UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNA VISUALIZACIÓN Y GENERALIZACIÓN DE PROCESOS INFINITOS MEDIADOS POR TECNOLOGÍAS DIGITALES

Trabajo presentado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Física

CARLOS ERNESTO CANO RESTREPO

Asesor:
LUIS ALEXANDER CONDE SOLANO
Doctor

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Una visualización y generalización de procesos infinitos mediados por tecnologías digitales

Documento que presentan

Carlos Ernesto Cano Restrepo

Director de Tesis:

Dr. Luis Alexander Conde Solano

Medellín, Colombia Noviembre de 2016

Dedicatoria

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial al Dr. Alexander Conde Solano, asesor de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de este año.

Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las sugerencias recibidas por los profesores y amigos Juan Evangelista Peralta profesor cooperador y Sugey Silva con la que me encuentro en deuda por el ánimo infundido y la confianza en mí depositada.

Quisiera hacer extensiva mi gratitud a todos mis compañeros de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, quienes fueron una inspiración constante.

También quiero dar las gracias a las directivas de la I.E. Javiera Londoño en cabeza del Rector Alfonso Guarín Salazar, Andrea Herrera R y en especial a todas las estudiantes del grado 103 2015 y 115 2016, por su colaboración en el suministro de los datos necesarios para la realización de la parte empírica de esta investigación.

Un agradecimiento muy especial merece la comprensión, paciencia y el ánimo recibidos de mi familia en especial de Wbeimar Cano R por sus aportes en la forma que tomo esta investigación y Emma Cristina Cano R por su dedicación y paciencia a la hora de hacer las traducciones requeridas.

Resumen

Es reconocida la complejidad del infinito tanto en su epistemología como la didáctica. Uno de los conflictos en estudio de la noción del infinito en la matemática escolar, atañe a que la idea de infinito en ocasiones contradice el sentido común proveniente de la percepción. Sin embargo, aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Se Recurre a la representación como único medio de aproximación a objetos matemáticos.

Este trabajo consiste en favorecer procesos infinitos dentro del sistema escolar, particularmente en décimo grado. Para ellos, se incorporan las tecnologías digitales como herramientas que permite crear representaciones dinámicas de procesos iterativos. Dichas representaciones son consonantes con el comportamiento y construcción de fractales (curva de Koch). Las interacciones entre las representaciones del fenómeno de estudio pueden favorecer en las estudiantes procesos de visualización y generalización.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

TABLA DE CONTENIDO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Lista de Ilustraciones

I. Introducción

El infinito en matemáticas ha sido en repetidas ocasiones la fuente del conflicto y la paradoja, desde el problema de la continuidad hasta las aporías que emergen de la teoría de los conjuntos infinitos, lo que conduce a vastos estudios sobre los fundamentos lógicos de las matemáticas en este siglo. La complejidad de su epistemología aunada con la idea de infinito, que en ocasiones contradice el sentido común proveniente de la percepción, dificultan los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta noción en la matemática escolar.

Por otra parte, la aparición del estudio de infinito en el currículo es tímida, se reduce al señalamiento de la importancia de "actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, pues son éstos los que caracterizan el campo conceptual del análisis matemático, en el cual se sitúa el cálculo diferencial e integral que se suele introducir en el grado once" (MEN, 2006, p. 68). De igual forma en libros de texto de matemáticas está ligeramente presente cuando se abordan conceptos de límite y derivadas.

En este trabajo, además de reconocer la importancia del estudio del infinito como una noción imprescindible para el aprendizaje de conceptos que se encuentran dentro del Cálculo;

pretende promover actividades de procesos infinitos en el grado décimo de básica secundaria. Aquí, se espera que los estudiantes de este grado puedan construir una noción de infinito y para ello, se considera preciso partir de ideas intuitivas que tienen los estudiantes con el fin de responder a las indagaciones sobre procesos infinitos, dichas indagaciones son apoyadas por representaciones estáticas y dinámicas generadas por la computadora, en particular, por el lenguaje de programación *LOGO*.

En esta investigación, se ha adoptado la posición de que la construcción del conocimiento y significados implica el uso de representaciones, esas representaciones son herramientas para la comprensión, también se parte de que el aprendizaje de un concepto se gesta cuando hay más oportunidades de interactuar con posibles representaciones de la noción en estudio, en nuestro caso, el infinito.

La organización del presente trabajo consiste en: el primer apartado trata del planteamiento del problema donde se expone la idea principal del trabajo junto con su pregunta y objetivo de investigación. En el segundo apartado se orienta a una sucinta revisión histórica de las principales ideas matemáticas que subyacen a la noción de infinito, y también, contempla algunas investigaciones sobre dificultades del estudio del infinito en el contexto escolar. En el tercer apartado, se presenta las principales consideraciones teóricas que sirvieron de base para el trabajo; esta aproximación teórica se refiere a consideraciones del infinito, representaciones y procesos de visualización y generalización.

En el cuarto apartado, se presenta la metodología de investigación, la cual atiende a un enfoque cualitativo y se divide en las siguientes fases: antecedentes, planteamiento del problema, marco conceptual, diseño de actividades de intervención, puesta en marcha del diseño de intervención, análisis y resultados.

En el quinto apartado, se expone el análisis a la luz de los aspectos teóricos. Y en el sexto, se presenta el resultado y reflexiones finales del trabajo, con el propósito de dar respuesta a la pregunta y la consecución del objetivo plateado inicialmente.

II. Objetivos

El objetivo inicial de esta investigación se centró en conocer y analizar de qué manera las estudiantes del grado decimo de la institución educativa Javiera Londoño, se apropian del concepto de infinito utilizando procedimientos recursivos en lenguaje logo; se asimilan sus propiedades y las aplican en competencias para el cálculo de áreas y perímetros, con el fin de resolver problemas de límites, que incluyen el concepto de infinito, en términos de conocimientos previos y procedimientos.

¿Cómo interpretan las estudiantes del grado decimo de la Javiera Londoño los problemas que involucran el concepto de infinito para abordar el concepto de perímetro y área?

Investigar el papel mediador de las herramientas informáticas en el aprendizaje y la construcción de la noción de Infinito. Se pretende mostrar que el infinito, o al menos algunos de los infinitos procesos que se encuentran en las matemáticas, puede ser más accesible si se estudia en un entorno que facilita la construcción representación visual.

III. Planteamiento del problema

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente sobre el concepto de infinito en la matemática escolar, se coincide sobre la importancia de éste, sin embargo, rara vez se ve el infinito como un objeto principal de estudio en la escuela. Una de las posibles causas puede ser principalmente que la concepción de infinito que yace en su naturaleza mental, es altamente abstracta y contradictoria (Sacristán, 2003). Además, existe una relación entre la manifestación de los obstáculos didácticos para los estudiantes de matemáticas y los obstáculos epistemológicos que han existido en el desarrollo del concepto de infinito.

No obstante, para De Guzmán (1996) aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos se valen de procesos simbólicos, diagramas y gráficas, etc., como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático.

Por lo tanto, debido a la naturaleza de los objetos matemáticos cuya aproximación exclusiva es simbólica en las ideas que implican una sensación de movimiento como procesos infinitos, se cree necesario incorporar herramientas tecnológicas que permitan ofrecer a las estudiantes una visualización dinámica, de tal forma que ellos perciban en tiempo real las variaciones y cambios de las diferentes representaciones de un fenómeno de estudio y así les permita construir por sus propios medios la idea matemática que deseen. Estas variaciones y cambios de fenómenos de estudio, podría promover en los estudiantes procesos de generalización.

Así pues, este estudio consta de dos momentos: la etapa de conocimiento del lenguaje logo y la etapa de diseño didáctico; para la etapa de enseñanza del lenguaje Logo se aprovecharon talleres de trabajo del proyecto Emat de México y del trabajo de grado de Castellanos, Enís , así como los aportes de (Hitt & Páez Murillo).

En este sentido se plantea como pregunta de investigación: *¿cómo influye la visualización y la generalización mediadas por tecnologías digitales en la construcción de la noción de infinito en estudiantes del grado decimo de la Javiera Londoño?* Y como objetivo fundamental se propone: *caracterizar las formas como los estudiantes construyen la noción de infinito a través de la visualización y generalización mediadas por tecnologías digitales.*

IV. Antecedentes

En este capítulo, se presentan aspectos históricos y cuestiones didácticas de las matemáticas sobre el tratamiento del infinito en el contexto escolar. Se considera importante señalar un panorama general de la evolución histórica del concepto de infinito, el propósito de ello es destacar las formas en las que los procesos infinitos han aparecido y han sido concebidos en la historia del conocimiento matemático. Además, se exponen algunas de las dificultades que han tenido que ser confrontadas en el desarrollo del concepto de infinitud, así como los intentos que se realizaron para incorporarlo en las matemáticas y definirlo como un campo de estudio. Por otra parte, exhibir evidencias de que algunos de estos obstáculos epistemológicos pueden tener manifestaciones similares a las de los obstáculos didácticos para los estudiantes de matemáticas (Sierpinska, 1987; Waldegg, 1988; Cornu, 1991).

4.1 El concepto de infinitud: sus primeras manifestaciones

Piaget y Garcia (1989) señalan que cuando ocurre un momento de crisis (una revolución científica) hay un rompimiento con la ideología existente y así emerge un nuevo esquema epistemológico. De manera que, la ideología existente actúa como un obstáculo epistemológico, porque desaprueba el desarrollo del conocimiento por fuera de dicho marco aceptado en un periodo histórico. Las matemáticas del infinito no son la excepción, aún más si consideramos la elevada naturaleza mental o abstracta de dicho concepto. En este capítulo, presento también un panorama general de algunas de las principales ideas matemáticas relacionadas con el concepto de infinitud. Tal examen muestra el rol central que mantiene esta área en matemáticas, al igual que su riqueza y complejidad.

4.2 Preconcepciones intuitivas de infinito

La mayoría tienen una noción personal o ideas intuitivas de infinitud, es por esto que se puede considerar estas concepciones pre-matemáticas son, de hecho, estructuras cognitivas que ayudan a responder indagaciones o búsquedas personales. Estas nociones surgen como respuestas a la pregunta acerca de cuáles son los límites de la percepción. Es decir, en su origen la noción de infinitud está relacionada con aquello que está más allá de la percepción y de lo material. En efecto, la palabra infinito significa "no terminado" o "sin fin" (i.e. endless)[1]; así, ésta es una idea que

[1] La palabra "endless" puede dividirse en dos: "end", que puede ser traducida al español por "fin", y "less", conjunción que significa "desprovisto de" o "sin". Literalmente, la palabra "endless" significa "que carece de fin", "sin fin" (N de T).

se refiere a aquello inmensurable, ilimitado o que no tiene fin: "La infinidad es, después de todo, un componente principal del concepto que uno se forma de infinito. Otras nociones asociadas con infinito son imprecisión y lo inconcebible." (Rucker, 1982, p. 2).

Como Rucker (1982) lo señala, lo infinito está relacionado también con lo inconcebible o lo indefinido[2]. De esta manera, suele decirse que un proceso infinito es aquello que continua de manera indefinida. Aristóteles (384-322 a.C.) citado en Rucker (1982) escribió "… ser infinito es una privación, no una perfección sino la ausencia de un límite…" (p.3). La noción primordial, relacionando lo infinito con aquello que va más allá de las experiencias de la percepción, es también ilustrada por el término usado por los griegos para describirla: *to apeiron* lo que literalmente significa lo ilimitado o lo que no tiene límites, "pero puede significar también infinito, indefinido o lo indeterminado," (Rucker, op.cit., p.3).

En un principio, los griegos percibieron las matemáticas como una abstracción empírica (i.e. referidas a la "realidad"). Tal vez a causa de ello su sistema numérico era finito (solo tenían números

[2] Otra noción que está intuitivamente relacionada con infinito es la de Dios o el Absoluto. De nuevo, esto es a causa de que estas son ideas que van más allá de un esquema perceptivo.

para aquello a lo que ellos habían designado un uso). Así, los griegos se negaban a aceptar el apeiron y de hecho le temían al infinito (el *horror al infinito*), no solo a causa de que es algo que no puede ser extraído de la experiencia sensible, sino también porque estaba más allá de su esquema conceptual: no era sorprendente pues que carecieran de la notación adecuada para ser capaces de incorporarlo en su sistema matemático (Maor, 1987, p.3).

4.3 Lo infinitamente extenso y lo infinitamente pequeño

En el siglo XIX, Cantor (1845-1918) hizo la distinción entre el infinito Absoluto (el Absoluto), las infinidades físicas y las infinidades matemáticas. Las infinidades físicas eran descritas por Rucker (1982) de la siguiente manera:

> Hay tres formas en las que nuestro mundo parece ser ilimitado, y de ese modo, tal vez, infinito. Parece que el tiempo no tiene fin. Parece que el espacio no tiene fin. Y parece que cualquier intervalo de espacio y tiempo puede ser dividido y subdividido infinitamente (p.10).

Así, la infinitud está relacionada con la extensión de magnitudes espaciales y temporales. En primera instancia, esto sucede cuando se piensa en lo que es "muy grande". Esto es una noción "exterior" de infinitud: nociones de infinidad o ilimitación están relacionadas en primer lugar con cuestiones tales como la eternidad del tiempo o la inmensidad del universo. Los niños relacionan con frecuencia el infinito con aquello que es "muy grande": grandes grupos, como el número de granos de arena en un desierto o el número de estrellas en el cielo, se dice a menudo que son infinitos. Estos son los conjuntos *concretos* más grandes en los que puede pensar una persona, y por tanto constituir su primera idea de un número infinito o, al menos, del más cercano al infinito que *exista*.

De hecho, Arquímedes (287-212 a.C.) usó la idea de todos los granos de arena en el mundo como base para su discusión acerca del infinito en su *El contador de arena*, donde probó que, en efecto, este gran número *puede* ser contado y por lo tanto es finito[3]. La noción de *conteo* es, en realidad, una idea subyacente a la (potencial) infinitud: la acción *potencial* de añadir objetos a un gran conjunto. Pero lo relevante de esta discusión es que esto constituye un cambio epistemológico: Arquímedes redefinió el sistema numérico griego[4] exponiendo un modo mediante el cual números de cualquier medida, tan grandes como se quiera, pueden ser construidos. Mostró que, a

[3] Arquímedes estimó que el número de granos de arena en el mundo era menor que 10^{63} (usando notación moderna). – Es también de interés resaltar que, en relación con el otro gran grupo que mencioné, se estima que el número de estrellas visibles a ojo desnudo desde un punto son solo cerca de 2800, de acuerdo con Maor (1987, p.16).

[4] Hasta ese momento, el sistema numérico griego no podía expresar valores más grandes que 100, 000, 000.

pesar de que no hay una correspondencia concreta con lo infinito en el mundo perceptual, la infinitud existe (como una construcción mental) desde que la lista numérica pueda ser continuada indefinidamente. De este modo, Arquímedes seguía a Aristóteles, quien había hecho una distinción entre el *infinito potencial* y el *infinito en acto*, y que solo aceptó lo *potencialmente* infinito: el tiempo continúa por siempre, los números naturales son potencialmente infinitos. Este ejemplo ilustra también la envergadura y las limitaciones de las representaciones numéricas como lo explica Waldegg (1988), esto vincula el problema conceptual de la infinitud con la indefinición de grandes cantidades.

4.4 El método de los indivisibles y el método exhaustivo

El problema acerca de la medida de magnitudes espaciales condujo a los antiguos griegos al desarrollo de dos métodos respectivamente conectados con las dos concepciones de la repetida subdivisión. Es interesante porque estos métodos constituirían más tarde la base de nuestro moderno cálculo infinitesimal.

Demócrito pensaba que los sólidos estaban constituidos de un número infinito de planos paralelos, indefinidamente delgados e indefinidamente adheridos unos a otros. El enfoque de Demócrito es de carácter atomista *infinitesimal*, es decir que tales capas son infinitesimalmente delgadas e indivisibles. Así, el *método de los indivisibles* divide un sólido, un área o una línea en una infinidad de indivisibles. Posteriormente, Arquímedes se sirvió también de "El Método" para propósitos de exploración y descubrimiento, pero no pensó que fuera lo suficientemente riguroso como para ser usado a manera de prueba. Por lo que utilizó en su lugar el *método exhaustivo* que será descrito más abajo. A diferencia de Demócrito, Arquímedes no consideró las diferencias infinitesimales como revocadoras[5], solo lo bastante pequeñas como para prevenir irregularidades y ser válidas en un enfoque heurístico. Sin embargo, lo que me parece interesante acerca de este método es que involucra una concepción realista de infinitud: se considera que un sólido o un área están constituidos de un infinito conjunto de partes. Struik (1967;) añade lo siguiente con relación a este método: […] Nuestras modernas concepciones de límite hizo posible convertir esta teoría 'atómica' en una teoría tan rigurosa como el método exhaustivo (p.48).

[5] Demócrito consideraba que el espacio era continuo – un número infinito de capas elementales en contacto unas con otras. Esta es una concepción de la continuidad muy diferente a la que tenía Aristóteles, concepción según la cual las magnitudes podían ser subdivididas indefinidamente. Siguiendo a Moreno (1995), la perspectiva de Demócrito constituye una de las primeras concepciones *analíticas* del continuo.

Es interesante asociar esto con las matemáticas modernas, donde se considera que una región continua de espacio *matemático* está constituida de un número infinito de puntos *matemáticos*. Un número finito de puntos, los cuales no tienen extensión, no pueden formar un segmento de línea, el cual sí tiene extensión. De este modo, cada segmento de línea (o segmento plano continuo o región de espacio) debe estar compuesto de un número infinito de puntos.

El método exhaustivo, perfeccionado por Arquímedes, puede ser explicado usando el ejemplo de la medición del círculo. Usando este método Arquímedes fue capaz de aproximar (del exterior al interior) la circunferencia y el área de un círculo simplemente inscribiendo y circunscribiendo polígonos con más y más lados cada vez por encima del círculo. Esta técnica tras el cálculo integral, está basada en un axioma de Eudoxo (408-355 a.C.) según el cual, dadas dos magnitudes desiguales, una de ellas puede ser repetida bastante cantidad de veces como para exceder a la otra. En principio, no hay un límite de precisión asequible a través de este método aunque, claro está, no puede alcanzarse una precisión infinita en una cantidad finita de tiempo. En el siglo XIX, este método sería explícitamente expresado por el *axioma del continuo* de Dedekind (1831-1926), el cual sostiene que solo hay una única magnitud correcta que se sostiene como el límite de un proceso. La diferencia entre Eudoxo y Dedekind fue que el último aceptó la realidad de aquello que definió como el conjunto infinito de los números reales.

Por otra parte, el método de los indivisibles fue reintroducido en el siglo XVII por matemáticos como Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642) y Cavalieri (1598-1647), a pesar de que ignoraban el trabajo de Arquímedes. Cavalieri explica que la totalidad de indivisibles de un cuerpo puede ser comparada con la totalidad de indivisibles de otro cuerpo, y que sus magnitudes tienen una relación definida entre ellas. Como dice Gardies (1984) este método implica poner dos conjuntos infinitos en una relación de correspondencia de uno a uno. Gardies afirma sería esto sobre lo que Dedekind basaría más tarde su descripción de que un conjunto infinito puede ser puesto en una relación de correspondencia de uno a uno con uno de sus propios subconjuntos.

4.5 Las paradojas de Zenón (aporías de lo infinitamente pequeño)

El problema de la correspondencia entre número y espacio (aritmética y geometría) es fundamental a las ideas de infinitud y del continuo. Aristóteles dio extensos discursos sobre la naturaleza de lo infinito y sobre las diferencias entre lo discreto y lo continuo: para él, el número es una cantidad discreta, mientras que las magnitudes son continuas porque pueden ser divididas *ad infinitum*.

Uno de los problemas de la relación entre lo discreto y lo continuo fue propuesto por por Zenón de Elea (450 a.C.). Según Struik (1967), Zenón cuestionó la creencia de que "la suma de un número infinito de cantidades puede hacerse tan grande como queramos, incluso si cada cantidad es extremadamente pequeña (∞ X $\varepsilon = \infty$), y también que la suma de un número finito o infinito de cantidades de dimensión cero es cero" (p.43). Sus argumentos resaltaron la dificultad de decir que la línea está formada por puntos. Si magnitudes continuas (espacio y tiempo) son infinitamente divisibles, entonces el movimiento no puede existir (aporías de *Aquiles y la tortuga*), pero si no son infinitamente divisibles, debido a la existencia de partes primarias indivisibles, entonces, de nuevo, el movimiento no es posible (aporías de *La flecha* y *El estadio*).

Por ejemplo, la aporía zenoniana de la dicotomía de la primera categoría es traducida y explicada por Rucker (1982) como sigue:

> Si estás en el número 1 de la recta numérica, hay dos maneras de llegar al 2: moviéndose una unidad entera de una vez, o usando el proceso infinito de moverse 1/2 unidad, luego 1/4, luego 1/8, etc. Este hecho es

usualmente representado por la ecuación 1+1=1+1/2+1/4+1/8+… (p.25).

Según Rucker (1982), Zenón vio esto como paradójico, ya que él asumió *a priori* que ningún infinito podía existir en realidad, de manera que ningún proceso infinito podía ser estimado como completo; en consecuencia, la equivalencia entre una cantidad finita y un proceso infinito parecía imposible.

Aristóteles pensaba que uno de los problemas que conducía a las primeras aporías es que Zenón mezcla dos tipos de infinitud – la infinita divisibilidad del espacio y la infinita extensión del tiempo – cuando sugiere que la división infinita del espacio precisa una cantidad infinita de tiempo para ser completada. Moore (1991) dice que, para Aristóteles, las aporías de Zenón dejaban ver la incoherencia de algo siendo dividido en muchas e infinitas partes (lo que implicaba la construcción de un infinito actual). De tal manera, para las otras dos aporías, Aristóteles arguyó que era falso asumir que el continuo estaba formado de elementos indivisibles. Jones (1987) añade que las aporías de Zenón surgen de una mezcla entre lo discreto y lo continuo – aplicando un número a una magnitud – y la solución aristotélica fue separar lo discreto de lo continuo. Fue mucho más tarde, en nuestro siglo, que Russell (1872-1970) postuló que los puntos en un segmento no pueden ser contados ya que el conjunto de puntos en el continuo real es innumerable (esta es una idea que será discutida más adelante). Así, medidas continuas no pueden ser formadas juntando partículas puntuales. Como lo expresó Bruyère (1989), "a menudo la intuición nos engaña cuando nos impulsa a confundir la infinitud de los números naturales con la infinitud de los números reales" (p.29).

4.6 Paradojas de los conjuntos infinitos (paradojas de lo infinitamente grande)

La idea de que lo que es infinito puede tener partes propias que también son infinitas y, por consiguiente, parecen tan grandes como el conjunto. Es una de las razones por las que Aristóteles se resistió a aceptar el infinito en acto (Moore, 1991). El problema con este argumento es que implica pensar los conjuntos infinitos usando un esquema finito. Galileo, en su *Dialogues Concerning Two New Sciences* (1638) reconoció que el infinito no puede ser pensado de la misma manera en la que pensamos lo finito. En efecto, Galileo usó en sus argumentos la correspondencia entre, por ejemplo, el conjunto de los números naturales y el de los cuadrados de números naturales. Rucker (1982), señala que en Galileo se encuentran los primeros signos de una actitud moderna hacia el actual infinito en matemáticas:

> si los conjuntos infinitos no se comportan como los conjuntos finitos, esto no quiere decir que el infinito sea una noción inconsistente. Significa, más bien, que los números infinitos obedecen a una 'aritmética' diferente a la de los números finitos. Galileo estaba fijando el terreno para Bolzano y Cantor 250 años más tarde. (p.6).

Bolzano (1781-1848) en su *Paradoxes of infinity* (1851) dedicó sus esfuerzos para revelar el misterio que rodeaba al término infinitud. Él fue el primero en aceptar (positivamente/absolutamente) el infinito en acto y fue también el primero en introducir el infinito dentro de las matemáticas como un objeto de estudio. Desarrolló un concepto de infinitud con el objeto de resolver el considerable número de aporías que se habían producido en su tiempo. Esencialmente, Bolzano mostró que la manera en la que el infinito podía ser incorporado a las matemáticas era una propiedad de *conjuntos*. Como señalan Moreno y Waldegg (1991), el trabajo de Bolzano condujo a un nuevo enfoque que podría, a su vez, convertir al infinito en un objeto con un campo operacional. "Con este nuevo significado era posible que el infinito fuera *asimilado* por las matemáticas" (p. 215). En su *Paradoxes*, Bolzano tomó como un hecho la idea de ser capaz de poner en una relación de uno a uno a los elementos de un conjunto infinito con los elementos de uno de sus (infinitos) subconjuntos. Esto formaría la noción de conjunto infinito de Dedekind.

El trabajo de Cauchy acerca de la convergencia de series infinitas abona el terreno para la aritmetización del cálculo y para el trabajo de Weierstrass (1815-1897). La definición de Cauchy dio por sentado el continuo numérico. Weierstrass se dio cuenta (así como Bolzano) de que las ideas introducidas por Cauchy no podían ser desarrolladas sin una construcción rigurosa de los números reales. Con weierstrass emergieron nuevos criterios de rigor, y advirtió los peligros de basarse en la intuición geométrica. Esto fue ejemplificado de mejor manera con el descubrimiento de funciones continuas no diferenciables.

4.7 Fractales

Cuando aparecieron por primera vez, las funciones continuas no diferenciables, las curvas llena espacio, y lo que más tarde sería llamado figuras fractales, fueron considerados "patológicos" y fueron llamados "monstruos matemáticos". Las construcciones de Koch y de Peano fueron seguidas por otros "monstruos". Entre ellos podemos encontrar el conjunto de Cantor o "polvo de Cantor", la "escalera del diablo", y el triángulo de Sierpinski (que se mostrará más adelante en este trabajo), el cual puede ser obtenido “borrando” el triángulo dentro del triángulo original y repitiendo dicho proceso para cada uno de los triángulos más pequeños restantes. El triángulo de Sierpinski puede obtenerse también a través de una curva, límite de líneas poligonales.

Hoy, fractal es una palabra cotidiana, y los fractales están en el centro de los desarrollos modernos en matemáticas. Es interesante citar a Dyson (1978):

> Una gran revolución de ideas separa las matemáticas clásicas del s. XIX de las matemáticas modernas del s. XX. Las matemáticas clásicas tenían sus raíces en las estructuras geométricas comunes de Euclides y las dinámicas continuamente evolucionantes de Newton. Las matemáticas modernas comenzaron con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano. Históricamente, la revolución fue forzada por el descubrimiento de estructuras matemáticas que no se adecuaban a los patrones de Euclides y Newton (p. 677).

Como lo señala Moreno (1995), la situación así descrita es característica de la historia de las matemáticas, que muestra una tensión permanente entre lo concreto y lo abstracto. Lo que es abstracto en cierto momento del desarrollo histórico se convierte en algo concreto en un momento posterior.

4.8 Investigaciones sobre el concepto de infinito

Una de las primeras investigaciones sobre el concepto de infinito se llevó a cabo por Fischbein et al. (1979) se centró en lo que los autores llaman la intuición del infinito. Los autores sostienen que “el concepto de infinito (y en concreto de la divisibilidad infinita) es intuitivamente contradictoria” (p.6). A través de un cuestionario aplicado en una gran población, Fischbein et al. (1979) estudió los aspectos sobre el infinito que eran contrarios a la intuición, utilizó figuras y analizo los efectos en diferentes contextos y la forma como los problemas fueron resueltos. Los autores tuvieron el cuidado de separar dos niveles de infinito, una correspondiente a los conjuntos infinitos numerables, y otro para el continuo. Del análisis de los resultados, los autores confirman la naturaleza contradictoria del infinito y lo explican con el argumento de que los esquemas lógicos de las personas están adecuados de forma natural a una realidad finita. Por lo tanto, las interpretaciones finitas tienden a prevalecer entre los encuestados. Los autores también encontraron que, para los procesos infinitos geométricas, las intuiciones son muy sensibles al contexto en el que se presentan. Finalmente, afirman que la enseñanza formal de la matemática no modifica las concepciones e intuiciones del infinito; este resultado es compartido por Waldegg (1988); además, argumentan que la enseñanza puede estimular el pensamiento lógico, pero cuando se realiza de manera formal y rígida, no y esto puede quizás explicar el resultado de un mayor porcentaje de interpretaciones erróneas y finitas en los estudiantes con una formación más matemático.

Waldegg (1988) estudió las concepciones de infinito a través de una serie de cuestionarios aplicados en estudiantes mexicanos, junto con un análisis crítico en profundidad del desarrollo histórico del infinito matemático. En su investigación, estas dos partes están íntimamente relacionados, cada uno utilizado para reinterpretar la otra. Por ejemplo, con referencia a la evolución conceptual del infinito matemático real (descrito adicionalmente en Moreno y Waldegg (1991) las respuestas de los estudiantes son similares a las dadas por los matemáticos hasta la época de Bolzano. En la base de su trabajo se encuentra el problema de la extrapolación de las propiedades de lo finito a lo infinito (como la idea de que el todo es siempre más grande que las partes) que lleva a situaciones contradictorias. Otro hallazgo consiste que el contexto y la forma de representación son muy influyentes en el tipo de respuestas de los estudiantes dan: si un conjunto geométrico está limitado, esto se puede convertirse en un obstáculo para su cuantificación infinita; también los conjuntos continuos son también una fuente potencial de conflicto desde el «conteo» de allí que proponen que los métodos utilizados para los conjuntos discretos sean modificados. Hallaron que los métodos de razonamiento utilizados en una situación geométrica son diferentes de los utilizados en el contexto numérico. Sin embargo, en un contexto que combina elementos numéricos y geométricos a través del uso del lenguaje algebraico, Waldegg afirma que algunos de los obstáculos observados en los casos anteriores parecían haber desaparecido. Este es un hallazgo importante que apoya la idea en la cual mediante la construcción de conexiones entre diferentes tipos de representaciones (en este caso a través del lenguaje algebraico, uniendo lo numérico y lo geométrico) algunas de las dificultades que surgen cuando se trabaja en un solo contexto puede ser disminuida.

Más recientemente, Nuñez-Errázuriz (1993), llevó a cabo un estudio más de los aspectos subyacentes de la psicología cognitiva sobre el concepto de infinito en matemáticas. Él considera la idea de repetición como un elemento central en la construcción del concepto de infinito y se centra en los siguientes aspectos adicionales:

- La distinción entre dos tipos de iteración: divergente y convergente, que se relacionan a lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño.

- La naturaleza del contenido de la iteración donde cardinalidad y medida espacial deben distinguirse.
- El estudio de la coordinación de los diferentes tipos de iteraciones dentro de una situación.
- El estudio de los aspectos figurativos y conceptuales del contexto en el que se presenta una situación.

La investigación empírica de Nuñez-Errázuriz (1993) – implico el uso de cuestionarios y entrevistas con niños entre las edades de 8 y 14– utilizo simples figuras geométricas bidimensionales (principalmente círculos y cuadriláteros) que se transformaban secuencialmente a través de repeticiones indefinida del mismo proceso (en la misma manera que muchas figuras fractales se construyen). Por lo tanto, señala, se hicieron sus observaciones en un mundo entre lo concreto y lo finito y el infinito potencial, que no impliquen el infinito actual. En este trabajo Nuñez-Errázuriz (1993) concluye que, aunque las iteraciones es una idea fundamental del concepto de infinito, las repeticiones y los procedimientos aritméticos no son los tipos más importantes para la concepción de lo infinitamente grande; cree que los tipos no aritméticas de iteraciones son más fundamentales. En cuanto a la distinción entre iteraciones divergentes y convergentes (relacionado con la idea de subdivisión), Nuñez-Errázuriz apunta a una diferencia esencial entre las formas en que lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño se conciben. Se observó que cuando los niños alrededor de los 12 años comienzan a desarrollar intuiciones de procesos iterativos convergentes, manifiestan un gran número de dudas, vacilaciones y cambios en sus opiniones. Su estudio sobre la forma de cómo se coordinan los diferentes tipos de iteraciones le permitió observar que cuando los niños comienzan a entender la convergencia, comienzan a ignorar el efecto de iteraciones divergentes que están presentes simultáneamente. Él considera que se trata de un obstáculo epistemológico, pero cree que su estudio sobre la naturaleza de las iteraciones (medida espacial y de cardinalidad) ofrece una explicación, ya que las iteraciones convergentes (donde la medida de los resultados parciales disminuye) son siempre implícitamente acompañado de iteraciones divergentes (es decir, el número de pasos) de una naturaleza diferente. Por lo tanto, argumenta que las iteraciones convergentes tienen una complejidad cognitiva adicional que las iteraciones de diferente tipo y naturaleza. Núñez también observa que las dificultades son diferentes de acuerdo a la figura utilizada y los contextos donde son expuestos (por ejemplo, la forma, su escala, áreas o distancias). Él observó que los estudiantes tendrían diferentes respuestas a los problemas que se construyeron isomorfamente.

Cabe mencionar que muchos investigadores se han centrado en el problema de que un límite - o infinito - tiene la doble propiedad de ser un proceso y un objeto - infinito potencial y real - que puede ser una fuente de dificultades para los estudiantes. Por ejemplo, Duval (1983) estudió el problema de lo que él denomina la "división" (Dédoublement) de objetos matemáticos y cómo esto se convierte en un obstáculo para el aprendizaje del infinito. El trabajo centrado en los obstáculos epistemológicos relacionados con los límites también se llevó a cabo por Sierpinska (1987), que investigó las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y el infinito y cómo estos obstáculos surgen (Sierpinska y Viwegier, 1989). Ella identifica cuatro áreas que son fuente de obstáculos para los límites: el conocimiento científico, el infinito, función y número real. En un intento de explorar medios para superar estos obstáculos, Sierpinska (1987) eligió el contexto de la serie infinita con tres objetivos. El primer objetivo se refiere al área de los números reales y la estructura de las expansiones decimales. El segundo objetivo que se está centrando en las contradicciones que surgen cuando se extiende manipulaciones de lo finito a lo infinito observado tanto histórica como por los investigadores en educación matemática (Fischbein, 1979; Waldegg, 1988 y McDonald, 1992). El tercer objetivo se refiere específicamente a la convergencia de la serie infinita (es decir, a la existencia de un límite). En los resultados de su exploración ninguno de los obstáculos fue superado, aunque sí encontró cambios y la aparición de conflictos.

Buscando relaciones tres límites y números reales, Tall y Schwarzenberger (1978) estudiaron los conflictos de aprendizaje que se producen entre dichas ideas. Se describen ejemplos de conflictos entre “decimal” y “límite”, entre “decimal” y “fracción”, entre el “número” y “límite”, y entre “secuencia” y “serie”. Estos investigadores se centraron en la pregunta “¿es 0,999... = 1?”, Y se encontró que muchas de las respuestas contenían conceptos infinitesimales con la mayoría de los estudiantes teniendo en cuenta 0.999... “algo menos de una”, porque nunca se puede “llegar” a uno: comentaban que tal vez pueda conseguir infinitamente cerca, pero no es igual. También apuntan al hecho de que algunos estudiantes no pueden aceptar el hecho de que dos representaciones decimales podía corresponden al mismo número.

Monaghan (1986) citado en Monaghan, Sun & Tall (1994), investigo las conceptualizaciones del número real, límite e infinito en estudiantes adolescentes. Se encontró que los estudiantes mostraron inseguridades respecto infinitos decimales que se consideran como «inadecuados» y calificó de “números infinitos”.

De este modo $\sqrt{2}$ = 1,414 no indica que el 2 es el límite exacto de una expansión decimal infinita; este último es visto sólo como una aproximación. Los decimales infinitos son vistos como un conjunto potencialmente infinito de instrucciones para encontrar el punto en la recta numérica, un proceso que nunca puede ser completado; por lo tanto, las expansiones decimales infinitas son percibidos como inexactas. Por su parte, Sierpinska (1987) relata cómo los estudiantes que estaban en condiciones de aceptar los argumentos utilizados para la conversión de decimales que se repiten a las fracciones, se negaron a aceptarlos cuando se trataba de mostrar que 0,9999... = 1. Ella describe cómo algunos estudiantes piensan de 0.999..., en términos de un proceso de construcción que nunca termina ("potencial infinito"), es decir, en términos de una secuencia en lugar de como su límite.

4.8.1 El uso de la computadora para el estudio del cálculo, procesos infinitos, y límites

Las investigaciones que impliquen la calculadora o la computadora en el área de cálculo se han centrado principalmente en el estudio de las funciones. Por ejemplo, Schwarz (1989) crea un micromundo para el estudio del concepto de función llamada

TRM: Triple modelo de representación que incluía tres representaciones de funciones algebraicas: gráficos y tablas.

Tall (1992) menciona que “la enseñanza de la noción de límite usando la computadora tiene, en general, resultados negativos” (p.503). Esto debido a que se aplicaron tratamientos numéricos a los límites que son susceptibles a problemas de precisión (y por lo tanto que debe ser combinado con la discusión de los problemas de la aritmética de computador), así como los aspectos simbólicos utilizados. El sugiere proporcionar al estudiante con experiencias ricas a través de enfoques no formales -como su propio trabajo (Tall, 1986) - para la construcción de “raíces cognitivas” o imágenes conceptuales fundantes, sobre la cual se puedan construir teorías formales de cálculo que más adelante puedan ayudar en la construcción de ideas matemáticas formales.

Tall (1986) opina que utilizar los graficadores para la enseñanza del cálculo, es un intento de incorporar el computador en el plan de estudios a través de lo que él llama organizadores genéricos, es decir, entornos o micromundos que permiten al estudiante manipular y explorar conceptos a través de estos medios. Entre otras características, en el software graficador está la característica de poderlas aumentar de tamaño y construir graficas "fractales": en donde se puedan diferenciar su modo de construcción y delimitar los detalles. Tall (1991b) hace hincapié en que uno de los beneficios de utilizar estos graficadores está en la posibilidad de construir las gráficas de manera recursiva y en las que se puede observar aproximaciones con detalles de $1 / 2^n$ y señala la importancia de los estudiantes estén expuestos al proceso de construcción a través de gráficos dinámicos de computador: es decir mediante la acumulación de sumas parciales y darse cuenta de que los nuevos "formas" ya no añaden mucho. Él explica cómo esto puede convertirse en una prueba intuitiva de la no diferenciabilidad de esta función.

Monaghan, Sun & Tall (1994) estudiaron los efectos del software algebraico denominado "Derive", en las concepciones de los estudiantes sobre el límite e hicieron énfasis en observar el límite como un proceso y límite como objeto. Ellos compararon el enfoque computacional con el tradicional, encontrando que cada enfoque enfatiza sobre unos elementos y suprime otros, en el enfoque la tradicional de enseñanza lo que permite una visión más clara de límite como un objeto, pero se evidencias otras dificultades. Ellos sugieren que mediante el uso de un sistema de álgebra computacional que produce límites simbólicos como "expresiones numéricas apropiadas", puede ser posible que los estudiantes desarrollen una visión más equilibrada de un límite como un proceso y un concepto.

Un grupo de investigadores en el proyecto "Observando la belleza en Matemáticas" (Lewis, 1990; Goldenberg, 1991; Cuoco y Goldenberg, 1992) del Centro de Desarrollo de la Educación en Massachusetts, investigaron la forma en la que los estudiantes pueden encontrar, en la *geometría basada en computador*, ideas como las de secuencias y series, límites, y la inducción matemática, entre otros. Ellos optaron por utilizar las construcciones geométricas de forma recursiva y figuras fractales, debido a sus características matemáticas (por ejemplo, los vínculos entre la geometría de las estructuras recursivas y secuencias). La idea principal fue que la investigación de estas figuras ofreció una forma atractiva en la que los estudiantes podrían involucrarse con las matemáticas y el razonamiento matemático, y proporciona una manera de integrar los aspectos visuales, de investigación y de motivación en las actividades. Lewis (1990) describe un plan de estudios en donde se utilicen los procedimientos fractales aplicando procedimientos del lenguaje logo, el cual incluye nociones sobre fractales, en particular el estudio del perímetro de la curva de Koch y el área del copo de nieve. Él Señala que la curva de copo de nieve, puede proporcionar, en su caso límite, un caso de estudio a través de una figura con un perímetro sin límites y una zona acotada o restringida, es un ejemplo que puede conducir a investigaciones sobre figuras auto-similares, de series convergentes y divergentes, secuencias, etc. Él apunta a que a través de los fractales y el software de graficación se pueda realizar exploraciones con un nivel adecuado de sofisticación, a la mayoría de los estudiantes.

Goldenberg (1991) describe otras actividades basadas en la construcción - a través de un programa informático diseñado específicamente: el explorador del fractal - de los fractales o figuras autosimilaridad, para explorar y analizar las diferentes propiedades de estos objetos como relaciones geométricas. Estos trabajos apuntan a algunos de los usos de las exploraciones fractales en la educación matemática - un importante antecedente para algunas de las actividades que utilicé en la investigación presentada en este trabajo de grado.

V. Aproximación teórica

En este capítulo se presentan tres perspectivas: i) Consideraciones del infinito, ii) representaciones semióticas por medios computacionales y iii) procesos de visualización y generalización.

5.1 Consideraciones del infinito

Como se muestra en el capítulo anterior, lo infinito puede ser considerado como una construcción mental altamente “abstracta” con tendencia a una naturaleza contradictoria, este es un concepto que depende, tal vez más que cualquier otra idea matemática, del contexto y del punto de vista que adopte cada sujeto. Con respecto a esto, Tall (1980) señala que “nuestra interpretación de lo infinito es relativa a nuestro esquema de interpretación en lugar de una absoluta forma de verdad” (p. 281). Así, la perspectiva adoptada y el contexto en el que lo infinito es presentado son susceptibles de tener un rol determinante en cómo esto es concebido, sin embargo, puede ser posible sacar ventaja de la(s) situación(es) en las que lo infinito es presentado para hacerlo más “concreto”. Wilensky (1991) sugiere que los objetos abstractos pueden volverse concretos si tenemos múltiples modos de enlace con ellos. De la misma manera, el estudio de lo infinito puede ser facilitado ayudando al aprendiz a vivenciar diversos contextos en los que se da lo infinito y a construir conexiones entre ellos (Noss & Hoyles, 1996). De este modo, Sacristán (2003) identificó algunos aspectos claves para discernir los elementos acerca de la idea de infinito, descritos a continuación:

5.1.1 Tipos de infinito

5.1.1.1 La doble naturaleza de lo infinito: infinito potencial e infinito actual

Por un lado, el infinito puede ser visto como el resultado de un proceso y este proceso implica un cambio, cambio a través del tiempo y del movimiento. La idea de infinito potencial consiste en que siempre puedes añadir uno posteriormente; de otra parte, se puede ver el enfoque que considera un objeto infinito (conjuntos infinitos) como un estado, en este caso se tiene un infinito actual. La evolución de la definición de un conjunto infinito refleja dos perspectivas: desde la primera, un conjunto A es considerado (potencialmente) infinito si la siguiente afirmación es verdadera: “si $x \in A$ entonces $x+1 \in A$”. La definición evolucionó a: “A es (actualmente) infinito si existe B, un subconjunto propio de A, de tal manera que exista una correspondencia de uno a uno entre A y

B". En el segundo caso el proceso está completo, por tanto, el conjunto infinito puede existir como un todo.

5.1.1.2 Lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño

5.1.1.3 Potencias de los conjuntos infinitos, conjuntos numerables vs. Conjuntos no numerable.

5.2.1 Escenarios matemáticos y contexto

Lo infinito puede encontrarse en una variedad de escenarios y de áreas matemáticas: geometría, secuencias y series, teoría de conjuntos, límites, entre otros, bajo esa tesitura, la interpretación que se tenga de lo infinito depende de la situación en la que ello se presente, de ahí que, la doble naturaleza del concepto de infinitud pueda ser pensada como un resultado del contexto y de la perspectiva adoptada al lidiar con lo infinito como se vio en la sección "a" líneas atrás.

De este modo, Sacristán (2003) estipula que se debe tener en cuenta que lo infinito puede ser alcanzado a través de modelos *visuales/geométricos* o a través de procesos definidos en términos puramente *simbólicos/algebraicos* (al igual que en notaciones como $\lim_{x \to \infty} f(x)$).

5.2.2 Repetición y recursión

La idea de la repetición indefinida es fundamental en el desarrollo del concepto de infinitud, esta repetición está vinculada a la recursión, matemáticamente hablando. A su vez, un algoritmo recursivo contiene intrínsecamente un indefinido número de repeticiones: es *potencialmente* infinito. De hecho, objetos infinitos tienen características similares que resultan de su estructura recursiva, una manera de verificar esto son los fractales.

5.2.3 Naturaleza del objeto matemático

La naturaleza de los objetos matemáticos es abstracta, por lo tanto, la única forma de aproximarse a ellos es por medio de representaciones. Según Duval (1999) la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación sin confundir jamás los objetos matemáticos con ellas.

Se reconoce la naturaleza de los objetos matemáticos, no obstante, los obstáculos se complejizan al tener el concepto de infinito una naturaleza mental, altamente abstracta y contradictoria. A pesar de esto, De Guzmán (1996) enfatiza que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista.

Por su parte, para el estudio del infinito, Sacristán (2003) apunta que se debe orientar a dos ideas matemáticas: lo discreto y lo continuo; en particular, distinguir entre cardinalidad, y medida en el espacio.

5.3 Representaciones

Para Denis (1991) “la representación puede referirse tanto a un proceso y también al resultado de este proceso (p.1)”, donde lo primero es una actividad de generación de objetos o entidades, y lo segundo se refiere a las entidades en sí mismas en lugar de la actividad que los ha producido. Por ejemplo, un dibujo de un objeto físico es un nuevo objeto que también existe como una entidad física, pero es diferente de una imagen mental de la misma cosa. Del resultado del proceso se distinguen dos tipos de representación: los mentales, referente a entidades cognitivas y las representaciones externas, referente a objetos físicos.

Para Dreyfus (1993) las representaciones desempeñan una función importante en las matemáticas, además define “las representaciones externas como las que usamos en fórmulas, gráficos, etc. Así mismo, las representaciones mentales es lo que imaginamos cuando se tiene una idea sobre un objeto matemático o su proceso” (p.123). Alto y Vinner (1981) emplean el concepto de imagen para ayudar a elaborar lo que significa tener una idea de un concepto y lo definen como “la estructura total cognitiva que está asociado con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados” (p.152), entonces se podría considerar que la representación exterior sirve para comunicar la idea del concepto de una manera formal.

Algunas representaciones son de forma visual, como la gráfica de una función; otros son puramente simbólica o algebraico y carecen de un aspecto gráfico. Los términos “visual” y “simbólico” se utilizan comúnmente para referirse a dos tipos de representaciones, a pesar de que representaciones visuales son también una forma de simbolizar. Algunos investigadores prefieren utilizar la terminología “gráfica” en lugar de visual, y “analítica o algebraica” en lugar de simbólica, por ejemplo, Artigue (1990) utiliza los términos algebraica y gráfica.

Según Larkin y Simón (1987) la representación visual-gráfica de una situación matemática, da una vista general, mientras que la representación simbólica implica un análisis más local. Un gráfico puede ser analizado específicamente en una zona; sin embargo, es una representación visual de la totalidad de la situación. Por otro lado, Chevallard (1985) sugiere que una representación algebraica tiene que ser recorrida de manera lineal, un aspecto a la vez. Cualquiera que sea la forma de representación, es necesario decodificar (analizarlo), en consecuencia, la representación visual y la representación simbólica son complementarios, cada uno sostiene una representación de diferente forma de interpretar la información. Una integración de ambos tipos de representaciones parece ser esencial para la construcción de un significado más rico del objeto matemático en estudio.

5.3.1 Representaciones semióticas

Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación (Duval, 1998, p. 177). Una figura geométrica, una fórmula algebraica, un enunciado en lengua natural, una gráfica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes y cada una de estas actividades son construidas de representaciones realizadas por medio de signos.

Por tanto, las representaciones semióticas, producto de la construcción de signos, son los medios por el cual las personas pueden exteriorizar sus representaciones mentales para hacerlas visibles y accesibles a otros. Aquí se entiende por representación mental al conjunto de concepciones o imágenes mentales que una persona tiene acerca de un objeto, éstas, además de cumplir una función de comunicación, conllevan a actividades cognitivas necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

5.3.2 Representaciones semióticas dinámicas

El uso de la computadora en la educación matemática contribuye a la creación de situaciones de aprendizaje, que implican exploraciones donde los estudiantes encuentren las aplicaciones del área en diferentes contextos. Se considera importante en este trabajo la incorporación de la computadora en la creación de experiencia, ya que con esta herramienta podemos ofrecer un abanico de actividades y representaciones que les permitan a los estudiantes construir un conocimiento significativo desde sus propias prácticas (Conde, 2013).

Estas herramientas parecen ofrecer una serie de ventajas como la integración de varios tipos de representaciones simultáneas. Apoyándose en estas ventajas, Kaput (1995) ha diseñado ambientes basados en “ventanas” para ofrecer diferentes representaciones en una misma situación matemática general, a través del software puede manipular una de las representaciones particulares de una situación y observar sus consecuencias en las otras simultáneamente; este autor también sostiene que esta experiencia puede ayudar a los estudiantes a relacionar las representaciones más conocidas y concretas para otros más abstractos.

Otra ventaja de utilizar computadoras en la enseñanza es que permite a los usuarios experimentar representaciones de los procesos de forma dinámica, para ver como ellas “se desarrollan” en el tiempo. Vitale (1992) ha explorado la integración de los procesos matemáticos a través de las computadoras y ha analizado su aplicación utilizando variables, parámetros y condiciones particulares del fenómeno, pero el enfoque de Vitale, utiliza el lenguaje de programación Logo y destaca en particular el valor de la programación para definir el papel de las variables de una función, parámetros y condiciones iniciales en un proceso, así como para ayudar en la conceptualización y representación de éste, a través de las estructuras lógico-matemáticos del algoritmo utilizado.

Además, la naturaleza exploratoria ofrecida por los entornos basados en computadoras junto con sus capacidades visuales puede permitir a los estudiantes construir modelos que se pueden utilizar para darle el significado a los resultados matemáticos, tales como teoremas visuales o demostraciones, en otras palabras, la computadora podría ser utilizada como una especie de laboratorio matemático. Precisamente, Mandelbrot (1992) hace hincapié en que la computadora y los softwares gráfico, están trayendo nuevas ideas de experimentación en las matemáticas y dando una renovada importancia a la función de las representaciones visuales. Él explica que "el uso de la computadora en las matemáticas cambia el papel de la observación ya que los gráficos hacen parte integral del proceso de pensamiento, de búsqueda y el descubrimiento. El poder experimentar inyecta un núcleo que se tenía perdido en las ciencias". Schwartz (1995) describe el potencial de la tecnología informática para la creación de entornos en los que los estudiantes pueden construir el conocimiento general a través de la exploración de casos particulares.

En este sentido, Trouche (2005) dice que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no en "recursos que resuelven y solucionan" problemas de aprendizaje.

Los artefactos deben contribuir en el desarrollo del pensamiento matemático, buscando generar en su mente una reorganización conceptual, es por esto que la vinculación de representaciones con dispositivos informáticos en las clases de matemáticas requiere de la transposición computacional entendida como “el trabajo sobre el conocimiento que ofrece una representación simbólica y la aplicación de esta representación en un dispositivo basado en computadora, con el fin de mostrar el conocimiento o para manipularla” (Balacheff, 1994, p. 16). No obstante, es importante enfatizar que la incorporación de la computadora no genera por sí sola procesos de aprendizaje en los estudiantes, necesariamente el profesor debe tener criterios definidos para usar esta herramienta con el propósito de potenciar las actividades de la clase. Particularmente, en este trabajo se usa como herramienta computacional el lenguaje de programación Logo, este programa, permite desarrollar representaciones semióticas estáticas y dinámicas. Las oportunidades didácticas que brindan esta herramienta computacional digitales para organizar nuevos estándares de visualización y nuevas maneras de exponer en imágenes la información, de relacionarlas, de modificarlas y transformarlas en tiempo real o de componerlas de nuevas formas, esto proporciona una nueva manera de concebir el pensamiento, también de conocer formas cada vez más complejas a partir de la imagen. Es decir, si la imagen es una forma de pensamiento y el pensamiento es cada vez más un pensamiento visual, a medida que se desarrollan nuevas lógicas visuales y perceptivas de la imagen-reflexión tecnológica, el pensamiento visual se vuelve también más complejo.

5.4 Visualización y generalización de fractales

5.4.1 Procesos de visualización

Según Tall (1991) el uso efectivo de la visualización y la exploración matemática ofrece una prueba formal de la intuición mediante la creación de una visión conjunta de la relación involucrada en los procesos presentados. Al respecto añade:

> Con la introducción de visualizaciones de forma adecuada y con ideas matemáticas complicadas es posible dar una imagen mucho más amplia de las formas en que los conceptos puede ser realizado, dando así intuiciones mucho más potentes que en un enfoque tradicional (p.118).

Algunos investigadores abogan por una reevaluación del papel en la prueba de representaciones visuales, Barwise y Etchemendy (1991) afirman que "las formas de representación visuales pueden ser importantes no sólo como herramientas heurísticas y pedagógicas, sino como elementos legítimos en pruebas matemáticas” (p.9), sin decir que éstos deben reemplazar las formas lingüísticas, ni que las demostraciones matemáticas deben ser cualquier cosa menos de riguroso. Pero dejando a un lado la cuestión visual o generadas por computador pruebas pueden considerarse suficientemente riguroso como para ser matemáticamente aceptado, aquí se hace hincapié en el papel que estas formas computacionales pueden desempeñar en el proceso de descubrimiento y aceptación de los resultados matemáticos. Thurston (1994) que analiza la naturaleza de pruebas matemáticas, explica que se trata de una búsqueda de la comprensión que está en la base de los procesos de exploración y lógicas que conduce al desarrollo una prueba.

Según Cuoco y Goldenberg (1992) Explican que, para los matemáticos, la actividad de la construcción de pruebas es una técnica de investigación en donde surgen conjeturas a través de la experimentación y deducción. En su proyecto con los fractales y construcciones geométricas recursivas permiten a los estudiantes a experimentar ese proceso, encontrarse, por ejemplo, la inducción matemática en un contexto visual.

Las matemáticas presentan abundancia de contenidos visuales que pueden ser representados intuitiva y geométricamente, cuya utilización resultaría muy provechosa tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación de ellos para la resolución de los problemas. Un propósito de la visualización consiste en realizar un acto de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma historia de la actividad matemática (Guzmán Ozámiz, D. L. 1996 (1997))

Para Zimmerman y Cunningham (1991) la "visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mental, con lápiz y papel o con la ayuda de la tecnología) y el uso de tales imágenes de manera eficaz para el descubrimiento y la comprensión de las matemáticas" (p.3). Dicho descubrimiento se hace mediante representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por la computadora. Desde luego, considerando que los símbolos mentales no pueden ser comunicados y desarrollado sin algún tipo de apoyo externo como el lenguaje, diagramas en papel, un programa de computadora, etc., (Sutherland, 1995).

Entre tanto, visualizar para Hitt citado en Mirzoeff (2003) es "crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión" (p. 23),

En la didáctica de las matemáticas se tiene un interés en hacer del razonamiento visual un procedimiento usual en el aprendizaje, dicho interés surge en los inicios de los años noventa, especialmente con las investigaciones de Zimmermann y Cunningham, los cuales aumentaron la curiosidad de la comunidad matemática sobre las numerosas aplicaciones de los diagramas visuales. Estos aportes desde la didáctica de la matemática han encaminado las exploraciones sobre la enseñanza en este aspecto desde tres perspectivas: cultural, cognitiva y sociológica.

Desde un punto de vista cultural se entiende que existen dificultades en aceptar por parte de los estudiantes y los maestros que una demostración visual pueda ser efectivamente una demostración matemática y esto se debe a que para algunos las demostraciones se deben realizar de determinada manera y esto trae resultados sobre la idea que se tiene acerca de la matemática; empero varios autores expresan que dicha creencia depende del contexto histórico en el que se lleva a cabo la demostración (Figueiras, 2005).

En este trabajo se parte de que los procesos de visualización mediados por tecnologías digitales que proveen a los estudiantes de diferentes representaciones, pueden contribuir a la construcción de la noción de infinito. Además, se considera en este trabajo la imagen de los fractales como alternativa para desarrollar argumentos visuales y cualitativos poco considerados en las matemáticas tradicionales. La experimentación y el razonamiento visual son alternativas importantes al estilo de los argumentos simbólico – deductivas, dadas que buenos argumentos cualitativos y visuales son a menudo precursores y motivadoras de deducciones más rigurosas, siendo a veces suficientes en sí mismas.

5.4.2 Procesos de generalización

Para realizar la generalización de un patrón, las estudiantes deben identificar el elemento invariante y centrar su atención en el comportamiento de este elemento en la construcción del patrón. Al respecto, Love (1986) y Mason (1996) caracterizan la generalización de patrones, como el de rasgos comunes en algunos términos de especial atención y la de construir una generalización establecida por los términos comunes extendida a todos los elementos de la secuencia. Entre tanto, Dörfler (1991) sugiere que la generalización teórica necesita una cierta descripción simbólica. Sin embargo, él considera que la descripción simbólica no implica necesariamente el uso de las letras. Según Dörfler estos símbolos pueden ser verbales, icónicos, geométricos o algebraicos en la naturaleza.

Sin embargo Kieran (1989) añade que esta característica por sí sola no puede ser suficiente para determinar la generalización algebraica de los patrones. Sostuvo que además de ver lo general en lo particular, también se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente. Kaput (1999) por su parte, considera que el razonamiento algebraico se refiere a la actividad de generalizar por parte de los estudiantes acerca de los datos y las relaciones matemáticas, el establecimiento de esas generalizaciones a través de conjeturas y la argumentación y de expresarlos de manera cada vez más formal. Otra tendencia de los investigadores es la de diferenciar el simbolismo algebraico de pensamiento algebraico. El simbolismo algebraico, según Tomason, es la lengua que da voz a este pensamiento, el lenguaje que expresa la generalidad. Mientras que Mason (1996) concibe el pensamiento algebraico como una actividad. Él ve las raíces del pensamiento algebraico en la detección de igualdad y diferencia, al hacer distinciones, en la clasificación y el etiquetado, o simplemente en "algoritmo de búsqueda”. La propia construcción de este algoritmo en la mente del estudiante, en cualquier forma que se prevé, es el pensamiento algebraico.

En consecuencia, el pensamiento algebraico surgió a través de formas alternativas de comunicar sus resultados, similar a la conclusión de Radford (2000) que los "estudiantes ya estaban pensando algebraicamente cuando se trataba de la producción de un mensaje escrito, a pesar del hecho de que no estaban usando el estándar algebraica simbolismo "(p. 258). Además, Zazkis y Liljedahl (2002) demostraron en su investigación que ni la presencia de la notación algebraica debe ser tomada como un indicador de pensamiento algebraico, ni la falta de notación algebraica debe ser juzgada como una incapacidad para pensar algebraicamente.

Siguiendo la línea de pensamiento de Kieran (1989), Love (1986) y Mason (1996), Para que la generalización de los patrones sea algebraica, Radford (2006) ha propuesto un tercer componente: que el género o el objeto generalizado se cristalizan en un esquema, es decir, que además de la capacidad de comprender un denominador común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que esa comunidad se aplica a todos los términos de S. Se debe ser capaz de construir una expresión directa de cualquier término de S.

VI. Metodología de la investigación

Esta investigación se ubica dentro de una perspectiva cualitativa de análisis, dado que nos interesa caracterizar las formas como los estudiantes como los estudiantes construyen la noción de infinito a través de la visualización y generalización mediadas por tecnologías digitales. Dentro de la perspectiva mencionada, esta investigación tiene un carácter exploratorio (Hernández, Fernández y Baptista, 1998, p. 58), ya que nos orientamos a la influencia de la visualización y la generalización mediada por tecnologías digitales en la construcción de la noción de infinito en estudiantes del grado decimo de la Javiera Londoño. Esta investigación se presenta en las siguientes fases:

6.1 Fase I. Antecedentes

El inicio de este trabajo es motivado por el ideal de mejorar una práctica profesional de 20 años como profesor de tecnología e informática y ahora como estudiante de matemáticas. El interés de ésta es ofrecer a mis estudiantes experiencias sobre nociones matemáticas que por lo general se ofrecen en matemática avanzada y que no se encuentran contemplados en el currículo de educación media, como el caso de la idea de infinito. Dadas las motivaciones personales del investigador y su encanto por los fractales, se decidió indagar sobre el tema de procesos iterativos y recurrentes, por lo tanto, los antecedentes que se presentan aquí están organizados en dos perspectivas, una histórica y otra desde la Educación Matemática.

6.2 Fase II. Planteamiento del problema

Durante más de 20 años se han desarrollado distintos Software para la enseñanza de las matemáticas y se han realizado investigaciones para poner a prueba el potencial de dichas herramientas en la práctica educativa. Estos estudios sobre la incorporación de la tecnología por parte de los docentes en sus clases regulares, reportan poco uso de éstas que impide un verdadero impacto en el aprendizaje. En este sentido, este trabajo pretende contribuir en parte de las necesidades de los estudiantes desde una perspectiva diferente al abordaje de los contenidos de forma tradicional.

6.3 Fase III. Marco conceptual

La fase III está constituida por la idea de infinito y sus tipos, procesos de visualización y generalización y las representaciones estáticas y dinámicas mediadas por herramientas computacionales.

Se considera que son aspectos necesarios y suficientes para cumplir los propósitos de éste estudio.

6.4 Fase IV. Actividades de exploración introductorias

La metodología y el diseño del estudio se elaboraron mediante un proceso iterativo que consistieron en tres etapas: la primera etapa introductoria referente a las herramientas tecnológicas, en este caso Logo y recursos didácticos de apoyo como EMAT. La segunda etapa, la exploración de Logo por parte de las estudiantes y la tercera consistió en la puesta en marcha de las actividades de intervención. A continuación, se describe las etapas antes mencionadas:

6.5 Herramienta (Logo-EMAT)

6.5.1 Logo

Logo, es un lenguaje de programación para fines educativos, su creador Papert (1980) propuso la idea de "micromundo" como una incubadora del conocimiento, donde el estudiante pueda relacionar el nuevo conocimiento con el que ya posee.

En el caso del lenguaje Logo, desde el momento en que los estudiantes se inician en la programación está utilizando un lenguaje verbal, lenguaje Logo, lógica, descripciones geométricas y conceptos de aritmética, esto se conoce como “ambiente” básico de Logo. Así pues, se puede considerar a los micromundos computacionales como formas de expresión de ideas matemáticas por medio de representaciones visibles en su entorno. Hoyles y Noss (1987) ampliaron el concepto original de micromundo de Papert, al entenderlo de una manera más contextualizada dentro del proceso enseñanza y aprendizaje y pensando un micromundo como un sistema del entorno educativo donde interactúan cuatro componentes: el estudiante, el maestro, el contexto, el medio de programación; esta concepción de micromundo y sus componentes se presentan en detalle a continuación.

6.5.2 EMAT

El proyecto EMAT se inicia en el año 1997 con un propósito en su fase piloto (1997 – 2000) el cual consistía en la incorporación de las tecnologías computacionales a las escuelas secundarias públicas de ciudad de México (estudiantes entre 12 y 15 años de edad), con el fin de incorporarlos a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que aparecen en el currículo establecido y acercarlos a ideas matemáticas avanzadas.

Para el diseño, puesta en marcha y seguimiento de la fase piloto del proyecto se dispuso de un equipo de investigadores nacionales e internacionales con experiencia en el uso de la tecnología computacional para la enseñanza de las matemáticas. Con base en sus recomendaciones se decidió emplear en las aulas de matemáticas una combinación de calculadoras (TI-92) y software computacional como: la Hoja Electrónica de Cálculo para apoyar la enseñanza de la aritmética, el pre-álgebra y el álgebra; Cabri Géomètre para la enseñanza de la geometría; SimCalc MathWorlds para acercar a los estudiantes a la idea de variación y sus diferentes representaciones; y Stella para modelar matemáticamente situaciones simples.

El grupo de expertos se encargó también del diseño de las actividades que se iban a usar en la clase de matemáticas apoyada con tecnología (Mochón et al., 2000a; Mochón et al., 2000b; Zubieta et al., 2000) así como del diseño e implementación de los talleres para capacitar a los docentes que iban a participar en el proyecto. Se consideró también necesario que, una vez iniciado el proyecto, este grupo de expertos le diera seguimiento realizando visitas periódicas a las escuelas para intercambiar impresiones con los docentes participantes y observar el trabajo que los estudiantes realizaban usando la tecnología; uno de los propósitos de estas visitas era detectar a tiempo posibles dificultades y problemas de tipo académico y proponer los cambios necesarios para que el proyecto funcionara de manera exitosa.

Una característica fundamental que subyace en el modelo pedagógico propuesto para el desarrollo de EMAT, consiste en ir de la práctica y los ejemplos particulares, hacia los principios teóricos generales. Este acercamiento difiere sustancialmente del acercamiento que comúnmente se usa en nuestras escuelas donde, por lo general, la parte teórica precede a la práctica y a los ejercicios; y los estudiantes conforman una audiencia pasiva, que escucha las explicaciones del profesor y resuelve los ejercicios propuestos de forma individual. Se consideró que con el apoyo de la tecnología era posible modificar gradualmente este modo de trabajar y con este propósito en mente se creyó que lo más adecuado era diseñar actividades cuyo desarrollo se apoyara fuertemente en hojas de trabajo, éstas guiarían la actividad de los estudiantes llevándolos a descubrir el conocimiento matemático particular que se esperaba adquirieran. Por lo tanto, se pretendía convertir a los estudiantes en sujetos activos que, a través de su propia reflexión, fueran construyendo conceptos y desarrollando habilidades matemáticas y se consideró que la discusión entre pares era un elemento muy importante para lograr aprendizaje, por ello el trabajo en las aulas EMAT se realiza en equipos, a fin de fomentar el intercambio de ideas y así motivar al estudiante a organizar, reflexionar, defender y, eventualmente, modificar sus ideas.

En este modelo el papel del profesor cambia radicalmente, ya que ahora su función es observar con cuidado el trabajo de los equipos, contestar las preguntas o dudas que manifiestan los estudiantes, hacer sugerencias y, cuando sea necesario, proponer posibles acercamientos que permitan resolver la tarea propuesta usando la tecnología. El profesor toma así el papel de mediador entre los estudiantes y la herramienta computacional y además, debe organizar discusiones de grupo de manera periódica, para llegar a un consenso acerca de los conceptos matemáticos involucrados en las actividades previamente llevadas a cabo. El profesor se vuelve así un mediador entre la experiencia que los estudiantes adquirieron al resolver las actividades y los conceptos matemáticos involucrados en las mismas.

El proyecto se inició en 16 escuelas distribuidas en 8 estados de la república mexicana. En cada escuela se equipó un salón (aula EMAT) con 15 computadoras (dispuestas en herradura y conectadas en red), una impresora y treinta calculadoras TI-92. El primer año participaron en el proyecto 16 docentes y un total de 667 estudiantes. Durante el segundo año se incorporaron más docentes y estudiantes pertenecientes a las mismas escuelas. Al término del tercer año**,** trabajaban en EMAT 89 docentes y aproximadamente 10,000 estudiantes. Es importante señalar que la gran mayoría de los docentes y estudiantes que participaron en la fase piloto del proyecto no tenía experiencia previa en el uso de la computadora o la calculadora TI-92, ni de cómo usarlas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

6.5.3 Exploración de Logo

El estudio fue diseñado para explorar ideas y diseños de actividades y su utilización en el aula, así como para obtener conocimientos sobre cuestiones metodológicas, proporcionando una base para el diseño de un estudio más estructurado.

Para este estudio se han utilizado como sujetos a un grupo de estudiantes de la media técnica en informática de I.E. Javiera Londoño grado décimo. Se aprovechó el hecho de que se tenía que enseñar a ellas un curso de iniciación en la programación de computadora y se empleó en el conocimiento del lenguaje logo. Las estudiantes habían seleccionado la media técnica en informática y no estaban familiarizadas con los temas de matemáticas como el cálculo. Inicialmente, tenía algunas reservas acerca del inicio de las estudiantes en las nociones de cálculo con estudiantes sin experiencias previas de su estudio.

Esta etapa de exploración se ejecutó durante un período de cinco meses (durante julio y noviembre de 2015) con dos sesiones de 2 horas por semana, para un total de 80 sesiones, estas sesiones se hacían en un aula equipada con 20 computadoras y todas las estudiantes participaron de manera simultánea en las sesiones.

La mayoría de las sesiones se trabajaron en parejas, con la misma pareja a lo largo de los cinco meses y compartían un computador. Casi en todo el primer semestre de este estudio, se dieron a las estudiantes lecciones de introducción básicas de programación Logo, pero todavía no habían adquirido familiaridad completa con este tipo de programación cuando se iniciaron las actividades de estudio; en particular, no tenían experiencia previa con la recursividad.

Todas las actividades se introdujeron y se estructuraron a través de hojas de actividades que las estudiantes siguieron casi paso a paso, afortunadamente las estudiantes siempre estuvieron prestas y animadas al trabajo, muchas de ellas se adelantaron y terminaban los talleres del lenguaje antes de tiempo. Igualmente, las estudiantes se acercaron a las exploraciones con la actitud de hacer todo lo que se le pidió y a veces solicitaban más. Esta gran iniciativa por parte de ellas ayudó a reflexionar sobre la forma en que las actividades se habían presentado, dándose cuenta de que en las hojas de las actividades fueron dirigidas también. En el segundo momento de la investigación, de enero a junio de 2016, las horas de encuentro con el grupo se redujeron, pero no fue inconveniente para la investigación. Sin embargo, cuando se comenzó con el tema específico de la recursividad y la curva koch, allí comenzaron los inconvenientes debido al poco entendimiento de los procedimientos recursivos, pues para más de la mitad de ellas, no era claro como un procedimiento de no más de 10 líneas pudiese construir una figura de esa forma y mucho menos determinar el perímetro de algo que estaba determinado con una longitud inicial.

6.6 Fase V. Puesta en marcha del diseño de intervención

La exploración de las actividades de intervención se desarrolló en la Institución Oficial Javiera Londoño, en la jornada de la tarde donde se nos ofreció el espacio los días martes y jueves del mes de junio al mes de noviembre del año 2015 y de enero a junio del 2016 bajo el cronograma de actividades que aparece en la Ilustración 1.

Fecha	Hora	Actividad
Mayo 2015	Martes Jueves 2 a 4 pm	Lectura de las actividades del proyecto EMAT de la secretaria de educación de la ciudad de México

Mayo 2015	Martes Jueves 2 a 4 pm	Realización de los talleres para el grado 10
Junio 2015	Martes Jueves 2 a 4 pm	Instalación del software en las salas de computo de la Institución educativa por parte de la mesa de ayuda
Julio de 2015	Martes Jueves 2 a 4 pm	Comienzo de las actividades con el grupo seleccionado
Agosto septiembre 2015	Martes Jueves 2 a 4 pm	Enseñanza de los comandos básicos
Octubre de 205	Martes Jueves 2 a 4 pm	Enseñanza de procedimientos
Febrero de 2016	Martes Jueves 2 a 4 pm	Enseñanza de las generalizaciones
Febrero marzo 20 6	Martes Jueves 2 a 4 pm	Enseñanza del concepto de recursividad
Mayo de 2016	Martes Jueves 2 a 4 pm	Taller de perímetros.
Mayo de 2016	Martes Jueves 2 a 4 pm	Taller de áreas.

Ilustración 1. *Cronograma de actividades*

6.6. 1 Institución

El grado décimo seleccionado para la investigación es el grupo de media técnica en programación de computadoras en convenio con el politécnico Jaime Isaza Cadavid[6] y adscrito a la Alianza futuro digital. La Alianza Futuro Digital Medellín diseña, opera y gestiona los programas Técnico profesional y Tecnológico para el sector Tecnológico e Informático (TI), con el propósito de formar profesionales calificados de acuerdo con los perfiles que requiere este sector de Medellín en su estrategia de internacionalización.

[6] El Politécnico Jaime Isaza Cadavid Opera el contrato de la media técnica en informática y recibe a los estudiantes certificados en el grado once en el tercer semestre en sus aulas.

Este proyecto cuenta con la participación del Ministerio de Educación Nacional, la Alcaldía de Medellín a través de la Secretaría de Educación, el SENA, la Universidad EAFIT, el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, la Corporación Intersoftware, CRÉAME -Incubadora de Empresas de Base Tecnológica, la universidad de Medellín, Ruta N y 50 instituciones educativas de la ciudad pertenecientes al Nodo TIC.

De esta manera, las estudiantes del grado décimo que hacen parte de la Alianza Futuro Digital pueden adelantar los primeros dos semestres del programa de Técnico Profesional en alguno de los programas del sector TI, mientras están en grado décimo y once. Una vez finalicen su formación en educación media y decidan continuar en la educación superior, sólo tendrán que cursar otros tres semestres en alguno de los establecimientos de la Alianza para obtener el Título de Técnico. A la fecha son más de 5.500 estudiantes egresados de la media técnica en Desarrollo de Software, gracias a esto se fortalece el Nodo TIC y se transforman positivamente los procesos académicos que se llevan a cabo en la ciudad de Medellín.

La selección de este grupo se realizó debido a los conocimientos previos en programación en otros lenguajes que tenían las estudiantes, lo cual consideramos como ventaja para el desarrollo del proyecto investigativo.

6.6.2 Población

El grupo estuvo conformado por 34 estudiantes de décimo grado de media técnica en informática, todas ellas mujeres, en edades entre los 15 y los 17 años de edad. Una de las estudiantes era nueva en la institución y no hizo parte del estudio debido a que manifestó que no le gustaba la informática y estaba esperando otra institución educativa en donde se pudiese ubicar. Las estudiantes, nunca habían programado en lenguaje LOGO, fue su primera experiencia en este tipo de actividades.

El grupo seleccionado es de la Institución Oficial Javiera Londoño, dicha institución está ubicada en la zona urbana de la ciudad de Medellín, comuna 10, centro de la ciudad del departamento de Antioquia. La escuela de la jornada de la tarde nos ofreció el espacio los días martes y jueves del mes de junio a noviembre del año 2015 y de enero a junio del 2016.

Se mencionan a continuación algunas de estas cuestiones metodológicas: el número de estudiantes debe ser observado a la vez; cómo las estudiantes deben trabajar (de forma individual, en parejas, compartiendo un ordenador...); el uso de hojas de cálculo;

las técnicas de recolección de datos. En este capítulo presento la metodología utilizada en cada estudio.

6.6.3 Recursos

La institución educativa cuenta con 5 salas de computadoras, cada una de ellas con 21 equipos. El licenciamiento del software está a cargo de la secretaría de educación municipal de la ciudad de Medellín y el software Micromundos fue adquirido desde hace 10 años por esta secretaria; es imprescindible resaltar que el mantenimiento de las salas se realiza con la asistencia de la "mesa de ayuda", un servicio de la Gobernación de Antioquia para reportar daños en la dotación y la conectividad de las instituciones en el departamento.

Por otra parte, se desarrolló una página web en donde se colocaron las actividades sugeridas por el proyecto EMAT con los comandos de principales de Logo, así como los talleres a realizar por parte de las estudiantes (ver Ilustración 2).

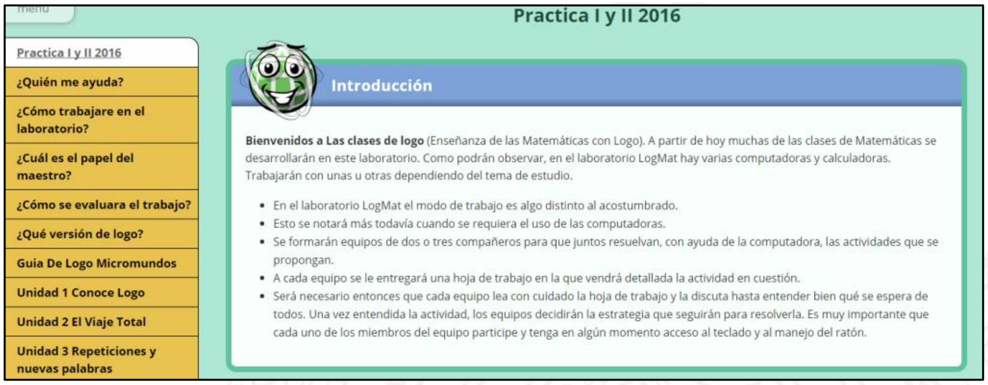


Ilustración 2. *Página web para la práctica de las actividades sugeridas*

Cada taller y actividad tenía el propósito de ir avanzando en el conocimiento de los comandos del lenguaje Logo, para acercarnos a los recursos necesarios para la implementación de la curva de Koch imprescindible en la investigación.

6.7 Fase VI. Análisis

Los datos recolectados en hojas de trabajo y diálogos de las estudiantes se analizarán desde dos perspectivas: el estudio introductorio, que trata sobre las actividades de manejo del lenguaje de programación y el análisis de la puesta en marcha de las actividades de intervención. Concretamente se enfoca la atención en aquellas actividades donde se da cuenta procesos de visualización y generalización de procesos infinitos.

6.8 Fase VII. Presentación de resultados

Los resultados se presentan a la luz de la pregunta y objetivo de investigación. En consecuencia, desde dos perspectivas, la primera la construcción de significados de la noción de infinito y la segunda, la influencia de la visualización y la generalización en la construcción de la noción de infinito.

VII. Lenguaje de programación y actividades

El análisis se presentará dando cuenta del progreso de las actividades desarrolladas por las estudiantes, estas actividades son propuestas en dos momentos: el primer momento una descripción sobre el conocimiento técnico del lenguaje de programación "Logo" y el segundo momento al "estudio de fractales" que se refiere a las actividades de intervención. En el segundo momento el análisis se concentra en el diálogo entre: estudiantes-estudiantes y profesor- estudiantes, alrededor de las construcciones hechas en logo y a lápiz y papel.

7.1 El conocimiento de Logo

Las actividades propuestas en esta sección, consiste en una serie de unidades tomadas de EMAT, como material de apoyo. En este caso se retomaron: La unidad 1. Conoce a logo; unidad 2. El viaje total; unidad 3 Repeticiones y nuevas palabras; unidad 4. Polígonos regulares; unidad 5. Figuras complejas; unidad 6. Recursividad como se muestra en la Ilustración 2.

En cuanto a la primera construcción recursiva, con el fin de explicar a sí mismas este comportamiento inesperado y tener sentido de por qué la tortuga estaba dando vueltas sin cesar. Las estudiantes tuvieron que volver a examinar el código de procedimiento, lo interesante fue que una de las estudiantes comento al ver este hecho que el procedimiento nunca se detendría porque la estructura recursiva del código representado era un proceso infinito.

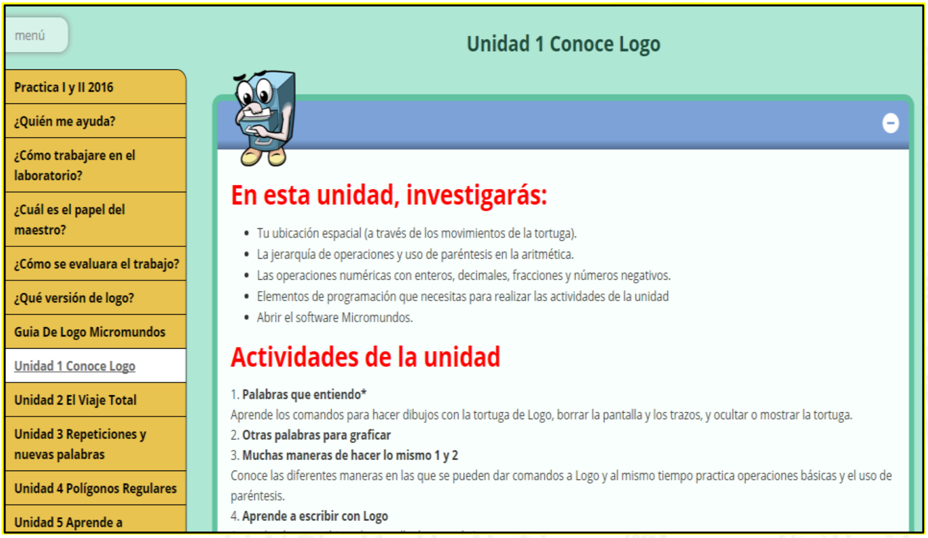


Ilustración 3. *Página Web para conocer el lenguaje Logo*

Ella explicó que era porque el procedimiento que se llama a sí misma sin nada decirle que se detenga, por lo tanto, nunca se detendría. El proceso de giro y avanzar 1/3 de la longitud seguirá repitiéndose y que nunca se detendrá (Ilustración 3). Esto lleva a que mediante el análisis del código la estudiante logró de conectar el proceso de visualización generado por los movimientos de la tortuga. Esto se puede apreciar en su predicción del resultado con su respectiva justificación.

Luego se presentó otra situación interesante que consistió en una modificación sencilla al procedimiento realizado por otra estudiante. Esta modificación produjo otra figura, una espiral hacia adentro con la tortuga girando sin cesar en su centro. De ahí que las estudiantes señalaron que, aunque la tortuga parecía simplemente estar girando en el mismo lugar, en realidad, no era "una variación".

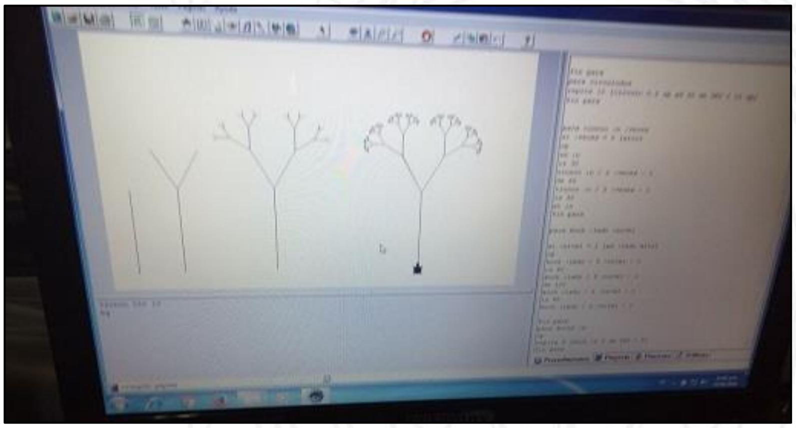


Ilustración 4. *Primera construcción recursiva de las estudiantes*

Otra compañera, también dijo que creía que la tortuga seguía avanzando algo. Aquí se puede considerar dos factores: a) *la tortuga seguía girando*, y b) *la tortuga se volvió al mismo lugar*. El primer factor podría haber servido como un indicador de que el proceso continúa, pero era el hecho de que las estudiantes parecían ser capaces de no tener en cuenta ese aspecto visual de la tortuga - girando en al parecer el mismo lugar - esto es evidencia de que ellas entendieron que el subyacente proceso continua y que eran capaces de vincular la salida con el código y el proceso. Esta interacción entre el código y sus resultados, llevó a las estudiantes a dar sentido a lo que observaron mediante la vinculación de todos los elementos.

- *Usando la estructura recursiva del código para predecir una estructura visual auto-similar, es decir, el código "encapsula" el proceso.*

Considerando que el reconocimiento de la estructura recursiva en el código explicó la infinitud del proceso, que implicaba que va de lo visual a lo simbólico, esta estructura recursiva también sirvió para predecir y visualizar los valores del perímetro que produce el código, un proceso de lo simbólico a lo visual. Cuando las estudiantes no fueron capaces de ver los niveles más profundos del código con la representación visual de la secuencia en estudio, algunas lo atribuyeron a la falta de conocimiento del lenguaje de programación logo. Una de las estudiantes, en el cálculo del perímetro cuando el nivel fue de 100 explicó que a pesar de que sabía que se formaba una línea, en la gráfica parecía un punto, pero confrontó con la cifra que debería resultar y confirmó que no era un punto.

Aparece otra cuestión clave en la investigación debido a que la estructura visual auto-similares tiene semejanza con la estructura recursiva del código, por lo tanto, con la naturaleza iterativa del proceso infinito. Consecuentemente, el código de programación sirve para "visualizar" más allá de la imagen visual y se puede decir que el código de programación interpreta o "encapsula" todo el proceso.

7.2 Estudio de Fractales: Actividades de intervención

Dado el trabajo del conocimiento de los comandos básicos de Logo, la segunda parte se dedica a trabajar en la construcción de fractales utilizando la auto-similitud. Los fractales que se trabajaron fueron: la curva de Koch, copo de nieve y el triángulo de Sierpinski. A Continuación, se reportará lo sucedido con la curva de Koch.

7.2.1 Actividad 1. Construcción de la curva de Koch

En esta actividad, la primera en fractales, se notó que la mayoría de las estudiantes comenzaron escribiendo un procedimiento que generaría el "pico" que representa el primer nivel de la curva de Koch. Las estudiantes reconocieron la estructura recursiva y auto-similares de la figura fractal con el fin de extraer las siguientes etapas de la curva (Ilustración 4); es importante también resaltar que ellas tienen la misma forma de nombrar los procedimientos que utilizan.

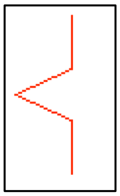


Ilustración 5. *Segunda etapa de la curva de Koch*

Mientras que algunas de las estudiantes escribieron un segundo procedimiento - PICOS - que se puede llamar con pico (Ilustración 5)

para pico :L	para picos :L
ad :L / 3	pico :L / 3
iz 60	iz 60
ad :L / 3	pico :L / 3
de 120	de 120
ad :L / 3	pico :L / 3
iz 60	iz 60
ad :L / 3	pico :L / 3
fin para	fin para

Ilustración 6. *Códigos de las estudiantes*

Por lo tanto, escribiendo Picos 100, la siguiente etapa en el proceso de construcción de la curva de Koch fue creado.

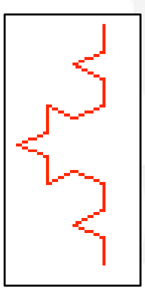


Ilustración 7**.** *Tercer nivel de la curva de Koch*

La estructura de este nuevo procedimiento es idéntica al procedimiento original (pico); de manera que las estudiantes se dieron cuenta de que podrían escribir un nuevo procedimiento con la misma estructura para cada etapa del proceso geométrico, mediante el uso de la misma estructura y llamar al procedimiento de la etapa anterior. Al notar esta similitud en los procedimientos las estudiantes confirmaron que un único procedimiento (recursivo) podría utilizarse.

En estas representaciones y códigos anteriores, se podría decir que las estudiantes construyeron una idea de repetición, misma que han transformado en un código recursivo en términos de Sacristán (2003). Dicho código recursivo podría orientar a las estudiantes a un potencialmente infinito, igualmente se considera que la herramienta computacional es determinante porque las representaciones simultáneas de un código, ofrecen a las estudiantes una visualización como imagen, pero ésta se transforma en una visualización como proceso al ser entendida la imagen por las estudiantes y sugerir códigos con predicción de resultados (Zimmermann y Cunningham, 1991).

Lo interesante es que este proceso de construcción iterativa, en otras palabras, escribir una serie de procedimientos de cada una idéntica a la anterior, refleja la construcción geométrica de autoreferencia. Además, este método consiste en dar una definición simbólica, a través del código, del proceso mediante la definición de la etapa n en términos de la etapa n-1.

Eventualmente, las estudiantes elaboraron un procedimiento para la curva de Koch que tenía la estructura adecuada (recursivo), aunque carecía de la condición de parada con un código (FD: L) de instrucción; mediante esta ejecución pronto se dieron cuenta de la necesidad de esta instrucción, ya que sin ellos no pasaría nada y el procedimiento entraría en un bucle infinito. Por consiguiente, el procedimiento se modificó para incluir una variable: Nivel el cual tendría un valor de 1, 2, 3, 4…:

El resultado visual sirvió para reiterar lo que se podía ver desde el código, que en palabras de una estudiante "picos llama picos, por lo que está llamando a la misma figura", que cada parte es una repetición de lo mismo y los pequeños picos están a la imagen de pico grande (la figura entera), por lo que la cifra sin fin estaría llena de "pequeños picos" (Figura 7).

Se cree que cuando las estudiantes construyen un código invariante llamado "pico", ellas han identificado una unidad que no cambia, pero al iterar dicha unidad me construye un patrón, en este caso de cierto modo están generalizando un código mediante su iteración.

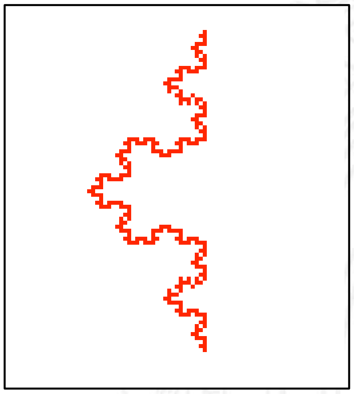


Ilustración 8. *Curva de Koch*

7.2.2 Actividad 2. Exploración de la curva de Koch

Una vez que las estudiantes habían escrito un procedimiento para la curva de Koch, comenzaron a indagar la longitud de la curva, es decir, la magnitud que la tortuga empleó al dibujar la curva. Al respecto las estudiantes comentan:

> Estudiante 1: Un tercio de L, además de un tercio, más una tercera…
>
> Estudiante 2: Más bien, un tercio, más de un tercio de un tercio, más de un tercio de un tercio de tercera…

En esta etapa las estudiantes iniciaron una indagación sobre un cuestionamiento ¿cuánto ha caminado la tortuga? Algunas estudiantes reconocieron en el proceso la toma de tercios que habían estudiado en las actividades de secuencia y concluyeron que

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

la longitud de cada segmento les dio el $\frac{1}{3^L}$, un valor que se aproximan a cero cuando L aumenta. Al respecto las estudiantes discuten:

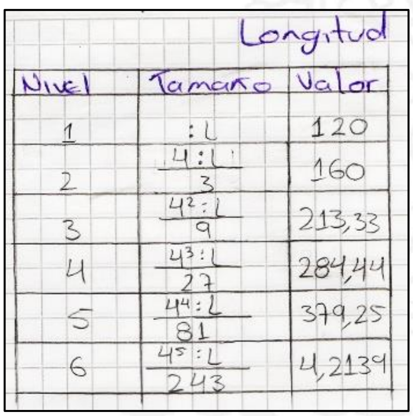
> Estudiante 3: Serán un tercio de cada uno, por lo que es más de $\frac{1}{3}$ a la potencia de L-ésimo.
>
> Estudiante 4: ¿Y qué pasaría si L, es muy grande?
>
> Estudiante 3: Va a ser muy pequeño, que va a llegar a un límite, cero... No, no va a llegar a cero.
>
> Será 0,000 ... 9 o 0,0000 ... 1 ...

Aquí las estudiantes hacen la primera reflexión sobre la noción de infinito, asociada a términos como muy grande, muy pequeña, llegar a un límite, no llegará a cero. Todos estos términos que se generan alrededor de la situación planteada van paulatinamente construyendo una noción de infinito. En este caso, la intuición de las estudiantes parte de una imagen hecha en la herramienta computacional y se pretende vaticinar respecto al perímetro de la misma.

En esta etapa, algunas de las estudiantes creían que la longitud total de la curva se convertiría en casi constante, con la concepción predominante de que “lo que se añade es demasiado pequeño” así como lo señala la Estudiante 5. Parece ser que dicha concepción fue influida por: (i) cada uno de los segmentos añadidos es muy pequeña; (ii) la cifra es visualmente invariante después de una cierta etapa; y (iii) toda la figura está delimitada en un área finita.

> Estudiante 5: Se va creciendo poco a poco hasta que llega un punto en que sigue creciendo, pero tan poco, que a pesar de que [el crecimiento] no es cero, que [la longitud] será el mismo.

En la búsqueda de la respuesta sobre el perímetro de la curva, algunas estudiantes optaron por realizar tablas de valores a lápiz y papel como las que se presentan a continuación:



Longitud

Nivel	Tamaño	Valor
1	$:L$	120
2	$\frac{4:L}{3}$	160
3	$\frac{4^2:L}{9}$	213,33
4	$\frac{4^3:L}{27}$	284,44
5	$\frac{4^4:L}{81}$	379,25
6	$\frac{4^5:L}{243}$	4,2139

Ilustración 9. *Trabajo del grupo 1 de estudiantes*

En el trabajo del grupo 1 de estudiantes que se muestra en la Ilustración 8. Se evidencia claridad en aspectos como el número de segmentos en el segundo nivel (ver Ilustración 4) y el fraccionamiento del segmento $\frac{1}{3}$. Ellas alcanzaron a contemplar hasta el nivel 6, sin embargo, no pudieron hallar una expresión general de la situación, por lo que para cerrar el proceso ellas concluyen lo siguiente:

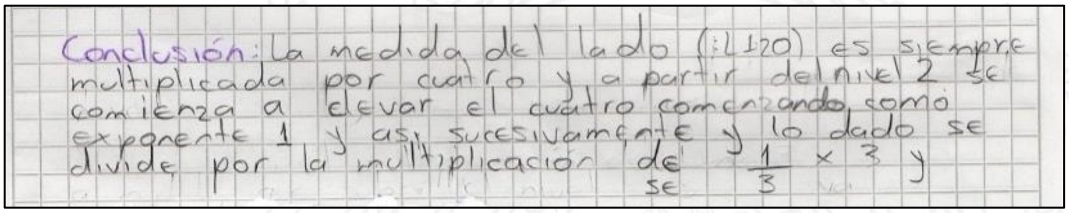
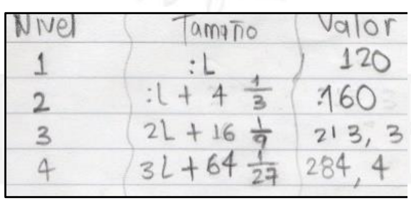

Conclusión: La medida del lado (:L 120) es siempre multiplicada por cuatro y a partir del nivel 2 se comienza a elevar el cuatro comenzando como exponente 1 y así sucesivamente y lo dado se divide por la multiplicación de $\frac{1}{3}$ x 3 y
se

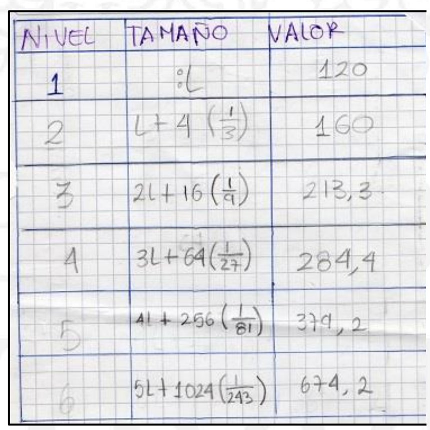
Ilustración 10. *Conclusiones del grupo 1 estudiantes*

Los grupos 2 y 3 de estudiantes, hacen el proceso hasta el nivel 4 y 6 respectivamente, como se observa en la Ilustración 8. Sin embargo, estos grupos suman la longitud L con el producto entre el número de segmentos (4) y la partición $\left(\frac{1}{3}\right)$ de la longitud.



Nivel	Tamaño	Valor
1	:L	120
2	:L + 4 $\frac{1}{3}$	160
3	2L + 16 $\frac{1}{9}$	213, 3
4	3L + 64 $\frac{1}{27}$	284, 4

a) Trabajo del grupo 2 de estudiantes



NIVEL	TAMAÑO	VALOR
1	:L	120
2	L+4 $\left(\frac{1}{3}\right)$	160
3	2L+16 $\left(\frac{1}{9}\right)$	213,3
4	3L+64 $\left(\frac{1}{27}\right)$	284,4
5	4L+256 $\left(\frac{1}{81}\right)$	379,2
6	5L+1024 $\left(\frac{1}{243}\right)$	674,2

b) Trabajo del grupo 3 de estudiantes

Ilustración 11. *Trabajo de los grupos 2 y 3 de estudiantes*

Se podría interpretar de las evidencias que los grupos 2 y 3 de estudiantes tienen la idea de una tendencia o, por lo menos, una idea intuitiva de lo que sucede con el patrón, pero no pudieron llegar a la expresión general para calcular el perímetro.

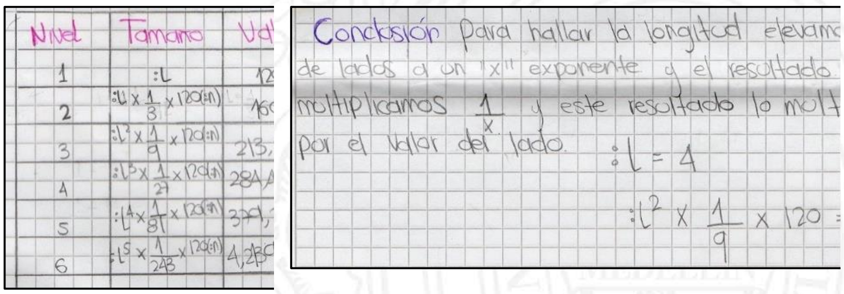
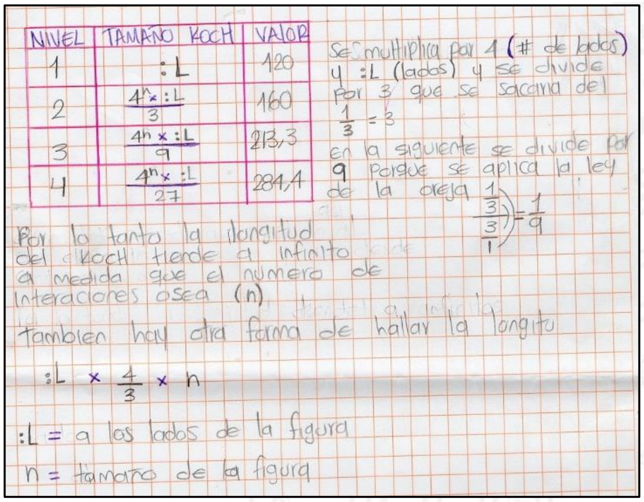


Ilustración 12. *Trabajo y conclusión del grupo 4 de estudiantes*

En el grupo 4 y 5, presentados en la Ilustración 11 y 12, las estudiantes comienzan en el primer nivel con una longitud de 120 unidades y van sumando 1/3 de la longitud hasta el nivel 4 como lo vienen haciendo los demás grupos, sin embargo, a la hora de formalizar una ecuación no la realizan debido a que confunden el lugar donde se coloca el lado al cuadrado.



NIVEL	TAMAÑO KOCH	VALOR
1	:L	120
2	$\frac{4^n \times :L}{3}$	160
3	$\frac{4^n \times :L}{9}$	213,3
4	$\frac{4^n \times :L}{27}$	284,4

Se multiplica por 4 (# de lados) y :L (lados) y se divide por 3 que se sacaria del $\frac{1}{3} = 3$

en la siguiente se divide por 9 porque se aplica la ley de la oreja $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{9}$

Por lo tanto la longitud del Koch tiende a infinito a medida que el numero de interaciones osea (n)

tambien hay otra forma de hallar la longito

$:L \times \frac{4}{3} \times n$

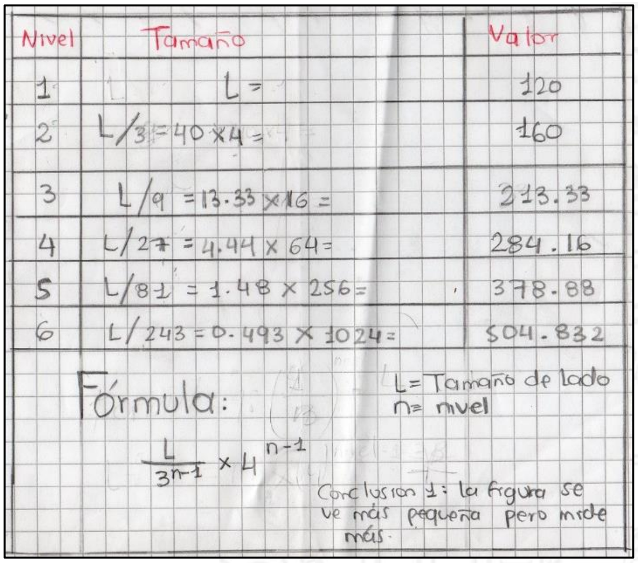
:L = a los lados de la figura

n = tamaño de la figura

Ilustración 13. *Trabajo y conclusión del grupo 5 de estudiantes*

El Grupo 6, mostrado en la Ilustración 13, a diferencia de los anteriores, además de desarrollar hasta el nivel 6, pudo establecer una expresión algebraica que modela la situación, para ellas dicha expresión llamada fórmula acompañada de una explicación.

En este grupo se percibe la generalización de des dos perspectivas, la primera se hace una descripción simbílica en términos de Dörfler (1991) y además llegan a la expresión algebraica que construye el patrón según Kieran (1989).



Nivel	Tamaño	Valor
1	L =	120
2	L/3 = 40 x 4 =	160
3	L/9 = 13.33 x 16 =	213.33
4	L/27 = 4.44 x 64 =	284.16
5	L/81 = 1.48 x 256 =	378.88
6	L/243 = 0.493 x 1024 =	504.832

Fórmula:

$$\frac{L}{3^{n-1}} \times 4^{n-1}$$

L = Tamaño de lado
n = nivel

Conclusion 1: la figura se ve más pequeña pero mide más.

Ilustración 14. *Trabajo y conclusión del 6 de estudiantes*

En lo anterior se aprecia que algunas estudiantes lograron construir el proceso completo, no obstante, se notaron diferentes estilos de trabajo, en algunos casos las estudiantes que consideraban tener menos habilidad en matemáticas se enfocaron más en exploraciones visuales aplicadas sobre el código, mientras que las estudiantes que consideraban tener mayor habilidad matemática parecían más interesadas en hacer conexiones con el conocimiento matemático formal.

Se observó un trabajo complementario entre el uso de la herramienta computacional y el trabajo a lápiz y papel, esto se evidenció en apoyo visual de las construcciones en Logo donde se notaba el comportamiento y el número de segmentos en cada nivel, comportamiento que las estudiantes registraban a lápiz y papel lo que les permitió, en su mayoría, concluir que cada segmento estaba siendo reemplazado por cuatro nuevos segmentos y finalmente concluyeron que el número de segmentos era una potencia de 4.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

VIII. Reflexiones finales

En este apartado se presentan algunas reflexiones que atiendan al objetivo de investigación y en las posibles respuestas a la pregunta de investigación.

8.1 Construcción de significados de la noción de infinito

Aquí se puede decir que la construcción de significados de la noción de infinito, se asoció a fenómenos visuales. Aquí se refiere que cuando las estudiantes en la explicación el comportamiento de cierta construcción recursiva, centran la atención en lo que observan, por ejemplo "¿por qué la tortuga estaba dando vueltas sin cesar? Se podría considerar que las estudiantes relacionan un fenómeno determinado por el movimiento constante, con un proceso infinito, es decir que nunca termina. En este caso se podría inferir que la construcción de significado de la noción infinito se caracteriza por la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos, según Rico (2013). Se considera que las estudiantes construyen una estructura recursiva, referente al código de procedimiento. Esta estructura se relaciona por las representaciones dinámicas, mismas que modela un fenómeno de "vueltas sin cesar de la tortuga".

Para este caso, las estudiantes van construyendo los significados de la noción de infinito a partir de sus interacciones con la herramienta computacional y sus compañeras.

Se puede inferir un proceso similar en otra situación cuya modificación produjo una espiral hacia adentro con la tortuga girando constantemente en su centro. Esta interacción entre el código-las representaciones-el fenómeno y sus resultados, ayudó a las estudiantes a dar una explicación sobre el proceso infinito que allí se presentaba.

Al parecer, las formas de construcción de significado de la noción de infinito por parte de las estudiantes, subyace de situaciones interesantes provocados por "errores" o modificaciones en los procedimientos en los códigos. Esto puede parte de la explicación al objetivo planteado *Caracterizar las formas como los estudiantes construyen la noción de infinito a través de la visualización y generalización mediadas por tecnologías digitales.*

Indudablemente los procesos de visualización mediada por tecnologías digitales fueron fundamentales en dicha construcción la noción de infinito. Las imágenes construidas y las interpretaciones de las estudiantes, les permitieron explicar y validar sus argumentos respecto al fenómeno observado. Sin embargo, aunque existe una implicación entre lo visual a lo simbólico. Se considera hasta el momento que la visualización en este caso jugó un papel predominante. Consecuentemente, el código de programación les ayudó a las estudiantes a visualizar más allá de una imagen visual, es decir, que la visualización trascienda a un proceso.

Luego se presentó otra situación interesante que consistió en una modificación sencilla al procedimiento realizado por otra estudiante. Esta modificación produjo otra figura, una espiral hacia adentro con la tortuga girando sin cesar en su centro. De ahí que las estudiantes señalaron que, aunque la tortuga parecía simplemente estar girando en el mismo lugar, en realidad, no era "una variación".

Considerando que el reconocimiento de la estructura recursiva en el código explicó la infinitud del proceso, que implicaba que va de lo visual a lo simbólico, esta estructura recursiva también sirvió para predecir y visualizar los valores del perímetro que produce el código, un proceso de lo simbólico a lo visual. Cuando las estudiantes no fueron capaces de ver los niveles más profundos del código con la representación visual de la secuencia en estudio, algunas lo atribuyeron a la falta de conocimiento del lenguaje de programación logo. Una de las estudiantes, en el cálculo del perímetro cuando el nivel fue de 100 explicó que a pesar de que sabía que se formaba una línea, en la gráfica parecía un punto, pero confrontó con la cifra que debería resultar y confirmó que no era un punto.

8.2 Influencia de la visualización y la generalización en la construcción de la noción de infinito

En este inciso se pretende dar algunas respuestas a la pregunta de investigación: *¿cómo influye la visualización y la generalización mediadas por tecnologías digitales en la construcción de la noción de infinito en estudiantes del grado decimo de la Javiera Londoño?*

Las actividades propuestas aquí se centran en el proceso de construcción de una secuencia infinito. En el caso concreto, los fractales se construyen a través de secuencias geométricas. En consecuencia, la acción iterativa que requieren la intervención repetida de una invariable, es representada gráficamente en el ambiente Logo. En este caso, las estudiantes deben centrarse en una propiedad invariante o relación dentro del patrón. Identificar un elemento en común a todos los elementos del patrón. En este trabajo se podría decir que se evidencia en el apartado de análisis, dos niveles de generalización. Por un lado, algunas estudiantes pueden identificar el término invariante, pero no van más allá de casos particulares o un número determinado de elementos del patrón. Y otras estudiantes identifican el término invariante y construyen una expresión algebraica.

La acción de reducción a un tercio un elemento, con una representación visual simultánea mediada por la computadora sobre el proceso, y la repetición de éste pudo contribuir en la construcción de procesos de generalización. Lo interesante es que algunas estudiantes paulatinamente pasan de un proceso numérico (reducción a tercios) pasa a expresiones simbólicas. Desde esta perspectiva, tanto la visualización y la generalización influyen de la construcción de la noción de infinito en las estudiantes. Sin embargo, se percibe en este caso que el papel predominante está a cargo de los procesos de generalización.

Al parecer aquí se identifica otra forma de construcción de significado de la noción de infinito, que surge de la iteración de un elemento invariante. Los resultados del estudio muestran las posibilidades para la apertura de nuevas vías para el estudio del infinito en la matemática escolar. Este trabajo se puede considerar como un inicio de la implementación de las tecnologías digitales en un aula regular de bachillerato (contexto colombiano) como mediadora para el estudio de ideas matemáticas consideradas de pensamiento avanzado y abordadas a nivel universitario.

IX. DISCUSIÓN

Está claro que el micromundo y sus actividades, tal como está diseñado, ofrece muchas más posibilidades de investigación, un ejemplo de esto sería utilizar secuencias más complejas, tales como los que se alternan en secuencias. Sin embargo, el punto importante es que esta investigación debe ser considerada como un modelo de lo que se puede hacer para explorar procesos infinitos de integración y coordinación de diferentes tipos de representaciones. Asimismo, es un tema para seguir investigando y aprovechar estas ideas: los fractales, los sistemas dinámicos y el caos son zonas ricas que ofrecen posibilidades para explorar el infinito tanto como potencial y como real; otra idea interesante podría ser la agregar color en la línea que se adiciona para representación elemento, en particular para la representación de los procesos de comportamiento convergentes o divergentes infinitos, como se hace en el caso del conjunto de Mandelbrot B. (1977a/1997).

X. RECOMENDACIONES

Los resultados del estudio muestran las posibilidades para la apertura de nuevas vías para el estudio del infinito, mediante la incorporación de la computadora, teniendo en cuenta una planeación y cuidadoso diseño. Además, este estudio se puede realizar, porque proporciona una referencia de cómo las nuevas tecnologías pueden ser explotadas para hacer accesibles las zonas difíciles de las matemáticas, por medio de la creación de entornos con herramientas abiertas que involucran la interacción utilizando múltiples representaciones con un papel de exploración activa del alumno.

En s los anteriores aspectos, se debe destacar quelos resultados del estudio confirman la idea de que la construcción de significados se facilita con el apoyo de la construcción de representaciones externas (Papert, 1993) y los enlaces entre ellos.

Por otra parte, es evidente que la tecnología avanza a un ritmo muy acelerado, impregnando todos los ámbitos de la sociedad y cambiando nuestra visión del mundo y nuestras concepciones de conocimiento, éste es el caso de las matemáticas, ya que parece claro que los avances tecnológicos jugarán un papel en la forma en que los objetos matemáticos y procesos (incluidos los relacionados con el infinito) se conciben, cambios que en la educación también son necesarios. Pero la educación no sólo debe incorporar las nuevas tecnologías, se deben tomar ventaja de ellos y es así como esta investigación cobra sentido, debido a que computadoras y otras nuevas tecnologías, se pueden utilizar en la educación matemática para construir sistemas de representación interactivos cuidadosamente diseñados que permiten a los estudiantes acceder a los conocimientos matemáticos, mediante la creación de una conciencia de cómo los distintos procesos y elementos son planteados juntos para crear significados de un todo que es más que la suma de sus partes.

XI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990), "Difficultés cognitives et didactiques dans la construction de relations entre cadre algébrique et cadre graphique" PME-14 Proceedings, México 1990, Vol. 1, p. 11-18.

Balacheff, N. & Sutherland, R. (1994) "Epistemological Domain of Validity of Microworlds: the case of Logo and Cabri-géometre", in Lewis, R. & Mendelsohn, P. (eds)Lessonsfrom Learning (A-46), Elsevier Science B.V., Holland. P.l37-150.

Barwise, J. & Etchemendy, J. (1991) "Visual Information and Valid Reasoning", in Zimmermann, W.; & Cunningham, S. (eds.) Visualization in Teaching and Learning Mathematics; p. 9-24.

Bruyere, V. (1989), "Paradoxes en Mathématiques", in Mathématique et PédagogieCastellanos, E. (4 de junio de 2007). La Geometría Fractal en la Licenciatura de Diseño Gráfico: Propuesta Pedagógica Centrada en un Entorno Computacional. Mexico, Puebla.

Collel, A.E. (1995) “Relación entre el concepto de límite y los conceptos topológicos", Educación Matemática Vol. 7 N. 3, December 1995, p. 58-78.

Conde Solano, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico.

Cornu, B. (1991), “Limits". In Tall, D.O. (ed.) AdvancedMathematical Thinking. Kluwer Acaemic Publishers; p. 153-166

Cuoco & Goldenberg (1992)," Mathematical Induction in a Visual Context", in InteractiveLearning Environments, Vol. 2, Issues 3 & 4, p. 181-203.

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la Pizarra. Madrid: Pirámide.

Dreyfus, T. (1993), "Didactic Design of Computer-based Learning Environments", in Keitel, C. & Ruthven, K. (eds) Learning from Computers: M athematics Education and Technology, NATO ASI Series Vol. F 121, Springer Verlag, Berlin, p. 101-130.

Dyson, F. (1978), "Characterizing Irregularity", in Science, May 12, 1978, vol. 200, no. 4342

Ferrari, E.; Lagana, A; Luzi, E.; Trovini, E. (1995), "Il Concetto di Infinito nell' Intuizione Matematica", inL'Insegnamento dellaMatematica e delle Scienze Integrate, Vol. 18B, N.3, June 1995, Pademo, Italy.

Figueiras, L. y. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. Enseñanza de las ciencias 23(2), 217-226. Recuperado el 8 de septiembre de 2015 DE: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/22019/332762.

Fischbein; E.; Tirosh; D.; Hess, P. (1979), "The Intuition of lnfinity", Educational Studies in Mathematics 10, p.3-40. Boston, Reidel Publishing.

Fischbein; E.; Tirosh; D.; Hess, P. (1979), "The Intuition o infinity", *Educational Studies in Mathematics 10*, p.3-40.

Gardies, J.-L. (1984) Pascal entre Eudoxe et Cantor. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris. GRUPO AZARQUIEL. (1993) Ideas y actividades para trabajar álgebra. Madrid: Síntesis.

Goldenberg, P. (1991), "The Difference Between Graphing Software and Educational Graphing Software", in Zimmermann, W.; Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* MAA Notes Series Vol. 19, .p. 77-86.

Goldenberg, P. (1991), "The Difference Between Graphing Software and Educational Graphing Software", inZimmermann, W.; Cunningham, S. (eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA Notes Series Vol. 19, .p. 77-86.

Hauchart, C. & Ronche, N. (1987), *Apprivoiser l'Infini. Un enseignement des débuts de l'analyse.* GEM, Ciaco Éditeur, Belgium.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987a), "Synthesising Mathematical conceptions and their formalisation through the construction of a LOGO-based school mathematics curriculum", International Journal ofMathematics Education in Science and Technology 18, 4 (1987), p.581-595.

Jones, C. V. (1987), "Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas", inMathesis, Vol. III, No. 1, February, 1987.

Kaput, J. (1995), "Creating Cybernetic and Psychological Ramps from the Concrete to the Abstract: Examples from Multiplicative Structures", in Perkins, D. et al. (eds), Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies; p. 130- 154.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

Larkin, J. H. & Simon, H.A. (1987) "Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words", Cognitive Science 11, p.65-99.

Lévy, T. (1987) Figures de l'Infini: Les mathématiques au mirroir des cultures. Editions de Seuil, Paris.

Lewis, P. (1990) “A Fractal Curriculum", in *Seeing Beauty inMathematics*, p. 107-121. EDC. Newton, Mass.

Mandelbrot, B. (1992), “Fractals and the rebirth of experimental mathematics". Foreword to: Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Sauce, D. Fractalsfor the Classroom, Vol. l. NewYork: Springer-Verlag.

Maor, E. (1987), To Infinity and Beyond: A cultural history ofthe infinite. Birkbiiuser Boston.

Mason, J. (1987), “Representing Representing", in Janvier, C. (ed.) Problems of Representation in the Teaching and Learning ofMathematics

Mason, J.; Graban, A.; Pimm, D. y Goward, N. (1999). Rutas/raíces hacia el álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En: Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. (Eds). Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer; pp. 65-86.

Monaghan, J.D. (1986) “Adolescent Understands of Limits and Infinity". PhD Thesis, Warwick University, U.K

Monaghan, Sun & Tall (1994) “Construction ofthe Limit Concept with a Computer Algebra System” in *Proceedings PME-18*, Lisboa, 1994, p. 279-286. Moore, A.W. (1991), The *Infinite.* Routledge; London and New York.

Moore, A.W. (1991), The Infinite. Routledge; London and New York.

Moreno, L. (1995), "El espacio indiscreto", Plenary Lecture in the Coloquio de Historia y Filosofía de las Matemáticas: La Continuidad en Física y en Matemática, UNAM, México, 27-29 Sept. 1995.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1995) "Variación y Representación: del número al continuo", *in Educación Matemática* Vol. 7, No. 1, p.12-28.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1995) “Variación y Representación: del número al continuo", inEducación Matemática Vol. 7, No. 1, p.12-28.

Moreno, L. & Waldegg, G. (1991), “The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", inEducational *Studies inMathematics*, 22, p.211-231.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996), Windows onMathematicalMeanings. Learning cultures and computers. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London.

Nuñez Errázuriz, R. (1993), En Dec;a du Transfini. Aspects psychocognitifs sous jacents au concept d'infini en mathématiques. Vol. 4. Éditions Universitaires Fribourg Suisse.

Piaget, J. & Garcia, R. (l989) P sychogenesis and the History of Science. Columbia University Press. New York, 1989. (French edition: Flammarion, Paris, 1983).

Presmeg, N.C. (1986), "Visualization in High-School Mathematics" in For the Learning of Mathematics 6, p.42-46.

Presmeg, N. (1986). Visualization and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311. Boston: Reidel Publishing Company.

Radford, L. Sorne fl.ections on teacheing algcbra through generalization. En: bednarz, n.; kieran, c. Y lee, l. (Eds). Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer, 1996; p. 107, 114.

Radford, L. (1996). Sorne fl.ections on teacheing algcbra through generalization. En: Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. (Eds). Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer; pp. 107, 114.

Rucker, R. (1982) Infinity and the Mind: The science and philosophy ofthe infinite. Bantam Books (Original edition Birkhiiuser Boston).

Rigo L., M. (1994), "Elementos Históricos y Psicogenéticos en la Construcción del Continuo Matemático", in Educación Matemática. Vol.6 No.1 April 1994, p.19-31 (Part 1), and Vol. 7No. 2 August 1994, p.16-29 (Part 2).

Rucker, R. (1982) Infinity and the Mind: The science and philosophy ofthe infinite. Bantam Books (Original edition Birkhiiuser Boston).

Sacristán, A. l. (1988), Procesos Infinitos: Centración en la Intuición. Master of Science Thesis in Mathematics Education. CINVESTAV-IPN, México.

Sierpinska, A. (1987), "Humanities students and epistemological obstacles related to limits, Educational Studies inMathematics 18 (1987), p.371-397.

Schwartz, J.L. (1995), "Shuttling Between the Particular and the General: Reflections on the Role of Conjecture and

Hypothesis in the Generation of Knowledge in Science and Mathematics", in Perkins, D. et al. (eds), Software Goes to School: Teachingfor Understanding with New Technologies; p. 93-105.

Schwarz, B & Dreyfus, T. (1989) "Transfer between function representations: a computational model", *inPME-13 Proceedings,* Paris 1989, Vol. 3, p. 269-276.

Schwarzenberger, R.L.E. (1980) "Why Calculus cannot be made easy". *Mathematical Gazette 64,* p.158-166. London: The Mathematical Association

Sierpinska, A. (1987), "Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Educational Studies inMathematics* 18 (1987), p.371-397.

Sierpinska, A., (1994), Understanding in Mathematics, The Falmer Press, Studies in Mathematics Education Series: London

Struik, D.J. (1967), A Concise History of Mathematics. New York: Dover Publications.

Sacristán Rock, A. I. (20 de Marzo de 1997). Windows on the infinite: constructing meanings in a logo-based microworld. Obtenido de http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/Inicio.php

Sacristán, A.l. (1993), "Los Obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos" Educación Matemática Vol. 3 No.1 April 1993, México.

Sierpinska, A. & Viwegier, M. (1989): How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students? Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology ofMathematics Education (Vol.IJI), 166-173.

Sierpinska, A., (1994), Understanding inMathematics, The Falmer Press, Studies in Mathematics Education Series: London.

Tall, D. (1992), "The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof', in H andbook ofResearch on M athematics Teaching andLearning, Grouws, D. A. (ed.), p.495-511, NCTM, New York.: Macmillan.

Tall, D.O. (ed.) (199l) AdvancedMathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers.

Thurston, W. (1994) "On Proof and Progress in Mathematics", in the (new series) Bulletin oftheAmericanMathematical Society, Vol. 30, N. 2, april 1994.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981), "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity", in Educational Studies in Mathematics 12, p.lSl-169.

Vitale, B. (1992). "Processes: A Dynamical Integration of Computer Science into Mathematical Education", in Hoyles, C. & Noss, R. (eds.) Learning M athematics and Logo, MIT Press. Pp. 279-318.

Waldegg, G. (1988), *Esquemas de Respuesta ante el Infinito Matemático. Transferencia de la Operatividad de lo Finito a lo Infinito.* Doctoral dissertation. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

Zimmermann, W.; & Cunningham, S. (eds.), (1991), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA Notes Series Vol.l9. Providence RI, USA.

Zimmermann, W.; & Cunningham, S. (eds.), (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* MAA Notes Series Vol.l9. Providence RI, USA.