



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

**ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN A SITUACIONES MULTIPLICATIVAS DESARROLLADAS
POR LOS ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA, A PARTIR DE LAS ACTIVIDADES
ORIENTADORAS DE ENSEÑANZA.**

LULLY RODRIGO ARRIETA QUINTERO

MANUELA CARDONA MOLINA

EVELIN JOHANA QUINTERO ALVAREZ

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803
FACULTAD DE EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2017

**ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE SITUACIONES MULTIPLICATIVAS
DESARROLLADAS POR LOS ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA, A
PARTIR DE LAS ACTIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSEÑANZA.**

**Trabajo presentado para optar al título de Licenciado(a) en Educación Básica con Énfasis
en Matemáticas**

LULLY RODRIGO ARRIETA QUINTERO

MANUELA CARDONA MOLINA

EVELIN JOHANA QUINTERO ALVAREZ

Asesora:

Olga Emilia Botero Hernández

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2017



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Agradecimientos

En el aurodo proceso de práctica pedagógica, la cual la posibilitó el desarrollo del presente proyecto de investigación, estuvieron presentes muchas personas que hicieron parte de este proceso, que de alguna manera aportaron su granito de arena.

Es por ello que queremos agradecer en primera instancia a Dios por darnos salud, paciencia y sabidurida para afrontar este reto; a nuestras familias que siempre estuvieron acompañándonos con una taza de café en las madrugadas, a los profesores que compartieron con nosotros sus conocimientos y experiencias, que con paciencia nos corrigieron y ayudaron a dar coherencia a nuestro trabajo, en especial a las profesoras Olga Botero, Mónica Parra y Luz Cristina; y por último pero no menos importante, queremos agradecer a la institución que por mas de un año y medio nos abrió las puertas a sus instalaciones y nos permitió vivir la experiencia de hacer parte del hermoso pero cahótico mundo de la educación, rodeado de retos,preocupaciones, satisfacciones y alegrías.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



Resumen

La investigación se desenvuelve a partir del enfoque cualitativo que posibilita analizar las estrategias de resolución que desarrollan los estudiantes de tercer grado a diferentes situaciones multiplicativas a través de la implementación de las Actividades Orientadoras de Enseñanza: *¡Viaje en el tiempo!* y *¡Planeación del viaje!*, a partir de la perspectiva histórico cultural del conocimiento.

En la investigación se identifica la problemática referente a la implementación del algoritmo convencional como estrategia inicial para la resolución a problemas aritméticos, lo que conlleva a preguntarse *¿Cuáles son las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes de tercero de primaria al enfrentarse a diferentes situaciones multiplicativas, a partir de la implementación de las Actividades Orientadoras de Enseñanza?* Para dar respuesta a este interrogante se realiza el estudio de casos con el grupo de estudiantes de tercero de primaria de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas.

Las diferentes representaciones y estrategias de resolución a los problemas multiplicativos se consideran para los investigadores como elementos que orientan el análisis, debido a que permite evidenciar la diversidad de procedimientos, que a se pueden clasificar en estrategias aditivas, estrategias multiplicativas y estrategias mixtas, en este sentido se refleja el desarrollo de las maneras de proceder de los estudiantes, al retomar conocimientos previos en consecuencia con



las relaciones que se presentan en los procesos de interacción con los demás estudiantes y con los docentes -investigadores.

El reconocimiento del estudiante como sujeto que se permea por su contexto, permite identificar sus maneras de actuar y pensar ante las situaciones desencadenadoras de aprendizaje que compone las Actividades Orientadoras de Enseñanza, que promueven a su vez la transformación en su pensamiento generada a partir de procesos de reflexión y diálogo.

Palabras clave: *Perspectiva histórico cultural del conocimiento, transformación del pensamiento, actividad de enseñanza, actividad de aprendizaje, problemas multiplicativos.*

Abstract

The research is developed from the qualitative approach that makes it possible to analyze the strategies of resolution that third graders develop to different multiplicative situations through the implementation of Teaching Activities: *¡Viaje en el tiempo!* and *¡Planeación del viaje!*, from the cultural historical perspective of knowledge.

First of all, the research identifies the problems related to the implementation of the conventional algorithm as an initial strategy for solving arithmetic problems, which leads to the reseraching question: *what are the resolution strategies used by students of third elementary school when facing different multiplicative situations, from the implementation of the Orienting Teaching Activities?*. In order to answer this question, the case study is carried out with the group



of students of third grade of Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas.

The different representations and strategies of resolution to the multiplicative problems are considered for the researcher as elements that orient the analysis, that allow the classification of additive strategies, multiplicative strategies and mixed strategies; that reflect the development of the way how students proceed when using previous knowledge in consequence with the relationships that are woven in the processes of interaction with the other students and with the teacher-researcher.

Hence, the recognition of the students as a subject permeated by their context, allows to identify their ways of acting and to think about the situations triggering learning that makes up the Orienting Teaching Activities, which in turn promote the transformation in their thinking from reflection and dialogue processes.

Key-words: *Cultural historical perspective of knowledge, thought transformation, teaching activity, learning activity, multiplicative problems.*



Contenido

Introducción	1
Contextualización	8
Formulación del Problema	10
Estado del Arte.....	17
Objetivos de la Investigación.....	24
Objetivo general	24
Objetivos específicos.....	24
Justificación	25
Marco Teórico.....	28
Teoría histórico cultural	28
Teoría de la Actividad.....	33
Actividad Orientadora de Enseñanza	36
Triada de la perspectiva histórico cultural.....	37
<i>Actividad de enseñanza.....</i>	<i>41</i>
<i>Actividad de aprendizaje.....</i>	<i>42</i>
Situaciones multiplicativas.....	44
Concepción de algoritmo	51
<i>Trabajo con los algoritmos en la escuela.....</i>	<i>54</i>
Desarrollo de estrategias de resolución.....	56
Estrategias de resolución a lo largo de la historia.....	59
<i>Desarrollo del algoritmo Egipcio.....</i>	<i>60</i>
<i>Desarrollo del algoritmo Hindú.....</i>	<i>64</i>
<i>Desarrollo del algoritmo convencional.....</i>	<i>69</i>
Metodología de Investigación.....	71
Recolección de información.....	74



Facultad de Educación

Actividad Orientadora de Enseñanza: <i>Viaje en el tiempo</i>	78
<i>El Sapu y las monedas legendarias</i>	83
<i>El misterio de la tumba</i>	86
Faraón en apuros	89
Actividad Orientadora de Enseñanza: <i>Planeación del viaje</i>	92
<i>Dinero a gastar</i>	96
<i>Menú a consumir</i>	97
<i>Itinerario a cumplir</i>	99
<i>Carta al coordinador</i>	101
¿Qué se desarrolla a partir de las AOE?	103
Clasificación de las estrategias de resolución	104
<i>Estrategias aditivas</i>	104
<i>Estrategias multiplicativas</i>	105
<i>Estrategias mixtas</i>	105
Representaciones de las estrategias	106
Estrategias de resolución de la AOE: <i>Viaje en el tiempo</i>	109
Estrategias de resolución de la AOE: <i>Planeación del Viaje</i>	122
Reflexiones a partir de la perspectiva histórico cultural	142
Relación del sujeto con el otro	145
<i>El papel del ambiente de aprendizaje</i>	149
<i>Transformación del sujeto</i>	153
Consideraciones Finales	156
Referencias Bibliográficas	162
Anexos	167
Anexo 1: Ejemplo de diario de campo de investigador.	167
Anexo 2: Diseño del sello y pasaporte. AOE Viaje en el tiempo y planeación un viaje.	168
.....	168



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Anexo 3: Tabla para el registro de puntos. Sapu de Oro. AOE Viaje en el Tiempo.....	168
Anexo 4: Tabla de registro de información. <i>La Vara del Faraón</i> . AOE <i>Viaje en el Tiempo</i> . ..	169
Anexo 5: Itinerario a seguir. AOE <i>Planeación del Viaje</i>	170
Anexo 6: Collage de fotografías de los momentos en el Jardín Botánico.....	171
Anexo 7: Formato solicitud de permiso a los acudientes o padres de familia de los estudiantes participes de la investigación.	172



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



Ilustraciones

Ilustración 1: Estrategia de resolución a problemas aritméticos, 11 de Febrero de 2016.	12
Ilustración 2 : AOE, relación entre la actividad de enseñanza y actividad de aprendizaje. Tomada de Moura et al (2010). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. Traducción propia.	43
Ilustración 3: Sistema de numeración egipcio.	61
Ilustración 4: Primer paso del algoritmo egipcio.	62
Ilustración 5: Segundo paso del algoritmo egipcio.	62
Ilustración 6: Tercer paso del algoritmo egipcio.	63
Ilustración 7: Último paso del algoritmo egipcio.	63
Ilustración 8: Sistema de numeración indoarábigo.	65
Ilustración 9: Primer algoritmo hindú.	65
Ilustración 10: Primer paso del algoritmo hindú.	67
Ilustración 11: Segundo paso del algoritmo hindú.	67
Ilustración 12: Cuarto paso del algoritmo hindú.	68
Ilustración 13: Simplificación del algoritmo convencional.	69
Ilustración 14: Situación del Sapu de Oro, AOE un Vieja en el Tiempo, 12 de Agosto de 2016. .	110
Ilustración 15: Estrategia aditiva. Sapu de Oro. AOE Viaje en el tiempo, 12 de Agosto de 2016.	111
Ilustración 16: Estrategia aditiva a partir de agrupación de cantidades. El Sapu y las monedas legendarias. AOE: Viaje en el tiempo, 12 de Agosto de 2016.	112
Ilustración 17: Estrategia aditiva a partir de la descomposición de cantidades. El Sapu y las monedas legendarias.	113
Ilustración 18: Estrategia aditiva. El misterio de la tumba. AOE: Viajar en el Tiempo, 24 de Agosto de 2016.	115
Ilustración 19: Estrategia mixta. El misterio de la tumba. AOE: Viajar en el Tiempo, 24 de Agosto de 2016.	116
Ilustración 20: Diálogo con los estudiantes. Faraón en apuros, AOE: Viaje en el Tiempo, 31 de Agosto de 2016.	119
Ilustración 21: Estrategia de resolución a apoyada en dibujos. Faraón en apuros. AOE Viaje en el tiempo, 31 de Agosto de 2016.	120
Ilustración 22: Combinación de accesorios del faraón. Faraón en apuros. AOE Viaje en el Tiempo, 31 de Agosto de 2016.	121
Ilustración 23: Diálogo de la situación dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de septiembre de 2016.	123
Ilustración 24: Estrategia aditiva. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre de 2016.	125



Ilustración 25: Estrategia aditiva. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre 2016. 126

Ilustración 26: Estrategia mixta. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre de 2016. 127

Ilustración 27: Representación verbal de estrategia multiplicativa. Itinerario a seguir. AOE Planeación del viaje, 5 de Octubre de 2016..... 130

Ilustración 28: Estrategia multiplicativa. Itinerario a seguir, AOE: Preparar el viaje, 5 de Octubre de 2016. 131

Ilustración 29: Estrategia de resolución multiplicativa y aditiva. Itinerario a seguir. AOE Planeación del viaje, 5 de Octubre de 2016..... 133

Ilustración 30: Representación gráfica de las combinaciones. Menú a consumir. AOE Planeación del viaje, 19 de Octubre de 2016. 135

Ilustración 31: Estrategia multiplicativa. Menú a consumir, AOE Planeación del viaje, 19 de octubre de 2016. 136

Ilustración 32: Momento de elaboración de la carta al coordinador. AOE Planeación del viaje, 24 de octubre de 2016..... 139

Ilustración 33. Carta al coordinador, registro escrito. AOE planeación del viaje, 24 de Octubre de 2016. 140

Ilustración 34: Dialogo acerca del dinero necesario para el transporte. AOE. Planeación del viaje, 28 de Septiembre del 2016. 146

Ilustración 35: Diálogo estudiantes-docente. Faraón en apuros. AOE: Viaje en el tiempo, 31 de Agosto del 2016..... 148

Ilustración 36: Diálogo acerca del transporte adecuado para el viaje. AOE. Planeación de un viaje, 28 de Septiembre del 2016. 151

Ilustración 37: Discusiones y propuestas de la alimentación saludable. AOE Planeación del viaje, 19 de Octubre de 2016..... 155

Tablas

Tabla 1: Triada de la perspectiva histórico cultural en la AOE. Elaboración propia. 37

Tabla 2: Relación entre las diversas clasificaciones de los problemas multiplicativos. Elaboración propia..... 49

Tabla 3: Características de la Actividad de Aprendizaje, AOE ¡Viaje en el tiempo!. Elaboración propia..... 80

Tabla 4: Características de la actividad de aprendizaje de la AOE: Planeación del viaje. Elaboración propia..... 94

Tabla 5: Clasificación de las estretagias y representaciones observadas, según el problema multiplicativo. Elaboración propia. 142



“Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y Sociales”

Guy Brosseau

Introducción

En vista de que la educación para los investigadores se concibe como un derecho que posibilita conservar y enriquecer la expresión, la libertad, el conocimiento, la exploración, el aprendizaje y la herencia cultural; los espacios escolares y aspectos institucionales que se vinculan a tal hecho deben contar con la adecuada metodología que permita que la libertad, la autonomía, el libre y respetuoso intercambio de pareceres, de intereses y conocimientos, se presenten de manera natural en los estudiantes como expresión de vida. Situación que invita a cuestionarse acerca de ¿cómo enfrentan las instituciones educativas tal desafío?

La investigación en el contexto educativo propicia reflexiones a partir de cuestiones que le son propias, como lo son las metodologías de enseñanza, el funcionamiento y adaptación curricular de las instituciones educativas y el reconocimiento de las diferentes maneras de aprendizaje que se presentan en el aula, lo que le permite al docente-investigador evidenciar las necesidades y problemáticas de la educación, comprendidas como el objeto de estudio que sugieren la adaptación o reestructuración de las prácticas pedagógicas equivalentes a las diversas interpretaciones de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En otras palabras, la investigación en educación es considerada como una práctica para acercar a los docentes a la visualización de



posibles respuestas a las necesidades latentes de la educación.

Es así como la presente investigación reconoce una problemática en el contexto escolar enfocada en la prácticas metodológicas que desarrolla el docente en el aula, las cuales priorizan la ejercitación de los algoritmos convencionales, que hace referencia al aprendizaje de las matemáticas a través de procesos memorísticos y mecánicos, al situar al estudiante en un rol pasivo como receptor de conocimiento en respuesta a la metodología implementada en el aula.

En este sentido se piensa en la importancia de involucrar al estudiante en una metodología que le permita reconocer la existencia de otras estrategias de resolución a situaciones multiplicativas diferentes a la implementación del algoritmo convencional y que a su vez rompan con la memorización y mecanización como principal objetivo de enseñanza; para esto se plantea la pregunta de investigación *¿Cuáles son las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes de tercero de primaria al enfrentarse a diferentes situaciones multiplicativas, a partir de la implementación de las Actividades Orientadoras de Enseñanza?*, que permite direccionar la investigación hacia el objetivo de analizar las estrategias de resolución a situaciones multiplicativas que desarrollan los estudiantes de tercero de primaria de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, a partir de las Actividades Orientadoras de Enseñanza para el reconocimiento y uso de diferentes estrategias que posibilitan la comprensión de la multiplicación.



Por otra parte, los documentos rectores¹ de la Educación Matemática proponen al estudiante como sujeto activo y participante de su aprendizaje, para el cual, se propone tener presente la implementación de situaciones en relación con el contexto cercano al estudiante, que promuevan el desarrollo de habilidades matemáticas; con relación a lo expuesto, el MEN (1998) expresa que:

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas (p. 24).

Al considerar la realidad de los estudiantes como un elemento complementario para las prácticas matemáticas que se desarrollan en aula, se reconoce para esta investigación la teoría histórico cultural, en la que el estudiante es visto como centro del aprendizaje, el cual, guiado por el docente logra identificar y analizar problemáticas provenientes de las necesidades inmersas en el contexto, con la finalidad de responder a las mismas, utiliza sus conocimientos y experiencias para desarrollar diferentes propuestas que sirvan como posibles soluciones a la problemática inicial. En esta perspectiva el conocimiento matemático trasciende la memorización de reglas y algoritmos, y se convierte en el proceso que permite dar respuesta a necesidades del hombre en su interpretación del mundo.

Las matemáticas se conciben entonces como el producto de la actividad humana, que se

¹ Al mencionar los documentos rectores de la Educación Matemática se hace referencia a: Estándares Básicos de Competencias y Lineamientos Curriculares de Matemáticas.



forma durante el desarrollo de resolución a problemas creados en las interacciones de la humanidad, al vivir en sociedad en determinado tiempo y contexto, tal y como lo expresan autores como Moura (2010). En consecuencia, la *actividad* posibilita el análisis del desarrollo humano, la cual se determina por las constantes interacciones sociales que vinculan la apropiación de la cultura con el trabajo colectivo.

Al centrar la concepción de la *actividad* en el campo de la educación y en la teoría histórico cultural se identifica la Actividad Orientadora de Enseñanza como una propuesta teórica y metodológica para la investigación, en la que se reconoce el trabajo del docente en la organización de la enseñanza y el papel que desempeña el estudiante en su proceso de aprendizaje, al desarrollar conocimientos en relación con su contexto y el trabajo colectivo; en este sentido se retoman los planteamientos de Leontiev (1978) en relación a la *actividad de enseñanza* y la *actividad de aprendizaje* que se direccionan a partir de necesidades, motivos, objetivos, acciones y operaciones tanto del docente como del estudiantes, movilizadas por situaciones desencadenadoras de aprendizaje.

En consecuencia con la perspectiva histórico cultural y los intereses de los documentos rectores de la Educación Matemática, se genera el cuestionamiento en relación con la problemática evidenciada en la enseñanza de las matemáticas durante el periodo de observación en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, el cual gira en torno a la identificación de estrategias de resolución a situaciones multiplicativas que desarrollan los



estudiantes de tercero de primaria a partir de una metodología diferente a la que se implementa en la insitución, como lo es, las Actividades Orientadoras de Enseñanza, para las cuales se retoman los tres problemas multiplicativos (relación proporcional entre dos espacios de medida, repetición de un único espacio de medida y composición cartesiana entre dos espacios de medida), que a partir de las consideración de autores como Maza (1991), Kamií (1995) e Itzcovich (2007), permiten el desarrollo de acciones y operaciones por parte del estudiante que posibilitan la comprensión unitaria y binaria de la multiplicación.

Con el fin de cumplir con los objetivos propuestos con relación a la problemática, se diseña la AOE *Un viaje en el tiempo*, la cual se constituye por situaciones que simulan problemáticas de algunas culturas históricas, desarrolladas a partir de diferentes momentos (momento histórico, fantástico y de aprendizaje). Las acciones de los estudiantes en las situaciones impulsan el desarrollo de la AOE *¡Prepáremos el viaje!*, al responder al interés de los estudiantes por la realización de un viaje real, lo que lleva a la discusión de situaciones que hacen parte del contexto de los estudiantes por medio de diferentes momentos (contextualización, propuestas y interacción).

Para la identificación de las estrategias de resolución que implementan los estudiante se tienen presentes diferentes herramientas que posibilitan la recolección de datos, como lo son: diarios de campo, entrevistas abiertas, registros fotográficos y audiovisuales; que posibilitan el análisis de los distintos registros y representaciones que utilizan los estudiantes para expresar sus ideas.



Es así como a partir de las cuestiones abordadas tanto en la teoría como en la metodología, se genera un análisis a partir del objeto matemático. En primer lugar para el análisis de las situaciones multiplicativas se plantean las categorías: estrategias aditivas, estrategias multiplicativas y estrategias mixtas, con relación a los tres problemas multiplicativos; además se generan algunas reflexiones a partir el enfoque histórico cultural que aluden a la relación del sujeto con el otro (estudiante-estudiante y estudiante-docente), la relación del sujeto con el contexto y la transformación de sujeto en la *Actividad de Enseñanza* y *Actividad de Aprendizaje*.

De manera general algunos de los resultados del análisis permiten concluir que la *Actividad Orientadora de Enseñanza* como metodología permite alejar a los estudiantes de procesos mecánicos y memorísticos al involucrarse en situaciones desencadenadoras de aprendizaje; situaciones que se relacionen con sus intereses y que permitan utilizar sus conocimientos previos y desarrollar ideas propias con relación a las diferentes discusiones y reflexiones que se generan con el otro, para permitir así la transformación del pensamiento de los sujetos con relación al objeto matemático.

Para dar cuenta de los componentes mencionados hasta el momento, la estructura del presente trabajo de investigación se genera con el planteamiento del problema, seguido de la pregunta de investigación, luego se propone el estado del arte que se genera a partir del objeto matemático discutido en el planteamiento del problema, de manera posterior se proponen los objetivos, seguido la justificación, luego se indagan algunas de las teorías que hacen referencia al



objeto matemático y a la perspectiva histórico cultural de la investigación, después se presenta la metodología de investigación, luego se abordan los análisis a partir de las categorías establecidas y las situaciones presentadas en las AOE, por último se presentan algunas consideraciones finales de la investigación y las referencias bibliográficas.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



Contextualización

La investigación comienza en la práctica pedagógica realizada en la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, ubicada en el municipio de Bello - Antioquia en la comuna seis del barrio Fontidueño. Sector de estratos socioeconómicos uno y dos; allí abundan madres adolescentes, familias con gran número de integrantes y familias monoparentales en las cuales subsisten tasas altas de desempleo, lo anterior permite el reconocimiento del contexto en el que está inmersa la población estudiantil, el cual se tiene en cuenta en la metodología de la investigación para el planteamiento de las situaciones desencadenadoras de aprendizaje.

La institución cuenta con cuatro secciones (Sección uno: Liceo Fontidueño Jaime Arango Rojas, sección dos: Escuela Urbana de niños Fontidueño, sección tres: Escuela Urbana de niñas Machado, sección cuatro: Escuela Urbana las Vegas), dos jornadas escolares y un modelo monodocente² en el primer ciclo de la Educación Primaria. La sección tres, lugar en el cual se desarrolla la práctica pedagógica cuenta con una planta física conformada por seis aulas, un aula de apoyo, una biblioteca, un restaurante, una oficina de directivos y un patio con zona de juegos.

Dentro de la filosofía institucional planteada en el PEI (Proyecto Educativo Institucional) se propone la educación como “proceso de formación permanente, personal, cultural, social y

²El modelo monodocente hace referencia a una enseñanza donde solo un docente es el encargado de trabajar todas las materias. Muy recurrente en las instituciones rurales y en la mayoría de colegios públicos en el primer ciclo de escolaridad, de preescolar a tercero de primaria.



laboral que concibe al hombre en forma integral, con sus deberes y derechos, su dignidad como persona y un deseo constante de cambio sobre el cual se cimentará el ideal” (IEFJAR, 2013, p.7). Así mismo, la institución pretende formar personas capaces de asumir con responsabilidad y autonomía sus deberes y derechos, con principios éticos y morales.

El modelo pedagógico propuesto por la institución se desarrolla en la perspectiva cognitiva, en la cual el aprendizaje se concibe como proceso de adquisición individual del conocimiento. De acuerdo con las condiciones personales de cada estudiante interviene el principio de la acción, la práctica del aprendizaje a través de la observación, la investigación, el trabajo y la resolución de situaciones problemáticas a partir de la concepción racional y científica; dentro del ámbito del currículo flexible e integral, la institución pretende que el aprendizaje se desarrolle partir de la organización y planificación de situaciones concernientes a la cotidianidad de los estudiantes, por tanto, se da prioridad al aprendizaje autónomo regido por el lema: *aprender a aprender*.

No obstante, en el plan de área de matemáticas de la institución se exponen causas por las que se señala la característica apatía por las matemáticas en los estudiantes, justificada a partir de falencias afectivas y económicas evidenciadas en el entorno familiar. Por consiguiente, en el plan de área se propone fomentar la metodología de enseñanza que tenga en cuenta las necesidades de los estudiantes y que reconozca sus valores y aspiraciones.

Con base a lo expuesto en los documentos rectores de la institución, se muestran las



observaciones realizadas por los investigadores en la práctica pedagógica, quienes en consecuencia a lo observado desarrollan el planteamiento del problema motivo de la presente investigación.

Formulación del Problema

En el inicio de la práctica pedagógica se observan características de las metodologías de enseñanza, de los contenidos abordados en las clases de matemáticas de la institución y las preguntas que realizan los estudiantes en los primeros grados de escolaridad.

En las clases de matemáticas se encuentra que los docentes transmiten la información de manera axiomática a partir de transcripciones y dictados, el estudiante se encarga de replicar de manera mecánica y memorística la información. Los contenidos son abordados por medio de la definición del concepto, seguido de la implementación de ejemplos y por último, el desarrollo de ejercicios relacionados con el concepto. Las expresiones y cuestionamientos realizados por los estudiantes en el aula son: *y de aquí ¿qué sigue?, yo no sé ¿me explica?, ¿Si está bien?, ¿Cómo hago esto?, no me acuerdo, ¡Me pierdo!, ¡No entiendo!*

Tales expresiones, reflejan las particularidades metodológicas frente a la concepción del aprendizaje expuesta en el modelo pedagógico de la institución, desarrollado a partir de la perspectiva cognitiva, la cual se centra en el correcto y adaptativo desarrollo de los procesos de



pensamiento para la adquisición del aprendizaje (adaptación, asimilación, acomodación y equilibración).

Se evidencia que la enseñanza de las Matemáticas en la Institución Educativa se trabaja a partir de la repetición de conceptos y procesos. Los estudiantes realizan ejercicios orientados hacia la mecanización del algoritmo convencional³ de las cuatro operaciones aritméticas y en consecuencia, la constante aplicación de dichos algoritmos se proyecta en el aula como única alternativa para generar soluciones a diferentes problemas, lo que en algunas ocasiones se torna una dificultad para los estudiantes.

La investigación se centra en el grado tercero de primaria, escenario en el que los niños comienzan a manifestar con incidencia considerable dificultades en la comprensión de las matemáticas. En el plan de área de la institución se reconoce que una de las temáticas planteadas para desarrollar en tercero de primaria son los problemas aritméticos, por lo cual, se plantean en el período de observación situaciones y ejercicios basados en la resolución de problemas aritméticos básicos, con el fin de identificar la manera en que los estudiantes les dan solución; estos problemas se caracterizan por tener un enunciado verbal que genera la necesidad de utilizar la operación aritmética para dar respuesta a la pregunta.

En el desarrollo de los ejercicios se observa que la realización de preguntas por parte de los

³ Se entiende los algoritmos convencionales como una representación canónica, que permite la resolución de problemas de manera estandarizada.

estudiantes se convierte en herramienta fundamental para el desarrollo de problemas aritméticos.

En la ilustración 1 se observa un ejemplo de un problema resuelto. En la búsqueda de la solución, los estudiantes suelen hacer preguntas como: *¿Dónde encuentro la respuesta?* *¿Qué debo hacer para resolverlo?* *¿Hago una suma o una resta?* A partir de los anteriores interrogantes y el procedimiento que se evidencia, se observa que los estudiantes acuden a buscar e implementación de algoritmos convencionales de la adición, sin embargo la manera de proceder no permite llegar a un resultado correcto.

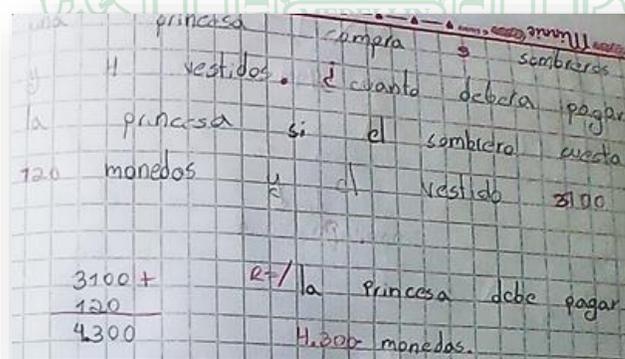


Ilustración 1: Estrategia de resolución a problemas aritméticos, 11 de Febrero de 2016.

En las estrategias de resolución que llevan a cabo los estudiantes se reconocen los algoritmos aditivos como únicas posibilidades y técnicas⁴ de resolución. Los estudiantes buscan números para adecuarlos a la estructura del algoritmo convencional, ya sea de la suma o de la resta y utilizan de manera arbitraria los pasos requeridos para obtener el resultado. En la ilustración 1 se

⁴Técnica comprendida como método, táctica, procedimiento para llevar acabo una acción.



observa cómo el estudiante no reconoce la situación multiplicativa presente en el problema, cuando se pregunta por la cantidad de dinero que se ha de pagar por los 3 sombreros y los 4 vestidos, el niño reconoce solo un espacio de medida comprendido por el dinero que cuesta un sólo vestido y un solo sombrero, los cuales son tomados para realizar el algoritmo de la suma. Cabe reconocer, que en la implementación del algoritmo, se observan errores procedimentales, como la inadecuada distribución de cifras y el desconocimiento del valor posicional.

En las primeras observaciones de las estrategias de resolución de los estudiantes, sobresale el uso de algoritmos convencionales como principal estrategia propuesta por el docente y desarrollada por los estudiantes para la resolución de problemas aritméticos, sin embargo, a partir de los documentos rectores de la Educación Matemática el objetivo del trabajo con los algoritmos pretende vincular la habilidad procedimental con la comprensión conceptual. Lenner (1994) señala que la enseñanza de las operaciones aritméticas debe vincular las estrategias propias de resolución, ya que:

Al dejar de lado las estrategias de resolución que ellos elaboran (refiriéndose a los estudiantes) a partir de la comprensión de la estructura lógica de los problemas, al imponerles formas de resolución preestablecidas, al no propiciar que ellos establezcan relaciones entre sus propias estrategias y los procedimientos convencionales se lleva a los niños a creer que lo que ellos piensan no es pertinente para resolver problemas matemáticos, y por tanto renuncian a su propio pensamiento (p. 136).

Al centrar el interés de la investigación en las maneras de proceder de los estudiantes a diferentes situaciones multiplicativas, se evidencia que los estudiantes no desarrollan razonamientos multiplicativos para dar solución a las situaciones mencionadas, debido a que la



enseñanza de la multiplicación se centra en la mecanización del algoritmo convencional, motivo por el cual no se presentan estrategias de resolución propias desarrolladas a partir de conocimientos y experiencias previas. En consecuencia, la metodología orientada al reconocimiento de las situaciones multiplicativas influye de manera directa en que la resolución de las mismas sea un proceso en el cual los estudiantes renuncien a sus propios pensamientos, debido a que se prioriza el trabajo con procedimientos convencionales alejados de la naturalidad del pensamiento de los estudiantes; conclusión que motiva a la investigación a proponer situaciones y experiencias que le permitan al estudiante desarrollar diversas estrategias de resolución a problemas multiplicativos, con el fin de que comprendan que existen diversas maneras de dar respuesta a dichas situaciones. Los investigadores reconocen por consiguiente, que tales estrategias posibilitan procedimientos alejados de dificultades que implican la memorización y el trabajo con el algoritmo convencional.

Identificar las diferentes estrategias y representaciones que desarrollen y implementen los estudiantes ante las situaciones multiplicativas, permite dar a conocer que existen diferentes maneras de dar solución a una situación, en la cual el estudiante pueda acudir a razonamientos propios o conocimientos previos que le posibiliten por sí solo llegar a un resultado, al considerar así la posibilidad de ver las matemáticas desde una postura crítica y útil para situaciones de su contexto.

Todo lo anterior genera diversos cuestionamientos preliminares para la investigación, entre



los cuales sobresale ¿Qué metodología puede implementar el docente para que los estudiantes desarrollen diferentes maneras de dar solución a situaciones multiplicativas? ¿Cómo se acercan los estudiantes a razonamientos multiplicativos? ¿Cómo incide en la comprensión del algoritmo convencional de la multiplicación el desarrollo de estrategias propias de resolución?

Al considerar los cuestionamientos planteados durante el proceso de observación, se reconoce un aspecto fundamental que guía la problemática de la investigación, centrada en la metodología implementada en el aula, que sitúa al estudiante en un rol pasivo y receptor de información. Es así como se propone las Actividades Orientadoras de Enseñanza, estrategia metodológica que posibilita involucrar de manera directa al estudiante en su proceso de aprendizaje, al tener presente las necesidades vivenciadas en el entorno social, en busca de generar una motivación a partir de sus gustos e intereses. En consecuencia a lo anterior, surge el cuestionamiento que guiará el desarrollo de la investigación:

¿Cuáles son las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes de tercero de primaria al enfrentarse a diferentes situaciones multiplicativas, a partir de la implementación de las Actividades Orientadoras de Enseñanza?

Como se evidencia en los planteamientos anteriores, la problemática en la cual se centra la investigación es de carácter empírico, debido a que se identifica a partir de las experiencias y observaciones de los investigadores en la práctica pedagógica, lo cual lleva de manera posterior al rastreo de investigaciones que posibilitaron identificar lo que se ha producido con relación al



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Educación

objeto matemático (situaciones multiplicativas).



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Estado del Arte

En el transcurso de los años se han presentado investigaciones como las de Canales (2006), Botero (2006), Echeverry (2013), entre otras que giran en torno a las realidades observadas en el aula referentes a las situaciones multiplicativas, de manera general se encuentra que las investigaciones se centran en diversos aspectos metodológicos y prácticos del trabajo con la multiplicación en el aula de clase, entre las cuales aparece la multiplicación entendida como la adición repetida de un mismo sumando, el proceso de enseñanza a partir de la mecanización de las tablas de multiplicar y el trabajo con el algoritmo convencional como estrategia de resolución a situaciones multiplicativas.

Al tener en cuenta los intereses de la investigación, se abordan distintas investigaciones encontradas a partir de dos clasificaciones. La primera alude a las diferentes metodologías implementadas por los investigadores al momento de desarrollar situaciones multiplicativas en el aula de clase. Dichas metodologías permiten observar las diferentes maneras en que los estudiantes proceden ante la resolución de situaciones multiplicativas. La segunda clasificación alude al reconocimiento de la historia para comprender los obstáculos epistemológicos atravesados por la humanidad para llegar a la unificación del conocimiento matemático. Las descripciones de los proyectos encontrados motivan ha indagar hacia lo que no se ha profundizado dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación.

A continuación se exponen investigaciones desarrolladas en la misma línea de interés de la



presente investigación; con ello se pretende reconocer los objetivos propuestos en cada proyecto para identificar los diferentes enfoques de investigación que se presentan a partir del planteamiento de situaciones multiplicativas, con el fin de identificar problemáticas en las que no se hayan profundizado hasta el momento, con la finalidad de aportar elementos nuevos en el campo de investigación en la Educación Matemática.

En primera instancia, se enfatiza en las tesis que analizan las diversas soluciones que los estudiantes pueden brindar al problema multiplicativo a partir de las metodologías empleadas por el investigador. Se encuentra la investigación realizada por Echeverry (2013) en la cual se presentan las estructuras multiplicativas a partir de la definición propuesta por Vergnaud (1983) que promueve la reflexión acerca del estudio de diversas situaciones didácticas que impulsen el aprendizaje de la estructura multiplicativa por medio de la resolución de problemas. Los estudiantes se enfrentan a problemas aritméticos verbales y utilizan métodos personales para resolverlos.

De la investigación de Echeverry (2013) cabe resaltar el reconocimiento de otros métodos de solución a problemas multiplicativos diferentes a la implementación del algoritmo convencional; sin embargo, es importante aclarar que la investigación no propone acercar a los estudiantes a utilizar estrategias propias para la resolución de problemas multiplicativos. En la misma línea, el trabajo realizado por López (2015) comprende los desempeños propios del razonamiento y su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático, dirigido al campo multiplicativo



articulado con la solución de situaciones problema en los estudiantes de grado 4° de Educación Básica Primaria. Así como en el proyecto de investigación de López (2015), la presente investigación aporta para la identificación de estrategias que puede surgir en el campo de las estructuras multiplicativas. En consecuencia, se generan reflexiones significativas encaminadas a comprender cómo los razonamientos influyen para el desarrollo del pensamiento matemático por parte del estudiante. Sin embargo en las investigaciones mencionadas no se retoma las Actividades Orientadoras de Enseñanza, lo que la hace diferente en cuanto a la metodología que se desarrolla.

Al interior de la investigaciones que buscan explorar otros procedimientos para la resolución de problemas multiplicativos se encontra la investigación realizada por Canales (2006), en ella se pretende reforzar el conocimiento de los algoritmos tradicionales de la multiplicación y la división a partir de la implementación de algoritmos alternativos propuestos por el docente. Es de resaltar de la mencionada investigación, el trabajo con algoritmos alternativos, ya que brinda la posibilidad de dar a conocer a los estudiantes otras maneras de resolución a problemas multiplicativos, que a su vez faciliten la comprensión en la apropiación de las situaciones a resolver y así favorecer la posibilidad el desarrollo de estrategias que completenten la compresion de los estudiantes.

Por otro lado, se reconocen diferencias como que en Canales (2006) se implementan los algoritmos alternativos como respuesta a la necesidad de reforzar el conocimiento, mientras que



en la presente investigación, las estrategias propias de resolución surgen como base en el planteamiento de la necesidad para crear y comprender una nueva temática, en este caso alusiva a la multiplicación. Otro punto de contrastación es que en Canales (2006) la investigación se desarrolla a partir de algoritmos alternativos propuestos por el docente, es decir, no se refuerzan o estimulan directamente los procedimientos que puede desarrollar el estudiante a partir de su inferencia. La presente investigación por su parte, analiza las estrategias propias de resolución con el fin de potenciar el razonamiento autónomo del estudiante para que logre identificar la necesidad de implementar el procedimiento que permita desarrollar diferentes situaciones multiplicativas.

Autores como Ramírez, Alzate, Pérez y Valencia (2012), abordan las estructuras multiplicativas planteadas a partir de los campos conceptuales de Vergnaud (1983) y la resolución de problemas multiplicativos. Recurren al juego educativo como alternativa didáctica para abordar los conceptos referentes a la multiplicación y la división. Proyecto que permite reflexionar a partir de cómo las estrategias didácticas que utiliza el docente pueden no solo cambiar las percepciones de los estudiantes frente las matemáticas, sino además fortalecer procesos de aprendizaje y potenciar altos niveles de comprensión, planteamiento que permite a los estudiantes apropiarse de las situaciones a resolver y crear sus propios métodos de razonamiento frente a la situación multiplicativa.

Al abordar la relación que se establece entre la proporcionalidad simple y la multiplicación,



aparecen los trabajos propuestos por Botero (2006) y Torres (2013) en los cuales se evidencia su enfoque en los problemas de razón proporcional. La multiplicación es vista como la relación proporcional simple en la cual una de las cantidades es la unidad, a pesar de coincidir en temáticas propuestas para el desarrollo de la investigación, Botero (2006) centra su análisis en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, en que el estudiante, al identificar la relación proporcional existente en el juego puede interpretar variaciones entre dos o más espacios de medida. Torres (2013) por su parte, propone analizar a partir de problemas de isomorfismo de medidas cómo los estudiantes “generan relaciones entre valores que pertenecen a variables diferentes” (p. 21). En ambos proyectos se resalta la importancia de vincular los conocimientos con los saberes previos de los estudiantes, en la pretensión de generar énfasis en el análisis de las maneras en que los niños proceden ante la situación multiplicativa, lo cual encamina el interés de la presente investigación.

Algunas investigaciones proponen la implementación de diferentes metodologías para abordar la enseñanza de la multiplicación, como la desarrollada por Aguirre (2012) que plantea estudiar aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas, ya que se determina que cuando el estudiante se enfrenta a problemas abordados a partir de las estructuras multiplicativas, suele utilizar métodos de razonamiento distintos a los convencionales para resolverlos.

En la propuesta anterior, se encuentran aspectos comunes que se retoman para la presente



investigación como lo son el trabajo con situaciones multiplicativas y la importancia que se le brinda al razonamiento propio del estudiante, lo que permite evidenciar las dificultades que viven los estudiantes en la actualidad al enfrentarse a problemas multiplicativos. Además se promueve la posibilidad de reconocer la existencia de otras estrategias de resolución de situaciones multiplicativas desarrolladas a lo largo de la historia, para que los estudiantes logren reconocer que pueden implementar otros métodos alternativos para realizar multiplicaciones.

Así mismo, con el fin de abordar la temática del reconocimiento histórico de la multiplicación, se resaltan en la investigación de Aguirre (2012) aspectos históricos que dan cuenta del recorrido analítico hacia los diversos métodos de multiplicación utilizados por las culturas (Egipcios, Babilonios, Romanos e Hindúes), dicho análisis expresa que la historia puede ser el elemento indispensable para identificar dificultades y obstáculos en la resolución de problemas multiplicativos, que se pueden asemejar con los obstáculos que los niños pueden encontrar en la actualidad. Es necesario resaltar que tales investigaciones aportan de manera significativa en cuanto al reconocimiento histórico de las formas de razonamiento que se emplearon para resolver problemáticas vivenciales.

La investigación realizada por Espinoza, Medellín y Quintero (2015) permite visualizar el enfoque histórico ya que a partir del rastreo de la cultura Egipcia, Griega y Babilónica, se reconocen diferentes maneras primitivas de llevar a cabo procedimientos de multiplicación que implican el estudio de lo que ahora se concibe como estructuras multiplicativas, dándole



así miradas epistemológicas a la investigación que permiten reconocer la existencia de diversas estrategias de resolución a problemas multiplicativos. Es necesario enfatizar que en las situaciones propuestas en dicho trabajo de grado, no se retoman las estrategias implementadas por las culturas para el análisis cualitativo.

Las investigaciones anteriores centran su objetivo en el trabajo de aspectos y procesos particulares de las situaciones multiplicativas, en la implementación de diferentes metodologías se analiza la manera de proceder de los estudiantes centrado en una de las clasificaciones de los problemas multiplicativos. La presente investigación por su parte propone abordar situaciones que involucren los problemas multiplicativos, para poder clasificar y analizar las diferentes estrategias de resolución implementadas por los estudiantes. Por consiguiente, la investigación implementa las Actividades Orientadoras de Enseñanza como soporte teórico y estrategia metodológica que permite adaptar situaciones desencadenadoras de aprendizaje, contextualizadas hacia la necesidad de resolver problemas que retoman situaciones en relación con la cultura. Así mismo, se tiene presente la importancia del desarrollo de conocimiento colectivo al reconocer al estudiante y a los docentes (investigadores) como sujetos permeados por una historia y una cultura.



Objetivos de la Investigación

Objetivo general

Analizar las estrategias de resolución a situaciones multiplicativas que desarrollan los estudiantes de tercero de primaria de la Institución Educativa Fontidueño Jaime Arango Rojas, a partir de las Actividades Orientadoras de Enseñanza para el reconocimiento y uso de diferentes estrategias que posibilitan la comprensión de la multiplicación.

Objetivos específicos

- Desarrollar las Actividades Orientadoras de Enseñanza *viaje en el tiempo* y *planeación de un viaje*.
- Clasificar las diferentes estrategias de resolución a las situaciones multiplicativas implementadas por los estudiantes.



Justificación

En la enseñanza de las matemáticas se establecen dos tipos de conocimientos, propuestos en los documentos rectores de la Educación Matemática, el primero alude al desarrollo de conceptos y el segundo al desarrollo de procedimientos que adquiere el sujeto durante su proceso formativo. El desarrollo de conceptos está dictado por el aprendizaje de los elementos teóricos que convergen en las matemáticas y el desarrollo de procedimientos que surgen a partir de las técnicas y estrategias al momento de realizar la acción; en consecuencia, el MEN establece en uno de los cinco procesos en que se desarrolla el sujeto y que le permite ser competente en las matemáticas el “dominar procedimientos y algoritmos matemáticos, conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz” (2006, p. 6). Lo anterior, permite fijar la relación entre la aplicación procedimental que efectúa el estudiante al enfrentarse al problema matemático y la comprensión que se desarrolla del concepto matemático inmerso en el proceso.

Permitirle al estudiante enfrentarse al problema matemático sin conocer el algoritmo convencional conlleva a que él mismo sea quien desarrolle sus propias maneras de resolución, además, que comprenda que se pueden implementar otros procedimientos. En la mayoría de los casos, cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos al valerse de sus estrategias de resolución, encuentran sentido a la implementación de algoritmos, transforma su percepción de verlos como la mecanización de pasos a verlos como procedimiento lógico y abreviado que sirve para dar solución a problemas multiplicativos.



En relación a lo planteado, Maza (1991) reconoce que la resolución de problemas aritméticos en la enseñanza de la educación primaria se desarrolla en tres aspectos fundamentales:

1. Posibilidades que ofrecen los distintos conceptos y operaciones aritméticas de desarrollarse a través de la resolución de problemas.
2. Las estrategias empleadas por los niños al resolver problemas, con especial énfasis en la llamada “aritmética informal”, es decir, las estrategias infantiles no influidas por la escolarización.
3. La aplicación de todo lo anterior en la instrucción escolar, sea por medio del currículo, sea por formas concretas de enseñanza en el aula [...] (p. 5).

En la investigación se reconocen las estrategias propias de resolución planteadas por los estudiantes como eslabón fundamental en la enseñanza de la aritmética, ya que afianzan la posibilidad de interiorizar conocimientos matemáticos, debido a que dentro de dichas resoluciones se generan procesos de razonamiento que permiten desarrollar habilidades conceptuales y procedimentales de manera paulatina y adaptativa.

A partir de la historia de la matemáticas se visualiza como el ser humano logra diseñar estrategias de resolución a problemas matemáticos, las cuales de acuerdo a las dificultades presentadas en su contexto fueron sometidas a transformarse en la simplificación y la generalización que impulsaron la necesidad de unificar el proceso de resolución actual; es así como las estrategias propias de resolución se convierten en métodos importantes no solo para la comprensión del algoritmo como proceso de solución a problemas matemáticos, sino además para entender cómo la evolución al algoritmo permite simplificar el número de pasos y posibilitar la estandarización en el cálculo.

Autores como Gómez (1998) mencionan que “los algoritmos actuales constituyen un sistema



coherente que se ajusta a unas reglas comunes evitando que en cada caso se sigan esquema distintos” (p. 105). La apreciación de los diversos algoritmos hace que el docente no se desligue de su enseñanza y que se permita pensar en que la dificultad no es del algoritmo convencional mismo sino la forma en que se enseña. Por consiguiente, autores como Itzcovich (2007) reconocen que es adecuado aproximarse a los procedimientos de cálculo convencionales a partir de la exposición de las relaciones entre los cálculos que los estudiantes realizan y los procedimientos formales o algorítmicos.

A partir de los documentos rectores de la Educación Matemática, la historia de las matemáticas y los planteamientos de diversos autores como Kamii (1995), Gómez (1998), Maza (1991) e Itzcovich (2007) (que se ampliarán en el marco teórico) se propone la ejecución de estrategias propias de resolución para la formación de sujetos competentes en matemáticas, lo que invita al docente a visualizar e implementar experiencias de aprendizaje que permitan el desarrollo de diferentes maneras de solucionar situaciones multiplicativas, lo cual en una mirada histórico cultural reconoce en el proceso de aprendizaje la necesidad de involucrar la resolución de problemas y el contexto del estudiante para darle sentido al conocimiento matemático y así considerar su aplicabilidad en diferentes situaciones.



Marco Teórico

El centro de la investigación, se sitúa en el análisis de las diversas estrategias de resolución a situaciones multiplicativas a partir de las Actividades Orientadoras de Enseñanza como eje conceptual para desarrollar las ideas que dan respuesta al problema de esta investigación y establecer la relación pertinente entre la metodología y los hallazgos. Por consiguiente, el marco teórico muestra el camino por el cual se desenvuelve la presente investigación. Es así como se sitúa en la perspectiva de conocimiento histórico cultural que despliega teorías y concepciones que fundamentan los intereses de la investigación, enfocados en la orientación del conocimiento matemático a partir de la interacción con el otro y mediado por el contexto.

Teoría histórico cultural

Al desplegar la ruta teórica que acoge la investigación, se encuentran planteamientos de Vygotsky como elementos teóricos que le dan sustento a la investigación, dicho autor se instaura en la perspectiva histórico cultural, que presenta la importancia de la dimensión social para la apropiación del conocimiento, a partir de la intersubjetividad y la relación de las experiencias culturales del sujeto con los otros. Al respecto, Wertsch (1998) en su obra *Vygotsky y la formación social de la mente*, entiende la teoría de Vygotsky con base al estudio de la conciencia humana; en la misma menciona que “los seres humanos son concebidos como constructores de conocimiento permanente de su entorno y de las representaciones de este a través de su implicación en formas diferentes de actividad” (p. 193). En consecuencia, el conocimiento ha de



entenderse como la lectura que el sujeto hace del mundo, en el cual interviene el entorno social y cultural. En otras palabras, el conocimiento se produce a partir de las interrelaciones que establece el sujeto con el mundo.

En este mismo sentido, Vygotsky expone la interacción como experiencia indispensable en el aprendizaje, por medio de la cual el individuo no aprende nada de modo aislado, debido a que al aprender él siempre está en constante interacción y en relación con el otro. El aprendizaje entonces permite el desarrollo del conocimiento mediado por la interacción con los otros y los diálogos en las cooperaciones que se pueden establecer, en palabras de Vygotsky (como se cita en Moura, 2010) el aprendizaje “presupone una naturaleza social específica y un proceso a través del cual los niños penetran en la vida intelectual de quienes lo rodean” (p. 83).

En dicha teoría recae la relación indisoluble entre los procesos histórico culturales con los procesos psicológicos del sujeto, debido a que es necesario conocer el ambiente social para poder comprender el desarrollo de las habilidades psicológicas o también conocidas como funciones mentales superiores definidas en la perspectiva vygotskiana. Las funciones mentales son categorizadas en dos grupos, por un lado las funciones elementales que son aquellas con las que nace el sujeto y le son naturales, las cuales están condicionadas por lo que se puede hacer y las funciones mentales superiores que se desarrollan a través de la interacción con el otro y la mediación cultural, abiertas a mayor posibilidad de acciones. En los planteamientos de Wertsch (1988), las funciones mentales superiores difieren de las funciones elementales en su



intelectualización o realización consciente, las primeras están determinadas por el estímulo ambiental mientras que las segundas presentan estimulaciones autorreguladas y en estrecha relación con otros estímulos externos, como lo es la interacción con sujetos que cuentan con conocimientos avanzados.

Dentro de la perspectiva histórico cultural se sitúan dos nociones fundamentales para el aprendizaje, una encaminada en la interacción con el otro (interpersonal), que entiende al otro como agente cultural que posibilita herramientas que acompañan al sujeto en el aprendizaje y una segunda noción encaminada al proceso individual (intrapersonal). Ambas nociones se consolidan de acuerdo a Vygotsky como niveles de desarrollo, definidos en orden respectivo como desarrollo potencial y desarrollo real; que se encuentran inmersos en la *zona de desarrollo próximo* que evidencia la distancia que hay entre los dos niveles de desarrollo. El concepto de la zona del desarrollo próximo es propuesto por Vygotski para exponer las relaciones que han de presentarse entre el aprendizaje y el desarrollo, al considerar que las relaciones de estos procesos son implicaciones importantes para las prácticas pedagógicas.

En consecuencia, la *zona del desarrollo próximo* supone por parte del docente, estrategias de enseñanza que permiten el desarrollo de funciones mentales superiores y con ellas el desarrollo del conocimiento, en las cuales el docente se encarga de explorar cómo las funciones⁵ interpersonales del estudiante maduran de manera progresiva hasta convertirse en la función

⁵ Función entendida como una acción particular que realiza el sujeto con un fin determinado



interna del sujeto. Al respecto Labarrere (1996), citado en Dubrovsky (2000) reconoce que “la zona del desarrollo próximo se comprende como un espacio socialmente construido donde convergen y se interconectan las acciones, intenciones y productos de quienes intervienen en un determinado proceso de enseñanza” (p. 64) la cual, se configura con gran incidencia en la estructura de la *actividad* humana que se aborda a posteriori.

El docente se presenta como orientador de las maneras de comunicación indispensables para el reconocimiento del pensamiento del otro, maneras que son llamadas sistemas semióticos de representación que pueden ser entendidos como los sistemas que se utilizan dentro de la cultura para dar a conocer una idea a partir de una representación, ya sea por medio del lenguaje oral, gestual o simbólico. Díaz y Quiroz (2005), plantean que “la enseñanza y el aprendizaje interactúan en la zona del desarrollo próximo, estos procesos unidos a la interacción social y a los instrumentos lingüísticos son decisivos para comprender el desarrollo cognitivo” (p.18).

Las diferentes representaciones permiten al sujeto expresar las ideas comprendidas dentro de la interacción entre él y la cultura, mediadas por las necesidades presentadas en el contexto. Ante tal situación, Duval (2004) tiene presente la importancia del reconocimiento de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que las matemáticas son un campo de estudio que supone el análisis de las actividades cognitivas de los estudiantes, por lo cual se hace necesario distinguir entre el objeto matemático de conocimiento y sus



diferentes formas de representación para poder garantizar la comprensión del concepto noética⁶).

Es pertinente reconocer que las posturas de este autor se encuentran enmarcadas en una perspectiva cognitivista, sin embargo se retoma para la presente investigación, sus planteamientos en relación con las diferentes maneras de representación que posibilitan comprender las estrategias de resolución de los estudiantes.

Cabe reconocer que aunque el trabajo con distintos registros de representación es indispensable para el aprendizaje de las matemáticas, no es una labor automática para los estudiantes; el docente debe encargarse de promover en el aula el trabajo con distintos registros de representación del concepto para permitir la discusión y análisis de la conversión del registro en otro. La metodología de la investigación buscó promover el uso de diferentes representaciones y estrategias por parte de los estudiantes que les posibilitaran dar solución a las situaciones planteadas, en este sentido se hace necesario tener presente el lenguaje, los escritos, símbolos e íconos que apoyan el desarrollo dichas estrategias, lo cual ha de ser el centro de análisis de la investigación.

Los registros de representación han de aparecer en el momento en que el sujeto desarrolla una acción; hecho que, en palabras de Leontiev ha de entenderse como actividad, por tanto, “la noción de actividad se centra en contextos definidos socioculturalmente en los que tiene lugar el

⁶ En la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, la noética se encarga de la comprensión conceptual de un concepto.



pensamiento humano” (Wertsch, 1998, p.211).

Teoría de la Actividad

En la perspectiva histórico cultural es necesario adoptar la postura que permita analizar las acciones que realiza el estudiante impulsado por las necesidades de su contexto. Es así como, aparece en la investigación la teoría de la actividad propuesta por Leontiev, en la cual se involucran aspectos como las necesidades, motivos, objetivos, acciones y condiciones que se proponen a partir de los procesos de interacción del sujeto con el mundo que suponen la *necesidad real*, lo que permite comprender la actividad como interpretación o creación sociocultural y que en palabras de Leontiev es expresada como:

Una unidad molecular de la vida del sujeto corporal [...] cuya función real consiste en que orienta al sujeto en el mundo objetivo. En otras palabras la actividad no es una reacción o agregado de reacciones, sino un sistema con su propia estructura, sus propias transformaciones internas y su propio desarrollo (1978, p. 66).

La anterior noción de *actividad* hace referencia al conjunto de acciones presentes en la vida cotidiana del ser humano, que generan respuesta a muchas de las necesidades vivenciadas en su entorno social. Dichas necesidades están orientadas hacia fines y motivos que pueden ser alcanzados por diversos medios que llevan a cabo la acción. Por ende, al hablar de actividad con relación a los planteamientos expuestos por Leontiev, es hablar del proceso psicológico que permite comprender el actuar del sujeto a partir de los niveles de análisis propuestos dentro de la misma teoría, expuestos a continuación:



- Desarrollo de la actividad, en búsqueda de generar respuestas a necesidades presentadas en el entorno social, de tal forma “el hombre encuentra en la sociedad no solo condiciones externas a las que debe acomodar su actividad, sino esas mismas condiciones sociales que conllevan los motivos y fines de su actividad” Leontiev (1978, p. 68).
- Acciones que están orientadas hacia un objetivo; es decir, se establecen motivos y fines que den respuesta a la necesidad presentada.
- Por último, las operaciones que aparecen como los medios que posibilitan llegar a un fin, reguladas por condiciones. Al respecto, Leontiev menciona que “la acción puede transformarse en un medio para alcanzar un fin; es decir, en una operación capaz de efectuar diversas acciones” (1978, p. 87).

La teoría de la *actividad* reconoce que el desarrollo de la conciencia humana (psiquis) supone la apropiación del desarrollo histórico cultural mediado por la *actividad* que permite reproducir lo que el sujeto comprende y ha interiorizado movido por su entorno, el cual posibilita la transformación del sujeto.

En el contexto escolar se pretende que los docentes empleen situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes para que puedan establecer objetivos encaminados a generar respuestas a las necesidades presentadas en las prácticas de su entorno social. Respuestas determinadas por los



medios que utilizan para llevar a cabo la acción; Wertsch menciona que “en la actividad escolar al llevar a cabo una acción que encamina hacia un objetivo en el plano interpsicológico, el funcionamiento cognitivo conjunto está organizado de tal manera que los estudiantes puedan obtener los mayores beneficios al aprender” (1988, p. 222). Por consiguiente, al hablar de *actividad* en función del contexto sociocultural, el estudiante presenta un interés particular que acerca al desarrollar el conocimiento alejado de la mecanización y memorización de reglas, al considerar el conocimiento matemático como saber práctico, dinámico y no universal producido por el contexto histórico cultural en prácticas sociales.

Mediante la comprensión de la noción de *actividad* se le da gran importancia al trabajo colectivo debido al enfoque sociocultural que presenta. Por tanto, es importante que la necesidad planteada sea la necesidad conjunta entre los intereses del docente y los estudiantes, es así como se reconoce la importancia de la interacción con el otro, la cual proporciona elementos para el desarrollo colectivo del conocimiento.

Por consiguiente, para la presente investigación es de interés pensar en el conjunto de situaciones que posibiliten en el estudiante el constituirse como sujeto social e histórico, encaminadas a generar la apropiación del conocimiento a partir del trabajo colectivo. La AOE⁷ se presenta como el conjunto de situaciones que permite el desarrollo del conocimiento, movilizadas por un motivo, encaminadas hacia el objetivo y que aluden a la consideración de la

⁷ Siglas que se refieren a la Actividad Orientadora de Enseñanza.



necesidad; proceso que ha de desarrollarse a partir de la interacción con el otro. La AOE tiene sus fundamentos en la teoría de la *actividad* propuesta por Leontiev, como propone Moura, Araújo, Ribeiro, Panossian y Moretti (2010), ha de comprenderse la *actividad* como el conjunto de acciones y operaciones que posibilita el desarrollo cognitivo del sujeto, acciones que, aisladamente, no tendrían significado.

La teoría de la actividad genera un sustento en el cual se comprenden las acciones del hombre, pero a partir de una perspectiva psicológica, por lo cual se hace pertinente un reconocimiento a partir del campo de la educación, es por ello que para la presente investigación se propone la AOE como elemento teórico y metodológico que cumple con los intereses particulares de la investigación y que a su vez, permiten al estudiante la orientación del conocimiento a partir de la interacción con su entorno social.

Actividad Orientadora de Enseñanza

Dentro de los intereses de la investigación se establece la relación en la enseñanza de las matemáticas y el papel que desempeña el componente histórico y social en el desarrollo de las mismas. Es importante reconocer los aportes de las diferentes culturas según las necesidades emergentes en el espacio, lugar y tiempo determinado, que posibilite el reconocimiento de obstáculos epistemológicos. Por tal razón, la perspectiva histórico cultural centra sus intereses en que tanto docente como el estudiante puedan desarrollar su conocimiento en relación con su



historia y entorno.

Moura (2010) reconoce como la finalidad de la AOE aproximar a los estudiantes a conocimientos inmersos en el contexto social al generar la solución colectiva de un problema común. Se presenta entonces como la oportunidad que permite involucrar en el ámbito de la educación la comprensión desarrollada acerca de los procesos de reconstrucción del conocimiento humano en relación con la perspectiva histórico cultural, en el cual se reconoce la mediación cultural entre el sujeto histórico y el objeto social, en la tabla 1 se evidencia los aspectos que componen la triada fundamental en dicha perspectiva en relación a la AOE que se desarrolla en la investigación.

Triada de la perspectiva histórico cultural

	Sujeto histórico	Objeto social	Mediación cultural
<i>AOE Viaje en el Tiempo y Planeación del Viaje</i>	Estudiante	Situaciones multiplicativas	Organización de la enseñanza - docente

Tabla 1: Triada de la perspectiva histórico cultural en la AOE. Elaboración propia.

La mediación cultural entendida como aquellas relaciones que se desarrollan entre los conceptos matemáticos y el contexto real y cultural, la cual pretende que el estudiante se involucre en la situación desencadenadora de aprendizaje, de modo que se propicie el



intercambio de acciones en las variadas resoluciones de la situación que se sitúan en el contexto del estudiante, lo que posibilita a su vez el desarrollo de funciones mentales superiores.

En la propuesta metodológica es necesario tener claras las perspectivas de los conceptos claves que hacen posible la AOE, como lo es el concepto de aprendizaje. A partir de Moura et al.(2010) se retoma la definición de aprendizaje de Vigotsky que resalta la importancia del trabajo colaborativo, por lo que se establece la relación entre el sujeto con el medio físico y social, relación que permite presentar herramientas que logren potencializar su desarrollo cognitivo. La mirada anterior de aprendizaje le otorga además un papel importante al estudiante en la interacción activa con otros sujetos (docente y estudiantes).

De acuerdo a los intereses de la investigación, el sujeto en medio de la interacción colectiva y autónoma puede encontrar los medios para llegar a consolidar su propio conocimiento, que en palabras de Moura (2010) “es en ese movimiento de lo social a lo individual que se da la apropiación de conceptos y significaciones, o sea, que se da la apropiación de la experiencia social de la humanidad” (p. 83).

El concepto de enseñanza en la propuesta metodológica es comprendido según la mirada de Vigotsky como la difusión de conocimientos, procedimientos y valores encaminados al desarrollo humano del sujeto; por lo cual, no solo se le otorga prioridad al ambiente académico



sino al crecimiento, consolidación y ejecución de la personalidad del estudiante en la búsqueda de la calidad humana en relación social. A partir de la mirada de Vigotsky se propone en la AOE que “el maestro deberá adoptar los conocimientos teóricos, organizarlos en las acciones de modo que hagan posible al estudiante la apropiación de conocimientos teóricos explicativos de la realidad” (Moura, 2010, p. 212). Tal mirada de enseñanza se retoma en la presente investigación porque pretende orientar además del conocimiento teórico, herramientas que posibiliten la relación que resalta la importancia de establecer conexión entre lo social y lo humano.

Las miradas anteriores de enseñanza y aprendizaje se adoptan en la investigación como argumentos que exponen la importancia de retomar la AOE al generar la relación docente-estudiante. El trabajo colectivo se presenta como herramienta en el aula para la resolución de diferentes situaciones, las cuales ofrecen las condiciones necesarias para que los estudiantes realicen acciones y operaciones que constituyen la *actividad de aprendizaje*.

Como aspecto a resaltar de la AOE sobresale la perspectiva histórico cultural que según Moura (2010) solo se establece si “el objeto se constituye como una necesidad para el estudiante” (p. 215). Así, los objetos teóricos se convierten en medios que responden a necesidades creadas en función del interés de la actividad. En consecuencia, las situaciones que se presentan en la investigación permiten el desarrollo del conocimiento matemático a partir de necesidades que lleven al estudiante a generar diferentes estrategias de resolución.



Dentro de las características establecidas por Moura et al. (2010) en la AOE, se resaltan las siguientes para los fines de la investigación:

- *Comprensión colectiva:* Busca que los estudiantes consigan intercambiar, socializar, comparar y confrontar ideas para lograr consolidar propuestas proyectadas al desarrollo del conocimiento colectivo.
- *Comunicación y participación:* Como elementos fundamentales en el desarrollo del conocimiento, debido a que es a partir de la interacción y la verbalización de ideas con los otros que el estudiante da a conocer sus formas de comprender la situación a la que se enfrenta. Por tanto, es fundamental para el sujeto ser partícipe del desarrollo de estrategias de resolución en la medida en que aporta al conocimiento colectivo.
- *Reflexión:* Se genera en el sentido en el que el estudiante logra trascender de sus acciones individuales al esquema general de comprensión del concepto expuesto. En el planteamiento del problema de la investigación, se resalta la confrontación que el estudiante genera con el algoritmo convencional al final del proceso de desarrollo de estrategias de resolución, dicha confrontación alude a la necesidad de comprender el proceso simplificado y general que puede ser similar a sus propios razonamientos.

La AOE constituye la organización y la apropiación del conocimiento que hace referencia a la *actividad de enseñanza y actividad de aprendizaje* de manera respectiva, mediados por los



elementos estructurales de la actividad propuesta por Leontiev. En palabras de Moura et al. (2010), en la AOE “están presente el contenido de aprendizaje, el sujeto que aprende, el docente que enseña y el más importante, la constitución de un modo general de apropiación de la cultura y del desarrollo del humano genérico” (p. 216).

Actividad de enseñanza

Entender la enseñanza como actividad exige una organización especial, la cual reconozca tanto el objeto matemático como las prácticas sociales; ya que el docente es el sujeto inmerso en la actividad de enseñanza, pensada a partir de la práctica pedagógica presente en el entorno escolar, en consecuencia el docente es el encargado de orientar a los estudiantes a la comprensión del conocimiento. El docente se encarga de definir el conocimiento teórico que se deba trabajar en el aula y desarrollar las metodologías que puedan apoyar tanto el proceso de enseñanza como el de aprendizaje.

Según los planteamientos de Moura et al. (2010) la *actividad de enseñanza* supone la apropiación social del conocimiento históricamente desarrollado, por lo cual la acción del docente ha de estar dirigida a la organización de la enseñanza para tal fin, se busca entonces posibilitar la comprensión de la cultura al movilizar a los sujetos a actuar para la concretización de un objetivo: el desarrollo de las potencialidades humanas para la apropiación y progreso de los bienes culturales; es decir, la *actividad de enseñanza* posibilita la apropiación de la cultura en el contexto de la educación escolar, en el cual, las acciones del docente deben realizarse en



búsqueda de la solución del problema que permita la apropiación de los conocimientos.

Actividad de aprendizaje

Moura et al. (2010) reconoce que es importante que el estudiante esté impulsado por el motivo que le permita a su vez satisfacer la necesidad, para la cual se desarrollan acciones y operaciones que posibilitan acercarse a la resolución de situaciones de aprendizaje. Por consiguiente, el aprendizaje se sitúa dentro de la estructura de actividad que ha de responder a los intereses y necesidades del docente y del estudiante, es entonces como la *actividad de aprendizaje* no puede pensarse alejada de la *actividad de enseñanza*, debido a que las acciones del docentes y el estudiante han de ser complementarias como el desarrollo de las AOE, como lo plantea el autor el mismo autor, “no hay sentido en la *actividad de enseñanza* si ella no se concretiza en la *actividad de aprendizaje*, por su parte, no existe la *actividad de aprendizaje* intencional si ella no se da de forma consciente y organizada por medio de la *actividad de enseñanza* (p. 220).

La relación complementaria de la actividad de enseñanza y aprendizaje, permite comprender la AOE como una metodología y teoría que sustenta la importancia del docente como una guía que se preocupa por los intereses del estudiante, y busca plantear la relación de las matemáticas con la cotidianidad y el entorno social. La ilustración propuesta por Moraes (2008 retomada en Moura et al 2010, p. 219) que se presenta a continuación, expone los elementos centrales de la AOE discutidos con antelación.



Ilustración 2 : AOE, relación entre la actividad de enseñanza y actividad de aprendizaje. Tomada de Moura et al (2010).
A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. Traducción propia.

Con relación a lo expuesto, la AOE se presenta en la investigación como sustento teórico y como componente metodológico que permite recoger todos los elementos anteriores y posibilitar el análisis en relación con los objetivos planteados para la investigación. Ya se ha hecho claridad con base a la perspectiva histórico cultural de Vigotsky, la concepción del estudiante como sujeto histórico mediado por la AOE. Para fines del desarrollo de la investigación, es necesario considerar el objeto de conocimiento, por el cual se determina la acción y necesidad de enseñanza del docente, que en la presente investigación hace referencia a las situaciones multiplicativas.



Situaciones multiplicativas

En los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (2006) se plantea la necesidad de formar sujetos competentes en las matemáticas, planteamiento que va mucho más allá de trabajar a partir de distintos pensamientos (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional), pues se deben reunir tres aspectos expuestos en los documentos rectores de la Educación Matemática, como son el enfoque a partir de los conocimientos básicos expuestos en los *pensamientos*, el desarrollo de *procesos* como medio para superar obstáculos propios de las matemáticas y el reconocimiento del contexto.

Además, se propone el trabajo en el aula a partir de situaciones desencadenadoras de aprendizaje, para las cuales han de tener en cuenta las situaciones problema que permiten vincular factores sociales y culturales del ambiente escolar y el contexto extraescolar, que posibilitan la interpretación activa por parte de los estudiantes de las matemáticas. “Es importante señalar que un mismo contenido matemático puede –y en ocasiones debe– presentarse a través de diversas situaciones, como es el caso de la multiplicación y sus diversos significados [...]” (MEN, 2006, p. 73).

En consideración a los intereses de los documentos rectores de la Educación Matemática, las AOE propuestas para la investigación, involucran los diferentes problemas, al reconocer la



concepción unitaria y binaria de la multiplicación, el reconocimiento de elementos propios de la cultura y el contexto. Para ello se hace necesario conocer y situar las diferentes percepciones que se manejan en relación a la multiplicación y a los diferentes problemas multiplicativos.

Se retoma a Vergnaud (1990) como referente que propone estudiar y reflexionar a partir del trabajo con la multiplicación en la escuela primaria, dicho autor expone la *teoría de los campos conceptuales*, que es entendida como la teoría psicológica del concepto, entendida como un conjunto de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y relacionados durante la adquisición de conocimiento. En la teoría se propone las estructuras multiplicativas como campo conceptual que a su vez debe ser interpretado como “conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones” (Vergnaud, 1990, p. 8).

Para la investigación se hace pertinente abordar el objeto matemático desde su historia y sus clasificaciones pertinentes, es así como se reconoce la clasificación de diferentes autores con relación a los problemas multiplicativos, por ello se retoma la clasificación planteada por Vergnaud (1983) quien evidencia tres tipos de problemas:

- *Isomorfismo de medidas* como estructura que consiste en la proporción simple y directa entre dos espacios de medida.
- *Producto de medidas* como la composición cartesiana entre dos espacios de medida



diferentes para generar el tercero.

- *Espacio único de medidas* como el espacio de medida que se repite un número de veces para generar otro de la misma naturaleza.

Se resalta que la *teoría de los campos conceptuales*, en la cual se reconoce la comprensión de los conceptos, se retoma en la investigación como elemento teórico que posibilita el reconocimiento de los diferentes problemas que hacen parte de la multiplicación; sin embargo, no ha de ser un elemento teórico para el análisis debido al enfoque piagetiano que maneja, en el cual se tiene en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio, a partir de la clasificación de niveles cognitivos, sin embargo la clasificación que plantea Vergnaud (1983), permite ampliar la clasificación de los problemas multiplicativos.

Por otro lado autores como Maza (1991) se centran en la concepción de multiplicación y división como operaciones aritméticas que sirven como herramienta para dar solución a diferentes problemas. El autor en su obra *La enseñanza de la multiplicación y la división* (1991) plantea que:

La multiplicación debe ser entendida como una operación aritmética entre números naturales, donde el punto de partida son dos números, y el punto de llegada otro distinto de los anteriores [...] la operación se concibe como una aplicación entre el conjunto de $N \times N$ de parejas ordenadas de números naturales y el propio conjunto N [...] la división puede ser una aplicación si se define de manera más restringida por medio del concepto de mayor cociente por defecto (p. 17 - 18).

Maza (1991), propone maneras diferentes de clasificar los problemas que hacen referencia al trabajo con situaciones multiplicativas.



- *Problemas de razón* aluden a interpretar la multiplicación como una relación proporcional, en la cual se dispone de una cantidad inicial que cambia a medida que se repite de manera sucesiva un número de veces, en este sentido parte de una relación proporcional conociendo el valor de la unidad.
- *Problemas de combinación* se centran en el estudio de los diferentes arreglos que se pueden realizar entre dos o más conjuntos, al tener presente que el espacio de medida resultante es de diferente naturaleza a los dos espacios de medida iniciales, al respecto el autor los define como “problemas donde han de combinarse los elementos de cada uno de los conjuntos de datos originales [...] estos problemas responden a un modelo binario de la operación” (Maza, 1991, p. 27).
- *Problemas de comparación* son similares a los problemas de razón, ya que plantean una proporcionalidad, sin embargo no se propone a partir del valor de la unidad, sino que retoman cantidades diferentes de la unidad.
- *Problemas de conversión* se pueden interpretar como la mezcla entre los problemas de combinación y comparación. Según el autor los problemas de conversión “se transforman en problemas de proporcionalidad directa, este tipo de problemas son análogos a los de razón y comparación, siempre que los de razón se refieran a la unidad” (Maza, 1991, p.51). Por ende, se pueden asociar a las maneras físicas de conversión de medidas.



Los *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998, p. 33), también proponen cuatro tipos de problemas asociados a la multiplicación:

Factor multiplicante que plantea problemas como: *Juan tenía tres carritos. María tenía cuatro veces más.*

¿Cuántos carritos tiene María?

Adición repetida en la cual se propone problemas como: *Juan compró tres carritos cada día durante cuatro días. ¿Cuántos carritos tiene en total?*

Razón que se distingue problemas como: *cuatro niños tenían tres carritos cada uno, ¿cuántos carritos tenían en total?*

Producto cartesiano el cual se sitúa en problemas como: *un carrito de juguete se fabrica en tres tamaños distintos y en cuatro colores diferentes, ¿cuántos carritos distintos se pueden comprar?*

Para organizar las ideas expuestas hasta aquí en torno a los procesos multiplicativos, se presenta en la Tabla 2 las relaciones existentes entre la clasificación de los diferentes problemas multiplicativos, que posibilita para la investigación nombrar de manera específica los problemas que se presentan en la metodología.



<i>CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</i>	<i>Relación proporcional entre dos espacios de medida</i>	<i>Composición cartesiana entre dos espacio de medida</i>	<i>Repetición de un único espacio de medida</i>
<i>Vergnaud (1983)</i>	Problemas de isomorfismo de medidas	Problemas de producto de medidas	Problemas de espacio único de medidas
<i>Maza (1991)</i>	Problemas de razón Problemas de conversión	Problemas de combinación	
<i>MEN (1998)</i>	Adición repetida Razón	Producto cartesiano	Factor multiplicante

Tabla 2: Relación entre las diversas clasificaciones de los problemas multiplicativos. Elaboración propia.

En la tabla 2 se relaciona y clasifica los problemas multiplicativos de acuerdo a los planteamientos de dichos autores, al situar las semejanzas y diferencias en los mismos, lo que permite generalizar las características de los diferentes problemas que sirven para la investigación como elemento fundamental para la clasificación propia de los problemas multiplicativos.

Según las relaciones expuestas entre las ideas de multiplicación y los diferentes problemas que se abordan, es necesario indicar que para la investigación la multiplicación es entendida a partir de la concepción unitaria y binaria. El razonamiento multiplicativo supone el reconocimiento de los espacios de medida presentes en el problema; en la concepción unitaria de la multiplicación, se identifica el número de veces que se repite una cantidad al depender de otra y en consecuencia,



se obtiene el resultado de la misma naturaleza de uno de los espacios de medida. En la concepción binaria se generan todas las combinaciones posibles entre dos espacios de medida que conlleva a crear un espacio de medida de diferente naturaleza a los dos iniciales.

Itzcovich (2007) reconoce que es necesario abordar cada tipo de problema multiplicativo en el aula, con la finalidad de que los estudiantes puedan identificar las maneras de proceder en ellos debido a que suponen dificultades diferentes. Además propone el uso de diferentes herramientas que posibiliten la resolución a diferentes problemas, en este sentido el autor propone “la enseñanza del cálculo mental, del cálculo estimativo e incluso el uso de la calculadora también deberían formar parte del trabajo, incluso en forma previa al cálculo algorítmico” (p. 97). Las propuestas del autor alimentan los intereses de la investigación, ya que sugiere que por medio de la implementación de los diferentes problemas multiplicativos se analicen las estrategias de resolución por parte de los estudiantes para identificar las diferencias o similitudes que se pueden generar según la dificultad que implica el tipo de problema multiplicativo.

Al tener en cuenta que la resolución de los problemas de situaciones multiplicativas, posibilitan el desarrollo de razonamientos que permiten al estudiante resolver situaciones a partir de estrategias generales o estrategias centradas en un caso particular, surge la necesidad de favorecer el uso diferentes estrategias de resolución a situaciones multiplicativas en el aula, que le permitan al estudiante reconocer que existen diversas formas de llegar a un mismo resultado, lo que posibilita alejarlo de comprender el algoritmo convencional como única alternativa de



solución; tal y como se propone en los estándares básicos de competencia para la Educación Matemática. Por tanto, se resalta uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática, en el cual se expone que:

Es conveniente describir y ensayar otros algoritmos para cada una de ellas (Operaciones básicas), compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas [...] Todo ello estimula a los estudiantes a inventar otros procedimientos para obtener resultados en casos particulares” (MEN, 2006, p. 55).

Lo anterior invita al reconocimiento de diferentes algoritmos y estrategias que se puedan desarrollar en las situaciones multiplicativas, es así como se puede situar la historia como un elemento importante que posibilita reconocer diferentes estrategias de resolución que se han propuestos a los largo de la historia según las diferentes culturas. Reconocer la historia de la multiplicación le permite a los docentes conocer la evolución de diferentes estrategias que permitieron la estandarización del algoritmo convencional, y así comprender que los estudiantes pueden desarrollar diferentes estrategias.

Concepción de algoritmo

El algoritmo se reconoce como la sucesión de pasos ordenados al interior del procedimiento que permite al estudiante resolver problemas de manera general; para la investigación se abordan las diversas definiciones y concepciones que se han estudiado respecto a dicho proceso, además de situar la importancia que le ha dado la escuela a la implementación de algoritmos para la resolución de problemas aritméticos.



Se retoman definiciones manifestadas por autores que trabajan el concepto de algoritmo. Para Gómez (1998, p. 105), “un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y eso independientemente de los datos”, es así como se reconoce el algoritmo como un proceso, estrategia, herramienta que se sirve como una ayuda para facilitar el cálculo y razonamientos, esto se debe a las reglas que se desarrollan al interior del algoritmo y al orden de sus pasos. En esta misma línea de interpretación del algoritmo Fey (1998 citado en Canales 2006) lo explica como la “secuencia de reglas definidas con precisión que indican cómo producir la información de salida especificada a partir de la información de entrada dada un número finito de pasos” (p. 23), es así como al hablar de algoritmos se deben considerar un orden y unas reglas que posibilitan su ejecución.

Vergnaud (1991) por su parte, menciona los algoritmos como “una regla (o conjunto de reglas) que permite para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución si existe una o dado el caso mostrar que no existe solución” (p. 258), esta autor agrega a las ideas expuestas con anterioridad, la posibilidad que permite el algoritmo de considerar si un tipo de problema tiene solución o no.

Al analizar el trabajo desarrollado a lo largo del tiempo con los algoritmos, se resaltan las clasificaciones que surgen en cuanto al mismo, entre ellas también aparece la planteada por



Orozco (2009) de quien se retoman las dos nociones de algoritmo que se evidencian en la presente investigación:

- Algoritmos a partir del enfoque tradicional; en los cuales se “entiende la enseñanza de los algoritmos como la aplicación de las cuatro operaciones básicas a partir del adiestramiento, la práctica y la ejercitación de las mismas en la solución de multiplicaciones escritas” (p. 8). Hace alusión a lo que se considera como algoritmo convencional.
- Algoritmos a partir del enfoque actual; en el que se reconoce la importancia de la comprensión de las propiedades de la multiplicación para “establecer una conexión entre la comprensión del algoritmo y su utilización como herramienta para la resolución de problemas” (p. 8).

En el desarrollo de la presente investigación se identifica que las posibles dificultades que enfrentan los estudiantes y que les obstaculiza el resolver situaciones multiplicativas radican en la enseñanza del algoritmo como mecanización de pasos y única estrategia de resolución, lo cual, incita a la ejercitación y no a la comprensión del mismo, así como lo reconocen autores como Gomez (1998), Kamii (1995) e Itzcovich (2007).

Maza (1991), expone que el algoritmo puede aprenderse al dar respuesta al paso a paso propio



del mismo, pero, “al no comprender completamente las razones de cada paso, el aprendizaje está lleno de rigidez” (p. 96). Es importante pensar en el proceso de aprendizaje que desarrollan los estudiantes para tener presente los obstáculos que pueden surgir en el camino hacia la comprensión de la multiplicación. Por consiguiente, autores como Gómez (1998) resaltan que:

Nuestro aprendizaje de cada una de las operaciones está tan ligado a su algoritmo que se suele confundir cada operación con el algoritmo usual que la resuelve, por eso mismo, nos resulta a veces tan extraño comprobar que hay varias técnicas distintas para resolver una misma operación (p. 105).

Al considerar el interés de la investigación en las estrategias de resolución, y al tener presente las definiciones que se plantean al rededor de los algoritmos, se hace pertinente establecer la diferencia entre los algoritmos y las estrategias de solución, debido a que todo algoritmo se puede considerar una estrategia de resolución, ya que por medio de este se ha de justificar los procedimientos para llegar a un resultado, sin embargo no toda estrategia puede considerarse un algoritmo, debido a que no se reconoce una rigurosidad en los pasos y reglas a seguir propuestas por los estudiantes.

Con el fin de identificar el porqué en la institución se implemente el algoritmo convencional como única estrategia de resolución a situaciones multiplicativas, se aborda el trabajo con los algoritmos en la escuela.

Trabajo con los algoritmos en la escuela

Uno de los puntos de partida de la investigación se desarrolla en la problemática observada en



la Institución Educativa, que alude al trabajo temprano con los algoritmos convencionales, al respecto Itzcovich (2007) menciona que el algoritmo convencional oculta las razones matemáticas por las que se hace lo que se hace detrás de cada uno de los pasos, por lo cual se propone la enseñanza del cálculo mental, del cálculo estimativo e incluso el uso de la calculadora deberían hacer parte del trabajo, de manera previa al cálculo algorítmico.

Dicha problemática también se identifica como una situación de interés de investigaciones como Canales (2006), Espinoza, Medellín y Quintero (2015), entre otras, en las cuales se reconoce que el estudio de los algoritmos debe ser una reconstrucción dotada de sentido por parte del estudiante, que lo pueda acercar a la comprensión de los procesos que conlleva al algoritmo convencional; es así como se puede interpretar el algoritmo como construcción del hombre que responde a la necesidad de facilitar y resumir un sinnúmero de procedimientos.

Los algoritmos convencionales aluden al calificativo que se le da a los algoritmos usuales que según Gómez (1998) “probablemente son los únicos algoritmos que se enseñan en la mayoría de nuestras escuelas” (p. 106). En algunos contextos educativos continúa la enseñanza de las operaciones básicas limitadas a que los estudiantes mecanicen cada paso que compone dicho algoritmo. Autores como Kamii (1995) señalan que los algoritmos y el sistema en base 10 han sido enseñados durante mucho tiempo como si fuesen conocimientos naturales para el estudiante, al ignorar el desarrollo lógico matemático necesario para su comprensión.



Kamii (1995) identifica además tres problemas que surgen a partir del trabajo con los algoritmos convencionales en los primeros grados de escolaridad, lo que le da sustento a la necesidad de enfocarse en el desarrollo de estrategias propias para no desarrollar problemáticas que son prevalentes en algunas prácticas de enseñanza actuales.

- Los algoritmos fuerzan a los niños a renunciar a sus propios pensamientos.
- Los algoritmos “mal enseñan” el valor posicional e impiden que los niños desarrollen el sentido de número.
- Los algoritmos hacen que los niños dependan de la distribución espacial de las cifras (o papel y el lápiz) o de otras personas (p. 49).

El hecho de que se ofrezca el algoritmo como única alternativa de resolución hace que los estudiantes renuncien a sus propias maneras de pensar y no reconozcan las diferentes posibilidades que hay para llegar al resultado, lo que invita a reflexionar acerca de la importancia de emplear metodologías que permitan al estudiante el desarrollo de su conocimiento a partir de situaciones problema que promuevan la aplicación de sus ideas y concepciones con relación al objeto matemático.

Desarrollo de estrategias de resolución

Durante la investigación se detectan algunas de las dificultades que presentan los estudiantes con relación a la comprensión y el sentido que se le da al algoritmo convencional; situación que se presenta debido a que “los algoritmos permiten a los niños producir respuestas correctas, el efecto secundario surge de erosionar la confianza que tienen en sí mismos” (Kamii, 1995, p. 64).

La falta de confianza en sus capacidades se rompe si se le da a conocer otras alternativas que



posibiliten darle solución a diferentes situaciones, alternativas que aluden a las estrategias propias de resolución. El desarrollo de otros algoritmos y maneras alternativas de solución a los problemas, permiten comprender que la situación matemática puede resolverse de diferentes maneras según las necesidades, capacidades o decisiones del estudiante. Alternativas que el docente ha de orientar con el fin de comprender la simplificación y el uso convencional del algoritmo.

Para acercar al estudiante a la resolución de situaciones multiplicativas, es necesario que el docente diseñe propuestas que motiven a descubrir nuevas maneras de proceder, que pueden ser pensadas por ellos mismos en la apropiación de las necesidades vivenciadas en su entorno. Así mismo, Roldán, García y Cornejo (1996) señalan que:

El propósito del maestro debe ser el despertar en los niños el interés para buscar y aplicar diferentes alternativas en la solución de un problema aritmético, desarrollando su capacidad para que con situaciones de mente abierta aborden estos niveles de complejidad evitando la memorización (p. 40).

Consecuente con el interés de la investigación, autores como Damisa (2011) proponen la necesidad de dotar de significado los procedimientos que realizan los estudiantes, con la finalidad de que logren dar sentido a sus razonamientos, al permitir solucionar un problema a partir de su comprensión, de tal manera que si se olvidan los procedimientos mecanizados que componen el algoritmo convencional, el estudiante pueda reconstruirlos a partir de lo que él comprende.



A partir de las problemáticas generales observadas en la institución donde se realiza la práctica, se vislumbran procedimientos y técnicas que dificultan la comprensión de los razonamientos multiplicativos, entre ellas la mecanización de las tablas de multiplicar y la implementación del algoritmo tradicional como única estrategia para la resolución de los problemas aritméticos. Las cuestiones que llevan a concebir la resolución a situaciones multiplicativas como proceso mecánico, permiten pensar otras metodologías de enseñanza para la multiplicación, con el fin de posibilitar a los estudiantes el desarrollo de otras habilidades como el cálculo estimativo, el cálculo mental, la comunicación de ideas, entre otras; que les permitan apropiarse y comprender los procedimientos que posibilitan dar solución a diferentes situaciones multiplicativas.

El desarrollo de estrategias de resolución a situaciones multiplicativas requiere que el estudiante razone ante las situaciones presentadas en su entorno social; así pues, el conocimiento no se concibe como algo impuesto por el docente sino como construcción social que se ha desarrollado a lo largo de la historia de acuerdo a las necesidades evidenciadas en el entorno social. Hecho que permite que la historia se presente como elemento fundamental para dar sustento a la implementación de estrategias propias, debido al reconocimiento de los obstáculos epistemológicos que ha atravesado la humanidad en búsqueda de generar soluciones a situaciones que emergieron de la necesidad.



Estrategias de resolución a lo largo de la historia

La alternativa de promover el desarrollo de estrategias propias de resolución por parte de los estudiantes, surge a partir del reconocimiento de las diversas estrategias que se presentaron a lo largo de la historia para las resoluciones de situaciones que suponen un razonamiento multiplicativo. Maza (1991) señala al respecto que si los docentes quieren fomentar “la comprensión de algoritmo, resulta conveniente, contemplar el algoritmo desde su nacimiento, observar los obstáculos que tuvieron que vencer otras culturas para llegar a la forma que actualmente han adoptado” (p. 94). Por tanto, se reconoce que las matemáticas y cada concepto y procedimiento que la comprende, se modifica a partir de las necesidades y condiciones del hombre en espacios de tiempo determinado, es así como se vincula las matemáticas bajo la mirada de la perspectiva histórico cultural, en la cual el sujeto desarrolla su conocimiento con relación a sus prácticas sociales y el reconocimiento la historia que lo constituye.

Además, se hace relevante para los estudiantes conocer que las matemáticas suponen complejidades que se desarrollaron a lo largo de la historia y que pueden llegar a realizar estrategias de resolución propias o similares a las que se implementaron en otro tiempo histórico; Kamii (1995) menciona al respecto que, “los niños tienden a pasar por un proceso de construcción parecido al de nuestros antepasados para poder comprender los algoritmos de hoy” (p. 49).

Con el fin de acercarse a la comprensión del proceso de razonamiento (no de mecanización)



que se desarrollan al realizar el algoritmo convencional para dar respuesta a problemas multiplicativos, se puede tener presente la historia, ya que posibilita identificar los obstáculos que atravesaron las culturas al enfrentarse a problemas que no se podrían resolver con cálculos sencillos, sino que requieren del cálculo abstracto. Al respecto, Maza menciona que:

Si queremos fomentar la comprensión en el aprendizaje del algoritmo lo primero que debemos hacer es comprenderlo nosotros mismos [los docentes] [...] resulta conveniente contemplar el algoritmo en su nacimiento, observar los obstáculos que tuvieron que vencer otras culturas hasta llegar a la forma que actualmente han adoptado (Maza, 1991, p. 84).

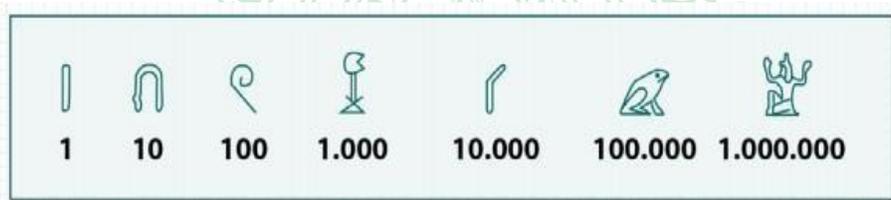
Dentro del reconocimiento histórico, se identifican diferentes características de las estrategias de resolución a situaciones multiplicativas implementadas por antiguas culturas, entre ellas se encuentran las estrategias basadas en conteos, desarrollo del doble de cantidades, y la suma reiterada de pequeños productos, los cuales proporcionaron las bases para el desarrollo del algoritmo convencional de la multiplicación.

Desarrollo del algoritmo Egipcio.

Algunos investigadores enfocados en el estudio de la enseñanza de las matemáticas como Maza (1991), reconoce la importancia de la historia como elemento que posibilita la comprensión de las matemáticas a partir de sus evoluciones. Con respecto a lo anterior se rastrean algunas culturas que aportaron ideas fundamentales para el conocimiento matemático. Entre las culturas se sitúa a Egipto como una civilización que aportó numerosas contribuciones para la evolución del razonamiento matemático, las cuales son conservadas por la humanidad

en los papiros que dejaron los egipcios.

La cultura egipcia realizó sus avances matemáticos a partir del sistema de numeración en base 10, sistema que utilizó jeroglíficos para representar cualquier cantidad en potencias de 10, como se muestra en la ilustración 3. Dicho sistema se caracterizó por ser aditivo y por representar pequeñas cantidades en fracciones unitarias.



						
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Ilustración 3: Sistema de numeración egipcio.⁸

Entre las estrategias encontradas en los papiros egipcios, se identifica el algoritmo de la multiplicación desarrollado a partir de duplicaciones, al reconocer una cantidad que ha de duplicarse según el número de veces que lo indique otra cantidad, las cuales se representan en una tabla que posibilita llevar el registro, para luego realizar una suma de las duplicaciones de ambas cantidades, como se ejemplificará paso a paso mas adelante.

Autores como Maza (1991) explican los procedimientos que se desarrollan en el algoritmo egipcio a partir de los conceptos matemáticos que allí emergen; al respecto expone que:

⁸ Ilustración retomada de <http://www.elbibliote.com/resources/destacados/notad38.html>

Inicialmente los problemas multiplicativos se resolvieron por sumas reiteradas, cuando hay que repetir n veces una cantidad el trabajo se vuelve largo y fastidioso el egipcio podría simplificar su labor aproximándose a través de duplicaciones a la cantidad deseada (Maza, 1991, p. 85).

Indicaciones para el uso del algoritmo egipcio:

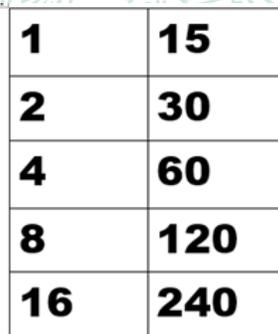
1. Se escribe en la primera columna el número 1 y en otra uno de los factores.



1	15
----------	-----------

Ilustración 4: Primer paso del algoritmo egipcio.⁹

2. Se duplican los números y los resultados de la duplicación hasta que, en la primera columna, no exceda el otro factor del producto.



1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Ilustración 5: Segundo paso del algoritmo egipcio.

⁹ Las ilustraciones de los pasos del algoritmo egipcio, son elaboraciones propias de los investigadores.

3. Se suman los números de la primera columna que determinan el primer factor.

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Ilustración 6: Tercer paso del algoritmo egipcio.

4. Se suman los números de la segunda columna correspondiente a los sumados en el paso anterior.

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Ilustración 7: Último paso del algoritmo egipcio.

Es así como el producto de 23 por 15 es igual a la suma de 15, 30, 60 y 240.

Dicho algoritmo permite considerar otras estrategias apoyadas en el razonamiento aditivo, al considerar simplificaciones en el cálculo. La implementación de duplicaciones es considerada una estrategia práctica para acercar al estudiante a razonamientos multiplicativos,



con la finalidad de posibilitar la identificación y el reconocimiento de regularidades, al reconocer productos básicos que han de ser útiles para el desarrollo de multiplicaciones con cantidades extensas.

Se observa que la característica particular del algoritmo egipcio es la implementación de la noción de duplicación que ha de ser el primer acercamiento a los razonamientos multiplicativos en esa época, en el cual de manera intuitiva multiplica por dos una cantidad.

En la actualidad el uso de esta estrategia tiene como ventaja no tener que recurrir solo a la memorización de las tablas de multiplicar, debido a que se desarrolla a partir de adiciones, y aunque en su tiempo posibilitó simplificar procedimientos, los pasos que componen la estrategia, puede llegar a ser lentos y confusos para la resolución de problemas actuales.

Desarrollo del algoritmo Hindú.

El sistema de numeración hindú era expresado en base 10, en el cual se utilizaban símbolos que presentan similitud con los indoarábigos, como se muestra en la ilustración 8, que son las representaciones del número que se utiliza en la actualidad en la mayor parte del mundo. Los hindúes lograron avances significativos para la comprensión de las matemáticas, debido a que su trabajo se basó en el sistema de numeración posicional, el cual facilitaba la realización de los cálculos operativos. Entre los aportes a la comprensión de las matemáticas, sobresale el

descubrimiento del cero, el cual surge a partir de la necesidad de representar la ausencia de cifras en el desarrollo de sus cálculos.

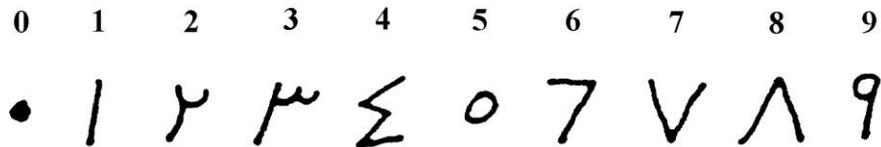


Ilustración 8: Sistema de numeración indoarábigo¹⁰.

Al igual que los egipcios, la cultura hindú logró establecer procedimientos evolutivos para el cálculo de productos. Los hindúes establecieron un método que se consideraba incomprensible para la mayoría de la población, debido a que supone un razonamiento abstracto, que se desarrolló solo por los astrólogos o matemáticos de la época.

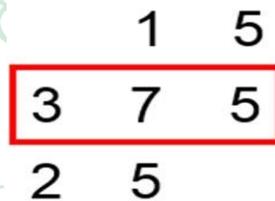


Ilustración 9: Primer algoritmo hindú¹¹.

En la ilustración 9 se observa el producto de 25 por 15 desarrollado a partir del primer algoritmo hindú, en el cual se distribuyen arriba y abajo los dos factores respectivamente y en el centro se registra el resultado de la multiplicación de los factores, sin embargo no se clarifican

¹⁰Ilustración retomada de http://mermaja.act.uji.es/web_antigua/docencia/e08/tema1/Image28.gif

¹¹ Las ilustraciones del algoritmo Hindú, son elaboradas por los investigadores.



los procedimientos que permitieron llegar al resultado, lo cual produjo múltiples dificultades para los comerciantes de la época, para su comprensión; Maza (1991) señala que la estrategia “impedía registrar los resultados parciales de manera que cualquier equivocación implicaba la realización completa del algoritmo desde el principio” (p. 91), limitación que condujo a los hindúes a la reconstrucción del algoritmo.

Para la reconstrucción se tiene presente la necesidad de poder representar los pasos que posibilitan obtener el producto, por lo cual se desarrolla el método de las celosías el cual tiene presente los dígitos de los dos factores, los cuales son ubicados en la margen superior e izquierda de un recuadro, respectivamente, para posibilitar registrar los pequeños productos entre los diferentes dígitos y por último realizar las sumas parciales de las diagonales que posibilitan llegar al resultado. A continuación se profundiza en cada uno de los pasos que se deben seguir para el desarrollo del algoritmo hindú de las celosías.

1. Se dibuja una cuadrícula con tantas columnas como dígitos tenga el multiplicando e igual número de filas a la cantidad de dígitos del multiplicador, en este sentido se ubica el multiplicando en la parte superior de la cuadrícula, al procurar que a cada dígito le corresponda una columna, y los dígitos del multiplicador a la izquierda de la cuadrícula, al tener presente el valor posicional de las cantidades. De manera seguida se realizan las diagonales de cada una de las celdas formadas.

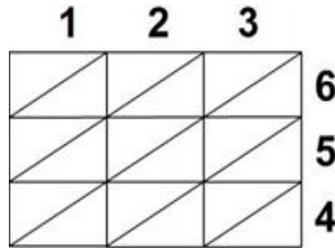


Ilustración 10: Primer paso del algoritmo hindú.

2. En cada una de las casillas se registra el producto de los dígitos de cada las columnas por los de las filas correspondientes, se registra en la subdivisión de arriba las decenas y en la subdivisión de abajo la unidad.

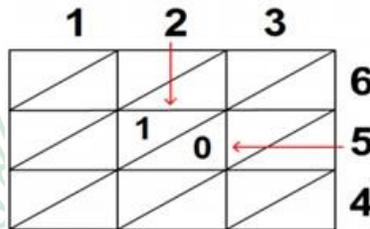


Ilustración 11: Segundo paso del algoritmo hindú.

3. No importa el orden en el cual se decida realizar los productos, lo importante es llenar la cuadrícula con los productos indicados.

4. Al tener cada uno de los productos registrados en las respectivas casillas, se pasa a realizar la suma de los dígitos de las diagonales de izquierda a derecha.

1 8 0 3



	1	2	3	
0	0	1	1	6
8	0	5	0	5
0	0	4	0	4
	4	4	2	

$1 \times 6 = 6$
 $1 \times 8 = 8$
 $1 \times 0 = 0$
 $1 \times 4 = 4$
 $8 \times 1 = 8$
 $8 \times 5 = 40$
 $8 \times 0 = 0$
 $8 \times 4 = 32$
 $0 \times 1 = 0$
 $0 \times 5 = 0$
 $0 \times 0 = 0$
 $0 \times 4 = 0$
 $4 \times 1 = 4$
 $4 \times 5 = 20$
 $4 \times 0 = 0$
 $4 \times 4 = 16$

Ilustración 12: Cuarto paso del algoritmo hindú.

Nota: Si el resultado de alguna de las sumas es de dos dígitos, se registra el valor de la unidad y se “lleva” a la siguiente diagonal el valor de la decena.

El producto final se obtiene al unir, de izquierda a derecha, los dígitos resultantes de las sumas de las diagonales.

La principal característica de dicho algoritmo es el registro de los procedimientos a partir de la cuadrícula y sus diagonales, que permiten visualizar cada uno de los productos parciales, lo que permite evitar el trabajo mental de “llevar” las decenas, procedimiento que se reconoce como una de las dificultades observadas en el desarrollo del algoritmo convencional por parte de los estudiantes de esta institución.

A diferencia del algoritmo egipcio, el algoritmo de las celosías facilita calcular el resultado de cualquier multiplicación, al hacer uso del reconocimiento de los pequeños productos y las adiciones.



Desarrollo del algoritmo convencional.

La estrategia de la celosía permitió pensar en el desarrollo de un algoritmo que facilitara la comprensión de los procedimientos que permitan dar respuesta a una multiplicación, y que de igual manera fuese simplificada para acelerar el cálculo. Es así como a partir de la recopilación de las diferentes estrategias ya existentes, se reconstruye un algoritmo que reconoce el valor posicional de las cantidades, productos entre los dígitos de los factores y la suma de los diferentes productos, pero esta vez se utiliza el signo por “x” para indicar la realización de los pequeños productos, y el más “+” para indica las sumas; En la ilustración 13, se muestran las transformaciones de la representación escrita del algoritmo convencional de la multiplicación, las cuales van ocultando cada vez más los pasos internos que se realizan.

15	15	15
<u>X 25</u>	<u>x 25</u>	<u>x 25</u>
25 +	75 +	75 +
50	<u>300</u>	<u>30</u>
100	375	375
<u>200</u>		
375		

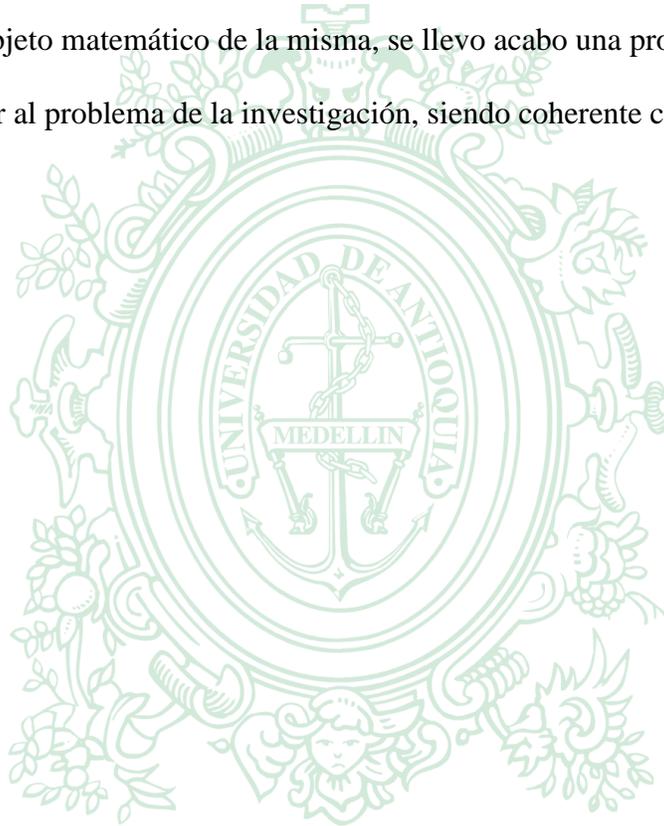
Ilustración 13: Simplificación del algoritmo convencional.

Como se observa en el recorrido histórico, la existencia de diversas estrategias multiplicativas que surgen a partir de razonamientos diferentes, que se sirven como una base para el desarrollo de otras estrategias, al tener presente la facilidad y practicidad del cálculo, lo cual ha de depender



de los conocimientos y concepciones del sujeto que se enfrente a la resolución de un problema.

Después de considerar los elementos teóricos que sustentan la investigación y el reconocimiento del objeto matemático de la misma, se llevó a cabo una propuesta metodológica que permita responder al problema de la investigación, siendo coherente con los supuestos teóricos.



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3



Metodología de Investigación

La metodología comprende la población de análisis, el método de investigación cualitativa, la propuesta práctica de las AOE, los instrumentos utilizados para la recolección de información y las características que han de permitir el análisis.

Se tiene presente entonces el método cualitativo ya que reconoce el contexto que comprende al sujeto y las necesidades que se derivan de dicho contexto. La investigación cualitativa permite considerar diversas interpretaciones que se pueden obtener a partir del análisis del conjunto de datos y las experiencias que adquiere el investigador para su desarrollo profesional y como sujeto. Hernández, Fernández y Baptista (2010), considera que la investigación cualitativa proporciona “profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas” (p. 17).

En la presente investigación se analizan las estrategias que desarrollan los estudiantes a partir de sus razonamientos y nociones de la multiplicación, lo que le permite a los investigadores acercarse a la comprensión de la realidad percibida por los estudiantes, en la cual se amplían sus observaciones a partir de los registros y procedimientos que posibilitan el análisis de las producciones de los estudiantes al estar inmersos en las AOE.

Para la metodología de la investigación se consideran algunos elementos que guían de



manera general los intereses de la misma, que posibilitan a su vez la realización del análisis.

- La observación participante; en la cual se pretende que el investigador se involucre de manera natural en el entorno del estudiante, lo que le permite no solo ser observador sino además ser mediador dentro de las acciones realizadas por los mismos para obtener la participación reflexiva.
- Flexibilidad para el análisis; debido a que los investigadores hacen parte continua del proceso, se posibilita realizar modificaciones en la investigación de acuerdo a los intereses particulares de la misma, en respuesta a los hallazgos identificados en el desarrollo y en el esfuerzo de reconocer las diversas interpretaciones de los sujetos participantes en su forma de percibir e interpretar el mundo.

A partir de las características que direccionan la investigación en el método cualitativo, se propone como metodología las AOE, debido a que resalta en primera instancia la importancia de generar conexión entre docente y el estudiante en el desarrollo de situaciones desencadenadoras de aprendizaje; el docente como mediador y orientador de situaciones que permiten que el estudiante se apropie del conocimiento en relación con su entorno cultural. En segunda instancia, se genera trabajo colectivo, por medio del cual el estudiante desarrolla estrategias de resolución en discusión y colaboración con sus compañeros. Para finalizar y en tercera instancia, se resalta la variedad de pensamientos y reflexiones, propias de la AOE, percibida en su dimensión transformadora como instrumento desencadenador de aprendizaje.



El análisis de la investigación se realizó en un grupo de estudiantes de tercero de primaria de aproximadamente 36 estudiantes, con los cuales se caracterizó y reconoció los procedimientos que desarrollaron a partir de las AOE que es la metodología que utilizan los investigadores para abordar las diferentes situaciones multiplicativas; dicho análisis, requirió de tiempo, observación, evaluación y comprensión de las particularidades y características del estudiante, lo que permitió a los investigadores desarrollar el objetivo propuesto para la investigación, con relación al análisis de las diferentes estrategias de resolución que implementa en el proceso.

Al reconocer que las prácticas educativas en la mayoría de las instituciones públicas se desarrollan con grupos numerosos de estudiantes, se considera para la investigación importante tener presente esta realidad y así considerar el análisis de las estrategias de resolución a partir de un grupo completo de estudiantes, en este sentido se analizaron las interpretaciones que realizan los estudiantes, frente a situaciones matemáticas, con relación a la caracterización e identificación de las diferentes estrategias de resolución que han de reconocer conocimientos previos y nociones propias de los estudiantes.

En la investigación no se pretende generalizar a partir de un caso específico, ya que se tienen en cuenta para el análisis las estrategias de los estudiantes en la comprensión de la problemática que se desarrolla en el contexto.



Recolección de información

Para el análisis de los procedimientos que emplearon los estudiantes para la resolución a situaciones multiplicativas, se contó con diversas herramientas de recolección de información, que a su vez permitieron generar el análisis de las estrategias de resolución que desarrollaron los estudiantes. Los instrumentos de recolección de la información son esenciales, ya que con ayuda de la fundamentación teórica permitieron el análisis que dio validez a la investigación. Es importante tener presente en el plan de recolección de la información, la definición de la estrategia de muestreo y la selección de los participantes, ya que juegan un papel fundamental los asuntos de pertinencia y adecuación, entendidas por Sandoval (2002) como:

Pertinencia [...] identificación y logro del concurso de los participantes que pueden aportar la mayor y mejor información a la investigación, de acuerdo con los requerimientos teóricos de esta última.

Adecuación [...] contar con datos suficientes disponibles para desarrollar una completa y rica descripción del fenómeno preferiblemente, cuando la etapa de la saturación se ha alcanzado (p. 136).

Tales aspectos son indispensables para favorecer la selección entre la cantidad de casos; los que estén acordes con el interés de la investigación que además de generar coherencia al relacionar los hallazgos particulares con la fundamentación teórica, puedan aportar elementos prácticos y teóricos para el ámbito educativo. En este sentido se tomaron para los análisis aquellas estrategias que desarrollaron los estudiantes enfocados en razonamientos aditivos y multiplicativos, sin retomar las estrategias que son iguales, debido al interés de analizar las estrategias de resolución que fuesen diferentes.



Los diversos instrumentos que se tuvieron presente para la recolección de la información, que permitieron la caracterización completa y ordenada de las acciones y estrategias de resolución de los estudiantes a la hora de enfrentarse a la situación multiplicativa, por ende, la presente investigación retoma:

- Entrevistas abiertas
- Diarios de campo
- Materiales audiovisuales
- Fotografías¹²

Se utilizan las entrevistas abiertas como estrategia de recolección de información que permiten visualizar los pensamientos e ideas de los estudiantes a través de la representación verbal, expresadas de manera natural, que no les son posibles representar de manera escrita; dichas entrevistas se perciben en el análisis por medio de las preguntas que realizan los investigadores, con el fin de reconocer la justificación de los estudiantes ante sus estrategias.

De manera específica, se utiliza la entrevista abierta porque “no se establece previamente un catálogo de instrucciones ni de preguntas concretas. A lo sumo el investigador está interesado en

¹² Las fotografías que se presenten en el trabajo, son tomadas por los investigadores, en las cuales se presentan tanto capturas de las representaciones escritas de los estudiantes, como momentos en los cuales se realizó una acción. Las fotografías se nombran como ilustraciones.



conocer lo que opina y lo que piensa el informante que vive cotidianamente en un contexto”.

Grupo L.A.C.E (1999, p. 22).

Las entrevistas abiertas le permitieron a los investigadores realizar preguntas de acuerdo a la situación específica en la que está inmerso el estudiante, lo que posibilitó ampliar los aspectos de interés que puedan surgir en el instante y no hayan sido visualizados. Por consiguiente, pueden surgir preguntas durante el proceso de entrevista que conduzcan al investigador a identificar aspectos relevantes dentro del marco de la investigación.

Los diarios de campo posibilitaron en primera instancia, la reflexión e interpretación por parte del investigador de las diferentes situaciones que se presentan en el aula; lo que promueve la introspección a la hora de evaluar el quehacer docente de manera autónoma y que conlleva a identificar debilidades y fortalezas que sugieren modificar o adaptar, si es el caso, la orientación de los contenidos frente a los estudiantes. En segunda instancia, permiten el registro de información clave para el análisis posterior del fenómeno a estudiar. De igual manera, los diarios de campo hicieron posible que al momento de analizar las estrategias, se encuentre relación entre los mismos para favorecer la identificación de situaciones que pueden ser significativas en el proceso de investigación.

Cada uno de los investigadores realizó un diario de campo, los cuales contenían la planeación de la clase (que era la misma para los tres investigadores), sin embargo en el apartado



de las reflexiones, cada investigador registraba sus observaciones y consideraciones de cada uno de los encuentros, para después realizar una discusión que permita el reconocimiento de los elementos de ayuda para el análisis (Ver anexo 1).

Para el análisis se consideraron las diferentes representaciones que permitieron expresar a los estudiantes las ideas transformadas en lenguaje oral, corporal o escrito. Así se tienen presente otros instrumentos que posibiliten captar las diferentes maneras de expresión de los estudiantes, como lo son los registros fotográficos y audiovisuales.

Dichos registros se sirven de la tecnología y permiten retomar las representaciones orales, gestuales y escritas, que posibilitan una ayuda para el análisis y así poder comprender lo que el estudiante quiere expresar. La fotografía por su parte, permite capturar momentos que describen los procedimientos de los estudiantes al dar respuesta a las diferentes situaciones planteadas en las representaciones escritas y en la implementación de ayudas físicas para la proyección de la idea, como lo son las expresiones corporales y manipulación de material didáctico.

Los materiales audiovisuales permiten el registro de acciones e ideas del estudiante representadas en su oralidad, que no son expuestas de manera clara y original en representaciones escritas, ya que implican la simplificación y un orden de las ideas, que al mismo tiempo ha de excluir algunas manifestaciones de los estudiantes, llevándolos a representar de manera simbólica aquello que permite el cálculo. Cabe aclarar que el material



audiovisual pasa por la transcripción por parte de los investigadores de manera conjunta, en la cual no se hacen modificaciones de las ideas y expresiones de los estudiantes para lograr la lectura objetiva de lo que quieren dar a entender; para el análisis se retomaron episodios del material audiovisual, los cuales se representaron en ilustraciones que permiten centrar la atención en el diálogo específico del cual se va a analizar.

De acuerdo con el enfoque cualitativo de la investigación, el grupo que hizo parte del análisis y las herramientas de recolección de la información; se presenta a continuación la metodología que proponen los investigadores para el análisis de las estrategias de resolución a las situaciones multiplicativas.

Actividad Orientadora de Enseñanza: *Viaje en el tiempo.*

La *actividad de enseñanza* además de posibilitar el desarrollo del conocimiento matemático, promueve el fortalecimiento de habilidades sociales vivenciadas a través de la interacción con el otro en el contexto en el que se desenvuelve la situación. Los docentes, que se identifican como investigadores, orientan las situaciones a implementar en el aula con la finalidad de transformar la práctica pedagógica, al darle prioridad al trabajo colectivo, al fomentar la participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje, y al presentar situaciones que permitan fortalecer la relación entre estudiante-estudiante y estudiante-docente, relación que promueve la comunicación como herramienta para el desarrollo y apropiación del conocimiento. Moura (2010) expresa que se genera interacción entre los sujetos “cuando se proporcionan situaciones



que exijan el intercambio de acciones en la resolución de la misma, planteada desde el contexto educativo” (p. 225).

Al desarrollarse el proceso de interacción, se posibilitan maneras de acercar a los estudiantes a problemáticas históricas que les permitan pensar en las diferentes maneras en las que se puede comprender la situación que requiera de solución matemática. Por consiguiente, el estudiante vincula sus estrategias de resolución a la situación a través del reconocimiento del contexto que ha surgido del desarrollo del conocimiento matemático. Cadavid y Quintero (2011) mencionan que “las Actividades Orientadoras de Enseñanza proponen pensar, plantear y desarrollar los encuentros en el aula de clase procurando interacciones que posibiliten retomar el conocimiento matemático socialmente construido” (p. 12). Es así como las AOE apoyan los intereses de la presente investigación y posibilitan a su vez el desarrollo del conocimiento matemático a partir de las relaciones sociales en consideración con su contexto, lo cual ha de permitir el desarrollo de estrategias de resolución por parte de los estudiantes.

La estrategia retoma aspectos importantes de la enseñanza de las matemáticas como lo son el reconocimiento de la historia que permite comprender el origen de conceptos matemáticos y la creatividad por parte del docente al momento de orientar situaciones que posibiliten el proceso en la organización de la enseñanza para responder a las necesidades y finalidades particulares.

Por ende, se busca involucrar al estudiante en situaciones multiplicativas, en las cuales se genere la posibilidad de desarrollar estrategias de resolución propias. Moura, Sfori y Araújo (2011)



consideran que conocer la apropiación que hacen los sujetos referente a las estrategias que utilizan “nos coloca (refiriéndose a los docentes) delante del desafío por encontrar esos medios de enseñanza que promuevan esas apropiaciones” (p. 40).

Se propone la AOE *Viaje en el tiempo* como alternativa metodológica para la investigación, en la cual, los estudiantes simulan el viaje por diferentes culturas y reconocen las características propias de la historia a medida que interactúan con situaciones que tienen inmersos problemas multiplicativos, se reconoce a su vez los elementos que hacen parte de la actividad de aprendizaje, como se clarifica a modo general en la tabla 3.



Objetivo/Motivo	Acciones	Operaciones
Identificar características de otras culturas	Resolución a las diferentes situaciones multiplicativas.	Estrategias de resolución que desarrollan los estudiantes a las situaciones multiplicativas.

Tabla 3: Características de la Actividad de Aprendizaje, AOE ¡Viaje en el tiempo!. Elaboración propia.

El trabajo colaborativo se desempeña como papel importante en el desarrollo de las situaciones, debido a que permiten las interacciones y la confrontación de ideas, que a su vez aporta al desarrollo de las estrategias, por lo cual se organizan grupos de trabajo que permitan



establecer discusiones en la posibilidad de apoyar, refutar, complementar y enriquecer las estrategias de resolución.

En el desarrollo de la propuesta metodológica se entregaron pasaportes a los estudiantes partícipes de la investigación como medio para registrar experiencias significativas de cada viaje en el tiempo realizado en las AOE y el sello personalizado que se utiliza para constatar el nivel de participación. Material elaborado con la finalidad de incentivar a los estudiantes a hacer parte de la estrategia (Ver anexo 2).

Las AOE se componen de situaciones de aprendizaje propuestas por los docentes, las cuales unifican los intereses tanto del docente como de los estudiantes, con la finalidad de proporcionar un objetivo en común, por tal razón, las diferentes situaciones que se plantean son transversalizadas por la misma línea de desarrollo, en este sentido para la AOE *Viaje en el tiempo*, se proponen tres momentos que posibilitan un orden claro, para abordar diferentes elementos de interés, como lo es el reconocimiento de la historia, el planteamiento de situaciones de interés para los estudiantes y la consideración de los diferentes problemas multiplicativos.

- *Momento histórico*: se exponen las temáticas históricas emergentes dentro de las culturas que permite contextualizar al estudiante en la situación a realizar.
- *Momento fantástico*: se involucran aspectos propios de la investigación, como lo es el



planteamiento de las situaciones multiplicativas elaboradas y adaptadas por los investigadores, los materiales necesarios, el tiempo a emplear y la descripción detallada de la forma de ejecución de la misma.

- *Momento de aprendizaje:* se sitúa el objeto matemático al reconocer el problema multiplicativo inmerso en cada situación y los estándares de competencia que se abordan; es pertinente aclarar que este momento se presenta una justificación de las situaciones propuestas por los investigadores a partir de los documentos rectores, es así como se sitúan los estándares de competencias matemáticas que se pueden desarrollar en cada una de las situaciones.

Al esbozar las situaciones que hacen parte de las AOE, aparece en primera instancia *el Sapu y las monedas legendarias*, situación que se desarrolla a partir de la historia de la civilización Inca; los estudiantes deben calcular los puntos que se obtienen al lanzar la piedra de oro en cada casilla perteneciente a un conjunto de las mismas dispuestas en un tablero; casillas que están caracterizadas por tener diferentes colores y valores numéricos. La segunda situación se denomina *el misterio de la tumba*, en la cual se retoman elementos históricos de la cultura egipcia y se propone la acción que lleve a los estudiantes a calcular la distancia de un punto a otro a partir de orientaciones que les permita utilizar el instrumento de medida no convencional propio de la cultura egipcia. La tercera y última situación se denomina *Faraón en Apuros*, en la cual se continúa el trabajo de elementos propios de la cultura egipcia, al hacer énfasis en los ritos, costumbres y celebraciones que se realizaban. Situación que propone pensar en las combinaciones posibles en las que puede vestirse un faraón al utilizar la misma cantidad de



prendas y accesorios.

A continuación, se amplía el contenido de cada situación mencionada. Cabe resaltar, que el discurso que se emplea para la descripción de los dos primeros momentos (histórico y fantástico) es flexible y acorde a la edad de los estudiantes debido a que la sintaxis se desarrolla de acuerdo al contexto de la situación en la que se desenvuelven los mismos; por otra parte el momento de aprendizaje va dirigido a los docentes, ya que incluye las consideraciones para la enseñanza de las matemáticas, como lo son los estándares a desarrollar y la explicación del problema multiplicativo, a partir de diferentes autores.

En este apartado se retoma la metodología que se desarrolló en las AOE, debido a que se considera importante presentar las particularidades y originalidad de las situaciones, las cuales han de permitir el desarrollo de las estrategias de resolución por parte de los estudiantes de manera libre, lo que ha de justificar el papel activo del estudiante en el desarrollo de las mismas.

El Sapu y las monedas legendarias.

***Momento Histórico**¹³: La civilización Inca fue la última de las grandes civilizaciones americanas que logró ser independiente durante la llegada de los españoles, la cultura se encontraba distribuida en lo que hoy se conoce como Perú, Argentina, Colombia, Bolivia, Chile y Ecuador.*

¹³ El momento histórico y el momento fantástico se presentaron de manera literal a los estudiantes.



En la cultura, los sapos eran adorados por sus poderes mágicos. Se tenía la costumbre de arrojar piedras de oro en los lagos los días festivos y se creía que si el sapo comía la piedra se convertiría en oro y se le concedería un deseo al tirador. En homenaje a tantos deseos hechos realidad, la civilización Inca elabora el gran Sapu de Oro, al considerar el juego de destreza donde la danza y la alegría se mezclaban en la celebración del rito.

Momento Fantástico: *El juego del Sapu y las monedas legendarias es caracterizado por las habilidades de puntería y precisión, pues de los lugares donde caiga la piedra depende la cantidad de puntos que se pueden obtener, puntos que posibilitan el terminar victorioso y ganar las monedas Incas legendarias de oro chocolatoso.*

Vamos a transportarnos muchos años atrás e imaginar que hacemos parte de las tribus Incas. En el proceso se conformarán equipos para representar las tribus, a cada equipo se le entregará el tablero que está dividido por casillas amarillas y rosadas que otorgan diferente puntuación. Se debe realizar el registro de los puntos que obtiene cada participante del equipo para luego realizar el cálculo de los puntos obtenidos.

Materiales: Son necesarios cinco tableros (cajas de huevos con espacios pintados en forma de sapo de dos colores diferentes), una piedra, tabla de registro individual y tabla de registro grupal por estudiante.



Descripción: Cada equipo se conformó por cinco estudiantes. Se entregó un tablero a cada equipo y se asignó un número dentro del grupo de 1 a 5 a cada estudiante para determinar el orden en el momento de los lanzamientos.

Las casillas amarillas otorgan 350 puntos debido a que están lejos del sapu y las casillas rosadas 1200 puntos al estar cerca del sapu; gana el equipo que obtenga mayor puntaje después de cada ronda. Cada jugador lanza una piedra de oro y registra cada lanzamiento en la tabla (Ver anexo 3). Al finalizar los siete lanzamientos, los jugadores deben indicar el total de puntos obtenidos por participante.

Cada estudiante debe registrar el puntaje total de su grupo. Los puestos obtenidos en el juego se clasifican de acuerdo a los puntajes y los premios se obtienen de la siguiente manera:

- Primer puesto: Obtiene cuatro monedas Incas legendarias de oro chocolatoso.
- Segundo puesto: Obtiene tres monedas Incas legendarias de oro chocolatoso.
- Tercer puesto: Obtiene dos monedas Incas legendarias de oro chocolatoso.
- Cuarto puesto: Obtiene una moneda Inca legendaria de oro chocolatoso.
- Quinto puesto: No obtiene monedas.

Momento de Aprendizaje: En la situación se aborda el problema multiplicativo denominado *relación proporcional entre dos espacios de medida* definido por Maza como la relación, en la cual “se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente



un número de veces” (1991, p. 28).

Estándares relacionados

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (de manera especial, el cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.

El misterio de la tumba.

Momento Histórico: Las unidades de medida fueron las primeras estandarizaciones desarrolladas por los seres humanos, los egipcios necesitaban las medidas para realizar muchas de sus tareas diarias, como la construcción de casas, la creación de ropa, la preparación de alimento y la medición el tamaño de sus terrenos.

Muchos de los sistemas de medición estuvieron basados en el uso de las partes del cuerpo humano y los objetos utilizados por los reyes o personas de la monarquía; median a partir del pie, el pulgar, el codo, el palmo, la yarda y la vara.

En Egipto, el objeto de medida común era la vara que representa la utilizada por el faraón. Los egipcios medían sus terrenos con la vara y determinaban la cantidad de veces que se repetía



para medir la longitud entre dos lugares.

Además de los sistemas de medición que utilizaban, la cultura egipcia tenía costumbres como la de enterrar a su máximo monarca (el faraón) dentro de su tumba con sus valiosas pertenencias.

Momento Fantástico: *Con el fin de conservar intactos los tesoros egipcios, los habitantes decidieron poner candados a las tumbas de los faraones para protegerlas de visitantes malintencionados que quisieran hurtarlas. El candado solo abre con el código determinado por la distancia que hay desde la entrada de la pirámide hasta la tumba del faraón; medida calculada a través de las varas que eran la unidad de medida utilizada en ese tiempo.*

El deseo de que todos utilizaran los sistemas de medida provocó grandes peleas y guerras en muchas civilizaciones; tales guerras permitieron que fuese conocida por muchos de los habitantes egipcios. Todo lo anterior quiere decir que la población egipcia utilizaba sus propios sistemas de medida y estaba prohibido medir con otro artefacto que no fuera propio de la cultura.

En la actualidad, los arqueólogos han intentado descifrar el código que abre las tumbas de los faraones para estudiar los tesoros, pero los códigos han sido difíciles de descifrar ya que están determinados por la distancia en varas entre la entrada de la pirámide y la tumba del



faraón. A pesar de sus esfuerzos, los arqueólogos sólo han obtenido la siguiente información:

- *Tercera tumba: Se encuentra a una distancia de 7 varas.*
- *Primera tumba: Se encuentra a 3 veces la distancia de la tercera tumba.*
- *Segunda tumba: Se encuentra a 5 veces la distancia de la tercera tumba.*
- *Cuarta tumba: Se encuentra a 8 veces la distancia de la tercera tumba.*

Intentemos ayudar a los arqueólogos a descifrar el código, para lograrlo se debe utilizar la información anterior y verificar los resultados en los candados de las tumbas.

Materiales. Para la realización se necesitan cuatro candados con sistema de apertura de códigos y una tabla que facilite la recolección de datos.

Descripción. Se entrega la tabla de registro (ver anexo 4) para que los estudiantes ingresen la cantidad de varas que determinan la ubicación de cada tumba según las orientaciones expuestas con anterioridad. El estudiante después de realizar el cálculo de las diferentes distancias en relación con la vara, utilizará los resultados para abrir el candado de cada tumba.

Momento de Aprendizaje: En la situación se aborda el problema multiplicativo denominado *Repetición de un único espacio de medida*, el cual se presenta en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) con el nombre de factor multiplicante. Dichos problemas se representan a través de ejemplos como “Juan tenía tres carritos. María tenía cuatro veces más. ¿Cuántos



carritos tiene María?” (p. 33) problemas en los que se evidencia un solo espacio de medida que hace referencia a la cantidad de varas en una de las distancias del camino hacia la tumba.

Estándares relacionados

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (en espacial, el cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto
- Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.

Faraón en apuros.

***Momento Histórico:** El antiguo Egipto era liderado por faraones, los cuales eran considerados reyes, seres casi divinos que tenían el poder de todo el territorio y todo cuanto habitara en él. Llegaron a ser tan importantes que incluso en el momento de su muerte, se les adoraba para convertirlos en dioses. Los faraones portaban trajes ostentosos para sobresalir entre los demás y los accesorios que utilizaban dependían de las características de su poder. A lo largo de tres mil años existieron muchos faraones que podían llegar a ser grandes conquistadores, seres bondadosos, honestos, perezosos, egoístas o hasta malvados.*



En el antiguo Egipto se realizaban muchísimas fiestas a lo largo del año, se celebraban por cada luna nueva y por cada estación del año:

- *Akhet (crecida) de julio a noviembre*
- *Peret (germinación) de noviembre a marzo*
- *Shemun (cosecha) de marzo a julio*

Momento Fantástico: *Todos los faraones como líderes y representantes de la comunidad debían asistir a las celebraciones que se realizaban y portaban la mejor vestimenta, trataban de no repetir los atuendos para no sufrir vergüenza.*

El faraón Kefrén, contaba con 3 tipos de coronas diferentes y 4 cinturones, pero se encontraba en grandes apuros, debido a que al momento de comenzar su reinado, no sabía de cuántas maneras diferentes se podía vestir para poder asistir a las celebraciones, de tal manera que no repitiera ninguna vestimenta. Por lo cual, acude a la ayuda de los exploradores, quienes deben organizar sus coronas y cinturones, con el fin de calcular las diferentes vestimentas que se pueden formar con estos accesorios.

Materiales. *Tres coronas egipcias elaboradas en cartón, cuatro cinturones de tela de cuatro colores diferentes.*

Descripción. *Los estudiantes se organizaron en tres equipos, escogieron a la persona que representará el rol del faraón para probarle las coronas y los cinturones.*



Se les entregó a cada grupo una hoja en blanco para que consignen la información que les sea de utilidad para responder a la pregunta ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse el faraón con sus 3 coronas y 4 cinturones?

Momento de Aprendizaje: Se presenta el problema denominado *Composición cartesiana entre dos espacios de medida*. Maza lo define como “problemas donde han de combinarse los elementos de cada uno de los conjuntos de datos originales [...] estos problemas responden a un modelo binario de la operación” (1991, p. 27). El MEN (1998) representa el anterior tipo de problema multiplicativo a partir del siguiente ejemplo “*Un carrito de juguete se fabrica en tres tamaños distintos y en cuatro colores diferentes, ¿cuántos carritos distintos se pueden comprar?*” (p. 33).

Estándares relacionados

- Describo comparo y cuantifico situaciones con números en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico si a la luz de los datos de un problema, los resultados son o no razonables.

Los AOE *viaje en el tiempo* permitió acercar a los estudiantes a una motivación constante en consecuencia con carácter dinámico, interactivo e histórico de las situaciones planteadas, en las cuales, los estudiantes asumen el rol de exploradores y dan solución a diferentes situaciones



multiplicativas en relación con el otro. No obstante, las acciones presentes en la AOE propuesta en esta investigación no se relacionaban con las necesidades de un contexto real, debido al componente simulado de la misma. En consecuencia, se tuvieron en cuenta los intereses e inquietudes por parte de los estudiantes hacia la posibilidad de vivenciar los procesos, retos y aprendizajes de viaje en el tiempo; y a partir de ello se propuso la realización de un viaje real. Intereses que le sugirieron a los investigadores modificar las acciones y operaciones de la *actividad de enseñanza*, con la finalidad de dar respuesta a la propuesta de los estudiantes tras el desarrollo de la AOE y que dispone como se ha argumentado en la investigación, el contexto favorable y oportuno para el desarrollo de aprendizajes resultado de la interacción entre pares, las situaciones orientadas por la AOE y los aprendizajes desarrollados por los estudiantes.

Por consiguiente, se redirecciona la *actividad de aprendizaje* con relación a los planteamientos de Moura (2010) en los que se reconoce que la actividad de enseñanza posibilita la reflexión constante del docente que durante el proceso ha de reorganizar sus acciones, con la finalidad de propiciar la relación coherente entre los objetivos propuestos, las acciones y operaciones de los estudiantes, y en este sentido se diseña en la investigación la AOE planeación del viaje; la cual se describe a continuación.

Actividad Orientadora de Enseñanza: *Planeación del viaje*

De acuerdo a las interacciones que desarrollaron los estudiantes en la AOE *Viaje en el tiempo*, manifestaron el deseo de hacer prácticas la experiencias y aprendizajes, al proponer



vivenciarlos en un contexto real: *Profe, ¿y si hacemos un viaje de verdad?*

En consecuencia, los investigadores identificaron las motivaciones presentes en los estudiantes, que permitieron la visualización de la necesidad del nuevo contexto, identificar las condiciones para hacer posible la realización del viaje como la oportunidad para el desarrollo de la actividad de enseñanza y aprendizaje que recogió todos los elementos planteados en la AOE (necesidades, motivos, acciones y operaciones en relación con el otro y con el contexto) y que según Moura (2000) expone la importancia de la necesidad como elemento desencadenador de la situación y las interacciones personales como procesos indispensables en el momento del aprendizaje.

El cambio de la AEO surgió a partir de los intereses de los estudiantes, lo cual hizo que la resolución de las situaciones se generara a partir de una necesidad, en este caso la planeación de un viaje, es así como se le dá importancia a los intereses de los estudiantes, en este sentido se genera una relación con los intereses de la AOE, que como afirma Moura et al. (2010):

Para que una actividad se configure como humana es esencial, entonces, que sea movida por una intencionalidad, siendo esta en esta vez, una respuesta a la satisfacción de necesidades que se le imponen al hombre en su relación con el medio en que vive, natural o culturizado (p. 17).

Se adaptan por consiguiente situaciones propias del contexto real propuesto por los estudiantes en relación con el objeto matemático expresado en los diferentes problemas multiplicativos.

Para la planeación del viaje se tuvo en cuenta situaciones necesarias para la realización y ejecución del mismo. Los estudiantes se sumaron en la nueva iniciativa al tratar de enunciar y describir dichas condiciones y presentar ideas como: *debemos llevar comida, hay que saber cuánto dinero tenemos que llevar y en que nos vamos a ir, deberíamos llevar juguetes, debemos ir de ropa cómoda*, entre otras. Es así como se modificó el objetivo-motivo de la actividad de aprendizaje (como se muestra en la tabla 4), y permanecen de manera general las acciones y operaciones, las cuales van encaminadas hacia los procedimientos y estrategias que desarrollan los estudiantes, y se retoman en el análisis.



Objetivo / Motivo	Acciones	Operaciones
Realizar un viaje, al tener presente los elementos necesarios para su planeación.	Resolución a las diferentes situaciones multiplicativas.	Diferentes estrategias de resolución que desarrollar los estudiantes de las situaciones multiplicativas.

Tabla 4: Características de la actividad de aprendizaje de la AOE: Planeación del viaje. Elaboración propia.

Se desarrolló entonces la nueva AOE denominada *planeación del viaje*, para la cual se tuvo presente las consideraciones que posibilitaron el desarrollo con situaciones multiplicativas, como lo son el costo de los pasajes del autobús que vincula los problemas de *relación proporcional entre dos espacios de medida*; los diferentes menús que se han de considerar para



la alimentación, problemas de *composición cartesiana entre dos espacios de medida*; y el itinerario del día, problemas de *repetición de un único espacio de medida*.

Los elementos que se retomaron para la realización del viaje partieron de la nueva necesidad contextualizada, y se estructuraron en tres momentos clave, con la finalidad de posibilitar la relación del sujeto con el entorno social, a la vez que se propiciaron espacios para el desarrollo de estrategias propias de resolución con relación al contexto a las situaciones multiplicativas inmersas en las diferentes consideraciones ya mencionadas. En consecuencia, el viaje se nutre del espacio de interacción que permitió el diálogo de ideas y opiniones entre los estudiantes y el docente. Dichos momentos se denominan de la siguiente manera:

- *Contextualización*, se refiere al planteamiento de ideas por parte de los estudiantes para definir los diferentes elementos que se consideraron necesarios para llevar a cabo el viaje. Se propicio un conversatorio acerca de la importancia de cada elemento propuesto al tener en cuenta su pertinencia en relación con la situación.
- *Propuestas*; se refiere al momento en el cual los estudiantes presentaron diferentes ideas con respecto a la situación que se resolvía, ideas que giraron alrededor de las opiniones y los conocimientos que se consideraron útiles para la realización de la situación. El momento se llevó a cabo por grupos de trabajo encargados de las discusiones y el desarrollo de estrategias de resolución para las diferentes situaciones multiplicativas propuestas para la realización del viaje.



- *Interacción*; hace referencia al momento en que cada grupo de trabajo expuso las ideas consensuadas, con la finalidad de escoger la propuesta con las cualidades encaminadas en la pertinencia de lo requerido.

A continuación se exponen las condiciones para la realización del viaje, que hicieron parte de la nueva AOE *Planeación del viaje*, consideradas con relación a lo que propusieron los estudiantes para la realización del viaje, por lo cual se realiza una descripción detallada de cada uno de los momentos, al igual de considerar los estándares de matemáticas que se han de desarrollar en cada una de las situaciones, como una ayuda para los docentes, en el momento de querer aplicarlas.

Dinero a gastar

Contextualización: El dinero es visto como elemento fundamental para la realización del viaje, pues permitió pagar el transporte, adquirir la alimentación y conseguir los elementos necesarios para hacer del viaje la experiencia más agradable. Por lo tanto, es importante saber cuál es la cantidad de dinero por estudiante, que permite cubrir los gastos.

Propuestas: En los grupos de trabajo se establecieron acuerdos acerca de la cuota apropiada para la realización del viaje, se visualizó la cantidad de dinero que se obtendría entre todas las personas que participaron de la experiencia según la cuota de transporte definida de acuerdo a los



costos de los diferentes tipos de transporte público que los estudiantes conocen.

Interacción: Una persona de cada grupo se dirigió al tablero en función de exponer a la totalidad de la clase la propuesta para saber cuál es la cuota de dinero adecuada para el pago del transporte. Se argumentó qué tipo de transporte público cobra el dinero consideraron los estudiantes y la trayectoria que realiza el vehículo al tener en cuenta el lugar del viaje (el jardín botánico) ubicado cerca de la estación universidad del Metro de Medellín.

Estándares relacionados

- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Uso diversas estrategias de cálculo (en especial, el cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.

Menú a consumir

Contextualización: La alimentación es un elemento fundamental en la vida, permite al



cuerpo mantenerse con energía para realizar tareas cotidianas. Sin buena alimentación el cuerpo no tiene la fuerza, la energía, el ánimo y la destreza que necesita para desarrollar cualquier actividad; por consiguiente, es necesario incluir la alimentación saludable y balanceada y atender a las reflexiones que se generan a partir de la pirámide alimenticia, la cual, muestra la clasificación de los alimentos por niveles, lo que permite visualizar la combinación y cantidad adecuada en que se deben ingerir los alimentos en la premisa de lograr una alimentación variada y balanceada.

Propuestas: Los grupos de trabajo se encargaron de idear un menú saludable y fácil de transportar, para la alimentación durante el viaje. Además, debieron tener en cuenta que los alimentos que hacen parte del menú no perezcan en las condiciones de viaje, tengan sabor agradable, sean balanceados, puedan ser de fácil adquisición, preparación y de práctico desplazamiento. Los grupos consideraron además que el menú constara sólo de un alimento sólido y una bebida.

Cada grupo de trabajo investigó cuál es el precio del menú que eligieron y comunicaron en la clase; valor que fue puesto en discusión ante todo el grupo para lograr obtener en consenso el menú ideal, al considerar el sabor y el costo.

Interacción: Una persona de cada grupo salió al tablero para tomar vocería frente a las reflexiones realizadas en equipo y dar a conocer el menú sugerido por su grupo; incluidas las



diferentes propuestas de bebidas, alimentos y su costo. Se motivó a cada grupo a crear todos los posibles menús que pudieran salir con los alimentos.

Luego, se realizó en conjunto una discusión de las diferentes combinaciones que realizaron los estudiantes, apoyados en una tabla de composición cartesiana con las imágenes correspondientes a los alimentos propuestos; obtenidas los diferentes menús se asignaron los valores que los estudiantes investigaron para los alimentos propuestos, con el fin seleccionar el menú que se adecuó, tanto a los gustos de los estudiantes como a sus posibilidades económicas.

Estándares relacionados

- Uso diversas estrategias de cálculo (en forma especial, el cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias.

Itinerario a cumplir

Contextualización: Se concretaron los momentos que hicieron parte del viaje y consideró el tiempo determinado para cada uno. Para lo anterior, se tuvo presente el tiempo con que se contaba para la realización del mismo, al saber que comienza a las doce del mediodía y finaliza a



las seis de la tarde. Se motivó a los estudiantes a proponer situaciones que quieran, se puedan realizar y definir su tiempo de ejecución para lograr la asignación adecuada.

Propuestas: Al tener en cuenta que la alimentación es momento importante durante el viaje (periodo de descanso, el cual duraría 30 minutos) se distribuyó el tiempo de los diferentes momentos en relación con la duración de la misma, para luego en los grupos de trabajo determinar el tiempo para cada actividad, con la finalidad de establecer el itinerario que guiará al estudiante en el transcurso del viaje. Se solicitó a los estudiantes tener presente los siguientes aspectos, los cuales fueron propuestos por los investigadores, al retomar lo que los estudiantes expresaron querer hacer en el viaje.

- Al considerar el desplazamiento de ida y vuelta, requiere de cuatro veces el tiempo del descanso.
- La primera actividad propuesta debe durar 2 veces el tiempo del descanso, más la mitad del tiempo del descanso.
- La segunda actividad propuesta debe durar 4 veces el tiempo del descanso.
- La tercera actividad propuesta debe durar la mitad del descanso.

Interacción: Los grupos compartieron la organización del horario para determinar en conjunto si todos los momentos cumplen con las condiciones enunciadas. Realizada la discusión en grupo y orientadas las posibles correcciones, cada grupo elaboró su propio itinerario, el cual utilizó el día del viaje (Ver anexo 5).



Estándares relacionados

- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
- Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.
- Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias
- Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.

Carta al coordinador

Contextualización: Al considerar que para la realización del viaje es indispensable contar con la aprobación de la persona encargada de los asuntos administrativos de la institución, se realizó una carta formal por parte de los estudiantes, en la cual se informó al coordinador acerca las diferentes situaciones que se consideraron para poder realizar el viaje.



Propuestas: Los estudiantes en los grupos de trabajo, realizaron la carta, en la cual expusieron los diferentes elementos discutidos para realizar el viaje (dinero, menú e itinerario) y las estrategias que posibilitaron tomar las decisiones. La carta tuvo su estructura formal, debido a que iba dirigida al coordinador de la institución, por ello el docente orienta las pautas generales para escribir la carta.

Interacción: Realizada la carta, cada grupo de trabajo eligió al vocero que se encargará de leerla para todo el grupo con el propósito de entregarla al coordinador y así obtener la aprobación del viaje.

Al tener presente la metodología que se implementó en la presente investigación, se presenta a continuación los análisis y resultados referentes a las estrategias de resolución que desarrollaron los estudiantes del grupo de tercero de primera, en las situaciones de las AOE; para lo cual se reconocen las categorías de análisis que identificaron los investigadores, los diferentes problemas multiplicativos y las representaciones que plantearon los estudiantes con relación a dichos problemas.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3



¿Qué se desarrolla a partir de las AOE?

El presente apartado recoge la problemática motivo de la misma, los elementos teóricos en los que se apoya la metodología escogida para abordar la problemática. El momento del análisis supone la esencia del trabajo del investigador al recopilar la información en reflexiones desarrolladas a lo largo de la práctica pedagógica y consignar la información relevante para el campo investigativo y la Educación Matemática.

Para el reconocimiento de las diferentes estrategias de resolución que desarrollaron los estudiantes a las diferentes situaciones multiplicativas propuestas a partir de las AOE, se propone un análisis a partir del objeto matemático (situaciones multiplicativas) para el cual se reconocen las categorías de análisis en dirección a las posibles estrategias de resolución y representación que se utilizan para dar a conocer sus procedimientos y cálculos.

Para comenzar a desplegar los análisis e interpretaciones de las acciones y operaciones realizadas por los estudiantes en las AOE, se presentan las categorías de análisis que se establecen a partir de las reflexiones preliminares que desarrollaron los investigadores en sus diarios de campo, los cuales permitieron el reconocimiento de las características comunes que presentaron las estrategias de resolución de los estudiantes, a partir de las diferentes situaciones multiplicativas.



Clasificación de las estrategias de resolución

En el razonamiento de los procedimientos multiplicativos, se presentan de manera general diferentes estrategias que desarrollaron los estudiantes para dar solución o acercarse al cálculo de las situaciones multiplicativas, los cuales se relacionan con los conocimientos previos, y presentan características diferentes que permite la clasificación por parte de los investigadores, lo que lleva a presentarlas como las categorías que orientarán el análisis.

A continuación se presentan dichas categorías, seguidas de una explicación que retoma las consideraciones de los investigadores y el vínculo con los componentes teóricos con relación al objeto matemático.

Estrategias aditivas.

Son aquellas en las que se logran reconocer los dos espacios de medida inmersos en la situación multiplicativa, la cual se basa en la implementación de la adición como única estrategia de solución.

Autores como Maza (1991) e Itzcovich (2007) reconocen que la suma reiterativa es una de las estrategias de resolución que suelen utilizar los estudiantes al tener los primeros acercamientos a situaciones multiplicativas, además investigaciones como la realizada por Canales (2006) y



Espinoza, Medellín y Quintero (2015), permiten percibir el uso habitual de la adición, por parte de los estudiantes como una manera de proceder ante un problema multiplicativo.

Estrategias multiplicativas.

Se basan en la implementación de multiplicaciones pequeñas adquiridas a partir de un estudio o mecanización previa, además se evidencia un reconocimiento del valor posicional.

La memorización de las tablas de multiplicar ha sido una de las estrategias de enseñanza con la que están relacionados los estudiantes, por lo cual suelen hacer uso de pequeñas multiplicaciones que recuerden para dar solución a situaciones que lo requieran. Autores como Itzcovich (2007) reconocen que los recursos memorizados, como lo son los productos pequeños. Es por ello que se considera común que los estudiantes puedan hacer uso de productos que conozcan para dar solución a situaciones multiplicativas.

Estrategias mixtas.

Son aquellas que implementan la combinación de adiciones y multiplicaciones para dar solución a una situación multiplicativa.

En esta estrategia se vinculan conocimientos previos de los estudiantes al utilizar la adición como un elemento para dar solución a una situación, acompañada al mismo tiempo de la solución de pequeños productos que se presentan como cálculos sencillos para resolver



determinadas situaciones. Itzcovich (2007) plantea al respecto la posibilidad de proponer diversas estrategias que puedan ser usadas de manera simultánea con la finalidad de que los estudiantes controlen los pasos que realizan y pueden llegar a un resultado.

Para el análisis de las estrategias de resolución también es necesario considerar las diferentes representaciones que han de implementar los estudiantes para dar a conocer sus ideas, las cuales se retoman para el análisis a partir de las diferentes herramientas para la recolección de información.

Representaciones de las estrategias

La resolución de problemas aritméticos en la enseñanza de la Educación Básica Primaria, como lo propone el MEN (1998) y el discurso de Maza (1991), reconocen las estrategias de solución empleadas por el estudiante, no influidas por la escolarización, como un aspecto fundamental en el desarrollo del aprendizaje. Para poder visualizar y analizar las estrategias que implementan los estudiantes al enfrentarse a las situaciones propuestas, se brinda atención a las diferentes maneras de expresión y lenguaje que han de ser un elemento fundamental en la teoría histórico cultural, al tener presente que “es un medio que permite no solamente asimilar los objetos, reconocerlos y recordarlos, sino también planificar y regular la acción” (Montealegre, 2005, p.33).

Por tanto se reconoce el uso de diferentes representaciones que utilizaron los estudiantes para



dar a conocer sus ideas, algunas de manera escrita, utilizando ilustraciones, ayudas con objetos físicos y el lenguaje; autores como Oviedo y Knashiro (2012) mencionan que “los conceptos matemáticos deben recurrir a distintas representaciones para su estudio, y para llevarlo a cabo resulta importante no solo el objeto matemático en sí, sino lo que ayuda a su comprensión” (p. 30).

En consecuencia a los planteamientos anteriores, se consideran las diferentes representaciones que posibilitan dar a conocer las estrategias que desarrollan los estudiantes ante las diferentes situaciones de las AOE.

- *Representación verbal:* en la cual el estudiante hace uso del lenguaje verbal para dar a conocer sus ideas o percepciones que posibilitan explicar su estrategia de resolución.
- *Representaciones simbólicas:* hace referencia a las producciones escritas en las cuales se utilizan símbolos configurados por números, letras y signos matemáticos, se considera que dicha representación supone una abstracción, en la cual los símbolos y signos tienen sentido y permiten dar a conocer la estrategia del estudiante.
- *Representaciones gráficas o icónicas:* En la cual se incluyen los esquemas, gráficos y dibujos que el estudiante elabora en relación a lo que comprende de la situación, que se sirven principalmente como una ayuda visual para el estudiante que ha de posibilitar el cálculo.



La clasificación de las posibles estrategias de resolución y las diferentes representaciones que emplean los estudiantes, se realizan al tener presente los tres problemas multiplicativos inmersos en las situaciones de las AOE, debido a que cada uno de ellos supone dificultades diferentes en cuanto a su interpretación y cálculo.

Por lo anterior, para el análisis de las estrategias que desarrollan los estudiantes para la resolución de las situaciones, se consideran las diferentes maneras de representación y las estrategias de resolución desarrolladas por los estudiantes a partir de los diferentes de problemas multiplicativos.

La estructura que se presenta para los análisis se centra entonces en las estrategias de resolución de los estudiantes a las situaciones que hacen parte de las AOE, las cuales retoman las posturas teóricas y las consideraciones de los investigadores para poder presentar el análisis en relación con interés de la investigación. A continuación se presenta la ruta que se retomó para la realización del análisis de las AOE un viaje en el tiempo y planeación del viaje:

1. Descripción de la situación de la AOE, con relación al problema multiplicativo implícito.
2. Reconocimiento de las estrategias de resolución que desarrollan los estudiantes, las cuales se clasifican en las categorías de análisis.
3. Consideraciones y reflexiones de los investigadores a partir de lo desarrollado por los estudiantes en cada una de las situaciones; dichas consideraciones se complementan con las



posturas de los diferentes autores con relación al objeto matemático.

Estrategias de resolución de la AOE: *Viaje en el tiempo*

Al tener presente las categorías de análisis propuestas con relación al objeto matemático (estrategias aditivas, multiplicativas y mixtas), se comienza por analizar las estrategias que desarrollan los estudiantes en las primeras situaciones que componen la AOE *Viaje en el tiempo*. Como se menciona en la metodología de la investigación, las primeras situaciones reconocen un componente histórico en relación con características de algunas culturas, que fueron adaptadas por los investigadores con la finalidad de generar un contexto auténtico y que permitiera a los estudiantes involucrarse en las situaciones.

En la situación del *Sapu y las monedas legendarias* se propone un problema de *relación proporcional entre dos espacios de medida*, en el cual uno de los espacios de medida es el número de lanzamientos y otro espacio de medida es la cantidad de puntos que se otorgan según el color que indique cada lanzamiento, ya que se obtienen puntos diferentes según la zona en la que caiga la piedra. La ilustración 14 muestra la acción que realizaron los estudiantes al inicio de la situación, en la cual primero realizan los lanzamientos y llevan los registros del lugar en el que cae la piedra, para posteriormente poder realizar el cálculo.



Ilustración 14: Situación del Sapu de Oro, AOE un Vieja en el Tiempo, 12 de Agosto de 2016.

En particular en las ilustraciones 15 y 16 que se presentan a continuación, se observa cómo los estudiantes comienzan a realizar su cálculo a través de la escritura de símbolos numéricos, para el cual, toma la tabla de registro para identificar el número de lanzamientos y el color respectivo para identificar el número de puntos, al tener en cuenta que se tienen 15 lanzamientos en zona rosada que indica 350 puntos y 3 lanzamientos en zona amarilla que indica 1200 puntos. El estudiante reconoce el número de veces que ha de repetirse los puntos, y utiliza la estrategia aditiva a partir de sumas reiteradas para dar solución al problema.

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

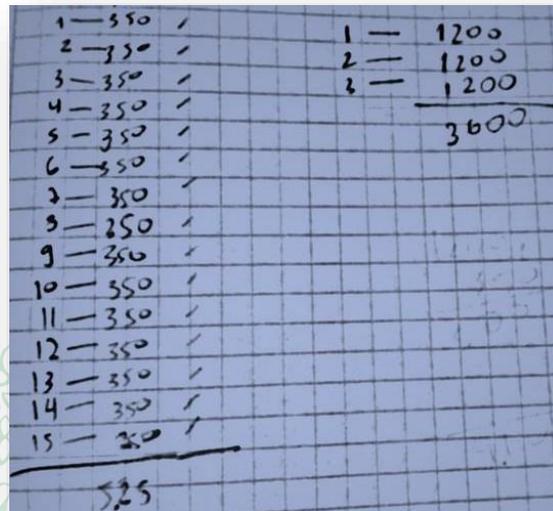


Ilustración 15: Estrategia aditiva. Sapu de Oro. AOE Viaje en el tiempo, 12 de Agosto de 2016.

La estrategia aditiva, fundamentada a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, es la que prima en la resolución de la situación, aunque varía la estructura de las representaciones simbólicas, es decir los estudiantes utilizan representaciones simbólicas diferentes pero acuden a la misma estrategia aditiva, como se observa en la ilustración 15 en la cual se visualizan adiciones distribuidas de manera vertical, mientras que en la ilustración 16, las adiciones se presentan de manera horizontal y se acude a la agrupación de términos.

suma reiterada, así como se muestra en la siguiente ilustración.

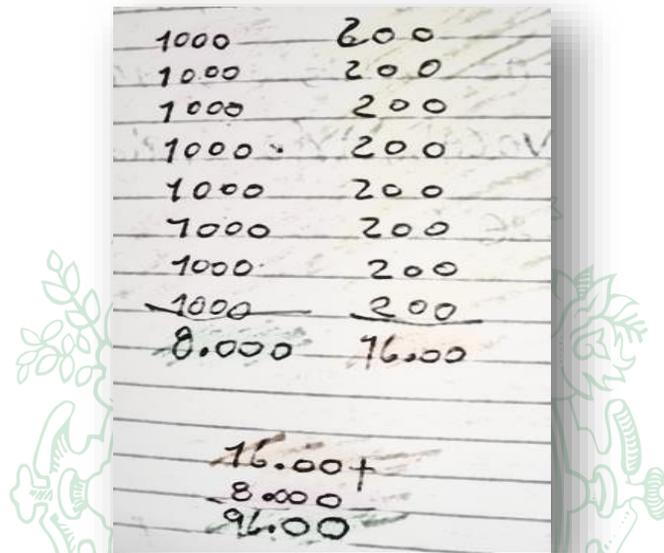


Ilustración 17: Estrategia aditiva a partir de la descomposición de cantidades. El Sapu y las monedas legendarias.

En la ilustración 17 el estudiante opta por descomponer 1200, al tomar las dos centenas (200) y la unidad de mil (1000), para después realizar una suma reiterada, según la cantidad de veces que debe repetirse esta cantidad, entendida como el número de puntos. Es importante recordar que la de descomposición y agrupación de cantidades son procedimientos que posibilitan la comprensión del número y el sistema de valor posicional.

Para esta situación ningún estudiante recurre a implementar dibujos que le permitan llegar a una solución, esto se debe al tamaño de las cantidades involucradas en el problema, ya que con relación a lo que expone Itzcovich (2007), el aumento del tamaño de los números posibilita la



identificación de la multiplicación como una herramienta que permite resolver el problema, tratándose de alejar de representaciones primarias, como lo son los dibujos y esquemas, sin embargo se reconoce que “los primeros recursos del cálculo de los niños se apoyan principalmente en dibujos, esquemas, conteos o bien, en sumas reiteradas” (p. 91) , y para este caso el tamaño de las cantidades no le posibilita a todos los estudiantes, implementar un razonamiento simplificado que permitiera expresar las cantidades como factores de una multiplicación.

Ahora al observar las estrategias de resolución que desarrollan los estudiantes a otra de las situaciones propuestas, como lo es *el misterio de la tumba*, en la cual se abordan problemas de *repetición de un único espacio de medida*, e intervienen cantidades pequeñas para el cálculo. En esta situación los estudiantes deben seguir unas instrucciones las cuales indican a qué distancia se encuentran las tumbas con respecto al número de veces que se repite una cantidad de varas.

En la ilustración 18 que se presenta a continuación se observa cómo el estudiante por medio de la representación escrita, utiliza símbolos y signos matemáticos, identifica la cantidad de varas que se deben utilizar para la distancia de cada una de las tumbas, al considerar que la primera tumba está a 3 veces la distancia de la tercera tumba, la segunda tumba está a 5 veces la distancia de la tercera tumba, la tercera tumba está a una distancia de 7 varas.

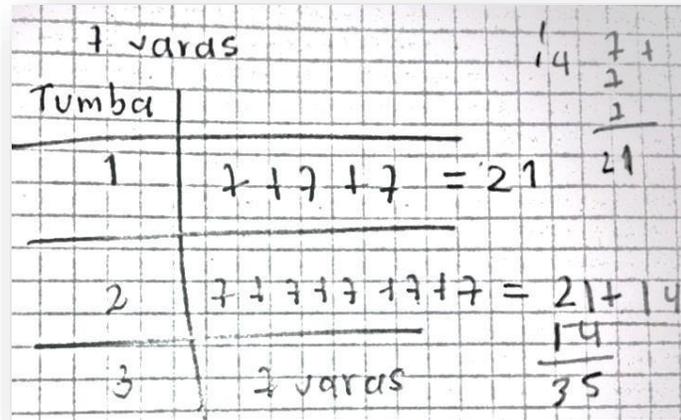


Ilustración 18: Estrategia aditiva. El misterio de la tumba. AOE: Viajar en el Tiempo, 24 de Agosto de 2016.

Se evidencia cómo el estudiante reconoce el espacio de medida que ha de repetirse en este problema, según el número de veces que se indique, en este caso la estrategia de resolución es aditiva, en la cual el estudiante realiza una suma reiterada de la cantidad del espacio de medida. Para calcular el número de varas que hay en la distancia de la primera tumba suma 3 veces 7, al utilizar el algoritmo convencional de la suma, al acompañar su cálculo con el conteo con los dedos; Para el caso del cálculo de la distancia de la segunda tumba, el estudiante acude al resultado anterior y agrega el número 14 que ha de ser el resultado de la suma de los dos 7 que quedaban faltando para completar el número de veces que se repita la cantidad.

En otras estrategias de resolución que se observaron, se reconoce la presencia de representaciones gráficas, en la cual se apoyan de dibujos, esquemas y escritura de símbolos matemáticos para expresar sus cálculos, que a la vez retoman procedimientos aditivos y

multiplicativos como complementarios para llegar a la respuesta, como se evidencia en la siguiente ilustración.

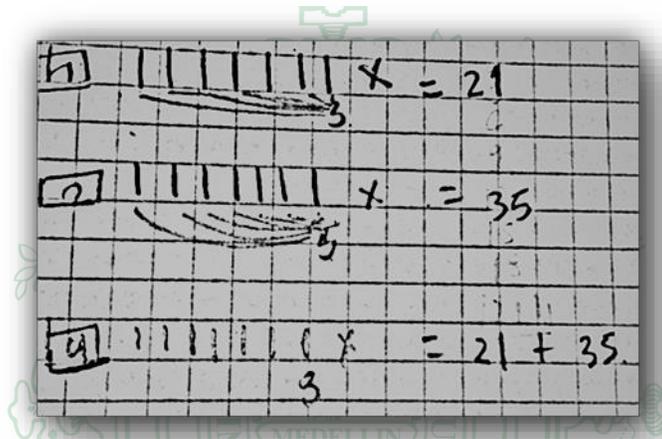


Ilustración 19: Estrategia mixta. El misterio de la tumba. AOE: Viajar en el Tiempo, 24 de Agosto de 2016.

El estudiante en esta estrategia, reconoce el espacio de medida y lo registra a partir de líneas que han de representar las 7 varas, utiliza además el signo “x” que en este caso indica una multiplicación, en la cual uno de los espacios de medida son las 7 varas y el otro espacio de medida el número de veces que se repiten, 3, 5 y 8 respectivamente. Se realizan algunas representaciones gráficas que se evidencian a partir de uniones con cada uno de los factores, para indicar hasta qué punto necesita calcular el producto, es claro entonces cómo el estudiante acude a la realización de pequeños productos que le permiten dar solución a la situación, de igual manera utilizan los resultados de los dos primeros cálculos para dar solución la tercera situación, en el cual el resultado de multiplicar las 7 varas 8 veces, es lo mismo a sumar el resultado de 7 por 3 con el resultado de 7 por 5; al considerar la realización de algunos productos y la utilización de la adición



entre dichos productos para obtener la solución, se determina esta estrategia de resolución como estrategia mixta.

Se evidencia entonces como el tamaño reducido de la cantidad de los factores permite a los estudiantes el uso de gráficos para apoyar su cálculo, además a diferencia de lo que expone Itzcovich (2007), en las estrategias de solución de la situación de la *Tumba misteriosa* las cantidades pequeñas dieron paso a recurrir la multiplicación para llegar a la solución.

Cabe reconocer además que las estrategias que desarrollan los estudiantes deben señalar el producto correcto, ya que posterior a los cálculos, los estudiantes introducen los dígitos del resultado en un candado que solo había de abrirse si la respuesta era correcta, es por esto que en el momento en que verifican el resultado y no consiguen abrir el candado, revisan sus cálculos y acuden a realizar sumas reiteradas para confirmar los productos.

Por otro lado en la situación *Faraón en apuros* en la cual se aborda el problema de *composición cartesiana entre dos espacios de medida*, se presenta una dificultad por parte de los estudiantes en poder expresar de cuántas maneras diferentes puede vestirse el faraón, al considerar que tiene 3 coronas y 4 cinturones. Autores como Maza (1991) reconocen que “las soluciones multiplicativas alcanzadas de un modo más o menos directo, son las únicas que pueden solucionar estos problemas” (p. 57), debido a que los problemas de composición cartesiana o combinación dispone de dos cantidades iniciales, las cuales han de ser de diferente naturaleza que la cantidad resultante, lo que dificulta expresar soluciones a partir de adiciones.



Una de las primeras interpretaciones que realizan los estudiantes al escuchar la situación, hizo alusión a una correspondencia biunívoca, en la cual afirmar que a cada elemento de uno de los espacios de medida, ha de corresponderle un elemento del segundo espacio de medida, por lo que afirman que el faraón podría vestirse de tres maneras diferentes sin utilizar uno de los cinturones. Dicha expresión permite reconocer que los estudiantes no están familiarizados con los problemas de combinación, por lo cual se hace pertinente involucrarlos en una situación que les permita clarificar la necesidad de combinar todos los elementos de una colección con todos los otros elementos de la otra.

Después de las discusiones de lo que requiere una combinación, los estudiantes comienzan a hacer uso de los materiales físicos que representan las coronas y los cinturones con los cuales contaba el faraón para poder vestirse.

Diálogo de la situación faraón en apuros

I: *Bueno chicos y ¿cómo van hacer para saber de cuántas maneras diferentes puede vestirse el faraón con las 3 coronas y los cinturones?*

E1: *Pues profe, como tenemos acá las tres coronas y los cinturones, vamos vistiendo a uno de los niños y contamos cuántas nos dan.*

I: *Y qué harían si no hubieran llegado las coronas y los cinturones*

E1: *Jum! Profe muy difícil.*

E2: *Pues profe, las imaginamos o las dibujamos y ya,*



Ilustración 20: Diálogo con los estudiantes. Faraón en apuros, AOE: Viaje en el Tiempo, 31 de Agosto de 2016.

El diálogo anterior se evidencia que los estudiantes acuden al material físico y los dibujos como ayuda para poder pensar en la solución al problema, esto se debe a la naturaleza del problema multiplicativo que hace complejo el cálculo de manera directa, ya que no posibilita un cálculo a partir de suma reiteradas, sino que requiere de un conocimiento maduro de la multiplicación en su concepción binaria, como lo reconoce Itzcovich (2007). En un primer momento los estudiantes visten a uno de sus compañeros y le asignan a cada vestimenta un número que les posibilita llevar la cuenta, sin embargo en ocasiones olvidaban las combinaciones que ya habían formado, lo que les dificultó las cuentas. Es por esto que algunos estudiantes optan por cambiar la estrategia de registro, para utilizar dibujos y esquemas que les ayuden a resolver el problema como se muestra en la ilustración 21.

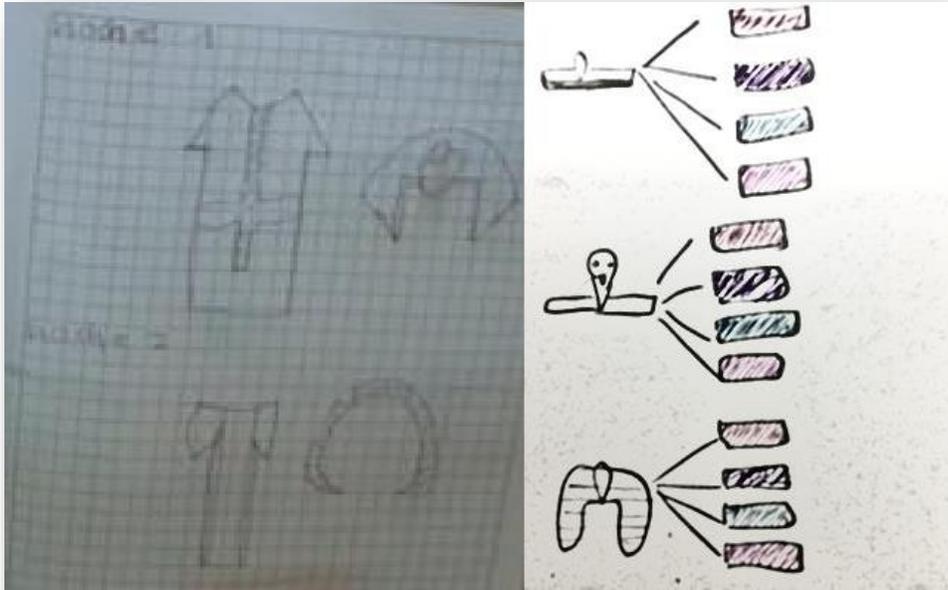


Ilustración 21: Estrategia de resolución a apoyada en dibujos. Faraón en apuros. AOE Viaje en el tiempo, 31 de Agosto de 2016.

En las estrategias que se perciben en la ilustración 21, el estudiante tiene presente los dos espacios de medida para generar las combinaciones, en este caso las 3 coronas y los 4 cinturones. Para esta situación las estrategias de resolución se desarrollan a partir de dibujos o manipulación de objetos físicos como se presenta en la ilustración 22, es por ello que las estrategias de resolución han de basarse en los diferentes arreglos que puedan realizarse con los artefactos presentados.



Ilustración 22: Combinación de accesorios del faraón. Faraón en apuros. AOE Viaje en el Tiempo, 31 de Agosto de 2016.

A diferencia de los problemas de *repetición de un único espacio de medida y relación proporcional entre dos espacios de medida*, los problemas de *composición cartesiana entre dos espacios de medida* suponen unas condiciones diferentes, ya que el resultado ha de ser de naturaleza diferente a los factores iniciales, es por ello que los estudiantes no pueden acudir a conocimientos previos como el de la suma puesto que “requiere una concepción nueva de una nueva operación” (Maza, 1991, p. 28), es por esto que los estudiantes no utilizan la adición como una estrategia de resolución, sin embargo se apoyan de representaciones gráficas para dar a conocer sus ideas, en este sentido se adquiere una comprensión binaria de la multiplicación, que requiere de una noción alusiva a la representación cartesiana, en la cual el producto es de naturaleza diferente a los dos espacios de medida iniciales.

En las clases de matemáticas los estudiantes ejercitan el algoritmo convencional de la



multiplicación, sin embargo como se evidencia hasta el momento se les dificulta reconocer la multiplicación como herramienta que posibilita la solución a las situaciones propuestas, pero utilizan otras estrategias propias de resolución que de igual manera les permite dar solución a la situación.

En el desarrollo de la AOE: Viaje en el tiempo, se presentaron intereses particulares de los estudiantes que llevó a los investigadores a generar nuevas situaciones en el aula que consideran los gustos y necesidades emergentes del contexto de los estudiantes, las cuales retomarían de igual manera situaciones multiplicativas.

Estrategias de resolución de la AOE: *Planeación del Viaje*

Las necesidades y motivaciones son dos elementos que hacen parte del desarrollo de la actividad humana, debido a que permiten naturalizar las acciones y las operaciones que emergen dentro de un contexto cultural; la AOE *Planeación del Viaje* reconoce dichos elementos propios de la actividad, en el que se le delega al objeto matemático su participación en un contexto real, el estudiante es quien identifica la necesidad que ha de ser orientada hacia el alcance de un objetivo, el cual conlleva al desarrollo de los razonamientos propios, que a su vez han de ser mediados por las relaciones interpersonales.

Al comenzar a desplegar las diferentes consideraciones que se retomaron para la



preparación del viaje, el dinero hizo parte de uno de ellos, lo que permitió a los estudiantes cuestionarse acerca de ¿cuánto dinero se ha de gastar?, en la cual los investigadores presentn a los estudiantes la adaptación de un problema de *relación proporcional entre dos espacios de medida*: el costo del pasaje y la cantidad de personas que asisten.

De manera previa a las estrategias de resolución, se discutió acerca de los costos de los pasajes con los que estaban familiarizados los estudiantes, y cada uno de los grupos de trabajo se dispuso a calcular del dinero que ha de gastar los participantes para los pasajes del viaje, por lo cual se desarrollan diferentes estrategias de resolución como las que se muestran a continuación.

Estrategia aditiva de un grupo de estudiantes

E1: *Pues si la cuota es de 2.500, entre usted y yo recogemos 5.000, más las de ellos dos serian 10.000, más los 2.500 de Cristian que queda faltando, tendríamos 12.500.* (El estudiantes se acompaña de los dedos de las manos e indica la unión de parejas en los primeros dos casos y señala de manera individual al que sobraba)

E2: *Pero eso no es el total de todos, hay que sumar los 2.500 de todos los del salón, que son...*(El estudiante se pone de pie y comienza a contar el número de estudiantes que hay en el salón), *vea que somos 28.*

E1: *Jum! entonces seria mucha plata, por ahí 250.000*

E3: *Bueno pero contemos pues!* (El estudiantes mueve rápidamente ambas manos e indica a sus compañeros que adelantaran)



Ilustración 23: Diálogo de la situación dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de septiembre de 2016.



Se observa en esta estrategia como los estudiantes utilizan la adición de dos cantidades iguales, en primera instancia para simplificar el cálculo y así formar pares de cantidades que de manera posterior les son útiles para el cálculo general, dicho procedimiento se realiza a partir de la implementación de sumas reiteradas como se evidencia en la ilustración 24, al respecto autores como Itzcovich (2007) y Maza (1998) exponen que durante el acercamiento con problemas multiplicativos, es común que los estudiantes acudan a la implementación de sumas reiteradas, debido a que las características de proporcionalidad que presenta este tipo de problemas, permiten desarrollar soluciones a partir de conocimientos previos.

En el desarrollo de la suma reiterada como estrategia de resolución se evidencia el reconocimiento de los dos espacios de medida del problema, que para este caso son la cantidad de personas y el costos del pasaje para cada una de ellas, sin embargo se reconoce una regularidad particular referente a la suma inicial de dos cantidades iguales, que han de posibilitar el acercamiento con elementos básicos de la multiplicación como el cálculo de dobles, a continuación se muestra el procedimiento que realizó dicho equipo para la solución de la situación.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

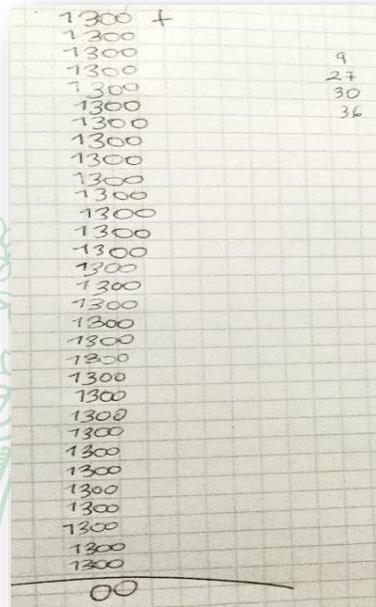


Ilustración 24: Estrategia aditiva. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre de 2016.

Las estrategias aditivas prevalecen en los procedimientos que los estudiantes desarrollan para la resolución de la situación, en la ilustración 24 se observa cómo un estudiante utiliza la suma reiterada, al tener presente los diferentes espacios de medida, sin embargo no se logra llegar al resultado, debido a la complejidad que supone el tamaño de los espacios de medida; lo anterior muestra que la adición en ocasiones no garantiza que el cálculo ha de ser sencillo, es decir, la estrategia aditiva para este caso dificulta el cálculo de la situación.

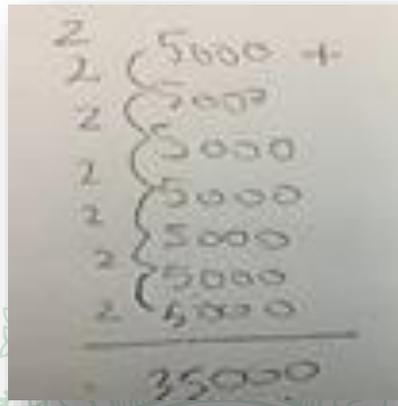


Ilustración 25: Estrategia aditiva. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre 2016.

Esta dificultad a la hora de resolver una situación, lleva al estudiante a acudir a otras estrategias de resolución que pueden ser simplificadas y agilizar el cálculo, por lo que los estudiantes comienzan a generar agrupaciones de cantidades al disminuir la cantidad de sumandos y utilizar el producto de multiplicaciones pequeñas para conseguir el resultado, como se observa en la ilustración 25.



Estrategia mixta. Dinero a gastar

El costo del pasaje elegido por este grupo es \$5,000

I: *¿Cómo hiciste para obtener el resultado?*

E: *Si en cada grupo son de a 6 en cada grupo da 30,000, se suma todo eso y da 21,000 (No se reconoce el valor posicional de algunas cantidades), 21,000 más 15 que son 3 pasajes más da 36,000*

I: *¿Estás segura que es 21,000?*

E: *(Observa su hoja por un momento) Ay!, no profe, son 210,000; entonces no es 36,000 (el estudiante realiza de nuevo la suma), son 225,000*



Ilustración 26: Estrategia mixta. Dinero a gastar. AOE Planeación del viaje, 28 de Septiembre de 2016.

En la ilustración 26 se observa cómo el estudiante se basa en la cantidad de personas que hay en los pequeños grupos de trabajo, los cuales son conformados por igual cantidad de personas, de esta manera al calcular el pasaje que ha de gastarse en total un solo grupo, se puede determinar la cantidad total. En este caso el estudiante realiza un cálculo mental de la cantidad de dinero que se necesita en el grupo de trabajo en el que se encuentra, para esto recurre a la memorización de relaciones numéricas, lo que le permite hallar el producto entre el costo del pasaje (en esta ocasión es 5.000) y la cantidad de personas que hay en cada grupo (6 personas), el estudiante utiliza el producto 6 por 5 y luego al reconocer el valor posicional del sistema de numeración decimal y agrega la cantidad de ceros correspondientes, logra



determinar la cantidad resultante en un grupo de trabajo.

Dicha información agiliza el proceso de resolución del problema en la cual los nuevos espacios de medida están determinados por la cantidad de grupos de trabajo y la cantidad a pagar en cada grupo, que luego sirve de ayuda para generar una suma, pero esta vez con uno de los espacios de medidas reducidos; durante el cálculo de esta suma el estudiante hace uso inadecuado del valor posicional al manifestar que el resultado de la adición es 21.000, sin embargo el estudiante logra replantear su resultado de manera adecuada.

Se puede analizar que el estudiante razona multiplicativamente, debido al reconocimiento de los dos espacios de medida, en cada uno de los procedimientos que se realiza, tanto en el que alude a la implementación de pequeñas multiplicaciones y la adición de cantidades iguales. Se reconoce que el uso de pequeñas multiplicaciones puede utilizarse como una herramienta que ha de ser útil en algunas situaciones multiplicativas, con relación a esta idea Itzcovich (2007) menciona que “los niños necesitarán disponer progresivamente de un conjunto de cálculos sencillos para resolver ciertos problemas. Memorizar ciertas relaciones numéricas, es sin duda, un recurso útil” (p. 94).

Aunque los autores abordados para el análisis del objeto matemático retomados en esta investigación, no consideran las estrategias de resolución a problemas multiplicativos, basadas en procedimientos multiplicativos y aditivos de manera complementaria, se puede observar cómo en repetidas ocasiones los estudiantes hacen uso de esta estrategia, al enfrentarse a



problemas de *relación proporcional entre dos espacios de medida*, en la cual se vinculan conocimientos previos como la adición y el producto de cantidades pequeñas, lo que posibilita afirmar que el estudiante reconoce situaciones particulares en las cuales ha de utilizar lo que comprende, es así como el procedimiento que se implementa adquiere sentido.

A modo general se observa que las estrategias de resolución de la situación, se clasifican en estrategias aditivas y mixtas, aunque algunos autores como Kamii (1995) e Itzcovich (2007) mencionan que el planteamiento de situaciones a partir de cantidades grandes genera en el estudiante la necesidad de implementar cálculos simplificados que le permitan llegar a una respuesta. En el problema multiplicativo las cantidades propuestas son grandes ya que hace alusión al costo de un pasaje en relación con el contexto, el cual oscila entre los 1200 y 3000 pesos colombianos. Los estudiantes realizan procedimientos simplificados, al acudir a la agrupación de cantidades que permite reducir el tamaño de uno de los espacios de medida.

Por otro lado en la situación *Itinerario a seguir*, en el cual se propone la organización del tiempo con respecto a las diferentes actividades a realizar en el viaje, con relación a la duración del descanso (30 minutos). En la situación se presenta entonces un problema de *repetición de un único espacio de medida*.



Estrategia multiplicativa. Itinerario a seguir

En este diálogo los investigadores preguntan a uno de los grupos como van con el cálculo de la duración de la competencia.

I: *Ya saben cuánto va a durar las competencias, si sabemos que es 4 veces el tiempo del descanso.*

E1: *Pues profe pues si dura 4 veces es: 3, 6, 9, 12 (esto lo hace de manera seguida acompañado de sus dedos), entonces da 12.*

E2: *¡No!, no es 12 es 120 por el cero que tiene el 30.*



Ilustración 27: Representación verbal de estrategia multiplicativa. Itinerario a seguir. AOE Planeación del viaje, 5 de Octubre de 2016.

En el diálogo presente en la ilustración 27 se observa una estrategia de resolución centrada en la implementación de triples, a partir de un reconocimiento de la secuencia de los múltiplos de tres, el cual se relaciona al proceso de memorización de las tablas de multiplicar, que adquiere sentido al reconocer los casos particulares en los cuales se puede utilizar.

En la representación verbal de la estrategia de resolución (ilustración 27) el estudiante identifica el espacio de medida que hace parte del problema (tiempo de duración del descanso - 30 minutos) y las veces que se repite dicho espacio (4 veces), identificados los factores se realiza el producto al considerar el primer dígito, al cual luego se le agrega cero, lo que hace alusión al conocimiento del sistema de numeración decimal, al reconocer que el producto



efectuado se da partir del valor de las decenas, por lo que hace falta el valor de la unidad determinada por ceros.

A partir de lo que expresa el estudiante en la estrategia, se puede decir que se genera un razonamiento multiplicativo, al situar los factores del problema y la selección de la multiplicación como proceso que posibilita obtener un resultado.

Se observa cómo de manera natural los estudiantes comienzan a desarrollar estrategias multiplicativas apoyados de igual manera en conocimiento previos, en la ilustración 28 se presenta un diálogo en el cual se evidencia una estrategia multiplicativa.

Estrategia multiplicativa. Itinerario a seguir

Se genera una discusión entre los estudiantes a partir de la duración del momento de las competencias, el investigador interviene al preguntarle a un estudiante.

I: *¿Por qué dices que el momento de las competencias dura 120 minutos?*

E: *Porque mire, 4 por 3 es 12 y se le agrega el cero del treinta y ya.*



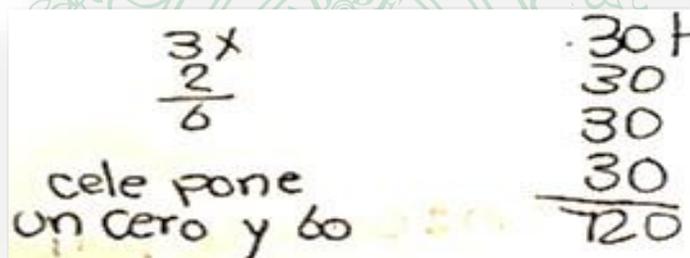


En este caso el estudiante recurre al cálculo directo del producto de los factores, de igual manera se reconoce el valor posicional. Maza (1991) menciona el producto de cantidades acompañadas de cero permite evidenciar una regularidad basada en la propiedad conmutativa de la multiplicación y el conocimiento del sistema de numeración decimal, por lo cual ha de afirmarse que los estudiantes que desarrollan este tipo de estrategias de resolución, tienen un conocimiento con relación a las propiedades de la multiplicación.

Se observa que la estrategia es similar a la presentada en la ilustración 27, debido al carácter multiplicativo y al reconocimiento del valor posicional, sin embargo el razonamiento que se representa en la ilustración 28, ha de considerarse más simplificado debido a que se recurre de manera inmediata al producto entre las cantidades.

Las estrategias de resolución basadas en el cálculo de pequeños productos suelen ser una ayuda para simplificar el procedimiento y acercarse a una generalidad propia de los problemas multiplicativas, en esta misma línea Itzcovich (2007) propone un camino centrado en los razonamientos de los estudiantes, el cual consiste en “resolver diferentes tipos de problemas y diversos cálculos utilizando los resultados de las tablas, apelando a cálculos mentales, al uso de resultados conocidos para encontrar resultados desconocidos”(p. 95), lo anterior permite apoyar la idea de que los estudiantes recurren a conocimientos previos para el desarrollo de nuevas ideas y concepciones matemáticas como la multiplicación.

escritas, se encuentran estrategias que retoman procedimientos multiplicativos y aditivos como se observa en la ilustración 29, en la cual un mismo estudiante registra el procedimiento al dar solución a dos de las indicaciones propuestas en el itinerario, que proponen el mismo problema multiplicativo, pero con diferentes cantidades, el primero hace referencia a la duración del desplazamiento (2 veces el descanso) y el segundo a la duración de las competencias deportivas (4 veces el descanso).


$$\begin{array}{r} 3 \times \\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

cele pone un cero y 60

$$\begin{array}{r} 30 + \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline 120 \end{array}$$

Ilustración 29: Estrategia de resolución multiplicativa y aditiva. Itinerario a seguir. AOE Planeación del viaje, 5 de Octubre de 2016.

Para la primera estrategia se evidencia que el estudiante realiza procedimientos multiplicativos similares a los expuestos anteriormente, centrados en el cálculo de productos pequeños, esta vez organizados a partir de la estructura del algoritmo convencional, y el reconocimiento del valor posicional. En la segunda estrategia por su parte, la estrategia de resolución se desarrolla a partir del algoritmo de la suma; en ambas situaciones se reconoce el espacio de medida y el número de veces que se repite, sin embargo cambia la estrategia de solución, ambas correctas, sólo que una es más simplificada que la otra.



Hasta el momento se puede entender la multiplicación a partir de una concepción unitaria debido a que el espacio de medida resultante es de la misma naturaleza de él o los espacios de medida implicados en los problemas de *proporcionalidad entre dos espacios de medida* y *repetición de un único espacio de medida*, en los cuales una cantidad inicial se cambia a medida que se repite cierto número de veces. La concepción unitaria ha de permitir el desarrollo de algoritmos aditivos o razonamientos a partir de sumas reiteradas como estrategia que posibilita el cálculo.

En cuanto a la situación del *Menú a consumir* se retoma el problema de *composición cartesiana entre dos espacios de medida*, en la cual el estudiante acude a representaciones gráficas y simbólicas como los que se observan en la ilustración 30, en la cual el estudiante reconoce los dos espacios de medida que hacen parte del problema, (las 5 comidas y las 3 bebidas), y a partir del esquema que represente, en donde a cada una de las comidas las une con las diferentes bebidas, al considerar así uno de los requerimientos importantes para el cálculo de este tipo de problemas al combinar todos los elementos de una colección, con todos los elementos de la otra.

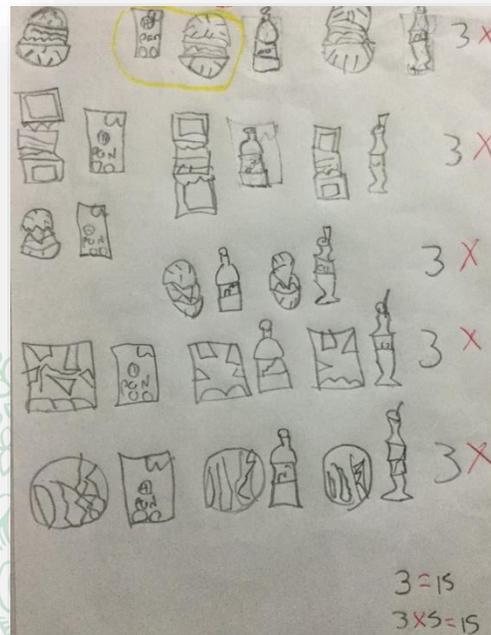


Ilustración 30: Representación gráfica de las combinaciones. Menú a consumir. AOE Planeación del viaje, 19 de Octubre de 2016.

La ilustración 30 posibilita conocer lo que desarrolla el estudiante en la situación, se evidencia la utilización de iconos y gráficos que le permiten representar su interpretación del problema, sin embargo es complejo clasificar esta resolución en una de las estrategias consideradas, debido a la falta de una sustentación verbal. Por ende es necesario reconocer aquellas estrategias que no solo fueron plasmados en la hoja.

Diálogo a partir de la situación de combinaciones del Menú

I: Cuéntame ¿qué haces para saber cuántos menús diferentes se pueden formar?

E: Estoy repartiendo a cada bebida una comida

I: ¡Sí! Por ejemplo, el sánduche para la coca cola, la manzana y el jugo (Esta explicación la realiza con ayuda de los dedos para indicar la unión)

I: ¿Cuántos menús obtuviste entonces?

E: 15 porque son 3 reparticiones en 5 veces

I: Y si en lugar de 5 comidas fueran 7 comidas ¿Cuántos menús diferentes tendríamos?

E: (Mira unos segundos hacia el techo y responde) 21

I: ¿Por qué 21?

E: Porque 3 por 1 es 3, 3 por 2 es 6, y así hasta 3 por 7, que es 21



Ilustración 31: Estrategia multiplicativa. Menú a consumir, AOE Planeación del viaje, 19 de octubre de 2016.

El diálogo de la ilustración 31 permite clarificar que los dibujos y esquemas realizados por el estudiante, se presentan como un apoyo para el cálculo, el cual, por medio de lo que expresa de manera verbal, se clasifica en una estrategia de resolución multiplicativa, ya que se utiliza un razonamiento asociado al producto de las cantidades que representan los espacios de medida involucrados en el problema. Se observa que en el momento de cambiar la cantidad de uno de los espacios de medida, el estudiante acude a la memorización de los productos pequeños, en este caso reconoce los múltiplos de 3, el cual hace referencia a la cantidad que representa uno de los espacios de medida (cantidad de bebidas) en relación con la nueva cantidad propuesta 7, que representa el otro espacio de medida (cantidad de alimentos), es así como se obtiene la



cantidad resultante 21, representa la cantidad de menús diferentes que se adquieren al tener 3 bebidas y 7 comidas. Se puede reconocer que el estudiante utiliza el razonamiento multiplicativo para dar solución a problemas de *composición cartesiana entre dos espacios de medida*, al respecto Maza (1991) reconoce que “las soluciones multiplicativas alcanzadas de un modo más o menos directo, son las únicas que pueden solucionar estos problemas” (p. 57).

Cabe reconocer que en los problemas de *composición cartesiana* que se presenta, tanto en las AOE: *Viaje en el tiempo* y *Planeación del viaje*, se utilizan dibujos y esquemas para apoyar el cálculo, lo que permite reconocer las condiciones diferentes que supone la comprensión y el cálculo del problema. Maza (1991) considera que dichos problemas de combinación no posibilita utilizar conocimientos previos como la suma, puesto que “requiere de una concepción nueva de la multiplicación” (p. 57), refiriéndose a la concepción binaria, en la cual se obtiene un resultado de naturaleza diferente a los espacios de medidas iniciales. Itzcovich (2004) por su parte reconoce que el primer ciclo de primaria (1° a 3°) se espera que los estudiantes acudan de nuevo a la implementación de esquemas, dibujos y conteos, debido a que “están en pleno proceso de construcción de los diferentes sentidos de esta operación” (p. 92). Ahora bien, el uso de los gráficos y esquemas en esta situación posibilita el conteo de las combinaciones. En este sentido se puede afirmar que cuando los espacios de medida son cantidades pequeñas, los estudiantes pueden hacer uso de representaciones gráficas que posibilitan la realización del cálculo.

La definición de la multiplicación a partir de la suma reiterada no aplica para la resolución



de problemas de *composición cartesiana entre dos espacios de medida*, dicha definición puede llegar a generar obstáculos epistemológicos en la comprensión de conceptos o procedimientos con los cuales ha de encontrarse el estudiante más adelante. Es necesario reconocer entonces que “toda suma reiterada de un mismo número puede expresarse como un producto, pero no todo producto es el resultado de una suma abreviada” (Itzcovich, 2007, p. 91).

Ahora después del abordar los diferentes problemas multiplicativos en los cuales se reconoce la concepción unitaria y binaria de la multiplicación, se realiza una última situación, la cual consiste en la elaboración de una carta, en la cual deben de representar de manera puntual y resumida los cálculos que se desarrollaron con respecto a las consideraciones para el viaje (dinero, menú e itinerario). Según Díaz y Quiroz (2005) las diferentes representaciones y registros del objeto matemático posibilitan la comprensión del mismo; plasmar una idea en un papel, lleva al estudiante a pensar en diferentes registros como gráficas, símbolos y signos, que posibiliten dar a entender una idea.



Ilustración 32: Momento de elaboración de la carta al coordinador. AOE Planeación del viaje, 24 de octubre de 2016.

En la ilustración 32 se considera el momento en el cual los estudiantes, en sus grupos de trabajo discutían acerca de cómo iban a proceder a realizar la escritura de la carta al coordinador, de modo que resumiera todos los requerimientos del viaje para poder que fuera aprobado. En la escritura, los estudiantes consideraron las estrategias que desarrollaron en las situaciones que hacen parte de la AOE: planeación del viaje, y utilizan las que consideran simplificadas para justificar las decisiones que se tomaron, como se muestra en la ilustración 33.



Bello, Maghado; 24 de octubre de 2.016

Coordinado alberto Garcia

Para que nos des su permiso de realizar un viaje al jardin botanico a los de grupo de 30 del profesore hector martines

- Para los pasajes nos vamos a gastar 5000 \$ por cada un c otra en su grupo somos 33, tenemos que gastar en dinero

$$5.000 \times 33 = 165.000$$

$$\begin{array}{r} 33 \times \\ 5 \\ \hline 165 \end{array}$$

as actividades que vamos a realizar son:

- Reconociendo el lugar $75 + 15 = 30$ minutos
- concurso de canto y baile $3 \times 2 = 60 +$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \hline 75 \end{array}$$
- Desplazamiento $2 \times 3 = 60$

$$\begin{array}{r} 30 + \\ 30 \\ \hline 60 \end{array}$$
- Juegos de parkur y carreras $3, 6, 9, 12 \quad 3 \times 4 = 12$

$$30 + 30 + 30 + 30 = 120$$

Para la comida podiamos escoger 5 comidas x 3 bebidas que daba $5 \times 3 = 15$ menos vamos a llevar hamburguesas y jugo natural porque es saludable

atentamente 300

Ilustración 2. Carta al coordinador, registro escrito. AOE planeación del viaje, 24 de Octubre de 2016.

Se observa entonces cómo los estudiantes utilizan diferentes estrategias en un mismo problema, con la finalidad de controlar los pasos intermedios que realizan en la multiplicación, los cuales se presentan como estrategias auxiliares que permiten validar el resultado, ya que sin



duda alguna, los estudiantes presentan confianza en los procedimientos aditivos.

Además se reconoce que los estudiantes al tener presente las diferentes estrategias que desarrollaron en las situaciones, acuden a utilizar la multiplicación directa como estrategia que permite expresar un cálculo de manera simplificada, debido a que en el momento de interacción de las diferentes estrategias de resolución, lograron visualizar la existencia de diferentes procedimientos que llegaban al mismo resultado, por lo que escogen procedimientos que les permitieran ahorrar tiempo y facilitar el cálculo, al tener presentes los espacios de medida que hacen parte de la situación.

De manera general se puede reconocer que los estudiantes utilizaron diferentes representaciones y desarrollaron diversas estrategias para dar solución a las situaciones que abarcan los tres problemas multiplicativos, pero sin duda alguna se presentan características particulares en el proceder de los estudiantes según el tipo de problema multiplicativo que hizo parte de la situación, a continuación se presenta la tabla 5 en la cual se recoge el tipo de estrategia y las representaciones que se observaron según el tipo de problema.

Problemas multiplicativos	Relación proporcional entre dos espacios de medida	Repetición de un único espacio de medida	Composición cartesiana entre dos espacios de medida
Estrategias	Aditivas	Aditivas	Multiplicativas
	Mixtas	Multiplicativas Mixtas	
			Icónicas



Representaciones	Escritas Verbales	Escritas Verbales	Escritas Verbales
-------------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Tabla 5: Clasificación de las estrategias y representaciones observadas, según el problema multiplicativo. Elaboración propia.

Con relación a lo expuesto en la tabla 5 y las análisis que se arrojaron de cada una de las situaciones multiplicativas, se puede reconocer la importancia de trabajar los diferentes problemas multiplicativos en el aula de clase ya que suponen características diversas que llevan a los estudiantes a recurrir a diferentes estrategias que posteriormente les será una base para comprender a la multiplicación como aquella herramienta que le permite dar solución a problemas de diferente naturaleza, al reconocer así la multiplicación a partir de una concepción unitaria y binaria. Además se observa cómo a partir de una metodología en la cual se involucra al estudiante en su proceso de formación, dándole espacio para que desarrollen sus estrategias, puedan acudir al diálogo con sus compañeros y expresar sus ideas con relación a la que consideran y conocen, posibilita un abanico de posibilidades que les permite reconocer que existen diferentes maneras de dar solución de las situaciones matemáticas, las cuales pierden su complejidad al relacionarlas al contexto de los estudiantes.

Reflexiones a partir de la perspectiva histórico cultural

Con el fin de orientar el trabajo de investigación hacia el diálogo con los elementos propios de la AOE y su vínculo con la perspectiva histórico cultural, se reflexiona a partir de ideas que



permiten la comprensión del quehacer del sujeto al estar inmerso en la cultura y las observaciones de algunas implicaciones del contexto con relación a la interacción de un grupo de estudiantes de tercer grado; en este sentido se abordan aspectos como la relación del sujeto en interacción con el otro (estudiante - estudiante, estudiante - docente), la influencia del contexto para el desarrollo de habilidades matemáticas y la transformación del sujeto, en palabras de Vygotsky retomado en Kozulin “el proceso de aprendizaje tiene un carácter sociocultural ya desde el principio. El verdadero sujeto del aprendizaje es una totalidad integradora que incluye al niño, al adulto y al instrumento simbólico proporcionado por una sociedad dada” (1998, p. 17)

Las situaciones que se proponen en las AOE posibilitan en los estudiantes reflexionar y tomar posturas frente a aspectos de su cultura como lo son: el sistema de transporte público, la alimentación saludable y la distribución del tiempo. En primera instancia los estudiantes contaban con algunas concepciones frente al costo del pasaje de los medios de transporte que circulan en la ciudad, que en ocasiones no se relacionan con los verdaderos costos.

De esta manera se reconocen los valores apropiados para el costo del pasaje del viaje por medio de la discusión que imparten los sujetos que se encuentran inmersos en la situación; en segunda instancia se busca orientar a los estudiantes hacia los beneficios que proporcionan algunos alimentos por medio de una charla, en la cual se explica la distribución de la pirámide alimenticia, lo anterior con el fin de generar nuevas posturas frente a la alimentación saludable es así como se escuchan algunos comentarios por parte de los estudiantes como “si vamos a escoger el perro que tenga mucha ensalada”, “pollo frito no, que eso tiene mucha



grasa”, “escojamos jugo natural y no coca cola” entre otros y en tercera instancia en respuesta a las propuestas de los estudiantes acerca de las actividades que se desean realizar durante el viaje, se establecen en conjunto con los docentes, la distribución de los tiempos que toman los diferentes momentos, lo que permite reflexionar acerca de la importancia de tener un cronograma que posibilite cumplir con todos los objetivos en un determinado tiempo.

Esta serie de situaciones instauran al estudiante en un rol central en su proceso de aprendizaje debido a que le permite autonomía y dinamismo al momento de involucrarse en las experiencias de aprendizaje, y al maestro como el mediador que proporciona elementos a partir de su experiencia y forma de ver el mundo para el desarrollo de conocimiento matemático, en este sentido Vygostky retomado por Kozulin manifiesta que:

El niño ni interioriza conceptos con una forma ya dada ni los construye independientemente a partir de propia su experiencia. Para una formación de conceptos adecuada, el niño debe participar en unas actividades de aprendizaje especialmente diseñadas que ofrezcan un marco de referencia para una construcción guiada (1998, p. 48).

Con el fin de mencionar algunos elementos propios de la perspectiva histórico cultural, que hacen parte de la sustentación y desarrollo de la investigación, se retoman aspectos importantes de dicha teoría como lo son la *relación del sujeto con el otro*, la *relación del sujeto con el contexto* y la *transformación del sujeto*.



Relación del sujeto con el otro.

En el momento en que el sujeto nace, necesita de las demás personas para poder sobrevivir, de esta manera se establece que somos seres sociables por naturaleza, los cuales en el transcurso de la vida recrean interacciones que posibilitan formar parte de la sociedad, en sentido la escuela hace parte de una de las instituciones en las cuales el sujeto desarrolla este tipo de interacciones enfocados en la adquisición de diferentes aprendizajes, no solo en las relaciones mediadas por el maestro, sino además por sus pares académicos. Autores como Leontiev afirman que “la actividad de los individuos concretos, transcurre en condiciones de una colectividad abierta, entre los hombres que lo rodean, juntamente con ellos y en interacción con ellos” (Leontiev, 1978, p. 67).

En el transcurso de la investigación se presentaron interacciones entre los estudiantesparticipes, generadas a partir de pequeños grupos de trabajo, los cuales se crearon con el fin de posibilitar espacios de diálogo que permitieran de manera posterior la discusión grupal mediada por los investigadores, a partir de los elementos necesarios para el viaje.

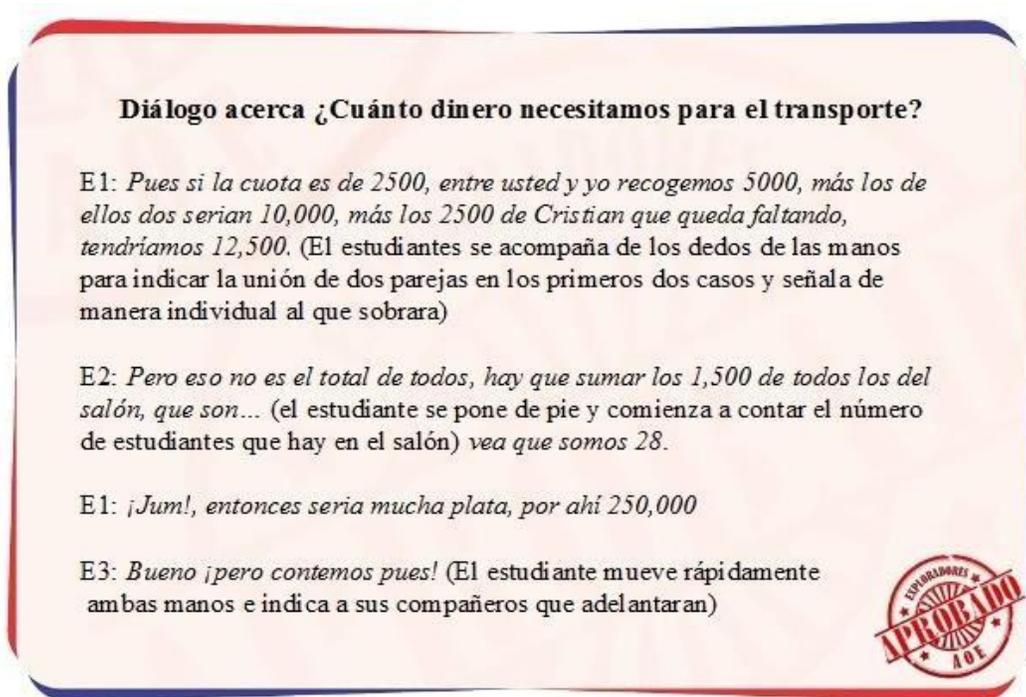


Ilustración 34: Diálogo acerca del dinero necesario para el transporte. AOE. Planeación del viaje, 28 de Septiembre del 2016.

En la ilustración 34 se evidencia como se reflexiona a partir del costo del pasaje, además de cómo se desencadenan una serie de argumentos que complementan las ideas de los demás compañeros, en la búsqueda del valor adecuado para los pasajes del viaje.

En la ilustración 34 se observa que uno de los integrantes del grupo da a conocer su idea para realizar el cálculo de los pasajes, sin embargo un segundo integrante complementa dicha idea al expresar la importancia de calcular el pasaje de todos integrantes del grupo y genera un aporte acerca de la estrategia de resolución que puede utilizarse para cumplir con este fin, de esta forma se reconoce que el primer estudiante reconsidera su idea por medio del aporte que



realiza su compañero y logra extraer ideas acerca de la estrategia de resolución que pueden utilizarse para llegar a un fin determinado de la AOE planeación de un viaje, en este sentido se observa una interacción entre pares que permiten complementar y evaluar diferentes ideas en conjunto, al desarrollar una manera de resolución a una tarea. Autores como Vygotsky (1981) retomado por Moll (1998) expresan que “las habilidades intelectuales que los niños adquieren están directamente relacionadas con el modo en que interactúan con otros en ambientes de solución de problemas específicos” (p. 24).

Al tener presente que en la actividad matemática no solo se desarrolla el conocimiento a partir de las interacciones entre pares, sino además de las relaciones que se tejen entre el adulto y el niño, para este caso entre el estudiante y el docente, se muestran elementos propios de la investigación que reflejan los aportes que efectúa el docente al direccionar al estudiante hacia la reflexión frente a sus propios razonamientos, por medio de mediaciones sociales, que logran hacer del sujeto alguien con la capacidad de establecer reflexiones frente a problemáticas sociales.



Diálogo estudiantes-docente. Faraón en apuros

I: *Como van chicos, ¿ya saben cuántas combinaciones podemos obtener?*

E: *tres trajes diferentes*

I: *y ¿por qué solo tres trajes diferentes?*

E: *¡Profe! Como solo hay tres coronas entonces solo se pueden hacerse tres trajes diferentes*

I: *pero piensa que a cada cinturón podemos asignarle una corona y tenemos cuatro cinturones*

Se genera un espacio de reflexión por parte del estudiante

E: *Ah profe, si le ponemos a la corona uno, cuatro (Indica con la mano las unidades correspondientes) a la corona dos, cuatro y a la corona tres, cuatro; entonces serían doce trajes.*



Ilustración 35: Diálogo estudiantes-docente. Faraón en apuros. AOE: Viaje en el tiempo, 31 de Agosto del 2016.

El diálogo de la ilustración 35 permite afirmar que la relación entre el docente y el estudiante se genera a partir de los aportes que cada uno puede hacerse a través de las mediaciones que se generan en el aprendizaje, por ende no se puede hablar de la transferencia de conocimiento de un sujeto a otro, sino del desarrollo de habilidades matemáticas que se generan en colaboración con el otro, al ser el otro un par académico o como muestra este caso un mediador de conocimiento. Al respecto Moll (1998) menciona que “el foco, en consecuencia, no está puesto en la transferencia de las habilidades de los que saben más a los que saben menos sino en el uso colaborativo de las formas de mediación para crear, obtener y comunicar sentido” (p. 26).

De esta manera se evidencia cómo el rol del docente alude a la búsqueda, primero de



comprender las interpretaciones que los estudiantes realizan frente a la situación y segundo a desarrollar aportes que le permitan al estudiante considerar nuevas ideas que le sean útiles para reevaluar su producción, es así como “el papel del adulto no consiste necesariamente en proporcionar pistas estructuradas sino, a través de la conversación exploratoria y otras mediaciones sociales tales como la incorporación de actividades cotidianas en el aula, en ayudar a los niños a apropiarse o tomar el control de su propio aprendizaje.” (Moll, 1998. p. 26).

Las ideas expuestas con antelación permiten afirmar que el aprendizaje está condicionado por las interacciones sociales, es así como en el aula se evidencian dos tipos de relaciones, una de ellas es la relación que se establece entre el sujeto y un par que promueven diálogos que desarrollan aprendizajes a partir de las ideas que se puedan posibilitar, en las cuales se reflejan aportes diferentes de acuerdo a los conocimientos previos que tiene cada sujeto. Una segunda relación hace referencia al rol del maestro en el aprendizaje del estudiante, se trata entonces de una colaboración que permite el desarrollo de habilidades propias del aprendizaje, a través de la comprensión y exploración de las ideas impartidas por el estudiante, en este sentido el maestro se convierte en un mediador y guía el cual promueve a partir de sus aportes aprendizajes avanzados.

El papel del ambiente de aprendizaje

Dentro de los elementos que se consideran fundamentales para la reflexión acerca de las



herramientas que proporcionan las AOE, se cuestiona acerca de las particularidades del lugar en el cual se encuentra inmerso el sujeto, las implicaciones que se establecen a nivel cognitivo, determinadas por las interacciones provenientes de un lugar geográfico específico, en el cual se obtienen gustos, intereses y motivaciones que permiten el desarrollo de procesos formativos y la adquisición de nuevos aprendizajes mediados en un aula. En este sentido aporta en el desarrollo de la subjetividad al encontrar aspectos sociales, políticos y culturales dentro del aprendizaje que a su vez son caracterizados por signos, símbolos, textos, medios gráficos específicos de una cultura.

Al profundizar con relación a los aspectos mencionados, se encuentran las particularidades propias del contexto de los estudiantes, que ha de promover la comprensión de las ideas que dan a conocer en las interacciones grupales que se desarrollan al evidenciar la lectura que realizan de su entorno, con el fin de tomar una decisión que a su vez condiciona, la situación que involucra el proceso de aprendizaje. Entre los elementos que permiten relacionar la manera de percibir el entorno y los aspectos que se retoman en el lenguaje, permeados por dicha percepción en el proceso de aprendizaje, se encuentran los medios de transporte adecuados para la realización del viaje y las características de las comidas propuestas por los estudiantes.



Influencia del contexto en los proceso de aprendizaje

Diálogo acerca del medio de transporte adecuado para el viaje.

I: *Teniendo en cuenta que uno de los elementos importantes para la realización del viaje es el medio de transporte, ya que nos permite movilizarnos hacia el lugar de destino, ¿Qué transporte consideran que es el adecuado para la realización de nuestro viaje?*

E1: *El metro porque nos bajamos en la estación del Jardín Botánico y ya llegamos*

E2: *¡No!, ese no porque el Jardín Botánico está lejos de la estación*

E3: *Pues cogemos integrado*

E4: *Es mejor coger el bus porque solo es un transporte, yo una vez fui por allá con mi mama y solo cogimos un bus y llegamos*



Ilustración 36: Diálogo acerca del transporte adecuado para el viaje. AOE. Planeación de un viaje, 28 de Septiembre del 2016.

En el diálogo de la ilustración 36 se observa como influye en las interacciones que se presentan en el aula, los elementos propios del entorno para la expresión de ideas que posibiliten para este caso, tomar una decisión conjunta; En este sentido se reflejan diferentes ideas relacionadas con los medios de transporte cercanos a los estudiantes en respuesta a la necesidad de utilizar un transporte para lograr realizar el desplazamiento en el viaje, entre ellos encontramos el metro, que es un medio de transporte público del municipio de Medellín, la ruta integrada en la cual se utiliza el metro y un alimentador para el desplazamiento de un lugar a otro; y el bus que es otro medio de transporte utilizado por la comunidad del sector.



La presencia de diferentes espacios de interacción en el aula permitieron visualizar la influencia de diversos elementos que hace parte del entorno extraescolar de los estudiantes, para el aprendizaje; para este caso se evidencia que los estudiantes dan a conocer sus ideas frente a los medios de transporte apropiados para el desplazamiento de la institución al Jardín Botánico, lo que conlleva a aceptar que las maneras de proyectar una idea en este caso el lenguaje verbal está mediado por el reconocimiento de elementos caracterizados por las lecturas que efectúan los estudiantes en la sociedad, autores como Vygotsky retomado por Kozulin (1998) expresan que “el proceso de aprendizaje tiene un carácter sociocultural ya desde el principio. El verdadero sujeto del aprendizaje es una totalidad integradora que incluye al niño, al adulto y al instrumento simbólico proporcionado por una sociedad dada” (p. 17).

Con el fin de ampliar las ideas que aluden a las implicaciones que existen entre el medio de interacción extraescolar del estudiante y la relación con el aprendizaje al momento de dar a conocer propuestas en las AOE, se presenta otro momento de interacción grupal en el que se muestra el acercamiento que los estudiantes tienen con los alimentos que se venden en su cotidianidad y sus costos, como lo son la hamburguesa, el perro y el pollo frito.

El ambiente extraescolar se convierte en un factor fundamental para la comprensión del actuar y proceder del sujeto en la *actividad de aprendizaje*, debido a esto se da prioridad a las expresiones y comportamientos del sujeto que reflejen su interacción con el medio social, para este caso por ejemplo se evidencian una serie de opiniones y argumentos basados en los



conocimientos que tienen los estudiantes frente a un elemento común de su entorno, como lo es los precios de algunas comidas, es dicho conocimiento el que permite que el estudiante genere unas reflexiones a partir de la comida adecuada para el viaje. Además de tener presente otros factores como la alimentación saludable; en este sentido el aprendizaje se desarrolla a partir de elementos propios del contexto del estudiante, lo que implica que su forma de proceder ante situaciones de su entorno social, refleja sus intereses y conocimientos adquiridos en ambientes de interacción con el mundo.

Transformación del sujeto.

A partir de los planteamientos de Moura (2010) se reconoce que las AOE permiten una transformación del pensamiento del sujeto que está inmerso en la *actividad de aprendizaje*, estos cambios se desarrollan en el ambiente de aprendizaje y giran en torno al objeto de conocimiento y las percepciones del sujeto en las interacciones sociales. “Es en la relación del sujeto con el medio físico y social, mediada por instrumentos y signos (entre ellos el lenguaje), que se procesa su desarrollo cognitivo. O sea, [...], al transformar la naturaleza el hombre también se transforma” (Moura, 2010, p. 83 . Traducción propia).

En consecuencia con el planteamiento anterior, las AOE impulsan la transformación de los sujetos que hacen parte de la misma, es así como se evidencia cambios entorno a las situaciones multiplicativas y aspectos propios del contexto en el cual se desarrolla las AOE. En cuanto al objeto matemático los cambios se reflejan a partir de las diferentes estrategias de



resolución que desarrollan los estudiantes para las situaciones multiplicativas, que en un inicio se basan solo en el uso del algoritmo convencional; dichas transformaciones son movilizadas a partir de la *actividad de enseñanza*, que permite realizar un conjunto de acciones en relación con los conocimientos de los estudiantes.

Por otro lado es importante reconocer que la transformación también se generó a partir del diálogo entre docente- estudiante y estudiante-estudiante que posibilita reflexiones en torno a situaciones de la cultura.

En la situación *Dinero a gastar* por ejemplo, se generó reflexiones a partir de los diferentes medios de transporte que los estudiantes conocen y los costos que implican su uso, los cuales se propusieron a partir de las concepciones de los estudiantes que se reflejaron en la interacción con el entorno extraescolar, en este sentido las reflexiones se desarrollan a partir de la discusión del transporte adecuado para el viaje, al considerar aspectos económicos como lo es el costo del pasaje de un transporte determinado y aspectos temporales como lo es el tiempo en promedio que tarda dicho transporte en moverse hacia el lugar de destino.

Por otra parte en la situación *Elaboración del itinerario* se visualizan transformaciones enfocadas en la organización del tiempo que se dispone para la elaboración del viaje, para el cual se discute acerca de los aspectos fundamentales, como la alimentación y el desplazamiento, además de las dinámicas que quieren realizar los estudiantes; es así como el sujeto reflexiona frente a aspectos sociales como lo es la distribución del tiempo, al reconocer



la importancia de la organización de las acciones propias de la vida cotidiana, situación que se considera significativa para desarrollarse en el ambiente de aprendizaje.

En la situación de la elaboración del Menú para el viaje, se generaron reflexiones a partir de la alimentación como un elemento fundamental para la vida, se discutió entonces la importancia de una alimentación equilibrada, que aporte los nutrientes esenciales para brindar la energía que requiere el cuerpo.



Ilustración 37: Discusiones y propuestas de la alimentación saludable. AOE Planeación del viaje, 19 de Octubre de 2016.

En las ilustración 37 se observa el trabajo que se desarrolló acerca del reconocimiento de los componentes nutritivos necesarios para una alimentación balanceada, la cual se elabora en compañía de los estudiantes y permitió la discusión de los elementos que se deben tener presente para pensar en un menú saludable para el viaje. Al tener esto presente los estudiantes en los grupos de trabajo, propusieron diferentes alimentaciones que justifican a partir de la



pirámide alimenticia. Se evidenció que los estudiantes piensan el menú, mediados por las reflexiones que se proponen en la construcción de la pirámide alimenticia.

Consideraciones Finales

Las AOE que hacen parte de la investigación se desarrollan a partir de espacios de aprendizaje que posibilitan el trabajo colectivo al considerar un conjunto de interacciones sociales que se tejen en relación con el otro, en este sentido se resalta el papel del estudiante en el desarrollo de sus habilidades de aprendizaje, al reconocer las estrategias propias de resolución a situaciones multiplicativas, que han de expresarse por medio de diferentes representaciones (gráficas y escritas), que le permiten a su vez al estudiante dar a conocer sus ideas. Es así como el docente se presenta como orientador que ha de direccionar las situaciones de aprendizaje en pro a experiencias significativas.

En este sentido cobra importancia la implementación de estrategias propias de resolución que desarrollan los estudiantes a las diferentes situaciones que se les presenta en el aula de clase, debido a que permite la representación de su pensamiento al recurrir a conocimientos previos y concepciones que considere importantes para expresar una idea, que a su vez ha de estar permeada de conocimientos desarrollados en un ámbito social, por tal motivo se posibilita alejar al estudiante de procesos mecánicos y memorísticos, que no permiten reconocer que existen diversas maneras de dar solución a un problema matemático y que pueden estar determinadas por sus conocimientos.



Es preciso reconocer que el trabajo con el algoritmo convencional de la multiplicación muestra solo una de las estrategias de resolución a problemas multiplicativos, la cual no permite evidenciar razonamientos que hacen parte del proceso algorítmico, como lo son el cambio de unidades a unidades de orden superior, según los productos que se realizan con las cifras de ambos factores y el reconocimiento de valor posicional al realizar dichos productos. En consecuencia la implementación del algoritmo convencional como única estrategia de resolución, dificulta reconocer propiedades y atributos que hacen parte de la multiplicación, al igual que el uso de cálculos que posibilitan adquirir habilidades a partir de conocimientos propios del estudiante, es por ello que se considera importante el desarrollo de otras estrategias de resolución previas al algoritmo convencional, al igual que el uso de elementos como la estimación y la construcción de tablas de información, que promueve encaminar a los estudiantes al desarrollo paulatino de la comprensión de las propiedades y la concepción general de la multiplicación.

De igual manera se considera indispensable la vinculación de los diferentes problemas multiplicativos en el aula, con la finalidad de que el estudiante desarrolle ideas y razonamientos que le permitan reconocer la multiplicación como una herramienta que posibilite solucionar situaciones de diferente naturaleza, las cuales han de reconocerse en el entorno escolar como en el entorno social de los estudiantes, a partir de la concepción unitaria y binaria de la multiplicación que le permita descubrir que las distintas estrategias de



resolución llevan a un mismo resultado que se resume en la realización del producto directo entre ambas cantidades.

Las AOE permiten vincular al estudiante con las situaciones de aprendizaje debido a que parte de una movilización y reconocimiento de necesidades que a su vez le dan una autonomía en las acciones y operaciones que desarrolla, es así como la *actividad de aprendizaje* está encaminada hacia el desarrollo del conocimiento en relación con las reflexiones que se generan en la relación con el otro.

Es importante reconocer que un aula que es una microsociedad en la cual converge un lugar, un espacio y un tiempo además de estar condicionada por la diversidad de aspectos sociales, políticos, económicos y religiosos, los cuales determinan maneras particulares de interactuar y relacionarse tanto entre pares como entre estudiante y docente por medio de diferentes subjetividades. El ámbito social influye en las maneras de comprender el mundo a través de los otros sujetos, las interacciones involucradas y los objetos socioculturales (lenguaje, signos, expresiones, comportamientos, entre otros) consolidados a partir de las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores y que se reconocen y adquieren a través de instituciones como la familia y que la escuela refuerza.

Como se observa en la investigación, las AOE se abordan a partir de diferentes situaciones multiplicativas que fuesen de interés de los estudiantes, la primera parte de aspectos históricos de diferentes culturas que generan un conjunto de situaciones fantásticas en



las cuales se genera un lenguaje práctico y apropiado para la comprensión y motivación de los estudiantes, incentivados a utilizar la imaginación y el juego como herramientas que movilizan el aprendizaje, en este sentido se identifican necesidades que conducen al desarrollo de diferentes estrategias de resolución.

Es así como se presenta las AOE *Planeación del viaje!*, que involucra situaciones de la cotidianidad del estudiante, que llevan a la discusión de realidades, que posibilitaron un diálogo crítico y reflexivo que vincula el contexto cultural con el objeto matemático, por lo cual el estudiante asume un rol activo al involucrarse situaciones de su interés que llevan a generar una necesidad enfocada en los elementos necesarios para la realización de un viaje.

Como resultado de la pregunta de investigación *¿cuáles son las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes de tercero de primaria al enfrentarse a diferentes situaciones multiplicativas, a partir de la implementación de las Actividades Orientadoras de Enseñanza?*

Se concluye que en el análisis de las estrategias de resolución de ambas AOE, sobresale la diferencia entre el desarrollo de situaciones pertenecientes a la realidad de los estudiantes, que permiten la transformación del sujeto en relación al concepto matemático y a la reflexión de elementos propios de su cultura, provenientes de una necesidad generada por el estudiante; contrastados con la implementación de situaciones auténticas y que involucran aprendizajes con relación al concepto matemático, que se desarrollan por medio de una necesidad caracterizada por el docente.



Los docentes están llamados a considerar situaciones que se desarrollen en el aula de clase, que posibiliten evidenciar las matemáticas como un conjunto de experiencias que enlacen los conceptos matemáticos con el entorno del estudiante, es decir, el trabajo matemático se genera a partir de las propuestas que los docentes les permitan experimentar a los estudiantes a lo largo de la escolaridad, las cuales deben involucrar al estudiante en el proceso de aprendizaje, convirtiéndolo en el protagonista de su proceso educativo.

Al reconocer la *actividad de enseñanza* dentro de las interacciones que posibilitan las AOE propuestas para la investigación es pertinente hablar de la transformación del docente, quienes también suponen una reflexión en cuanto a las prácticas pedagógicas, es decir, se cuestiona a partir de las metodologías que se pueden implementar en el ambiente de aprendizaje, al reconocer la pluralidad que posibilita el pensamiento y las necesidades de los estudiantes. Sin duda alguna al visualizar la importancia del trabajo con los diferentes problemas multiplicativos para una comprensión significativa de la multiplicación, la cual le posibilita al estudiante visualizar la multiplicación como una herramienta que permite dar solución a diferentes situaciones, este análisis transforma el pensamiento del docente, lo que lleva a modificar sus prácticas, al presentar posibilidades diferentes al trabajo con algoritmos convencionales.

En este sentido se habla de una transformación en el docente a partir del replanteamiento de sus prácticas pedagógicas, las cuales se modificaron de acuerdo a las experiencias en el aula, un ejemplo de esta afirmación se evidencia en la reconstrucción de la AOE planeación



de un viaje, en la cual el docente reconoce que las acciones de los estudiantes son limitadas, lo que lleva a reorganizar las acciones en búsqueda de cumplir con los objetivos propuestos.

La transformación del pensamiento del docente lleva a replantear las maneras de presentar el aprendizaje en el entorno escolar, al tener presente los sujetos que hacen parte de dicho entorno, en este sentido las metodologías deben pensarse al tener presente el ambiente en el que viven y se desarrollan las prácticas cotidianas de los estudiantes, las cuales se pueden retomar para la organización de la enseñanza, con el fin de que se promuevan espacios en los que el conocimiento se reconozca de acuerdo a lo planteado por el MEN (2006) en el que:

Se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares (p. 47).



Referencias Bibliográficas

- Aguirre, D. (2012). *Aplicación de las estructuras multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigidos a estudiantes de tercer grado de educación primaria.*(Trabajo de grado). Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Botero, O. (2006). Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Cadavid, L. A. y Quintero, C. P. (2011). *Función: Proceso de objetivación y subjetivación en clase de matemáticas.* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Canales, M. (2006). *Estudio exploratorio sobre el uso de modelos alternativos para la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división con estudiantes de primer curso de ciclo común.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morrazán, Bogotá, Colombia.
- Damisa, C. (2011). Pongo la coma y agrego un cero: ¿Que esconden los algoritmos convencionales de la división?. En E. Rodríguez (Presidencia), *Congreso uruguayo de educación matemática*, congreso llevado a cabo en el CUREM 3, Institutos Normales de Montevideo, Uruguay.
- Díaz, A y Quiroz, R. (2005). *Educación, instrucción y desarrollo.* Medellín, Colombia: Imprenta Universidad de Antioquia.



Dubrovsky, S. (2000) Vigostky. *Su proyección en el pensamiento actual*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones novedades educativas.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes*. Universidad del Valle, Colombia: Editions scientifiques europeéennes.

Echeverry, H. (2013). *Estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de la estructura multiplicativa a partir de la resolución de problemas* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Cali, Colombia.

Espinoza, D; Medellín, N y Quintero, A. (2015). La objetivación de la multiplicación como producto de medida en estudiantes de grados segundo y tercero de primaria. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid, España: Editorial síntesis.

Grupo L.A.C.E. (1999). *Introducción al estudio de caso en educación*. Facultad de CC. de la Educación. Universidad de Cádiz. Madrid, España. Base de datos.

Hernandez, R. Fernandez, C.,y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (Cuarta ed.).Mexico: McGraw Hill Interamericana.

Itzcovich, H. (2007). *La Matemática escolar, las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Editorial AIQUE Educación.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III: Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid, España: Editorial Visor.



- Lenner, D. (1994). *Las matemáticas en la escuela: Aquí y ahora*, Porto Alegre, Brasil: Editorial AIQUE Educación.
- Leontiev, A. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones ciencias del hombre.
- López, R. (2015). *Influencia del razonamiento matemático en las estructuras multiplicativas (tesis de maestría)*. Universidad Nacional de Colombia. Cali, Colombia.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de educación.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de educación.
- Moll, L. (1998). *Vygotsky y la educación*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.
- Montealegre, R. (2005). *La actividad humana en la psicología histórico cultural. Avances en psicología latinoamericana*, 23(1), 33-42. Recuperado de <http://revistas.urosario.edu.co/index.php/apl/article/view/1238>.
- Moura, M. (2010). *A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasilia: Editorial Livre Livro Ltda.



- Moura, M. O., Araújo, E. S., Ribeiro, F. D., Panossian, M. L., y Moretti, V. D. (2010). A *Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. En M. O. Moura, A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural, 81-109*. Brasília, Brasil: Liber Livro.
- Moura, M., Sforzi, M., y Araújo, E. (2011) *Onjetivacao e apropiacao de conhecimentos na actividade*. Teoria e prática da Educacao, 14(1), 39-50. Recuperado de <http://eduem.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/article/view/15674>.
- Orozco, M. (2009). *La estructura multiplicativa*. Cali, colombia: Universidad del valle, Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/La_estructura_multiplicativa.pdf.
- Oviedo, L y Knashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Aula matemáticas, 13*, 29- 36. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207>.
- Ramírez, A; Álzate, L; Pérez, L y Valencia, S. (2012). *El aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través del juego educativo. (Tesis de pregrado)*, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Roldán, J., García, E. y Cornejo, C. (1996). *Dificultades y alternativas en la resolución de problemas matemáticos*. Revista educación matemática, 8(1), 40-52.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa* (Composición electrónica). Bogotá, Colombia: ARFO Editores e Impresores Ltda.



Torres, M. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medidas en términos del análisis relacional*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York, EEUU: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133 - 170. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espagnol.pdf.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad, problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México D.F, México: Editorial Trillas.

Wertsch, J. (1988). *Vigotsky y la formación social de la mente*. España, Barcelona: Ediciones Paidós.



Anexos

Anexo 1: Ejemplo de diario de campo de investigador.

<p>Fecha: Viernes 23 de septiembre</p>	<p>Hora: 12:00 a 4:00 pm</p>
<p>Actividad realizada Preparación del viaje 1 - Pasajes del viaje</p> <p>Bajo una situación que surge a partir de la inquietud de los niños por saber si sí se iba a realizar un viaje de verdad, se planteó una modificación de las AOE a partir de una necesidad real, más cercana a los estudiantes. De esta manera, y a partir de la improvisación de la idea de preparación de un viaje propuesta anteriormente (véase diario de campo actividad realizada organización del viaje), se piensan una serie de situaciones indispensables a tener en cuenta a la hora de realizar un viaje o paseo, que involucren los tres problemas de las situaciones multiplicativas, con la idea de que los estudiantes se involucren en la elaboración de estas situaciones y poder realizar el la salida respondiendo a las soluciones propuestas.</p> <p>Estas nuevas tareas plantean tres momentos indispensables:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Contextualización • Propuestas y • Socialización 	<p>Reflexiones</p> <p>Al reconocer las posibilidades que brinda la investigación cualitativa, y a partir de una situación emergente planteada por los estudiantes, como investigadores se tuvo presente la inquietud de los estudiantes de saber si harías un viaje de verdad, lo que llevó a modificar las tareas que se venían realizando, con la finalidad de que los estudiantes organizaran todo lo referente a la realización de un viaje, de manera organizada y con trabajo colaborativo, para poder que se hiciera posible. Como en clases anteriores se había tenido la oportunidad de dialogar con los estudiantes acerca de las cuestiones que se deben tener presentes para la realización del viaje, como investigadores se retomaron las ideas planteadas por los estudiantes y se plantearon unas nuevas tareas que trabajen de manera implícita los diferentes problemas multiplicativos. Cabe resaltar que todas las tareas propuestas se realizan en grupos de trabajo mediado por tres momentos que posibilitan el desarrollo de la misma.</p> <p>←</p> <p>La primera tarea que se abordó, fue la cuota de transporte que se debía pedir a cada estudiante, donde los estudiantes en cada uno de los grupos dialogaban acerca de los diferentes costos de los medios de transporte que conocen para determinar las diferentes cuotas</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1200 • 2500 • 2300



	<ul style="list-style-type: none"> • 3000
--	--

Anexo 2: Diseño del sello y pasaporte. AOE Viaje en el tiempo y planeación un viaje.



Anexo 3: Tabla para el registro de puntos. Sapu de Oro. AOE Viaje en el Tiempo.

 AOE <i>viaje en el tiempo!</i>									
	Nombre:								Total De Puntos



Anexo 4: Tabla de registro de información. *La Vara del Faraón. AOE Viaje en el Tiempo.*

 AOE <i>¡viaje en el tiempo!</i>		
Tumba	Medida en varas	Espacio de ideas
1		
2		
3		



Anexo 5: Itinerario a seguir. AOE *Planeación del Viaje*.

Itinerario			
¡Planeación del viaje!			
Duración en minutos	Hora de inicio	Hora de fin	Descripción del momento
			Desplazamiento de ida
			Reconocimiento del lugar
			Concurso de canto y baile
30			Descanso
			Competencias
			Desplazamiento de venida



Anexo 6: Collage de fotografías de los momentos en el Jardín Botánico.



