional, el semigrupo es ordenado por la relación $<$, donde se satisfacen las leyes de tricotomía, transitividad y monotonía, junto con los postulados de divisibilidad y propiedad arquimediana.

La propiedad arquimediana reviste una especial importancia para los procesos de medición pues a través de ella se materializan los aspectos relacionados con la adecuación de la elección de una unidad de medida para cuantificar un grado particular de la magnitud en consideración, aspecto a su vez relacionado con el problema de la precisión en la medida. Para explicitar estas relaciones, la propiedad arquimediana puede rephrasearse en los siguientes términos (Chamorro, 1994: 63):

Sean a y b dos elementos de la clase que define una magnitud A , siendo b distinto del elemento neutro, se puede afirmar que existe un número natural n que cumple:

$$nb \leq a < (n+1)b$$

Elegir una unidad supone una adecuación entre el valor de la magnitud que se desea medir y la unidad elegida. Si, continuando con el ejemplo del peso, se quiere obtener el peso de un objeto se puede tratar de equilibrarlo en una balanza de brazos iguales colocando en el otro extremo granos de arroz, es decir, utilizando el grano de arroz como unidad. Si a través de este procedimiento no se logra equilibrar al objeto con un número entero de granos de arroz, se obtendrá una relación de la forma:

$$na \leq p < (n+1)a$$

donde p representa el peso del objeto, a el peso de un grano de arroz y n y $n-1$ el número de granos usados. En este caso si la diferencia entre el peso de n y $n-1$ granos es inapreciable en comparación con el peso del objeto, la aproximación con la que se ha medido es excelente. No obstante, ¿quién cuenta los granos utilizados?

Es evidente que es más cómodo utilizar como unidad cuerpos de un material mas denso que el arroz, como el plomo, por ejemplo. Si se utilizan cubos de plomo como unidad habrá que colocar menos de estos cuerpos en la balanza para equilibrar el peso del objeto y, por lo tanto, resultará más fácil contarlos. Si la medida no es entera, se volverá a encontrar una relación de la forma:

$$hc \leq p < (h+1)c$$

donde c es el peso de un cubo. Ahora se puede decir que el peso del objeto está entre h cubos y $h+1$ cubos de plomo. Obviamente es más fácil contar ahora los cubos, pero la aproximación obtenida deja mucho que desear.

Existen, sin embargo, muchas propiedades físicamente importantes, consideradas mensurables, que no satisfacen todas las reglas propuestas por Campbell por medio de las cuales se determina si una propiedad extensiva es o no medible. Ejemplo de tales magnitudes son la densidad, la velocidad, la temperatura, la presión, el potencial eléctrico, entre muchas otras. Cuando se dice, por ejemplo, que la densidad de un cuerpo es de 7 unidades -como es el caso del hierro- no significa que este valor se pueda obtener por la reunión de siete cuerpos de densidad 1 unidad -como es el caso del agua-; o cuando se afirma que un cuerpo se mueve con una velocidad de 60 unidades no significa que esta velocidad se pueda reproducir juntando tres cuerpos de velocidad 20 unidades. Estas consideraciones están estrechamente ligadas al hecho que la densidad o la velocidad de un cuerpo en su conjunto es igual a la densidad o la velocidad de cualquiera de sus partes; es decir, que éstas son magnitudes que no varían cuando cambia la extensión del cuerpo. Se dice, entonces, que son magnitudes *intensivas*.

Pero, si el hecho de ser magnitud está estrechamente relacionado con la estructura de los números que sirven para representarla -sintetizada en las reglas mencionadas-, y si para las magnitudes intensivas no es posible la atribución de estas reglas, ¿a través de qué procedimiento es posible su medición y cuantificación? Para establecer dichos procedimientos es necesario analizar previamente las características particulares de esta clase de magnitudes que no hacen posible su cuantificación a través de las reglas enunciadas.

En primera instancia es necesario percatarse que a las magnitudes intensivas no se les puede atribuir una estructura aditiva. No obstante, sí es posible atribuirseles una *lógica de las relaciones de orden*, hecha operativa a través de comparaciones entre situaciones físicas donde tales magnitudes se hacen relevantes; naturalmente las comparaciones entre grados de una clase de magnitud implican situaciones y problemas totalmente distintos de los implicados en la comparación entre grados de otra clase de magnitud.

Para el caso de la densidad, por ejemplo, puede decirse hoy que desde muy tempranas edades todo el mundo tiene una idea intuitiva de lo que significa la densidad. Se sabe, que los cuerpos están constituidos de diferentes clases de materiales y que, por esta misma razón, no todos se comportan igual bajo las mismas circunstancias: Se sabe que la madera flota en el agua y que el hierro se hunde en ella; se sabe también, que los cuerpos de vidrio se hunden en el agua, pero caen en ella más lentamente que lo que lo hace el hierro. A partir de estas experiencias y conocimientos es posible establecer que el hierro es más denso que el vidrio, que a su vez es más denso que el agua, que a su vez es más densa que la madera. Se puede, entonces, asignar a la densidad relaciones de orden y hablar de cuerpos “más densos que” y “menos densos que” otros; en particular, se puede definir que el cuerpo A es más denso que el cuerpo B , y B menos denso que A , si puede hallarse una sustancia en la que flote B y no flote A .

Con esa definición se puede colocar a un conjunto de cuerpos en un orden determinado, de tal modo que cada miembro de la serie sea más denso que el anterior y menos denso que el

siguiente. Claramente esta organización presupone un cierto grado de diferenciación de la densidad como variable y su relación con situaciones experienciales, como es el caso de la flotación de los cuerpos.

Esta lógica de las relaciones de orden, como se mencionó en un apartado anterior, está fundamentada en las propiedades de irreflexividad, asimetría, transitividad, y conectividad.

Una vez establecida dicha ordenación, el paso a seguir es la cuantificación. En este sentido es posible atribuir valores numéricos para representar un orden establecido: si A, B, C, D, E son cuerpos que han sido ordenados según su grado de densidad creciente por medio de la definición antes mencionada, es posible representar tal ordenación a través de la serie $5, 10, 15, 20, 25, \dots$ pues el orden de las cifras se corresponde con el orden del grado de la propiedad en cuestión. No obstante, en el procedimiento hay un cierto grado de arbitrariedad: Si bien es cierto que cualquier serie no representa adecuadamente la ordenación, existe un infinito número de posibilidades distintas que lo hace. Se puede atribuir, como antes 5 a A , 10 a B , 15 a C , 20 a D , 25 a E ; pero también 2 a A , 5 a B , 6 a C , 10 a D , 17 a E , entre muchas otras posibilidades. Esta amplitud de posibilidades no se da en el procedimiento mencionado para las magnitudes extensivas pues una vez fijada en dicha ordenación la cifra que habría que atribuir a un grado de una propiedad dada, no hay elección respecto a las cifras que pueden atribuirse a los demás grados, todas quedan fijadas.

¿Es posible, para el caso de las propiedades intensivas, eliminar dicha arbitrariedad en la asignación de cifras para representar una ordenación dada y hallar un medio para determinar sin ambigüedad la cifra que hay que atribuir a cada grado de dicha propiedad?

Según Campbell, si es posible hacerlo en algunos casos y el procedimiento consiste en encontrar una relación entre los valores numéricos que representan otras magnitudes extensivas para encontrar, por medio de tales relaciones, otros valores que concuerden con el orden de los grados de la propiedad intensiva que se desea medir (Campbell, 1921: 198).

En el caso de la densidad mencionada arriba, se encuentra que si se mide para cada clase de material el peso y el volumen -ambos medibles a través de las reglas enunciadas pues son magnitudes extensivas- y se divide el valor del peso por el valor del volumen, las cifras obtenidas para las diferentes cuerpos se encuentran en el mismo orden de sus densidades, tal como se definió anteriormente. Ahora bien, como el orden de los cocientes representa adecuadamente el orden de las densidades, se puede tomar el cociente entre el peso y el volumen como la medida de la densidad de una sustancia.

«Se ha llegado a un método de medición, afirma Campbell, que está fijado de un modo tan definido como el proceso fundamental [sintetizado en las reglas enunciadas], pero que, además, transmite adecuadamente los hechos de importancia física relativos al orden»⁶.

Teniendo en cuenta estas consideraciones es importante percatarse de que la medida de variables intensivas pone en evidencia dos problemas importantes: uno ligado a las escalas usadas y otro relacionado con la adecuación entre nuestros modos de pensar y la fenomenología de los procesos naturales (Guidoni, 1987: 46).

El primero se hace evidente cuando se utilizan diferentes unidades o escalas de medida para la misma variable intensiva. Se puede decidir, por ejemplo, asignar a la temperatura del hielo que se derrite y a la del agua en ebullición los valores de 0 y 100 como en la escala Celsius, o 32 y 212 como en la escala Fahrenheit; o se podría asignar 0 a la temperatura del hombre sano y 1 la temperatura del pájaro que empolla, como lo propone Newton⁷. Es relevante tomar conciencia aquí del nivel de convencionalidad que puede llegar a tener una elección particular.

El segundo, por su parte, se manifiesta en el mismo proceso de medida, es decir, en la asignación de valores numéricos a una variable intensiva. El problema no es tan fácil de abordar pues es ante todo un problema de *principio*: ninguna variable intensiva puede ser

⁶ Campbell, N. Medición. Op cit. p. 199.

⁷ Newton, Isaac. Una escala de grados de calor. Tomado de Maggic, W. F. (Ed). A Source Book in Physics. Harvard University Press, Cambridge, 1969.

EL PROBLEMA DE LA MEDICIÓN

medida sino es a través de transferencias de estructura de los conjuntos numéricos utilizados para representarla. Es importante concientizarse de que este no es un problema puramente lógico o matemático, relacionado con los modos de razonar; tampoco es un problema puramente empírico, relacionado con dificultades experimentales que en algunos casos es posible superar. Se trata, ante todo, de un problema de adecuación coherente entre las formas de razonamiento -como son el pensamiento numérico o el geométrico- y las fenomenologías identificadas o establecidas (Guidoni, 1987: 47).

4. LA MEDICION DE LA TEMPERATURA

4.1 Introducción

En el contexto de la enseñanza se afirma usualmente que la temperatura es una magnitud física por cuanto puede asignársele valores numéricos a través del proceso de medición. Dicho proceso de medición, por su parte, se identifica con la utilización de un instrumento preestablecido precisamente para este fin: el termómetro. En este sentido, medir la temperatura es aplicar un termómetro al cuerpo o sistema en consideración y leer el valor numérico obtenido en la escala de este instrumento.

No obstante, el proceso de asignación de valores numéricos a la temperatura y los presupuestos que le subyacen pocas veces es abordado y analizado en la enseñanza de la física. En particular, ¿cuál es el proceso que posibilita construir una escala de temperaturas? Si medir en su acepción más fundamental se identifica con la acción por medio de la cual se compara una propiedad de un objeto o sistema con otra de la misma clase asumida como patrón, ¿qué sentido tiene medir temperaturas a través de una escala de longitudes, como de hecho se hace cuando se utilizan termómetros de dilatación? ¿Cuál es el procedimiento fenomenológico para establecer y reproducir valores determinados de temperatura que sean posibles de ser considerados como unidades?

Teniendo en cuenta que matematizar un concepto o propiedad física implica construir la posibilidad de matematizarlo, de cuantificarlo, se propone a continuación un enfoque que favorece la construcción del concepto de temperatura en estrecha relación con la posibilidad de su cuantificación.

4.2 Fenomenología de lo térmico

Desde el conocimiento común, incluso a muy tempranas edades, ya se tiene una organización de la experiencia sensible relacionada con los aspectos térmicos. En esta organización el sentido del tacto ofrece la forma más sencilla de diferenciar entre cuerpos calientes y fríos: a partir del tacto es posible ordenar los cuerpos decidiendo que un cuerpo A está más caliente que otro cuerpo B , y que B está más caliente que C , etc; también se sabe que al poner dos cuerpos de la misma sustancia en contacto, uno de los cuáles está más caliente que el otro, se tiene, después de un tiempo suficientemente largo, que al tocarlos no es posible diferenciarlos térmicamente y que no se observan variaciones posteriores en las sensaciones al interactuar con ellos.

De hecho, como lo señala Arons¹, es posible conducir a los estudiantes a la descripción de ciertas situaciones de su experiencia cotidiana, pero que rara vez hacen explícita: cuando un recipiente con agua caliente, o fría, es colocado en el interior de una habitación, la lectura del termómetro en el recipiente, correspondientemente, siempre decrece o se incrementa, aproximándose a la lectura del termómetro en la pared de la habitación; cuando dos objetos a diferentes temperaturas son puestos en contacto uno con otro, la temperatura del más caliente siempre decrece mientras que la del más frío se incrementa hasta que las dos temperaturas se hacen iguales (Arons, 1997: 139). Este estado final caracterizado porque no ocurren cambios, y que racionalmente se espera se alcance al cabo de un cierto tiempo, independientemente de la clase de sustancias puestas en contacto, usualmente se denomina estado de *equilibrio térmico*.

Este tipo de conocimientos, que manifiesta una primera organización de las sensaciones de calor y frío, es el que nos permite realizar una construcción del fenómeno térmico; más aún, es la única forma que disponemos para poder empezar a construir el concepto de temperatura, o para que el concepto de interacción térmica entre cuerpos comience a ser objeto de estudio.

«El concepto de temperatura, como el de fuerza, tiene su origen en las percepciones sensoriales del hombre. Del mismo modo que una fuerza a menudo podemos relacionarla con un esfuerzo muscular y describirla como tirando o empujando algo, también la temperatura puede vincularse con la sensación relativa de calor o de frío»².

Es claro que desde este punto de vista no es posible, al menos en un comienzo, asumir que las sensaciones no son un buen mecanismo para abordar el estudio de los fenómenos térmicos; es necesario, antes de descalificarlas de erróneas y engañosas como lo hacen algunos textos introductorios de física (Serway & Beichhner, 2002: 581; Resnick et al, 1995: 549), analizar qué es lo que ellas nos informan sobre los fenómenos térmicos. Por lo tanto, profundizar y analizar este tipo de conocimientos y experiencias sobre las sensaciones de calor y frío permitirá empezar a teorizar sobre los fenómenos térmicos.

4.3 La medición de la temperatura en la perspectiva usual

Es bien sabido que muchas propiedades físicas medibles tales como la longitud, el volumen, la presión, la resistencia eléctrica, entre otras, cambian al variar la temperatura. A partir de este hecho usualmente se acostumbra seleccionar algunas de estas propiedades para construir un termómetro y establecer una cierta escala de temperatura. El procedimiento en general es el siguiente: se escoge una sustancia y alguna propiedad de ésta que varíe con la temperatura; se eligen, luego, situaciones que se suponen ocurren a una temperatura determinada (puntos fijos tales como la ebullición del agua y la fusión del hielo) y se observa la propiedad escogida en esos puntos; posteriormente, cuando la propiedad termométrica escogida es la longitud de una columna de mercurio por ejemplo, se divide la diferencia entre las alturas obtenidas en los puntos fijos en partes iguales, suponiendo que el paso de una marcación a la siguiente corresponde a un aumento o disminución de la temperatura en una unidad, es decir, que cada división es un grado y que

¹ Arons, Arnold B. Teaching Introductory Physics. Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1997. p. 139.

² Sears, Francis W. & Salinger, Gerhard L. Termodinámica. teoría cinética y termodinámica estadística. Editorial Reverté, Barcelona, 1978. Pp. 5-6.

todos los grados son iguales; esta graduación se puede extender por fuera del espacio definido por las dos marcaciones de referencia (Serway & Beichhner, 2002: 582; Sears et al, 1998: 462; Resnick et al, 1995: 550).

A esta forma de proceder se le pueden hacer algunas objeciones como son:

1. Se asume que la propiedad termométrica varía proporcionalmente con la temperatura, lo cual no deja de ser un *supuesto* teórico que no puede ser verificado experimentalmente, ya que la única forma de hacerlo sería conociendo de antemano una escala de temperatura "más segura", es decir, que sea independiente del fenómeno planteado, o sabiendo cómo varía la propiedad en consideración con la temperatura; sin embargo, esto no es posible pues aún no se tienen valores numéricos para esta propiedad.
2. Siempre que se escojan propiedades diferentes, o sistemas diferentes respecto a la misma propiedad, se obtendrán escalas diferentes cuyas mediciones no necesariamente tienen que coincidir. Por ejemplo, un termómetro de mercurio y uno de tolueno, graduados de la forma planteada anteriormente, difieren aproximadamente en tres unidades uno del otro cuando uno de ellos se aproxima a los 50 grados.
3. Esta forma de medir la temperatura no coincide con la forma usual en que se entiende el proceso de medir, ya que no se tiene una unidad de temperatura que permita establecer cuándo un valor determinado es el doble, el triple, etc. de otro (4° no son el doble de temperatura que 2°). Tampoco se tiene una función de diferentes variables T' $T'(x,y,z...)$, que permita al medirlas obtener la temperatura.

Sears, F. & Salinger, G. en su texto Termodinámica, teoría cinética y termodinámica estadística (Sears, F. & Salinger, G., 1978: 11-12) presentan un interesante análisis que reitera la primera y segunda objeción enumerada:

«Llamemos x al valor de cualquier propiedad termométrica [...] La relación entre dos temperaturas empíricas θ_2 y θ_1 , determinadas por un termómetro particular, se define igualándola con la relación correspondiente de los valores de x :

$$\theta_2/\theta_1 = x_2/x_1$$

[...] Asignando un valor arbitrario θ_3 a la temperatura del punto triple, si x_3 es el valor correspondiente de la propiedad termométrica de un termómetro, la temperatura empírica θ correspondiente al valor de la propiedad x , es:

$$\theta/\theta_3 = x/x_3 \text{ } ^3.$$

Presentan, luego, valores de las propiedades termométricas de cuatro termómetros distintos para un cierto número de temperaturas. Los termómetros son: un par de cobre-constantán, uno de resistencia de platino, uno de hidrógeno a volumen constante que se ha llenado a una presión de $6,8 \text{ atm}$ en el punto triple y, finalmente, otro de hidrógeno volumen constante pero que se ha llenado a una presión de 1 atm en el punto triple. Los valores de las propiedades termométricas se dan para el punto de ebullición normal (PEN) del nitrógeno, punto de ebullición normal del oxígeno, punto de sublimación normal (PSN) del dióxido de carbono, punto triple (PT) del agua, punto de ebullición normal del agua y punto de ebullición normal del estaño. Se transcribe a continuación los valores presentados:

<i>Sistema</i>	<i>(Cu-Constantán) E (mV)</i>	<i>(Pt) R (ohms)</i>	<i>(H₂, V. Cte) P (Atm)</i>	<i>(H₂, V. Cte) P (Atm)</i>
N ₂ (PEN)	0,73	1,96	1,82	0,29
O ₂ (PEN)	0,95	2,50	2,13	0,33
CO ₂ (PSN)	3,52	6,65	4,80	0,72
H ₂ O (PT)	6,26	9,83	6,80	1,00
H ₂ O (PEN)	10,05	13,65	9,30	1,37
Sn (PEN)	17,50	18,56	12,70	1,85

«Como vemos, señalan los autores, surge una complicación. La relación entre las propiedades termométricas a cada temperatura es distinta para los cuatro termómetros, de modo que para un valor determinado de θ_3 , la temperatura empírica θ es distinta en todos ellos. Sin embargo, el acuerdo es más íntimo para los dos termómetros de hidrógeno y experimentalmente se comprueba que los termómetros de gas a volumen

³ Ibidem pp. 11-12.

constante que emplean distintos gases concuerdan mejor cuando más baja es la presión P_3 en el punto triple»⁴.

Se presenta a continuación un análisis conceptual que pretende tanto enfrentar satisfactoriamente estas objeciones como dar significado y hacer explícitos aspectos relacionados al hecho de asumir a la temperatura como una magnitud intensiva susceptible de ser cuantificada.

4.4 Hacia una conceptualización de la temperatura y su cuantificación

Como se mencionó anteriormente, es una observación común que cuerpos con grados de calor diferentes puestos en contacto, interactúan variando sus grados de calor hasta que llega un momento en que no hay más variación; se dice, entonces, que se equilibran térmicamente. Como el equilibrio implica igualdad, es decir indiferenciación térmica, la igualdad de la temperatura es la condición para que se dé tal equilibrio. De hecho este enunciado se asemeja a la forma usual como se define la temperatura (Resnick et al, 1995: 549), pero es necesario resaltar que es empleado aquí con una diferencia sutil: la idea de equilibrio térmico no es la que define la igualdad de temperaturas; la igualdad de temperaturas es la condición para que se dé el equilibrio térmico.

Ahora, dado que el equilibrio tiene un carácter estrictamente relacional, la temperatura no puede ser pensada como ligada directamente a un cuerpo, sino como referida más bien a la relación de un cuerpo con otros; en otras palabras, la única forma de dar cuenta del estado térmico de un cuerpo es en su relación con el estado térmico de otro. En este sentido se puede decir que los estados térmicos de dos sistemas diferentes son iguales si al colocarlos en contacto no hay indicación de cambió térmico alguno en ellos; mientras que serán diferentes si es posible evidenciar tales cambios.

⁴ *Ibidem*, pp. 12-13.

En este orden de ideas, la temperatura, vía la noción de grado de calor, es una idea que permite caracterizar la condición o estado térmico de sistema. Ahora bien, en la experiencia es posible establecer un orden en los grados de calor percibidos; el problema que se plantea a continuación es poder establecer un procedimiento a través del cual se asegure determinar cuánto mayor es un grado de calor con respecto a otro.

Usualmente este problema es abordado haciendo uso de un instrumento preestablecido: el termómetro. El procedimiento seguido, como se ha comentado en el capítulo anterior, se reduce a la mera aplicación del termómetro al sistema en consideración y a la lectura del valor numérico obtenido en la escala. El valor numérico se asume como el resultado de la medida y representa el valor que toma tal propiedad: si los valores obtenidos en la escala del termómetro cuando se aplica a un sistema en dos estados térmicos diferentes son 50° y 25° (o cualesquier otro par de valores que guarden la relación 2 a 1), por ejemplo, se considera que el primer estado térmico es el doble que el segundo.

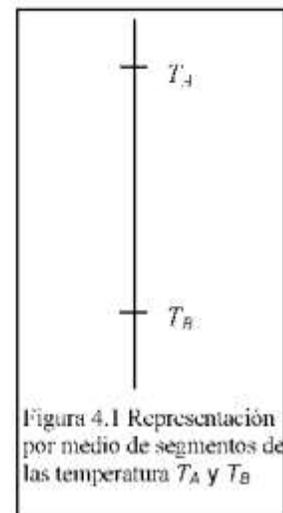
A pesar de lo obvio que pueda parecer este supuesto, no deja de ser problemático y contradictorio pues se está tratando de establecer una correspondencia -uno a uno- entre una magnitud extensiva, como lo es la longitud en el caso de termómetros de dilatación, con una magnitud intensiva, como lo es la temperatura. Ya en la experiencia y conocimiento cotidiano se percata del hecho de que la temperatura es una propiedad intensiva: cuando se afirma que un sistema está a una temperatura de 60 grados no significa que este estado térmico se pueda reproducir juntando tres sistemas cada uno estando a una temperatura de 20 grados; de igual forma, cuando se ponen en contacto dos sistemas a la misma temperatura no se obtiene un sistema al doble de dicha temperatura.

A continuación se presenta un análisis teórico a través del cual se intenta abordar satisfactoriamente la problemática enunciada, en el sentido de establecer un procedimiento que permita obtener estados térmicos predeterminados y cuantificar sus cambios.

Considérese dos sistemas -cuerpos o sustancias- A y B , en estados térmicos -temperaturas- diferentes T_A y T_B , respectivamente. Los sistemas se ponen en contacto -o se mezclan- para asegurar que interactúen térmicamente). Como los sistemas en consideración tienen estados térmicos diferentes ($T_A \neq T_B$), al entrar en contacto sus estados térmicos cambian: si $T_B < T_A$, el sistema A disminuye su temperatura y el sistema B la aumenta. No obstante, esta variación no ocurre indefinidamente sino que cesa en un momento determinado: en ese instante las temperaturas de los sistemas deben ser iguales, hecho por el cual se considera que la interacción térmica termina.

¿Cuál es, entonces, la temperatura T_E que adquiere el sistema en conjunto cuando termina la interacción comparado con la temperatura que tenía el sistema B antes de la interacción?

Para analizar esta situación es posible hacer uso de una representación gráfica de los estados térmicos de los sistemas antes de la interacción a través de una línea vertical (figura 4.1). Las temperaturas T_B y T_A son representados por segmentos sobre esta línea ($T_B < T_A$); como no se tiene conocimiento de los grados de temperatura particulares de las sustancias sino sólo del hecho que son diferentes, lo relevante en la representación es la diferencia de estos segmentos y no la longitud de los mismos.

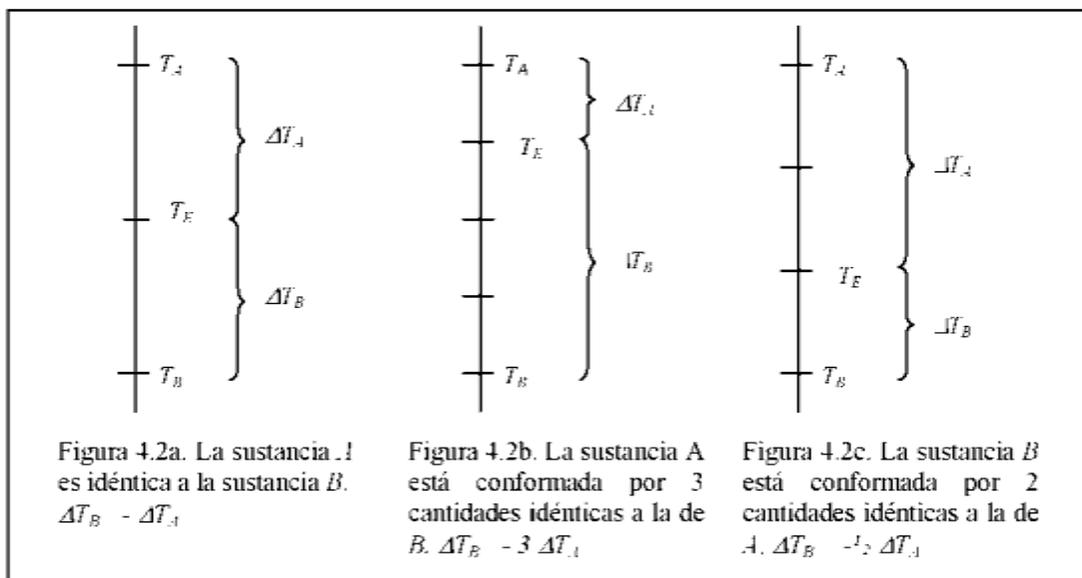


¿En dónde se debe ubicar el estado de equilibrio, identificado por T_E , respecto a los estados iniciales?

Para dar respuesta a esta pregunta se puede adelantar un análisis de relaciones de orden basado en la experiencia que se tiene de esta clase de situaciones: Se sabe que cuando se mezclan dos cantidades de sustancias el valor de la temperatura final de equilibrio no puede ser menor que la menor temperatura de los cuerpos que se mezclan, ni mayor que la mayor de estas temperaturas; ésto significa que para la situación propuesta la temperatura de equilibrio T_E del sistema después de la interacción necesariamente estará entre los

valores de T_B y T_A : $T_B < T_E < T_A$. Aunque esta relación es aparentemente obvia es necesario hacerla explícita pues a la base de ella está la idea que ningún cambio sucede de la nada, idea que a su vez implica los fundamentos de los principios de conservación.

No obstante se ha avanzado en el análisis de la situación, los posibles valores de T_E que satisfacen esta relación son infinitos. Para continuar con el proceso de cuantificación es necesario, entonces, hacer uso de otros criterios que permitan tener certeza de en qué parte del segmento en consideración se ha de ubicar el punto que representaría la temperatura final de equilibrio del sistema.



Para este fin, considérese inicialmente que la sustancia A es idéntica a la sustancia B (idéntica tanto en clase de sustancia como en cantidad). Si consideramos que el comportamiento térmico de la sustancia es independiente de su estado térmico como tal, por argumentos de tipo puramente lógicos que tienen que ver con la simetría de la situación, se puede afirmar que el estado final de equilibrio se puede representar como en el punto medio entre los estados iniciales: no hay ninguna razón para que el estado de equilibrio esté más cerca o más lejos de uno de los iniciales. Al estar identificados éstos estados por las temperaturas T_A y T_B es de esperar, entonces, que las diferencias que éstas tengan con la temperatura de equilibrio T_E , sean iguales:

$$\Delta T_A = -\Delta T_B$$

por lo tanto, el estado térmico final T_E está igualmente separado de los estados térmicos iniciales de A y B (figura 4.2a), entonces,

$$T_E = \frac{1}{2}(T_A + T_B).$$

Considérese ahora que la sustancia A es de la misma clase que la sustancia B pero tal que A está conformada por 3 cantidades idénticas a la de B (figura 4.2b). En este caso, y de nuevo basados en la organización de la experiencia construida ya en el conocimiento común, es posible afirmar que la temperatura final de equilibrio del sistema ha de estar más cerca de la temperatura inicial de la sustancia A que de la temperatura inicial de la sustancia B , es decir $\frac{1}{2}(T_A + T_B) < T_E < T_A$. A partir de la organización de la experiencia para estas situaciones se espera que para producir el mismo cambio de temperatura en dos cuerpos de la misma clase de sustancia se requiere una acción mayor -mayor cantidad de calor- para un cuerpo de mayor cantidad de sustancia que para uno de menor cantidad y como en esta situación la acción que A ejerce sobre B es igual -y opuesta- a la ejercida sobre A por B (dado que el sistema de cuerpos A y B no interactúa con otro sistema), la acción que surge en la interacción tendrá mayor efecto sobre el cuerpo B que sobre el cuerpo A .

¿Qué tan cerca estará la temperatura de equilibrio del sistema de la temperatura inicial de A comparado con la separación respecto a la temperatura inicial del cuerpo B ? Como el cuerpo A está conformado por tres cuerpos idénticos al cuerpo B es lógico pensar, por las consideraciones anteriores, que por cada grado que el cuerpo A reduzca su temperatura, el cuerpo B la aumentará en tres grados, es decir que: $\Delta T_B, \Delta T_A = -3$. Esta expresión implica, a su vez, que: $T_E = (3T_A + T_B) / 4$.

Por un razonamiento similar se concluye que para el caso en el que el cuerpo B está conformado por dos cantidades de sustancia idénticas a la de la sustancia A (Figura 2c). La temperatura final de equilibrio del sistema debe ser tal que: $T_B < T_E < \frac{1}{2}(T_A + T_B)$.

Mas detalladamente

$$\Delta T_B = -\frac{1}{2} \Delta T_A,$$

hecho que implica que

$$T_K = (T_A - 2T_B) / 3.$$

Estos análisis adelantados permiten establecer que los cambios de temperatura que experimentan los cuerpos durante una interacción térmica de mezclas entre sustancias de diferente temperatura, están en proporción inversa a la proporción en la que están las masas de los cuerpos:

$$\Delta T_A / \Delta T_B = -m_B / m_A.$$

En síntesis, a través de este procedimiento es posible establecer cuándo el grado de temperatura de un cuerpo es mayor, menor o igual que el grado de temperatura de otro, a la vez que permite establecer que entre los estados térmicos iniciales de un par de sistemas hay una serie de estados térmicos igualmente separados, cuya separación es tan pequeña como se quiera, de tal manera que las diferencias de temperatura correspondientes son iguales. Esto conduce a afirmar que, tomando las mezclas entre sustancias como fenómeno prototipo, es factible la construcción teórica de una escala de estados térmicos que permite tanto la comparación y ordenamiento de grados de temperatura como la cuantificación de sus cambios, aspectos indispensables en la constitución de la temperatura como una magnitud, es decir, como propiedad física que da cuenta del estado térmico de un sistema, susceptible de ser medida.

Ahora bien, si se utilizara un instrumento o aparato para medir temperatura se podría pensar que es un buen aparato o instrumento si se comporta de la misma forma en que se ha considerado se ordenan los estados de equilibrio; es decir, si las variaciones de longitud de la columna, en el caso termómetros de dilatación, guardan la misma correspondencia (son isomorfas) a las variaciones del grado de temperatura tal y como se han analizado para casos particulares.

De esta manera se ha establecido un criterio para construir y calibrar un buen termómetro y estudiar el comportamiento de una propiedad termométrica de una sustancia dada con la temperatura. Por lo tanto, a través de la ruta propuesta se ha mostrado cómo la elaboración de cualquier escala fiable de temperatura y la construcción de un instrumento para medirla requiere partir de una comprensión del fenómeno térmico.

4.5 Hacia la construcción del concepto de calor

Como se ha mencionado anteriormente, asumir los modos de ver por sistemas y por variables para el caso de los fenómenos térmicos implica considerar que los cambios de estado térmico de un cuerpo o sistema ocurren exclusivamente en virtud de interacciones. Estas consideraciones son claras en el caso particular de la mezcla de sustancias de temperaturas diferentes mostrado en el apartado anterior: allí el cambio de temperatura de la sustancia A es debido exclusivamente al cambio de la sustancia B y viceversa; cualquier cambio de estado térmico que experimente un sistema es debido a su interacción con otro.

La última relación obtenida en el párrafo anterior puede escribirse de la siguiente manera: $m_A \Delta T_A = -m_B \Delta T_B$.

La relación así escrita permite empezar a asociar una cantidad extensiva ($m\Delta T$) a los procesos de cambio de estado térmico de sistemas particulares; es decir, posibilita identificar una cantidad asociada a los procesos de interacción térmica, que posteriormente conducirá a configurar el concepto de calor. Tal como señala Arons:

«Cada lado de esta relación parece describir algo que “ocurre” a cada cuerpo involucrado en la interacción. Invita, por tanto, a pensar el número $m\Delta T$ del lado izquierdo como representando la cantidad de calor ganado (ya que el número es positivo debido al signo de ΔT) por el cuerpo de menor temperatura y el número $m\Delta T$ del lado derecho como representando la cantidad de calor perdido (ya que el número es negativo debido al signo de ΔT) [...] y la igualdad de las magnitudes del calor ganado y del calor perdido (en ausencia de interacción térmica con otros sistemas)

sugiere que podemos estar tratando con una cantidad que se conserva para la cual hemos dividido ahora un método de medida»⁵.

Complementariamente, este análisis permite avanzar en la organización y formalización de los fenómenos térmicos en el sentido que posibilita establecer una clasificación de los cuerpos según el efecto que puede producir sobre otro debido a su interacción: Si un cuerpo C , al ponerse en contacto -o mezclarse- con otro B , produce el mismo cambio de temperatura en B que aquel que produciría otro cuerpo A al ponerse en contacto con B en idénticas condiciones⁶, se puede asegurar que los cuerpos C y A son completamente *equivalentes* desde el punto de vista térmico. Las clases de equivalencia así constituidas se pueden diferenciar por medio de una nueva magnitud: aquellos cuerpos que pertenecen a la misma clase, tales como C y A de la situación considerada, tendrán la misma *capacidad calorífica*. De esta manera, la comprensión lograda hasta el momento permitirá proseguir en la indagación y organización de los fenómenos térmicos; en particular, analizar las condiciones de equilibrio para sustancias de diferente clase, abrirá una vía para la constitución del concepto de calor y para su cuantificación.

4.6 El fenómeno térmico desde la perspectiva de sistemas y variables

Los fenómenos térmicos pueden pensarse y analizarse desde un modo de ver por sistemas y un modo de ver por variables. Como se ha mencionado en un apartado anterior, estas formas de ver conducen a que paralelamente a la identificación del sistema en consideración, sea necesario identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de las diferentes condiciones térmicas en las que puede estar dicho sistema. Esta posibilidad ya está presente en el lenguaje y en la forma como lo usamos: cuando nos referimos a la condición térmica de un cuerpo hablamos de qué tan *caliente* o *frío* está dicho cuerpo; percibimos que un mismo cuerpo en algunos momentos puede estar más

⁵ Arons. Arnold B. Teaching Introductory Physics. Part III. Op cit. p. 71.

caliente (o frío) que en otros y que un cuerpo puede cambiar su condición térmica cuando se calienta o enfría. Estas situaciones ponen en evidencia que para referirnos a los fenómenos térmicos identificamos una cierta cualidad susceptible de tener grados, a través de la cual se hace posible comparar las diversas condiciones o estados térmicos por los que puede pasar un sistema: se trata de los *grados de calor o temperatura*, como se denomina usualmente.

Desde esta perspectiva, entonces, la temperatura no es una propiedad que se le atribuye a un cuerpo sino un modo de *estar* (un estado) de un sistema constituido por -al menos- dos cuerpos. De hecho la estructura del lenguaje usado para referirnos al grado de calor nos percata de esta posibilidad: cuando percibimos que no es adecuado decir «el cuerpo tiene calor» sino «el cuerpo está caliente», estamos considerando que la temperatura no es algo que *pertenece* al cuerpo sino que es un modo de *estar* de él, en comparación con otro. Complementariamente, cuando hablamos de «calor» y «transferencia de calor», no se hace referencia a una variable de estado como la temperatura y, por tanto, no debería hablarse de calor de un sistema. El término «calor» y «transferencia de calor» se refieren a un *proceso* de interacción entre dos sistemas y no al estado de uno u otro, de forma que para determinar la cantidad de calor transferido, se debe conocer la *trayectoria* o secuencia por la cual el estado térmico de un sistema dado cambia (Arons, 1997: 80)

Esta forma de considerar el concepto de temperatura le hace adquirir toda la generalidad que subyace a las estrategias de análisis de los procesos de cambio por estados y transformaciones:

- Se busca definir si un sistema permanece o no en su estado térmico, si lo cambia y la forma en que lo hace. La permanencia en el mismo estado térmico significa no cambiar la temperatura -grado de calor; su disminución o aumento son interpretadas como transformaciones experimentadas por el sistema.

⁶ Con la expresión "idénticas condiciones" se quiere dar a entender que las parejas de cuerpos que interactúan térmicamente lo hacen, respectivamente, con los mismos valores iniciales de temperatura, es decir, los

- Ningún sistema cambia su estado térmico por sí sólo, todo cambio de estado térmico que experimente un cuerpo implica necesariamente que es debido a interacciones con otro sistema (interacciones de tipo térmico).
- Dos sistemas pueden interactuar “térmicamente” sólo cuando sus estados térmicos son diferentes; es decir, para que un cuerpo A pueda modificar el estado térmico de otro B y viceversa, sus temperaturas deben ser diferentes. Si los cuerpos tienen misma temperatura no es posible que interactúen térmicamente.
- Cuando dos cuerpos con estados térmicos diferentes se les permite interactuar los dos cambian sus estados térmicos mientras la interacción dure.

cuerpos se encuentran respectivamente en los mismos estados térmicos iniciales.

5. LA CUANTIFICACIÓN DE LA VELOCIDAD

5.1 Introducción

La velocidad instantánea es uno de los conceptos centrales en la descripción y análisis del movimiento de los cuerpos y sistemas. En el contexto de la enseñanza este concepto se aborda usualmente desde una perspectiva espacio-temporal, en el sentido que para su definición y significación se toman como referentes los conceptos de posición y desplazamiento, asumidos como funciones del tiempo [$r = r(t)$]. Es así como la velocidad instantánea v de una partícula en el momento t se define como el límite de su velocidad media durante un intervalo de tiempo que incluya a t , cuando el tamaño del intervalo tiende a cero (la velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define, a su vez, como el cociente entre el cambio de posición de la partícula Δr y el intervalo de tiempo Δt):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A pesar de la importancia que este concepto tiene en el estudio de la cinemática, en la mayoría de los textos y cursos introductorios de física no se dedica el tiempo suficiente para garantizar su comprensión por parte de los estudiantes ni se diseñan y ponen en práctica las estrategias adecuadas para tal fin. Muchas investigaciones manifiestan el sin número de dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los conceptos básicos de la cinemática (incapacidad para interpretar de gráficas de movimiento, ...); lo cierto es que la alta frecuencia con la que este concepto es abordado en los cursos introductorios de física, haciendo uso de la perspectiva espacio-temporal, contrasta con el bajo entendimiento que los estudiantes logran de él.

En la mayoría de los textos estas dificultades tratan de superarse haciendo una presentación más formal y rigurosa de dicho concepto (citar textos). No obstante, como lo menciona A. Arons, las presentaciones pueden ser refinadas y mejoradas en algún grado, y esto siempre vale la pena hacerse, pero es ilusorio esperar que la animación (recursividad) y la lucidez de la exposición sean suficientes en si mismas. Para ayudar al aprendiz a asimilar conceptos abstractos es necesario ocupar la mente del estudiante en el uso activo de los conceptos en situaciones concretas; los conceptos deben ser explícitamente conectados con experiencias inmediatas, visibles o kinestésicas (ARONS, p. 45).

En las últimas dos décadas se han adelantado investigaciones que no sólo señalan las dificultades que en el campo de la cinemática tienen los estudiantes, sino que proponen formas alternativas de abordar los conceptos básicos de la cinemática, resaltando el papel que juega la experiencia en su comprensión. Los enfoques y resultados de algunas de estas investigaciones son presentados en los artículos titulados *Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension*¹ de D. E. Trowbridge y L. C. McDermott y *A conceptual approach to teaching kinematics*² de M. L. Rosenquist y L. C. McDermott.

El primer artículo describe una investigación que centra su análisis en la habilidad que tienen los estudiantes para aplicar el concepto de velocidad al interpretar movimientos observados en el laboratorio o en la vida diaria, realizada por el Physics Education Group de la Universidad de Washington. Esta investigación se inscribe en un programa de investigación, coordinado por dicho Grupo, sobre las formas de pensamiento de los estudiantes de cursos introductorios de física a cerca del movimiento.

Esta investigación ilustra la gran brecha que existe entre los conceptos intuitivos -llamados por los autores *protoconceptos*- con los que la mayoría de estudiantes llegan al estudio

¹ Trowbridge, D.E. & McDermott, L.C. *Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension*. Am. J. Phys., Vol. 48, No. 12, Dec. 1980, pp. 1020-1028.

² Rosenquist, M.L. & McDermott, L.C. *A conceptual approach to teaching kinematics*. Am. J. Phys., Vol. 55, No. 5, May 1987, pp. 407-415.

formal del movimiento y su comprensión de los constructos físicos presentados en los textos y cursos introductorios de física. Para los autores, estos protoconceptos generalmente carecen de definiciones operacionales precisas que permita distinguirlos uno de otro sin ambigüedad y asignarles valores numéricos definidos.

En este sentido, se resalta el hecho que a pesar que los profesores usualmente asumen tácitamente que un buen desempeño en las pruebas y exámenes de los cursos indica que se ha alcanzado un entendimiento conceptual, la experiencia muestra que muchos estudiantes que presentan buen desempeño en tales pruebas no pueden aplicar correctamente los conceptos físicos a situaciones reales. Por ello los autores consideran que un indicador adecuado del nivel de entendimiento de un concepto cinemático es la forma como un individuo aplica fructíferamente dicho concepto en el análisis e interpretación de movimientos simples de objetos reales, aplicación asociada a la forma de definir operacionalmente el concepto y de distinguirlo de conceptos relacionados pero diferentes.

Para llevar a cabo la exploración los autores replicaron y extendieron algunas pruebas sobre el movimiento desarrolladas por Piaget, luego desarrollaron nuevas pruebas que aplicaron durante “entrevistas demostrativas individuales” y, finalmente, la información así recopilada fue complementada con la obtenida por medio del análisis de cuestiones escritas. Las pruebas mencionadas involucran: *i)* comparación de velocidades para dos movimientos uniformes que cubren distancias diferentes en tiempos iguales; *ii)* comparación de velocidades para dos movimientos uniformes no simultáneos que cubren distancias diferentes en tiempos diferentes; *iii)* el encontrar las distancias recorridas por objetos que se mueven a velocidad uniforme, durante tiempos específicos y *iv)* predicciones cualitativas de las relaciones entre distancia recorrida e intervalo de tiempo gastado para una esfera que se desliza bajo un plano inclinado.

Para ilustrar la clase de actividades presentadas en su versión modificada, se describen dos de ellas a continuación:

La primera se trata de una prueba de comparación de velocidades: La esfera *A* viaja con movimiento uniforme de izquierda a derecha mientras que la esfera *B* viaja en la misma dirección, comenzando con una velocidad inicial mayor que la velocidad de la esfera *A* (figura 5.1).

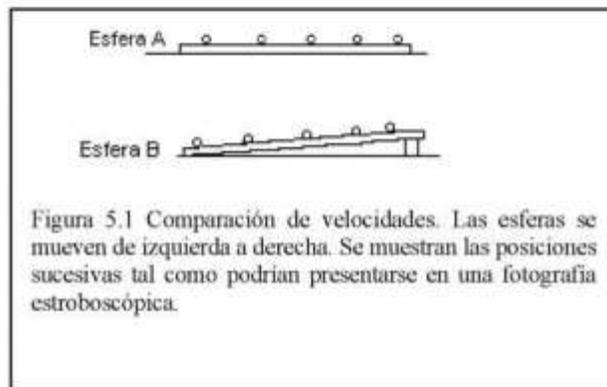


Figura 5.1 Comparación de velocidades. Las esferas se mueven de izquierda a derecha. Se muestran las posiciones sucesivas tal como podrían presentarse en una fotografía estroboscópica.

Como la esfera *B* asciende por una inclinación suave, se va haciendo más lenta y eventualmente llega al reposo. La esfera *B* pasa primero a la *A*, pero luego la esfera *A* para a la esfera *B*. Los estudiantes, quienes observan varias veces los movimientos separadamente y luego a la vez, son cuestionados con la pregunta

¿Estas dos esferas tienen alguna vez la misma velocidad?

Del análisis de los resultados se encuentra que un número importante de estudiantes responde a esta cuestión identificando el instante en que un cuerpo sobrepasa al otro, afirmando que cuando dos objetos alcanzan la misma posición deben tener la misma velocidad. Es decir, se encuentra que los estudiantes carecen de procedimientos adecuados para decidir cuándo dos objetos tiene la misma velocidad instantánea; ellos en cambio centran la atención en la situación perceptualmente obvia de “sobrepasado” para hacer la comparación requerida. Los autores denominan esta situación la *confusión posición-velocidad*³.

«Una comparación fructífera, afirman los autores, usualmente requiere que un individuo centre la atención sobre la separación entre las esferas e identifique un instante cuando esta separación ni se incrementa ni decrezca»⁴.

³ “Position-speed confusion”, p. 1027.

⁴ *Ibidem* p. 1023.

La segunda se refiere a una cuestión escrita: Diga si el siguiente enunciado es SIEMPRE verdadero. Si el enunciado no es siempre verdadero, de un ejemplo en el cual sea falso. En cualquier caso, explique su respuesta.

1. Sobre un camino libre, si dos carros alcanzan la misma velocidad, entonces ellos DEBEN estar uno al lado de otro.
2. Si dos objetos alcanzan la misma posición al mismo tiempo, entonces ellos deben tener la misma velocidad en ese instante.

Los análisis de las respuestas a estas preguntas ilustran, una vez más, la dificultad que algunos estudiantes tienen de separar los conceptos de velocidad y posición en un instante particular.

«Esta dificultad está relacionada, afirman los autores, al problema que tiene los estudiantes de extender el concepto de velocidad sobre un intervalo finito de tiempo al caso de un intervalo de tiempo infinitesimal. La interpretación de la velocidad instantánea como un número referido a un instante particular es un obstáculo conceptual real de mucho estudiantes»⁵.

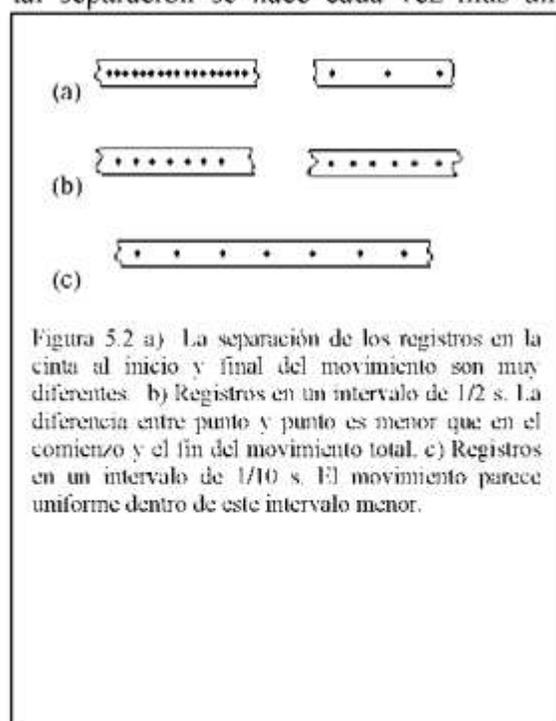
La segunda investigación, por su parte, resalta que una enseñanza basada en la observación y análisis de movimientos mediante experiencias de laboratorio es necesaria para proveer las bases para desarrollar un entendimiento cualitativo de los conceptos de cinemática. En esta investigación los autores empiezan por reconocer que la definición cuantitativa de velocidad instantánea, como el límite del cociente entre el cambio de posición de la partícula Δr y el intervalo de tiempo Δt cuando dicho intervalo de tiempo tiende a cero, no es obvia y está bastante lejos de ser sustraída de la observación directa o de la experiencia. Por ello, proponen introducir el concepto de velocidad instantánea de una manera concreta y fácilmente visualizable haciendo uso del entendimiento de los estudiantes del movimiento uniforme; la estrategia consiste en dos partes: inquirir, primero, a los estudiantes para describir movimientos uniformes y dibujar e interpretar gráficas de posición vs. tiempo

⁵ Ibidem p. 1024.

para estos movimientos, para luego presentarles situaciones en las cuales hay una velocidad cambiante; a través del proceso por el cual los estudiantes tratan de describir y analizar el movimiento no-uniforme, llegan a reconocer la necesidad de un nuevo concepto, la velocidad en un instante.

Dos situaciones que ilustran este enfoque se describen a continuación:

Con ayuda de un registrador de tiempo (tikcómetro) se registra sobre una cinta de papel de $1m$ de longitud unida a un carrito acelerado un punto cada $1/60$ de segundo; el carrito tiene una relativamente baja aceleración para que el registro muestre un incremento gradual en la separación entre los puntos⁶. Tanto observando el movimiento como examinando los extremos de la cinta, se concluye que el objeto se mueve más rápido al final del movimiento que lo que lo hace al comienzo. Al pedir a los estudiantes que examinen la separación entre los puntos para intervalos cada vez más cortos, ellos pueden percibir que tal separación se hace cada vez más uniforme. Esta impresión visual es reforzada por



medidas de la separación de los puntos al comienzo y al final del registro para intervalos de tiempo de duración variable. La figura 5.2 muestra las diferencias de la separación espacial para intervalos de tiempo cada vez más cortos: en (a), cuando la longitud total es examinada (intervalo de tiempo de 2 s), la discrepancia es sustancial; en (b), para un intervalo de $1/2$ s, la diferencia de la separación espacial de los puntos no es tan pronunciada; finalmente, en (c) cuando se centra la atención en un intervalo de $1/10$ s, los puntos aparecen uniformemente espaciados.

Los autores afirman que aunque en esta situación no se introduce el término “límite”, en la práctica el límite ha sido alcanzado cuando el movimiento parece uniforme durante el intervalo de tiempo. De hecho, se termina definiendo operacionalmente la velocidad instantánea de la siguiente forma:

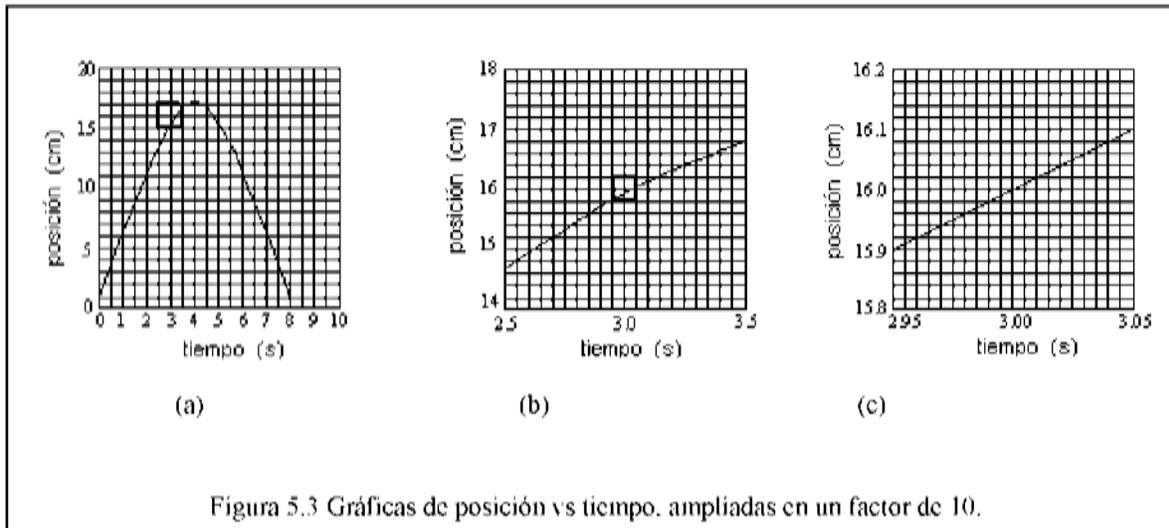
«Para encontrar la velocidad instantánea de un objeto en un instante particular, se examinan intervalos cada vez más pequeños centrados alrededor de tal instante. Cuando el intervalo es lo bastante pequeño para que la separación espacial entre los puntos sea perceptualmente uniforme, se divide el desplazamiento entre el intervalo de tiempo para tal desplazamiento. El resultado es la velocidad instantánea en el instante elegido»⁷.

Los autores señalan como ventajas de este enfoque: *i)* el paso al límite es hecho de una forma más concreta al usar un criterio perceptual para determinar cuándo el límite ha sido alcanzado y *ii)* el límite no involucra la consideración de una secuencia de razones, proceso que separa el movimiento real de su descripción última por series de cálculos. No obstante, identifican también una desventaja: este procedimiento de paso al límite no puede efectuarse para una velocidad que pasa a través de cero, caso en el cual los puntos no aparecen igualmente espaciados sin importar que tan breve sea el intervalo.

La segunda situación examina una interpretación gráfica de la velocidad instantánea a través del análisis de una gráfica de posición-tiempo para un movimiento no-uniforme. Como en el caso del experimento con el registrador de tiempo, la atención de los estudiantes es centrada en el movimiento durante intervalos de tiempo sucesivamente más cortos (figura 5.3).

Se pide a los estudiantes hacer inicialmente una descripción de la gráfica en un intervalo grande (a); luego, trazan un segmento de la gráfica con la escala del tiempo y de distancia ampliada en un factor de 10 (b); finalmente, un pequeño segmento de esta última gráfica es de nuevo amplificado en un factor de 10 en ambos ejes (c), en este caso los estudiantes obtienen una gráfica de posición-tiempo que es perceptualmente una recta.

⁷ La aceleración es cerca de $g/10$ de modo que el movimiento total dura 2 s. aproximadamente.
Ibidem Pág. 408.



El segmento aproximadamente recto que se obtiene de la curva si se considera un intervalo de tiempo bastante pequeño, es identificado a través de este proceso con la tangente a la curva en el punto medio del intervalo. Al calcular $\Delta x / \Delta t$ para este intervalo, el valor obtenido es identificado con la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo.

En síntesis, a través de las dos situaciones se resalta el uso de un criterio perceptual para presentar el proceso del paso al límite. Desde este enfoque para hacer plausible la idea de velocidad en un instante, se trata de mostrar que un movimiento no-uniforme puede considerarse *incrementadamente uniforme* a medida que el intervalo de tiempo llega a ser sucesivamente mas corto; es decir, se intenta dar una base perceptual para la definición operatoria de límite al considerar un movimiento no-uniforme como una sucesión de movimientos uniformes ocurridos en intervalos de tiempo cortos.

Esta formalización del concepto de velocidad está fundamenta en la consideración del movimiento como cambio de lugar (cambio de posición): un cuerpo se encuentra en movimiento si cambia de lugar en un cierto tiempo. Desde esta perspectiva, el cambio de

lugar y el correspondiente gasto de tiempo se convierten en los únicos referentes para evidenciar y, consecuentemente, analizar el movimiento de los cuerpos.

A esta forma de significar el movimiento y de definir el concepto de velocidad instantánea se le pueden realizar algunas objeciones.

- Si bien las funciones $r = r(t)$ y $v = v(t)$ se utilizan formalmente para describir y analizar satisfactoriamente el movimiento de los cuerpos, la situación cambia radicalmente si se desea describir y analizar movimientos para los cuales no se conocen *a priori* estas funciones.
- La definición operatoria de velocidad instantánea como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se hace indefinidamente pequeño, trae consigo dificultades de adecuación entre la noción de continuidad temporal, asociada a la idea de instantaneidad, y el significado de velocidad que subyace a dicha definición. Cuando se hace referencia al movimiento de un cuerpo se considera intuitivamente que en cada momento del transcurso del movimiento el cuerpo tiene un valor de velocidad determinado, es en este sentido que se habla de la velocidad en cada instante del movimiento; no obstante, el uso lapsos de tiempo finitos (aunque pequeños) presentes en el paso al límite de la definición no se corresponden con esta noción instantaneidad dado que lo que se tiene son lapsos de tiempo -duraciones-, no instantes.
- Esta definición operatoria de velocidad instantánea sugiere que para cuantificar la velocidad instantánea basta con cuantificar los cambios de posición y los correspondientes lapsos de tiempo y aplicar la relación propuesta; no obstante, este procedimiento no permite resolver satisfactoriamente las dificultades que se presentan cuando se desea medir o cuantificar la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento para un instante determinado, dado que sólo es posible dar cuenta de la velocidad media en un lapso de tiempo. Más aún, la forma de medir la velocidad que está implícita a esta definición no se corresponde con la forma usual en que se entiende el proceso de medir: no se dispone una unidad de velocidad que permita la construcción

de una escala para asegurar cuándo un valor determinado de velocidad es la mitad, el doble, el triple, etc. de otro.

5.2 Análisis del movimiento desde una perspectiva fenomenológica

El movimiento puede pensarse y analizarse desde un modo de ver por sistemas y un modo de ver por variables. Como se ha mencionado anteriormente, asociados a estos modos de ver se pueden diferenciar cuatro pares de estrategias para analizar los procesos de cambios: las estrategia de análisis diferenciales e integrales, las estrategias de análisis por estados y transformaciones, las estrategias de análisis de cambio global y cambio variable y las estrategias de análisis de causalidad y relación. Los análisis adelantados arriba resaltan que usualmente en la enseñanza de la física el estudio y análisis del movimiento se ha limitado al primer par de estas estrategias, a través de esta investigación y como resultado de ella se desea poner de manifiesto la importancia que tienen las otras tres estrategias.

Desde esta perspectiva el movimiento no es una propiedad que se le atribuye a un cuerpo sino un modo de *estar* (un estado) de un sistema constituido por -al menos- dos cuerpos. De hecho la estructura del lenguaje usado para referirnos al movimiento nos percata de esta posibilidad: Cuando percibimos que no es adecuado decir «el cuerpo tiene movimiento» sino «el cuerpo está en movimiento», estamos considerando que el movimiento no es algo que *pertenece* al cuerpo sino que es un modo de *ser* o *estar* de los cuerpos; en este sentido el movimiento no se le asigna al cuerpo sino, por el contrario, la identificación y diferenciación de un objeto está precedida por el reconocimiento de su movilidad.

Considerar el movimiento como un *estado* de un sistema de cuerpos implica que, paralelamente a la identificación del sistema en consideración, es necesario identificar una propiedad variable a través de la cual se dé cuenta de los diferentes estados de movimiento que puede llegar a tener un cuerpo. Esta posibilidad ya está presente en el lenguaje a muy tempranas edades: cuando nos referimos al movimiento de un cuerpo hablamos de qué tan

rápido o lento se mueve dicho cuerpo; cuando percibimos que un mismo cuerpo en algunos momentos puede ser más rápido (o lento) que en otros, por ejemplo cuando un auto frena disminuye su rapidez hasta detenerse, decimos «el auto es rápido al comienzo y es lento al final». Estas situaciones ponen en evidencia que para referirnos al movimiento identificamos una cierta cualidad susceptible de tener grados, aspecto que posibilita pensar en la diversidad de estados de movimiento por los que puede pasar un sistema de cuerpos.

Las diferentes situaciones relativas al movimiento pueden ser interpretadas desde esta perspectiva: la caída de los cuerpos en las vecindades de la superficie terrestre, por ejemplo, puede ser descrita como el cambio continuo del estado de movimiento de un cuerpo, de manera que experimenta cambios de estado de movimiento iguales en tiempos iguales; el choque de los cuerpos, por su parte, será posible sólo si al entrar en contacto dos cuerpos éstos tienen estados de movimiento diferentes (velocidades diferentes ya sea en magnitud, dirección o sentido), de lo contrario el choque no se efectuará; el caso del movimiento rectilíneo uniforme puede interpretarse como la permanencia en el tiempo del mismo estado de movimiento; el caso del movimiento acelerado, es la variación continua en el tiempo del estado de movimiento. Podría afirmarse, incluso, que la ley de la inercia se reduce a enunciar que un cuerpo por sí mismo no puede cambiar su estado de movimiento.

Para avanzar con el estudio del movimiento desde el modo de ver por sistemas y el modo de ver por variables es necesario configurar situaciones experienciales donde se posibilite la identificación del estado de movimiento como variable y el establecimiento de relaciones con otras variables que permitan su cuantificación. Para este fin se considera relevante realizar un análisis del fenómeno de la caída de los cuerpos, según la perspectiva galileana, y del fenómeno del choque -inelástico- entre cuerpos.

5.3 El fenómeno de caída desde la perspectiva galileana: Identificación de la velocidad instantánea como variable de estado

Generalmente se considera a Galileo como uno de los fundadores de la ciencia moderna al proponer una forma de análisis que, a lo largo de la historia, se ha erigido como paradigmática: la geometrización y, como consecuencia de ello, la cuantificación del movimiento. Se quiere aquí resaltar algunos aspectos de la perspectiva galileana del movimiento que en muchos análisis históricos y textos de enseñanza resulta desapercibida: la identificación de la velocidad instantánea como variable intensiva continua que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos.

En 1604 Galileo escribe a Paolo Sarpi:

«Reflexionando sobre los problemas del movimiento, para los cuales, y a fin de demostrar los accidentes por mí observados, me faltaba un principio totalmente indudable que pudiera poner como axioma, he llegado a una proposición que tiene mucho de natural y evidente; y, supuesta ésta, demuestro luego todo el resto, en especial que los espacios atravesados por el movimiento natural está en proporción doble del tiempo y que, por consiguiente, los espacios atravesados en tiempos iguales son como los números impares»⁸.

El término *accidentes* al cual se refiere Galileo no debe ser interpretado según su significación en el lenguaje cotidiano de hoy día a través del cual se lo considera como un suceso eventual e inesperado; para Galileo este término adquiere la significación de *hechos*: relaciones encontradas experimentalmente y posibles de ser reproducidas. Estas relaciones encontradas por Galileo para el fenómeno de la caída pueden rephrasearse de la siguiente manera:

- La distancia recorrida desde el punto de partida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo.

⁸ Galileo Galilei a Paolo Sarpi en Venecia. Padua, 16 de octubre de 1604. Citado por Koyré, Alexandre. Estudios Galileanos. Siglo XXI Editores. Madrid, 1981. p. 76.

- Los desplazamientos en tiempos iguales siguen la sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Teniendo en cuenta esto, la intención de Galileo no era encontrar la causa de la caída de los cuerpos, como si fuera la intención de Newton. Galileo asume que de hecho los cuerpos caen obedeciendo a una fenomenología que queda explícita en las relaciones espacio-temporales establecidas; no obstante, asumiendo una posición epistemológica a través de la cual considera que los resultados experimentales no son suficientes si éstos no son verificados teóricamente (Koyré, 1981), pretende ante todo establecer un principio fundamental a partir del cual estos hechos se puedan demostrar.

En la Jornada tercera de su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* -conocida como los *Discursos*- Galileo aborda el análisis del movimiento.

Respecto al movimiento naturalmente acelerado, afirma:

«Salviati. [...] Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera [...] Podemos hacer esto en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformemente y, del mismo modo, continuamente acelerado, cuando, en tiempos iguales, se los tome de la forma que se quiera, adquiera incrementos iguales de velocidad. De este modo, si consideramos un número cualquiera de fracciones de tiempo iguales, a partir del primer instante en el que el cuerpo en movimiento abandona la posición de reposo y comienza a descender, el grado de velocidad adquirido en la primera y segunda fracción de tiempo, tomadas conjuntamente, es el doble del grado de velocidad adquirido por el móvil en la primera fracción; mientras que el grado que se obtiene en tres fracciones de tiempo es el triple [...] de modo que si el móvil continuara en su movimiento según el grado de intensidad de velocidad adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento sería dos veces más lento que el que obtendría con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo»⁹.

Se percibe aquí cómo Galileo ha abandonado la perspectiva escolástica del análisis del movimiento a partir de la cual se consideraba que para que un cuerpo adquiriera movimiento era necesario imprimirle una fuerza impulsora externa o *impetu*, que se transmitía al cuerpo y que era el causante del mantenimiento del movimiento: si el *impetu* transmitido acababa, el movimiento cesaba. El *impetu* era considerado, entonces, como la causa interna del movimiento del móvil. Para Galileo la propiedad relevante en el análisis del movimiento es la velocidad, o más concretamente el grado de velocidad, interpretada como el grado de rapidez o lentitud que puede adquirir un cuerpo.

A través de esta idea de grado de velocidad Galileo modifica el status ontológico del movimiento: de efecto producido por una causa -el *impetu*- y que existe y se mantiene sólo mientras dura la acción de la causa que lo produce, pasa a ser un ente relativamente independiente que se conserva por sí sólo (Koyré, 1981). De este modo, el reposo ya no se diferencia del movimiento pues la idea de grado de velocidad hace ver al reposo como el estado movimiento correspondiente a una lentitud infinita.

Galileo es consciente de las dificultades conceptuales que implica esta concepción y por ello pone en boca de Sagredo y Simplicio algunas de las objeciones más importantes, a saber: ¿Cómo concebir el paso continuo del reposo al movimiento? ¿Cómo pensar un movimiento que se realiza en un instante?

«Sagredo. Cuando me imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, y comienza a moverse acelerándose según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante de movimiento; [...] al ser el tiempo subdividible al infinito, se sigue que, en cuanto que la velocidad antecedente va disminuyendo siempre por tal razón, no habrá grado de velocidad tan pequeño o, dicho de otra manera, grado de lentitud tan grande en el que no se encuentre el mismo móvil después de que parta de la lentitud infinita, esto es, del reposo [...] podemos concluir, entonces, que en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no

⁹ Galileo Galilei. Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. Traducida por Javier Sabada. Introducción y notas por Carlos Solís. Editora Nacional, Madrid. 1981. pp. 276-277.

conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni si quiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos muestran que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable».

«Salviati. Esta es una de las dificultades que, al principio, me dieron mucho que pensar, no obstante, en poco tiempo conseguí deshacerme de ella. Fue, precisamente, la misma experiencia, que la que os suscita la dificultad, la que se encargó de resolvérmela [...]

Dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, ¿qué es lo que me impediría creer que tal móvil, que parte de una lentitud infinita (pues tal es el reposo) alcance inmediatamente diez grados de velocidad, en vez de una velocidad de cuatro, de dos, de uno, de medio o de un centésimo? Escuchad, por favor. No pienso que no estuviéseris dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza, fuese devuelta a la misma altura; si esto es posible, no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo».

«Simplicio. Pero si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos, entonces jamás llegarán a consumirse todos. De ahí que el grado ascendente en cuestión no llegará jamás al reposo, sino que se moverá infinitamente cada vez más despacio, cosa que no parece suceder».

«Salviati. Ocurriría esto, señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad»¹⁰.

Se percibe aquí cómo Galileo configura su idea de velocidad instantánea para dar respuesta a las objeciones planteadas. Por una parte, refuerza la idea a partir de la cual entre el reposo y el movimiento no hay diferencia de cualidad sino de cantidad al considerar al reposo como un *estado* más de movimiento: el estado de lentitud infinita; esto implica asumir el

¹⁰ Galileo Galilei. Consideraciones y demostraciones... Op cit., pp 281-282.

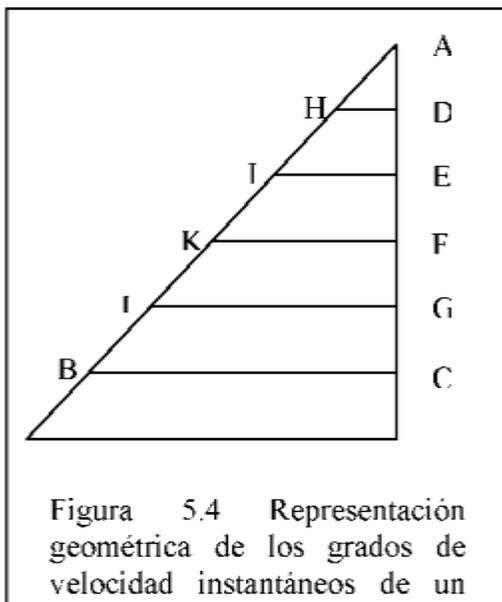
grado de velocidad como variable continua en el sentido que cuando un cuerpo pasa de dicho estado de reposo -asumido, como veremos luego, como el estado de movimiento de grado cero- a otro estado de movimiento, o viceversa, tiene que pasar por todos los infinitos grados de movimiento intermedios. Por otra parte, hace aceptable la idea de que el móvil pase por infinito número de grados de velocidad en un tiempo finito al hacer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo: considera que a cada instante del transcurso del movimiento le corresponde un único grado de velocidad, y como en cualquier intervalo de tiempo por muy pequeño que sea hay infinitos instantes, éstos siempre serán suficientes para corresponder a los infinitos grados de velocidad que puede adquirir un cuerpo en su movimiento (Malagón, 1988).

Esta perspectiva de análisis del movimiento es precisamente la que se ha denominado estrategia de análisis por estado y transformaciones. Desde esta forma de ver, la velocidad es considerada la variable que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos, de forma que estados de movimiento diferentes corresponden a grados de velocidad diferentes. El movimiento es, entonces, concebido como una transformación, como un cambio en el tiempo del estado de movimiento; ahora bien, como la idea de estado implica permanencia, el movimiento desde esta perspectiva es considerado como una sucesión de reposos.

Con la intención de demostrar las relaciones espacio-temporales experimentadas en la caída a partir del axioma propuesto (el grado de velocidad en la caída aumenta desde el reposo en forma proporcional al tiempo transcurrido), Galileo hace uso de una representación geométrica de las variables que intervienen, representación que vendría a constituirse como emblemática en cuanto a la matematización del movimiento se refiere (ver figura 5.4).

«En el movimiento acelerado, el incremento de velocidad es continuo y ... los grados de velocidad que cambian de un momento a otro... son infinitos; por ello podremos ilustrar mejor nuestra concepción dibujando un triángulo ABC, señalando en el lado AC tantas partes iguales como se quiera, AD, DE, EF, FG, etc., y trazando por los puntos D, E, F, G, etc., líneas rectas, paralelas a la base BC; seguidamente quiero que se imagine que las partes de la línea AC son tiempos iguales, y que el punto A es el estado de reposo,

de donde parte el móvil que en el tiempo AD habrá adquirido un grado de velocidad DH; que en el siguiente tiempo la velocidad habrá crecido desde el grado DH hasta el grado EI y luego se hará mayor en los tiempos sucesivos según el incremento de las líneas FK, GL, etc. Ahora bien, como la aceleración se produce de manera continua de un momento a otro, y no a saltos, de una parte del tiempo a otra, y puesto que el término A se considera como el momento mínimo de velocidad, es decir, como el estado de reposo y como el primer instante del tiempo subsecuente AD, está claro que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que hace en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por una infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, hay que imaginar una infinidad de líneas cada vez menores, trazadas desde los puntos infinitos de la línea AD, paralelamente a la línea DH, cuya infinidad de líneas representará finalmente la superficie del triángulo ADH. De este modo representaremos todo espacio atravesado por el móvil con un movimiento que comenzando en el reposo y acelerándose uniformemente, habrá consumido y se habrá servido de infinidad de grados de velocidad creciente, conforme a las líneas infinitas que, comenzando desde el punto A, están supuestamente trazadas en forma paralela a la línea HD, y a las líneas IE, KF, LG, y BC; y el movimiento podrá continuarse tanto como se desee»¹¹.



Este fragmento muestra cómo Galileo, asumiendo como axioma la relación de proporcionalidad entre el aumento del grado de velocidad y el lapso de tiempo transcurrido ($\Delta v \propto \Delta t$) y haciendo uso de una representación geométrica para su concepto de velocidad instantánea, deduce que la distancia recorrida desde el punto de partida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo ($x \propto \Delta t^2$) y que los desplazamientos en tiempos iguales siguen la sucesión de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...;

en otras palabras deduce las relaciones espacio - temporales experimentadas en la caída (figura 5.4)

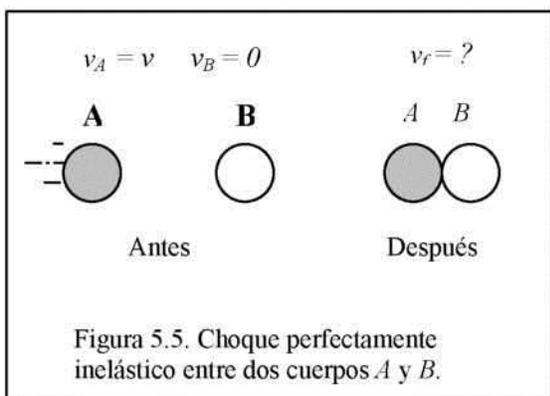
¹¹ Galileo Galilei. Diálogos sobre dos sistemas máximos. Citado por Koyré. Alexandre. Estudios Galileanos. Siglo XXI Editores. Madrid. 1981. p. 81.

Resulta importante resaltar aquí la pertinencia de la representación geométrica en los procesos de construcción conceptual del fenómeno del movimiento -en particular de la caída- y, consecuentemente, en los procesos para su matematización: a través de esta representación magnitudes no geométricas como son la velocidad y el tiempo, son representadas como segmentos, hecho que posibilita poder operar sobre ellas de la misma forma como se opera con segmentos, es decir, a través de proporciones y composición de proporciones.

En particular, esta representación hace evidente que en la perspectiva galileana la velocidad instantánea no es un concepto definido a partir de una relación espacio-temporal como usualmente se presenta en los libros texto y los cursos introductorios de física: acudir a referentes espacio temporales para el estudio de la velocidad como magnitud no es equivalente a una definición operativa de la velocidad en términos de los conceptos de espacio y tiempo, como usualmente es presentada. El representar a la velocidad instantánea por segmentos y el pensar en ella como una magnitud más, le permite a Galileo establecer una estructura -conjunto de axiomas, proposiciones y teoremas- sobre el movimiento que le posibilita hacer comparaciones entre grados de velocidad a través de las comparaciones espacio-temporales. En este sentido es que se afirma que desde la perspectiva galileana el concepto de velocidad instantánea tiene la misma categoría que el espacio y el tiempo, y éste es precisamente una consecuencia del razonamiento geométrico utilizado por Galileo para abordar el problema del movimiento (Malagón, 1988; De Gandt, 1982).

5.4 El fenómeno del choque inelástico de cuerpos: cuantificación de los estados de movimiento y sus cambios

A continuación se presenta un análisis teórico que permite obtener estados de movimiento predeterminados y medir los cambios de estado de movimiento, hecho que permitirá avanzar en el proceso de cuantificación de la velocidad (unidimensionalmente) como magnitud intensiva.

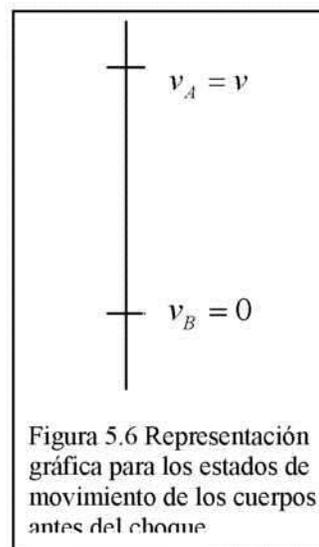


Considérense dos cuerpos A y B que chocan frontalmente de manera que después del choque quedan unidos (choque perfectamente inelástico)¹². B está inicialmente en reposo, $v_B = 0$, y A se dirige hacia él con una velocidad $v_A = v$ (figura 5.5).

Como los cuerpos A y B tienen estados de movimiento diferentes $v_B \neq v_A$ al entrar en contacto sus estados de movimiento cambian: A disminuye su velocidad y B la aumenta. No obstante, esta variación no ocurre indefinidamente sino que cesa en un momento determinado: en ese instante las velocidades de los cuerpos deben ser iguales, hecho por el cual se considera que la interacción -el choque- termina.

¿Cuál es, entonces, el grado del estado de movimiento v_f que adquiere el conjunto de cuerpos cuando termina la interacción comparado con el grado del estado de movimiento que tenía el cuerpo B antes de la interacción?

Usualmente esta situación se resuelve haciendo uso de las relaciones obtenidas a partir de la conservación de momento lineal, relaciones que a su vez son deducidas de las leyes de Newton para el movimiento. No obstante, es posible analizar la situación desde un enfoque más intuitivo y fenomenológico que



¹² Esta situación puede ser reemplazada por un sistema de dos péndulos simples A y B de igual longitud y dispuestos de forma que, en situación de equilibrio, los cuerpos apenas se tocan. Luego el péndulo A se separa de la vertical y se deja caer desde la misma altura H con el fin de asegurar que el estado de movimiento de A en el instante en que inicia la interacción entre los dos cuerpos sea siempre el mismo.

algorítmico; de hecho muchos investigadores consideran que un enfoque tal es más adecuado si se desea dinamizar procesos de construcción del conocimiento (Herrmann & Schubart, 1989; Tindle, 1998)^{13 14}

Para analizar esta situación es posible hacer uso de una representación gráfica de los estados de movimiento de los cuerpos antes de la interacción a través de una línea vertical (figura 5.6). Los grados de velocidad v_B y v_A de los cuerpos B y A , respectivamente, son representados por segmentos sobre esta línea; como no se tiene conocimiento de los grados particulares de los estados de movimiento de los cuerpos sino sólo del hecho que son diferentes, lo relevante en la representación es la diferencia de estos segmentos y no la longitud de los mismos.

Para dar respuesta a la pregunta planteada se puede adelantar un análisis de relaciones de orden basado en la experiencia que se tiene de esta clase de situaciones: Se sabe que cuando chocan dos cuerpos de forma perfectamente inelástica el valor de la velocidad final del conjunto no puede ser menor que la menor de las magnitudes de la velocidad de los cuerpos que chocan ni mayor que la mayor de tales magnitudes; esto significa que para la situación propuesta la velocidad v_f del sistema después del choque necesariamente estará entre los valores de v_B y v_A : $v_B > v_f > v_A$. Aunque esta relación es aparentemente obvia es necesario hacerla explícita pues a la base de ella está la idea que ningún cambio sucede de la nada, idea que a su vez implica los fundamentos de los principios de conservación.

No obstante se ha avanzado en el análisis de la situación, los posibles valores de v_f que satisfacen esta relación son infinitos. Para continuar con el proceso de cuantificación es necesario, entonces, hacer uso de otros criterios que permitan tener certeza de en qué parte del segmento en consideración se ha de ubicar el punto que representaría el estado de movimiento final del sistema.

¹³ Herrmann, F. & Schubart, M. Measuring Momentum without the use of $p = mv$ in a Demonstration Experiment. *Am. J. Phys.* 57 (9), September 1989, pp. 858-859.

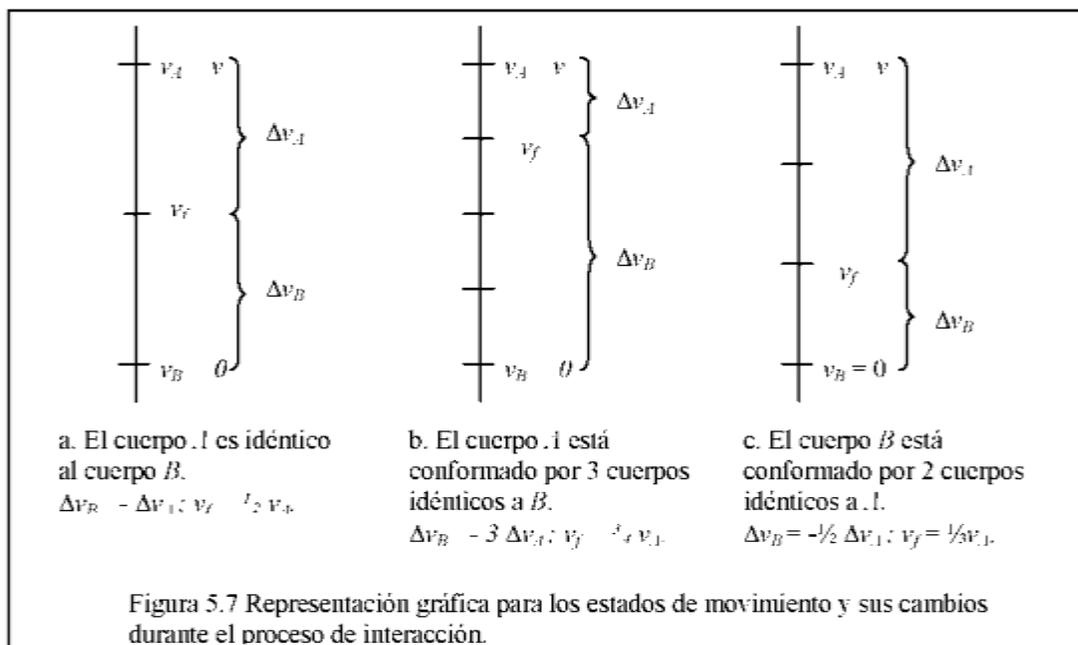
¹⁴ Tindle, C. T. An Intuitive approach to Collisions. *The Physics Teacher*, Vol. 36, September 1998, pp. 344-346.

Para este fin, considérese inicialmente que el cuerpo A es idéntico al cuerpo B . Dada la simetría existente en la situación no hay razón para esperar que el cambio de estado de movimiento del cuerpo A difiera del cambio del estado de movimiento del cuerpo B , luego:

$$\Delta v_B = -\Delta v_A$$

por lo tanto, el estado de movimiento final v_f está igualmente separado de los estados de movimiento iniciales de A y B , como $v_B = 0$ y $v_A = v$, entonces $v_f = \frac{1}{2}v$. (figura 5.7a).

Considérese ahora que el cuerpo A está conformado por 3 cuerpos idénticos al cuerpo B (figura 5.7b). En este caso es posible afirmar que la velocidad final del sistema ha de estar más cerca de la velocidad inicial del cuerpo A que de la velocidad inicial del cuerpo B , es decir: $v_A > v_f > v_B$. A partir de nuestra organización de la experiencia para estas situaciones se espera que para producir el mismo cambio de estado de movimiento en dos cuerpos se requiere una acción mayor para el cuerpo más masivo que para uno menos masivo y como en esta situación la acción que A ejerce sobre B es igual -y opuesta- a la ejercida sobre A por (dado que el sistema de cuerpos A y B no interactúa con otro sistema), la acción que surge en el choque tendrá mayor efecto sobre el cuerpo B que sobre el cuerpo A .



¿Qué tan cerca estará la velocidad final del sistema de la velocidad inicial de A comparado con la separación respecto a la velocidad inicial del cuerpo B ? Como el cuerpo A está conformado por tres cuerpos idénticos al cuerpo B es lógico pensar, por las consideraciones anteriores, que por cada grado que el cuerpo A reduzca su velocidad, el cuerpo B la aumentará en tres grados, es decir que $\Delta v_B = \Delta v_A = -3$. Esta expresión implica, a su vez, que $v_f = \frac{1}{3}v$, dado que $v_i = v$.

Por un razonamiento similar se concluye que para el caso en el que el cuerpo B está conformado por dos cuerpos idénticos al cuerpo A (figura 5.7c), la velocidad final del sistema v_f debe ser tal que: $v_B = v_f = \frac{1}{2}v_i$. Mas detalladamente $\Delta v_B = -\frac{1}{2}\Delta v_A$, hecho que implica que $v_f = \frac{1}{3}v$.

A través de este procedimiento es posible establecer cuándo el grado de velocidad de un cuerpo es mayor, menor o igual que el grado de velocidad de otro, a la vez que permite obtener y reproducir cambios en el grado de velocidad v de un cuerpo en $\frac{1}{2}v$, $\frac{3}{4}v$, $\frac{1}{3}v$ o cualquier otro submúltiplo de él. Esto conduce a afirmar que, tomando el choque entre cuerpos como fenómeno prototipo, es factible la construcción teórica de una escala de estados de movimiento que permite tanto la comparación y ordenamiento de grados de velocidad como la cuantificación de sus cambios, aspectos indispensables en la constitución de la velocidad (estado de movimiento) como una magnitud, es decir, como propiedad física susceptible de ser medida.

Complementariamente, este análisis permite avanzar en la organización y formalización de los fenómenos mecánicos en el sentido que posibilita establecer una clasificación de los cuerpos según el efecto que puede producir sobre otro debido a su movimiento: Si un cuerpo C , al chocar en forma completamente inelástica con otro B , produce el mismo cambio de velocidad en B que aquel que produciría otro cuerpo A al chocar con B en

idénticas condiciones¹⁵, se puede asegurar que los cuerpos C y A son completamente *equivalentes* con relación al movimiento. Las clases de equivalencia así constituidas se pueden diferenciar por medio de una nueva magnitud: Aquellos cuerpos que pertenecen a la misma clase, tales como C y A de la situación considerada, tendrán la misma *masa*. En particular, si el cuerpo A está conformado por n cuerpos idénticos al cuerpo B , se dice entonces que la masa de C es n veces la masa de B . En otros términos, los análisis adelantados han posibilitado establecer que los cambios de velocidad que experimentan los cuerpos durante una interacción mecánica -choque- están en proporción inversa a la proporción en la que están las masas de los cuerpos:

$$\Delta v_A / \Delta v_B = -m_B / m_A$$

5.5 Hacia la construcción del concepto de cantidad de movimiento y su conservación

Como se ha mencionado anteriormente, asumir los modos de ver por sistemas y por variables implica considerar que los cambios de estado de movimiento de un cuerpo o sistema ocurren exclusivamente en virtud de interacciones. Esto, a su vez, permite afirmar que: i) un cuerpo o sistema no puede cambiar su estado de movimiento por sí mismo y ii) no es posible que un cuerpo cambie su estado de movimiento sin que al menos otro lo haga.

Estas consideraciones son claras en el caso particular de los choques inelásticos mostrado en el apartado anterior: allí el cambio de estado de movimiento del cuerpo A es debido exclusivamente al cambio de estado de movimiento del cuerpo B y viceversa; cualquier cambio de estado de movimiento que experimente un cuerpo es debido a su interacción con otro. Sin embargo, se tienen un sin número de situaciones donde estas consideraciones no son tan evidentes: un cuerpo inicialmente en movimiento sobre una mesa se detiene al cabo de un tiempo; cuando un objeto es impulsado por una persona, pareciera que únicamente

¹⁵ Con la expresión "idénticas condiciones" se quiere dar a entender que las parejas de cuerpos que chocan lo hacen, respectivamente, con los mismos valores iniciales de velocidad, es decir, los cuerpos se encuentran respectivamente en los mismos estados iniciales de movimiento.

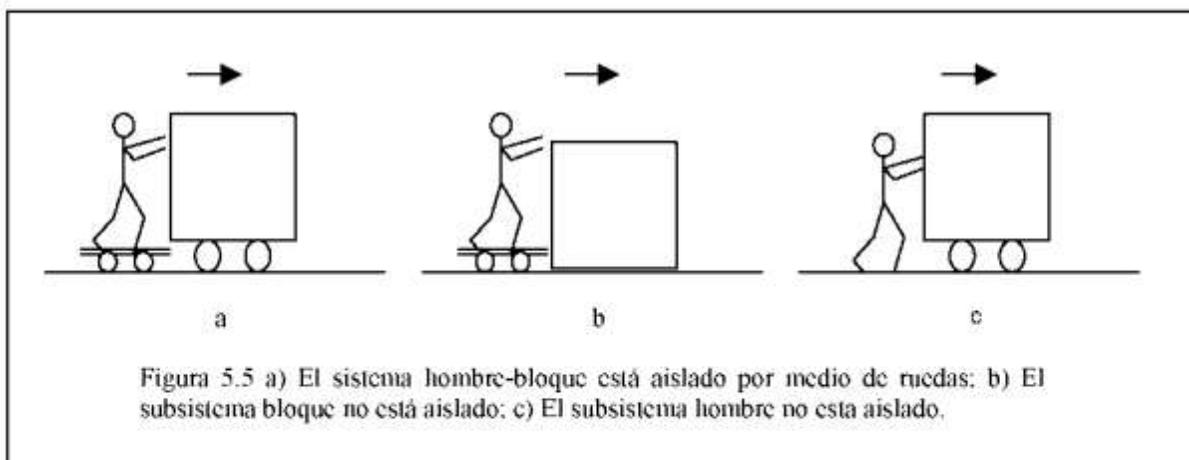
objeto cambiara su estado de movimiento; cuando un cuerpo cae libremente o desciende por un plano inclinado, se percibe que sólo el cuerpo en cuestión cambia su estado de movimiento. En estos casos, ¿cuáles son los otros cuerpos que cambian su estado de movimiento? ¿Por qué dicho cambio no se hace visible?

Para dar respuesta a estos interrogantes considérese que una persona empuja un bloque según las siguientes situaciones: La persona está sobre una patineta y el bloque sobre ruedas (figura 5.8a); la persona está sobre una patineta y el bloque está sobre el piso (figura 5.8b); La persona está sobre el piso y el bloque sobre ruedas (figura 5.8c). Comparando estas situaciones, ¿cuáles son las diferencias en cuanto a los cambios de estado de movimiento d los cuerpos?

Es evidente que en el primer caso se hacen visibles cambios de velocidad tanto del bloque como de la persona; incluso se podría mostrar que, de forma análoga al caso de los choques analizado anteriormente, los cambios de velocidad de los cuerpos que interactúan -persona y bloque en este caso- están en razón inversa a la de sus masas:

$$\Delta v_p / \Delta v_b = -m_b / m_p$$

La situación cambia en el segundo caso: La magnitud del cambio de velocidad de la persona resultará mayor que la del bloque; más aún podría suceder que la persona cambiara



su velocidad y que el bloque permaneciera en reposo, en este caso sólo se hace visible el cambio de velocidad de la persona. En el tercer caso la magnitud del cambio de velocidad del bloque será mayor que el de la persona; podría incluso suceder que el bloque cambiara su velocidad y que la persona permaneciera en reposo, en este caso sólo se hace visible el cambio de velocidad de la persona.

Según estos análisis, las ruedas parecen establecer la diferencia y, por tanto, precisar el papel de las ruedas en las situaciones se hace relevante: Las ruedas en estas situaciones son un mecanismo de aislamiento y como tal son determinantes en la identificación del sistema que se está analizando. En el primer caso los patines de la persona y las ruedas del bloque impiden que estos cuerpos interactúen con el piso (la Tierra), mientras que dicha interacción sí ocurre en el segundo y tercer caso a través del bloque sin ruedas y de la persona sin patines, respectivamente.

En el primer caso, entonces, la persona en patines y que el bloque con ruedas conforman un *sistema aislado*, razón por la cual un cambio en el estado de movimiento del bloque es debido, exclusivamente, a un cambio en el estado de movimiento de la persona y viceversa según la relación:

$$\Delta v_p / \Delta v_b = -m_b / m_p$$

En los otros casos la variación del estado de movimiento de la persona, o del bloque, está acoplada con la variación del estado de movimiento de otros cuerpos adicionales al bloque, o la persona, respectivamente; en estos casos se afirma que el sistema persona-bloque no es un sistema aislado, pero sí lo es el sistema persona-bloque-Tierra. La identificación del sistema se convierte, entonces, en el puente que permite una adecuación entre lo percibido y la formalización construida: Dado que en el segundo caso en consideración el bloque no está aislado de la Tierra, los cuerpos que interactúan son persona y bloque-Tierra; en este caso, por tanto, la expresión construida toma la forma:

$$\Delta v_p / \Delta v_{(b \cdot t)} = -m_{(b \cdot t)} / m_p = -(m_b + m_t) / m_p$$

y como la masa del conjunto bloque-Tierra es muchísimo mayor que la masa de la persona ($m_{(b \cdot t)} \gg m_p$), la variación de la velocidad que este conjunto de cuerpos experimentaría durante la interacción sería muy pequeña, tendería a cero. Un análisis similar puede hacerse para el tercer caso y afirmar que:

$$\Delta v_{(p \cdot t)} / \Delta v_b = -m_b / m_{(p \cdot t)} = -m_b / (m_p + m_t).$$

Estos análisis adelantados ponen en evidencia que existe una cantidad extensiva que habla del movimiento del sistema y que se mantiene constante para los sistemas aislados, pues en el caso de interacciones al interior de ellos sólo habrá una redistribución de tal cantidad. Es de resaltar que a través de esta presentación se considera que la magnitud en consideración no es derivada de la masa o a la velocidad, sino que es una magnitud independiente y del mismo carácter que éstas, tal como lo menciona F. Herrmann (Herrmann, 1989: 858). Esta cantidad se puede representar por $p = mv$ pues, de la expresión general a través de la cual se cuantifican los cambios en el estado de movimiento que experimentan los cuerpos que interactúan mecánicamente, $\Delta v_A / \Delta v_B = -m_B / m_A$, se obtiene que $\Delta v_A m_A = -\Delta v_B m_B$ y como la masa de los cuerpos no cambia se puede afirmar que $\Delta(v_A m_A) = -\Delta(v_B m_B)$, es decir, que $\Delta p_A = -\Delta p_B$.

La cantidad p es conocida como la cantidad de movimiento de un sistema y de los análisis adelantados se puede concluir que:

- En un sistema aislado el cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual y opuesto a la suma de los cambios de las cantidades de movimiento de los otros cuerpos del sistema.
- La suma de los cambios de la cantidad de movimiento de todos los cuerpos que conforman el sistema aislado es cero.

- La suma de las cantidades de movimiento de todos los cuerpos que constituyen el sistema aislado es constante.

Esta forma de considerar el movimiento le hace adquirir toda la generalidad que subyace a las estrategias de análisis de los procesos de cambio de por estados y transformaciones:

- Se busca definir si un sistema permanece o no en su estado de movimiento, si lo cambia y la forma en que lo hace. La permanencia en el mismo estado de movimiento significa no cambiar el grado de velocidad, su disminución o aumento son interpretadas como transformaciones experimentadas por el sistema.
- Ningún sistema cambia su estado de movimiento por sí sólo, todo cambio de estado de movimiento que experimente un cuerpo implica necesariamente que es debido a interacciones con otro sistema.
- Dos sistemas sólo pueden interactuar mecánicamente cuando sus estados de movimiento son diferentes; es decir, para que un cuerpo A pueda modificar el estado de movimiento de otro B y viceversa, sus velocidades deben ser diferentes ya sea en magnitud, dirección o sentido. Si los cuerpos tienen misma velocidad no es posible que interactúen mecánicamente.
- Cuando dos cuerpos con estados de movimiento diferentes se les permite interactuar los dos cambian sus estados de movimiento mientras la interacción dure.

6. MODELOS DE LOS ESTUDIANTES Y SU RELACIÓN CON LA MATEMATIZACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS

6.1 Sobre el enfoque de modelización

De acuerdo con el enfoque de modelización, los modelos constituyen el núcleo del conocimiento científico y la modelización es la actividad sistemática a partir de la cual se puede construir y emplear este conocimiento. Este enfoque está basado en ciertos presupuestos epistemológicos, siendo tal vez uno de los más relevantes aquel por el cual se afirma que nunca llegamos a conocer los objetos «en sí», sino a través de nuestras representaciones de ellos; en otras palabras, nuestra visión del mundo está estrechamente relacionada -causalmente dependiente- tanto con la forma como *es* el mundo como de la forma como *somos* nosotros, hecho que implica que todo nuestro conocimiento de lo que llamamos “mundo exterior” depende de nuestra habilidad para construir modelos de él (Halloun, 1996)¹.

Tal como se afirma en algunas investigaciones, se puede constatar que todo conocimiento científico usa modelos, y precisamente sobre la base de tales modelos construye sus particulares puntos de vista sobre la realidad. Por tanto, se puede decir que la ciencia consiste en una continua construcción, interrelación y revisión de los modelos y de las redes de modelos que cada individuo, y cada sociedad en su conjunto, emplea continuamente para hacer frente a la realidad; hecho que implica, por una parte, que cualquier “integración” entre disciplinas diversas debe significar un modo de comparar y relacionar entre sí modelos diversos y diversas estructuras de modelos y, por otra parte, la importancia de la conciencia explícita del significado y papel asumido en cada

¹ Halloun, I. Schematic Modelling for Meaningful Learning of Physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 1996, Vol. 33, No. 9, pp. 1019-1041.

conocimiento, por la actividad de modelización (Arcá, et al., 1990)².

Estas consideraciones tienen importantes implicaciones en lo que a los procesos de matematización se refiere. Algunos autores, tratando de caracterizar tales procesos desde este enfoque, consideran que:

- Hacer matemáticas implica más que la simple manipulación de símbolos matemáticos. Cuando se construyen o exploran sistemas matemáticos, lo que tiene interés son las propiedades estructurales de esos sistemas, no los elementos aislados dentro del sistema, ni las reglas aisladas que sirven para actuar sobre tales elementos. El significado de las estructuras matemáticas, además, tiende a distribuirse a través de varios sistemas de representación que interactúan unos con otros, cada uno de los cuales destaca especialmente o ensombrece, en algún modo, características diferentes de las estructuras que subyacen (Rico,)³.
- Cuando se utilizan representaciones para matematizar situaciones problemáticas, las representaciones matemáticas funcionan como simplificaciones de sistemas *externos* y, a la vez, como externalizaciones de sistemas *internos*. Por consiguiente, las soluciones implican interacciones entre tres tipos de sistemas: sistemas conceptuales (internos) que residen en las mentes de los individuos; sistemas (externos) que se dan en la naturaleza o que los construyen los individuos (pero que se construyen como un fin en sí mismos, más que como representaciones para explicar otros sistemas); y modelos (externos) o sistemas de representación que funcionan como externalizaciones de sistemas conceptuales internos tanto como internalizaciones de sistemas externos (Lesh, 1997)⁴.

² Arcá, M. et al. Realidad y estructuras disciplinarias. En Enseñar ciencia. Cómo empezar: reflexiones para una educación científica de base. Paidós Educador. Barcelona. 1990. p. 139.

³ Rico, L. et al. Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Enseñanza de las Ciencias

⁴ Lesh, R., Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. Enseñanza de las Ciencias. 1997. Vol. 15. No. 3. pp. 377-391.

6.2 Representación cartesiana como medio para identificar variables

Se asume en esta investigación, como lo hacen otras investigaciones de carácter interpretativo, que las representaciones internas de los individuos se reflejan de alguna forma en sus representaciones externas: los estudios en psicología parten del presupuesto de que la forma en que las personas piensan se refleja en el uso del lenguaje, por lo que se considera que lo que los estudiantes escriban, dibujen y digan dará indicios de la forma en que razonan⁵. Más aún, las diferentes clases de representaciones utilizadas son indicio de la dinámica de las formas de razonamiento.

En este orden de ideas, a pesar de que existen diferentes clases de representaciones (simbólicas, verbales, gráficas y numéricas), se considera particularmente importante para los propósitos de esta investigación una clase de representación que históricamente se ha erigido como un caso paradigmático de la construcción de espacios abstractos para representar variables y relaciones entre variables y que, por lo tanto, es hoy característica de la cultura científico-tecnológica en la que vivimos: se trata de la *representación cartesiana*.

Se entiende, en general, por representación cartesiana aquella representación espacial por medio de la cual cada variable continua identificada se representa por una línea y viceversa, de igual forma, dos variables diferentes se representan por dos líneas diferentes y así sucesivamente. Una vez identificada y representada de esta forma una variable, cada valor o grado particular de cada variable se representa por la longitud, desde un punto de referencia, del segmento de línea correspondiente.

«En el “visualizar” cartesiano, afirma A. Mockus, aquello de lo que hablamos es necesariamente extensionalizado, transformado en magnitudes (hoy preferimos decir “variables”) cuyas relaciones pueden ser representadas gráficamente y expresadas sintéticamente mediante signos algebraicos. Al acudir a este tipo de “visualización” podemos pretender que seguimos hablando de lo que veníamos hablando y al mismo tiempo aspirar a hablar con la certeza propia de lo cuantitativo y de lo sometible al

⁵ Greca, I.M. y Moreira, M.A.: Modelos mentales y aprendizaje de la física en electricidad y magnetismo. Enseñanza de las ciencias, 1998, Vol. 16, No. 2, pp. 289-303

cálculo. Representar es pues matematizar. lo que significa -según afortunada expresión de Heidegger- traer al terreno de lo siempre ya conocido; es llevar de un juego de lenguaje en algún sentido incierto a otro que -al costo de delimitaciones y regulaciones explícitas- ha ganado certeza y universalidad (Mockus, 1988: 120)»⁶.

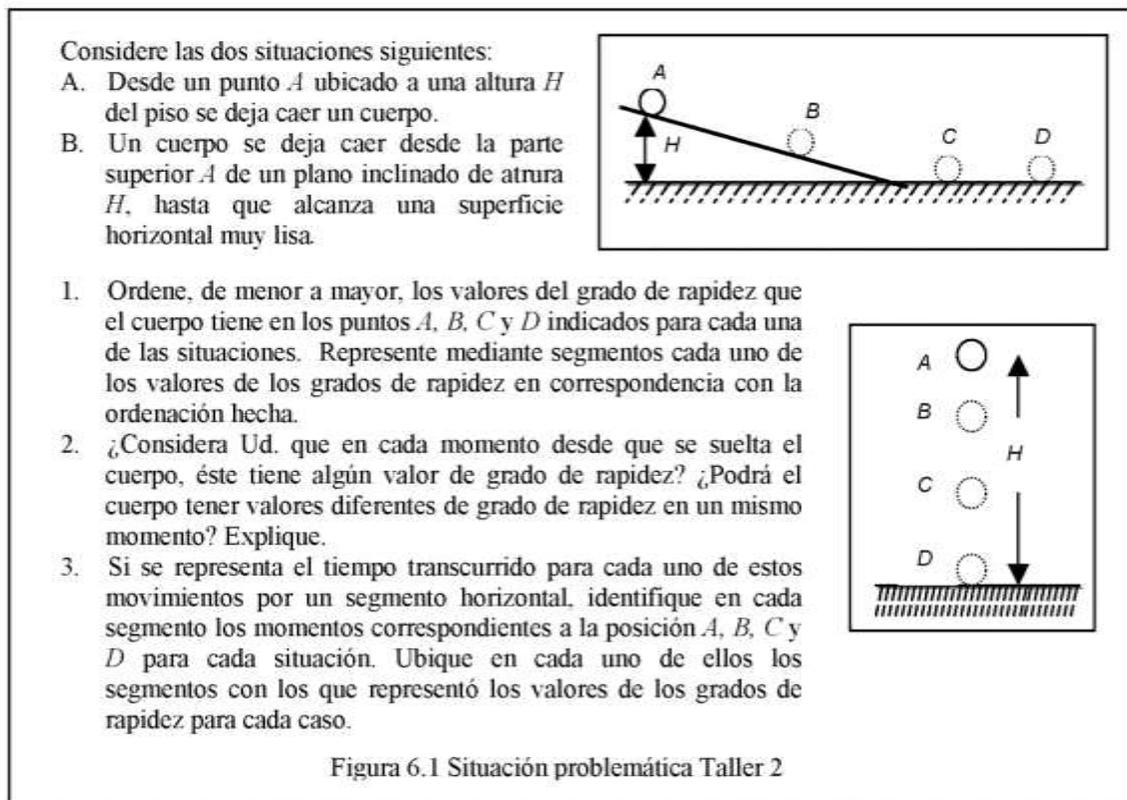
Construir y leer adecuadamente esta clase de representación es particularmente importante por cuanto a través de ella se dinamizan los procesos de matematización de los fenómenos físicos, en el sentido que esta representación espacial:

- Permite la diferenciación y visualización de las variables reconocidas a propósito de una interpretación física a la situación o fenómeno en consideración por medio de su representación a través de líneas sobre un plano.
- Facilita la identificación de las relaciones de orden características de las magnitudes físicas, por medio de la comparación entre los segmentos de línea que representan los diversos valores que puede tomar una variable.
- Favorece el establecimiento de relaciones entre las diferentes variables representadas vía el análisis, a partir de la representación misma, de cómo cambia una variable respecto a otra.
- Posibilita la comprensión del fenómeno físico a través de su formalización.

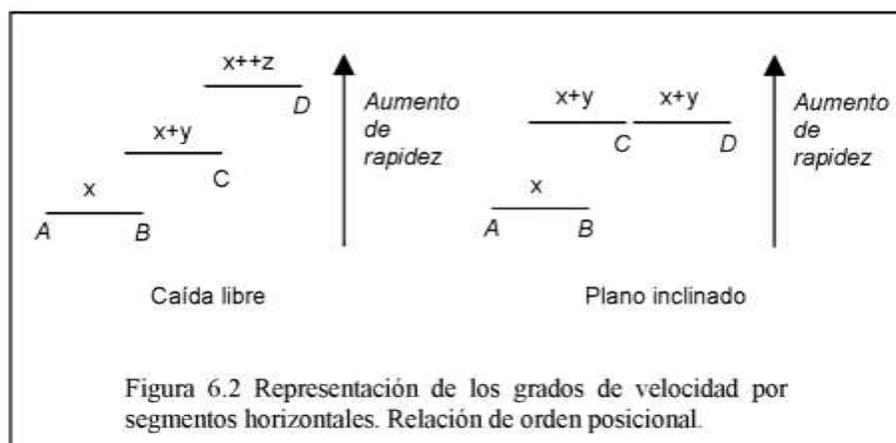
No obstante, es importante percatarse del hecho de que quienes se inician en este tipo de representación en espacios abstractos tienen a menudo que afrontar dificultades relacionadas con problemas de significado, que muchas veces son consideradas obvias por quienes ya están familiarizados con esta forma de representación -incluidos allí los profesores.

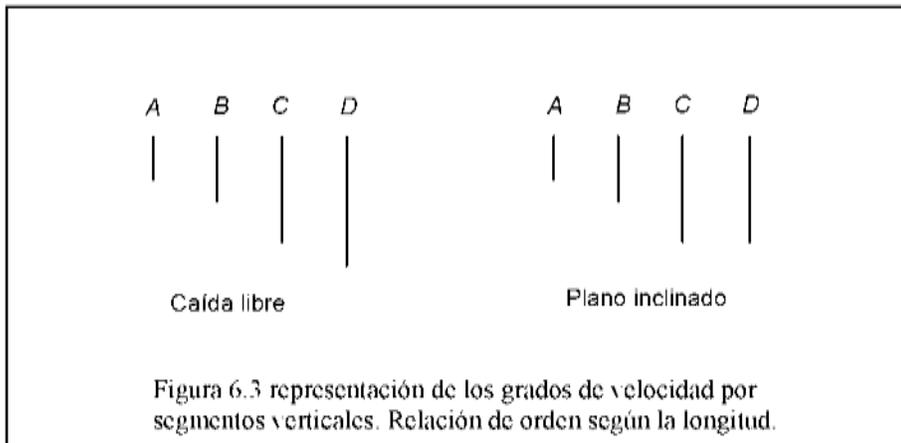
Para ilustrar este aspecto se describirá y comentará a continuación algunas de las soluciones planteadas por los estudiantes a las situaciones problemáticas correspondientes al Taller No. 2 (ver figura 6.1).

⁶ Mockus, Antanas. Representar y disponer. Universidad Nacional de Colombia. Centro editorial, Bogotá.



Se transcriben a continuación las clases de gráficas más representativas correspondientes a la solución de esta situación. En la transcripción se han conservado las relaciones entre los segmentos utilizados.





La primera de estas representaciones (figura 6.2), para el caso del cuerpo que cae, es acompañada del siguiente comentario: «La menor rapidez sería en *A*, pues su grado de rapidez es cero y a medida que [el cuerpo] va recorriendo cierto espacio va aumentando su rapidez, es decir, el orden sería *A B C D*.»

En esta gráfica se percibe que si bien los grados de rapidez se representan mediante segmentos, la longitud de éstos no es asumida como parámetro para realizar la ordenación de los grados de rapidez identificados. Tal orden es representado tanto posicionalmente según la ubicación respecto a un eje vertical ascendente, asumido como indicador del aumento de rapidez, como a través de símbolos que indican que un segmento dado tiene mayor magnitud que el precedente ($x, x > y, x > y > z$). En este sentido, la rapidez del cuerpo cuando éste se encuentra en la posición *D* es representada por un segmento horizontal ubicado en la parte superior de la gráfica -dado que en dicha posición el cuerpo adquiere la máxima rapidez-; la rapidez cuando el cuerpo se encuentra en *C* es representada por un segmento horizontal de igual longitud que el anterior pero ubicado por debajo de él; consecuentemente, el segmento que representa la rapidez en *B* (¿o en *A*?) es ubicado en la parte inferior de la gráfica.

El orden de los grados de rapidez para el caso del cuerpo que se desliza sobre el plano inclinado se representa de forma análoga. En este caso la gráfica es acompañada del siguiente comentario: «El impulso ganado al descender permite que en *C* y *D* [el cuerpo]

tenga más rapidez que en B, por lo tanto [la rapidez] aumenta de A a B, C y D». Dado que se considera que el grado de rapidez del cuerpo en la posición C es el mismo que su grado de rapidez en D, los segmentos que representan los correspondientes grados de rapidez son ubicados al mismo nivel respecto al eje que indica el aumento de rapidez.

Teniendo ésto se puede afirmar que si bien a través de esta representación se trata de dar cuenta del orden de los grados de rapidez previstos a partir de la interpretación física de las situaciones, la representación misma no permite identificar el grado de rapidez como variable: el uso simultáneo tanto de segmentos horizontales para representar los grados de rapidez del cuerpo como de símbolos literales y de un eje vertical ascendente para indicar aumento en el grado de rapidez no posibilita el establecimiento de la relación una variable-una línea característica de la representación cartesiana.

Adicionalmente, no hay adecuación entre la interpretación física dada para el reposo y la representación utilizada: si bien se asume el reposo como el *grado cero de rapidez*, no hay una representación gráfica que corresponda a esta interpretación; esta dificultad se hace explícita en la imposibilidad de utilizar segmentos diferentes para representar el grado de rapidez del cuerpo en las posiciones A y B, como sí se utiliza para las posiciones C y D.

La segunda representación (figura 6.3) es más frecuente que la primera. En ella los grados de rapidez son representados mediante segmentos pero, a diferencia de la representación anterior, la longitud de estos segmentos sí es asumida como criterio de representación del orden particular de los grados de rapidez que adquiere el cuerpo en los diferentes momentos.

En el caso del cuerpo que cae, la gráfica es acompañada del siguiente comentario: «A medida que el cuerpo cae su rapidez aumenta progresivamente, luego el orden [de los grados de rapidez] es A, B, C, D». En el caso del cuerpo que se desliza sobre el plano inclinado el orden de los grados de rapidez es representado de forma análoga; se asume para esta situación, en general, que el valor del grado de rapidez del cuerpo en C es el

mismo que para el grado de rapidez del cuerpo en D , hecho por el cual se representan por segmentos de igual longitud.

Precisamente por el hecho de considerar que la longitud de los segmentos representa los valores particulares de los grados de rapidez, esta representación es más adecuada que la anterior, pues no sólo da cuenta del orden de los grados de rapidez previstos desde la interpretación física de las situaciones, sino que permite identificar el grado de rapidez como variable, aspectos necesarios para favorecer la cuantificación variable diferenciada. Sin embargo, esta representación presenta dificultades de correspondencia con la interpretación física: si bien el grado de rapidez del cuerpo en la posición A es asumido como cero, éste se representa por un segmento de longitud diferente de cero. Si hubiese correspondencia entre estas dos representaciones (la explicación física es, también, una representación), la rapidez del cuerpo en la posición A debería representarse por un segmento de longitud cero, es decir, por un punto. Esta falta de correspondencia entre la explicación física y la representación gráfica es particularmente importante por cuanto ilustra las dificultades de tipo *semántico* que están presentes en el uso de una representación espacial, como lo es la longitud de un segmento, para representar una variable no espacial, como lo es la velocidad, por ello será objeto de análisis en un apartado posterior.

6.3 Representación cartesiana como medio para establecer relaciones entre variables

En la representación cartesiana el caso prototipo de la relación entre dos variables se representa en el plano -espacio bidimensional- por medio de dos líneas perpendiculares entre sí, de manera que las longitudes de los segmentos de cada una de las líneas -medidas desde su punto de intersección- representan los valores particulares de las correspondientes variables representadas. De esta forma, cada par de longitudes particulares sobre estas líneas corresponderá biunivocamente, a través de la respectiva proyección paralela, a un punto sobre este espacio bidimensional y viceversa; si estas longitudes representan los

valores correlativos de dos variables, el punto correspondiente representará la situación de correlación de tales variables (Guidoni, 1987: 146).

A pesar de que la mayoría de los estudiantes ordenan adecuadamente los grados de rapidez a través de la comparación de las longitudes de los segmentos que los representan, identificándose así el grado de rapidez como variable, algunas representaciones propuestas ponen en evidencia que se presentan dificultades en representar gráficamente relaciones entre esta variable y el tiempo (asumido como variable independiente).

En particular, cuando se representa el tiempo por un segmento horizontal y se solicita a los estudiantes que identifiquen en este segmento los momentos correspondientes a las posiciones *A*, *B*, *C* y *D* para cada situación propuesta y ubiquen en cada uno tales momentos los segmentos que se representan los valores de los grados de rapidez (ver Anexo, Taller N°. 2), se encuentran las representaciones que aparecen en las figuras 6.4 y 6.5 (en la transcripción se han conservado las relaciones entre los segmentos utilizados).

Es necesario aclarar que los estudiantes que elaboraron estas representaciones realizaron previamente representaciones equivalentes a la presentada en la figura 6.3 para el orden de los grados de rapidez; en este sentido la diferencia no radica la clase de representación sino en el orden atribuido a los respectivos valores del grado de rapidez, según la interpretación física hecha: en el primer caso se

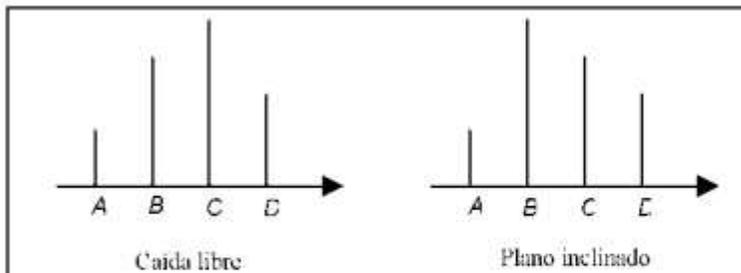


Figura 6.4 Representación del orden de los grados de velocidad según su cambio en el tiempo. Se diferencian las variables velocidad instantánea y tiempo.

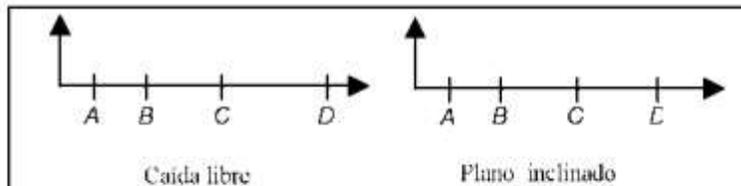


Figura 6.5 Representación del orden de los grados de velocidad según su cambio en el tiempo. No se diferencian las variables velocidad instantánea y tiempo.

atribuye el orden $v_A < v_B < v_C < v_D$ para la caída y el orden $v_A < v_B < v_C = v_D$ para el deslizamiento sobre el plano inclinado; en el segundo caso, por su parte, se atribuye el orden $v_A < v_D < v_B < v_C$ para la caída y el orden $v_A < v_D < v_C < v_B$ para el deslizamiento sobre el plano inclinado. Por ésto, más que la variedad en el orden atribuido a los grados de rapidez, se quiere resaltar las formas de relacionar variables implícitas en las representaciones opuestas.

Para realizar este análisis es importante resaltar previamente que los estudiantes aceptan generalizadamente que en cada momento del movimiento el cuerpo tiene un único valor de grado de rapidez. A la pregunta ¿Podrá el cuerpo tener valores diferentes de grado de rapidez en un mismo momento? (ver Anexo, Taller No. 2), los estudiantes responden: «Desde que se suelta hasta que pare [el cuerpo] tendrá diferentes valores de rapidez pero no podrá tener en el mismo momento varios». «A medida que el cuerpo cae su rapidez aumenta progresivamente. [Pero] no es posible que un cuerpo en un mismo momento tenga variabilidad en su rapidez». «El tiempo es variable y no puede haber rapidez diferente en un mismo tiempo».

Esta clase de respuestas muestra que los estudiantes identifican el grado de rapidez como una variable cuyos valores particulares se asocian a cada instante de tiempo, es decir, que los estudiantes tienen ya la noción de velocidad instantánea. No obstante, en algunos casos no existe una adecuación entre esta interpretación física y la representación propuesta: mientras que en la primera de estas representaciones (figura 6.4) se hace corresponder a cada momento de tiempo identificado un grado de velocidad determinado, en la segunda representación (figura 6.5) no se explicita tal correspondencia dado que los segmentos que representan los diversos grados de velocidad son ubicados sobre la misma línea que representa el tiempo. En este orden de ideas, la segunda representación no sólo no es adecuada para representar la relación identificada a partir del análisis físico de la situación a través de la cual se asocia a cada momento de tiempo uno y sólo un grado de velocidad, sino que, además, no posibilita el establecimiento de la relación dos variables–dos líneas característica de la representación cartesiana.

6.4 Adecuación entre representaciones: un problema semántico

Dado que los espacios de representación tienen significado sólo en correspondencia con las variables y relaciones que ellos representan, es importante advertir que las principales dificultades que se presentan en el intento de representar variables y relaciones entre variables no son de tipo técnico-formal sino, ante todo, de tipo semántico.

A través de la representación cartesiana, en particular, es posible representar todos los valores de una variable continua cualquiera y las posibles relaciones entre sus valores, mediante los puntos sobre una línea y sus relaciones geométricas y numéricas; de la misma forma es posible representar relaciones entre parejas de variables mediante curvas en el plano. Pero, dado que toda representación implica una adecuación entre el *espacio de representación* y el *objeto representado* -que a su vez es una representación más-, es necesario *aprender a leer* la semántica propia de estos dos contextos pues de lo contrario es posible que se termine operando en dichos espacios de una forma puramente memorística y, por tanto, cognoscitivamente poco significativa.

«En la representación cartesiana de dos variables, señala Guidoni, existen dificultades semánticas conexas al hecho de que sólo «moviéndose» en particulares direcciones sobre el plano se representan cambios de los cuales se conocen los significados: y los correspondientes significados cambian al cambiar las direcciones hacia las cuales se desplaza»⁷.

Es particularmente importante advertir las posibles faltas de correspondencia entre una explicación física que involucra una variable y su representación gráfica, por cuanto ello ilustra las dificultades de tipo *semántico* que están presentes en el uso de una representación espacial, como es la longitud de un segmento, para representar una variable no espacial, como es la velocidad. Para ilustrar estas dificultades se transcribe a continuación un fragmento de una entrevista realizada al grupo de estudiantes luego de haber realizado las actividades correspondientes al taller No. 1 (P: Profesor, E: Estudiante)

- P. - Describe la situación. ¿Cómo interpretas estos diagramas?
- E. - El primero es un cuerpo en caída. El cuerpo cae desde A y comienza a moverse y a recorrer distancia. El cuerpo va ganando velocidad. El otro diagrama es similar, sólo que el cuerpo rueda por el plano inclinado.
- P. - Tu dices que el cuerpo va ganando velocidad. ¿en dónde es menor y en dónde mayor esta velocidad?
- E. - Aquí es menor [la estudiante señala el punto A] porque la velocidad sería cero. Ahí el cuerpo se suelta. En B habría más velocidad y en C aún más.
- P. - ¿Y en D?
- E. - [Silencio]
- P. - ¿La velocidad en D sería mayor o menor que en C?
- E. - Me supongo que mayor
- P. - ¿Por qué supones eso?
- E. - Pues se le tienen que sumar todas las velocidades anteriores.
- P. - ¿Cuál sería entonces el orden de los grados de velocidad?
- E. - El orden es A, B, C y por último D.
- P. - Bien. Representaste un segmento corto para el grado de velocidad en A, un segmento de mayor longitud para B, otro más largo para C y finalmente uno aún más largo para D. Pero dices que la velocidad en A es de cero. ¿El primer segmento representa la velocidad de cero?
- E. - Sí. Se supone que cero es la velocidad menor y ese segmento es el menor.
- P. - Claro que es menor. Pero no habría entonces muchos segmentos menores que ese, por ejemplo así [Se dibuja un segmento menor que el inicialmente dibujado para la velocidad en A]. ¿Cómo asegurar cuál es el segmento menor?
- E. - Bueno, podría ser un segmento más pequeño [se dibuja un segmento de menor longitud que el inicialmente hecho]
- P. - ¿Y ese segmento sí representará una velocidad en A?
- E. - Sí porque ahí la velocidad es menor que en B [señala el segmento que representa a la velocidad en B]
- P. - La velocidad en A es la menor. Pero no sólo la menor, es la velocidad cero. ¿Cómo se representa esa velocidad mediante segmentos?
- E. - [Silencio] Pues no tendría representación. No, me equivoqué. Se representaría con un punto. [Duda] ¿Un punto sería un segmento de longitud cero?

La intención de la entrevista era hacerles ver a los estudiantes la necesidad de que haya adecuación entre las representaciones utilizadas: si el reposo se asume como el grado de velocidad cuyo valor es cero, para que haya adecuación entre la explicación física -que es una representación más- y la representación cartesiana para las relaciones $v-t$ de la caída, la velocidad del cuerpo en el momento inicial de la caída debe ser representada por un segmento de longitud cero, es decir, por un punto. En esta entrevista se hace explícito que el problema de la adecuación entre representaciones es, ante todo, un problema de significado: a pesar de que los estudiantes asumen que el reposo corresponde a la velocidad

⁷ Guidoni, P. et al. Guardare per sistemi... Op. Cit., p. 142.

de grado cero, no consideran obvio representar tal grado cero a través de un punto, como usualmente se les exige para la construcción y análisis adecuado de las gráficas $v-t$ en cinemática.

Lo cierto es que esta consideración, lejos de ser obvia, está estrechamente relacionada con el hecho, intuitiva y formalmente válido, de que sólo es posible comparar magnitudes homogéneas: si se elige la longitud para representar la velocidad, se asume que las diferentes cantidades de longitud corresponden a los diferentes grados de velocidad; pero mientras el grado cero de velocidad tiene como referente el reposo, su correspondiente para la longitud no es un valor más, sino la ausencia de tal propiedad. En otros términos, un punto no es un elemento de la misma clase que una línea: por sucesivas divisiones de un segmento no se obtiene un punto, de la misma forma que por la reunión de puntos no se genera un segmento. Esta dificultad no es exclusiva de la geometría, también se presenta en la interpretación física cuando se está obligado a asumir al reposo como un grado más de movimiento, «el grado de lentitud infinita», en términos de Galileo.

6.5 Modelos matemáticos como forma de explicar y anticipar el mundo físico

Se quiere en este apartado resaltar una forma de asumir la relación entre las matemáticas y la física: se trata de aquel enfoque por el cual se considera que las matemáticas tienen con la física una *relación de constitución*, es decir, que sin las matemáticas no sólo es imposible especificar y expresar muchos conceptos y procesos del pensamiento físico, sino incluso generarlos. En particular se quiere ejemplificar cómo a través del proceso de construcción de explicaciones a situaciones físicas relacionadas con la cuantificación de magnitudes, se hace uso de representaciones matemáticas que no sólo posibilitan explicar satisfactoriamente la situación planteada sino que conllevan a la identificación y configuración de nuevas magnitudes y principios físicos que conducen a la ampliación y organización del campo fenomenológico de quienes las producen.

Para ejemplificar estos aspectos se describirá y analizará a continuación la clase de respuestas dadas por las estudiantes a propósito de una situación problemática del Taller No. 4, relacionada con el choque entre cuerpos (ver figura 6.6).

Considere que una esfera A , que se mueve con una velocidad v , se dirige hacia otra B inicialmente en reposo. Como A y B tienen estados de movimiento diferentes, al entrar en contacto sus estados de movimiento deben variar (A disminuye su velocidad y B la aumenta) hasta que sus velocidades se igualen, en ese momento termina la interacción, es decir el choque. Después del choque ambas esferas quedan unidas. (Ver figura)

1. Si la esfera A tiene igual masa que B , ¿la velocidad v_f de los cuerpos A y B después del choque es mayor, menor o igual a v ? Explique.
2. Si los valores de las velocidades de los cuerpos antes del choque se representan por medio de la altura de un segmento vertical, como se indica en la figura, ¿cuál será la ubicación para la velocidad de los cuerpos después del choque?

Figura 6.6 Situación problemática I, Taller No. 4.

Las respuestas dadas por las estudiantes para dar solución a esta situación estaban asociadas a sus conocimientos y experiencias comunes: si dos cuerpos chocan bajo estas condiciones, «no es posible que suceda que después del choque el conjunto de cuerpos retroceda [es decir, que se mueva con una velocidad menor que cero] o que se mueva más rápido que la velocidad v ». Cuando se les inquiriere si puede ocurrir que el conjunto de cuerpos se mueva después del choque con una velocidad igual a v , las estudiantes inicialmente dudan pero, por argumentos que ellas mismas expresan, concluyen que necesariamente el conjunto de cuerpos ha de moverse con una velocidad menor que v , pues «el cuerpo A impulsa al cuerpo B pero el cuerpo B frena al cuerpo A y como quedan unidos la velocidad final debe ser intermedia a la que ellos traían». Estas explicaciones en términos formales equivalen a firmar que la velocidad final v_f del conjunto de cuerpos es tal que: $v_B < v_f < v_A$.

Estas explicaciones y análisis muestran que las estudiantes tienen y hacen uso de un primer nivel de organización de su experiencia sensible expresado en el establecimiento de relaciones de orden de la variable identificada como relevante en el sistema en consideración y en la identificación de la velocidad como variable intensiva.

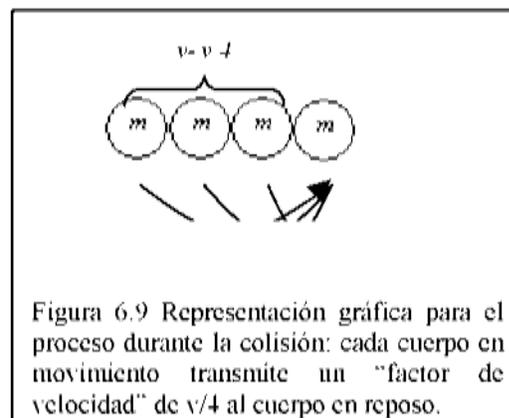
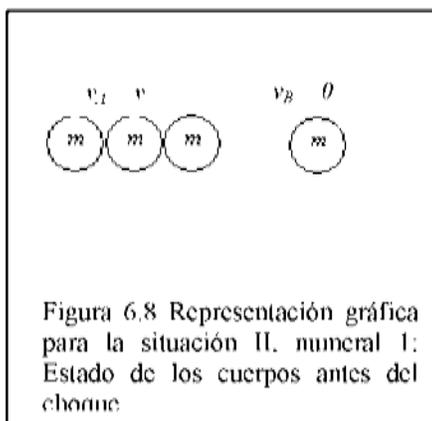
Respecto a la segunda pregunta, las estudiantes concluyen que el punto medio del segmento es el que corresponde a la velocidad final del sistema después de la interacción. Las justificaciones dadas a esta afirmación están asociadas a características de la simetría de la situación: «como los cuerpos tienen masas iguales y el cuerpo A pierde movimiento mientras que el cuerpo

Considere ahora que la esfera A, que se mueve con una velocidad v , tiene una masa diferente a la esfera B, inicialmente en reposo. Resuelva la pregunta del numeral 2 para los casos en que: (Explique las consideraciones que tuvo en cuenta para encontrar el resultado)

1. $M_A = 3M_B$
2. $M_A = \frac{1}{2}M_B$
3. $M_A = nM_B$

Figura 6.7 Situación problemática II, Taller No. 4

B gana movimiento, la velocidad del conjunto debe estar en el punto medio». Es de resaltar que ya se percibe aquí el reconocimiento de una idea de conservación, es en sentido que durante, y debido a, la interacción si uno de los cuerpos gana movimiento es por que el otro lo ha perdido; no obstante, aún no se diferencia una variable de estado que de cuenta de tales cambios en el movimiento de los cuerpos, como lo es la cantidad de movimiento o *momentum* (mv).



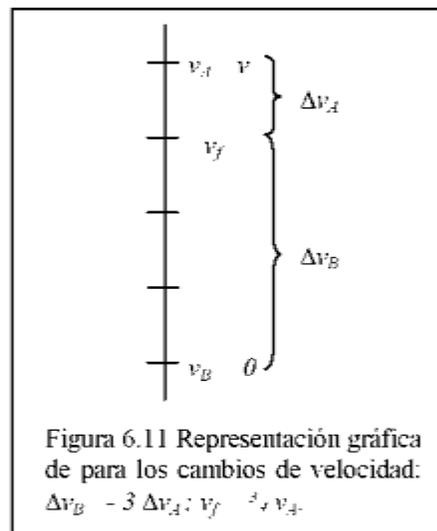
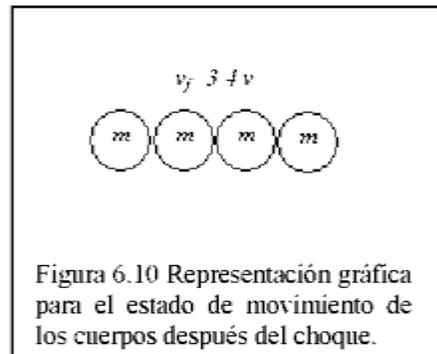
Para la segunda situación (figura 6.7) las estudiantes realizaron un análisis muy interesante que refleja la construcción del concepto de cantidad de movimiento como variable extensiva.

Para abordar el primer numeral, las estudiantes comienzan considerando que si la masa del cuerpo B es denotada por m , el cuerpo A , cuya masa es el triple de la del cuerpo B , puede asumirse como estando conformado por tres cuerpos idénticos al cuerpo B (figura 6.8).

Consideran, luego, que después del choque se tiene un conjunto de cuatro cuerpos de masa m moviéndose con una misma velocidad v_f que, por análogas razones a la situación anterior, ha de ser menor que v . No obstante, existe una diferencia con la situación anterior: v_f es más cercana a v puesto que se tienen inicialmente más

masas en movimiento que en reposo, deducción hecha al suponer situaciones extremas de choque de cuerpos con mucha masa en movimiento y pequeña masa en reposo como es el caso del choque entre un vehículo en reposo con una tractomula en movimiento.

Para identificar con mayor precisión la ubicación del valor de la velocidad final en la representación gráfica propuesta, las estudiantes plantean la necesidad de abordar la pregunta «cuál es el *factor de velocidad* que se debería trasladar de cada uno de los cuerpos de masa m en movimiento al cuerpo de masa m en reposo, de forma que la velocidad final del sistema sea la misma». Luego de proponer algunos posibles valores por el método de aproximaciones sucesivas, se concluye que la condición establecida sólo se satisfacía con el



factor $v \neq$ (figura 6.9), es decir, que durante la colisión cada uno de los cuerpos en movimiento «traslada $v \neq$ de su velocidad al cuerpo m en reposo de forma tal que éste recibe en total $3v \neq$. De esta forma, «cada cuerpo m en movimiento queda con $3v \neq$, con lo cual cada uno de los cuerpos del sistema se mueve con una velocidad final igual a $3v \neq$ » (Figura 6.10).

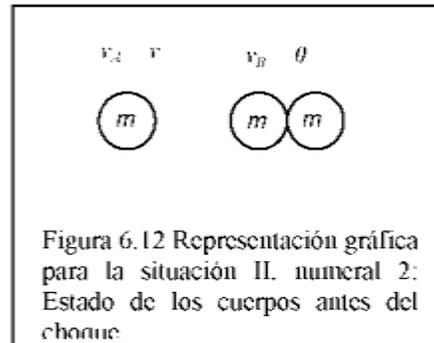
Finalmente, una vez encontrada el valor de la velocidad final en términos de la velocidad inicial, se ubica en la representación gráfica guardando las correspondientes proporciones (Figura 6.11).

En este análisis propuesto por las estudiantes se puede resaltar que:

- Se identifica la velocidad como una variable intensiva que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos. Esto se percibe cuando las estudiantes consideran, por una parte, que si un cuerpo se mueve con una velocidad determinada v , todas y cada una de sus partes tienen la misma velocidad v , y, por otra parte, que la variación de la velocidad es la que determina cuándo hay interacción, de manera que la igualdad de velocidad es un indicador de que la interacción -el choque- cesa.
- Se identifica una nueva variable extensiva que identifica el sistema y cuya cantidad, que es proporcional tanto a la masa a la velocidad, se conserva antes y después de la interacción. Esto se percibe cuando las estudiantes se proponen encontrar el *factor de velocidad* que se debe *trasladar* de cada uno de los cuerpos de masa m en movimiento al cuerpo de masa m en reposo, de forma que la velocidad final del sistema sea la misma. Es importante percatarse aquí que con el término *factor velocidad* las estudiantes no están significando directamente la velocidad -pues ésta es una variable intensiva de estado y como tal no se puede «trasladar» de un cuerpo a otro-, sino una nueva variable extensiva que se transmite; de hecho el recurso propuesto por las estudiantes de considerar el cuerpo de masa $3m$ como conformado por tres cuerpos de masa m es una necesidad para operar con esta nueva variable: se asume la masa m

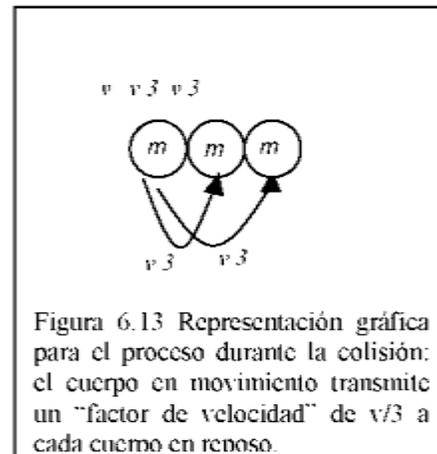
como unidad y se piensa en la variación de la velocidad, en otras palabras, se está pensando el *momentum* por unidad de masa.

Para abordar el segundo numeral, las estudiantes proceden de la misma forma analizada: el cuerpo *B* en reposo es considerado como constituido por dos cuerpos de masa *m* (figura 6.12); después de la colisión, la velocidad final del sistema es menor que *v*, pero más cercana a cero -la velocidad del cuerpo en reposo- ya que la masa del cuerpo en



movimiento es menor que la de los cuerpos en reposo. Para encontrar el valor preciso de la velocidad final *v_f* se busco el *factor de velocidad* que debería trasladarse para que el sistema quedará con la misma velocidad.

Nuevamente por aproximaciones sucesivas se encontró que este factor de velocidad para este caso era $v/3$; en este sentido, el cuerpo en movimiento de masa *m* traslada $v/3$ a cada cuerpo en reposo de igual masa *m* (figura 6.13), de forma tal que el cuerpo en movimiento cede $2v/3$ y queda con $v/3$. Así cada una de las partes de masa *m* se moverán, después del choque, con una velocidad $v/3$ (figura 6.14).



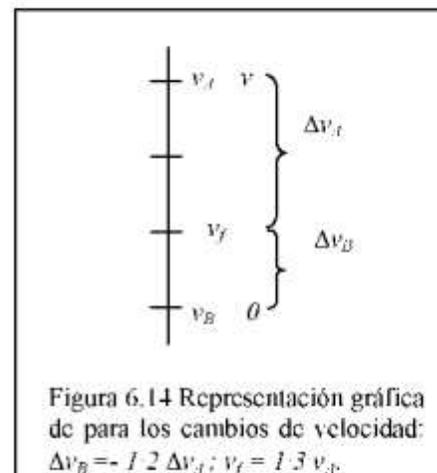
Para el tercer numeral, donde $M_A = nM_B$, las estudiantes se ven en la necesidad de resolver algunas situaciones previas: cuando $n = 1, 2, 3$ y 4 (el caso $n = 3$ fue el analizado anteriormente). Luego de determinar por el procedimiento descrito el valor de la velocidad para estas situaciones ($v_f = v/2, v_f = 2v/3, v_f = 3v/4, v_f = 4v/5$, correspondientemente), se observan regularidades entre las cuales se destacan:

- El dígito que aparece en el numerador corresponde al número de cuerpos en movimiento antes del choque.
- El dígito que aparece en el denominador corresponde al número de cuerpos en movimiento después del choque.

Dado que los cuerpos tienen la misma masa m , estas regularidades se pueden sintetizar en la relación:

$$v_f = nM_a v / (nM_a + M_b)$$

Esto muestra el nivel de formalización alcanzado, pues es una expresión que no sólo explica satisfactoriamente casos particulares de la situación problemática propuesta, sino que los generaliza creando así la posibilidad de anticiparse a la acción.



7. ANALISIS DE LA INTERVENCION DIDACTICA

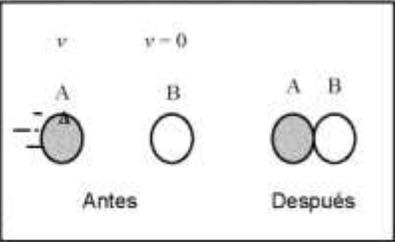
Para el desarrollo de esta investigación en su etapa de experimentación las variables inicialmente identificadas se centran en tres campos de acción: el primer campo se refiere a la matematización de situaciones físicas a través del uso de representaciones; este campo se operacionaliza en términos de la capacidad para identificar y definir variables, la capacidad para determinar relaciones entre variables y capacidad para establecer procedimientos de cuantificación. El segundo campo es el relacionado con la comprensión y análisis de fenómenos físicos; campo que se operacionaliza en términos de la capacidad para usar e interpretar representaciones cartesianas para diferenciar magnitudes físicas y la capacidad para aplicar los conceptos físicos y sus relaciones en la construcción de explicaciones a situaciones problemáticas. El último campo es el relacionado con el desarrollo de esquemas cognitivos, campo que se operacionaliza en términos de la capacidad para establecer analogías y la capacidad para construir y deconstruir modelos.

A continuación se describirán los criterios de análisis y los resultados obtenidos para los dos primeros aspectos. El tercer aspecto fue descrito y analizado desde un enfoque interpretativo en el capítulo 6.

7.1 Análisis de resultados del pretest A

A continuación se describen y analizan las respuestas de los estudiantes de las situaciones problemáticas II y III correspondientes al pretest A, sobre fenómenos mecánicos. El análisis de la situación problemática II se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto relacionado con la matematización de situaciones físicas a través del uso de representaciones; el análisis de la situación problemática III, por su parte, se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto relacionado con la comprensión y análisis de los fenómenos físicos.

Suponga que una esfera A, que se mueve inicialmente con una velocidad v , choca frontalmente con otra inicialmente en reposo de forma que después del choque ambas esferas quedan unidas.



1. Si la esfera A tiene igual masa que B, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

- Mayor que v
- Menor que v
- Igual a v

2. Si A tiene mayor masa que B, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

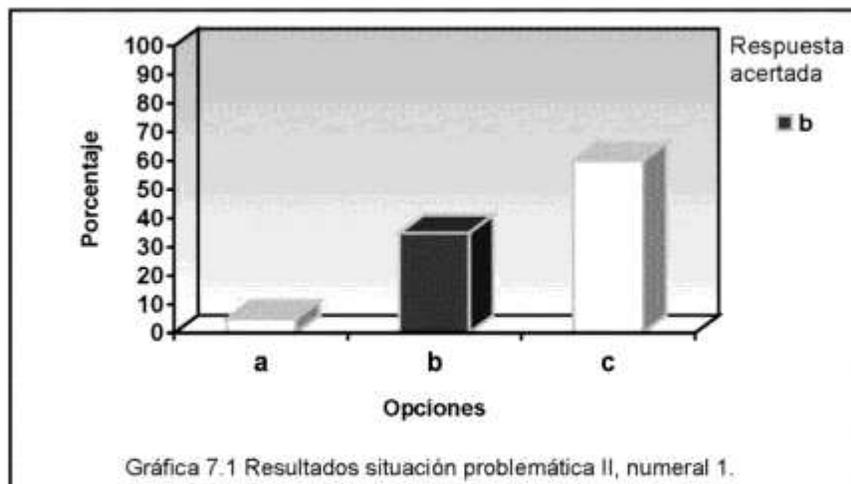
- Mayor que v
- Menor que v , mayor que $v/2$
- Menor que v , pero menor que $v/2$

3. Si B tiene el triple de la masa que A, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

- Menor que v , mayor que $2v/3$
- Menor que $2v/3$, mayor que $v/3$
- Menor que $v/3$

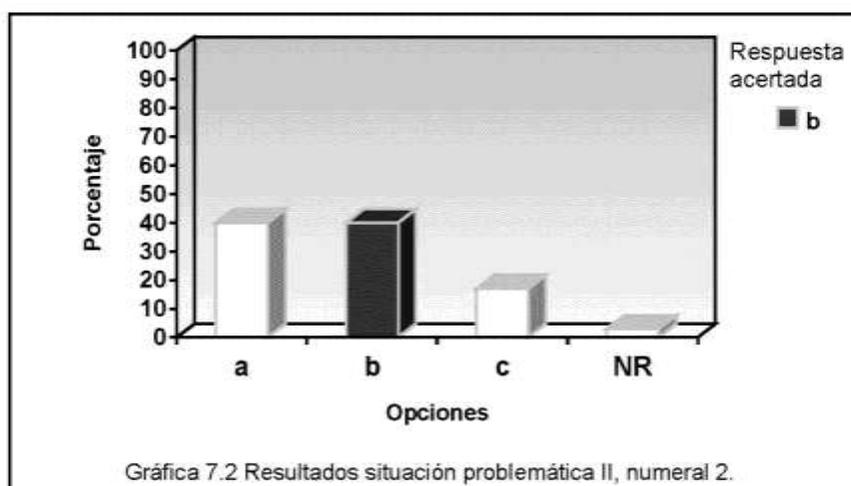
Figura 7.1. Situación problemática II, pretest sobre fenómenos mecánicos.

Las respuestas de los estudiantes a la situación II, numeral 1 (ver recuadro), se muestran a continuación:



A partir de los resultados se puede afirmar que el 65.8% de los estudiantes (5.8% para la opción a y 60% para la opción c) tienen dificultades para asumir una idea intuitiva de conservación de la cantidad movimiento, hecho que conduce a la imposibilidad de identificar una invarianza de las relaciones entre la masa y el cambio de velocidad en el choque y, por tanto, a una dificultad para ordenar los grados de velocidad en la situación. Por el contrario, sólo en el 34.2% de los encuestados (opción b) identifica una noción de conservación de cantidad de movimiento, noción que posibilita establecer relaciones de orden adecuadas para los grados de velocidad en la situación.

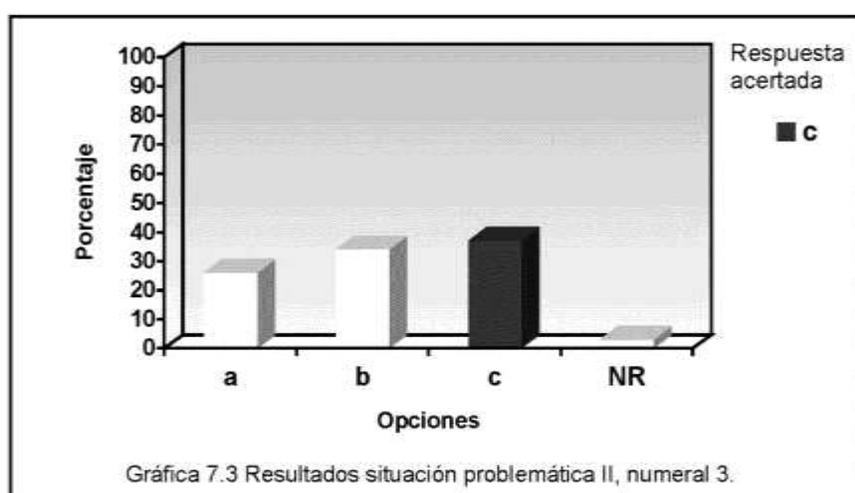
Las respuestas de los estudiantes a la situación II, numeral 2 (ver recuadro), se muestran a continuación:



Estos resultados inducen a considerar que un 40% de los encuestados (opción a) no muestran una idea intuitiva de conservación de la cantidad movimiento presentando, por tanto, dificultades para establecer relaciones de orden adecuadas entre los grados de velocidad en la situación. Un 17.2% de los encuestados (opción c) sí muestran tener una idea intuitiva de conservación del movimiento que les posibilita establecer el cambio de velocidad como variable; no obstante, tienen dificultades para determinar relaciones adecuadas entre las variables en juego (masa y velocidad). Un 40% de los encuestados

(opción b), por el contrario, establece relaciones de orden adecuadas entre la masa y los cambios de velocidad, hecho que implica que tienen una idea intuitiva de conservación del movimiento. Finalmente, respecto a los estudiantes que no responden (NR: 2.8%) se puede afirmar que no tienen elementos suficientes para establecer relaciones de orden como medio para iniciar los procesos de formalización de estas situaciones.

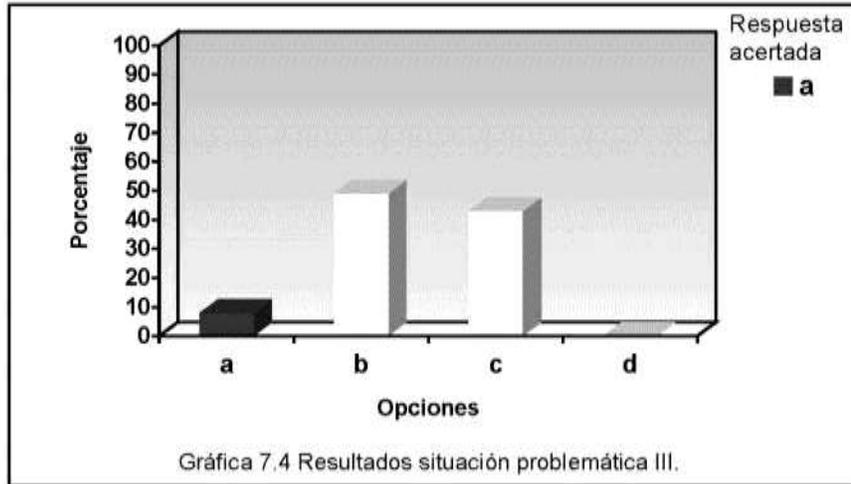
Las respuestas de los estudiantes al numeral 3 de esta situación (ver recuadro), se muestran a continuación:



De forma similar que en el numeral anterior, el 59.9% de los encuestados (25.7% para la opción a y 34.2% para la opción b) tienen dificultades para determinar relaciones de orden adecuadas entre la masa y los cambios de velocidad. El 37.3% de los encuestados (opción c) sí establecen dichas relaciones adecuadamente, hecho que implica que tienen una idea intuitiva de conservación del movimiento. Sigue presentándose un 2.8% que no responden muy probablemente por no estar familiarizados con esta clase de representaciones para formalizar las situaciones físicas.

El análisis de la situación problemática III se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto relacionado con la comprensión y análisis de los fenómenos físicos.

Las respuestas de los estudiantes a esta situación (ver recuadro), se muestran a continuación:



A partir de estos resultados se puede afirmar que todos los estudiantes tienen un nivel de organización de la experiencia a propósito del fenómeno de caída que les permite asegurar que la opción d no es adecuada. Sin embargo, el 91.4% de los encuestados (48.6% para la opción b y 42.8% para la opción c) no identifican los conceptos pertinentes para dar cuenta de la situación; en particular, en ellos se presenta dificultades para identificar al tiempo y la velocidad como variables relevantes y existe confusión entre los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea. Sólo un 8.6% de los encuestados (opción a) parece identificar satisfactoriamente las variables relevantes (tiempo y velocidad) y sus relaciones para dar cuenta del fenómeno de caída.

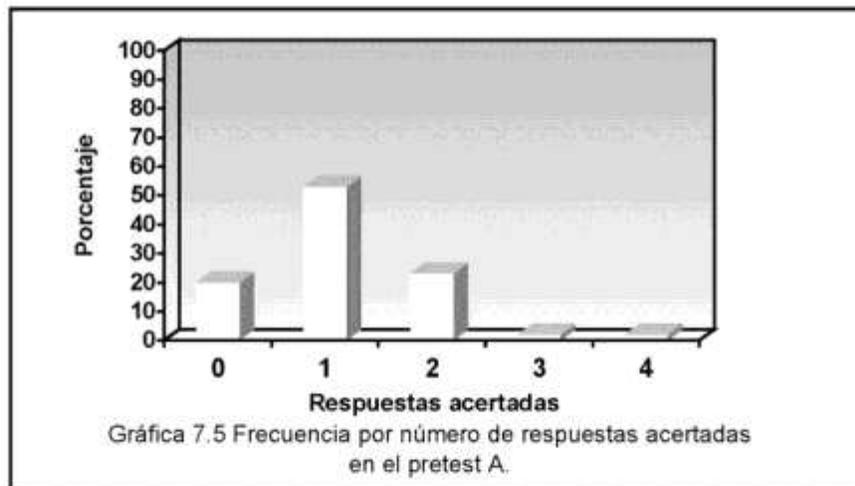
Tabla de frecuencia para el pretest A

Total de preguntas acertadas	Frecuencia de (N° de estudiantes)	Frecuencia relativa	Porcentaje	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
0	6	0.17	17	6	0.17
1	19	0.54	54	25	0.71
2	8	0.23	22	33	0.94
3	1	0.03	2	34	0.97
4	1	0.03	2	35	1.0

Tabla 7.1 Frecuencia de resultados pretest A.

Se puede observar que los resultados no fueron muy satisfactorios, lo cual también lo afirma la siguiente gráfica.

Gráfico general del pretest A.



El gráfico anterior muestra los porcentajes alcanzados por los estudiantes en cada una de las preguntas acertadas. Así el 17% de los encuestados no contestaron ninguna pregunta acertadamente, el 54% de los encuestados contestaron sólo una pregunta acertada, el 22% contestaron dos preguntas acertadas y sólo el 2% de los encuestados contestaron tres y cuatro preguntas acertadas. Esto muestra la gran dificultad que tienen los estudiantes para comprender y usar los conceptos físicos y sus relaciones en la comprensión y explicación de situaciones problemáticas.

7.2 Análisis de resultados del pretest B

A continuación se describen y analizan las respuestas de los estudiantes de las situaciones problemáticas I y IV correspondientes al pretest B, sobre fenómenos térmicos. El análisis de la situación problemática I se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto relacionado

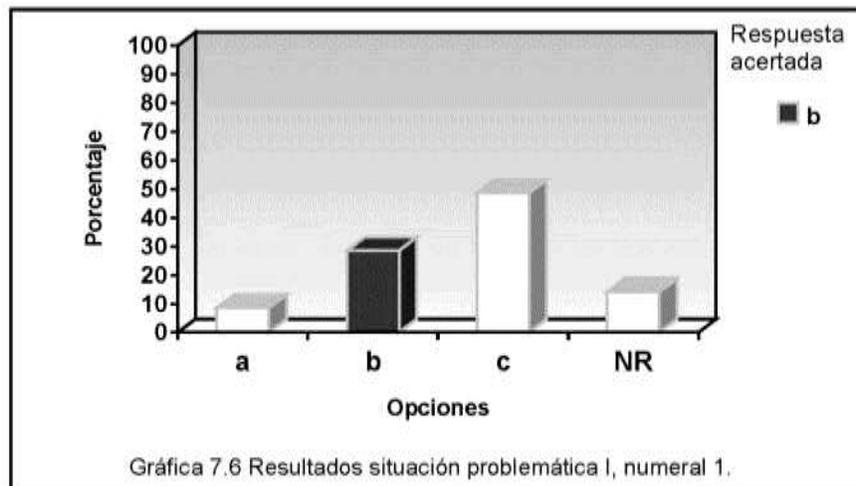
con la matematización de situaciones físicas a través del uso de representaciones; el análisis de la situación problemática IV, por su parte, se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto relacionado con la comprensión y análisis de los fenómenos físicos.

Las respuestas de los estudiantes a la situación I, numeral 1 (ver recuadro), se muestran a continuación:

Considere que en dos recipientes idénticos A y B se vierte cantidades de agua a temperatura inicial de 0°C . Los recipientes se calientan en dos estufas idénticas de tal modo que ambas cantidades de agua adquieren una misma temperatura de T_f .

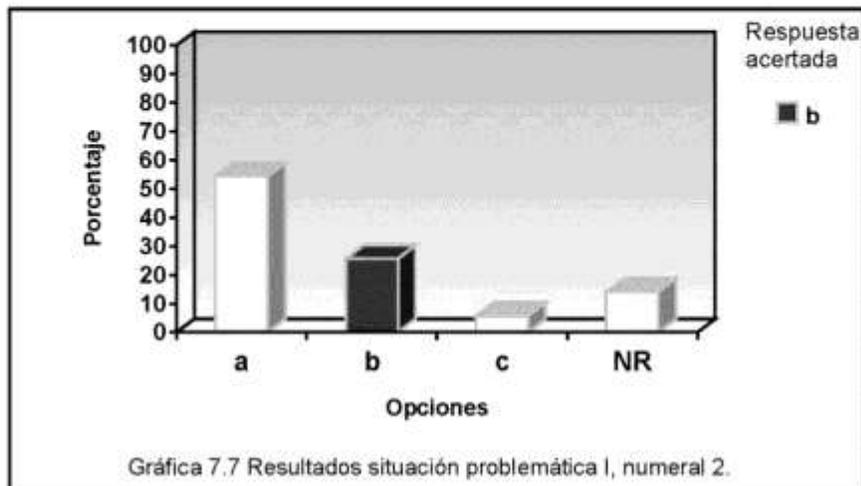
1. Si la cantidad de agua en A es mayor que en B, las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:
 - a) $Q_A = Q_B$
 - b) $Q_A > Q_B$
 - c) $Q_A < Q_B$
2. Si la cantidad de agua en B es el triple que el de A, las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:
 - a) $Q_A = 3Q_B$
 - b) $Q_A = 1/3Q_B$
 - c) $Q_A = Q_B$
3. Si la cantidad de agua en A es el doble que en B y la temperatura final de A es 30°C y de B es 90°C , las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:
 - a) $Q_A = 1/3Q_B$
 - b) $Q_A = 2/3Q_B$
 - c) $Q_A = 3/2Q_B$

Figura 7.3 Situación problemática I, pretest sobre fenómenos térmicos.



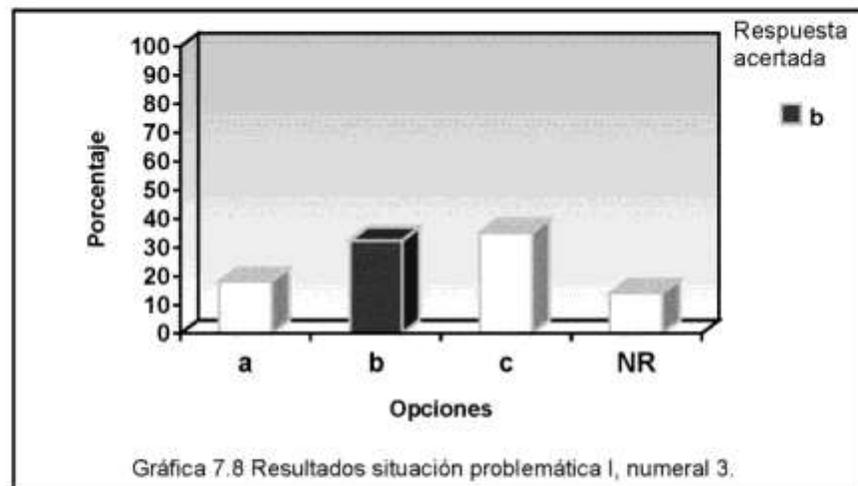
A partir de estos resultados se puede afirmar que los estudiantes que responden la opción a (8.6% de los encuestados) y la opción c (48.6% de los encuestados) identifican la cantidad de calor como propiedad variable pero no establecen comparaciones adecuadas entre las relaciones que pueden tomar las propiedades en consideración: masa y cantidad de calor. Por el contrario, los estudiantes que eligen la opción b (28.6% de los encuestados) establecen comparaciones entre las variables identificadas: masa y cantidad de calor, lo que indica que estos estudiantes determinan cómo cambia una variable respecto a otra a través del establecimiento de relaciones de orden entre dichas variables. Respecto a los estudiantes que no responden (NR: 14.2% de los encuestados), puede considerarse que no están familiarizados con el uso de representaciones simbólicas como medio para identificar variables y sus cambios.

Las respuestas de los estudiantes a la situación I, numeral 2 (ver recuadro), se muestran a continuación:



Estos resultados inducen a considerar que la mayoría de los encuestados (54.3% en la opción a y 5.8% en la opción c) no establecen relaciones de proporcionalidad adecuadas entre la masa y la cantidad de calor, hecho que implica que no reconocen procedimientos para la cuantificación de la cantidad de calor transmitida. Este grupo de estudiantes es consistente con las respuestas dadas en el numeral 1 ya que consideran que a mayor cantidad de agua, se requiere menor cantidad de calor para que adquiera una temperatura final T_f , lo cual implica que el calor y la masa guardan una relación inversamente proporcional. Sólo un 25.7% de los encuestados (opción b) establecen relaciones de proporcionalidad adecuadas entre la masa y la cantidad de calor. Al igual que en el numeral anterior, de los estudiantes que no responden (NR: 14.2% de los encuestados), puede considerarse que no están familiarizados con el uso de representaciones simbólicas como medio para establecer relaciones y cuantificar variables.

Las respuestas de los estudiantes a la situación I, numeral 3 (ver recuadro), se muestran a continuación:



De la misma forma que para el numeral anterior, el 53.4% de los encuestados (18.2% para la opción a) 35.2% para la opción c) no establecen comparaciones adecuadas entre las variables identificadas, lo cual indica que no determinan cómo cambia una variable respecto a otra. Los que eligen la opción b (32.4% de los encuestados), sí establecen relaciones de proporcionalidad adecuadas entre la masa y la cantidad de calor, hecho que implica que pueden estar reconociendo procedimientos para la cuantificación de la cantidad de calor transmitida. De los estudiantes que no responden (NR: 14.2% de los encuestados) puede considerarse que no están familiarizados con el uso de representaciones como medio para establecer relaciones entre variables.

El análisis de la situación problemática IV se llevará a cabo teniendo en cuenta el aspecto

Se tiene dos recipientes idénticos A y B tales que el primero contiene la mitad de agua que el segundo. Considere los siguientes dos casos:

1. El agua contenida en A está a una temperatura de 0°C , mientras que B está a una temperatura de 100°C .
2. El agua contenida en A está a una temperatura de 100°C y la contenida en B está a una temperatura de 0°C .

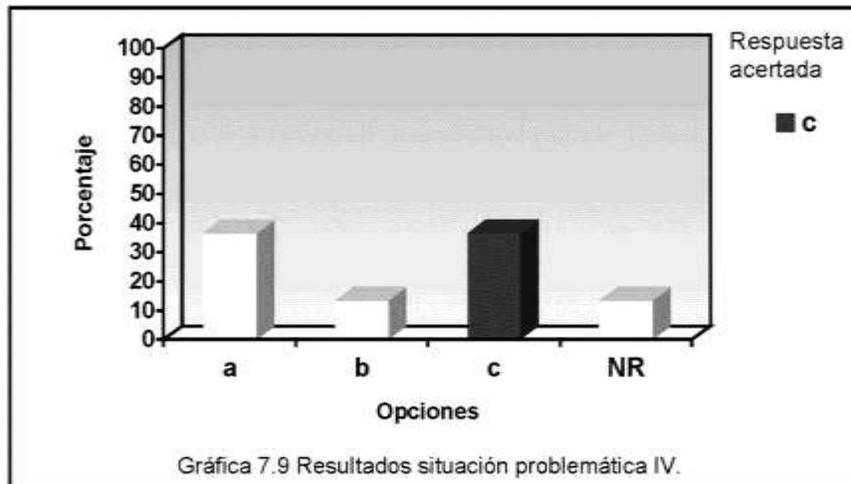
Si en los dos casos el agua contenida en A y en B se mezclan, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? Explique

- a) La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de B (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
- b) La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de A (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
- c) El cambio de temperatura del agua contenida en B ($T_f - T_i$) es el mismo en los dos casos (1 y 2).

Figura 7.4 Situación problemática IV, pretest sobre fenómenos térmicos.

relacionado con la comprensión y análisis de los fenómenos físicos.

Las respuestas de los estudiantes a la situación problemática IV (ver recuadro), se muestran a continuación:



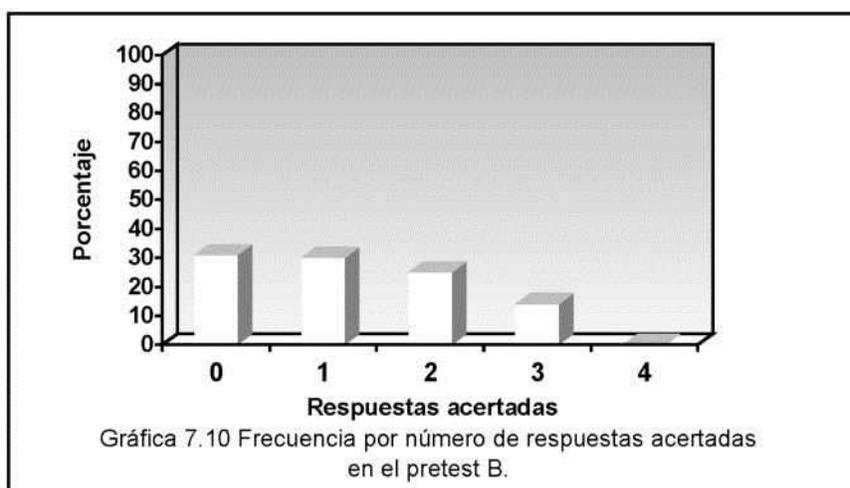
A partir de estos resultados se puede afirmar que el 50% de los encuestados (36.5% para la opción a y 13.5% para la opción b) presentan dificultades tanto en la identificación de la temperatura como variable intensiva como en la utilización de este concepto en la construcción de explicaciones a situaciones problemáticas térmicas. Por el contrario, los estudiantes que eligen la opción c (36.5% de los encuestados) identifican la temperatura como una variable intensiva y muestran su utilización en el análisis de situaciones térmicas. Respecto a los estudiantes que no responden (NR:13.5% de los encuestados), por su parte, se puede afirmar que no están familiarizados con la actividad de realizar explicaciones a situaciones problemáticas, característico en la ciencia.

Tabla de frecuencia para el Pretest B

Total de preguntas acertadas	Frecuencia (N° de estudiantes)	Frecuencia relativa	Porcentaje	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
0	11	0.32	32	11	0.17
1	10	0.28	28	21	0.60
2	9	0.26	26	30	0.86
3	5	0.14	14	35	1.00
4	0	0.00	0	35	1.00

Tabla 7.2 Frecuencia de resultados pretest B.

Gráfico general del pretest Fenómenos térmicos



El gráfico anterior muestra los porcentajes alcanzados por los estudiantes en cada una de las preguntas acertadas. Así el 32% de los encuestados no contestaron ninguna pregunta acertadamente, el 28% de los encuestados contestaron sólo una pregunta acertada, el 26% contestaron dos preguntas acertadas y sólo el 14% de los encuestados contestaron tres preguntas acertadas. Esto muestra la gran dificultad que tienen los estudiantes para establecer relaciones de orden y proporcionalidad entre las variables físicas en estudio y la poca capacidad para matematizar situaciones a través del uso de representaciones adecuadas.

7.3 Análisis comparativo pretest-postest

De la misma forma que se procedió en el análisis de los pretest A y B, el análisis comparativo de los pretest respecto al postest se llevará a cabo según las variables identificadas: la matematización de situaciones físicas a través del uso de representaciones, operacionalizada en términos de la capacidad para identificar y definir variables, la capacidad para determinar relaciones entre variables y capacidad para establecer procedimientos de cuantificación; y la comprensión y análisis de fenómenos físicos,

operacionalizada en términos de la capacidad para usar e interpretar representaciones cartesianas, para diferenciar magnitudes físicas y la capacidad para aplicar los conceptos físicos y sus relaciones en la construcción de explicaciones a situaciones problemáticas.

7.3.1 Matemización de situaciones físicas a través del uso de representaciones

Teniendo como base los análisis conceptuales adelantados a propósito de los procesos de matemización de los fenómenos físicos, para la exploración de este aspecto se conformaron tres niveles de formalización a saber:

Nivel 1. Se identifican propiedades físicas como variables.

Nivel 2. Se establecen comparaciones entre variables identificadas

Nivel 3. Se establecen procesos de cuantificación de las variables identificadas.

Cada uno de estos niveles se subdividió en dos subniveles según que el indicador correspondiente se satisficiera adecuadamente o no. De esta forma, los niveles conformados con sus descriptores e indicadores se enuncian a continuación:

NIVEL	DESCRIPTOR	INDICADORES
1	Se identifican propiedades físicas como variables	El estudiante establece relaciones de orden entre grados que pueden tomar individualmente las variables identificadas, pero tales ordenaciones no son adecuadas.
		El estudiante establece adecuadamente relaciones de orden entre los diversos grados que pueden tomar individualmente las variables identificadas.
2	Se establecen comparaciones entre variables identificadas	El estudiante establece de relaciones de orden entre variables identificadas pero no determina adecuadamente cómo cambia una variable respecto a otra.
		El estudiante determina adecuadamente cómo cambia una variable respecto a otra a través del establecimiento de relaciones de orden, entre variables identificadas.

3	Se establecen procesos de cuantificación de las variables identificadas	El estudiante establece relaciones de proporcionalidad entre las variables identificadas, pero estas relaciones no son adecuadas respecto a la interpretación física.
		El estudiante establece adecuadamente relaciones de proporcionalidad entre las variables identificadas.

Tabla 7.3 Niveles de Formalización para indagar la matematización de situaciones físicas

Las situaciones problemáticas que se tuvieron como referente para realizar la clasificación fueron las correspondientes a las situaciones IV de los Pretest A y B y las situación 2 del postest (ver recuadro).

Considere la siguiente situación: en una colina desciende un camión y una bicicleta: en la mitad de la colina hay un grupo de niños jugando, el conductor del camión no se ha dado cuenta de ello y la bicicleta no tiene frenos. Imagine que un super-héroe detuvo a ambos, salvando la vida de los niños. Las siguientes situaciones son posibles bajo ciertos supuestos. Al detenerlos:

Se tiene dos recipientes idénticos A y B tales que el primero tiene la mitad de agua que el segundo. Considere los siguientes dos casos:

a) El camión dio más dificultad.
 b) La bicicleta dio más dificultad.
 c) Los dos dieron la misma dificultad.

El agua contenida en A está a una temperatura de 0°C , mientras que B está a una temperatura de 100°C .
 Diga en cada caso cuáles son los supuestos y justifique matemáticamente cada situación.
 Si en los dos casos el agua contenida en A y en B se mezclan, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? Explique

a) La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de B (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
 b) La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de A (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
 c) El cambio de temperatura del agua contenida en B ($T_f - T_i$) es el mismo en los dos casos (1 y 2).

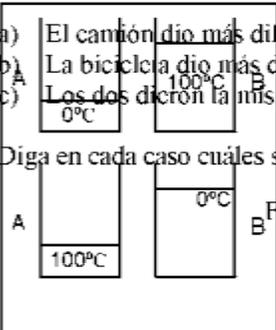


Figura 7.5 Situación problemática IV, pretest A.

Figura 7.6 Situación problemática IV, pretest B.

A un estudiante se le planteó la siguiente situación problemática:

Una esfera de masa m se deja deslizar desde una altura h sobre un plano inclinado AB. Una vez alcanza la horizontal la esfera choca frontalmente con otra de la misma masa m inicialmente en reposo, de tal forma que quedan unidas después del choque. Luego, las dos esferas continúan su movimiento y suben por un plano inclinado CD. Ambos planos inclinados y la superficie horizontal se encuentran libres de fricción. ¿Cuál es la altura que alcanzan las esferas después del choque?

El estudiante, para solucionar este problema, realiza el siguiente análisis:

El primer cuerpo, al deslizar por el plano inclinado AB, adquiere una velocidad que puede denotarse por v . Cuando este cuerpo choca con el otro de igual masa inicialmente en reposo, quedan unidos siendo la velocidad del conjunto $v/2$ ya que el primer cuerpo reduce un valor de velocidad igual al que el segundo cuerpo lo aumenta dado que las masas son iguales.

Después del choque se tiene, entonces, un cuerpo de masa $2m$ con una velocidad $v/2$. Dado que el cuerpo de masa m al descender por el plano AB adquiere una velocidad v , el cuerpo de masa $2m$ subirá por el plano CD hasta una altura $h/2$ dado que su velocidad es $v/2$.

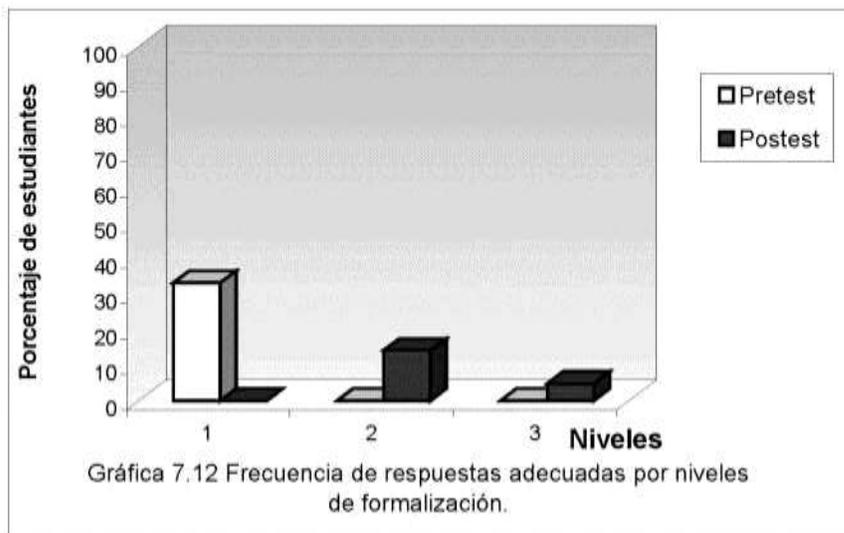
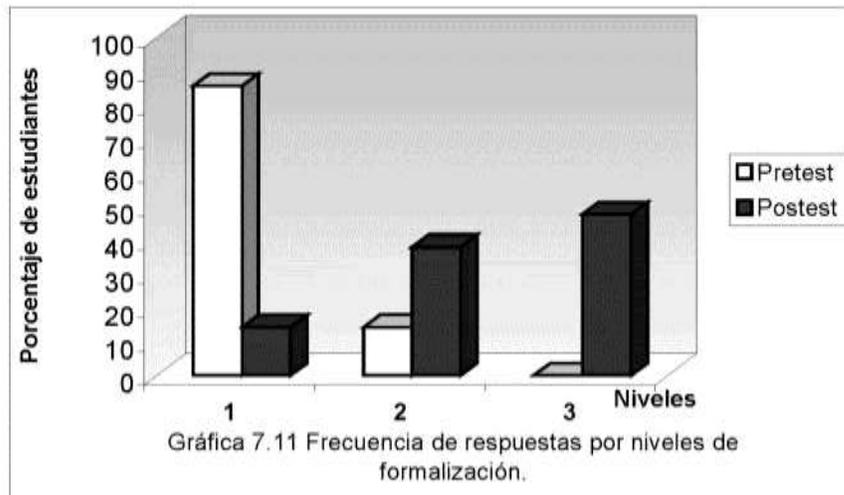
Luego que se evaluó la solución dada por el estudiante, se encontró que cometió errores en su análisis y la respuesta no es adecuada. Analice la argumentación hecha explicando claramente cuáles fueron los errores cometidos y cuál es la respuesta acertada.

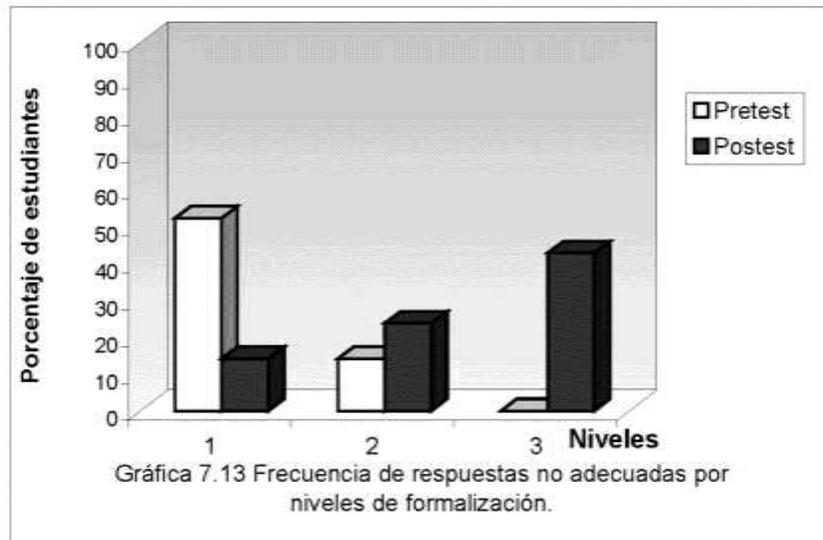
Considere que en dos recipientes A y B se tiene cantidades diferentes de la misma sustancia (agua, por ejemplo), a temperaturas iniciales de 20° y 80° respectivamente. La relación que debe haber entre las cantidades de las sustancias para que al mezclarse se obtenga una temperatura final de 60° es:

- a) $2M_A = 3M_B$
- b) $2M_A = M_B$
- c) $M_A = 2M_B$
- d) $3M_A = 2M_B$

Figura 7.8 Situación problemática 3 posttest.

En la gráfica 7.11 se presenta los resultados de la clasificación de las respuestas de los estudiantes según los niveles descritos. La gráfica 7.12 muestra la clasificación en los niveles cuando el indicador es satisfecho adecuadamente, mientras que la gráfica 7.13 muestra la clasificación en los niveles cuando el indicador se satisface no adecuadamente.





Los resultados generales muestran que mientras que las respuestas del pretest se ubican en los niveles 1 y 2, (85.7% y 14.2%, respectivamente), las respuestas del postest se ubican, principalmente, en los niveles 2 y 3 (38.0% y 47.7%, respectivamente). En el caso particular de las respuestas que satisfacen adecuadamente el indicador, los resultados muestran que en el pretest éstas se ubican solamente en el nivel 1 (33% de los encuestados), mientras que en el postest se ubican en el nivel 2 y 3 (14.2% y 4.8%, respectivamente). En el caso de las respuestas que satisfacen no-adequadamente el indicador, por su parte, los resultados muestran que en el pretest se ubican en el nivel 1 y 2 (52.4% y 14.2 %, respectivamente), mientras que en el postest se ubican principalmente en los niveles 2 y 3 (23.8% y 42.9%, respectivamente).

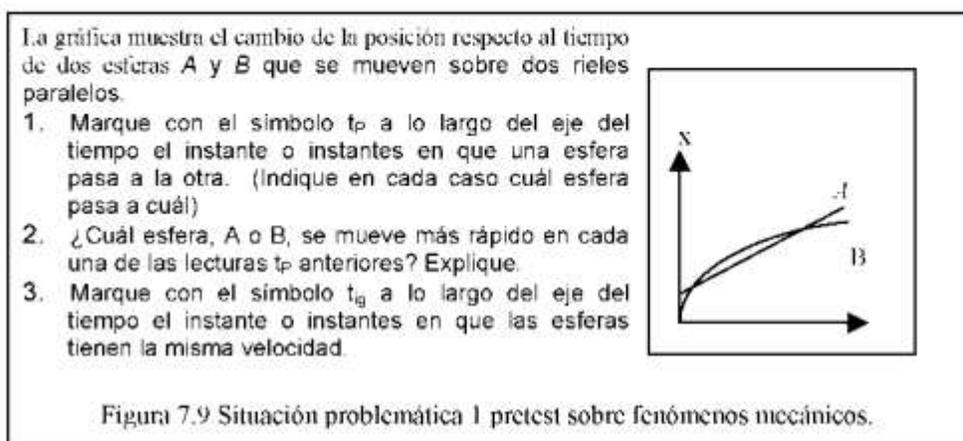
Estos resultados permiten afirmar que los talleres y metodologías diseñadas posibilitan desarrollar en los estudiantes estrategias que favorecen los procesos de matematización de los fenómenos físicos a través del uso de representaciones.

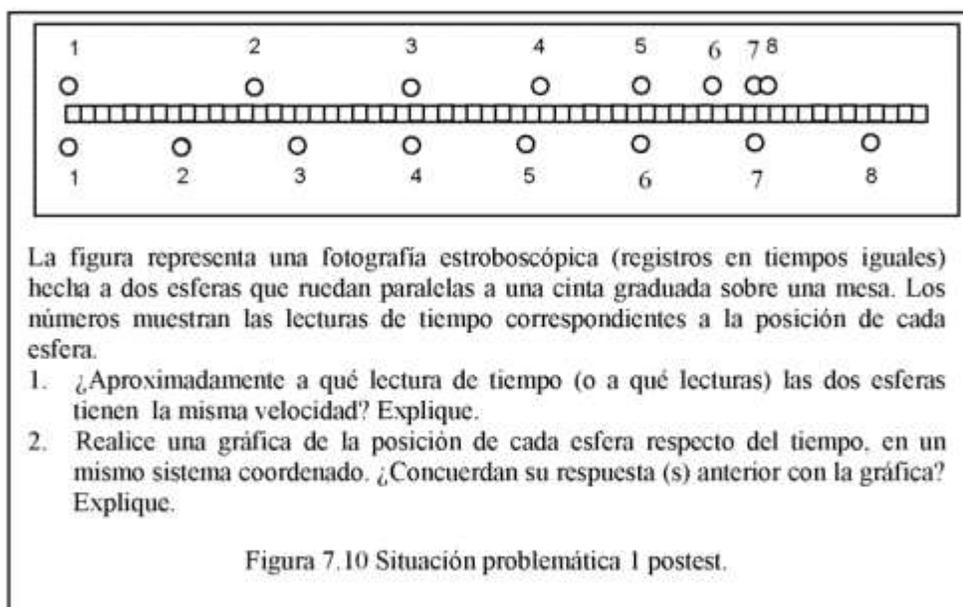
7.3.2 Comprensión y análisis de fenómenos físicos

7.3.2.1 Capacidad para usar e interpretar representaciones cartesianas para diferenciar magnitudes físicas

A través de este aspecto se quiere hacer énfasis en la importancia del uso e interpretación de las representaciones cartesianas para desarrollar estrategias de análisis y comprensión de los fenómenos físicos, en lo que respecta a la identificación y diferenciación de las magnitudes físicas relevantes y sus posibles relaciones. En particular, el análisis de este aspecto se realizó a propósito de la diferenciación de los conceptos de velocidad y posición, haciendo especial énfasis en la necesidad de conocer y comprender la semántica de los espacios de representación correspondientes (ver cap. 6).

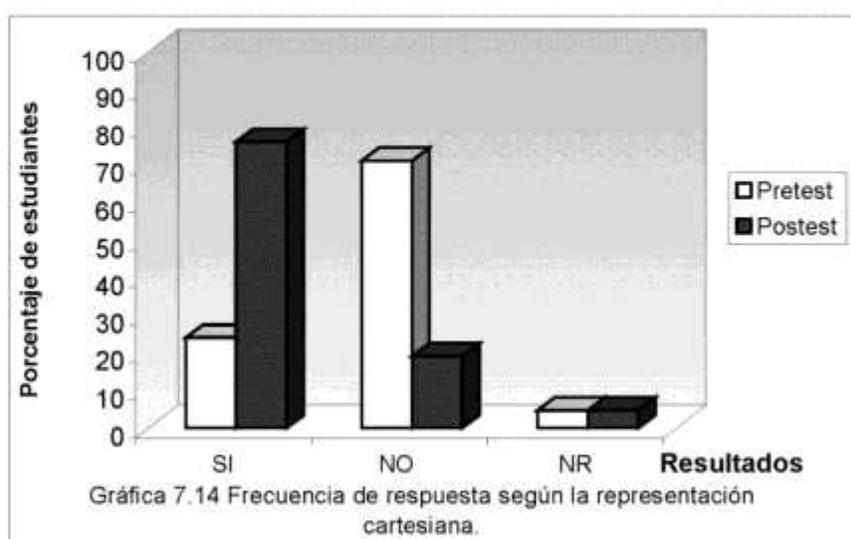
Las situaciones problemáticas que se tuvieron como referente para realizar este análisis fueron las correspondientes a las situación I (numerales 1 y 2) del pretest A y la situación I (numeral 2) del postest (ver recuadro).





Con el propósito de comparar las explicaciones de los estudiantes respecto a este aspecto se diseñó el siguiente indicador: el estudiante diferencia las variables velocidad y posición a través de la distinción de sus respectivos espacios de representación.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes respecto a este aspecto, por lo tanto, se procedió a analizar si tales respuestas satisfacían o no dicho indicador. En la gráfica 7.14 se presentan los resultados de la clasificación de las respuestas de los estudiantes según este indicador.



La gráfica muestra cómo inicialmente el 71.2% de los estudiantes no diferencian el concepto de velocidad del concepto de posición, mientras que, luego de la intervención didáctica, sólo el 19.1% de los estudiantes mantiene tal confusión.

Estos resultados permiten afirmar que las diferentes actividades propuestas en la intervención didáctica contribuyen a que los estudiantes usen e interpreten adecuadamente los espacios de representación para la velocidad y para la posición, aspecto que a su vez posibilita la diferenciación y comprensión de los conceptos de velocidad y posición.

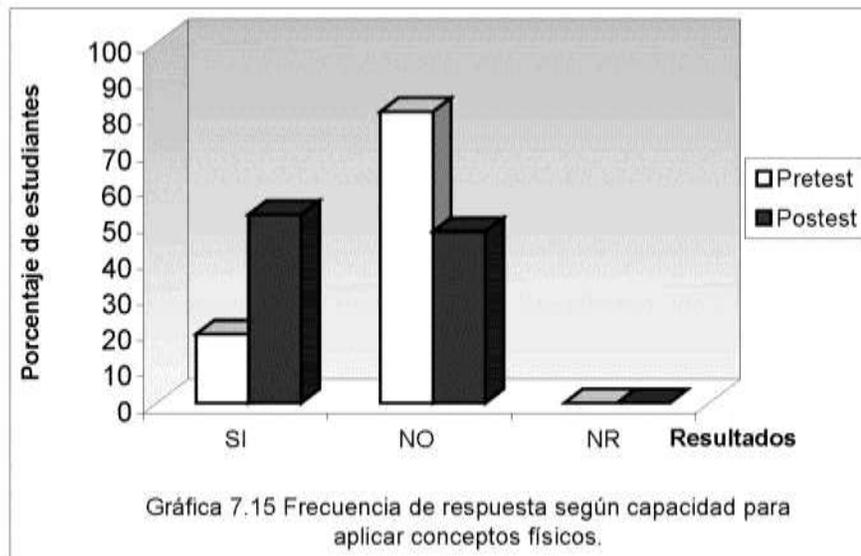
7.3.2.2 Capacidad para aplicar los conceptos físicos y sus relaciones en la construcción de argumentaciones

A través de este aspecto se quiere dar cuenta del nivel de conceptualización de los estudiantes en su intento de abordar situaciones problemáticas relacionadas con fenómenos físicos, prestando especial énfasis en la pertinencia de los conceptos físicos utilizados. El análisis de este aspecto se llevó a cabo a propósito de la significación y uso adecuado del concepto de velocidad instantánea como variable que describe el estado de movimiento de los cuerpos o sistemas.

Las situaciones problemáticas que se tuvieron como referente para realizar este análisis fueron las correspondientes a la situación I (numeral 3) del Pretest A y la situación I (numeral 1) del postest (ver recuadros anteriores).

Con el propósito de comparar las explicaciones de los estudiantes respecto a este aspecto se diseñó el siguiente indicador: el estudiante identifica la velocidad instantánea como variable que da cuenta tanto de las relaciones entre la posición y el tiempo como de la forma como éstas varían.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes respecto a este aspecto, se procedió a analizar si tales respuestas satisfacían o no dicho indicador. En la gráfica 7.15 se presentan los resultados de la clasificación de las respuestas de los estudiantes según este indicador.



La gráfica muestra que mientras que en el pretest sólo el 19.1% de los encuestados identifican la velocidad instantánea como variable que permite comparar diferentes relaciones espacio-temporales, después de la intervención didáctica un 52.4% de los encuestados identificaba adecuadamente esta variable.

Estos resultados permiten afirmar que los talleres y metodologías diseñadas favorecen en los estudiantes la construcción del concepto de velocidad instantánea y promueven su utilización adecuada como variable que permite comparar diferentes relaciones espacio-temporales y sus cambios.

CONCLUSIONES

Como síntesis de esta investigación se pueden resaltar algunos aspectos, dentro de los cuales se encuentran:

- El papel que juega la experimentación es de fundamental importancia en la enseñanza de la física. A través de un análisis de los procesos de cuantificación de magnitudes físicas como la velocidad instantánea y la temperatura, se ha mostrado que las prácticas experimentales se encuentran en estrecha relación con las construcciones conceptuales. Medir una magnitud física no es un problema meramente empírico relacionado con el uso de instrumentos para la obtención de datos; tampoco es un problema teórico relacionado con la asignación arbitraria de cifras a las propiedades y su posterior manipulación a través de algoritmos: se trata, ante todo, de un problema de *adecuación* entre las formas de razonamiento -como son el pensamiento numérico o el geométrico- y las fenomenologías identificadas en los respectivos procesos o transformaciones.
- Pueden diferenciarse dos clases de magnitudes físicas: las extensivas, caracterizadas por tener una estructura aditiva, y las intensivas, caracterizadas por carecer de tal estructura. Usualmente en enseñanza de la física y las matemáticas se hace énfasis en la identificación y cuantificación de las magnitudes extensivas (la longitud, el área, la masa, el tiempo, entre otras), mientras que las magnitudes intensivas (densidad, velocidad, temperatura, entre otras) son abordadas de la misma forma que las extensivas sin percatarse del hecho que obedecen a una estructura diferente; pero si el hecho de ser *magnitud* está estrechamente relacionado con la estructura de los números que sirven para representarla, es evidente que no es posible representar a las magnitudes intensivas por medio de los números racionales o reales. No obstante, si bien a las magnitudes intensivas no se les puede atribuir una estructura aditiva, si es posible atribuirseles una *lógica de las relaciones de orden*, hecha operativa a través de las fenomenologías

particulares donde tales magnitudes se hacen relevantes; es precisamente a través de este reconocimiento que es posible su cuantificación.

- En el proceso de formalización de los fenómenos mecánicos y térmicos, vía la cuantificación de magnitudes como la velocidad instantánea, la cantidad de movimiento, la temperatura y el calor, se pueden identificar tres pasos sucesivos y secuenciales: i) La identificación de propiedades físicas como variables, a través del establecimiento de relaciones de orden entre los diversos grados que pueden tomar individualmente las propiedades identificadas; ii) La realización de comparaciones entre variables, mediante el establecimiento de relaciones de orden entre ellas para determinar cómo cambia una variable respecto a otra, y iii) El establecimiento de procesos de cuantificación, por medio de la determinación de relaciones de proporcionalidad entre las variables identificadas y comparadas.
- A pesar de que existen varias clases de representaciones, la representación cartesiana se considera particularmente importante para desarrollar en los estudiantes los procesos de matematización de los fenómenos físicos. Iniciar a los estudiantes en esta clase de representación es importante por cuanto: i) Permite la diferenciación y visualización de las variables reconocidas a propósito de una interpretación física por medio de su representación a través de líneas sobre un plano; ii) Facilita la identificación de las relaciones de orden características de las magnitudes físicas, por medio de la comparación entre los segmentos de línea que representan los diversos valores que puede tomar una variable; iii) Favorece el establecimiento de relaciones entre las diferentes variables representadas vía el análisis, a partir de la representación misma, de cómo cambia una variable respecto a otra, y iv) Posibilita la comprensión del fenómeno físico a través de su formalización.
- Asumiendo que las ciencias, y en particular la física, son una *actividad* humana, la enseñanza de la física ha de propiciar la producción de conocimientos más que la repetición de los resultados. En este sentido, es necesario diseñar y poner en ejecución

CONCLUSIONES

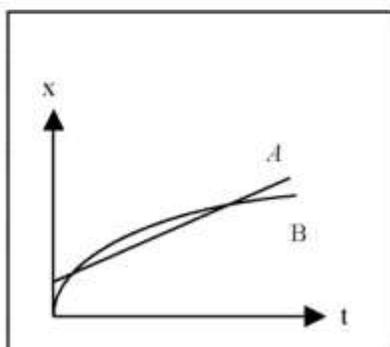
currículos, planes de estudio y, en particular, actividades de aula que generen condiciones para propiciar la organización de los fenómenos físicos por parte de los estudiantes. El enfoque por sistemas y variables favorece estos propósitos. Desde una perspectiva fenomenológica los sistemas y las variables más que ser los elementos constitutivos del mundo físico, son considerados como estrategias cognoscitivas, complementarias para organizar y formalizar el mundo físico: la identificación de variables, de relaciones entre variables y de estructuras de relaciones que permanecen en el espacio y/o en el tiempo es lo que posibilita la identificación y constitución de los sistemas. Desde esta perspectiva se pueden identificar cuatro estrategias para comprender y representar los procesos de cambio: las estrategias de análisis diferenciales e integrales, las estrategias de análisis por estados y transformaciones, las estrategias de análisis de cambio global y cambio variable y las estrategias de análisis de causalidad y relación. Estas estrategias permiten poner en evidencia el vínculo profundo que une las estructuras-base del conocimiento común y aquellas del conocimiento formalizado o científico.

Las estrategias didácticas diseñadas a partir de los análisis conceptuales adelantados propiciaron avances significativos en los estudiantes respecto a los procesos de matematización de los fenómenos físicos, en particular permitieron la construcción conceptual de los conceptos de velocidad instantánea y de temperatura como variables que dan cuenta del estado de movimiento y del estado térmico de un sistema, respectivamente, y abrieron un camino para la construcción de los conceptos de cantidad de movimiento y calor como variables de proceso; propiciaron, además, sus formas de determinación tanto teórica como experimental. De otra parte, facilitaron la identificación de las representaciones usuales, los procesos lógicos y las formas de razonamiento utilizadas por los estudiantes cuando intentan cuantificar las magnitudes físicas propuestas.

ANEXO. TALLERES DIDÁCTICOS

PRETEST A. Fenómenos Mecánicos

- I. La gráfica muestra el cambio de la posición respecto al tiempo de dos esferas A y B que se mueven sobre dos rieles paralelos.

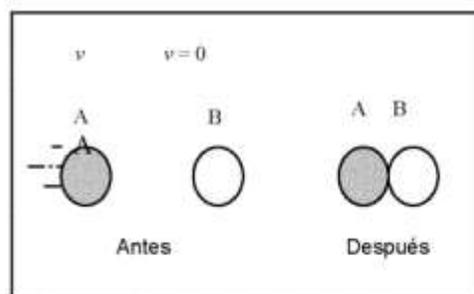


1. Marque con el símbolo t_p a lo largo del eje del tiempo el instante o instantes en que una esfera pasa a la otra. (Indique en cada caso cuál esfera pasa a cuál)

2. ¿Cuál esfera, A o B, se mueve más rápido en cada una de las lecturas t_p anteriores? Explique.

3. Marque con el símbolo t_{ig} a lo largo del eje del tiempo el instante o instantes en que las esferas tienen la misma velocidad.

- II. Suponga que una esfera A, que se mueve inicialmente con una velocidad v , choca frontalmente con otra inicialmente en reposo de forma que después del choque ambas esferas quedan unidas.



1. Si la esfera A tiene igual masa que B, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

- a) Mayor que v
 b) Menor que v
 c) Igual a v

2. Si A tiene mayor masa que B, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

- a) Mayor que v
 b) Menor que v , mayor que $v/2$
 c) Menor que v , pero menor que $v/2$

3. Si B tiene el triple de la masa que A, la velocidad de los cuerpos A y B después del choque es:

- a) Menor que v , mayor que $2v/3$
- b) Menor que $2v/3$, mayor que $v/3$
- c) Menor que $v/3$

III. Una piedra se deja caer desde el techo de un edificio de 10 pisos de alto y en el instante en que pasa por el quinto piso se deja caer una segunda piedra igual a la anterior. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- 1. La primera piedra llega primero al piso y con una velocidad mayor que la segunda.
- 2. La primera piedra toca el piso al mismo tiempo que la segunda piedra, pero la velocidad de la primera piedra es mayor que la segunda.
- 3. La primera piedra y la segunda piedra tocan el piso en el mismo instante y con la misma velocidad
- 4. La segunda piedra toca el piso antes que la primera piedra.

IV. Considere la siguiente situación: en una colina desciende un camión y una bicicleta; en la mitad de la colina hay un grupo de niños jugando, el conductor del camión no se ha dado cuenta de ello y la bicicleta no tiene frenos. Imagine que un super-héroe detuvo a ambos, salvando la vida de los niños. Las siguientes situaciones son posibles bajo ciertos supuestos. Al detenerlos:

- 1. El camión dio más dificultad
- 2. La bicicleta dio más dificultad
- 3. Los dos dieron la misma dificultad

Diga en cada caso cuáles son esos supuestos y justifique matemáticamente cada situación.

PRETEST B. Fenómenos Térmicos

I. Considere que en dos recipientes idénticos A y B se vierte cantidades de agua a temperatura inicial de 0°C . Los recipientes se calientan en dos estufas idénticas de tal modo que ambas cantidades de agua adquieren una misma temperatura de T_f .

1. Si la cantidad de agua en A es mayor que en B, las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:

- a) $Q_A = Q_B$
- b) $Q_A > Q_B$
- c) $Q_A < Q_B$

2. Si la cantidad de agua en B es el triple que el de A, las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:

- a) $Q_A = 3Q_B$
- b) $Q_A = 1/3Q_B$
- c) $Q_A = Q_B$

3. Si la cantidad de agua en A es el doble que en B y la temperatura final de A es 30°C y de B es 90°C , las cantidades de calor suministradas a los recipientes A y B son tales que:

- a) $Q_A = 1/3Q_B$
- b) $Q_A = 2/3Q_B$
- c) $Q_A = 3/2Q_B$

II. Una jarra con tres litros de agua se retira de una nevera después de permanecer allí mucho tiempo. Se vierten 2 litros de ésta en un recipiente de vidrio y el litro restante en otro recipiente de vidrio con iguales características al anterior. Se colocan los recipientes de en calentadores idénticos hasta que el agua ebulle. ¿Cuál de estas cantidades tarda más tiempo en ebulir? Explique.

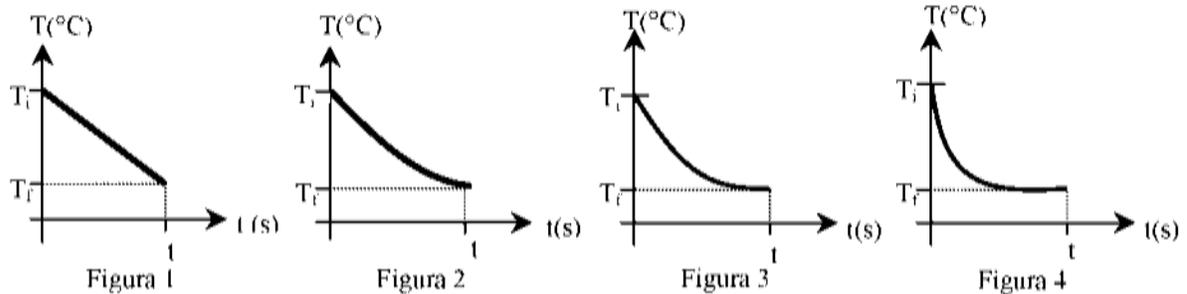
III. Tres litros de agua se colocan en un calentador hasta que alcanzan una temperatura T_i . Se vierte un primer litro de agua en un vaso de vidrio común, un segundo litro en un vaso de vidrio envuelto con una capa gruesa de material plástico y el tercer litro es colocado en un termo de alta calidad; los dos primeros recipientes abiertos y el tercero totalmente sellado. Luego los tres recipientes se colocan en una nevera hasta que alcanzan una temperatura T_f . La secuencia de gráficas que muestra el cambio

de temperatura en su respectivo orden de recipientes es:

- 1) Figuras 1,2,3 2) Figuras 1,4,3 3) Figuras 2,3,4 4) Figuras 4,3,2
 5) Ninguna de las anteriores.

IV. Se tiene dos recipientes idénticos A y B tales que el primero contiene la mitad de agua que el segundo. Considere los siguientes dos casos:

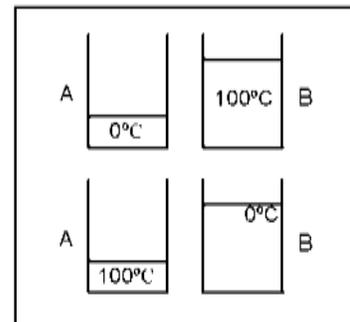
1. El agua contenida en A está a una temperatura de 0°C , mientras que B está a una temperatura de 100°C .



2. El agua contenida en A está a una temperatura de 100°C y la contenida en B está a una temperatura de 0°C .

Si en los dos casos el agua contenida en A y en B se mezclan, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a. La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de B (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
- b. La temperatura final de la mezcla (T_f) está más cercana a la temperatura inicial de A (T_i) en el caso 1 que en el caso 2.
- c. El cambio de temperatura del agua contenida en B ($T_f - T_i$) es el mismo en los dos casos (1 y 2).



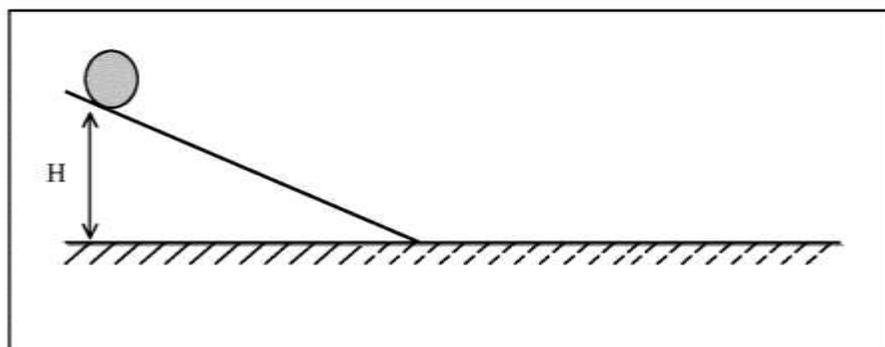
Explique: _____

TALLER No. 1 . Grados de velocidad

1. Proponga dos situaciones diferentes a través de las cuales se evidencie que dos cuerpos sean igualmente rápidos o igualmente lentos. Exponga las razones por las cuales se asegura tal igualdad.
2. Plantee las condiciones necesarias para garantizar que el grado de rapidez o lentitud de un cuerpo:
 - a. Aumente
 - b. Disminuya
 - c. Se mantenga

Explique por qué estas condiciones son adecuadas para tal fin.

3. Diseñe dos situaciones mediante las cuales se pueda reproducir el mismo grado de rapidez de un. Argumente su propuesta.
4. Usualmente se considera que una esfera que se deja deslizar sobre un plano inclinado (ver figura) aumenta su grado de rapidez a medida que desciende sobre el plano.



- a. Diseñe una experiencia mediante la que se evidencie tal cambio en el grado de rapidez.
- b. Describa el movimiento del cuerpo una alcanza la superficie horizontal.
- c. ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que el grado de rapidez alcanzado al final del plano inclinado no cambie?
- d. Considere que se deja deslizar el mismo cuerpo sobre un plano inclinado, desde alturas diferentes H_1, H_2, H_3, \dots . Ordene los diversos grados de rapidez alcanzados al final del plano inclinado. Presente los criterio desde los que adelantó tal organización.
- e. Represente gráficamente la ordenación propuesta.

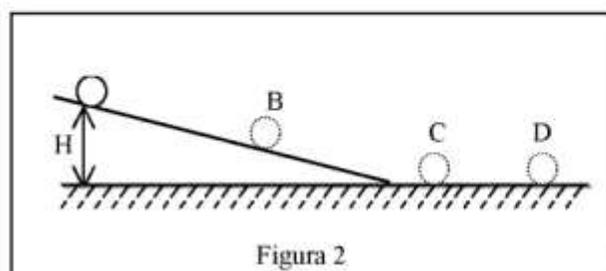
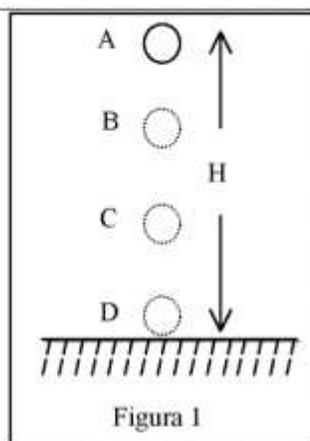
TALLER No. 2. Ordenación de grados de velocidad

Uno de los fenómenos más importantes en el estudio de la física es el *movimiento*. De hecho percibimos en nuestra vida cotidiana muchas clases de movimientos: cuerpos que caen, autos que aceleran o frenan, proyectiles lanzados hacia alguna dirección determinada, entre muchos otros. A pesar de esta diversidad de clases de movimientos es posible identificar algunas características comunes que nos permitirán empezar a analizar el movimiento: Por una parte, cuando nos referimos al movimiento de un cuerpo hablamos de qué tan *rápido* o *lento* se mueve dicho cuerpo. También percibimos que un mismo cuerpo en algunos momentos puede ser más rápido (o lento) que en otros: cuando un auto frena, está disminuyendo su rapidez hasta detenerse. En este sentido la idea de *grados de rapidez* (o lentitud) está directamente relacionada con el movimiento. Por otra parte, si se garantiza de alguna forma que no influyan acciones externas sobre un cuerpo, dicho cuerpo mantendrá su grado de rapidez. Por lo tanto, si el grado de rapidez de un cuerpo varía estamos seguros que es debido exclusivamente a acciones externas.

En particular, la guía anterior nos permitió establecer que cuando un cuerpo se deja caer o deslizar sobre un plano inclinado, aumenta progresivamente su grado de rapidez a medida que desciende; en este sentido podemos asegurar que si se aumenta (o disminuye) la altura de caída o de deslizamiento sobre el plano, el grado de rapidez del cuerpo cuando llega al piso será mayor (o menor) que cuando es soltado desde una altura menor (o mayor). Además, dos cuerpos que se dejan caer desde la misma altura estarán en el mismo grado de rapidez cuando alcancen el suelo; de manera similar cuando dos cuerpos se dejan deslizar desde la misma altura sobre un plano inclinado, tienen el mismo grado de rapidez al final del plano. En este contexto la rapidez es asumida como una propiedad del cuerpo, como un “estar” del cuerpo. Así, el cuerpo se caracteriza en un momento dado por “estar” con un grado particular de rapidez o lentitud.

Considere las dos situaciones siguientes:

- A. Desde un punto A ubicado a una altura H del piso se deja caer un cuerpo (figura 1)
- B. Otro cuerpo se deja caer desde la parte superior (A) de un plano inclinado de altura H, hasta que alcanza una superficie horizontal muy lisa. (figura 2).



1. Ordene, de menor a mayor, los valores del grado de rapidez que el cuerpo tiene en los puntos A, B, C y D indicados para cada una de las situaciones. Represente mediante segmentos cada uno de los valores de los grados de rapidez en correspondencia con su ordenación.
2. ¿Considera Ud. que en cada momento desde que se suelta el cuerpo, éste tiene algún valor de grado de rapidez? ¿Podrá el cuerpo tener valores diferentes de grado de rapidez en un mismo momento? Explique.
3. Si se representa el tiempo transcurrido para cada uno de estos movimientos por un segmento horizontal, identifique en cada segmento los momentos correspondientes a la posición A, B, C y D para cada situación. Ubique en cada uno de ellos los segmentos con los que representó los valores de los grados de rapidez para cada caso.

TALLER No. 3. Cuantificación de los grados de velocidad 1

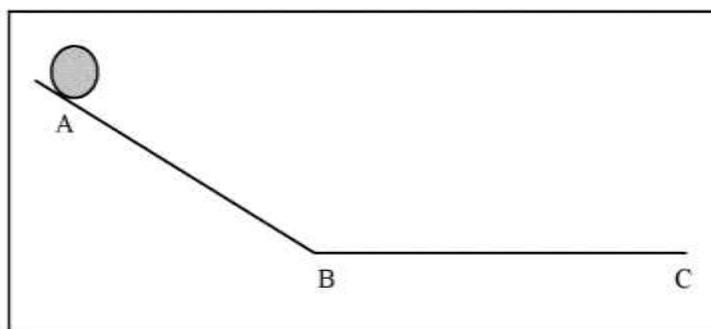
El *estado de movimiento* de un cuerpo, en un momento dado, se caracteriza por el valor del grado de rapidez que tenga el cuerpo en ese momento. Si dicho valor del grado de rapidez no cambia, se dice que el cuerpo permanece en su mismo estado; tal es el caso de un cuerpo en reposo. Por el contrario, si el valor del grado de rapidez de un cuerpo cambia, se dice que el cuerpo cambia de estado de movimiento; tal es el caso de un cuerpo en caída libre o un cuerpo que se desliza sobre un plano inclinado.

En el caso de la caída libre, se puede dar cuenta del movimiento del cuerpo a través del conjunto de valores del grado de rapidez que el cuerpo adquiere a lo largo de su caída. Cuando el cuerpo parte desde el reposo, dicho conjunto de valores se extiende desde el valor cero hasta el máximo valor de rapidez que alcanza, pasando por todos los valores intermedios. Por ésto, resulta adecuado representar el valor del grado de rapidez de un cuerpo en un momento dado a través de un segmento de longitud determinada. Así, el orden que se establezca entre los valores de las longitudes de los segmentos, corresponderá al orden percibido entre los valores de los grados de rapidez del cuerpo. Es claro que en este análisis el reposo se identifica como el grado cero de rapidez y se representará por un segmento de longitud cero.

A través de las situaciones presentadas a continuación se intenta establecer una estrategia para, dado un conjunto de valores del grado de rapidez, asegurar cuántas veces es uno mayor que los otros, es decir para avanzar en el proceso de cuantificación.

Considere la siguiente situación:

Un cuerpo que se deja deslizar sobre un plano inclinado AB, al llegar al plano horizontal BC, continúa su movimiento. Asuma para estos movimientos que sobre el cuerpo no influyen acciones externas tales como el rozamiento y la fricción.



1. Marque sobre el plano inclinado AB y sobre el plano horizontal BC la posición que el cuerpo tendrá en lapsos de tiempo iguales. Tenga en cuenta una unidad de tiempo adecuada para ubicar al menos cinco posiciones del cuerpo en cada plano.
2. Represente para cada movimiento (a lo largo del plano AB y a lo largo del plano BC) el tiempo por un segmento horizontal. Ubique para cada unidad de tiempo el segmento que representa la posición del cuerpo en ese momento (distancia respecto al punto A para el plano inclinado y respecto al punto B para el plano horizontal).

TALLER No. 4. Cuantificación de los grados de velocidad 2

- I. Haciendo uso del registrador de tiempo, deje que un cuerpo caiga libremente y obtenga en la cinta el registro de las distancias recorridas por el cuerpo en iguales lapsos de tiempo.
1. Complete en la siguiente tabla los valores de las posiciones (x) del cuerpo, a partir de la posición inicial, para cada tiempo (t).

t (unidad)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x (cms)											

2. Traslade los valores anteriores a una gráfica de posición (x) contra tiempo empleado (t) y señale en esta gráfica las distancias recorridas por el cuerpo en lapsos de tiempo igual. Represente en otra gráfica la posición (x) vs el cuadrado del tiempo empleado (t^2).
 3. ¿Qué relación puede establecer entre las variables representadas en los dos literales anteriores (B y C)? ¿Encuentra alguna expresión matemática que relacione la posición y el tiempo para este caso?
 4. Repita los procedimientos anteriores para un cuerpo de diferente masa.
- II. Sugiera un diseño experimental diferente al planteado para confirmar los hechos observados por Galileo en la caída de los cuerpos.

Lectura complementaria: La ley de la caída de los cuerpos. Fragmento tomado la obra *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* de Galileo Galilei.

Ley de la caída de los cuerpos

En 1604, Galileo Galilei escribe a Paolo Sarpi: “Reflexionando sobre los problemas del

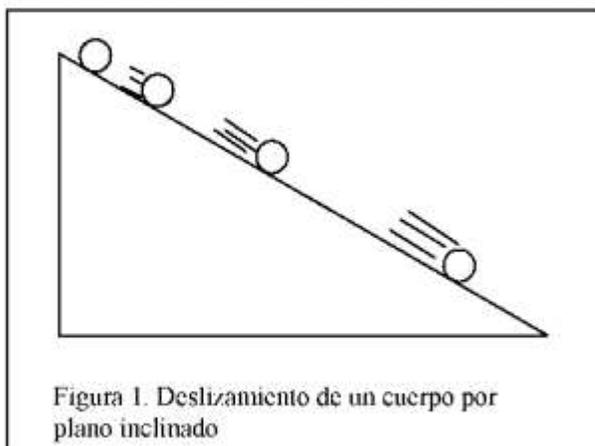


Figura 1. Deslizamiento de un cuerpo por plano inclinado

movimiento, para los cuales, y a fin de demostrar los accidentes por mi observados, me faltaba un principio totalmente indudable que pudiera poner como axioma, he llegado a una proposición que tiene mucho de natural y evidente; y, supuesta ésta, demuestro luego todo el resto, en especial que los espacios atravesados por el movimiento natural está en proporción doble del tiempo y que, por consiguiente, los espacios atravesados en tiempos iguales son como los números impares”.

La caída de un cuerpo sucede tan rápido que en los tiempos de Galileo no era posible estudiarla experimentalmente en detalle. Con el fin de establecer las relaciones matemáticas que rigen este movimiento, Galileo consideró esferas del mismo tamaño rodando por un plano inclinado, sobre el que se habían limado las irregularidades hasta el extremo de poder obviar el rozamiento (figura 1). Asumiendo, además, que entre más inclinado estuviese el plano más se aproximaría el movimiento de caída libre; esto sucede, entonces cuando el plano se encuentre en posición vertical. Galileo determinó la distancia recorrida en iguales intervalos de tiempo valiéndose de diversos instrumentos de medida –desde el pulso hasta péndulos simples, pasando por relojes de agua y metrónomos improvisados- y concluyó que si la distancia en el primer intervalo se toma como la unidad, las distancias para este y para los sucesivos intervalos de tiempo, iguales entre sí, correspondían a la sucesión:

1, 3, 5, 7, 9, etc.

Cuando Galileo inclinaba más el plano encontraba que las distancias recorridas en los intervalos respectivos eran mayores pero sus relaciones internas seguían siendo las mismas. Esto permitía sugerir que para el caso de la caída libre, es decir, cuando el plano se encontraba en posición vertical, las distancias deberían guardar las mismas relaciones. Con base en esto, las distancias recorridas desde el punto de partida deberían formar la sucesión: 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7,...etc. Es decir: 1, 4, 16, 25,...etc. Esto le permitió concluir que la distancia recorrida hasta el punto de partida debía ser directamente proporcional al tiempo al cuadrado. Galileo pretendía describir, no explicar la caída libre. Faltaba todavía un siglo de trabajo, hasta la aparición de la obra de Newton, para poder contar con una explicación satisfactoria del fenómeno.

Después de largos ensayos, Galileo dio con la solución que estaba buscando:

“Luego, puesto que veo la piedra que desciende de lo alto a partir del reposo adquiere constantemente nuevos incrementos de velocidad, ¿por qué no he de creer que esas condiciones se verifican de la manera más sencilla y obvia de todas?... Tú dirás: entonces la velocidad es la misma (uniforme). De ninguna manera. Es en efecto constante que la velocidad no sea la misma y que el movimiento no sea uniforme. Se debe, pues, buscar y plantear la identidad... no en la velocidad sino en el incremento de velocidad, es decir, en la aceleración. Que si lo examinamos atentamente no encontraremos ningún incremento más sencillo que el que se sobreañade siempre de la misma manera...”

De esa manera Galileo logró definir el movimiento de la caída de un cuerpo.
DEFINICIÓN:

“Llamo *movimiento uniforme, o igualmente acelerado*, al movimiento cuyos momentos o grados de velocidad aumentan, a partir del reposo, con el incremento mismo del tiempo a partir del primer instante del movimiento.”

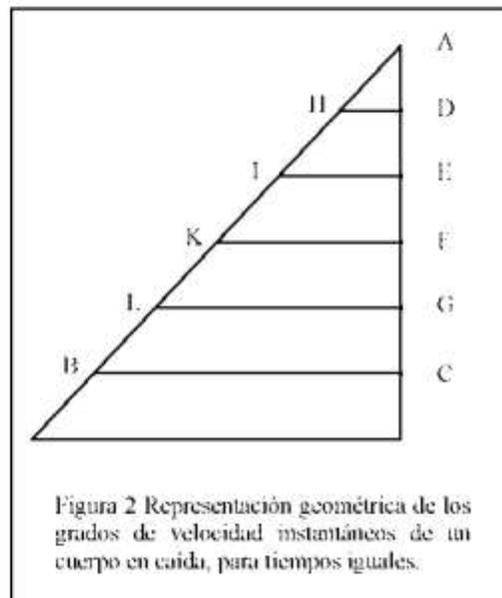
El paso siguiente consistía en deducir, a partir de esta suposición, las características de una caída libre para verificar, así, con la experiencia, la validez o conveniencia de la definición. Se debe, entonces, demostrar que:

1. La distancia recorrida desde el punto de partida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo.
2. Los desplazamientos en tiempos iguales siguen la sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, 9,... etc.

La demostración de Galileo está basada en la continuidad y uniformidad de la aceleración y pone en juego la noción nueva de velocidad instantánea. Galileo se expresa así en su *diálogo sobre dos nuevas ciencias*:

“En el movimiento acelerado, el incremento de velocidad es continuo y ... los grados de velocidad que cambian de un momento a otro... son infinitos; por ello podremos ilustrar mejor nuestra concepción dibujando un triángulo ABC, señalando en el lado AC tantas partes iguales como se quiera, AD, DE, EF, FG, etc., y trazando por los puntos D, E, F, G, etc., líneas rectas, paralelas a la base BC; seguidamente quiero que se imagine que las partes de la línea AC son tiempos iguales, y que el punto A es el estado de reposo, de donde parte el móvil que en el tiempo AD habrá adquirido un grado de velocidad DH; que en el siguiente tiempo la velocidad habrá crecido desde el grado DH hasta el grado EI y luego se hará mayor en los tiempos sucesivos según el incremento de las líneas FK, GL, etc. Ahora bien, como la aceleración se produce de manera continua de un momento a otro, y no a saltos, de una parte del tiempo a otra, y puesto que el término A se considera como el momento mínimo de velocidad, es decir, como el estado de reposo y como el primer instante del

tiempo subsecuente AD, está claro que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que hace en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por una infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, hay que imaginar una infinidad de líneas cada vez menores, trazadas desde los puntos infinitos de la línea AD, paralelamente a la línea DH, cuya infinidad de líneas representará finalmente la superficie del triángulo ADH. De este modo representaremos todo espacio atravesado por el móvil con un movimiento que comenzando en el reposo y acelerándose uniformemente, habrá consumido y se habrá servido de infinidad de grados de velocidad creciente, conforme a las líneas infinitas que, comenzando desde el punto A, están supuestamente trazadas en forma paralela a la línea HD, y a las líneas IE, KF, LG, y BC; y el movimiento podrá continuarse tanto como se desee...”

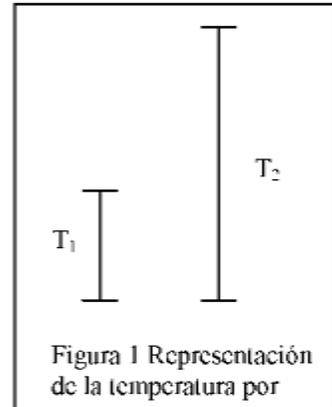


TALLER No. 5 . Grados de temperatura y su ordenación

1. A continuación se presenta una serie de objetos, cada uno de ellos en un *estado térmico* particular: el cuerpo humano, un litro de agua hirviendo, un trozo de madera al rojo, un pedazo de hielo fundiéndose, un litro de agua al medio ambiente, una lámina de hierro al medio ambiente, tres litros de agua hirviendo, medio litro de mercurio ebulviendo.
 - a. Ordénelos del más frío al más caliente, dando las razones por la cuales realiza usted tal organización.
 - b. Represente la ordenación hecha a través de segmentos, de manera que se pueda comparar los grados de calor (temperatura) de los objetos a partir de la longitud de los segmentos representados.
2. En el análisis del movimiento de los cuerpos se concluyó que un cuerpo en cada momento tiene que tener algún grado de rapidez y que en un momento dado tiene uno y sólo un grado de rapidez. ¿Considera Usted que puede afirmarse esto mismo para el caso de la temperatura? Explique.
3. Describa un procedimiento a través del cual se garantice que dos cuerpos diferentes tienen exactamente el mismo grado de calor (temperatura).
4. ¿Qué procedimientos se requiere para calentar un cuerpo? ¿Para enfriarlo? ¿Para que no varíe su condición térmica? Enuncie tres procedimientos para cada caso y explique por qué estos procedimientos sirven para tal efecto.

TALLER No. 6 . Cuantificación de los grados de temperatura 1

1. Considere que se ponen en contacto (o se mezclan) dos cantidades iguales de la misma sustancia (agua por ejemplo) a temperaturas iniciales diferentes T_1 y T_2 , ($T_1 < T_2$). Si sólo se permite la interacción entre ellas:



- ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio?
 - Si las temperaturas T_1 y T_2 se representan por dos segmentos como se indica en la figura 2, ¿cuál es la longitud del segmento que representaría la temperatura final de equilibrio? Explique.
2. Considere que se ponen en contacto (se mezclan) cantidades diferentes de sustancias de la misma clase a temperaturas iniciales diferentes, T_1 y T_2 . Si la cantidad de la primera sustancia es el doble de la cantidad de la segunda sustancia y si sólo se permite la interacción entre ellas:
- ¿La temperatura final de equilibrio está más cerca de la temperatura de la cantidad mayor o de la temperatura de la cantidad menor? Explique.
 - Encuentre una expresión general que de cuenta de la temperatura final de equilibrio.
 - Si las temperaturas T_1 y T_2 por segmentos de la misma forma que en el numeral 5, ¿cuál es el segmento que representaría la temperatura final de equilibrio? Explique.
3. Resuelva las preguntas del numeral anterior para
- $M_1 = 3M_2/2$
 - $M_1 = 3M_2/5$

TALLER No. 7. Cuantificación de los grados de temperatura 2

Construya dos (2) termómetros haciendo uso de tubos capilares con un bulbo en su extremo. Llénelos con diferentes sustancias tales como alcohol, mercurio o aceite de mazañilla.

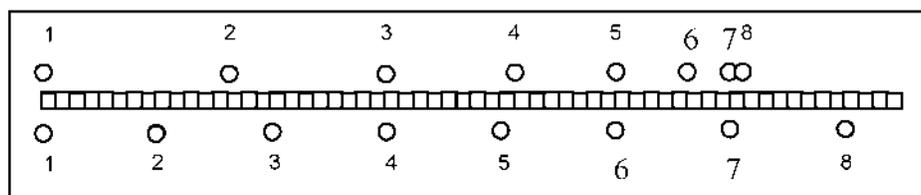
NOTA: Este procedimiento debe realizarse previamente a la sesión de laboratorio ya que puede ser largo y dispendioso. Los tubos se pueden mandar construir.

Proceda luego a calibrar los termómetros de la forma como se hace usualmente: se toman dos puntos fijos, hielo fundente y agua en ebullición, se marcan tales puntos fijos sobre el termómetro y luego se divide la distancia entre estas marcaciones en partes iguales. Finalmente se asignan valores numéricos a las divisiones así constituidas.

1. ¿Qué consideraciones debe hacer con relación a la dilatación de las sustancias para calibrar un termómetro haciendo uso del procedimiento anterior? ¿Cómo determinaría usted que los puntos de referencia son fijos sin aún no tiene el termómetro construido?
2. Realice mediciones de temperatura usando los diferentes termómetros. Compare las lecturas y explique los resultados obtenidos. En caso de obtener lecturas diferentes, ¿qué criterio usaría para determinar cuál de los tres termómetros es el mejor?

POSTEST . Fenómenos Mecánicos y Térmicos

1. La figura representa una fotografía estroboscópica (registros en tiempos iguales) hecha a dos esferas que ruedan paralelas a una cinta graduada sobre una mesa. Los números muestran las lecturas de tiempo correspondientes a la posición de cada esfera.



- a. ¿Aproximadamente a qué lectura de tiempo (o a qué lecturas) las dos esferas tienen la misma velocidad? Explique.
- b. Realice una gráfica de la posición de cada esfera respecto del tiempo, en un mismo sistema coordenado. ¿Concuerdan su respuesta (s) anterior con la gráfica? Explique.
2. A un estudiante se le planteó la siguiente situación problemática:

Una esfera de masa m se deja deslizar desde una altura h sobre un plano inclinado AB. Una vez alcanza la horizontal la esfera choca frontalmente con otra de la misma masa m inicialmente en reposo, de tal forma que quedan unidas después del choque. Luego, las dos esferas continúan su movimiento y suben por un plano inclinado CD. Ambos planos inclinados y la superficie horizontal se encuentran libres de fricción. ¿Cuál es la altura que alcanzan las esferas después del choque?

El estudiante, para solucionar este problema, realiza el siguiente análisis:

El primer cuerpo, al deslizarse por el plano inclinado AB, adquiere una velocidad que puede denotarse por v . Cuando este cuerpo choca con el otro de igual masa inicialmente en reposo, quedan unidos siendo la velocidad del conjunto $v/2$ ya que el primer cuerpo reduce un valor de velocidad igual al que el segundo cuerpo lo aumenta dado que las masas son iguales.

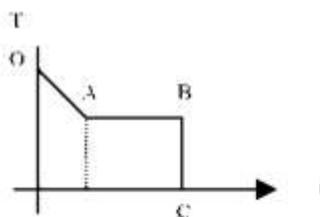
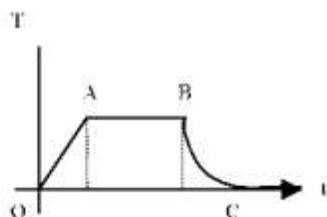
Después del choque se tiene, entonces, un cuerpo de masa $2m$ con una velocidad $v/2$. Dado que el cuerpo de masa m al descender por el plano AB adquiere una velocidad v , el cuerpo de masa $2m$ subirá por el plano CD hasta una altura $h/2$ dado que su velocidad es $v/2$.

Luego que se evaluó la solución dada por el estudiante, se encontró que cometió errores en su análisis y la respuesta no es adecuada. Analice la argumentación hecha explicando claramente cuáles fueron los errores cometidos y cuál es la respuesta acertada.

3. Considere que en dos recipientes A y B se tiene cantidades diferentes de la misma sustancia (agua, por ejemplo), a temperaturas iniciales de 20° y 80° respectivamente.

La relación que debe haber entre las cantidades de las sustancias para que al mezclarse se obtenga una temperatura final de 60° es:

- $2M_A = 3M_B$
 - $2M_A = M_B$
 - $M_A = 2M_B$
 - $3M_A = 2M_B$
4. Las gráficas muestran la forma como varía la temperatura T de un cuerpo con el tiempo t . Describa una situación física que corresponda a cada gráfica, haciendo explícito el proceso experimentado en los intervalos OA, AB y BC. En los casos donde no exista situación física que corresponda explique claramente por qué.



BIBLIOGRAFÍA

- ARONS, Arnold B. Teaching Introductory Physics. Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
- ARCÁ, M., GUIDONI, P. y MAZOLI, P.. Enseñar ciencia. Cómo empezar: reflexiones para una educación científica de base. Paidós Educador, Barcelona, 1990.
- BERTALANFFY, Ludwin von. Teoría general de los sistemas. Fundamentos, desarrollo y aplicaciones. Fondo de cultura económica, México, 1976.
- BRUNER, J.. Educación: puerta de la cultura. Ed. Visor Fotocomposición S.A. Madrid, 1997.
- CAMPBELL, Norman. Medición. 1921. En Newman, J. (Ed). Sigma: El mundo de las matemáticas, Tomo 5. Ediciones Grijalbo S.A., Barcelona, 1994.
- De la TORRE, A. Anotaciones a una lectura de Arquímedes. Editorial Universidad de Antioquia, 1997.
- DEFRESNE, R.J et al, Solving Physics Problems with Multiple Representations. The Physics Teacher, Vol. 35, may 1997, pp. 270-275.
- FALK de LOSADA, María. Introducción a la matemática contemporánea. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 1992.
- FERNÁNDEZ de TRONCONIZ, A. Análisis algebraico. Talleres Gráficos Ordorica, Bilbao, España.
- GALILEO. Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. Traducida por Javier Sabada. Introducción y notas por Carlos Solís. Editora Nacional, Madrid, 1981
- _____. El Ensayador. Ed. Sarpe, Madrid 1984.
- GIL PEREZ, D y Valdés Castro, P.. La resolución de problemas de Física: de los ejercicios de aplicación al tratamiento de situaciones problemáticas. Temas escogidos de didáctica de la Física, 1997.
- GRECA, I. M. y MOREIRA, M. A., Modelos mentales y aprendizaje de la física en electricidad y magnetismo. Enseñanza de las ciencias, 1998, Vol. 16, No. 2, pp. 289-303

BIBLIOGRAFÍA

- GRANÉS, J y BROMBERG, P., La difusión científica y la apropiación cultural de las ciencias. *Revista Naturaleza, educación y ciencia*, Universidad Nacional, Bogotá, No. 4, 1986.
- GUIDONI, P. & ARCÀ, M. *Guardare per sistemi, guardare per variabili*. Emme Edizioni, Torino, 1987.
- HALLOUN, I. Schematic Modelling for Meaningful Learning of Physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 1996, Vol. 33, No. 9, pp. 1019-1041.
- HEISENBERG, W.. *La imagen de la naturaleza en la física actual*. Ediciones Orbis S.A., Barcelona, 1985
- HEMPEL, C. G., Sobre la naturaleza de la verdad matemática. En Newman, J. (Ed), *Sigma: el mundo de las matemáticas*. Tomo 5.
- HERTZ, H.. *Principles of Mechanics*. Especialmente la Introducción, Dover Publications, 1956.
- KOYRÉ, Alexandre. *Estudios Galileanos*. Siglo XXI Editores, Madrid, 1981
- LESH, R.. *Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones*. *Enseñanza de las Ciencias*, 1997, Vol. 15, No. 3, pp. 377-391.
- LEVY-LEBLOND, J-M.. *Física y Matemáticas*. En Apéry, R et al, *Pensar la matemática*. Tusquets Editores, Barcelona, 1988.
- LINDER, C. J. y HILLHOUSE, G.. *Teaching by Conceptual Exploration*. *The Physics Teacher*, Vol. 34, Sept. 1996, pp. 332-338.
- MALAGON, J. F.. *La relación física y matemáticas en Galileo*. Tesis de Maestría en Docencia de la Física, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1988.
- MARTINEZ, J.. *¿Hacia una visión matemática de la física?* *Enseñanza de las Ciencias*, Vol.2, No. 1, 1984.
- MOCKUS, Antanas. *Representar y disponer*. Universidad Nacional de Colombia, Centro editorial. Bogotá, 1988.
- NEWTON, Isaac. *Una escala de grados de calor*. Tomado de Maggie, W. F. (Ed). *A Source Book in Physics*. Harvard University Press, Cambridge, 1969.
- PATY, M.. *Le caractere historique de l'adéquation des mathématiques a la physique*, 1994.
- RICO, L. et al. *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*.

BIBLIOGRAFÍA

Enseñanza de las Ciencias

- ROMERO, A. E.. La mecánica de Euler: ¿una mecánica del continuo? *Revista colombiana de física*, Vol. 2, 1995.
- ROMERO, A. E.. La mecánica euleriana: una mecánica del continuo. Tesis de grado Maestría en Docencia de la Física, U.P.N., 1996.
- ROSENQUIST, M.L. & MCDERMOTT, L.C. *A conceptual approach to teaching kinematics*. *Am. J. Phys.*, Vol. 55, No. 5, May 1987, pp. 407-415.
- SEARS, Francis W. & SALINGER, Gerhard L. *Termodinámica, teoría cinética y termodinámica estadística*. Editorial Reverté, Barcelona, 1978.
- TORRES, B. y AYALA, M. M.. La mecánica Analítica de Lagrange. *Física y Cultura: cuadernos sobre historia y enseñanza de las ciencias*, No. 3, 1996.
- TROWBRIDGE, D.E. & MCDERMOTT, L.C. Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension. *Am. J. Phys.*, Vol. 48, No. 12, Dec. 1980, pp. 1020-1028.
- VONDRACEK, M.. Teaching Physics with Math to Weak Math Students. *The Physics Teacher*, Vol. 37, Jan. 1999, pp. 32-33.
- WARTOFSKY, Marx. *Introducción a la filosofía de la ciencia*. Tomo I. Alianza Editorial, Madrid, 1973.

