UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

CONOCIMIENTOS Y DIFICULTADES DE NIÑOS DE QUINTO GRADO CUANDO PROPONEN Y RESUELVEN PROBLEMAS MATEMÁTICOS

CATALINA ANDREA HERRERA RESTREPO

Asesor: Dr. WALTER FERNANDO CASTRO GORDILLO

TESIS DE MAESTRIA

MAGISTER EN EDUCACIÓN-LÍNEA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PUERTO BERRIO (ANT)

2017

Facultad de Educación

DEDICATORIA

A mi padre, Luis Alberto Herrera, quien siempre me ha apoyado y acompañado en este proceso formativo, y me ha ayudado a alcanzar mi realización personal y profesional.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero y sobre todo a DIOS, por las bendiciones recibidas y por permitirme cumplir con mis aspiraciones profesionales. A mi asesor, Walter Fernando Castro Gordillo, quien siempre estuvo dispuesto a discutir y a compartir su experiencia y conocimientos para culminar este ejercicio investigativo. Agradezco su devoción al trabajo académico, su disponibilidad permanente, su sentido del humor y su paciencia. Al grupo Matemática, Educación y sociedad (MES) por contribuir con aportes significativos para la construcción de la tesis. Al profesor René Londoño, por orientar mis dificultades académicas, desde la dirección de la Línea Educación Matemática.

A Francisco Antonio Gallego rector de la Educativa Alfonso López Pumarejo, del municipio de Puerto Berrio, por permitir la realización del presente trabajo en esta Institución; a los estudiantes del grado quinto C, por su motivación y compromiso en la realización de las actividades del proyecto para la recolección de la información; a los padres de familia por concederme el permiso para entrevistar y filmar a los niños durante las sesiones de trabajo, a los maestros que hicieron aportes; a la Gobernación de Antioquia, por concederme la beca para tener la oportunidad de estudiar la maestría.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

RESUMEN

Esta investigación se interesa por indagar conocimientos y dificultades que manifiestan estudiantes de quinto grado, cuando proponen y resuelven problemas matemáticos. El conocimiento matemático, se asume como el saber que se manifiesta en la comprensión de objetos y conceptos matemáticos, en procedimientos y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007) y favorece la construcción de significados sobre situaciones cotidianas representadas como problemas matemáticos (Godino, 2000).

Esta investigación presenta un enfoque cualitativo. Se plantea la invención de problemas como estrategia metodológica para conocer los conocimientos de los niños (Fernández y Molina, 2016), reconocer los procedimientos que surgen en el proceso de resolución de problemas (Ayllón, Castro y Molina,2010), así como algunas dificultades que manifiestan cuando inventan y resuelven problemas de matemáticas.

La investigación informa sobre: los conocimientos y dificultades que exhiben estudiantes cuando proponen y resuelven problemas, los pensamientos matemáticos predominantes en los conocimientos matemáticos de los niños y la coherencia, estructura semántica y operatoria de los problemas planteados por los estudiantes.

Los problemas sobre los que se informa en esta investigación, se clasifican en problemas generales y problemas aritméticos de enunciado verbal. Fueron diseñados en el Escenario 1 (inventados por estudiantes) y en el Escenario 2 (propuestos por la investigadora), para identificar conocimientos matemáticos y dificultades que surgen en el proceso de resolución de problemas. En este trabajo el sentido dado al término ‘problema’ refiere a una situación resoluble por los niños, con los conocimientos matemáticos escolares correspondientes al grado quinto. No se proponen problemas que requieren estrategias especiales o procedimientos novedosos.

Palabras clave: conocimientos matemáticos, dificultades, problemas matemáticos, invención de problemas, solución de problemas, pensamientos matemáticos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

ABSTRACT

This research is interested in investigating knowledge and difficulties expressed by fifth grade students when proposing and solving mathematical problems. Mathematical knowledge is assumed as the knowledge that manifests itself in the understanding of mathematical objects and concepts, in procedures and arguments (Godino, Batanero y Font, 2007) and favors the construction of meanings about everyday situations represented as mathematical problems (Godino, 2000).

This research presents a qualitative approach. The invention of problems as a methodological strategy to know the children's knowledge (Fernández y Molina, 2016), to recognize the procedures that arise in the process of problem solving (Ayllón, Castro y Molina, 2010), as well as some difficulties Which manifest when they invent and solve math problems.

The research reports on: the knowledge and difficulties that students exhibit when they propose and solve problems, the predominant mathematical thoughts on children's mathematical knowledge, and the coherence, semantic and operative structure of the problems posed by students.

The problems reported in this research are classified into general problems and arithmetic problems of verbal utterance. They were designed for stage 1 (invented by students) and in scenario 2 (proposed by the researcher), to identify mathematical knowledge and difficulties that arise in the problem-solving process. In this work, the meaning given to the term 'problem' refers to a situation that is solved by children, with the mathematical knowledge of the school corresponding to the fifth grade. Problems that require special strategies or novel procedures are not proposed.

Keywords: mathematical knowledge, difficulties, mathematical problems, problem solving, problem solving, mathematical thinking.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

PRESENTACIÓN

Esta tesis de maestría fue realizada entre los años 2015 y 2017, en el programa Maestría en Educación, modalidad investigación, línea Educación Matemática, ofrecido por la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, seccional del Magdalena Medio, en el municipio de Puerto Berrio.

En este documento se informa sobre los conocimientos y las dificultades que manifiestan niños de quinto grado, cuanto proponen y resuelven problemas matemáticos. Los estudiantes participaron de manera voluntaria en el proceso investigativo, mediante el desarrollo tareas relacionadas con la invención y solución de problemas, y en la realización de sesiones de entrevistas semiestructuradas.

Este trabajo presenta un diseño metodológico cualitativo, en el cual interesa interpretar los modos como los niños plantean y resuelven problemas matemáticos, teniendo en cuenta la coherencia, la operatoria y los significados que los niños atribuyen a los objetos matemáticos, presentes en los enunciados y las soluciones. El documento consta de cinco capítulos, descritos a continuación.

El capítulo 1, *Planteamiento del problema*, presenta la problemática que define el interés por realizar la investigación, la cual se sustenta en referentes empíricos y teóricos y algunos antecedentes, que confieren pertinencia e importancia a este trabajo. En este capítulo se definen la pregunta y el objetivo de la investigación.

El capítulo 2, *Marco teórico*, enuncia elementos teóricos y conceptuales, relacionados con la pregunta y el objetivo de investigación. Estos elementos orientan la postura personal de la investigadora frente a los conceptos relacionados con el problema de investigación.

El capítulo 3, *Diseño metodológico*, describe el enfoque, el paradigma, el método, la estrategia metodológica y los instrumentos empleados, para recoger la información, orientar el proceso de indagación, cumplir los objetivos y resolver la pregunta de investigación.

También se presenta las características de los Escenarios 1 y 2, para el desarrollo del proceso investigativo, la descripción de las tareas propuestas a los estudiantes y las sesiones de entrevista semiestructurada.

En el capítulo 4, *Análisis de datos*, se interpreta cualitativamente la información, tanto de los enunciados como de las soluciones de los problemas inventados y resueltos por los estudiantes, en los Escenarios 1 y 2, presentados en el capítulo anterior. También se realiza la categorización, la caracterización, y el análisis de problemas generales y problemas matemáticos de enunciado verbal.

En el capítulo 5, *Conclusiones*, se expone los resultados obtenidos en el proceso investigativo, se da respuesta a la pregunta de investigación y se informa la consecución de los objetivos de la investigación. También se enuncian algunas propuestas para futuras investigaciones, relacionadas con el problema de esta investigación.

A continuación, se plantea el problema y el objetivo de la investigación, los cuales se soportan en referentes teóricos y empíricos que sustentan la importancia y pertinencia de desarrollar esta investigación en la I.E. Alfonso López Pumarejo.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A partir de la experiencia docente y de la literatura disponible en educación matemática, es posible reconocer algunas problemáticas en la enseñanza de las matemáticas y sus efectos en los aprendizajes de los estudiantes. La experiencia docente se configura en el marco del conocimiento profesional (Tallaferro, 2006) que es un conocimiento experiencial que resulta de las prácticas de aula y de la apropiación curricular, didáctica y pedagógica que sirve para interpretar situaciones de enseñanza y aprendizaje (Climent y Carrillo, 2003). Aunque la experiencia docente no está fundamentada teóricamente, es valiosa para indagar sobre un problema escolar, en tanto que la reflexión sobre el propio conocimiento y las propias creencias permite al maestro interpretar y comprender un problema objeto de investigación (Godino, 2009).

Las dificultades que manifiestan los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos, es un fenómeno escolar que afecta los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo, lugar donde se efectuó la presente investigación. Este fenómeno puede ser abordado e interpretado a partir de la propia práctica docente (Rico, 2012) para determinar cuáles dificultades manifestadas por los estudiantes, pueden conllevar a resultados académicos desfavorables.

Las dificultades en matemáticas se asumen como deficiencias en el conocimiento matemático de los niños en el proceso de resolución de problemas, que afectan la comprensión conceptual y la habilidad de resolver problemas matemáticos (Donovan y Bransford, 2005). Estas dificultades pueden encontrarse en los errores conceptuales, en los procedimientos realizados, en las estrategias y en el razonamiento.

Los últimos informes de evaluación nacionales (Pruebas Saber 2009, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016) y las evaluaciones periódicas realizadas en la I.E. Alfonso López Pumarejo, reportan resultados que resaltan la necesidad de asumir acciones para cambiar, en corto tiempo, los resultados de las pruebas, y de paso, incrementar oportunidades de formación en matemáticas para los niños. Con base en la literatura (Santos Trigo, 1997; Obando y Múnera, 2003) se considera pertinente promover la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje de las matemáticas en la básica primaria, considerando los resultados desfavorables que han obtenido los niños de grado quinto en estos años. Estos resultados serán descritos en la siguiente sección.

Dado que los exámenes estatales suelen inquirir y reportar los desempeños de los estudiantes, con base en documentos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (Estándares Básicos de Competencias, 2006; Lineamientos curriculares, 1998; ICFES, 2015a) y parece que no indagan por los conocimientos y desempeños de los niños (ICFES, 2015b) se considera pertinente investigar sobre estos dos temas: conocimiento matemático escolar y desempeño en la resolución de problemas.

La invención y solución de problemas son dos procesos que hacen parte de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, en la actividad matemática de los niños, ya que promueven la exploración, el descubrimiento y la aplicación de conocimientos matemáticos en contextos escolares y extraescolares (Godino, 2000). La invención y solución de problemas "contribuyen al desarrollo de una concepción más consistente de lo que son las matemáticas" (Santos,1997, p.12). Sin embargo, llevar a cabo estos dos procesos en las clases no es una tarea sencilla para los maestros, dado que, su inadecuada implementación puede no contribuir a la construcción del conocimiento matemático (Hernández, 2001). La resolución de problemas se estructura para el Ministerio de Educación Nacional (MEN) como una propuesta curricular importante para la actividad matemática del estudiante, que debe ser acompañada tanto del diseño como de una cuidadosa puesta en escena en el aula de clase.

La propuesta curricular del MEN (1998) para la básica primaria incluye la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje, como contenido central y como contexto donde se desarrolla la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aprender matemáticas favorece la aplicación de conocimientos en situaciones escolares y extraescolares, mediante la relación entre contenidos matemáticos, la experiencia cotidiana y el contexto sociocultural (MEN,1998). Esta interacción entre matemáticas, sociedad y cultura contribuye al desarrollo de conocimientos, creencias y actitudes que ayudan significar la realidad del estudiante (Fitzsimons, 2006).

Se desea investigar sobre los conocimientos y las dificultades manifestadas por niños de quinto grado cuando resuelven problemas matemáticos, inventados por ellos mismos o propuestos por el profesor. Interesa indagar y reconocer los significados que los niños confieren a los conceptos[1] matemáticos (Obando y Múnera, 2003), a partir de la determinación de la coherencia, la semántica y la operatoria de los enunciados. Se espera que los resultados obtenidos sirvan para conocer cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y cómo las utilizan en contextos escolares y extraescolares.

Referentes empíricos

A partir de los resultados de las pruebas Saber aplicadas en los últimos años (ICFES 2009, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016)[2] se propone investigar dificultades y conocimientos que los estudiantes manifiestan para resolver problemas matemáticos.

Se efectuó una revisión de los resultados de las Pruebas Saber 5°, regional, departamental y nacional, realizadas en los años 2009, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016. Los cuatro niveles de desempeño de esta prueba –insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado- ofrecen descripciones detalladas sobre los conocimientos de los estudiantes referidos a los cinco pensamientos matemáticos (numérico, geométrico, métrico, variacional y aleatorio) agrupados en tres componentes (pensamiento numérico- variacional, geométrico- métrico y aleatorio) que la Prueba Saber examina en la competencia de planteamiento y resolución de problemas (ICFES, 2015a).

Hasta el año 2014, se identificaron resultados de desempeño matemático insuficiente, para el 42% de los estudiantes del país. De acuerdo con las descripciones de los niveles de desempeño (ICFES, 2015a), los estudiantes que manifiestan desempeños ubicados en la categoría 'insuficiente' no logran resolver preguntas de menor complejidad, es decir, no resuelven problemas que requieran del uso de operaciones básicas en su solución. Es significativo el porcentaje de estudiantes ubicados en 'desempeños mínimos', aproximadamente un 30% de los resultados analizados. Los estudiantes en este nivel, utilizan operaciones básicas para resolver situaciones problema y clasifica información estadística, es decir, tienen habilidades en el componente numérico-variacional. Pocos estudiantes 28% lograron resultados ubicados en el nivel satisfactorio y avanzado, sin

[1] La concepción que se utiliza en este trabajo de investigación supera la dualidad procesos-conceptos (Hiebert, 2013)
[2] http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359

embargo, identifican y utilizan propiedades de las operaciones para resolver problemas ubicados en los tres componentes.

En los resultados obtenidos en las Pruebas Saber 2014, por estudiantes del municipio de Puerto Berrio, Antioquia, Colombia, se logra apreciar similitud con los desempeños matemáticos de los estudiantes en el Departamento de Antioquia.

Los resultados arrojados por las Pruebas Saber (2015 y 2016) para el grado quinto, varían poco en su información y reportan desempeños insuficientes en un 54% en el municipio, un 40% en el departamento de Antioquia y el 36% en el país. Los desempeños mínimos son más similares, un 25%, 30% y 29% en los tres reportes. Sin embargo, son más altos los puntajes de los niveles satisfactorio 21% y avanzado 14% en el reporte del país, que en el departamento 19% y 12%, y que en el municipio con el 15% y 6% respectivamente (ICFES, 2016b).

Al comparar los puntajes promedio de los centros educativos oficiales urbanos (278 puntos), el municipio (260 puntos), el departamento (299 puntos) y el país (305 puntos) para el área de matemática en grado quinto, es posible identificar que los estudiantes se encuentran en rangos entre los niveles de desempeño insuficiente y mínimo respecto a la media Nacional (500 puntos).

De acuerdo con los resultados de las Pruebas Saber realizadas en los años 2009, 2012, 2013, 2014, para la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo (IEALP), el 57% de los estudiantes se ubican en el nivel Insuficiente. Se encuentran semejanzas entre los niveles de desempeño institucionales, con los correspondientes en los niveles nacionales y departamentales (ICFES, 2015b). Es posible suponer que los estudiantes del grado 5°, manifiestan dificultades en la resolución de problemas, que podrían estar asociadas con conocimientos matemáticos.

Analizando el informe de las pruebas Saber (2015 y 2016) para el área de matemáticas en estudiantes del grado quinto de la I.E.A.L.P, aunque hubo avances significativos, los resultados aún son desfavorables: de 91 estudiantes en total, 45 obtuvieron puntajes situados en nivel insuficiente, 25 en nivel mínimo, 14 en nivel satisfactorio y 7 en nivel avanzado. Según estos resultados y las descripciones de cada nivel, el 48% de los estudiantes no logran resolver problemas de menor complejidad, el 28% de los niños logran resolver problemas numéricos con procedimientos rutinarios. Un 16% logran resolver problemas utilizando propiedades matemáticas en los componentes numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio. El 8% de los estudiantes demostró competencias matemáticas para resolver problemas en diferentes niveles de complejidad en cualquiera de los tres componentes (ICFES, 2016a).

Respecto a las competencias que valoran las Pruebas Saber (2016) en cada componente, para el grado quinto, se pueden determinar fortalezas y debilidades en la resolución de problemas en los estudiantes de la I.E.A.L.P. Estos resultados se comparan con aquellos obtenidos por otros establecimientos educativos del país con resultados similares, tanto para contrastar los desempeños de los estudiantes de la institución con los desempeños nacionales como para identificar aspectos para mejorar.

Según las competencias evaluadas, se puede identificar que los niños tienen fortalezas en el razonamiento y la argumentación, pero debilidades en la comunicación, representación y modelación, y en el planteamiento y resolución de problemas. En cuanto a los componentes, hay fortalezas en el componente aleatorio, pero los niños presentan dificultades en los componentes numérico- variacional y geométrico- métrico. Por tanto, aunque los resultados de las pruebas institucional, departamental y nacional revelan datos con significativas mejoras, los estudiantes continúan manifestando dificultades en la solución de problemas matemáticos, en los diferentes componentes.

Los resultados de las Pruebas Saber pueden ser contrastados con los resultados de las Pruebas PISA realizadas en el año 2012 y 2015. Esta prueba evalúa competencias en matemáticas desagregadas en seis niveles de rendimiento y tres niveles de competencia, definidos por el grado de dificultad en las preguntas. El énfasis de la evaluación está en el dominio de los procesos, la comprensión de los conceptos y en la habilidad de aplicarlos en situaciones cotidianas.

Colombia participó de las pruebas PISA (2012) con una muestra de 9.073 estudiantes, de una población total de 560 mil jóvenes de instituciones oficiales (rurales y urbanas) y privadas. Los resultados para Colombia basados en niveles de competencia, revelan que el puntaje promedio de la prueba en matemáticas (376 puntos) fue más bajo que el puntaje en lectura (403 puntos) y en ciencias (399 puntos).

Según la distribución porcentual por niveles de rendimiento en PISA (2012), Colombia obtuvo 42% en nivel ‘<1’; 32% en nivel uno; 18% en nivel dos. De acuerdo con las descripciones de los diferentes niveles, los estudiantes con puntuaciones entre los niveles uno y dos, manifiestan competencia para identificar información y para efectuar procedimientos matemáticos rutinarios, siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, y responden a preguntas relacionadas con contextos conocidos. Es notable que el 6% de los estudiantes participantes en esta prueba se ubiquen en el nivel tres; y solo el 2% de ellos se ubiquen en el nivel cuatro. En estos dos niveles, los estudiantes pueden interpretar situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa, utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales y pueden efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los problemas.

Según la escala matemática (MECD, 2013) la mayoría de los estudiantes en Colombia 92% se ubican en el nivel C, que corresponde a problemas de poca dificultad. Los demás estudiantes 8% se ubican en el nivel B que corresponde a problemas de dificultad media. PISA (2012) no reporta estudiantes colombianos ubicados en los niveles de rendimiento cinco o seis, es decir, de competencia A, que son los niveles superiores. Esto sugiere que los estudiantes manifiestan competencias matemáticas por debajo de tales niveles.

En la prueba PISA (2015) se evaluó la capacidad de los estudiantes para resolver problemas cotidianos, referidos a situaciones económicas y financieras. Los resultados de las pruebas en matemáticas revelan un puntaje promedio de 390 puntos, en lenguaje de 425 y en ciencias 416, con una mejora en 19 puntos significativamente en las tres áreas. Sin embargo, los resultados globales indican que Colombia obtiene puntajes por debajo de la media nacional (500 puntos) y se sitúa por debajo del promedio de la OCDE.

Según el informe de la OCDE, en Latinoamérica los jóvenes logran resolver problemas simples en situaciones conocidas. En Colombia, el 66% de los estudiantes, no alcanzan este nivel básico de competencia en matemáticas, dado que presentan dificultades para resolver problemas rutinarios (OECD, 2015).

Comparando los resultados de las pruebas PISA realizadas en los años 2012 y 2015, se aprecia que los puntajes más bajos se reportan en matemáticas, de donde se colige que existen dificultades asociadas a la comprensión matemática de los estudiantes al resolver problemas matemáticos relacionados con la vida cotidiana.

En general, los resultados de las Pruebas Saber (2009, 2012, 2013, 2014 y 2015) y de las Pruebas PISA (2012 y 2015), indican deficiencias en el conocimiento matemático de los estudiantes y los niveles de competencia por debajo de lo esperado, cuando resuelven problemas matemáticos relacionados con la vida cotidiana.

De acuerdo con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), el aprendizaje de las matemáticas debe favorecer la relación del conocimiento matemático con la vida cotidiana, promoviendo la resolución no solo de problemas rutinarios sino de problemas novedosos, "…las situaciones problemáticas es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas" (MEN,1998, p.24).

El aprendizaje de las matemáticas requiere que los niños aprendan a explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos, como estrategias de solución que permiten el desarrollo el pensamiento matemático (Rico,1995). Sin embargo, los resultados de las pruebas estandarizadas, Saber y PISA, parecen indicar que los niños manifiestan dificultades para usar sus conocimientos matemáticos en diferentes procesos de pensamiento, asociados con resolución de problemas propuesta por los Lineamientos Curriculares (MEN,1998).

El aprendizaje de las matemáticas

La matemática confiere relevancia a los procesos mentales de la resolución de problemas (de Guzmán, 2001). La enseñanza ha de estimular el pensamiento autónomo y la elaboración de procesos mentales a partir del uso de estrategias adecuadas para la resolución de problemas. Pero diversos trabajos reportan que las dificultades matemáticas de los alumnos obedecen a una enseñanza que refuerza los algoritmos y preferencia la solución sobre la discusión de los problemas (del Valle y Curotto, 2008). Varias dificultades de aprendizaje de las matemáticas se deben a 'errores de comprensión' (Socas, 2011), a deficiencias en el proceso de resolución de problemas (Donovan y Bransford, 2005) y al énfasis que se suele dar a los procesos algorítmicos de ejercitación y a la ausencia del contexto en los problemas matemáticos (del Valle y Curotto, 2008).

En la resolución de problemas, las respuestas elaboradas por estudiantes de primaria son un punto de partida para identificar objetos matemáticos relevantes en la resolución de tareas e interpretar sus producciones (Callejo, 2015). El docente podrá reconocer dificultades o conocimientos en la resolución de problemas, analizando las producciones escritas de los estudiantes que dejan ver los procesos de solución, o en la comunicación verbal que hagan sobre la interpretación de enunciados matemáticos.

Existen situaciones de la vida cotidiana que motivan al estudiante a desarrollar ideas, procedimientos y estrategias, para utilizar las matemáticas al resolver problemas en un contexto. Bravo (2006) afirma que "…lo que necesita el alumno son situaciones significativas que le aporten posibilidades de enfrentamiento a dicha resolución" (p. 34). En este trabajo se ha decidido estudiar las producciones de los estudiantes cuando proponen y resuelven problemas matemáticos, en consecuencia, se pretende analizar coherencia, estructura semántica y operatoria de los enunciados propuestos.

Diversos estudios reportan sobre las dificultades que los estudiantes manifiestan cuando resuelven problemas (Andrade, 2011; Schlöglmann, 2007; Osorio y Ayala, 2013; Noda, 2001; Fernández y Molina, 2016) sin embargo, también interesa saber sobre los conocimientos matemáticos que los estudiantes exhiben cuando proponen problemas.

En la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), el conocimiento matemático se adquiere tanto de la propia motivación como de la habilidad para proponer estrategias de solución. De esta manera, el aprendizaje de las matemáticas se promueve tanto, con base a elaboraciones individuales como en el uso de los conocimientos previos presentes y emergentes en un contexto real. Las situaciones cotidianas favorecen el reconocimiento y la comprensión de objetos matemáticos implícitos en enunciados que requieren de ellos, por lo tanto, los estudiantes construyen su conocimiento matemático con base en la motivación, la experiencia y el conocimiento previo (Marín y Lupiáñez, 2005).

Lupiáñez (2015) afirma que "…el conocimiento de la terminología propia de las matemáticas, la definición de los conceptos básicos y el manejo de técnicas y algoritmos" (p.2) forma parte del conocimiento matemático. La comprensión de un problema matemático depende de la formulación del enunciado, de su longitud, del vocabulario y de la cantidad de información, lo que genera distintos niveles de complejidad.

Rico (2012) considera que los problemas de comprensión están asociados con los usos y con los significados que los estudiantes dan a los conceptos, cómo los representan, cómo analizan sus propiedades y cómo establecen relaciones entre estos y los demás conceptos en un enunciado matemático. Con base en la comprensión estudiantil del problema matemático, dependerá el aprendizaje y la utilización de las matemáticas en la vida cotidiana. Por lo cual, es importante que se promuevan procesos, de construcción de conocimientos en la Educación Básica Primaria, basados en la resolución de problemas.

Un problema es una situación matemática que puede resolverse a partir de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, los cuales se evidencian en las estrategias de solución implementadas (Obando y Múnera, 2003). Una estrategia para conocer los conocimientos matemáticos que los estudiantes ponen en juego cotidianamente es el ‘problem posing’- invención de problemas-, el cual posibilita indagar sobre los problemas matemáticos que los mismos estudiantes proponen (Schleppegrell y Bowman, 1995; Silver, 1994, 1997).

La invención de problemas permite conocer las habilidades que tienen los estudiantes para usar su conocimiento matemático (Ayllón, 2005; Cazares, Castro y Rico, 1998; Lin, 2004; Mestre, 2002; Sheikhzade, 2008), así mismo favorece el análisis de los procesos de pensamiento matemático. Se destaca que la invención de problemas permite identificar el conocimiento, la forma de razonar y el desarrollo conceptual en las respuestas o soluciones.

El docente puede utilizar la invención de problemas como una estrategia metodológica, para vincular al estudiante con problemas matemáticos, que surgen de sus intereses y de sus necesidades y que favorece la utilización de su propio lenguaje (Schleppegrell y Bowman, 1995). También puede utilizar la invención de problemas como estrategia de aprendizaje, para desarrollar habilidades comunicativas y de pensamiento crítico, al proponer que sean los estudiantes quienes planteen tanto problemas cotidianos como sus soluciones, basados en sus razonamientos, argumentos y en la toma de decisiones en el proceso de resolución.

Para esta investigación se define como ‘invención de problemas’ la creación de una situación cotidiana en lenguaje matemático y su solución (Silver, 1994,1997). La ‘invención de problemas' es un proceso matemático que puede realizarse antes, durante y después del proceso de resolución de un problema matemático (Espinoza, 2013). Sin embargo, en este trabajo se prestará atención al planteamiento libre de problemas, es decir, el estudiante propone problemas con base en su creatividad, su conocimiento matemático y su contexto, sin exigir el uso de formatos conocidos, ni formulaciones matemáticas previas (Stoyanova, 1998).

La investigación en 'invención de problemas' se ha enfocado en estudiar la invención de problemas dentro del proceso de instrucción en las clases de matemáticas, sin embargo, pocas investigaciones abordan estrategias que permitan valorar las producciones de estudiantes (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2015). La invención de problemas, permite estudiar las dificultades, el conocimiento de los estudiantes para proponer y resolver problemas matemáticos (Espinoza et al., 2015). Esta investigación busca utilizar la 'invención de problemas' como estrategia para la recolección de información sobre las estructuras de conocimiento que los niños manifiestan al proponer y resolver problemas, relacionados con su actividad matemática dentro y fuera del aula.

El concepto de estructura se interpreta en término de las relaciones entre lenguaje, propiedades, procedimientos y representaciones de los niños, para proponer problemas y para resolverlos. Estas estructuras elaboran conexiones entre conceptos matemáticos aprendidos y los nuevos que van a aprender, que, al ser relacionados con la cotidianidad posibilita la comprensión de una situación problema.

Antecedentes

Diferentes investigaciones hacen aportes al conocimiento en educación matemática, e indagan sobre la invención de problemas (Ayllón, Castro y Molina, 2010; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013a; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013b; Fernández y Molina, 2016; Romero, Martínez y Solórzano 1998; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014). Éstas se interesan por revisar la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas inventados por los estudiantes, así como sus diferentes niveles de complejidad (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2015).

Los problemas inventados por niños y las soluciones propuestas, ponen de manifiesto las componentes que debe tener un problema: enunciado, datos y una pregunta, la cual requiere de un proceso de solución (Ayllón, Castro y Molina, 2010; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013a; Romero, Martínez y Solórzano, 1998). La solución casi siempre se obtiene por un proceso operativo, principalmente por procesos aditivos y multiplicativos.

En investigaciones reportadas en revistas colombianas (Floriano, Floriano E., y Tovar, 2012; Bohórquez, Rivera y García, 2012), se ha informado sobre estudios en competencias matemáticas, como el razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas, presentes en contextos aritméticos, geométricos y algebraicos. Estas competencias también son un referente importante para valorar los desempeños de los estudiantes en pruebas estandarizadas -Pruebas Saber- del Ministerio de Educación Nacional (MEN). En ambos casos, se establece una correlación entre las potencialidades cognitivas de un sujeto con sus habilidades para plantear y resolver problemas en diversos contextos (Godino, 2000).

Respecto a la resolución de problemas, algunas investigaciones (del Valle Coronel, y Curotto, 2008; Noda, 2001; Juvanteny, Jiménez, García, Úbeda y Moratonas, 2015; Osorio y Ayala, 2013) refieren los procesos, las estrategias, las competencias y los resultados -correctos e incorrectos- que puedan manifestar los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos. Por su parte, Durango y Rivera (2013) informan sobre la evolución de procesos de razonamiento según niveles y dimensiones de comprensión en el proceso de resolución.

Los informes de investigaciones (Imbo y Vandierendonck, 2008; Noda, 2001; Andrade, 2011; Schlöglmann, 2007; Osorio y Ayala, 2013, Fernández, y Molina, 2016), analizan los errores y dificultades en el aprendizaje, asociados al proceso de resolución de problemas matemáticos.

Para Noda (2001) los errores surgen cuando los estudiantes desconocen tanto algunas acepciones de los conceptos como algunos procedimientos, poca comprensión, falta de conocimiento matemático y limitaciones en el uso de estrategias de resolución. Schlöglmann (2007) asume los errores como ‘resbalones’ que surgen cuando hay problemas cognitivos, falta de atención -concentración-, problemas en la memoria de trabajo, conceptos erróneos; incluye también las condiciones del contexto. Para Andrade (2011) los errores emergen cuando existen obstáculos en el aprendizaje. Estos pueden manifestarse de tres formas: a) errores ontogenéticos, se refieren a condiciones genéticas, b) los epistemológicos, que refieren a saltos conceptuales y c) los didácticos, que surgen de una inadecuada enseñanza.

Cabe anotar que el concepto de 'errores matemáticos', se asumirá en esta investigación como factores que influyen en el desarrollo de dificultades en los procesos de invención y solución de problemas, las cuales están asociadas al conocimiento matemático de los estudiantes, lo cual genera problemas de aprendizaje. Algunos 'errores' mencionados por los autores se asumirán en esta investigación como dificultades en el conocimiento matemático, debido a la similitud conceptual.

De acuerdo con la revisión de literatura realizada, no se encontraron reportes de investigaciones que tengan por objeto de estudio el conocimiento matemático de los estudiantes, Esta falta de estudios en este campo resalta la importancia y pertinencia del presente proyecto de investigación, debido a los aportes que pueda generar en la producción del saber científico en el campo de la educación matemática.

Formulación del problema

Los resultados de las Pruebas Estandarizadas Saber y PISA informan sobre niveles de desempeño de los estudiantes colombianos cuando resuelven problemas matemáticos. Existe interés en investigar sobre el conocimiento matemático de los niños, por tanto, en este trabajo se indagará sobre las dificultades y los conocimientos matemáticos que los estudiantes exhiben cuando proponen problemas matemáticos.

Por lo tanto, se establece la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles conocimientos y dificultades manifiestan niños de quinto grado cuando proponen y resuelven problemas matemáticos?

Entendemos en este trabajo 'conocimientos' como 'conocimientos matemáticos'.

Objetivo general

Identificar conocimientos y dificultades manifestados por niños de quinto grado, cuando proponen y resuelven problemas matemáticos.

Objetivos específicos

- Reconocer los Pensamientos Matemáticos (Lineamientos Curriculares, 1998) predominantes en los conocimientos matemáticos de los niños cuando proponen problemas.
- Identificar conocimientos y dificultades asociadas con la resolución de problemas matemáticos.
- Analizar la coherencia, la estructura semántica y operatoria de los problemas planteados por los niños.

En el siguiente capítulo, se plantea el referente conceptual de esta investigación, en el que se explicita el significado de los conceptos claves que asume la investigadora en relación a los diferentes aportes de autores e investigaciones en educación matemática.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se precisa el significado de los conceptos clave que se usan en esta investigación, entre ellos: problema, invención de problemas, resolución de problemas, conocimiento matemático y dificultades en el conocimiento matemático. También, las clasificaciones y elementos que han sido destacados en la literatura relativa a la resolución de problemas, dedicando especial atención a los problemas aritméticos de enunciado verbal.

Noción de problema

Para el diccionario de la real academia española (RAE)[3] el concepto de problema tiene varias acepciones: a) Cuestión que se trata de aclarar; b) Proposición o dificultad de solución dudosa; c) Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin; d) Disgusto, preocupación; e) Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

La acepción e) hace referencia a situaciones desconocidas que surgen de la vida real o en las ciencias, que requieren de la selección de una estrategia, y de la utilización de procedimientos específicos. La ciencia propone dar respuesta a problemas y cuestiones reales, así como transformar el mundo, no sólo el mundo físico sino también el mundo social. Esta acepción de la RAE se relaciona con las definiciones que se asumirán en el presente trabajo, en relación con los problemas matemáticos escolares.

Kilpatrick (1987) define un problema como una situación cuya meta quiere ser lograda, pero la ruta de solución está bloqueada. Para Polya (1962, p.30) tener un problema significa "buscar conscientemente con alguna acción apropiada, una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar". Para Codina y Rivera (2001, p.129) "los problemas son aquellas cuestiones o interrogantes no totalmente aclaradas o resueltas". Para Castro (1991, p.18) "… un ser humano

[3] www.rae.es

se enfrenta con un problema cuando ha aceptado una tarea, pero no sabe de antemano cómo realizarla".

Según Schrock citado en (Fitzsimons, 2006) hay tres criterios que un problema debe cumplir: 1) El alumno debe aceptar que estará implicado en el problema; 2) Debe tener cierto grado de obstrucción y no poseer un método para solucionar de inmediato el problema y 3) Debe explorar activamente el problema en busca de una solución.

Castro (1991) establece que el término problema involucra: a) Una proposición o enunciado; b) Unos datos conocidos que hay que estudiar; c) Una acción: que alguien o algunos sujetos deben averiguar; d) Una meta u objetivo: obtener un resultado; e) Un proceso: el modo de actuación para alcanzar el resultado.

Estos autores coinciden en sus definiciones, en que un problema es una situación que puede ser resuelta con base en los conocimientos y experiencias previas del sujeto. En este trabajo se asumirá un 'problema', como una situación cotidiana cuya solución puede encontrarse mediante estrategias y procedimientos específicos.

Un 'problema matemático', se entiende como una situación cotidiana que puede representarse en lenguaje matemático, como un enunciado verbal que cuya estructura elabora conexiones entre conceptos matemáticos, los datos y las pregunta, el cual puede resolverse mediante estrategias de solución y procedimientos matemáticos.

Tipos de problemas

La literatura sobre clasificaciones de problemas en matemáticas es muy amplia y compleja. Los tipos de problemas se clasifican generalmente en términos de la habilidad, la forma de pensar y el esfuerzo que requiere para sus soluciones. Se han considerado aquellas que se adecuan tanto al problema como a la pregunta y al contexto que orientan esta investigación: en primer lugar, se enumeran clasificaciones generales de problemas que no atienden a contenidos matemáticos, pero que están incluidos en la resolución de problemas. En segundo lugar, se discuten clasificaciones específicas para problemas matemáticos.

Ejercicio y problema

Algunos autores señalan la distinción entre ejercicio y problema. Para Santos (1997) ejercicio refiere a una actividad que no supone un reto para la creatividad y para el desarrollo de las habilidades matemáticas del estudiante. Por el contrario, requiere hacer uso de algoritmos conocidos para su solución. Mientras que ante un problema el individuo trata de realizar una tarea que presenta cierto grado de dificultad. La resolución de un problema requiere de la realización de procesos y el establecimiento de relaciones entre los conceptos y datos para hallar una estrategia de solución.

Para resolver un ejercicio, se necesita de un procedimiento rutinario que lleve a una única respuesta (Polya, 1962). Para resolver un problema, se requiere pensar, reflexionar y elaborar estrategias para dar una respuesta entre diversidad de soluciones.

Clasificación general de problemas

Algunos autores (Noda, 2001; Reitman, 1964; Silver, 1995; Polya, 1962; Verschaffel y De Corte, 1996) proponen clasificaciones generales de problemas. La clasificación no refiere a contenidos matemáticos, sino a la agrupación en 'tipos de problemas' según la definición o no de los datos en el enunciado, del método elegido y del proceso de solución establecido.

Problemas Definidos y no Definidos

Para Noda (2001) los problemas definidos son aquellos los que requieren de proceso de solución determinado para llegar a un estado final establecido, se relacionan con los problemas de encontrar, que son los que a menudo se proponen en la escuela. Los problemas no definidos, son los no rutinarios, no estructurados o abiertos, que no tienen un estado final establecido. También son problemas de encontrar, pero serán los que no tienen datos, les faltan datos, o tiene datos que sobran.

Reitman (1964) describe los problemas definidos como un problema que tiene una única solución y tienen una estructura sistemática, es decir, presentan un enunciado definido, un proceso de solución establecido y las operaciones a desarrollar definidas, para elaborar una respuesta conocida. Por otra parte, los problemas no definidos admiten variedad de procesos y operaciones, para llegar a una solución desconocida.

Problemas abiertos y problemas cerrados

De acuerdo con el conocimiento que se tenga sobre el enunciado, el método, y la solución, los problemas se pueden clasificar en abiertos y cerrados. Para Silver (1995) los problemas abiertos son aquellos que no tienen un proceso de solución determinado, y los cerrados, son los que tienen solución y se puede llegar a ella. Un problema se define como cerrado si pudiera ser resuelto de una sola manera, y abierto y si pudiera ser resuelto en diversas formas.

Problemas de encontrar y de probar

Polya (1962) distingue dos tipos de problemas: 'de encontrar', donde hay datos, condición y se requiere de resolver la incógnita, y los 'de probar', donde hay hipótesis y condiciones y se requiere validar la afirmación del enunciado. Noda (2001) propone que un problema de encontrar se puede convertir en uno de probar cuando se hace una conjetura sobre su resultado, y si en uno de probar se logra establecer una relación entre la conclusión y otra incógnita, este problema se transforma en uno de encontrar.

Problemas rutinarios y no rutinarios

Verschaffel y De Corte (1996) clasifican como rutinarios a aquellos problemas que tienen una única manera de solución; por medio de una o varias operaciones aritméticas, con datos específicos y por lo general presentan preguntas cerradas. Los problemas no rutinarios permiten el uso de diferentes modelos matemáticos para encontrar datos que faltan, resolver la incógnita y no tienen un único proceso de solución.

Polya (1962) consideró problemas rutinarios a aquellos problemas que pueden resolverse a partir de la sustitución de los datos de un problema resuelto previamente, siguiendo el mismo proceso de resolución y sin ningún análisis de la información.

Para Noda (2001) un problema rutinario se refiere a situaciones concretas donde se dan los datos para su solución, con única respuesta y siguiendo un proceso específico de reglas y operaciones. Un problema no rutinario es el que plantea situaciones donde hay que buscar la información, la solución es compleja y diversa, y para hallarla hay que establecer relaciones entre procesos y conceptos.

Entre los problemas no rutinarios se encuentran aquellos que no se pueden resolver bien sin tener en cuenta las características particulares de cada situación. Entre ellos, están los problemas que describen situaciones de la vida real que se pueden resolver correctamente teniendo en cuenta consideraciones de la vida cotidiana.

Problemas estructurados y no estructurados

Según Reitman (1964) en los problemas estructurados el enunciado presenta la información necesaria para resolverlos, posee reglas específicas para encontrar la solución y se tienen criterios definidos para comprobar la solución. Un ejemplo de ellos, son los problemas que se encuentran frecuentemente en los textos escolares.

Los problemas no estructurados, no son precisos en sus datos y admiten diversas soluciones posibles. Estos problemas son similares a los problemas cotidianos, que representan situaciones de la vida diaria.

Clasificación especifica de problemas matemáticos

La información sobre clasificaciones de problemas que encontramos en la literatura específica de las matemáticas, presenta algunas propuestas referidas a los problemas de enunciado verbal. Estos problemas atienden los contenidos matemáticos y se clasifican según la estructura semántica y operatoria.

Problemas aritméticos de enunciado verbal

Se consideran problemas aritméticos de enunciado verbal, a aquellos que están redactados en forma de oraciones. Estos pueden ser aditivos o multiplicativos según su estructura semántica y la operación que requieran para ser resueltos.

Problemas aditivos

Problemas de estructura aditiva, es decir, que se resuelven con una operación de suma o de resta (Castro, Rico y Castro, 1995). Para la clasificación de los problemas aditivos verbales, Nesher (1982) establece cuatro categorías, atendiendo a la estructura semántica de su enunciado verbal:

Problemas de cambio: son problemas donde una situación inicial se transforma es una situación final por medio de un incremento o disminución de una cantidad dada y debido a una acción que se produce. En este proceso intervienen tres cantidades, una inicial, otra de cambio y una final. La cantidad desconocida puede ser cualquiera de ellas por lo que da lugar a tres tipos de problemas.

Problemas de combinación: hacen referencia a la relación que existe entre una cantidad y dos subcantidades disjuntas de la misma. Son problemas que no presentan acción; son problemas de forma 'parte-parte-todo', es decir, que tiene tres cantidades relacionadas.

Problemas de comparación: requieren de una comparación entre dos cantidades. Cada problema de comparación tiene tres cantidades expresadas: una cantidad de referencia, una cantidad comparativa y otra de diferencia. La relación entre las cantidades se establece utilizando los términos más que, menos que y puede darse de dos formas: la cantidad comparada (más grande) es más que la cantidad de referencia (más pequeña), la cantidad comparada es menos que la de referencia.

Problemas de igualación: se considera una composición mixta entre los problemas de cambio y de comparación, ya que se produce alguna acción para hacer que una cantidad presente el mismo número de elementos que la otra y hay una comparación a través del término 'tantos como'.

Problemas multiplicativos

Los problemas de estructura multiplicativa se resuelven con una operación de multiplicación y división (Castro, Rico y Castro, 1995). El análisis que hace Vergnaud (1983) de los problemas que requieren operaciones de multiplicación y división se sitúan en el marco de tres grandes categorías:

Isomorfismo de medidas: son problemas de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes. Entre los problemas de este tipo están: repartos iguales (personas y objetos), precios constantes (bienes y costos), movimiento uniforme (espacio y velocidad), densidades constantes a lo largo de una línea (árboles y distancias), en una superficie o en un volumen.

Producto de medida: son problemas de tres cantidades cuya relación ternaria define que una está definida como un par ordenado (producto cartesiano) cuyas componentes son las otras dos cantidades, que incluye un buen número de problemas relativos a áreas, volúmenes y productos cartesianos discretos.

Proporción múltiple: se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes, son problemas compuestos en los que para su resolución hay que emplear más de una operación.

Problemas multiplicativos simétricos y asimétricos

Según Bell, Greer, Grimison y Mangan (1989), los problemas 'simétricos' son aquellos en los cuales las cantidades se pueden intercambiar. Son el caso de los problemas de producto de medidas. Los problemas cuyas cantidades no pueden ser intercambiadas se llaman 'asimétricos'. Es el caso de los problemas de isomorfismo de medidas, los problemas asimétricos se clasifican en siete tipos: de estructura, grupos múltiples, medida repetida, razón, cambio de unidad (la misma unidad o unidades distintas), cambio de tamaño y mezcla (con unidades iguales o distintas) (Castro, 1991).

Problemas multiplicativos de partición y cuotición

En la división 'partitiva' un conjunto de objetos se divide en un número de partes iguales. La finalidad es obtener la cantidad que corresponde a cada parte. En la división 'cuotitiva' se trata de determinar cuántas partes del mismo tamaño podemos formar de un conjunto dado.

Problemas de adición repetida

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) se interesan por los problemas multiplicativos donde los niños utilizan la adición repetida para resolver problemas. En este tipo de solución, un número de conjuntos de igual tamaño se ponen juntos, por ejemplo: 3 x 4 significa 4 + 4 + 4 ó 3 + 3 + 3 + 3, según cual sea el factor que se considera como operador (número de conjuntos) y cual como operando (número de objetos en cada conjunto). El modelo de adición repetida no es conmutativo y el multiplicador y el multiplicando juegan papeles diferentes, por lo tanto, este modelo de multiplicación lleva asociados los modelos de división 'partitiva' y división 'cuotitiva'[4]

Los tipos de problemas, orientan la clasificación de los problemas utilizados en la presente investigación. La clasificación tanto general como específica, posibilita la categorización de los enunciados y sus soluciones para su posterior análisis. A continuación, se presenta la invención de problemas como estrategia que permite indagar la estructura semántica de los enunciados planteados por los estudiantes.

Invención de problemas

Se encuentra en la literatura, diversos autores que se refieren a la invención de problemas (Ayllón, Castro y Molina, 2010; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013a; Fernández y Molina, 2016; Romero, Martínez y Solórzano 1998; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014) como una estrategia de aprendizaje que se puede aprovechar en el contexto escolar para generar conocimiento matemático.

La Invención de problemas es una estrategia de investigación que permite revisar la estructura sintáctica, matemática y semántica[5] de los problemas inventados por los niños. Igualmente favorece estudiar sus diferentes niveles de complejidad matemática, según el número de relaciones semánticas entre los datos (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2015). Permite evaluar el aprendizaje de los niños (Fernández y Molina, 2016), apreciar la actividad cognitiva, mejorar los procedimientos de resolución de problemas y mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas (Romero et al., 1998). En esta investigación, se considera la estructura semántica de

[4] Los problemas multiplicativos representados de forma de adición repetida, pueden ser resueltos por el modelo de división partitiva, cuando la incógnita es el "multiplicando" y representa el número de elementos de cada conjunto; o por el modelo de partición cuotitiva, donde la incógnita es el "multiplicador" y representa los conjuntos que pueden formarse.

[5] En los problemas, la estructura sintáctica refiere al orden y las relaciones de las palabras y símbolos en el enunciado. La estructura matemática considera las relaciones y la cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema. La estructura semántica, comprende la información proporcionada en el enunciado, la operatoria y el número de etapas que requiere la solución (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2015). Estas estructuras no son excluyentes entre sí.

los enunciados de los problemas inventados por los niños sobre las otras, por razones de tiempo, espacio y oportunidad. En la sección instrumentos para análisis de datos del capítulo 3: diseño metodológico, se amplía la definición operativa que se empleará en este trabajo sobre estructura semántica de los problemas matemáticos.

Inventar problemas ayuda a los estudiantes a ampliar su comprensión de las matemáticas y explorar los problemas *y* soluciones de forma grupal, en lugar de centrarse sólo en la búsqueda de soluciones (Stoyanova, 1998). Se identifica tres formas de inventar problemas: situaciones libres, semi-estructuradas y estructuradas[6]. En este trabajo, interesan los problemas libres, porque los estudiantes pueden plantear problemas sin ninguna condición o restricción (Stoyanova, 1998) ya que favorece el estudio del conocimiento matemático que los estudiantes poseen para generar y resolver problemas.

La invención de problemas se considera una etapa dentro del proceso de resolución de problemas (Castro, 2008) a la vez de ser una actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1989). Consiste en la creación de un nuevo problema partiendo de la propia experiencia del estudiante. Según Brown y Walter (1993) los estudiantes que presentan sus propios problemas se motivan más para resolverlos que si se les proponen a través de textos o los replican de aquellos dados por el maestro.

Para Silver (1994) inventar problemas es recrear una situación cotidiana representada mediante una solución matemática. Es una herramienta en el proceso de aprendizaje de las matemáticas ya que requiere relacionar conceptos matemáticos con su vida cotidiana (Ayllón, 2005) y contribuye a mejorar la capacidad de los niños para resolver problemas matemáticos.

En el presente estudio, se asume la ‘invención de problemas’ como la creación de una situación cotidiana en lenguaje matemático y su solución (Silver, 1994,1997) y se utilizará como estrategia para la recolección de información sobre las estructuras de conocimiento que los niños manifiestan al proponer y resolver problemas.

[6] En las situaciones libres, los problemas se plantean a partir de una situación o experiencia relacionada con el contexto del estudiante. En la segunda y tercera actividad, los estudiantes trabajan con base en alguna situación, experiencia o información dada, pero con diferente nivel de estructuración de la tarea propuesta (Stoyanova, 1998).

La invención de problemas es una estrategia útil en el aula de clase para movilizar el pensamiento matemático y revisar las estructuras de conocimiento que elaboran los estudiantes en los problemas que proponen. Inventar problemas se relaciona con su resolución, proceso que aportar información sobre lo que un estudiante requiere para resolver un problema matemático.

Resolución de problemas

En el proceso de resolución de problemas, diversos autores exponen sus nociones y aportes sobre el proceso de solución de un problema y qué efectos tiene para el aprendizaje. Cazares, Castro y Rico (1998) consideran que resolver un problema es «una especie de reto mental» que se caracteriza por tres componentes: a) Estado inicial no deseado, b) Estado final deseado, c) Barrera que impide la transformación del estado inicial al estado final.

Castro, Rico y Castro (1995) conciben la resolución de problemas como un proceso de pensamiento de orden superior que se compone de habilidades intelectuales y de procesos cognitivos. Requiere de un proceso de pensamiento elaborado y no de la memorización de datos o procedimientos. Las capacidades cognitivas tales como la inteligencia, la creatividad y la originalidad, la capacidad espacial, la capacidad verbal, memoria de trabajo, y conocimiento han sido identificadas como factores importantes que contribuyen a la resolución de problemas.

Según Polya (1962) para resolver un problema, se requiere del uso del pensamiento, la creatividad, del uso de estrategias y procedimientos para para dar una respuesta. Para este proceso de descubrimiento (en contextos heurísticos) Polya propuso un método de cinco pasos para la resolución de un problema matemático:

- Identificación de un problema.
- Representación del problema dentro de un marco conceptual.
- Tratamiento técnico del problema mediante diversas estrategias.
- Explicitación de los resultados u obtención de la solución).
- Evaluación e interpretación de los resultados.

Bravo (2006) propone seis etapas para la resolución de problemas: a) Elaboración; b) Enunciación; c) Generación de ideas; d) Trascripción simbólica de las ideas (traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático); e) Realización (procedimientos matemáticos) y f)

Contrastación (comprobar resultados). En el proceso de resolución, es importante estudiar la concordancia lógica de las etapas, en función de la solución que se haya indicado, mediante la comunicación de ideas para llegar a conclusiones válidas.

Más que conocer los pasos o etapas propuestas Polya (1962) y Bravo (2006) en la resolución de un problema, interesa investigar los problemas matemáticos significativos[7] para los estudiantes, donde sea posible conocer las dificultades y los conocimientos matemáticos que ellos presenta cuando proponen y resuelven problemas. A continuación, se describe el concepto de conocimiento matemático y sus implicaciones en el contexto escolar.

Conocimiento matemático

Socas (2011) concibe el conocimiento matemático como proceso dinámico y que se transforma, es decir, es un conocimiento que debe ser considerado desde una perspectiva histórica, cultural y contextualizada. Para Rico (2012) el conocimiento matemático, como todas las formas del conocimiento, representa las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y periodos históricos.

Estas perspectivas conciben las matemáticas como una ciencia humana no acabada ni constituida por verdades infalibles. Por el contrario, permite ver su desarrollo relacionado con circunstancias sociales y culturales a través del tiempo posibilitando a las matemáticas ser aplicables a la ciencia, la tecnología y la sociedad. (MEN,1998). La naturaleza contextual del conocimiento matemático, hace que el aprendizaje se construya desde la interacción con los otros en el mundo social (Zapata y Córdoba, 2009). Por tanto, un sujeto puede elaborar su conocimiento matemático a partir de las experiencias cotidianas que pueda experimentar con sus semejantes, para dar sentido y uso a las matemáticas en el contexto socio cultural en el que interactúa.

En el contexto educativo, el conocimiento matemático es un saber que supone que el alumno pueda encontrar buenas preguntas y soluciones a situaciones problema, ya sean basadas en las matemáticas, en situaciones de la vida diaria o de otras ciencias. Estas situaciones problema se constituyen como "contextos propicios para acercar a los estudiantes a las matemáticas,

[7] Un problema matemático se considera significativo cuando contiene los elementos necesarios para confrontar al estudiante con su aprendizaje mediante la manifestación de su conocimiento, o cuando representa experiencias cotidianas del estudiante y sea posible representarlo matemáticamente.

contribuyendo significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas" (MEN,1998, p. 24).

El conocimiento matemático se enriquece cuando se aprende a inventar y resolver 'situaciones problema' basados en matemáticas o -problemas matemáticos- para luego aplicarlos y utilizarlos en la vida cotidiana. Inventar y resolver problemas son procesos que contribuyen en la construcción de la actividad matemática de los estudiantes, lo que conlleva al desarrollo de ideas matemáticas, dar significado a las operaciones y a la selección de procedimientos y estrategias para dar una solución (Santos, 1997).

El 'conocimiento matemático' se asume desde una perspectiva educativa, dado que el estudiante desarrolla su actividad matemática mediante la interacción social en el aula de clase. Por tanto, en esta investigación también se define el conocimiento matemático escolar.

Conocimiento matemático escolar

Visto en su dimensión educativa, el conocimiento matemático es una actividad social, propia de los intereses y la afectividad del estudiante que se expresa en representaciones matemáticas. Las Matemáticas son un modo de ver al mundo, y pensar sobre él; el conocimiento matemático que desarrolle el estudiante depende de la comunicación e interacción que establezca entre el mundo real y las matemáticas.

El conocimiento matemático escolar es una manera de conocer las matemáticas a partir de su aplicación en el aula y en su vida diaria. Como tarea social, el conocimiento matemático escolar debe ofrecer respuestas a múltiples situaciones que surgen en el mundo real (MEN, 1998).

En este trabajo se asume el 'conocimiento matemático' como un saber de los estudiantes con el cual exhiben comprensión de lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007) en su actividad matemática en el aula y en sus actividades sociales, a partir de la construcción interactiva[8] de sentidos y significados de

[8] La construcción interactiva se refiere a la elaboración del conocimiento matemático mediante las interacciones sociales entre estudiantes y de estos con su contexto.

situaciones problema (Godino, 2000) en diferentes contextos, que evidencie el desarrollo del pensamiento matemático.

Conocimiento matemático y pensamientos

El conocimiento matemático comprende un conjunto de conceptos y objetos matemáticos agrupados en los cinco pensamientos matemáticos (MEN, 1998). Estos conocimientos matemáticos podrían agruparse de acuerdo con la propuesta de los Estándares Curriculares de Competencias en Matemáticas, más que en términos de listados de conceptos en términos de procesos, que son la base, del desempeño matemático.

En el Pensamiento Numérico y los sistemas numéricos, se considera: (MEN, DOCUMENTO NO PUBLICADO)

- Representar la numerosidad de las magnitudes a través de diversos medios y sistemas de representación.
- Razonar con y sobre los números con el propósito de identificar, argumentar y justificar sobre: relaciones, operaciones, propiedades, procedimientos y resultados.
- Comunicar ideas con y sobre los números, sus relaciones, sus operaciones.
- Formular y ejercitar procedimientos para operar, transformar y relacionar cantidades con el propósito de estudiar tipos de variación y covariación entre cantidades (lineal, exponencial, logarítmica, etc).

Para el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos: (MEN, DOCUMENTO NO PUBLICADO)

- Representar lugares, trayectorias y objetos bi y tridimensionales, dibujos a mano alzada.
- Razonar sobre la localización, las trayectorias, las formas geométricas, sus representaciones, sus relaciones, sus transformaciones con el propósito de formular conjeturas, argumentar.
- Comunicar en diversos lenguajes e ideas relacionadas con las trayectorias, con objetos bidimensionales, tridimensionales.
- Proponer y ejercitar procedimientos, especialmente de construcción por medio de instrumentos de medida, de trazo o de ubicación.

Para el Pensamiento Métrico y los sistemas métricos o de medida: (MEN, DOCUMENTO NO PUBLICADO)

- Representar cantidades y medidas en actividades de la vida diaria relacionadas con compras, recetas, lectura de mapas, deportes y construcción utilizando diversos medios y sistemas de representación.
- Razonar sobre el concepto de estimación y magnitud en situaciones cotidianas donde haya que seguir instrucciones, medir distancias, hacer localizaciones y distribuciones, con el propósito de lograr comprensión y desarrollo de procesos de medición.
- Comunicar sus ideas sobre los conceptos de cantidad y medición desde la comprensión del concepto de magnitud.
- Proponer estrategias y procedimientos para comparar tamaños, establecer igualdades, hallar valores, seguir patrones, utilizando diversas unidades de medida de diferentes instrumentos de medición.

Para el Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: (MEN, DOCUMENTO NO PUBLICADO)

Representar procesos de variación y cambio de cantidades en el marco de eventos-personales, profesionales, sociales, científicos- usando diferentes sistemas de representación.

- Razonar sobre el cambio, la variación, la covariación, lo indeterminado y los sistemas de relaciones en diversidad de situaciones.
- Comunicar ideas relacionadas con el cambio, la variación, la covariación, la generalización, por medio de diversas representaciones.
- Proponer, analizar y reconocer diversos procedimientos para producir representaciones de fenómenos de variación y cambio, para transformar dichas representaciones de acuerdo a las reglas propias de cada sistema de representación.

Para el Pensamiento Aleatorio y los sistemas de datos: (MEN, DOCUMENTO NO PUBLICADO)

Razonar en situaciones de incertidumbre, conectar con conceptos estadísticos, combinar ideas de probabilidad y azar para cuestionar, entender y ser capaz de explicar procesos estadísticos: predecir, inferir y tomar decisiones fundamentadas en el adecuado tratamiento de la información.

- ❖ Comunicar ideas y hallazgos usando la simbología y el lenguaje propio de la estadística y el azar, así como las diferentes formas de representación.

Considerar el conjunto de conceptos y objetos matemáticos que se encuentran agrupados en los cinco pensamientos matemáticos (MEN, 1998), permite realizar el posterior análisis de los datos y reconocer los conocimientos matemáticos que los niños manifiestan cuando proponen problemas matemáticos.

Algunos problemas propuestos por los estudiantes podrían reflejar dificultades en su conocimiento matemático, estas dificultades se evidencian en errores en el proceso de resolución de problemas.

Dificultades en el conocimiento matemático

De acuerdo con la literatura, cuando un estudiante no logra expresar la respuesta ‘correcta’ para un problema matemático, se exhiben ‘errores’, los cuales representan respuestas no acertadas o equivocadas en el proceso de resolución. Estos errores, permiten identificar dificultades en el conocimiento matemático de los niños que evidencian un aprendizaje inadecuado de las matemáticas.

Los ‘errores matemáticos’ (Osorio y Ayala, 2013), ponen en manifiesto las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven un problema matemático (Noda, 2001). Estas dificultades, pueden ser causadas por errores conceptuales, poca comprensión, falta de conocimiento matemático, limitaciones en el uso de estrategias de resolución, entre otros aspectos, poco favorables para el aprendizaje de las matemáticas.

Para Socas (2011) las dificultades de aprendizaje de las matemáticas se originan de un esquema cognitivo inadecuado que se manifiesta en forma de ‘errores de comprensión’. Estas dificultades pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías, asociadas con:

1) La complejidad de los objetos de las Matemáticas
2) Los procesos de pensamiento matemático
3) Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas
4) Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos
5) Las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas (Socas, 1997).

De estas cinco categorías de dificultades en los conocimientos de los estudiantes, no se prestará atención a las categorías tercera y quinta, puesto que, si bien podrían aportar información al problema de investigación, su inclusión requeriría una ampliación metodológica y temporal que no se pudo asumir en esta investigación.

Para Schlöglmann (2007) los 'errores matemáticos' son 'resbalones' que emergen en los procesos de resolución de problemas de los estudiantes. Estos surgen cuando hay problemas cognitivos, falta de atención, dificultades en la memoria de trabajo, conceptos erróneos, condiciones del contexto, presión por el tiempo disponible, el miedo, la velocidad de solución, emociones negativas, entre otros. Estos pueden convertirse en obstáculos para el aprendizaje y por tanto aumenta la posibilidad de fracaso y bajo rendimiento en situaciones de prueba.

Los problemas matemáticos inventados por los estudiantes, también aportan información sobre el estado del conocimiento matemático. Los enunciados de estos problemas ofrecen información sobre el nivel de apropiación del saber matemático por los estudiantes. Sin embargo, los enunciados y las respuestas 'erróneas' no corresponden a una ausencia de conocimiento, sino a una 'manera de conocer' que evidencia dificultades en el aprendizaje (Parra y Saiz, 1998). Godino, Rivas, Castro y Konic (2008) refieren a conflictos de significado entre el conocimiento institucional, considerado correcto, y el conocimiento personal del estudiante, aparentemente erróneo, que entra en conflicto con el conocimiento matemático establecido.

En los problemas matemáticos, las dificultades de aprendizaje se presentan cuando los niños son incapaces de inventar problemas matemáticos en sus diferentes formas de representación (Fernández y Molina, 2016) y cuando se les dificulta dar respuestas acertadas en el proceso de resolución. Estas dificultades pueden tener origen en la falta de apropiación de los conceptos matemáticos por los estudiantes, a las metodologías de enseñanza y la concepción matemática tradicional con que los niños aprenden (Andrade, 2011). Así, la dificultad de los alumnos en la invención y solución de problemas se atribuye generalmente a carencias en estrategias y en habilidades de resolución, pero también a la ausencia de conocimientos necesarios para abordar este proceso (del Valle Coronel y Curotto, 2008).

En este trabajo se asumen las 'dificultades' como la elaboración de sentidos y significados equivocados de los elementos matemáticos de un problema, debido al aprendizaje inadecuado de conceptos, procedimientos y propiedades matemáticas. Las dificultades en el conocimiento matemático se manifiestan de manera implícita en los 'errores matemáticos' de los estudiantes cuando resuelven problemas.

Se conciben como 'errores matemáticos' las respuestas no acertadas de los niños en la solución –respuesta- de un problema. La solución de los estudiantes se compara con una respuesta esperada. Los errores matemáticos permiten identificar dificultades en el conocimiento matemático de los niños cuando proponen y resuelven problemas.

Dificultades Aritméticas Matemáticas (DAM) en problemas matemáticos verbales.

Según Jimeno (2006) las DAM se clasifican según cuatro aspectos:

- Déficit en la memoria: causa dificultades en la conceptualización de las operaciones matemáticas, la representación y la recuperación automática de los hechos numéricos, algoritmos, fórmulas matemáticas y procedimientos para la resolución de problemas matemáticos verbales.
- Desordenes en el lenguaje y la comunicación: dificultades en la lectura, escritura de números o en la discusión sobre situaciones matemáticas.
- Deficiencias en procesos y estrategias específicas en la resolución de problemas matemáticos verbales: interfieren en la comprensión conceptual de la situación que presenta el enunciado y en el uso de habilidades matemáticas para trasladar una situación cotidiana a una situación matemática.
- Falta de motivación por el conocimiento matemático.

Según Geary (1994) citado en Jimeno (2006) existen componentes básicos que intervienen en las DAM:

- Proceso de recuento: son conocimientos, estrategias y procedimientos que ayudan en el almacenamiento y recuperación de hechos aditivos y de las primeras destrezas aritméticas (secuencias numéricas, colección de objetos, relación cantidades - número, orden en el conteo, cardinalidad, adiciones sucesivas, redondeo).

- Hechos aritméticos básicos: son conocimientos procedimentales y conceptuales sobre hechos numéricos y reglas que deben ser memorizados (las tablas, propiedades de las operaciones, teoremas, fórmulas matemáticas).
- Cálculo escrito: al realizar algoritmos con alguna de las cuatro operaciones básicas.

Dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales.

Las principales dificultades manifestadas por estudiantes con Dificultades Aritméticas Matemáticas (DAM) en la resolución de problemas aritméticos verbales, se evidencian en la representación y la comprensión del problema. Las dificultades de representación surgen en procesos implicados con la escritura del enunciado de un problema y de las estrategias de solución, o en los procedimientos de cálculo (Jimeno,2006).

Las dificultades en la comprensión del problema, surgen por la complejidad del texto del enunciado. Estas influyen en el procesamiento de la información, en la forma de comprender las relaciones conceptuales entre las cantidades y en la elección de la operación matemática adecuada en la solución. Entre las dificultades de comprensión se encuentran: asociaciones de 'palabras claves' con operaciones, sin tener en cuenta el problema globalmente; términos verbales en el enunciado (menos, más que, en total, algunos, etc.) que generan confusiones, y la interpretación errónea de conceptos matemáticos (Jimeno,2006).

Clases de errores.

Errores en el cálculo escrito.

De acuerdo con la teoría cognitiva (Jimeno, 2006) estos son los casos más comunes de errores en el cálculo escrito:

Errores de símbolos: *(numéricos u operacionales):* sustitución de números en la operación o en la solución con respuestas correctas o incorrectas; omisión u olvido del uso de un numero en el cálculo; no reconocer los símbolos operacionales y hacer sustitución o rotación de ellos en procedimientos adecuados.

Errores en los hechos aritméticos: recuerdo incorrecto de un hecho numérico (tablas) o de un procedimiento de recuento; uso del cero o de la identidad (efectuar cálculos incorrectos con el cero).

Errores al llevarse en la suma: olvidar llevar las decenas resultantes de la suma parcial a la columna siguiente; ubicar los resultados de la suma sin tener en cuenta el valor de cada cifra por su posición; colocar el número que se lleva en la columna incorrecta; llevar el digito de menor valor de posición, no el mayor; llevar las unidades; confusión al llevarse si existe un cero en la suma.

Errores en la resta: inversión de la sustracción (cuando el digito del minuendo es menor que el digito del sustraendo y se resta del mayor del menor); olvidarse de prestar al vecino; disminuir una unidad en un digito del minuendo más a la izquierda de la que corresponde; olvidar disminuir en una unidad el digito del minuendo cuando este es un cero; olvidar disminuir en una unidad el digito del minuendo que presto al vecino.

Errores en la multiplicación: escribir los productos intermedios (decenas) en la solución en vez de añadirlas o llevarlas al siguiente producto intermedio; añadir incorrectamente lo que se lleva de los productos intermedios; no colocar correctamente los productos intermedios en multiplicaciones de varias cifras en el multiplicador.

Errores en la división: dividir cada digito o grupo de dígitos del dividendo entre el divisor, sin tener en cuenta los restos que se obtienen o están acumulados del proceso anterior; cuando el dividendo es menor que el divisor, es un error muy común bajar un segundo digito para dividir sin poner el cero en el cociente.

Errores algorítmicos: algoritmos incompletos; alineación o disposición espacial incorrecta de los números en una operación; secuencias incorrectas, efectuar procedimientos de izquierda a derecha; sustitución de una operación por otra aunque se dispongan los términos correctamente, sustituciones parciales de diferentes operaciones en un mismo cálculo; mezclar pasos de diversos procedimientos (ej. Sumar o restar un digito con cada cifra de otro número); hacer procedimientos idiosincráticos, procedimientos inconsistentes o inapropiados, manifestando fallos al acceder a estrategias de solución (ej. sumar todos los números de la operación).

Errores de aprendizaje en matemáticas

Salgado y Terán (2008) clasifican los errores en el aprendizaje matemático (EAM), los cuales están estrechamente relacionados con la clasificación de dificultades en las DAM realizada por Jimeno (2006):

Errores de cálculo matemático: los estudiantes parecen estar adivinando las repuestas al resolver operaciones matemáticas, que evidencian dificultades en el conocimiento matemático.

Errores en el lenguaje del cómputo matemático: los estudiantes presentan dificultades de aprendizaje cuando confunden los conceptos del lenguaje matemático.

Errores en la resolución de problemas: Entre estos se pueden citar los siguientes:

- Dificultades de lectura: los estudiantes se equivocan dado que no comprenden el enunciado, tiene poco conocimiento del lenguaje utilizado y del contexto del problema.
- Dificultades de razonamiento lógico: los estudiantes no comprenden el problema, carecen de destrezas para el razonamiento abstracto para resolverlo adecuadamente.
- Dificultades de organización de la información: a algunos estudiantes les cuesta organizar las ideas del enunciado y proponer una solución con ubicación espacio- temporal adecuada de los datos y de los sucesos, por lo que no logran respuestas correctas.
- Dificultades para construir significados de conceptos matemáticos: las medidas, las distancias, los tiempos, las superficies etc.

Errores en la resolución de problemas.

Los errores en el proceso de solución de un problema, pueden darse por dificultades en la comprensión de conceptos, deberse a una confusión en los procedimientos mecánicos del cálculo, a aspectos espaciales del cálculo escrito y, a problemas con la memoria de trabajo. También pueden provenir de dificultades con los símbolos (numéricos u operacionales), en recordar los hechos numéricos y en procedimientos incompletos que afecten todo el proceso algorítmico (Jimeno, 2006).

En este capítulo, se han definido conceptos claves para la presente investigación: la noción de problema, los tipos de problemas, el conocimiento matemático y las dificultades asociadas y los procesos de invención y resolución de problemas. Estos conceptos fueron definidos asumiendo posturas de diferentes autores y la definición particular que se asume en este informe de tesis.

En el capítulo siguiente, se exponen las consideraciones metodológicas que se asumieron en esta investigación. Se describe el enfoque, el paradigma, el método, la estrategia metodológica y los instrumentos empleados para recoger la información.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

La invención de problemas es una estrategia de aprendizaje, que posibilita verificar los conocimientos y las habilidades matemáticas de los niños (Fernández y Molina, 2016). Es una forma de apreciar la actividad cognitiva de los estudiantes y de reconocer los procedimientos que surgen en el proceso de resolución de problemas (Ayllón, Castro y Molina, 2010). Por lo tanto, la invención de problemas se constituye como una estrategia metodológica adecuada para la recolección de la información.

El modo de comprender 'la invención de problemas', en este trabajo, sugiere un diseño cualitativo que se caracteriza por la descripción y producción de datos tales como palabras dichas o escritas, conservando su naturaleza textual, es decir, sin acudir a técnicas estadísticas (Rodríguez, Gil y García, 1996). El contexto de la investigación es naturalista (Flores,1990; Munarriz,1992) dado que se desarrolla en el contexto real del aula de clase, que es el lugar de interacción para acceder a las dificultades y a los conocimientos matemáticos manifestados por niños cuando proponen y resuelven problemas matemáticos.

Esta investigación informará sobre dificultades y conocimientos matemáticos manifestados por niños de quinto grado cuando proponen y resuelven problemas matemáticos. No hay un interés por evaluar ni la validez matemática ni la formalización propuesta por los estudiantes en los enunciados y en las soluciones de los problemas. Interesa estudiar 'la estructura', tanto de los enunciados de los problemas como de las soluciones que los estudiantes proponen.

Interesa interpretar un fenómeno educativo definido por los modos como los niños plantean y resuelven problemas matemáticos, teniendo en cuenta la coherencia, la operatoria y los significados que los niños atribuyen a los objetos matemáticos presentes en estos procesos.

Los significados son elaboraciones mentales generadas por las negociaciones que hace un grupo cuando establece acuerdo sobre ciertas convenciones en la interpretación de signos y conductas (Godino y Llinares, 2000). Las comprensiones individuales de los niños sobre los objetos matemáticos, contribuyen a la generación de significados cuando proponen y resuelven problemas. Sin embargo, los significados que los niños confieren a los conceptos, términos, símbolos, signos, números y proposiciones, surgen como consecuencia de su interacción social a través de las actividades de aula (Godino, 2003) y depende de la interpretación de situaciones de la vida cotidiana descritas en problemas matemáticos.

Los significados de los objetos matemáticos hacen parte del conocimiento matemático de los niños y puede manifestarse de múltiples formas –correcta o errónea- en su actividad matemática. Con base en los supuestos de la metodología cualitativa, es posible observar la actividad matemática del niño en su ambiente escolar y entrevistar a los estudiantes, para recopilar información sobre las dificultades asociadas con la comprensión de los problemas, la estructura de los enunciados, la interpretación que dan a los objetos matemáticos y los vacíos conceptuales presentes en el proceso de solución.

En el paradigma interpretativo, las matemáticas se asumen como una realidad simbólicamente estructurada y se propone acceder a ella a través de la observación, no refiere a ofrecer datos estadísticos, para lograr una descripción de los hechos. Para facilitar la comprensión de los hechos observados, es necesaria la experiencia comunicativa (Vasilachis,1992), ya que contribuye a ampliar el horizonte interpretativo del investigador, logrando objetividad en sus hallazgos.

Esta investigación se soporta en el paradigma interpretativo (Vasilachis,1992) porque favorece la indagación de las posturas subjetivas en los actores de la investigación y la comprensión de los fenómenos asociados con dificultades y conocimientos matemáticos manifestados por niños de quinto grado cuando proponen y resuelven problemas matemáticos. Además, es posible comprender y atribuir significado al conjunto de situaciones –causas- que afectan el desempeño académico de los estudiantes en el área de matemáticas de quinto grado.

En la siguiente sección, se describe la población participante para el desarrollo de la investigación.

Población

El presente trabajo se desarrolla en la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo del municipio de Puerto Berrio, Antioquia, Colombia. La Institución es de carácter oficial, de naturaleza mixta y ofrece educación básica y educación media. Hay 135 estudiantes matriculados en el grado quinto en tres grupos (A, B, C) de los cuales se elegirán los participantes para desarrollar la investigación. No se presta atención al género en esta indagación.

La escogencia de la población, se realizó de forma incidental (León y Montero, 2003; Navarrete, 2000). Los criterios de selección, se basan en las posibilidades que ofrecen las directivas de la institución para el desarrollo del trabajo de campo, debido a las dificultades de tiempo y espacio para el desarrollo del proyecto. También se tuvo en cuenta la motivación e interés de los estudiantes por participar del proceso investigativo y del consentimiento concedido por los padres de familia para la realización de entrevistas y de trabajo extra-clase.

La toma de datos se realizó en la jornada escolar regular en los horarios de clase de matemáticas. Se informó el cronograma de encuentros, las actividades de los estudiantes y el horario de las entrevistas a acudientes, profesores y directivos.

Para el desarrollo de las tareas, se tuvo en cuenta los resultados arrojados por la prueba piloto realizada con antelación, la cual contribuyó en la toma de decisiones para el desarrollo metodológico de la investigación. Los resultados arrojados por la prueba piloto y sus consideraciones en el proceso investigativo, se describen más adelante en la sección: planificación de las acciones, en este capítulo.

Los estudiantes realizaron tres tareas relacionadas con la invención y solución de problemas. Para el desarrollo de las tareas, se necesitó adecuar el aula de clase y hacer uso del espacio para organizar a los estudiantes en grupos de trabajo. Debido a que el proceso de inventar y resolver problemas requirió del diálogo constante entre estudiantes, se utilizó cámara filmadora y grabadora periodística para registrar la actividad matemática de los niños y los roles que desempeñaban durante el desarrollo de la tarea.

En la realización de las entrevistas, se utilizó la cámara periodística para registrar los aportes individuales de los estudiantes y los aportes colectivos. Estos encuentros se realizaron en horarios extra clase en sesiones de 1 hora, en un salón con buena ventilación y poco ruido, aislados de otros eventos que pudieran dispersar la concentración de los niños.

Se pidió a los niños inventar problemas en grupos de a tres integrantes, ya que esta estrategia favorece el diálogo fluido y espontáneo entre los niños, quienes podían ofrecer aportes apoyando o refutando ideas de sus compañeros. En el proceso de solución de los problemas, los niños construyen respuestas colectivas, pero con justificaciones individuales, cuyos aportes sobre conceptos, procesos y procedimientos generan discusión y consenso entre los argumentos. Esta estrategia posibilita reconocer los conocimientos y las dificultades que los niños presentan cuando proponen y resuelven problemas en un ambiente participativo y colaborativo. Se aclara que, aunque las tareas se desarrollaron de manera conjunta, interesa comprender los conocimientos y dificultades manifestados por cada estudiante, es por ello que se registraron los aportes individuales.

Luego de realizar las tareas y las entrevistas, se tomó registro por medio de la transcripción verbatim. Esta estrategia consiste en escuchar una y otra vez las grabaciones para lograr un registro fiel sobre los comentarios surgidos en las actividades (Deslauriers, 2004). Si alguna expresión de los estudiantes no queda clara al escuchar las grabaciones, se recurre a revisar el video para contextualizar los hallazgos y despejar dudas en la veracidad de la información.

El anterior proceso de recolección de información, requirió de la organización y planificación de tres momentos: Escenario 1, Escenario 2 y las entrevistas semiestructuradas.

Planificación de las acciones

Escenarios para la investigación

Para responder a la pregunta de investigación, se consideran dos escenarios posibles. En el primero, se propone a los niños tanto inventar problemas matemáticos, como resolver ellos mismos sus problemas. En el segundo, se proporcionan a los niños problemas matemáticos previamente seleccionados por la investigadora. Para conocer la vialidad y pertinencia de ambos Escenarios, se realizó una prueba piloto.

Prueba piloto

En la prueba piloto, los estudiantes resolvieron 10 problemas matemáticos distribuidos en tres componentes: numérico - variacional, geométrico - métrico y aleatorio. Estos problemas fueron previamente clasificados por tipos de problema y categorizados según el tipo de enunciado verbal. Además, los estudiantes debieron inventar dos problemas matemáticos.

Los resultados de esta prueba, indican que los estudiantes prefieren utilizar números naturales y fraccionarios en la redacción de sus problemas. La mayoría de los problemas no están estructurados: quedaron incompletos (faltan datos en el enunciado o no se redactó la pregunta), tienen datos extras o no tienen en cuenta datos en su solución. Pocos de los problemas matemáticos propuestos están estructurados (tienen un enunciado, datos y pregunta) y planteados de forma verbal (en forma de oraciones), son muy similares, están referidos al pensamiento numérico y utilizan cantidades de una a cuatro cifras.

En las respuestas de problemas, los estudiantes proponen soluciones matemáticas y pictóricas, con procesos aditivos y multiplicativos en su mayoría. Otras respuestas son verbales, lo que parece indicar no conocer el procedimiento de solución del problema. en esta prueba, fueron relevantes los problemas sin ningún tipo de respuesta.

Escenario 1: invención y solución de problemas

En el primer Escenario, se pide a los estudiantes que propongan tareas matemáticas, en un ambiente de concurso donde grupos de estudiantes proponen problemas matemáticos para ser resueltos por sus compañeros. Cada grupo debe proponer tanto los enunciados de los problemas como las soluciones de los mismos.

Se propone un concurso llamado 'lluvia de problemas', los niños de grado 5° inventan problemas matemáticos, basados en sus conocimientos y cotidianidad. La escogencia del tema será de libre elección por los estudiantes, pero deben estar relacionados con la imagen propuesta en fotos de diferentes situaciones cotidianas y que puedan representarse mediante problemas matemáticos[9]. Este recurso fue necesario incluirlo, para evitar obtener problemas con enunciados similares, orientados hacia un mismo tema. Las fotos fueron escogidas teniendo en cuenta criterios de selección: representan situaciones cotidianas, relacionan los cinco pensamientos y sus sistemas, ofrecen información suficiente para generar creatividad en los estudiantes, motivan la invención de problemas en diferentes contextos y sus datos facilitan la creación de enunciados estructurados.

[9] Los problemas inventados por los estudiantes se consideran de escogencia libre, en tanto que, eligen una imagen que ofrezca ideas creativas para proponer un problema, el cual corresponde a las experiencias cotidianas del estudiante o situaciones propias del contexto. El enunciado, no está condicionado en su extensión, cantidad de datos, a un pensamiento matemático o a un proceso de resolución específico.

De la 'lluvia de problemas' se escogieron los problemas que tienen enunciados con redacción comprensible, completos (enunciado, pregunta y solución correcta), estructurados y no estructurados. Estos enunciados fueron objeto de investigación y de ellos se estudiaron asuntos tales como: pensamientos matemáticos -numérico, variacional, geométrico, métrico, aleatorio-, tipos de conjuntos numéricos -naturales, enteros, racionales-, tipos de operaciones -suma, resta, multiplicación, división-, tamaño de los números, relaciones entre datos y pregunta, tipos de problemas, etc.

Escenario 2: solución de problemas propuestos.

Para el Escenario 2, se hizo una selección de problemas tomados de libros de texto, de las Pruebas Saber 5°, de las pruebas PISA y algunos propuestos por docentes del área, conforme con su experiencia. Esta selección se entregó a los niños y se les pidió: reconocer los más difíciles y los más fáciles y decir las razones o los aspectos que generaron dificultades para resolverlo.

Al igual que los problemas del Escenario 1, las soluciones de los problemas del Escenario 2 son fuente de información, para identificar conocimientos y dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos.

Selección de los problemas del Escenario 2.

Los problemas del Escenario 2 fueron seleccionados de libros de texto, de las Pruebas Saber 5°, de las pruebas PISA y algunos propuestos por docentes de matemáticas. Para su elección, estos debían contener algunos aspectos del Modelo Basado en Evidencias (MBE) propuesto por el MEN para la construcción de las Pruebas Saber: componentes, afirmaciones y preguntas –problemas-. Los problemas elegidos, deben pertenecer a uno de los componentes y tener enunciados que pertenezcan a la competencia "planteamiento y resolución de problemas", de manera que fuera posible encontrar los tipos de problema al cual pertenecen en la clasificación de problemas generales y en los problemas específicos.

Los problemas del Escenario 2 También adoptan la propuesta de los lineamientos curriculares (1998) respecto a los conocimientos, procesos y contextos de problemas, enmarcados en situaciones cotidianas de los estudiantes. En los problemas, se alinean procesos -pensamientos y competencias- derivados de la estrategia Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), los Estándares Básicos de Competencias matemáticas (EBC) y los Lineamientos Curriculares, los cuales sirvieron como referentes para los criterios de selección de los problemas, independientemente de las condiciones sociales, económicas y culturales de los estudiantes (Bravo y Benjumea, 2016).

En el Modelo Basado en Evidencias (Bravo y Benjumea, 2016), se refiere a los componentes como una reorganización de los cinco pensamientos matemáticos descritos en los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias matemáticas y los DBA: numérico - variacional, geométrico - métrico, y aleatorio (MEN,1998). La Tabla 1, presenta la estructuración de los cinco pensamientos en componentes.

Tabla 1. Agrupación de los cinco pensamientos por componentes.

COMPONENTES	
Numérico-variacional	Están los aspectos asociados a los números y la numeración, sus significado y estructura, operaciones, propiedades, relaciones, regularidades, patrones, variables, fenómenos de cambio y dependencia, conceptos y procedimientos de variación, proporcionalidad y funciones.
Geométrico-métrico	En él se realiza la construcción y manipulación de representaciones de objetos del espacio, sus relaciones y trasformaciones. Análisis de figuras y formas en el plano y espacio, patrones, razonamiento geométrico, solución de problemas de medición, estimación de magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, masa, peso, etc.) selección de unidades de medida, instrumentos, conceptos de perímetro, área y volumen.
Aleatorio	Están aspectos relacionados con la representación, lectura e interpretación de datos en contexto, análisis cualitativo de regularidades, tendencias, formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y dispersión, descripción de eventos aleatorios –tablas-

En el Modelo Basado en Evidencias (Bravo y Benjumea, 2016), las competencias matemáticas se agrupan en tres: a) razonamiento, argumentación y comunicación; b) representación y modelación; c) planteamiento y resolución de problemas (Bravo y Benjumea, 2016). El planeamiento y resolución de problemas, se refiere a la capacidad de formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, justificar los métodos y procedimientos de solución, el uso de un cálculo, verificar e interpretar resultados y generalizar soluciones (MEN, 1998). Esta investigación informa de problemas pertenecientes a la competencia planeamiento y resolución de problemas ya que está directamente relacionada con el objeto de investigación.

La Tabla 2, muestra la estructuración de los problemas por componentes, en la competencia planteamiento y resolución de problemas, según criterios propios de la investigadora.

Tabla 2. Distribución de problemas por componentes.

COMPETENCIA	COMPONENTE		
PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	NUMÉRICO-VARIACIONAL	GEOMÉTRICO-MÉTRICO	ALEATORIO
El estudiante tiene la capacidad de inventar problemas matemáticos y de plantear su solución matemática utilizando sus conocimientos matemáticos.	El estudiante formula y resuelve problemas que requieran procesos aditivos y multiplicativos con repartos, cálculo, productos, proporcionalidad, comparaciones, combinaciones entre cantidades.	El estudiante formula y resuelve problemas que requieran procesos aditivos y multiplicativos sobre medición de longitudes, volumen y área, relación entre propiedades de figuras y sólidos, secuencias geométricas.	El estudiante formula y resuelve problemas mediante procesos aditivos y multiplicativos que requieran representación gráfica de la información, análisis de tablas y gráficos, probabilidad de ocurrencia de eventos.

Las afirmaciones propuestas por el MEN en el Modelo Basado en Evidencias, resultan de la transformación de fundamentos teóricos en enunciados globales de los conocimientos, capacidades y habilidades del estudiante para dar respuesta adecuada al problema (Bravo y Benjumea, 2016). Estas afirmaciones servirán para clasificar por componentes y competencias los problemas inventados por los estudiantes y propuestos por la investigadora, en cada uno de los escenarios. La Tabla 3, muestra las afirmaciones que corresponden a cada componente, en la competencia planteamiento y resolución de problemas.

Tabla 3. Afirmaciones de la competencia planteamiento y resolución de problemas por cada componente.

COMPONENTE	AFIRMACIONES
NUMÉRICO-VARIACIONAL	-Resuelve y formula problemas aditivos e transformación, comparación, combinación e igualación. -Resuelve y formula problemas multiplicativos de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano. -Resuelve y formula problemas de proporcionalidad directa e inversa. -Resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
GEOMÉTRICO-MÉTRICO	-Utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. -Reconoce el uso de magnitudes y de las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas. -Utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición. -Usa y construye modelos geométricos para solucionar problemas.

ALEATORIO	-Resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones. -Resuelve problemas que requieren encontrar y dar significado al promedio de un conjunto de datos. -Resuelve situaciones que requieren calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos.

Clasificación de los problemas en ambos Escenarios

Los problemas planteados en el Escenario 1, están clasificados y categorizados de acuerdo con la siguiente estructura:

- Por dimensiones: componentes y competencias.
- Problemas estructurados y no estructurados
- Por la forma del enunciado verbal: problemas aditivos y problemas multiplicativos.
- Clasificación general: definidos, no definidos, abiertos, cerrados.

Los problemas planteados en el Escenario 2, están clasificados y categorizados de acuerdo con la siguiente estructura:

- Por dimensiones: componentes y competencias.
- Según la fuente: Pruebas saber, Pruebas PISA, problemas de libro de texto, de completar y problemas propuestos por maestros, problemas clásicos.
- Por la forma del enunciado verbal: problemas aditivos y problemas multiplicativos.
- Clasificación general: definidos, no definidos, abiertos, cerrados.

Cada problema, fue resuelto previamente por la investigadora y de acuerdo con su forma de solución, se clasificaron según los tipos de problemas descritos en el marco conceptual.

La Tabla 4, muestra las descripciones a las formas de solución que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas matematicos, para los Escenarios 1 y 2.

Tabla 4. Caracterización de soluciones de los estudiantes a los problemas de enunciado verbal.

CÓDIGO	SOLUCIÓN	DESCRIPCIÓN
1	CORRECTA	Son procesos de solución que demuestran conocimientos matemáticos acordes con la competencia y el componente indicado, según las afirmaciones elaboradas por el MEN y los criterios propios de la investigadora.
2	PARCIALMENTE CORRECTA	Son procesos de solución que demuestran conocimentos matemáticos acordes con la competencia y el componente indicado, según las afirmaciones elaboradas por el MEN y los criterios propios de la investigadora, pero con argumentos, razonamientos o procedimientos incompletos en la solución de un problema y son diferentes a los esperados.
3	NOVEDOSAS	Son procesos de solución que demuestran conocimentos matematicos creativos, pero que no estan acordes con la competencia o el componente indicado, o los criterios propios de la investigadora.
4	INCORRECTA	Son procesos de solución que evidencian dificultades o conflictos en el conocimiento matemático, dado que no correponden con las afirmaciones elaboradas por el MEN para el componente indicado y con los criterios propios de la investgadora.
5	NO SOLUCIONES	El estudiante no realiza un procedimiento matematico estandar para hallar la solución, o escribe una respuesta verbal que no responde la pregunta del problema.

La entrevista semiestructurada

La entrevista semi-estructurada, se caracteriza por recoger información a partir de las preguntas planteadas en el análisis de los datos, de las notas de campo, documentos, etc. (Munarriz, 1992). En esta investigación se utiliza la entrevista semiestructurada como un recurso para recoger información relativa a los objetivos. Como describe Tuckman (citado por Cohen y Manion, 2000) hace posible medir lo que sabe una persona, lo que le gusta o disgusta, sus valores y preferencias, permitiendo a partir de ese conocimiento, sugerir hipótesis e identificar variables y relaciones.

El proceso de entrevista se puede realizar de dos formas, individual y grupal (Iñiguez, 2008). En esta investigación, se tendrá en cuenta la entrevista grupal, porque se realiza en un contexto de discusión, donde los estudiantes pueden expresarse con mayor fluidez y confianza al exponer sus ideas sobre un tema de interés común. Este tipo de entrevista genera un ambiente más cómodo para los estudiantes, por su dinámica de participación motivada por la proliferación de ideas que surgen durante el proceso de discusión de un tema.

La entrevista grupal requiere de un espacio físico que facilite la interacción verbal de los estudiantes, sin distractores, ni ruidos en el ambiente para hacer el registro de la información, dada la complejidad de la interacción múltiple (Iñiguez, 2008) por tal motivo, se destina lugares aislados del colegio para realizar los encuentros.

Para el desarrollo de la entrevista grupal, se decidió organizar los estudiantes es dos grupos, estudiantes que presentaron habilidades para inventar y resolver problemas y estudiantes que demostraron tener dificultades para inventar y resolver problemas. Esta decisión, favorece resumir la diversidad de información de los registros al establecer un dialogo enfocado en las soluciones de los problemas según características comunes. Estos grupos se organizarán en dos categorías, teniendo en cuenta los factores que intervienen en cada una de ellas:

Categoría 1*: Problemas inventados por estudiantes.*

- Problemas estructurados: estudiantes que presentaron habilidades para inventar y resolver problemas.
- Problemas no estructurados: estudiantes que presentaron dificultades para inventar y resolver problemas.
- Problemas no inventados y no solucionados por grupos.

Categoría 2: *Problemas propuestos a estudiantes*.

- Conocimientos y dificultades en problemas matemáticos

- Problemas fáciles y problemas difíciles

Las anteriores categorías surgen de los registros obtenidos en las tareas, del análisis realizado a los tipos de problemas inventados por los niños y de las formas de dar solución a problemas propuestos.

La realización de las entrevistas requiere de un consentimiento informado, que es el proceso en el cual el individuo decide si quiere participar de la investigación (Cohen, Manion y Morrison, 2000). De acuerdo con este requerimiento, la investigadora ha elaborado un listado de consideraciones que serán informadas a los niños y a sus padres o acudientes. En este trabajo se informa a los estudiantes que:

- Tienen libertad para tomar la decisión de participar en la investigación, esta decisión es tomada cada vez que participe en una sesión de entrevista.
- Asume la responsabilidad en la participación de la investigación, esta responsabilidad se manifiesta en la respuesta a las preguntas que surgen en la entrevista.
- Pueden parar la entrevista cuando se sientan cansados o incomodos.
- Es tratado con respeto, porque el investigador reconoce tanto su condición de persona, como que las respuestas del estudiante son importantes para la investigación.
- El rol del entrevistador, con relación al conocimiento del estudiante, es neutro para evitar sesgos en las posibles respuestas del estudiante y porque cada pregunta del investigador tiene la intención de reconocer la generalización del estudiante en vez hacerle reconocer un error o refutar su respuesta.
- Estará en el anonimato, porque el investigador utilizará un seudónimo cada vez que quiera referirse a un estudiante, con la finalidad de proteger su identidad.
- No se afectará negativamente sus calificaciones si decide no participar en las entrevistas.
- Las entrevistas pueden ser individuales o grupales. Entrevistar a los estudiantes de forma individual permite al investigador pueda indagar sobre los detalles particulares del proceso de solución propuesto por los niños. Las entrevistas grupales favorecen la participación de los estudiantes, exponer ideas y hacer comentarios, en un ambiente de dialogo y disertación.
- Sabe que los acudientes, los docentes y los directivos están enterados de las entrevistas y de cuando se realizan.

- El investigador tratará la información confidencialmente, ya que no será usada para fines diferentes a los de esta investigación.
- Se informará a los directivos, los docentes y padres de familia los posibles riesgos que se asumen cuando se entrevista a los niños. Estos posibles riesgos son: incomodidad para responder, sentirse cuestionado y evaluado.

  Terminada la investigación se rendirá un informe de los resultados ante directivos y profesores de la Institución Educativa.

Instrumentos para análisis de datos

Para analizar los enunciados verbales de los problemas inventados por los estudiantes (Escenario 1), se toma en consideración: a) La coherencia del enunciado y b) El tipo de problema. Se considera la coherencia del enunciado formada por elementos tales como: i) Una historia verosímil, ii) La utilización de datos numéricos, iii) El planteamiento de una pregunta y iv) La relación pregunta-datos. En cuanto al tipo de problema, se toma como elementos para su caracterización: I) El número de etapas necesarias para su resolución, II) La estructura operatoria subyacente en el mismo, III) Su estructura semántica y IV) Tipo de números utilizados en el enunciado. La Tabla 5, muestra el formato de las tablas utilizadas para el análisis de la información presente en los enunciados de los problemas planteados por los estudiantes.

Tabla 5. Registro de datos para analizar el enunciado de un problema.

Problema N°					
Transcripción del enunciado					
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si - No	Si - No	Si - No	Si - No	Si - No
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números

Los datos suministrados por los problemas, planteados por los niños, sirven como fuente de información, que son analizados por tablas adaptadas de Ayllón (2012).

Para el segundo Escenario, se propone utilizar las tablas de clasificación de problemas matemáticos. Las tablas están basadas en la literatura, se utilizan para analizar las características de las soluciones de los problemas propuestos a los estudiantes y para identificar las razones de los estudiantes para considerar cuales problemas son fáciles (Ayllón, 2012). La Tabla 6, muestra el formato de las tablas utilizadas para el análisis de la información presente en las soluciones de los problemas.

Tabla 6. Clasificación de soluciones de los estudiantes a problemas propuestos.

Enunciado del problema N°_		
Solución del problema	solución 1	Solución 2
Razones que hacen fácil el problema	Razón 1:	
	Razón 2:	

Una vez analizados los registros e identificados la información, se procede a organizar los grupos de estudiantes, cuyos enunciados y soluciones de los problemas se destaquen, ubicándose en las categorías anteriormente mencionadas. A tales estudiantes se convocó a entrevista. Las preguntas de la entrevista semiestructurada se diseñaron de acuerdo con los hallazgos preliminares en los escenarios. La Tabla 7, presenta el formato del proceso inicial de las entrevistas semiestructuradas.

Tabla 7. Protocolo preliminar de la entrevista.

Se comienza pidiendo el nombre al estudiante, recordando a los niños que la conversación es sobre las tareas realizadas en días pasados, donde propusieron problemas matemáticos y los resolvieron. No se trata esta reunión de una evaluación, no hay respuestas correctas ni incorrectas, y si lo deseas, puedes negarte a responder y si te sientes incómodo, puedes pedirme parar la entrevista. Si así lo haces, no obtendrás ninguna mala calificación.

¿Qué es para ustedes un problema matemático?

¿Qué debe tener un problema para que sea matemático? ¿Qué elementos, cosas, características debe tener un problema o enunciado para que sea matemático? ¿Pueden darme un ejemplo de un problema que no sea matemático?

¿Consideran que sus problemas son matemáticos?

¿Consideran que los problemas que inventaron están bien elaborados? ¿Por qué?

Denme un ejemplo que un problema que esté mal elaborado…

¿Cuáles fueron las dificultades que tuvieron para proponer y resolver sus problemas?

¿Cuál o cuáles problemas les pareció difícil de inventar y cual o cuales les fue fácil inventar? ¿Por qué?

¿Cuándo consideran que un problema es fácil, y cuando consideran que es difícil? Es decir, díganme como escribir un problema fácil y un problema difícil.

Algunos compañeros presentaron dificultades para inventar y resolver problemas, ¿Cuáles creen que fueron las causas de estas dificultades?, ¿Qué creen que les faltó tener en cuenta a los compañeros para inventar y resolver los problemas?

¿Qué les dirían a los compañeros que les cuesta mucho trabajo escribir problemas de matemáticas para que los puedan plantear y resolver?

Varios problemas inventados por los estudiantes están elaborados usando fracciones como datos, ¿creen que es más fácil inventar y resolver problemas de fracciones? ¿Por qué?

…(otras preguntas).

En el siguiente capítulo se analizan los problemas de los Escenarios 1 y 2, teniendo en cuenta la clasificación general y específica propuesta en el marco teórico. Además, se analizan los enunciados y las soluciones de los problemas inventados por los estudiantes y las soluciones de los problemas propuestos por la investigadora, considerando la estructura semántica y la operatoria de los mismos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Análisis a problemas generales y de enunciado verbal en Escenarios 1 y 2

En las Tablas 8, 9, 10, se clasifican los problemas del Escenario 1, en las Tablas 11, 12 y 13, se clasifican los problemas del Escenario 2. En cada tabla, se especifican y analizan las estructuras de los enunciados sus soluciones, para reconocer conocimientos y dificultades de los estudiantes cuando proponen y resuelven problemas matemáticos.

En las Tablas 8 y 11, se analizan las clasificaciones generales de problemas inventados por estudiantes y propuestos por la investigadora, que no atienden a los contenidos matemáticos, pero que están incluidos en la resolución de problemas. El análisis comprende una descripción detallada de los tipos de problemas a que corresponde cada planteamiento, según si tienen enunciado, datos, pregunta y solución.

En las Tablas 9 y 12, se analizan las clasificaciones específicas de los problemas aritméticos de enunciado verbal inventados por los estudiantes y en los propuestos por la investigadora. Estos pueden ser aditivos o multiplicativos según su estructura semántica y la operación que requieran para ser resueltos. El análisis comprende las orientaciones dispuestas en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM) y los Lineamientos Curriculares (Tabla 1); los criterios propios de la investigadora (Tabla 2) y las afirmaciones del modelo MBE (Tabla 3), los cuales sirvieron como referentes para los criterios de selección de los problemas (Bravo y Benjumea, 2016).

En las Tablas 10 y 13, se analizan las soluciones de los estudiantes por tipos de respuestas en ambos escenarios y la relación entre estas con los componentes a las que pertenecen. El análisis establece comparaciones entre las respuestas esperadas por la investigadora y las diferentes soluciones de los estudiantes. También tiene en cuenta la categorización de las respuestas presentada en la Tabla 4.

Escenario 1: invención y solución de problemas.

La Tabla 8, presenta información sobre la clasificación general de los problemas planteados por los estudiantes del grado quinto.

Tabla 8. Clasificación de problemas generales inventados por estudiantes de quinto grado.

PROBLEMAS		PROBLEMAS GENERALES									
		Definidos y no definidos		Abiertos y cerrados		De encontrar y de probar		Rutinarios y no rutinarios		Estructurados y no estructurados	
		D	NO D.	A	C	E	P	R	NO R.	E	NO E.
Problemas inventados por estudiantes	1	X			X	X		X		X	
	2	X			X	X		X		X	
	3	X			X	X		X		X	
	4	X			X	X		X		X	
	5	X			X	X		X		X	
	6		X	X		X			X		X
	7	X			X	X		X		X	
	8	X			X	X		X		X	
	9		X	X		X			X		X
	10		X	X					X		X
	11		X	X		X			X		X

12		X	X		X			X		X
13		X	X		X			X		X
14	X			X	X		X		X	
15	X			X	X		X		X	
16	X			X	X		X		X	
17	X			X	X		X		X	
18	X			X	X		X		X	
19	X			X	X		X		X	
20	X			X	X		X		X	
21		X	X		X			X		X
22		X	X		X			X		X
23	X			X	X		X		X	
24	X			X	X		X		X	
25	X			X	X		X		X	
26	X			X	X		X		X	
27		X	X		X			X		X
28	X			X	X		X		X	

29		X	X		X			X		X
30	X			X	X		X		X	
31	X			X	X		X		X	

NOTA: las abreviaturas presentes en la tabla 8 representan los nombres de los tipos de problemas generales. Estas son necesarias debido al poco espacio entre las columnas.

En la Tabla 8, se presentan problemas del Escenario 1, inventados por los estudiantes. De los 31 problemas inventados por los estudiantes, 21 son estructurados, definidos, cerrados y rutinarios, es decir, tienen un enunciado, con los datos completos, una pregunta y una única solución, la cual se puede encontrar mediante el desarrollo de operaciones aritméticas, con un proceso específico de resolución (Reitman, 1964; Silver, 1995; Noda, 2001). Son 'problemas de encontrar' (Polya, 1962), porque en el enunciado se presenta una situación, los datos y se requiere de resolver una pregunta.

Los otros diez problemas se consideran no estructurados, no definidos, abiertos y no rutinarios, porque no tiene una estructura determinada, dado que: no son precisos los datos, no tienen pregunta o presentan diversas soluciones posibles mediante diferentes procedimientos matemáticos (Reitman, 1964; Silver, 1995; Noda, 2001). También son problemas de encontrar, pero son los que les faltan datos o tienen datos que sobran (Noda, 2001).

En los problemas no estructurados, se distinguen los problemas incompletos, cuyos enunciados no tienen una pregunta definida. También están los problemas designados por los estudiantes como 'no matemáticos', porque la pregunta no indaga sobre objetos matemáticos (entrevista del 25 /04 /2017).

La Tabla 9, presenta información sobre la clasificación de problemas según el tipo de enunciado verbal planteados por los estudiantes del grado quinto.

Tabla 9. Clasificación de problemas aritméticos de enunciado verbal inventados por estudiantes de quinto grado.

PROBLEMAS	PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE ENUNCIADO VERBAL									
	Problemas aditivos				Problemas multiplicativos					
	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Isomorfismo de medidas	Producto de medida	Simétricos/ asimétricos		Partición/ cuotición	Adición repetida
							S	A	P	
1								X	X	
2	X							X		X
3	X									
4								X	X	
5		X								
6										
7	X									
8	X									
10										

Comp. Numérico-variacional	**11**								
	12								
	13								
	14						X	X	
	15	X							
	16				X	X	X		X
	17						X	X	X
	18	X							
	19							X	
	20	X							
	21								
	22								
	23			X					
	24		X						
	25						X	X	
	27								
	28	X							

	30		X			X	X
Comp. Geométrico métrico	**9**						
	31			X	X		
Comp. aleatorio	26	X					
	29						

NOTA 1: las abreviaturas presentes en la tabla 9, representan los nombres de los tipos de problemas de enunciado verbal simétricos, asimétricos y de partición. Estas son necesarias debido al poco espacio entre las columnas.

NOTA 2: Los problemas resaltados en negrita, no están estructurados o su solución no refiere a la competencia planteamiento y resolución de problemas, por tanto, no pueden ser clasificados como problemas aritméticos de enunciado verbal.

En la Tabla 9, se encuentran los problemas aritméticos de enunciado verbal inventados por los estudiantes. Están clasificados según la estructura semántica de los enunciados y la operatoria de las soluciones dadas por los niños (Castro, Rico, y Castro, 1995). De los 31 problemas inventados por los estudiantes, 27 pertenecen al componente numérico variacional, 2 son del componente geométrico métrico y 2 son del componente aleatorio. (Anexo 1: problemas inventados por estudiantes).

De estos problemas, 10 son 'no estructurados' o tienen soluciones que no corresponden a la competencia de planteamiento y resolución de problemas (Bravo y Benjumea, 2016, p.6). estos son: 6, 9,10,11,12,13,21,22,27 y 29. Se puede apreciar, que, de los 21 problemas 'estructurados', 11 fueron resueltos por métodos aditivos, 8 por métodos multiplicativos y 2 presentan métodos por ambos procesos.

De los problemas de estructura aditiva, 8 son de cambio, 2 de combinación, 1 de comparación y 1 de igualación. De los problemas multiplicativos, 2 pueden resolverse por isomorfismo de medidas o por adición repetida, 1 es de producto de medidas, 6 pueden resolverse por partición y 2 solamente por adición repetida. Es importante resaltar las habilidades matemáticas para inventar problemas aditivos de cambio y problemas multiplicativos de partición, pues son los tipos de problema más representativos de la clasificación.

La Tabla 10, relaciona las diferentes soluciones realizadas a los problemas inventados por los estudiantes. cada solución es categorizada según el tipo de respuesta.

Tabla 10. Categorización de soluciones de problemas inventados por estudiantes de quinto grado.

PROBLEMAS		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS					
		SOLUCIÓN DE PROBLEMAS					
		Solución de la investigadora		Solución 'grupo proponente'		Solución 'grupo solucionador'	
		Criterio	Categoría	Criterio	Categoría	Criterio	Categoría
Componente Numérico-variacional (C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4
	2	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	3	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	4	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4
	5	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4
	6	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	7	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	8	(C. N-V)	1	(C. G-M)	2	(C. N-V)	2
	10	NO SOLUCIÓN	5	NO SOLUCIÓN	5	NO SOLUCIÓN	5
	11	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	12	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	(C. N-V)	2
	13	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4

	14	(C. N-V)	1	(C. G-M)	4	(C. G-M)	4
	15	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	16	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5
	17	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	18	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	19	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	20	(C. N-V)	1	(C. G-M)	4	(C. N-V)	4
	21	NO SOLUCIÓN	5	R. VERBAL	4	NO SOLUCIÓN	5
	22	NO SOLUCIÓN	5	R. VERBAL	4	(C. N-V)	4
	23	(C. N-V)	1	R. VERBAL	2	(C. N-V)	2
	24	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	25	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5
	27	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4
	28	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	30	(C. N-V)	1	(C. N-V)	3	(C. N-V)	2
Componente Geométrico-métrico	**9**	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	31	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	NO SOLUCIÓN	5

(C. G-M)

Componente Aleatorio (C. A)	26	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	NO SOLUCIÓN	5
	29	NO SOLUCIÓN	5	(C. N-V)	4	NO SOLUCIÓN	5

Nota: R. VERBAL. = respuesta verbal

Para conocer las descripciones de las categorías 1, 2, 3, 4 y 5, leer (Tabla 4).

La Tabla 10, relaciona las respuestas de los diferentes participantes (investigadora, ‘equipo proponente’ y ‘equipo solucionador’) a los problemas del Escenario 1. Se requiere analizar las estrategias de solución planteadas por los estudiantes, en relación con la respuesta esperada por la investigadora. Los enunciados corresponden a un componente específico, pero estos pueden confrontarse con los componentes a los que pertenecen las soluciones. Cada proceso de resolución evidencia conocimientos matemáticos o dificultades en los procedimientos, conceptos y estrategias, que se caracterizan en: correctos (1), parcialmente correctos (2), novedosos (3), incorrectos (4) y no soluciones (5), según corresponda con las descripciones (Tabla 4).

De 31 problemas ‘estructurados’ y ‘no estructurados’ inventados por los estudiantes, 17 coinciden con respuestas del componente numérico - variacional, 3 presentan respuestas del componente geométrico - métrico, 7 no obtuvieron al menos una respuesta y 1 no tiene solución matemática. Solo en el problema 30, los estudiantes plantean una solución novedosa. Esta valoración se hizo de acuerdo con la categorización de la Tabla 4.

De 16 problemas con procesos de resolución esperados, 8 problemas presentaron coincidencias en las soluciones (correctas) de los tres sujetos participantes, y 8 presentaron respuestas correctas y parcialmente correctas, respecto a la solución esperada. 15 problemas presentaron dificultades para ser resueltos, con soluciones incorrectas y sin respuestas. Es significativo, el porcentaje de aciertos (51,6 %) y de errores (48,4%) obtenidos en las soluciones de los estudiantes. Con estos resultados, se podría afirmar que un gran porcentaje de los estudiantes del grado quinto C de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo, tienen dificultades para resolver problemas matemáticos. Interesa en esta investigación, comprender las causas de estas dificultades e identificar si están relacionadas con los conceptos matemáticos, con la elección de estrategias de solución o con los usos y significados que los estudiantes dan a elementos matemáticos de los enunciados.

Los problemas ‘no estructurados’, pueden tener diferentes soluciones posibles (Reitman, 1964), pero solo el problema N°10 no obtuvo solución alguna por los estudiantes. En los otros problemas, los estudiantes intentaron plantear una solución matemática o un argumento verbal para resolverlo.

Escenario 2: solución a problemas propuestos.

La Tabla 11, presenta información sobre la clasificación de los problemas generales propuestos por la investigadora a estudiantes de grado quinto.

Tabla 11. Clasificación de problemas generales propuestos a estudiantes de quinto grado

PROBLEMAS		PROBLEMAS GENERALES									
		Definidos y no definidos		Abiertos y cerrados		De encontrar y de probar		Rutinarios y no rutinarios		Estructurados y no estructurados	
		D	NO D.	A	C	E	P	R	NO R.	E	NO E.
Pruebas saber 5°	2	X			X	X		X		X	
	8	X			X	X		X		X	
	11	X			X	X		X		X	
	17	X			X	X		X		X	
Planteados por docentes	23	X			X	X		X		X	
	28	X			X	X		X		X	
Libros de texto	34	X			X	X		X		X	
	41	X			X	X		X		X	
	45	X			X	X		X		X	
	48	X			X	X		X		X	

Pruebas PISA	52	X	X	X	X	X
	54	X	X	X	X	X
	55	X	X	X	X	X
De completar	59	X	X	X	X	X
	62	X	X	X	X	X
Clásicos	65	X	X	X	X	X
	68	X	X	X	X	X
	70	X	X	X	X	X

NOTA: las abreviaturas presentes en la Tabla 11, representan los nombres de los tipos de problemas generales. Estas son necesarias debido al poco espacio entre las columnas.

En la Tabla 11, se presentan los problemas del Escenario 2, son planteados por la investigadora a los estudiantes. Las fuentes son varias: Pruebas Saber, pruebas PISA, libros de texto, y tomados de las propuestas maestros de matemáticas (Anexo 2: problemas propuestos a estudiantes).

Los problemas se estructuraron por componentes, en la competencia planteamiento y resolución de problemas, de acuerdo con lo dispuesto en los estándares básicos de competencias matemáticas (EBC) y los lineamientos curriculares (Tabla 1); los criterios propios de la investigadora (Tabla 2) y afirmaciones (Tabla 3), los cuales sirvieron como referentes para los criterios de selección (Bravo y Benjumea, 2016).

Los problemas de este escenario se consideran problemas estructurados, definidos, cerrados y rutinarios (Reitman, 1964; Silver, 1995; Noda, 2001) debido a que exhiben los elementos que debe tener un problema: enunciado, datos, una pregunta y un proceso de solución determinado que se obtiene mediante un proceso operativo (Ayllón, Castro y Molina, 2010; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013a; Romero, Martínez y Solórzano). Aunque los problemas del escenario 2 fueron seleccionados de diferentes fuentes (Pruebas Saber, Pruebas PISA, libros de texto y porpuestos por maestros) presentan la misma estructura, puesto que, las características de los enunciados corresponden a estas clasificaciones.

Las Tablas 12 y 13, exhiben información sobre problemas propuestos a estudiantes. La Tabla 12, presenta información sobre la clasificación de los problemas según su enunciado verbal, propuestos por la investigadora a estudiantes de grado quinto. La Tabla 13, relaciona las diferentes soluciones realizadas a los problemas propuestos por la investigadora. Cada solución es categorizada según el tipo de respuesta.

Tabla 12. Clasificación de problemas aritméticos de enunciado verbal, propuestos a estudiantes de quinto grado.

PROBLEMAS			PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS – PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE ENUNCIADO VERBAL									
			Problemas aditivos				Problemas multiplicativos					
			Cambio	Combinación	Comparación	Igualación	Isomorfismo de medidas	Producto de medida	Simétricos/ asimétricos		Partición/ cuotición	Adición repetida
									S	A	P	
Prueba Saber 5°	(C. N-V)	2	X				X			X		X
		8					X			X	X	
	(C. G-M)	11						X	X			
	(C. A.)	17		X								
Planteados por docente	(C. G-M)	23					X			X		X
	(C. G-M)	28					X			X		X
libros de texto	(C. G-M)	34				X	X			X		
	(C. G-M)	41						X	X			
	(C. A.)	45		X								
	(C. G-M)	48									X	X

Prueba PISA	(C. G-M)	52		X						
		54			X					
	(C. A.)	55		X						
De completar	(C. G-M)	59			X	X			X	
	(C. A.)	62				X			X	
Clásico	(C. G-M)	65			X					
	(C. G-M)	68					X	X		
	(C. A.)	70	X			X			X	X

Tabla 13. Categorización de soluciones de problemas propuestos a estudiantes de quinto grado.

PROBLEMAS		SOLUCIÓN DE PROBLEMAS											
		Solución esperada		Solución de la docente		Solución E. 1		Solución E. 2		Solución E. 3		Solución E. 4	
		Criterio	Cat.	Criterio	Cat.	Criterio	Cat.	Criterio	Cat.	Criterio	Cat.	Criterio	Cat.
Componente Numérico-variacional (C. N-V)	2	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	NO SOL.	5	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	NO SOL.	5
	8	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	(C. N-V)	2	NO SOL.	5	(C. N-V)	4
	23	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	34	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	(C. N-V)	2	(C. N-V)	3	NO SOL.	5
	48	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2
	59	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2	(C. N-V)	2
	65	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	(C. N-V)	5	(C. N-V)	4
	11	(C. G-M)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	(C. N-V)	4	R. VERB.	2
	28	(C. G-M)	1	(C. G-M)	2	(C. G-M)	4	NO SOL.	5	(C. G-M)	4	NO SOL.	5

Componente Geométrico-métrico (C. G-M)	41	(C. G-M)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	(C. N-V)	1	NO SOL.	5	NO SOL.	5
	52	(C. G-M)	1	(C. N-V)	2	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	NO SOL.	5	NO SOL.	5
	54	(C. G-M)	1	(C. N-V)	2	NO SOL.	5	(C. G-M)	1	NO SOL.	5	R. VERB.	2
	68	(C. G-M)	1	(C. G-M)	1	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	NO SOL.	5	NO SOL.	5
Componente Aleatorio (C. A)	17	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4
	45	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	NO SOL.	5	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	(C. N-V)	2
	55	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4	NO SOL.	5	NO SOL.	5
	62	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1	(C. N-V)	1
	70	(C. N-V)	1	(C. N-V)	2	NO SOL.	5	(C. N-V)	4	(C. N-V)	4	NO SOL.	5

Nota: Cat. = categoría, leer tabla 4.

En la Tabla 12, se puede observar que, de 70 problemas previamente caracterizados, 18 fueron asignados a los estudiantes del grado quinto C para ser resueltos. Para elegirlos se tuvo en cuenta al menos un problema por componente, para cada una de las fuentes consultadas: Pruebas Saber, pruebas PISA, libros de texto, y de maestros idóneos en el área de matemáticas. También se tuvo en cuenta para la selección, presentar dos problemas por categoría según la estructura operatoria: aditiva o multiplicativa. Algunos de estos problemas pueden ser resueltos por ambos métodos: aditivos o multiplicativos, la elección de la estrategia de solución es autonomía del estudiante.

En la Tabla 13, se relacionan 6 soluciones diferentes: la esperada (de la investigadora), de la docente y de cuatro estudiantes; a los problemas propuestos en el Escenario 2. Su estructura y análisis, presenta características similares a las soluciones de los problemas del escenario 1. En estos problemas, se analizan las estrategias de solución planteadas por los estudiantes en relación con la respuesta esperada por la investigadora y la docente del área de matemáticas. También, se ha determinado los componentes a los que pertenecen las soluciones. Las respuestas de los estudiantes, pueden evidenciar tanto conocimientos matemáticos como dificultades en los procedimientos y estrategias de solución, por tanto, se han clasificado por categorías (Tabla 4).

De 18 problemas propuestos, hay 7 problemas el componente numérico variacional, 6 problemas del componente geométrico- métrico y 5 del componente aleatorio. Solo 3 soluciones de los estudiantes presentan respuestas del componente geométrico- métrico, en las demás soluciones predominan procesos del componente numérico - variacional. Solo en el problema 34, los estudiantes plantean una solución novedosa.

Respecto a los procesos de resolución esperados, el problema 62 presentó coincidencias en todas las soluciones (correctas) de los sujetos participantes. Los problemas 48 y 59 presentaron respuestas correctas y parcialmente correctas, respecto a la solución esperada. Estos problemas corresponden al componente numérico- variacional. Quince problemas presentaron dificultades para ser resueltos, con soluciones incorrectas y sin respuestas.

El porcentaje de errores (83,3%) es superior al porcentaje de aciertos (16,7%) obtenidos en las soluciones de los estudiantes en este escenario. Además, se puede observar que la mayoría de los errores y ausencias de respuestas, se encuentran en los componentes geométrico- métrico y aleatorio. Con estos resultados, es posible suponer dificultades en los estudiantes para resolver problemas propuestos por docentes, en pruebas y en libros de texto, también en la elaboración de conceptos y procesos relacionados con estos componentes.

Análisis de problemas propuestos por estudiantes

A continuación, se analizan los enunciados y soluciones de los problemas matemáticos propuestos por los estudiantes. Primero, Se presentan los problemas con estructura aditiva, luego los problemas con estructura multiplicativa. Para el análisis, se tiene en cuenta varios aspectos: conocimientos matemáticos, dificultades para inventar o resolver problemas, coherencia, estructura semántica y operatoria de los enunciados. Estos problemas, fueron clasificados y categorizados previamente en tablas (Tablas 8 y 9) para reconocer los componentes y tipos de problemas a los que pertenecen.

Los problemas se analizan en tablas adaptadas de Ayllón (2012). En las tablas, se consideran los enunciados y las soluciones por separado. La solución 1 corresponde a la solución dada por el 'equipo proponente' del problema, las soluciones 2 y 3, corresponden a las repuestas de estudiantes solucionadores. La cantidad de soluciones presentadas, varía según las diferentes opciones de respuestas ofrecidas por los estudiantes.

Se aclara que, esta sección presenta una selección de los problemas inventados por los estudiantes para cada tipo de enunciado verbal, de manera que los resultados obtenidos evidencien el análisis realizado a los planteamientos y soluciones de problemas propuestos en cada una de las categorías.

Problemas matemáticos aditivos

La Tabla 14, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de cambio, planteado por los estudiantes.

Tabla 14. Problema aditivo de cambio.

Problema N° 2

Transcripción del enunciado	Laura compro 2 cajas de regalo para sus hijas y 1 para su sobrino. Si las dos valieron 40.000 y una valió 20.000 ¿Cuánto fue por todo?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Cambio	1	Aditiva	Relaciones entre cantidades y precios, pero no con tamaños de las cajas. Ausencia de símbolo ($)		cinco cifras, naturales

El problema N°2 de la Tabla 14, se ubica en 'pensamiento numérico y los sistemas numéricos', por la forma como los estudiantes utilizan aspectos asociados a los números y a las operaciones para comunicar sus ideas (MEN,1998). El problema tiene estructura aditiva (Castro, Rico, y Castro, 1995) de una etapa y se clasifica como problema de cambio, ya que plantea una transformación entre las cantidades, al operar aditivamente dos cantidades del mismo tipo (Nesher, 1982).

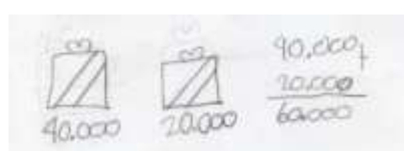
El problema se considera estructurado, su enunciado presenta la información necesaria para ser resuelto; es coherente y contiene los componentes que debe tener un problema, estableciendo relación entre ellos (Ayllón, Castro y Molina, 2010). Es simétrico, porque sus cantidades pueden ser conmutables. La solución del problema N°2 de la Tabla 14, puede encontrarse mediante procesos aditivos o multiplicativos (adición repetida).

De acuerdo con los resultados se aprecia que los estudiantes no establecen relación entre los tamaños de las cajas con su valor. La imagen recrea tres cajas con tamaños diferentes, pero los niños omiten los tamaños y solo tienen en cuenta la cantidad de cajas para proponer el problema. Los estudiantes manifiestan tener dificultades para construir un problema matemático, para representar la situación exhibida en la imagen en un contexto variacional (MEN, 1998).

Maira, Valeria y Yasuly, no utilizan expresiones matemáticas en la pregunta, para generar relaciones conceptuales entre las cantidades y el valor a encontrar; ellas utilizan un lenguaje informal en un contexto limitado de información. Tampoco plantean valores acompañados del símbolo pesos ($), para indicar que la cantidad representa un precio. La ausencia de elementos matemáticos –signos o símbolos-, pueden interferir en la comprensión del problema. Parece que solo prestan atención a los números.

La Tabla 15, muestra el enunciado y las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de cambio, planteado por los estudiantes.

Tabla 15. Solución de problema aditivo de cambio.

Enunciado del problema N° 2	Laura compro 2 cajas de regalo para sus hijas y 1 para su sobrino. Si las dos valieron 40.000 y una valió 20.000 ¿Cuánto fue por todo?	
	Solución 1	Solución 2
		

Solución del problema

$$\begin{array}{r} 20.000 \\ 40.000 \\ \hline 60.000 \end{array}$$

La Tabla 15 presenta dos soluciones, propuestas por estudiantes para el problema N° 2. Ambas soluciones se consideran correctas, en tanto que exhiben procesos similares: ubican de manera adecuada las cantidades, alinean las cifras y realizan la operación esperada. En ambos procedimientos no se reconoce el símbolo ($) ni lo relacionan con los precios de los regalos.

La solución 1, presenta errores de símbolo (Jimeno, 2006), no se reconoce el signo suma (+) en la operación. La solución 2, de Yeferson, muestra una representación pictórica de la situación del problema. Estos dibujos parecen representar diferencias en el tamaño de los regalos, según los precios. Yeferson no comprendió el enunciado y solo representó dos regalos, lo que parece vinculado con dificultades de comprensión del problema (Salgado y Terán, 2008).

La Tabla 16, muestra la informacion de un problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de combinación, planteado por los estudiantes.

Tabla 16. Problema aditivo de combinación.

Problema N° 5

(EN un hospital) EN un laboratorio procesan sangre de los siguientes tipos: tipo A, tipo B, tipo AB, tipo O. A 5 personas de prueba le donaron sagre tipo A, siendo tipo O.(A) Las personas no sufrieron ninguna enfermedad hací que el laboratorio quiere donar 2.000 bolsas de sangre con (7.00) 700g (de sangre en 3 m) En tres meses de sangre. En un mes donaron 758 bolsas de sangre (en un me) En el segundo 500 bolsas de sangre ¿Cuantos bolsas de sangre donaron en el (tre) tercer mes?

Transcripción del enunciado	En un laboratorio procesan sangre de los siguientes tipos: tipo A, tipo B, tipo AB, tipo O. A 5 personas de prueba le donaron sangre tipo A, siendo tipo O. Las personas no sufrieron ninguna enfermedad. Así el laboratorio quiere donar 2.000 bolsas de sangre con 100 g en tres meses de sangre, en un mes donaron 758 bolsas de sangre. En el segundo 500 bolsas de sangre ¿Cuántas bolsas de sangre donaron en el tercer mes?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Combinación	2	Aditiva	Coherencia entre los componentes del problema, con cantidades y la solución.		Tres y cuatro cifras, naturales

El problema de la Tabla 16, se ubica en ‘pensamiento numérico y en sistemas numéricos’, porque requiere que se formule y ejercite procedimientos para operar cantidades de tres y cuatro cifras (MEN,1998). El problema tiene estructura aditiva (Castro, Rico, y Castro, 1995) de más de una etapa y se clasifica como problema de combinación, que relaciona tres cantidades distintas (Nesher, 1982).

El problema N° 5 es estructurado y contiene información necesaria para resolverlo (Ayllón, Castro y Molina, 2010) usando procesos aditivos de suma y resta. Se refiere a una situación cotidiana en el contexto de las ciencias.

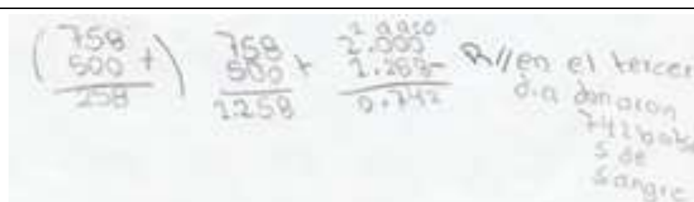
El problema representa en forma matemática la cantidad de gotas de sangre; las estudiantes cuentan las gotas de sangre (20 gotas) y las multiplican por la cantidad de personas que representa cada gota (5), obteniendo el número 100, que es la cantidad de sangre que tendrá cada bolsa. Sin embargo, el enunciado presenta algunos datos innecesarios (la cantidad de sangre por bolsa) así como redacción confusa. Los datos extras generan conflictos cognitivos para la comprensión del problema, pero la redacción del enunciado generó dificultades en la interpretación de la información.

Juan Esteban, en la presentación del problema, expresa que 'el problema está mal elaborado', porque falta plantear otra pregunta: "¿cuánta cantidad de sangre falta por donar en el tercer día?" para dar sentido al dato 100 g en el problema (Presentación problema 5, del 31 /03 /2017). Para el estudiante, también es importante plantear preguntas que sugieran el procedimiento que se debe seguir para encontrar la respuesta pero que no genere confusión para interpretar la información.

En el enunciado, se aprecian dificultades en el uso de las magnitudes para simbolizar líquidos. Sara R., Paula y Deisy, se confunden y escriben la unidad de masa (gramos) en vez de la unidad de volumen, litros (L), para representar la cantidad de sangre que contiene cada bolsa. Estas dificultades, pueden tener su origen en la falta de comprensión de los conceptos matemáticos relacionados con las diferentes unidades de medida en cantidades.

La Tabla 17, muestra el enunciado y las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de combinación, planteado por los estudiantes.

Tabla 17. Solución problema aditivo de combinación.

Enunciado del problema N° 5	En un laboratorio procesan sangre de los siguientes tipos: tipo A, tipo B, tipo AB, tipo O. A 5 personas de prueba le donaron sangre tipo A, siendo tipo O. Las personas no sufrieron ninguna enfermedad. Así el laboratorio quiere donar 2.000 bolsas de sangre con 100 g en tres meses de sangre. en un mes donaron 758 bolsas de sangre. En el segundo 500 bolsas de sangre ¿Cuántas bolsas de sangre donaron en el tercer mes?
Solución del problema	Solución 1 

Solución 2

La solución 1 del problema N° 5, Tabla 17, muestra un procedimiento adecuado que usa procesos aditivos de suma y de resta para resolver el problema. El proceso de solución es sistemático, hace uso de símbolos operacionales, y evidencia un uso apropiado de los algoritmos. Las estudiantes también responden la pregunta ‘en el tercer mes donaron 742 bolsas de sangre’; lo que sugiere una justificación verbal de los resultados obtenidos en la solución del problema.

La solución 2 del problema N° 5, Tabla 17, realizada por Alison, presenta errores en el cálculo escrito en el proceso de resolución de problemas aditivos (Jimeno, 2006). La suma está planteada de forma incorrecta, dado que escribe el resultado sin tener en cuenta el valor de cada cifra por su posición: escribe las unidades y decenas por fuera de la suma, las centenas debajo de las unidades, y las unidades de mil, en medio de las decenas y centenas.

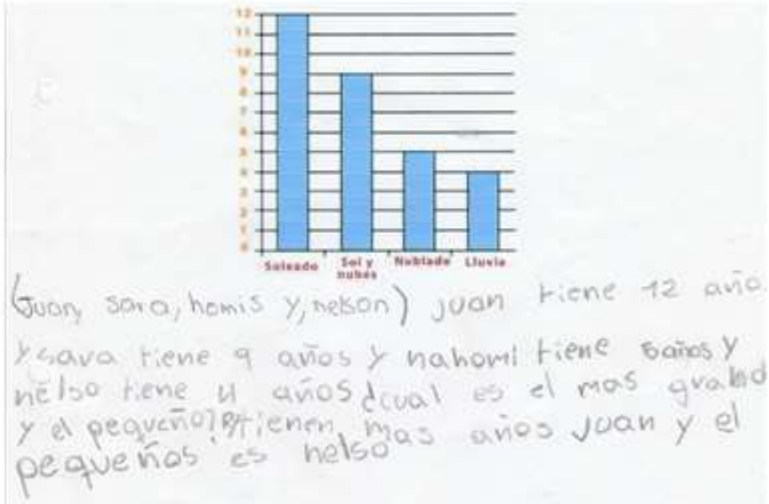
Otra dificultad refiere a la adición del número 100 que representa el contenido de cada bolsa de sangre, con las cantidades de bolsas donadas. La suma se plantea con estas cantidades sin prestar atención a la diferencia de significados vinculado con cada dato, aunque los reconoce. Esto evidencia dificultades para distinguir las unidades de medida de las unidades de volumen.

Entre los errores encontrados en el proceso de resolución de problemas, están: la comprensión de la relación entre las cantidades y la operación matemática, una inadecuada escogencia de la estrategia de solución y la incorrecta interpretación del enunciado. Deisy afirmó: ‘‘Alison leyó mal el problema, lo entendió mal, no lo supo interpretar” (Presentación del problema 5, del 31 /03 /2017).

La Tabla 18, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de comparación, planteado por los estudiantes.

Tabla 18. Problema aditivo de comparación.

Problema N° 23



Transcripción del enunciado	Juan tiene 12 años y Sara tiene 9 años y Nahomi tiene 5 años y Nelson tiene 4 años ¿Cuál es el más grande y el pequeño?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	No	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Comparación	No	No	Presenta enunciado, datos pregunta y solución sin procesos aditivos.		De una y dos cifras- naturales

El problema N°23 de la Tabla 18, pertenece al ‘pensamiento numérico y sistemas numéricos’ y al ‘pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos’, contiene aspectos asociados con fenómenos de variación y de cambio, representados en tablas (MEN, 1998). Se considera estructurado, dado que contiene los componentes de un problema (Ayllón, Castro y Molina, 2010) y contiene información suficiente para resolverlo (Reitman, 1964).

El enunciado del problema considera relacionar cantidades de una y dos cifras, mediante los términos ‘mayor que’ y ‘menor que’, por tanto, se clasifica como un problema de comparación

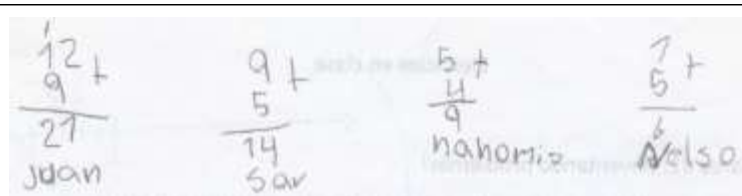
(Nesher,1982). La pregunta, propone establecer relaciones numéricas entre los datos, sin la realización de operaciones algorítmicas.

Para el planteamiento del problema N° 23, Sara D., Nelson y Nahomis utilizaron los datos de las barras de la gráfica para asignar las edades de los niños del problema, pero no utilizaron las palabras ‘soleado, sol y nubes, nublado, lluvia’. Para los estudiantes, es más fácil inventar el problema usado los nombres de los niños que los nombres de los elementos del clima. Aunque diferencian cada concepto del estado del tiempo (soleado, sol y nubes, nublado, lluvia), dicen que “no lograron tener una idea con estas palabras para inventar el problema” (Entrevista, del 25 /04 /17).

La forma de plantear el enunciado, expresa dificultades para relacionar conceptos cotidianos con objetos matemáticos; tales dificultades están asociadas con los usos y significados que los estudiantes confieren a los conceptos (Rico, 2012). Además, muestra habilidades matemáticas deficientes para plantear problemas en diversos contextos y en diferentes formas de representación (Jimeno, 2006). Este es el argumento más probable, por el cual los estudiantes no lograron reconocer toda la información de la imagen en el enunciado del problema que propusieron.

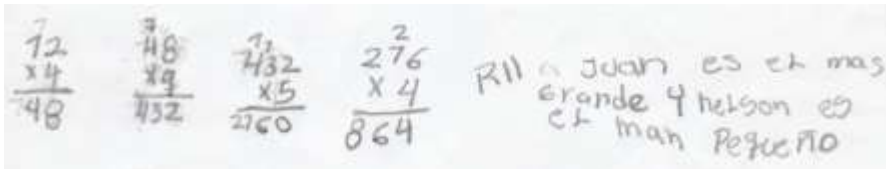
La Tabla 19, muestra el enunciado y las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de comparación, planteado por los estudiantes.

Tabla 19. Solución problema aditivo de comparación.

Enunciado del problema N° 23	Juan tiene 12 años y Sara tiene 9 años y Nahomi tiene 5 años y Nelson tiene 4 años ¿Cuál es el más grande y el pequeño?
	Solución 1 

Solución del problema ‘tiene más años juan y es más pequeño Nelson’

Solucion 2



En ambas soluciones del problema N°23, Tabla 19, se aprecia que los estudiantes no pudieron comparar cantidades matemáticamente, puesto que no organizan los datos, y no utilizan los términos ‘mayor que’ o ‘menor que’ para realizar comparaciones.

En la solución 1 del problema N°23, Tabla 19, Sara D., Nelson y Nahomis proponen sumas sucesivas con las edades de los niños del problema: inician efectuando la suma de las dos primeras edades, luego suman la segunda edad con la tercera, y luego la tercera con la cuarta, después suman 1 a la edad de Nahomi para obtener la edad de Nelson.

En la primera suma, los niños manifiestan dificultades en el cálculo matemático, al realizar una inadecuada alineación de los sumandos (Jimeno, 2006). En la forma de proponer la solución, parecen estar adivinando las respuestas (Salgado y Terán, 2008) dado que efectúan procedimientos de solución inconsistentes o inapropiados (Jimeno, 2006).

En la solución 2 del problema N°23, Tabla 19, Angie efectúa varias multiplicaciones sucesivas entre las edades de los niños del problema. Ella inicia multiplicando la edad de Juan por la cantidad total de niños: 12 x 4= 48. Luego multiplica el resultado por la edad de cada niño, así: 48 x 9 = 432; 432 x 5 = 2.160; 216 x 4 = 864.

En la última operación, Angie olvida escribir el cero correspondiente a 2.160, por tanto, no lo tiene en cuenta para multiplicar. En estos procesos, se identifican errores en los hechos aritméticos relacionados con en el cálculo escrito (Jimeno, 2006) mediante un recuerdo incorrecto y la realización de cálculos matemáticos incorrectos (Salgado y Terán, 2008). La solución del problema, también presenta errores algorítmicos, con procedimientos inadecuados como estrategia de solución (Jimeno, 2006).

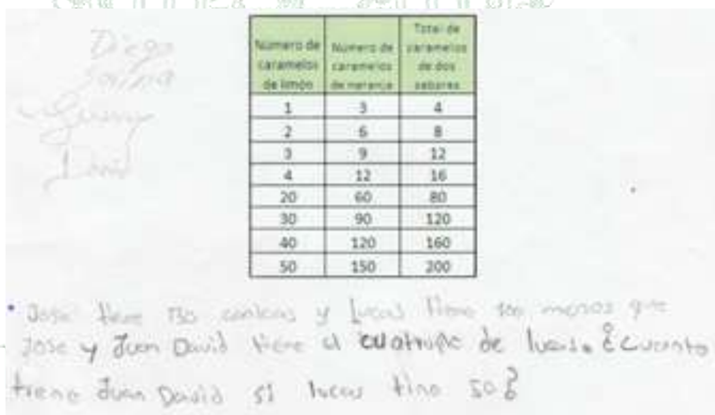
En ambas soluciones, los niños escriben una respuesta verbal acorde con sus razonamientos ‘tiene más años Juan y es más pequeño Nelson’, que, aunque resulta de un procedimiento erróneo, es acertada para responder el problema.

En la entrevista, Angie explica que realizo los procedimientos porque no sabía que operación debía hacer y no quería dejar la hoja sin operaciones. Al parecer, el equipo de Sara D., Nelson y Nahomis tuvieron la misma dificultad. Estos estudiantes manifiestan dificultades matemáticas y deficiencias en procesos, habilidades y estrategias en la resolución de problemas (Jimeno, 2006; del Valle Coronel y Curotto, 2008).

La Tabla 20, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de igualación, planteado por los estudiantes.

Tabla 20. Problema aditivo de igualación.

Problema N° 16



Numero de caramelos de limón	Numero de caramelos de naranja	Total de caramelos de dos sabores
1	3	4
2	6	8
3	9	12
4	12	16
20	60	80
30	90	120
40	120	160
50	150	200

Transcripción del enunciado	José tiene 150 canicas y Lucas tiene 100 menos que José y Juan David tiene el cuádruple de Lucas. ¿Cuánto tiene Juan David si Lucas tiene 50?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si

Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica	Tipo de números
Igualación	1	Aditiva	Existe relación entre lenguaje, propiedades, procedimientos y conceptos matemáticos.	Dos y tres cifras, naturales

Este problema de la Tabla 20, ubicado en el 'pensamiento numérico y los sistemas numéricos', formula y ejercita procedimientos para operar, transformar y relacionar cantidades (MEN, 1998). También tiene la potencialidad para promover el pensamiento variacional ya que permite representar procesos de variación y cambio de cantidades en el marco de eventos sociales (MEN, 1998). Es un problema de estructura aditiva (Castro, Rico, y Castro, 1995) de una etapa. Se clasifica como problema de igualación, porque considera una composición mixta entre los problemas de cambio y comparación (Nesher,1982).

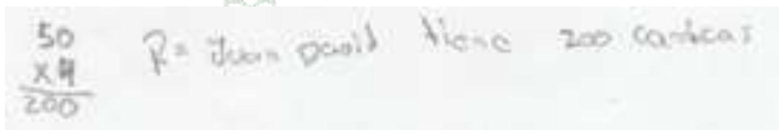
El problema N° 16, se considera estructurado, porque tiene los datos necesarios, establece relación entre las tres variables (las edades), tiene reglas específicas para encontrar la solución (Reitman,1964). En el enunciado, se reconoce el término 'menos que' y el concepto 'cuádruple'. Se requiere tener una comprensión conceptual adecuada, para no conferir una interpretación errónea al problema (Jimeno, 2006). Además, del uso de los conocimientos previos para proponer una estrategia de solución.

Los números de tres cifras simplifican la solución del problema. Además, el problema representa una situación cercana a la cotidianidad de los estudiantes, es de fácil comprensión, y uno de los datos está dado en la pregunta.

Los datos del problema N° 16, no están relacionados con la situación propuesta en la imagen, solo representan los últimos números de la tabla. Entre estos datos, existen relaciones numéricas basadas en expresiones 'menos que' y 'cuatro veces', pero no establecen regularidades y patrones entre todos los datos, lo que evidencia deficiencias en la representación gráfica de la información.

La Tabla 21, muestra el análisis realizado a la solución del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de igualación, planteado por los estudiantes.

Tabla 21. Solución problema aditivo de igualación.

Enunciado del problema N° 16	José tiene 150 canicas y Lucas tiene 100 menos que José y juan David tiene el cuádruple de Lucas. ¿Cuánto tiene juan David si Lucas tiene 50?
Solución del problema	Solución 1 

La solución 1 del problema N°16, Tabla 21, realizada por Juan David, Diego y Juan José, propone un proceso multiplicativo entre la edad de Lucas y el número 4, el cual representa el concepto cuádruple que aparece en el enunciado. Los estudiantes dan una respuesta verbal ‘Juan David tiene 200 canicas’ con la cual exhiben su comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos necesarios para encontrar el resultado.

Los estudiantes se limitaron a resolver la pregunta, no tuvieron en cuenta las relaciones conceptuales que deberían establecer entre los datos para dar sentido y significado a la situación que plantea el problema.

La estrategia de solución es algorítmica, los estudiantes no proponen soluciones que hagan uso de sistemas de ecuaciones para establecer igualdades numéricas, tampoco usan variables para representar el número desconocido. Estas situaciones exhiben deficiencias en el desarrollo del pensamiento algebraico.

En los problemas matemáticos aditivos propuestos por los estudiantes, los enunciados reflejan conocimientos matemáticos en conceptos, cantidades y operatoria. También están estructurados y en su mayoría son fáciles de comprender. En algunos de ellos, los estudiantes no establecen relaciones conceptuales entre los símbolos matemáticos y las cantidades, obviando su uso en el enunciado. Las soluciones presentan diferentes estrategias de resolución, con procedimientos que reflejan dificultades en el cálculo escrito (Jimeno, 2006).

A continuación, se presentan y analizan los enunciados y soluciones a los problemas matemáticos multiplicativos. Estos también pertenecen al Escenario 1 y son propuestos por los estudiantes.

Problemas matemáticos multiplicativos

La Tabla 22, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de isomorfismo de medidas, planteado por los estudiantes.

Tabla 22. Problema multiplicativo de isomorfismo de medidas.

Problema N° 30					
Transcripción del enunciado	En una bomba de gasolina venden el galón a 34.000 y el mínimo lo venden a 15.000 y a las mulas[10] le cobraron el galón a 39.000 y el mínimo a 20.000 ¿si un camión tanquea 4 galones cuanto le cobrarían en total?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	No	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números

[10] Mula es una expresión coloquial que utilizan los estudiantes para referirse a un camión.

Isomorfismo de medidas-asimétrico	1	Multiplicativa	Componentes coherentes en el enunciado, con valores descontextualizados	cinco cifras, naturales

El problema de la Tabla 22, pertenece al 'pensamiento numérico y sistemas numéricos' y al 'pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos', porque plantea situaciones de variación y cambio de cantidades, mediante procedimientos matemáticos (MEN, 1998). Tiene estructura multiplicativa (Castro, Rico, y Castro, 1995) de una etapa, con números de cinco cifras. Se clasifica como isomorfismo de medidas, porque es un problema de proporcionalidad entre dos magnitudes (Vergnaud, 1983).

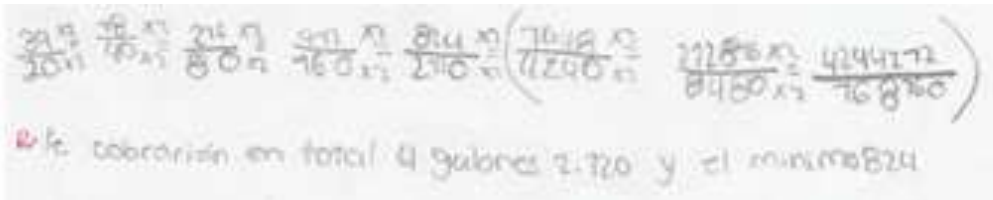
El problema N° 30 se considera estructurado, su enunciado presenta información necesaria para resolverlo (Reitman, 1964). La solución del problema, puede encontrarse mediante procesos multiplicativos (multiplicación o adición repetida). Es asimétrico, porque sus cantidades no se pueden intercambiar (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

Este problema representa una situación cotidiana para los estudiantes, relacionada con los medios de transporte. Para comprender la situación planteada en el enunciado, es necesario diferenciar entre los términos 'galón' y 'mínimo'. Para Yuri, Wendy y María Paula, del 'equipo proponente', un galón es lo que representa cierta cantidad de gasolina. La palabra 'mínimo', es la menor cantidad de gasolina que le pueden vender a un cliente (Entrevista, del 25 /04 /17). Los datos del problema están un tanto descontextualizados, pues plantean valores por encima del precio real del galón de gasolina. Este enunciado plantea una situación cotidiana con historia no verosímil, ya que los datos no corresponden a valores comparables con los ofrecidos en el mercado.

El equipo de Yuri, Wendy y María Paula tienen dificultades para representar unidades monetarias. Las niñas no escribieron el signo ($) a los números para indicar que son precios de la gasolina, tampoco los expresan cuando leen estos valores.

La Tabla 23, muestra el enunciado y las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de isomorfismo de medidas, planteado por los estudiantes.

Tabla 23. Solución de problema multiplicativo de isomorfismo de medidas.

Enunciado del problema N° 30	En una bomba de gasolina venden el galón a 34.000 y el mínimo lo venden a 15.000 y a las mulas le cobraron el galón a 39.000 y el mínimo a 20.000 ¿si un camión tanquea 4 galones cuanto le cobrarían en total?
	Solución 1 
Solución del problema	Solución 2 

El equipo de Yuri, Wendy y María Paula, manifiestan dificultades para resolver el problema que habían planteado. Ellas elaboraron el enunciado sin pensar en la estrategia de solución, motivo por el cual, tuvieron inconvenientes para comprenderlo y resolverlo de manera adecuada. En un diálogo con la estudiante, María Paula expresa: “profe es que no sabemos cómo hacer la solución” (Diálogo, del 17 /03 /2017). Esta dificultad exigió a las estudiantes buscar alternativas de solución usando fraccionarios (ver solución 1, Tabla 23).

La solución 1 del problema N°30, Tabla 23, muestra un procedimiento alternativo (Jimeno, 2006) propuesto por Wendy (usar fracciones equivalentes) como estrategia de solución para el problema. En este trabajo, este tipo de respuestas se consideran como ‘soluciones novedosas’, porque demuestra conocimientos matemáticos creativos (Tabla 4), pero que exhiben dificultades en el proceso de resolución de problemas. Yuri, Wendy y María Paula, manifiestan dificultades para diferenciar conjuntos numéricos y sus propiedades.

Las niñas proponen una fracción inicial ‘ $\frac{39}{20}$ ’,donde el numerador es *“el valor del galón de gasolina que cobran a las mulas”*, pero reducido en cifras (de 39.000 a 39). El denominador es *“el valor mínimo que le cobran a las mulas”*, también reducido en sus cifras (de 20.000 a 20). A esta fracción, hallan cuatro fracciones equivalentes por amplificación.

Para las estudiantes, las cuatro fracciones amplificadas representan los cuatro galones. Estas amplificaciones están mal planteadas, no se utiliza un correcto proceso multiplicativo con el numerador y con el denominador. Los estudiantes escriben los productos intermedios (decenas) en la solución, en vez de ‘llevarlas’ al siguiente producto (Jimeno, 2006).

Al hallar la cuarta fracción equivalente ($\frac{824}{2.120}$) escriben ‘le cobraron en total cuatro galones a 2.120 y el mínimo a 824’. De esta fracción asumen el denominador como el valor de los cuatro galones de gasolina y el numerador como valor mínimo de los cuatro galones. Las estudiantes no agregan los ceros suprimidos en las fracciones. Se evidencian dificultades en los hechos aritméticos (Jimeno, 2006), cuando las estudiantes invierten el significado del numerador y el denominador en la cuarta fracción equivalente y en la forma de operar los números de cinco cifras.

Durante el desarrollo de la tarea 1-invención de problemas-, las niñas expresaron su deseo de plantear problemas que se respondieran mediante facciones, debido a que este tema despertaba particular interés para ellas. Para María Paula es más fácil resolver problemas con fracciones, porque ‘se puede multiplicar más rápido y hacer el resultado más sencillo’ (Diálogo, del 17 /03 /2017)[11]. Esta respuesta presupone un proceso de resolución basado más en la necesidad de dar una respuesta, que, en mostrar conocimientos matemáticos, lo que llevo a realizar una indebida representación de la solución.

[11] Los diálogos, son conversaciones realizadas entre los estudiantes mientras inventaban problemas. No se consideran como parte de las entrevistas semiestructuradas, porque fue un proceso de toma de decisiones sin intervención directa de la investigadora. Sin embargo, de estos diálogos fue posible extraer información relevante para el objetivo de la investigación.

En el proceso de solución 2 del problema N°30, Tabla 23, propuesto por María J., se observa el planteamiento de dos operaciones -una suma y una multiplicación- como ideas iniciales, pero luego fueron descartadas. El total de la suma demuestra un proceso aditivo inadecuado entre cantidades de una y cinco cifras y la multiplicación está incompleta, lo que supone errores de hechos aritméticos y errores algorítmicos en el cálculo escrito (Jimeno, 2006).

Como solución escrita, María J. representa el problema N° 30 con dibujos y efectúa dos operaciones: una multiplicación correcta y una resta incorrecta. Luego, escribe una respuesta verbal. Los dibujos, no representan adecuadamente el problema porque falta información. En la exposición de su solución, la niña se refiere a estos dibujos y expresa 'yo los hice solo por representar los galones, pero no vale nada eso'. Con esta expresión da a entender que utilizó los dibujos como ayuda visual para dar un sentido a los datos, pero que no son relevantes para responder el problema. Según Rico (2012) esta forma de dar uso a los números y la manera de representarlos, presupone problemas de comprensión.

María J. lee correctamente las cantidades, pero cuando explica el procedimiento desarrollado para resolverlo dice *"los cuatro galones son 39…"*. Ella suprime los ceros en la cantidad, y asume como iguales ambas cantidades (Presentación problema 30, del 04 /04 /2017) y exhibe dificultades para representar unidades monetarias, al suprimir el signo ($) en su respuesta.

Jimeno (2006) expone que, aunque los estudiantes manifiesten dificultades para el cálculo escrito, pueden tener habilidades en el cálculo mental. Los estudiantes mediante procedimientos informales o estrategias alternativas, plantean un cálculo matemático informal para resolver problemas aditivos y multiplicativos con números no muy grandes. Yuri, Wendy, María Paula y María J, presentan esta característica cuando suprimen los ceros en cantidades de cinco cifras. Mediante estrategias de descomposición y conteo, ellas pretenden operar con los números de forma fácil, rápida y segura y obtener una solución al problema, aunque se les dificulte realizar procedimientos algorítmicos.

La Tabla 24, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de producto de medida, planteado por los estudiantes.

Tabla 24. Problema multiplicativo de producto de medida.

Problema N° 31

Transcripción del enunciado	Lorena desde Medellín quiere a su mamá en Bogotá y le manda en una caja con los siguientes datos profundidad 15 cm, ancho 15 cm y alto 4,5 cm ¿Cuánto miden todos los lados?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	No	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Producto de medida-simétrico	1	multiplicativa	Falta coherencia entre el enunciado y los conceptos matemáticos implicados.		cinco cifras, naturales

El problema N° 31 de la Tabla 24, es del ‘pensamiento espacial y los sistemas geométricos’ y del ‘pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas’, requiere diferentes procedimientos de cálculo para obtener medidas de longitudes en objetos tridimensionales (MEN, 1998). Se clasifica como problema de producto de medidas, ya que establece relaciones multiplicativas entre las cantidades (Vergnaud, 1983). Es simétrico, porque sus cantidades se pueden intercambiar (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

El problema N° 31 se considera estructurado, tiene todos los componentes (enunciado, datos y pregunta) e información necesaria para realiza una solución (Reitman, 1964). Sin embargo, no hay correspondencia entre los datos y la pregunta y los conceptos matemáticos implicados, según la intencionalidad del equipo proponente. Yuri, Wendy, María Paula, inventaron el problema para ser resuelto mediante producto de las tres medidas que describen a la caja, y hallar su volumen, pero la pregunta sugiere un proceso aditivo, para encontrar el perímetro de la caja.

La anterior situación, se evidenció en la respuesta de las niñas a la pregunta: "¿Qué querían que los otros equipos hicieran para resolver la pregunta?" ellas esperaban que el equipo solucionador realizara "una multiplicación…primero largo por ancho y el resultado por el alto", para encontrar la medida de todos los lados (Entrevista, del 25/04/17).

Esta disociación entre el enunciado y la pregunta presupone dificultades en la comprensión del concepto de volumen, aunque las estudiantes reconozcan los conceptos: largo, ancho y alto y los relacionen correctamente con las dimensiones de la caja (Diálogo, del 17 /03 /2017). La redacción de la pregunta, indica una confusión entre perímetro y volumen, al proponerse el procedimiento para uno de ellos cuando quieren hallar el otro. Según Socas (2011), las estudiantes manifiestan dificultades para distinguir las particularidades de estos conceptos matemáticos.

La Tabla 25, muestra el enunciado y la solución de un problema aritmético verbal, multiplicativo de producto de medida, planteado por los estudiantes.

Tabla 25. Solución de problema multiplicativo de producto de medida.

Enunciado del problema N° 31	Lorena desde Medellín quiere a su mamá en Bogotá y le manda en una caja con los siguientes datos profundidad 15 cm, ancho 15 cm y alto 4,5 cm ¿Cuánto miden todos los lados?
Solución del problema	Solución 1 

En la solución 1 del problema N°31, Tabla 25, el equipo proponente, realiza una multiplicación sucesiva, de dos etapas entre los datos: profundidad por el valor para el ancho y el resultado por el valor para la altura. La primera operación está planteada de forma adecuada, y evidencia habilidades en el cálculo escrito para realizar procesos multiplicativos con números naturales. En la segunda operación, hay una omisión de la coma en el resultado, necesaria para representar números decimales. Esta omisión, ocurre cuando un estudiante tiene dificultades en la recuperación automática de hechos numéricos (Jimeno, 2006).

Yuri, Wendy, María Paula, manifiestan dificultades en el lenguaje de computo matemático (Salgado y Terán, 2008) cuando no hacen un correcto uso de las unidades de medición. Ellas ubican el símbolo (cm) al lado de los factores y de los productos, sin establecer diferencias entre las unidades de longitud, de superficie y de volumen, con lo cual no establecen diferencias entre unidades y conceptos asociados.

Esta solución, aunque presenta errores en el cálculo escrito y aunque no responde la pregunta del problema, es una estrategia de solución adecuada para problemas matemáticos de producto de medidas con objetos tridimensionales.

La Tabla 26, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición, planteado por los estudiantes.

Tabla 26. Problema multiplicativo de partición.

Problema N° 25

Transcripción del enunciado	A la pirámide de Egipto fueron 100 personas y los egipcios le tenían 4.200 jugos. ¿Cuántos jugos recibe cada persona?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
Partición	1	multiplicativa	Relación entre enunciado-datos- pregunta-solución		cuatro cifras, naturales

Este problema de la Tabla 26, corresponde al pensamiento 'numérico y a los sistemas numéricos', porque considera formular y ejercitar procedimientos para operar y relacionar cantidades (MEN, 1998). El problema tiene estructura multiplicativa (Castro, Rico, y Castro, 1995) de una etapa con cantidades entre tres y cuatro cifras. Se clasifica como problema de partición, donde un conjunto de objetos se divide en partes iguales (Vergnaud, 1983).

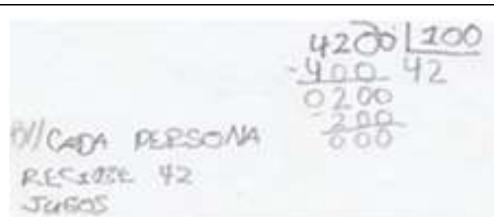
El problema N° 25 es estructurado (Reitman, 1964), presenta coherencia entre sus componentes y un proceso de solución (Ayllón, Castro y Molina, 2010). Es asimétrico, porque sus cantidades no pueden ser conmutables (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989). La solución del problema, puede encontrarse mediante procesos multiplicativos, incluida la división.

La situación presentada en el enunciado, se relaciona con algunos aspectos de la imagen. Valentina M., Sofía B. y Meggan enfocaron su atención en las personas y con ellas establecieron relaciones sociales (intercambio cultural), para contextualizar su problema. Aunque la pirámide resalta en la foto por su tamaño, no fue tenida en cuenta en el planteamiento.

La pirámide, contienen elementos numéricos y geométricos (la forma, su tamaño, su estructura, su posición, sus escalones, su material, entre otros) que podrían servir para la invención del enunciado y para respaldar el enunciado de una pregunta que cuestione objetos matemáticos, pero para los niños esta información no fue tan relevante. Parece ser que los niños relacionan más fácilmente las cantidades de objetos con los números y los algoritmos, que los objetos con los conceptos matemáticos. Puede ser que los estudiantes no estén acostumbrados a relacionar objetos de su entorno con ideas, conceptos o procedimientos matemáticos.

La Tabla 27, muestra el enunciado y la solución de un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición, planteado por los estudiantes.

Tabla 27. Solución de problema multiplicativo de partición.

Enunciado del problema N° 25	A la pirámide de Egipto fueron 100 personas y los egipcios le tenían 4.200 jugos. ¿Cuántos jugos recibe cada persona?
Solución del problema	Solución 1 

La solución 1 del problema N°25, Tabla 27, representa de forma adecuada un proceso partitivo, en el que se reparte la cantidad de jugos equitativamente entre los turistas. La división está planteada y desarrollada de forma adecuada. En la solución, las niñas tienen en cuenta escribir la respuesta verbal 'cada persona recibe 42 jugos'. Las estudiantes exhiben conocimientos matemáticos, para proponer y para resolver problemas multiplicativos de partición en números con varias cifras.

Problema matemático multiplicativo con solución de adición repetida

Los problemas 2, 16, 17 y 30, aunque se clasifican en varios tipos de problemas, se pueden resolver por adición repetida (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985). De estos, se ha tomado el problema 17 como ejemplo, para analizar las soluciones de los estudiantes e identificar las características de aquellas que representan este proceso multiplicativo.

La Tabla 28, muestra el análisis realizado a un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo con solución de adición repetida, planteado por los estudiantes.

Tabla 28. Problema multiplicativo de partición con solución de adición repetida.

Problema N° 17	
Transcripción del enunciado	Don Wilson quiere sacar sus 20 cajas de la bodega y las quiere repartir entre sus 4 amigos. ¿Cuántas cajas le toca a cada uno de sus amigos?

Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	Si	Si

Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica	Tipo de números
Partición	1	multiplicativa	Coherencia entre sus componentes y la solución.	Una y dos cifras, naturales

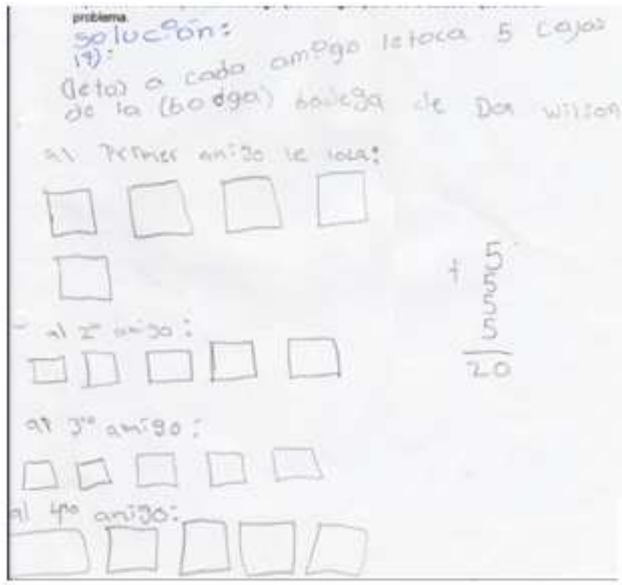
El problema de la Tabla 28, pertenece al ‘pensamiento numérico y los sistemas numéricos’, en él se representa la ‘numerosidad’ de las magnitudes a través de diversos medios y sistemas de representación (MEN,1998). Tiene estructura multiplicativa (Castro, Rico, y Castro, 1995) de una etapa. Se clasifica como problema de partición, porque una cantidad puede repartirse en partes iguales (Vergnaud, 1983).

El problema N° 17 es estructurado (Reitman, 1964), coherente, y presenta relación entre sus componentes (Ayllón, Castro y Molina, 2010). Es asimétrico, porque sus cantidades no se pueden intercambiar (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989). La solución del problema, puede encontrarse mediante procesos multiplicativos de división y de adición repetida.

El enunciado, representa el contexto de la imagen: el escenario (la bodega), el sujeto y la cantidad de cajas. En este problema, Diego, Juan José y Juan David, lograron integrar los elementos de una situación real para estructurar adecuadamente su problema, manifestando habilidades matemáticas para proponer problemas matemáticos (Jimeno, 2006).

La Tabla 29, muestra el enunciado y soluciones con procedimientos de adición repetida, de un problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición, planteado por los estudiantes.

Tabla 29. Solución de adición repetida a problema multiplicativo de partición.

Enunciado del problema N° 17	Don Wilson quiere sacar sus 20 cajas de la bodega y quiere repartir entre sus 4 amigos. ¿Cuántas cajas le toca a cada uno de sus amigos?	
Solución del problema	Solución 1	
	Solución 2	

A continuación, se comparan los procesos de resolución de dos estudiantes para un mismo problema. En la solución 1 del problema N° 17, Tabla 29, el equipo proponente divide la cantidad de cajas entre los 4 amigos. Luego, responden 'le pertenece a cada uno cinco cajas'. El proceso de resolución usado por los estudiantes, es adecuado para resolver problemas partitivos.

La solución 2 del problema N° 17, Tabla 29, se realiza mediante procesos multiplicativos de adición repetida. Luis Fernando representa el total de las cajas, sumando cuatro veces la cantidad de cajas que le corresponde a cada amigo. También representa de forma pictórica la situación del problema. Luego responde 'a cada amigo le toca 5 cajas de la bodega'. Esta forma de solución también responde acertadamente al problema, y evidencia conocimientos matemáticos relacionados con procesos de recuento (Geary, 1994).

Una propuesta alternativa al método de adición repetida, es la multiplicación de factores. La estrategia de solución fue propuesta por Alison ‘multiplicar 4 x 5 da 20’ para encontrar la misma solución de forma rápida, al recordar hechos aritméticos básicos (Geary, 1994). Las diversas soluciones, son evidencias de conocimientos matemáticos que los estudiantes poseen para resolver problemas multiplicativos de partición y adición repetida (Jimeno, 2006) propuestos por ellos mismos.

Problema no matemático

De acuerdo con las apreciaciones de los estudiantes, un problema es matemático cuando la pregunta indaga los datos del enunciado o propone realizar procedimientos matemáticos (Entrevista, del 07 /04 /2017). El problema N°10 inventado por los estudiantes, es considerado no matemático, dado que no cumple con las características de los problemas matemáticos verbales. Por tal motivo, su enunciado es objeto de análisis, para indagar la coherencia y la semántica entre sus componentes. El análisis semántico tendrá como fundamento los significados que los estudiantes confieren a este tipo de problema.

La Tabla 30, refiere a un ejemplo de problema no matemático planteado por los estudiantes.

Tabla 30: Problema no matemático.

Problema N° 10	

(Solucic) Problema 7, Jimenez fue a un
Almacen a Comprar un Par de zapatos,
y un Pantalon. Se Compro unos Zapatos
negros, Pero no sabia Con Que Pantalon Convinar
habia: Negro, gris, Cafe, Azul oscuros Amarillo
El negro (vales) vale $230.000, Gris valia 200.000,
Cafe valia $170.000, Azul valia 120.000 $, Amarillo
valia $ 90.000. ¿Cual Pantalon le Convinara a
Jimenez?

Transcripción del enunciado	Jiménez fue a un almacén a comprar un par de zapatos y un pantalón. Se compró unos zapatos negros, pero no sabía con qué pantalón combinar, había negro, gris, café, azul oscuro, y amarillo. El negro vale $230.000, el gris valía 200.000 $, el café valía $170.000, el azul valía 120.000 $, el amarillo valía $ 90.000. ¿cuál pantalón le combinaría a Jiménez?				
Coherencia del enunciado	Historia verosímil	Datos numéricos	Pregunta	Relación pregunta-datos.	Solución
	Si	Si	Si	No	No
Tipo de problema	N° de etapas	Estructura operatoria	Estructura semántica		Tipo de números
No estructurado	No	No	No hay coherencia entre los componentes del problema.		cinco cifras, naturales

En la clasificación general, el problema N°10 de la Tabla 30, se considera 'no estructurado', porque no es preciso en sus datos y presenta diversas soluciones posibles (Reitman, 1964). También es 'abierto', porque no presenta un proceso de solución determinado (Silver, 1995). Es ‘no rutinario’, porque no se puede resolver sin considerar las características particulares de la situación planteada (Noda, 2001).

Según Marín y Lupiáñez (2005) las situaciones cotidianas favorecen el reconocimiento, la comprensión y la utilización de objetos matemáticos implícitos en enunciados. Sin embargo, los estudiantes no logran relacionar los datos con el interrogante del problema y su solución. El enunciado, presenta una situación en la que se pueden realizar diversas combinaciones entre los elementos (pantalones y zapatos). Cada color de pantalón tiene asociado un precio, el cual no es relevante para la solución. El interrogante, no refiere a objetos, conceptos, valores o procedimientos matemáticos, sino a datos cualitativos presentes en elementos del contexto real.

Para los estudiantes solucionadores, el ‘equipo proponente’ no supo platear la pregunta, porque inquiere por el color de los pantalones que combinen con los zapatos negros que Jiménez compró. Sugieren que debieron haber preguntado por los números –precios- o por alguna operación matemática que incluyera los datos del enunciado y posibilitara resolverlo utilizando matemáticas.

En la presentación del problema N° 10, algunos estudiantes cuestionaron la estructura del problema, según Mateo, en la pregunta falta proponer una operación, porque ‘el taller era sobre problemas matemáticos’. Deisy opina que ‘el problema no ‘habla’ sobre matemática, solo ‘habla’ de unos números, pero nada es ‘matemáticas’, ni la pregunta’. Sofía R. expresa que ‘el problema nada tiene que ver con matemáticas’ (Presentación problema 10, del 04/04/2017). Los tres aportes, objetan la coherencia de los componentes del problema, la pertinencia y uso de los datos, la ausencia de operatoria en la solución y la relación del enunciado con las matemáticas.

Los estudiantes sugieren modificar el problema para que este sea matemático. Según ellos, basta con incluir más información en el enunciado o reformular la pregunta. Los siguientes son ejemplos de preguntas propuestas por los ‘equipos solucionadores’ para este problema: ‘¿Cuál es la diferencia entre el pantalón negro y el azul?’, ‘¿Cuánto gastó en total?’, ‘¿Cuánto valdría el pantalón negro con el pantalón amarillo?’, ‘Si se tiene un billete de tanto valor, ¿Cuánto le devuelve?’.

Juan Esteban, integrante del ‘equipo proponente’, expresa que propusieron un problema sin operaciones porque ‘querían comprobar qué tipo de pantalones se escogería’ (Presentación problema 10, del 04/04/2017). Ellos solo querían saber la elección que haría el equipo solucionador para combinar los zapatos negros. También manifestó que la imagen, no les permitió proponer un problema matemático. Esta es una evidencia de dificultades para establecer relaciones entre el contexto y los objetos matemáticos (Marín y Lupiáñez, 2005). Por tanto, el 'equipo proponente' no usa y no interpreta adecuadamente elementos de su contexto para proponer problemas matemáticos a partir de situaciones cotidianas.

Las ideas de preguntas formuladas por los estudiantes, permiten identificar una estructura en lo que ellos consideran un problema matemático: este debe tener un enunciado con números, y una pregunta que indique la realización de una operación matemática en la solución. Para los niños, algunos términos tales como: sumar, quitar, diferencia, total, cantidad, son claves para proponer un problema de naturaleza matemática. Estos estudiantes, demuestran competencias en planteamiento y resolución de problemas (MEN, 2008) porque plantean situaciones semi-estructuradas (Stoyanova, 1998) sobre un problema 'no estructurado' para transformarlo en uno que pueda encontrarse su solución, utilizando los datos del enunciado.

En esta sección de problemas con estructura multiplicativa, se evidencia mayor dificultad en los estudiantes para proponer enunciados matemáticos a partir de situaciones cotidianas. Varios de ellos presentaban datos extras, redacción confusa, planteamientos 'no estructurados' y omisión de símbolos matemáticos en los valores o cantidades. Sin embargo, los 'equipos solucionadores', demuestran competencias matemáticas al proponer procesos de solución adecuados o alternativos para resolver los problemas y para reestructurar los planteamientos.

A continuación, se presentan los problemas no propuestos por los estudiantes, es decir, situaciones cotidianas presentadas en imágenes que no lograron ser traducidas al lenguaje matemático para proponer problemas.

Problemas no propuestos

Algunos equipos de estudiantes no lograron proponer problemas, según ellos, 'las imágenes eran muy complejas para comprender'. En la entrevista, los niños argumentaron las dificultades presentadas y las ideas que tuvieron mientras discutían objetos matemáticos identificables en las imágenes. Estas ideas permiten reconocer conocimientos matemáticos de los estudiantes. Las figuras 1, 2 y 3 son ejemplos de problemas no propuestos por los estudiantes.

En la Figura 1, se aprecia una justificación de los estudiantes, con la cual expresan no comprender el problema.

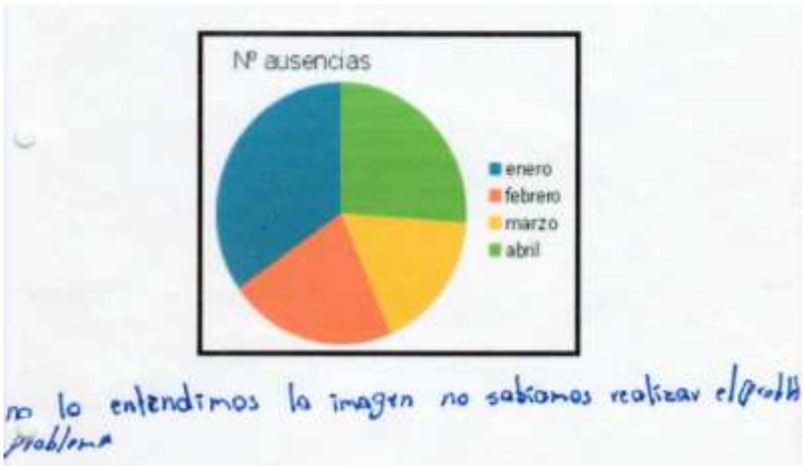


Figura 1: Número de ausencias: pensamiento aleatorio

Transcripción del texto	'No entendimos la imagen, no sabíamos realizar el problema'.

En el texto de la Figura 1, los niños declaran no saber inventar un problema con la información del gráfico. Sin embargo, manifiestan tener diferentes conocimientos matemáticos:

- ❖ Saben relacionar la información de la leyenda con los colores del gráfico:

*"*En un cuadro hay un círculo, y en el círculo dice que en enero, febrero, marzo y abril va a haber un terremoto. El de enero va a ser grande y de alarma azul, en febrero de alarma naranja … ¿en qué mes daría más terremoto?".

- ❖ Diferencian los tamaños de las partes en que está dividido el gráfico: "La respuesta seria el azul, por lo grande, porque ocupa más terreno y hay más terremoto*"*.

- ❖ Asocian el tamaño de cada color con una fracción, para ellos, el gráfico se parece a una torta que está dividida en partes desiguales:

“En enero las personas se vistieron de azul, en febrero de naranjado en marzo de amarillo y en abril de verde. Si en enero dos octavos de las personas se vistieron de azul, ¿cuántas personas se vistieron de cada color?”.

- ❖ Relacionan los tamaños de los colores del gráfico con porcentajes: “Si el color azul de enero es 40%, el anaranjado de febrero es 20% y el verde de abril es de 30%. ¿cuánto le darían al amarillo?”.

En las relaciones establecidas color- número, es evidente que los estudiantes asocian un valor a cada color según el tamaño: ‘el azul es 40% porque es el más grande’ (Entrevista, del 25 /04 /17).

Los niños omitieron el título del gráfico (número de ausencias) como información para inventar un problema, es posible que los estudiantes solo reconozcan los números y los tamaños como datos para inventar un problema. Como el gráfico no presenta números inscritos, no lograron establecer esa relación conceptual, evidenciando dificultades de lectura de información en gráficos, en el proceso de resolución de problemas (Salgado y Terán, 2008).

En la Figura 2, se aprecia otro argumento de los estudiantes sobre sus dificultades para comprender gráficos.

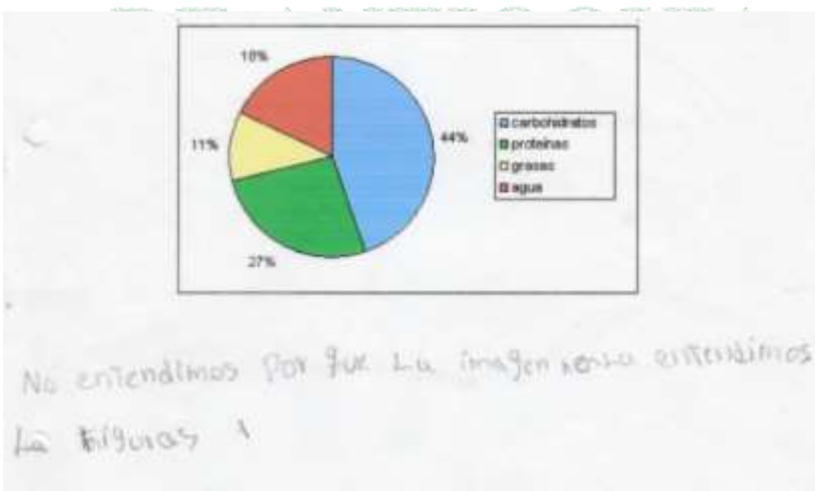


Figura 2: Porcentajes: pensamiento aleatorio.

Transcripción del texto	‘No entendimos, porque la imagen no la entendimos’.

La Figura 2, presenta información verbal y numérica, pero los estudiantes no comprendieron la información de la leyenda. Según ellos, nunca habían visto problemas con gráficos circulares, por tanto, no lograron inventar un problema con los datos de la imagen.

Durante las entrevistas, los estudiantes del grado quinto identificaron algunos objetos matemáticos presentes en la gráfica circular de la Figura 2 y mostraron tener algunos conocimientos matemáticos:

- Relacionan bien el tamaño de los colores en el gráfico, con el porcentaje que corresponde.
- Reconocen el significado de algunas palabras: grasas, proteínas, agua, cuando las relacionan con objetos del entorno que tienen esos elementos: frutas, carnes, pollo, etc. No reconocen el término ‘carbohidratos’.
- Comparan la forma del gráfico con las ‘tortas’ que representan las fracciones, aunque no lo relacionan directamente por los datos que contiene.

Los estudiantes propusieron que, en vez de presentarles una imagen de un círculo coloreado, les hubiera gustado ver una ‘torta’ fraccionada, así habrían logrado inventar el problema, Angie: esta es una tortita, de cualquier color, partida en cuatro pedazos, a Juan le toco esto, a Angie esto…’ indicando que algunas de las partes en que fue dividida la torta, seria repartida entre los comensales (Entrevista, del 25 /04 /17). Ellos consideran tener mayor conocimiento de los números fraccionaros que de los porcentajes.

Aunque la imagen mostrada en la Figura 2 presenta todos los elementos para ser interpretados, los estudiantes no pueden leer el gráfico, parece que este tipo de tareas no son muy frecuentes en la escuela, no leen el gráfico ni organizar la información en un enunciado matemático (Salgado y Terán, 2008).

En la Figura 3, se observa dificultades de comprensión en los estudiantes, al manifestar por escrito ‘no entender nada’ del problema.

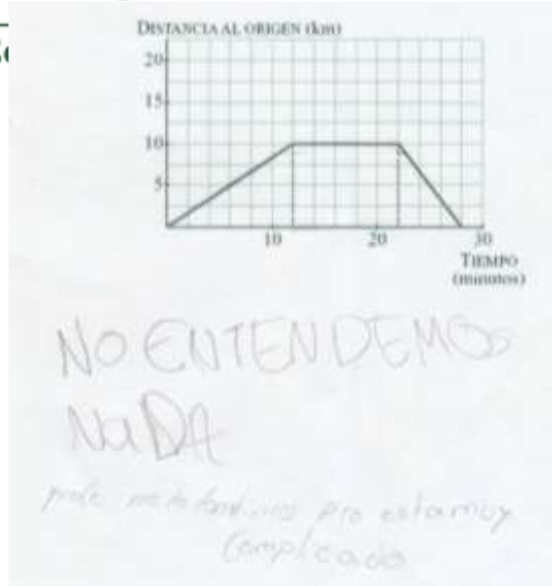


Figura 3: Plano cartesiano: los pensamientos geométrico y métrico.

Transcripción del texto	¡NO ENTENDEMOS NADA! Profe no lo entendimos, está muy complicado.

Según Diego y Juan José ‘esa figura es muy rara’, ‘no entendimos esa montaña’ (Entrevista 2, del 25 /04 /17). Llaman montaña a la figura formada por las líneas del gráfico, que para los estudiantes tiene forma de una montaña, o una loma. Los niños atribuyen significados cotidianos a objetos matemáticos de la imagen (Rico, 2012) y desconocen los conceptos matemáticos, solo prestan atención a la forma. Los estudiantes no logran interpretar la información de la gráfica y centran su atención en las figuras planas que reconocen en ella.

Durante un diálogo entre estudiantes, Juan José expresa ‘acá hay un cuadro y tiene una forma que yo no sé, dice distancia al origen y yo no entiendo si acá esta como la medida, cuanto de alto esta… tiene de alto 10 centímetros … toca sacar regla para medirla…’ (Diálogo, del 17 /03 /17). Los errores conceptuales presentes en el diálogo, ofrecen evidencias de dificultades en la lectura y representación de la información en gráficos en la resolución de problemas (Jimeno, 2008).

De la imagen de la Figura 3, reconocen que el espacio está dividido en cuadriculas y se llama plano cartesiano. Cuando se les explica las coordenadas, ellos no logran identificar lo que representa la línea vertical y la línea horizontal. Confunden los números que representan distancia (km) y los que representan el tiempo (minutos). Esta dificultad puede complicarse con la ausencia del punto cero (origen) en la imagen, el cual puede dificultar la comprensión de los datos (Jimeno, 2008).

Los estudiantes reconocen algunos elementos matemáticos y geométricos en la imagen de la figura 3: las líneas verticales, horizontal, diagonal, rectas, pero no recuerdan las paralelas, las perpendiculares ni las oblicuas. De las figuras geométricas solo recuerdan las figuras básicas: el cuadrado, el rectángulo y el triángulo. También identifican la forma y concepto del ángulo recto, pero olvidaron los ángulos agudo y obtuso. Estos olvidos, pueden representar Dificultades Aritméticas Matemáticas (DAM) en la recuperación automática de los hechos numéricos (Jimeno, 2008). Los anteriores elementos, aunque no se relacionan con los objetos matemáticos presentados en la Figura 3, podrían ofrecer ideas para inventar problemas matemáticos, que relacionen la experiencia cotidiana de los estudiantes con conceptos matemáticos aprendidos en las clases de matemáticas.

Diego y Juan José afirmaron que: 'les falto imaginación para inventar el problema', refiriéndose a que, si hubieran imaginado una experiencia real, tal vez hubieran logrado plantear un problema relacionado con los objetos matemáticos identificados en la imagen. Este es un ejemplo propuesto por los estudiantes: 'Hay un cazador en el punto (0) y un león en el punto (X). ¿a qué distancia está el león del cazador? ¿Cuánto tiempo tiene que correr el cazador para llegar donde el león?' (Entrevista, del 25 /04 /17). El ejemplo anterior, expone tanto las habilidades de los estudiantes para inventar problemas cotidianos como para reconocer algunos elementos matemáticos de la gráfica, pero resalta dificultades en la comprensión de gráficos cartesianos.

La Figura 3, no presenta todos los elementos para su interpretación, por tanto, los estudiantes no lograron comprender la gráfica y proponer un problema. Tal como se informó en la Figura 2, parece ser que, en la escuela, poco se orientan actividades de clase con problemas matemáticos que se resuelvan con gráficos cartesianos (Salgado y Terán, 2008).

El análisis realizado a las gráficas de las Figuras 1, 2 y 3 evidencia que los estudiantes manifiestan dificultades para el reconocimiento de objetos matemáticos que facilitaran la invención de problemas.

A continuación, se presentan los problemas aditivos y multiplicativos propuestos en el Escenario 2. Estos problemas son planteados por la investigadora, tomados de diferentes fuentes de información. En cada problema se analizan las soluciones de los estudiantes.

Análisis de problemas propuestos a estudiantes

Los siguientes problemas, fueron seleccionados y adaptados de las Pruebas Saber 5, Pruebas PISA, libros de texto y, algunos son propuestos por docentes experimentados en la enseñanza de matemáticas, para ser solucionados por los estudiantes. Estos problemas, fueron clasificados y categorizados previamente en tablas (Tablas 11 y 12) para reconocer los componentes y tipos de problemas a los que pertenecen.

Este apartado presenta una selección de problemas propuestos para cada tipo de enunciado verbal, de manera que los resultados obtenidos evidencien un análisis realizado a las soluciones de los enunciados en todas las categorías. Al igual que en la sección anterior, se distinguen los problemas con estructura aditiva y los problemas con estructura multiplicativa.

Para cada problema se analizan las soluciones más relevantes proporcionadas por los estudiantes. Se indagan los conocimientos matemáticos y las dificultades asociadas con estos. Se aclara que, aunque estos problemas pueden ser resueltos de múltiples formas, solo interesan las estrategias de solución realizadas por los estudiantes.

La Tabla 31, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de cambio, seleccionado de las Pruebas Saber 5° y propuesto a los estudiantes.

Tabla 31. Soluciones al problema aditivo de cambio.

<table>
<tr><td>Enunciado del problema N° 2</td><td>En la siguiente tabla se presenta información incompleta de los precios de paquetes de dulces en una tienda.

<table>
<tr><th>Número de paquetes</th><th>Precio</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$1.800</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$4.500</td></tr>
</table>

Si cada paquete de dulces vale lo mismo, ¿cuánto valen tres paquetes?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Solución del problema</td><td>Solución 1
<table>
<tr><th>Número de paquetes</th><th>Precio</th></tr>
<tr><td>1</td><td>900</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$1.800</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2.700</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3.600</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$4.500</td></tr>
</table>

R//= tres Paquetes de dulces Valen 2.7</td></tr>
<tr><td>Solución 2
NO Entendi...</td></tr>
<tr><td>Razones que hacen fácil el problema</td><td>Razón 1: Fácil, porque era sumando´.</td></tr>
</table>

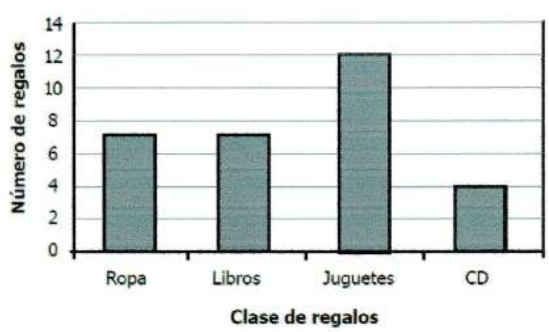
El problema N° 2 de la Tabla 31, es del ‘componente numérico – variacional’, porque representa procesos de variación y cambio de cantidades (MEN, 1998). Se clasifica como un problema aditivo de cambio, por la disminución e incremento que experimenta el precio del paquete de dulces (Nesher, 1982).

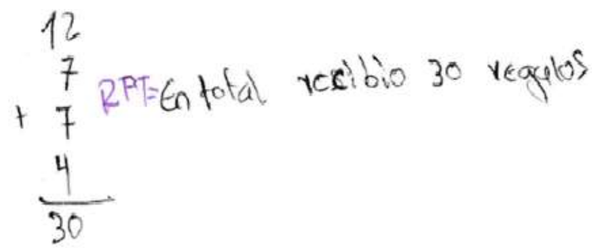
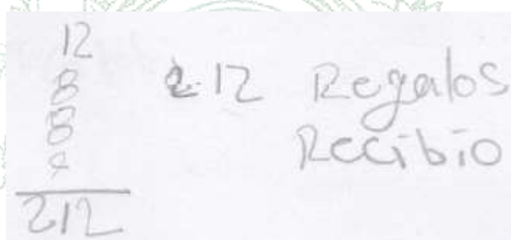
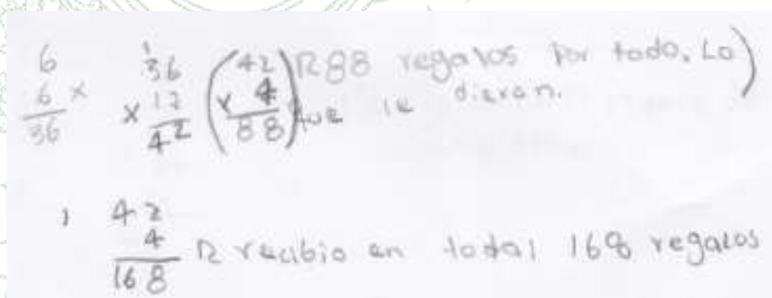
Yuri y María Paula, resuelven correctamente el problema dando respuesta verbal y procedimental. Ellas encuentran el valor unitario de los paquetes de dulces encontrando la mitad del precio de dos paquetes. Luego, plantean sucesiones aritméticas con el valor unitario sumándolo 'n' veces, para completar la tabla. Las estudiantes no sugieren la sucesión aritmética como tal en su proceso de solución, aunque en la entrevista ellas manifiestan que lograron encontrar los valores de los precios faltantes, sumando $900 al precio anterior. Con estos argumentos, Yuri y María Paula demuestran conocimientos en procesos aditivos: hechos aritméticos básicos y el recuento (Jimeno, 2006).

Jeferson, escribe 'no entendí' (el problema), sin realizar procedimientos alternativos para intentar comprenderlo (Jimeno, 2006), tampoco explica las razones que dificultaron dar una solución. Por tanto, el estudiante presenta Dificultades Aritméticas Matemáticas (DAM) en procesos y estrategias específicas en la resolución de problemas matemáticos (Jimeno, 2006) y en la comprensión y organización de la información de la tabla (Salgado y Terán, 2008) puesto que no utiliza los elementos matemáticos de la tabla para establecer relaciones entre las cantidades y los precios.

La Tabla 32, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de combinación, seleccionado de las Pruebas Saber 5° y propuesto a los estudiantes.

Tabla 32. Soluciones al problema aditivo de combinación.

Enunciado del problema N° 17	Edison recibió regalos en su fiesta de cumpleaños. La gráfica muestra la clase y el número de regalos que recibió.  ¿Cuántos regalos en total recibió Edison en su fiesta de cumpleaños?

	Solución 1 
	Solución 2 
Solución del problema	Solución 3  Transcripción: ‘recibió en total 168 galones’
Razones que hacen fácil el problema	Razón 1: ‘Todo está fácil, solo tiene que sumar la ropa, libros, juguetes y CD, da 30, treinta regalos le dan a Edison’.
	Razón 2: ‘Los problemas de gráficos son fáciles de resolver porque tiene la gráfica y uno puede sumar eso y uno tiene el resultado’.

El problema N° 17 de la Tabla 32, es del ‘componente aleatorio’, porque el estudiante puede comunicar sus ideas, usando el lenguaje propio de la estadística y sus diferentes formas de representación para interpretar datos (MEN, 1998). Se clasifica como un problema aditivo de combinación, porque tiene forma parte-pate-todo, relaciona diferentes cantidades disjuntas (Nesher, 1982).

Juan José interpreta la gráfica antes de decidir qué operación realizar para resolver el problema 'La gráfica está en escala, y muestra libros, ropa, juguetes y CD. Los juguetes son la mayor parte de regalos que le dieron a Edison, 12, la ropa le dieron 7, los libros son 7 y el CD 2'. También reconoce el significado de las barras grises 'Representan cada uno de los regalos que le dieron a Edison …' (Entrevista, del 9 /05 /2017).

La solución 1 del problema N° 17, Tabla 32, muestra un proceso aditivo entre los valores asignados a cada barra de la gráfica. Esta solución es la esperada, lo cual indica una lectura adecuada de los datos. Para Juan José, la gráfica proporciona la información necesaria para realizar una operación matemática y obtener un resultado, pero considera que debería ser más clara en la presentación de los datos en el eje vertical:

Juan José: 'La dificultad es que coloquen los números en orden y los números verdaderos, porque ¿cuáles son los números de la mitad?, uno no va a saber. Yo digo que coloquen los números del 1 al 14 para que lo entienda uno más fácil' (Entrevista, del 9 /05 /2017).

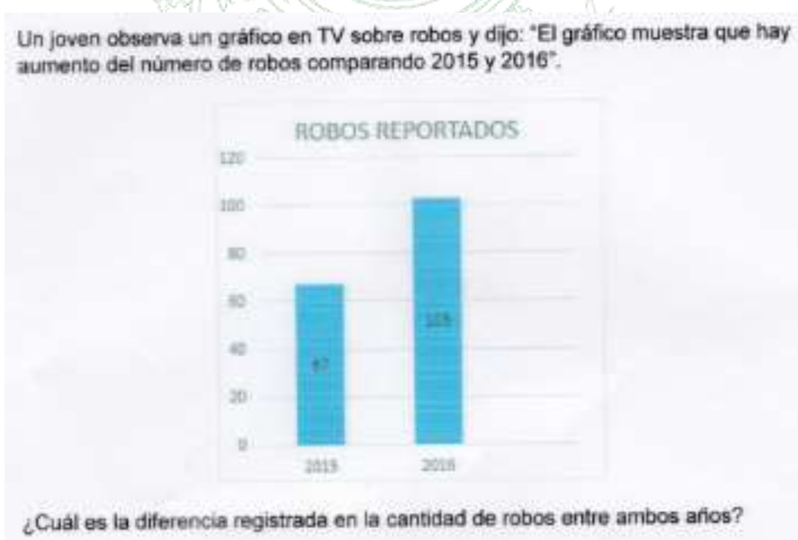
El estudiante reconoció que la barra de la ropa sube hasta el número 7 porque llega hasta la mitad de los números 6 y 8, pero dice que la falta del número puede generar confusión en la interpretación de los datos (Entrevista, del 9 /05 /2017). De acuerdo con lo expresado por Juan José, la ausencia de datos en los ejes de un gráfico de barras afecta la comprensión del problema matemático. Para el estudiante, en las gráficas es necesario explicitar los números, lo que representan y las relaciones que se establecen entre ellos, para que puedan ser interpretados los datos y comprendido el problema al proponer un proceso de resolución.

La confusión prevista por Juan José se expresa en la solución 2 del problema N° 17, Tabla 32, propuesta por Diego, quien realiza una suma, pero en la ropa y en los libros escribe el 8 como la cantidad de regalos. Diego también comete errores en el cálculo escrito: en la solución, no reconoce el símbolo operacional (+) y no realiza una adecuada alineación de los sumandos, con lo que obtiene una respuesta incorrecta (Jimeno, 2006; Salgado y Terán, 2008). El estudiante manifiesta dificultades en el conocimiento matemático en la operatoria que realiza en procesos aditivos.

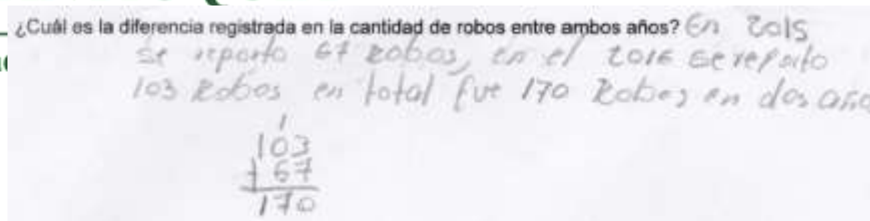
En la solución 3 del problema N° 17 de la Tabla 32, María J. también presenta dificultades para leer datos implícitos en la gráfica. Aunque ambas barras se ubican entre 6 y 8, ella asigna el 6 como cantidad de regalos en ropa y libros. Es evidente que la estudiante no comprendió el problema, porque realiza un proceso de resolución inconsistente con la pregunta (Jimeno, 2006). Ella efectúa multiplicaciones sucesivas entre los datos y algunas operaciones están planteadas de forma inadecuada. Estos errores, permiten afirmar, que María J presenta dificultades para elaborar la noción sobre la expresión ‘en total’ en el interrogante del problema (Salgado y Terán, 2008; Rico, 2012) además de presentar dificultades en el cálculo escrito (Jimeno, 2006).

La Tabla 33, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de comparación, adaptado[12] de las Pruebas PISA y propuesto a los estudiantes.

Tabla 33. Soluciones al problema aditivo de comparación.

Enunciado del problema N° 55	
Solución 1	

[12] Algunos problemas de las Pruebas PISA se tomaron en consideración para los problemas propuestos en el Escenario 2. Estos problemas requirieron la reescritura tanto de los enunciados como de los datos para adecuarlos al nivel quinto de primaria.

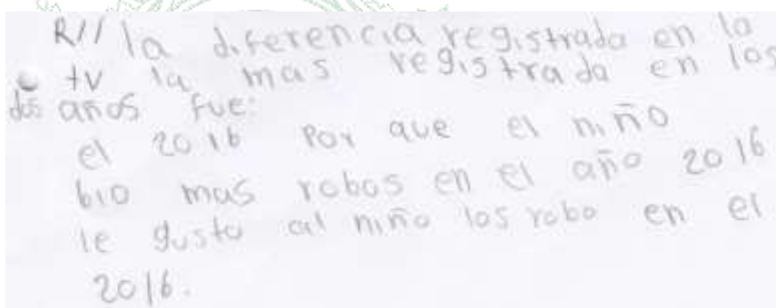

¿Cuál es la diferencia registrada en la cantidad de robos entre ambos años? En 2015 se reporto 67 robos, en el 2016 se reporto 103 robos en total fue 170 robos en dos años

$$\begin{array}{r} 103 \\ +\ 67 \\ \hline 170 \end{array}$$

Solución del problema

Transcripción: 'Se reportó 63 robos, en el 2016 se reportó 103 robos, en total fue 170 robos en dos años'

Solución 2


R// la diferencia registrada en la tv la mas registrada en los dos años fue: el 2016 por que el niño bio mas robos en el año 2016 le gusto al niño los robo en el 2016.

Transcripción: 'la diferencia registrada en la televisión …en los dos años: el 2016 porque el niño vio más robos en el año 2016…'

El problema N ° 55 de la Tabla 33, pertenece al 'componente aleatorio', requiere de la representación, lectura e interpretación de datos en contexto (MEN, 1998). Se categoriza como problema aditivo de comparación, porque se requiere encontrar la diferencia entre dos cantidades (Nesher, 1982).

Los estudiantes Cristian y Santiago J. proponen dos estrategias de solución muy diferentes entre sí. La primera solución del problema N° 55, Tabla 33, es una adición entre los robos de ambos años. En la respuesta verbal Cristian escribe '…en total fue 170 robos en dos años', presentando dificultades en la interpretación de los conceptos 'diferencia' y 'total' (Donovan y Bransford, 2005), no los distingue, puesto que hace la operación inversa a la requerida.

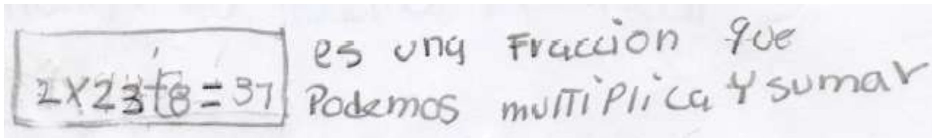
La segunda solución del problema N° 55, Tabla 33, es una respuesta verbal que se acerca a la solución esperada, pero sin procedimiento matemático que la sustente. Santiago da un significado de a la palabra ‘diferencia’, la asocia con la expresión ‘más que’ donde solo reconoce la cantidad más alta de robos, pero no la relaciona con los robos de la cantidad más baja, por ello no logra establecer la comparación algorítmica entre las cantidades.

Cada solución representa los modos de comprender el problema y están asociados con los usos y significados que cada estudiante confiere al concepto ‘diferencia’, de la manera como lo representan y en la forma de establecer relaciones entre el concepto y los datos (Rico, 2012). La confusión de los estudiantes evidencia un aprendizaje inadecuado de procesos aditivos en la comparación de cantidades. Este fenómeno afecta la manera como lo estudiantes utilizan la operatoria para resolver problemas, debido a que se modifican los significados que los niños atribuyen a los objetos matemáticos. Como los estudiantes desconocen algunas acepciones sobre lo que es una ‘diferencia’ (Noda, 2001), no las relacionan con los procedimientos matemáticos que están asociados con este concepto.

La Tabla 34, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, aditivo de igualación, seleccionado de un libro de texto de grado quinto y propuesto a los estudiantes.

Tabla 34. Soluciones al problema aditivo de igualación.

Enunciado del problema N° 65	Encuentra el número que cumple con la ecuación: $\boxed{x+8=31}$ Recuerda que X representa un número desconocido, parece una letra, pero representa un número que tú debes hallar.
Solución 1	3X10=31 porque en ninguna tabla hay un numero que alcanse a da (34) 31

Solución del problema	Solución 2  $\boxed{2X23+8=31}$ es una Fraccion que Podemos multiplica y sumar
Razones que hacen fácil el problema	Razón 1: ‘Fácil, porque el número que hubo que hallar era fácil y la operación era fácil sencilla de resolver’.

El problema N° 65 de la Tabla 34, corresponde al ‘componente numérico – variacional’, porque utiliza las variables para representar números, establecer relaciones entre ellos (MEN, 1998). Se clasifica como problema aditivo de igualación, porque contiene procesos de cambio y comparación entre cantidades, estableciendo igualdades (Nesher,1982).

En la solución 1 del problema N° 65, Tabla 34, Valeria interpreta la ‘X’ como el signo ‘por’ de la multiplicación. Ella omite la suma y solo identifica la ‘X’ al lado izquierdo y el resultado al lado derecho del igual, por esto, busca un producto que dé como resultado 31. Ella recupera rápidamente hechos numéricos -tablas de multiplicar- (Geary, 1994) para encontrar la multiplicación apropiada, como no la encuentra, justifica sus aproximaciones, mostrando habilidades comunicativas para presentar sus ideas y argumentar la imposibilidad de resolver correctamente el problema.

En la solución 2 del problema N° 65, Tabla 34, Angie confunde la variable ´X´ con el signo ‘por’, para ella indica hacer una multiplicación (Entrevista del 9/05/2017). Otro significado expresado por Angie para la ‘X’ es que representa ‘una letra’. En cualquiera de los casos, no relaciona esa ‘letra’ o signo, con la operación matemática planeada en la igualdad, es decir, no reconoce el uso de la ‘X’ en el contexto del problema.

Angie tampoco reconoce el concepto de igualdad, puesto que considera que una igualdad matemática supone realizar una operación y de acuerdo con esta interpretación, propone una expresión matemática inadecuada para resolver el problema. La estudiante manifiesta dificultades en el lenguaje matemático, al confundir el planteamiento de una igualdad matemática con las fracciones (Salgado y Terán, 2008).

Las estudiantes no comprendieron el problema, sus errores se originan en el desconocimiento de los conceptos ‘variable’ e ‘igualdad’, y en comprensión de las relaciones conceptuales entre las cantidades de la igualdad (Jimeno, 2006). Las estudiantes no prestaron atención a la aclaración que presenta el problema, sobre lo que representa la ‘X’ asumiendo sus propios significados.

La Tabla 35, muestra el análisis realizado a la solución del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de isomorfismo de medidas, adaptado de las Pruebas PISA y propuesto a los estudiantes.

Tabla 35. Solución al problema multiplicativo de isomorfismo de medidas.

Enunciado del problema N° 62

Solución del problema

Solución 1

AUTOS VENDIDOS	
Mes	Cantidad
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

Razones que hacen fácil el problema	Razón 1: 'Fácil porque en la gráfica decía toda la informacion para resolverlo'. Razón 2: 'Las gráficas pueden hacernos entender más fácil el problema, como a aquellos niños que no les da la mente para resolverlo'.

El problema N° 62, de la Tabla 35, se ubica en el 'componente aleatorio', porque requiere de interpretar datos relativos al entorno, mediante un adecuado tratamiento de la información (MEN, 1998). Se clasifica como problema multiplicativo de isomorfismo de medidas, porque relaciona los datos mediante proporcionalidad directa (Vergnaud, 1983) es asimétrico porque las cantidades no pueden intercambiarse (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

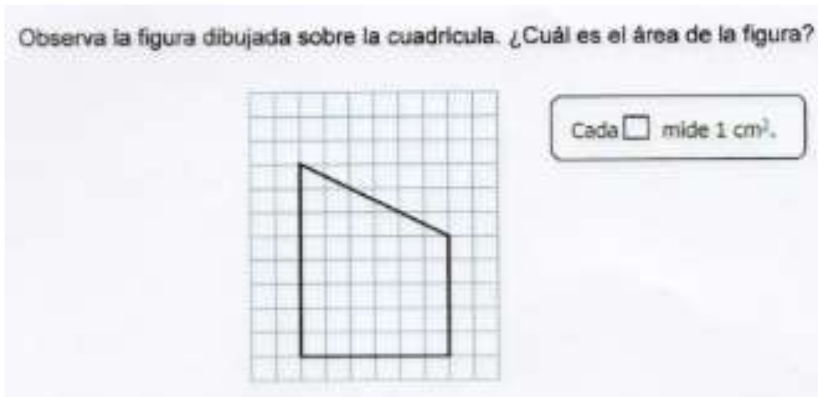
En la entrevista, Deisy y Sofía B. reconocen la información que ofrece la gráfica y atribuyen significados a sus elementos: la línea vertical y la horizontal, las bolitas azules. Exponen conocimientos matemáticos sobre las relaciones que se establecen entre los meses y los números de autos 'la bolita azul representa los autos que se vendieron en el primer mes, los autos que se vendieron en el segundo mes…' (Entrevista, del 9 /05 /2017).

Las niñas, identificaron una sucesión matemática de los números que representan los autos vendidos 'en cada mes parece que se está vendiendo de dos en dos'. Para resolver el problema, ellas realizan una recuperación automática de hechos numéricos (Jimeno, 2006) para relacionar la cantidad de autos vendidos por mes: 'como nos sabemos la tabla del dos nos fue fácil resolverlo' (Entrevista, del 9 /05 /2017).

Este problema fue resuelto de manera acertada por varios estudiantes. De acuerdo con Perales (2000) un problema se logra comprender cuando el estudiante logra identificar sus estructuras: semántica y funcional en el enunciado. Para las estudiantes, este problema es muy fácil de resolver, dado que el gráfico de puntos ofrece la información necesaria para comprenderlo. Estos estudiantes demuestran tener habilidades matemáticas para analizar información de un gráfico y para establecer relaciones entre los datos.

La Tabla 36, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de producto de medida, seleccionado de las Pruebas Saber 5° y propuesto a los estudiantes.

Tabla 36. Soluciones al problema multiplicativo de producto de medida.

Enunciado del problema N° 11	

Solución 1

Solución del problema

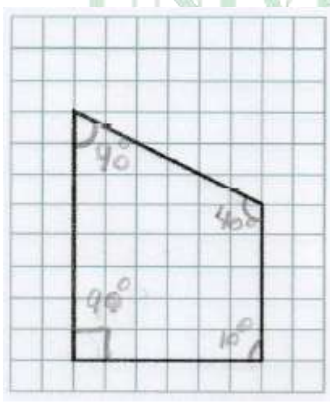
R/= 39cm²

Yo lo resolvi multiplicando basexaltura en el area de el rectangulo y en el area del triangulo conte los cuadros que estaban completos y los incompletos tenian la otra pieza al lado y de ahi saque la respuesta.

5x6=30+6=34+3=
39

Teniendo en cueta que cada cuadro mide 1cm²

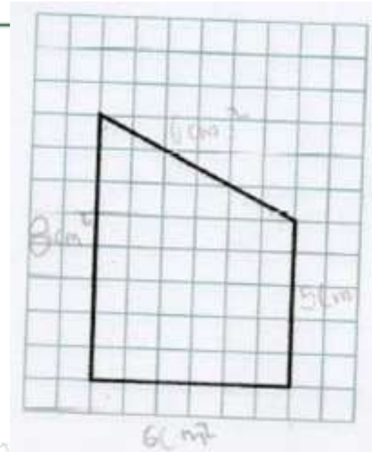
Solución 2

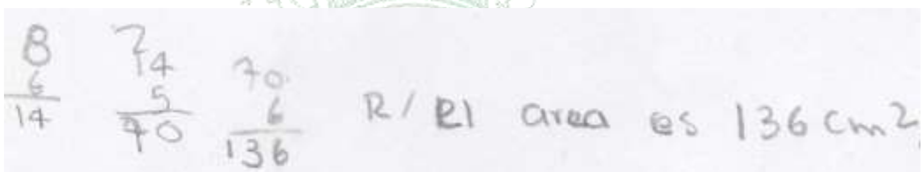


Cada ☐ mide 1 cm².

?El área de la figura es de 90°cm²

Solución 3





Razones que hacen fácil el problema	Razón 1: ‘Es fácil, pero hay que ponerle más mente…o sea, que hay que pensar más, y en esa parte suena como que fuera más difícil, pero es muy fácil’.

El problema N° 11, de la Tabla 36, pertenece al ‘componente geométrico – métrico’, porque requiere de una solución mediante la estimación de magnitudes (MEN,1998). Se clasifica como problema multiplicativo de producto de medidas, porque la relación entre cantidades se define como un producto cartesiano (Vergnaud, 1983) es simétrico porque sus cantidades pueden ser intercambiadas (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

En la solución 1 del problema N° 11, Tabla 36, Sara R. usa conceptos matemáticos, de procedimientos aritméticos y de diferentes estrategias de solución para hallar el área de la figura. Considera el trapecio como una figura compuesta entre un triángulo y un cuadrilátero, cuya medida de la superficie se puede hallar sumando las áreas de cada figura que lo compone. Para hallarlas, la estudiante reconoce que tanto el triángulo como el cuadrilátero está dividido en cuadritos que representan unidades cuadradas (Presentación problema 11, del 31 /03 /2017).

En el rectángulo cuenta la cantidad de unidades que tiene en los lados para hallar las dimensiones y aplicar la fórmula del área (base x altura). En el triángulo parece que no recuerda la fórmula matemática, y recurre a otra estrategia de solución mediante el conteo de los cuadrados que hay dentro de la figura: Primero cuenta los cuadritos completos, luego, arma cuadrados juntando piezas proporcionales entre sí. Finalmente, halla el área del trapecio y escribe el resultado con sus respectivas unidades.

En la solución 2 del problema N° 11, Tabla 36, Cristian presenta dificultades en el lenguaje matemático al confundir conceptos geométricos (Salgado y Terán, 2008). El estudiante interpreta el concepto del área como la medida de los ángulos de la figura.

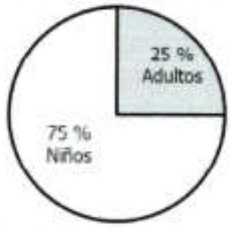
En la solución 3 del problema N° 11, Tabla 36, María J reconoce que cada cuadrito es una unidad cuadrada y con ellos haya la medida de los lados. Con estas medidas propone un proceso de solución inconsistente con el concepto de área. Suma algunas cantidades y multiplica otras, como si presentara confusiones con el concepto de perímetro (Salgado y Terán, 2008). En estas operaciones, evidencia diferentes errores en el cálculo escrito (Jimeno, 2006).

Para Jimeno (2006) la elección de una estrategia de solución de un problema, depende de las asociaciones que el estudiante realice entre el problema y las opciones de respuesta que este posea. Sara R. intentó recordar la respuesta más viable luego recurrió a estrategias alternativas esperando obtener la respuesta correcta.

En la entrevista, algunos estudiantes manifestaron sus comprensiones individuales sobre el concepto de área. Para Sara R., ‘El área es lo que tiene por dentro una figura’, para Valentina M., ‘es la suma de todos sus lados’ y para Deisy, es ‘Base por altura’ (Entrevista, del 9 /05 /2017). Otros estudiantes confundían el concepto de área con perímetro y volumen (Jimeno, 2006). La manera de interpretar elementos matemáticos en un problema, refleja el nivel de comprensión conceptual del enunciado y condiciona la elección los procedimientos de solución.

La Tabla 37, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición, adaptado de las Pruebas PISA y propuesto a los estudiantes.

Tabla 37. Soluciones al problema multiplicativo de partición.

<table>
<tr><td>Enunciado del problema N° 8</td><td>La siguiente gráfica presenta información sobre el porcentaje de niños y adultos que ingresaron a una función de teatro el fin de semana.


¿Cuál de las siguientes afirmaciones, acerca de los niños y adultos que ingresaron al teatro el fin de semana, es verdadera?
X Por cada adulto ingresaron cuatro niños.
❖ Por cada adulto ingresaron tres niños.
❖ Por cada niño ingresaron cuatro adultos.
❖ Por cada niño ingresaron tres adultos.</td></tr>
<tr><td>Solución del problema</td><td>Solución 1
NIÑOS ADULTOS
75 | 25
00 | 3
R// POR CADA NIÑO INGRESARON TRES ADULTOS.

Solución 2
25
× 75
125
+175
1.875</td></tr>
</table>

El problema N° 8, de la Tabla 37, pertenece al ‘componente numérico- variacional’, porque requiere plantear soluciones mediante el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón (MEN, 1998). Se clasifica como problema multiplicativo de partición, porque un conjunto de objetos se divide en un numero de partes iguales (Vergnaud, 1983). Es asimétrico porque sus cantidades no se pueden intercambiar (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

En la solución 1 del problema N° 8, Tabla 37, Valentina M. muestra competencias matemáticas para resolver problemas que requieren analizar la información del gráfico y establecer relación entre los datos. Ella plantea una proporcionalidad de 3 a 1 entre los datos del gráfico. Esta relación se expresa como cociente entre el porcentaje de niños respecto al porcentaje de adultos.

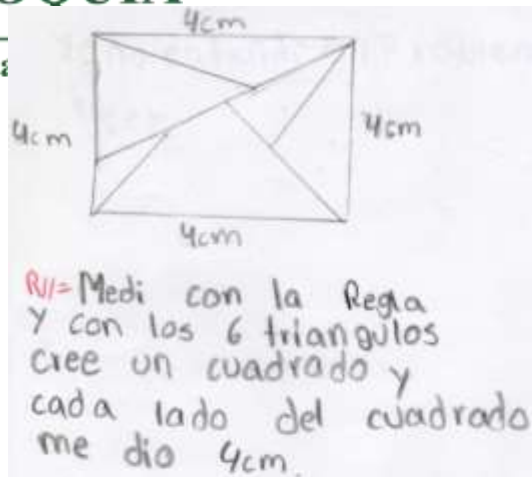
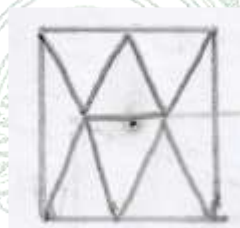
Para la estudiante, la gráfica expresa que ‘hay más niños que adultos’ y por eso dividió 75 entre 25, porque leyendo las afirmaciones del problema, ella se dio de cuenta que debía hacer una división. (Presentación problema 8, del 31 /03 /2017). Sin embargo, exhibe un ‘error’ al escribir la afirmación que no correspondía a su resultado, producto de una confusión entre las ideas de las afirmaciones. Según Schlöglmann (2007) estos errores matemáticos surgen por la falta de atención, por la velocidad de la solución o por la presión del tiempo disponible, entre otros.

En la solución 2 del problema N° 8, Tabla 37, Alison presenta Dificultades Aritméticas Matemáticas (DAM) en procesos y estrategias en la resolución de problemas, al proponer una solución inconsistente con el enunciado, que establece una relación inadecuada entre los datos (Jimeno, 2006). Otros estudiantes presentaron dificultades con características similares, lo que evidencia deficiencias en el conocimiento matemático que afectan la comprensión de los conceptos y la habilidad para resolver este tipo de problemas (del Valle y Curotto, 2008).

La Tabla 38, muestra el análisis realizado a las soluciones del problema aritmético de enunciado verbal, multiplicativo de partición, propuesto por docentes experimentados en la enseñanza de matemáticas a los estudiantes del grado quinto.

Tabla 38. Soluciones al problema multiplicativo de adición repetida.

Enunciado del problema N° 28	Jonathan usa triángulos equiláteros para hacer cuadriláteros. Cada lado de un triángulo equilátero mide 1 unidad. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrilátero que se compone de 6 triángulos equiláteros?

Solución del problema	Solución 1
	
	Solución 2
	

Este problema de la Tabla 38, pertenece al ‘componente geométrico – métrico’, requiere reconocer el uso de magnitudes y de las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas (MEN,1998). Se clasifica como problema multiplicativo de adición repetida, porque un número de figuras de igual tamaño se colocan juntas (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985) es asimétrico porque sus cantidades no pueden ser conmutables (Bell, Greer, Grimison y Magan, 1989).

La solución del problema N° 28, Tabla 38, requiere la comprensión de diferentes conceptos de la geometría plana y utilizar diferentes las relaciones y propiedades geométricas para construir la representación geométrica y matemática del enunciado. En las soluciones 1 y 2, Tabla 38, se aprecia que Paula y Sofía B. no logran realizar todo este proceso, manifestando dificultades en el pensamiento geométrico. Tal dificultad puede deberse a la complejidad del enunciado y de sus relaciones semánticas (Godino y Llinares, 2000), a la confusión con el concepto de perímetro y del olvido del procedimiento matemático para hallarlo (Salgado y Terán, 2008).

Figura 4: Solución del problema N° 28 usando material concreto.

Durante la entrevista, se proporcionó a las estudiantes los triángulos equiláteros para que representaran su solución del problema. En la imagen, se observa como Paula y Sofía B., ilustran la situación del enunciado de manera correcta.

Por medio de este material, las estudiantes lograron recordar las características específicas de los conceptos del problema: un triángulo equilátero: 'Es un triángulo de tres lados y sus lados son iguales' y es equilátero porque sus lados 'miden iguales'; un cuadrilátero: 'tiene cuatro lados' (Entrevista, del 9 /05 /2017). Saben que los cuadriláteros pueden ser un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo o un trapecio y que estas figuras se pueden armar juntando dos o más triángulos equiláteros.

Sin embargo, persiste la confusión con el concepto de perímetro, y divagan en las maneras de encontrarlo: 'Sumando los lados de la figura', 'Sumando base por altura', 'siendo yo cojo un metro y lo mido (cada lado) …a, Sumaria 1 más 1 más 1…', 'sumando cada lado de todos los triángulos y daría 18' (Entrevista, del 9 /05 /2017).

Según Perales citado en García (2011) combinar textos, graficas e imágenes explicativas en los enunciados de los problemas, contribuyen al uso de habilidades matemáticas para resolver problemas, porque simplifica el proceso de comprensión y posibilitan la representación mental del problema. Para las estudiantes, el material concreto ayuda resolver el problema, porque 'fue más fácil y más rápido usando los triángulos' y 'porque al dibujarlo no daría lo mismo'. Según las niñas, el uso del material concreto 'depende del problema y de la persona que lo resuelva' (Entrevista, del 9 /05 /2017) pero en todos los casos no es necesario.

Los problemas planteados a los estudiantes presentan soluciones que demuestran sus conocimientos matemáticos en la apropiación conceptual, en la elección de estrategias y en la explicación de los procesos de resolución. Varios estudiantes manifestaron dificultades para interpretar la información gráfica de algunos problemas, ya sea por desconocimiento de algunos conceptos matemáticos o por los significados que atribuyen a elementos matemáticos en el enunciado.

En el siguiente capítulo, se describen los resultados obtenidos del análisis realizado a los problemas y soluciones planteados por estudiantes y a las soluciones de los problemas propuestos por la investigadora.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

A continuación, se expone los resultados obtenidos en el proceso investigativo:

Los estudiantes lograron inventar problemas estructurados (Ayllón, Castro y Molina, 2010), coherentes y con estructura operatoria de una etapa con números de entre una y cinco cifras, en la competencia planeamiento y resolución de problemas (MEN, 2008). En su mayoría son problemas de procesos aditivos y multiplicativos, incluida la división (Castro, Rico, y Castro, 1995). Los tipos de problema predominantes son de cambio (Nesher, 1982), de isomorfismo de medidas y de partición (Vergnaud, 1983).

Los pensamientos matemáticos (MEN, 1998) más desarrollados en los problemas inventados por los estudiantes son el 'pensamiento numérico y los sistemas numéricos' y el 'pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos'. En algunos casos, se desarrollaron problemas en el 'pensamiento espacial y los sistemas geométricos' y el 'pensamiento métrico y los sistemas de medidas'. No hay registros de problemas inventados por los estudiantes en el 'pensamiento aleatorio y los sistemas de datos'.

Los estudiantes exhiben habilidades para inventar problemas matemáticos y para identificar las características de 'problemas no matemáticos'. Para los estudiantes, un problema es matemático cuando indaga sobre objetos, conceptos y procedimientos matemáticos._En la estructura de los enunciados inventados por los estudiantes se identifican varios elementos que constituyen un problema: pregunta, números, operaciones. Estos elementos también se reconocen en los argumentos de los estudiantes - entrevistas- cuando se refieren a las características de un problema matemático:

A la pregunta ¿Qué es para ustedes un problema matemático? Deisy expresa: 'es algo que pasa muy cotidianamente en la vida y que uno lo va a utilizar muy seguido y siempre va a hablar de números porque es matemático'. Para Sofía B.: 'son anécdotas que le pasan a uno pero que se trata con números, operaciones…' (Entrevista del 25 /04 /17). A la pregunta ¿Qué debe tener un problema para que sea matemático? los estudiantes responden: Deisy 'números difíciles y fáciles o letras'; Sofía B.: 'debe tener operaciones para poder ser matemáticos'; Eilen: 'para mí lo más importante son las preguntas…' (Entrevistas, del 25 /04 /17 y 26 /04 /17). Los estudiantes coinciden con los aportes teóricos de Ayllón, Castro y Molina, (2010); Espinoza, Lupiáñez y Segovia, (2013a); Romero, Martínez y Solórzano (1998) sobre los componentes que debe tener un problema: enunciado, datos y una pregunta, la cual requiere de un proceso de solución.

Los estudiantes del grado quinto exhiben tener conocimientos matemáticos cuando: reconocen algunos elementos matemáticos –tamaños, cantidades, signos operacionales, símbolos, unidades de medida-, realizan procedimientos algorítmicos y procesos de pensamiento[13], exponen ideas y opiniones sobre los problemas y proponen diversos métodos de solución (Godino, Batanero y Font, 2007) y reconocen sus habilidades y dificultades para inventar y resolver problemas.

Un problema es 'no matemático' cuando plantea situaciones no relacionadas con las matemáticas o soluciones que no requieran del uso de elementos matemáticos u operaciones matemáticas, Sara R.: 'un problema que tenía números y casi todo lo necesario, pero le faltaba información y la pregunta no tenía que ver con el problema, este problema no era tan matemático' (Entrevista, del 25 /04 /17).

En los problemas propuestos por la investigadora, los estudiantes manifiestan su conocimiento matemático al reconocer algunos conceptos relacionados con los diferentes pensamientos: conceptos numéricos como mitad, cuádruple, doble; conceptos geométricos como triangulo, cuadrado, clases de líneas y ángulos, área; conceptos de medición y longitud. Algunos estudiantes leen e interpretan datos en gráficas de barras y puntos mediante el pensamiento variacional.

En los problemas inventados por los estudiantes, resalta el sentido que dan a algunos aspectos asociados con los números y las operaciones: reconocen cantidades representadas en forma numérica, no en palabras. Al parecer, los signos y símbolos matemáticos que acompañan las cantidades no son elementos necesarios para la interpretación de los datos de un problema. Solo

[13] Los siguientes procesos mentales movilizan el pensamiento matemático: interpretar información, identificar datos, relacionar cantidades y tamaños, el recuento, representar un problema gráficamente, recordar hechos numéricos y preconceptos.

prestan atención a las cantidades, no establecen relaciones entre los tamaños de los objetos y sus valores numéricos.

Se aprecia dificultades en el conocimiento matemático en el uso que dan lo estudiantes a los signos y símbolos matemáticos en algoritmos y cantidades, en la diferenciación de unidades de masa y volumen para definir los conceptos de perímetro y volumen y para interpretar gráficos circulares. Según Socas (2011) los estudiantes manifiestan dificultades para distinguir las particularidades de estos conceptos, elementos y procesos matemáticos. Aunque los estudiantes manifiestan tener comprensión de diversos conceptos, poco utilizan expresiones matemáticas en la escritura de los problemas. Ellos prefieren utilizar un lenguaje informal, con enunciados limitados en información.

La recuperación de los hechos numéricos –tablas y fórmulas matemáticas- (Jimeno, 2008), la representación y organización de la información y la elaboración de los conceptos matemáticos (Salgado y Terán, 2008) son las dificultades que presentaron los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos verbales.

En el Escenario 1-invención y solución de problemas-[14], algunos estudiantes manifestaron dificultades para proponer problemas relacionados con el contexto de la situación exhibida en la imagen. Las dificultades en este Escenario están relacionadas con el énfasis en el uso de algoritmos y poca relación de los problemas matemáticos con situaciones reales (del Valle y Curotto, 2008). Tales dificultades están asociadas a los usos y significados que los estudiantes confieren a los conceptos matemáticos (Rico, 2012) y las habilidades matemáticas que exhiben al plantear problemas en diversos contextos y en diferentes formas de representación (Jimeno, 2006). Es decir, los estudiantes no logran relacionar conceptos cotidianos con objetos matemáticos, solo tienen en cuenta los elementos que puedan ser representados mediante procedimientos. Tal dificultad podría deberse a que los maestros de matemáticas utilizan la resolución de problemas para resolver situaciones elaboradas por el maestro y en lenguaje matemático, según el objetivo de la clase, sin tener en cuenta las experiencias reales cercanas a la cotidianidad de los estudiantes.

[14] En el Escenario 1, los estudiantes utilizan sus conocimientos matemáticos para proponer y resolver problemas sobre situaciones cotidianas presentadas imágenes.

En los problemas del Escenario 2 -problemas propuestos a estudiantes-[15], los estudiantes manifestaron comprensión del enunciado en los propuestos en libros de texto y los ‘problemas clásicos’. Estos problemas presentan información precisa, son descontextualizados[16] y sugieren los procesos aritméticos a realizar. Los problemas que presentaron dificultades en la comprensión, son los propuestos en las Pruebas Saber 5°, Pruebas PISA y por docentes experimentados en la enseñanza de matemáticas. Estos problemas se caracterizan por tener un enunciado contextualizado[17], requieren de lectura de enunciados amplios en información y variedad en estrategias de solución. Es necesario que, en las escuelas se promueva el aprendizaje de las matemáticas mediante problemas en diferentes contextos, para que los estudiantes mejoren su competencia matemática en resolución de problemas propuestos en pruebas externas.

La mayoría de los estudiantes consideran necesario realizar los procedimientos matemáticos y escribir una respuesta verbal al problema. Para ellos, ambos aspectos se deben desarrollar como demostración de sus razonamientos y para estar seguros de la respuesta (Entrevistas, del 25 /04 /17 y 26 /04 /17). Las soluciones de los problemas de los Escenarios 1 y 2, no presentan procesos para la interpretación de los datos, ni apropiación en el uso representaciones pictóricas del problema. La realización constante de estos procesos en las clases de matemáticas, podría favorecer la comprensión de los problemas y la interpretación de gráficos. El maestro de matemáticas podría enseñar a los estudiantes los pasos o etapas propuestas por Polya (1962) y Bravo (2006) para resolver problemas, siendo esta una práctica constante en la actividad matemática de los estudiantes (Capítulo 2: marco teórico, resolución de problemas).

Es significativa la cantidad de problemas ‘no estructurados’, estos presentan: redacción confusa, ausencia de una pregunta o de datos en el enunciado. Además, se aprecia incoherencia entre sus componentes (Reitman, 1964). Varios estudiantes no resolvieron algunos problemas, otros explicaron las dificultades que experimentaron para resolver el problema. También manifiestan dificultades matemáticas y deficiencias en procesos, habilidades y estrategias en la resolución de problemas (Jimeno, 2006; del Valle Coronel y Curotto, 2008).

---

[15] En el Escenario 2, los estudiantes resuelven una selección de problemas tomados de libros de texto, de las pruebas saber 5°, de las pruebas PISA y algunos propuestos por docentes del área de matemáticas.
[16] Los problemas descontextualizados son situaciones que no representan la cotidianidad de los estudiantes.
[17] Los problemas contextualizados refieren a situaciones reales que representan experiencias de los estudiantes, pero expresadas en lenguaje matemático.

Es común encontrar 'errores' en el cálculo escrito (Jimeno, 2006) que expresan dificultades aritméticas matemáticas (DAM) en proceso aditivos y multiplicativos. Los más evidentes son: olvido de algunos hechos aritméticos -las tablas y fórmulas matemáticas-, cálculos incorrectos, errores en el uso de símbolos numéricos y operacionales, errores algorítmicos, alineación incorrecta de las cifras y procedimientos inconsistentes.

Entre las dificultades significativas en el proceso de resolución de problemas, están: incorrecta relación entre los datos y las operaciones matemáticas escogidas, estrategias de solución inadecuadas e inconsistentes (Jimeno, 2006; Salgado y Terán, 2008). La dificultad prominente en las soluciones de los estudiantes, es la comprensión del problema. Se evidencian dificultades para establecer relación entre los datos y la pregunta, así como en la interpretación global del problema, ya que sus partes se interpretan por separado.

Para los estudiantes un problema es fácil cuando logran entenderlo y resolverlo con operaciones matemáticas. Un problema es difícil, cuando contiene conceptos matemáticos que no conocen y cuando se confunden con los signos matemáticos que acompañan las cantidades. Otra dificultad está asociada con la relación sujeto - conocimiento, Deisy: 'cuando una persona no sabe qué es eso…para ella es difícil el problema porque no lo conoce y no ha estudiado esos temas' (Entrevista, del 25 /04 /17).

Comparando los resultados obtenidos con los arrojados en la prueba piloto, en ambo casos los estudiantes prefieren utilizar números naturales y fraccionarios en los enunciados de los problemas que proponen. A diferencia de la prueba piloto, los resultados de esta investigación evidencian gran cantidad de 'problemas estructurados' muy similares entre sí, referidos al 'pensamiento numérico y los sistemas numéricos', con cantidades entre una y cinco cifras. La mayoría de las soluciones de los problemas, presentan procedimientos matemáticos aditivos y multiplicativos y explicaciones verbales como un método de solución. Nuevamente es representativa la cantidad de problemas sin algún tipo de respuesta.

A los docentes se sugiere que, aunque los estudiantes presenten dificultades en la solución escrita de un problema, tengan en cuenta que no es evidencia suficiente para considerar ausencias en el conocimiento matemático. Es necesario cuestionar el pensamiento de los estudiantes, mediante preguntas dirigidas, conversatorios o actividades grupales, para reconocer los conocimientos que ostentan pero que no hacen explícitos en sus soluciones escritas.

Inventar y resolver problemas son actividades matemáticas que confieren a los estudiantes conocimientos, competencias y habilidades de pensamiento para solucionar problemas matemáticos en situaciones reales. La invención de problemas libres como estrategia de aprendizaje, facilita procesos de resolución mediante la exploración los enunciados, la disertación de opiniones *y* la búsqueda de soluciones (Stoyanova, 1998). Resolver problemas implica el desarrollo de capacidades cognitivas y verbales (Castro, Rico y Castro, 1995), el uso de la creatividad, de estrategias (polya, 1962) y de conocimientos previos. En ambos procesos, el trabajo en grupo se constituye como un recurso que facilita la comunicación de los conocimientos matemáticos, tanto entre estudiantes como entre estos con el docente.

En las escuelas se hace necesario plantear en las clases de matemáticas (con mayor frecuencia) problemas matemáticos de gráficos circulares. Los resultados de este trabajo, informan las dificultades que tienen los estudiantes para leer e interpretar gráficos y organizar la información en un enunciado matemático (Salgado y Terán, 2008). Se sugiere presentar estos gráficos en imágenes reales de situaciones, debido a que los niños atribuyen significados cotidianos a objetos matemáticos de la imagen (Rico, 2012). Los estudiantes desconocen los conceptos matemáticos y solo prestan atención a la forma.

El docente de matemáticas en la Básica Primaria requiere promover la actividad matemática de los estudiantes, proponiendo tareas que requieran del planteamiento y resolución de problemas, que relacionen conceptos matemáticos con situaciones reales y que fomenten el uso de la imaginación y las experiencias cotidianas de los niños como elementos facilitadores en el aprendizaje de las matemáticas.

Se considera pertinente promover la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje de las matemáticas (Santos, 1997) en la básica primaria de la I.E. Alfonso López Pumarejo y demás instituciones del país. También, como contexto de enseñanza de las matemáticas (Ceballos y Blanco, 2008) para que los niños encuentren la aplicabilidad de las matemáticas en su vida cotidiana.

La metodología empleada en esta investigación 'invención de problemas' fue pertinente y adecuada para obtener la información sobre los conocimientos y dificultades asociadas al proceso de resolución de problemas. Porque se soporta en referentes teóricos referidos a la literatura en educación matemática, con la cual se orientó el proceso investigativo. Facilitó la obtención de variedad de datos tomados tanto de los enunciados como de las soluciones de los problemas. Contribuyó en la consecución del objetivo general y responder la pregunta de investigación.

Proponer dos escenarios favoreció analizar los planteamientos y las soluciones de los estudiantes desde dos perspectivas: una empírica y otra teórica, lo que permitió confrontar los planteamientos teóricos y los referentes curriculares del MEN, sugeridos en las Pruebas PISA y Pruebas Saber 5°. Los resultados obtenidos, sugieren que los estudiantes tienen habilidades matemáticas en la competencia 'planteamiento y resolución de problemas', principalmente en el componente numérico –variacional.

La entrevista grupal (Iñiguez, 2008) es un método adecuado para analizar las posturas personales y las construcciones colectivas del conocimiento matemático, que exhiben los estudiantes durante su actividad matemática. Este método genera un ambiente participativo mediante la confrontación de saberes. También se constituye como una experiencia propicia para el auto - reconocimiento de las dificultades en el aprendizaje.

Los elementos teóricos, conceptuales y metodológicos presentes en esta investigación, hicieron posible reconocer tanto los conocimientos matemáticos que manifiestan los niños de quinto de primaria cuando proponen y resuelven problemas, como las dificultades asociadas que afectan el aprendizaje de las matemáticas. También, contribuyeron en la reflexión pedagógica que directivos y docentes de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo, realizan cada año sobre los procesos de enseñanza y las metodologías desarrolladas en las clases de matemáticas, para fortalecer aquellos que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes y proponer acciones de mejora en los procesos que incidan de manera negativa en la construcción del conocimiento matemático.

En esta investigación, el tiempo y la diversidad de la información, fueron limitantes que no permitieron analizar a profundidad las consideraciones de los estudiantes sobre los problemas 'fáciles' y 'difíciles', como posibles causantes de dificultades en los conocimientos matemáticos. Sin embargo, fue posible reconocer que para los niños un problema 'es fácil' cuando pueden recurrir a la recuperación automática de hechos numéricos, algoritmos y procedimientos -conocimientos previos- (Jimeno, 2006) para resolver el problema. Un estudiante expresa que los procedimientos ya realizados en otros problemas o en las evaluaciones le ayudaron a resolver el problema sin tener que realizar los procedimientos requeridos en la solución, Juan José: 'la evaluación me dio la ventaja…para ahorrar tiempo' (entrevista, del 26/04/17).

Un problema 'es difícil' cuando alude a un término desconocido, es muy largo o cuando le falta información. Para Sara R.: 'un problema es difícil cuando dice sobre un elemento matemático que no conoce…', según Deisy: 'cuando una persona no lo sabe qué es eso…para ella es difícil el problema porque no lo conoce y no ha estudiado esos temas' (entrevista, del 25/04/17).

En las entrevistas, algunos estudiantes manifestaron que es más fácil resolver un problema, para Alejandra: 'es más fácil resolver porque uno tiene una mostración en la pregunta'. Para otros estudiantes, es más fácil inventar problemas, María Paula: 'inventar es más fácil porque ya se sabe cuál es la respuesta' porque según ella, 'no se sabe que es lo que el otro espera que se haga para responder'.

En esta investigación, también faltó realizar el análisis sobre las preferencias de los estudiantes para inventar problemas con números naturales y fraccionarios. Estos temas podrían indagarse en una posterior investigación.

En la siguiente sección, se enuncian algunas propuestas para futuras investigaciones, relacionadas con el problema de esta investigación.

Propuestas para futuras investigaciones

Futuras investigaciones en Educación Matemática, podría indagar sobre los conocimientos matemáticos y dificultades asociadas con las competencias de comunicación, razonamiento y modelación matemática.

Existen factores circunstanciales que, de manera indirecta, dificultaron la invención de los problemas y la propuesta de soluciones correctas, estos son: el tiempo, las interacciones grupales, los procedimientos 'paso a paso' y el sentido de las matemáticas en la vida real (Entrevistas, del 25 /04 /17 y 26 /04 /17). Sería pertinente investigar de manera profunda, las condiciones logísticas, educativas, relacionales y ambientales, que propicie el maestro en las clases de matemáticas y que puedan conllevar a dificultades en el aprendizaje.

Se propone retomar el presente proceso investigativo, con el planteamiento de problemas en los diferentes componentes (MEN, 1998), que incluyan las sugerencias de los estudiantes en las entrevistas, para determinar mejoras en el aprendizaje de las matemáticas, mediante el proceso de resolución de problemas.

También se propone indagar las soluciones novedosas y los procedimientos inconsistentes -inapropiados- (Jimeno, 2006) de problemas matemáticos, a fin de profundizar en el reconocimiento de los sentidos y significados que los estudiantes confieren a los conceptos matemáticos.

Nuevas investigaciones, podrían estar orientadas al uso del material concreto en la resolución de problemas matemáticos, y como este recurso educativo puede favorecer la comprensión de conceptos matemáticos (Rico, 2012) o como contribuyen al uso de habilidades matemáticas para resolver problemas (Perales, 2000).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, C. (2011). *Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 999-1007). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ayllón, M. F. (2005). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación*. Universidad de Granada, España.

Ayllón, M. F. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Sin publicar.

Ayllón, M. F., Castro, E., Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. *En Investigación en educación matemática XIV* (pp. 223-234). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Bell, A., Creer, B., Grimison, L. y Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in mathematics Education*, *20*(5), 434-449.

Bohórquez, Carlos Arturo; Rivera, Vladimir; García, Bernardo (2012). *Competencia matemática pensar y razonar: un estudio con la media aritmética.* En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 117-123). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Bravo, C. y Benjumea, R. (2016). Informe para comité técnico, sesión 2. Saber 3°, 5°, 7° y 9°. Prueba: matemáticas. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/educational-institutions/saber-test-3-5-7-and-9-institutions2/documents-saber-3-5-and-9

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1993). Problem posing. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Callejo, M. L. (2015). Aprender (a enseñar) matemáticas. Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. *Avances y realidades de la educación matemática*, *46*, 93, Pp. 93-112.

Castro, E. (1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R., Luengo, B., Gómez, M., Camacho y L., Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Una empresa docente.

Cazares, J. A., Castro, E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. Aula, 10, 19-39.

Ceballos, J. P. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.

Climent, N., y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional: Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(3), 387-404.

Codina, A. y Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. 125-135.

Cohen, L. y L. manion (2000). Research Methods in Education. London, Routledge.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2000). Validity and reliability. Ch, *5*, 105-120.

de Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma: revista de matemáticas*. *Matematika aldizkaria*, (19), 5-25.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

de Innovación Educativa, S. (2008). Aprendizaje basado en Problemas. Madrid. UPM.

del Valle Coronel, M. y Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias,* 7(2), 11.

Deslauriers, J. (2004). Investigación cualitativa: Guía práctica. Editorial Papiro: Pereira – Colombia.

Donovan, M. S., y Bransford, J. D. (2005). *How students learn history, science and mathematics in the classroom*. National Academy Press: Washington, DC.

Durango, J., Rivera, M. (2013). *Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de educación básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo.* En Gallego, A. P. (Ed.), Revista Científica (pp. 326-329). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Espinoza, J. (2013). *Resolución e invención de problemas en la Educación Matemática.* Comunicación presentada en XV Evento internacional MATECOMPU 2013: la enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación. Matanzas, Cuba.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2), 1-12.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., y Segovia, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia*, 29(1), 58-81.

Espinoza, J., Lupiáñez, J., L., Segovia, I. (2013a). Características del talento matemático asociadas a la invención de problemas. *Revista científica*, (Edición especial), 191-196.

Espinoza, J., Lupiáñez, J., L., Segovia, I. (2013b). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio.* En Ramírez, Alexa; Morales, Yuri (Eds.), I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (pp. 899-911). Santo Domingo, República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

Fernández Bravo, J. A. (2006). Algo sobre resolución de problemas matemáticos en educación primaria. *Sigma*, (29), 30.

Fernández, E., y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(1), 53-71.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.

Fitzsimons, G. E. (2006). *What counts as mathematics? Technologies of power in adult and vocational education*. Dordrecht: Kulwer academic Publisher.

Flores, J. I. R. (1990). *Investigación naturalista en educación: una revisión crítica*. Promolibro.

Floriano, L.; Floriano, E.; Tovar, B. (2012). *Competencia matemática plantear y resolver problemas: el caso de la mediana como medida de tendencia central.* En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 29-34). Medellin: Sello Editorial Universidad de Medellín.

García, J. J. G. (2011). *Didáctica de las ciencias: modelizar y resolver problemas en la educación en ciencias experimentales*. Unipluriversidad, Universidad de Antioquía, Colombia.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, 12(1), 70-92.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de Matemáticas. VI Jornadas Regionales de Educación Matemática. Murcia, España.

Hernández, C. A. (2001). Aproximación a un estado del arte de la enseñanza de las ciencias en Colombia. *Estados del arte de la investigación en educación y pedagogía en Colombia*. Bogotá: *Icfes*, *Colciencias*, Sicolpe.

Hiebert, J. (2013). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. New York: Routledge.

ICFES, (2015a). Establecimientos Educativos. Guía de Interpretación y Uso de Resultados de las pruebas Saber 3°, 5° y 9°. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jspx

ICFES, (2015b). Resultados de quinto grado en el área de matemáticas. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/paginasIntermediasBusquedaAvanzada/paginaMunicipio.jspx

ICFES, (2016a). Establecimientos Educativos. Guía de Interpretación y Uso de Resultados de las pruebas Saber 3°, 5° y 9°. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jspx

ICFES, (2016b). Resultados de quinto grado en el área de matemáticas. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/paginasIntermediasBusquedaAvanzada/paginaMunicipio.jspx

Imbo, I., y Vandierendonck, A. (2008). Effects of problem size, operation, and working-memory span on simple-arithmetic strategies: differences between children and adults?. *Psychological Research*, *72*(3), 331-346.

Iñiguez, L. (2008). *Métodos cualitativos de investigación en ciencias sociales*. Entrevista grupal. Guadalajara: Maestría en Ciencias Sociales, Universidad de Guadalajara.

Jimeno, M. (2006). ¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas? *Barcelona: Octaedro*.

Juvanteny, M. A., Jiménez, E. B., García, I., Úbeda, L. M., y Moratonas, M. P. (2015). Una propuesta metodológica para el diseño, gestión y evaluación competencial de estrategias de resolución de un problema multiplicativo combinatorio. *NÚMEROS*, *89*. 69-85.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-127). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associate.

León, O. G. y I. Montero (2003). *Métodos de Investigación en Psicología y Educación*. Madrid: McGraw Hill, Interamericana de España.

Lin, P. J. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Lupiañez, J. L. (2015). Lo ordinario y lo extraordinario en el aula de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (15), 253-268.

Marín, A., y Lupiáñez, J. L. (2005). Principios y estándares para la educación matemática: una visión de las matemáticas escolares. *SUMA*, 48, 105-110.

MECD (2013). PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español. Vol (1): resultados y contexto. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310

MEN (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales. Bogotá: *Magisterio*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: *Magisterio*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mestre J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. Journal of Applied Developmental *Psychology*, 23(1), 9-50.

Munarriz, B. (1992). Técnicas y métodos en investigación cualitativa. A. Coruña: Universidade da Coruña, *Servizo de Publicacions*, 101-116.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Commission on Standards for School Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Natl Council of Teachers of.

Navarrete, J. M. (2000). El muestreo en la investigación cualitativa. *Investigaciones sociales, 4*(5), 165-180.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction Word problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Rombert (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noda, M. A. (2001). La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *47*, 3-18.

Obando, G., y Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Revista Educación y Pedagogía, 15(35), 185-199.

OECD (2015). Programme for international student assessment PISA. Results from PISA 2015. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Colombia.pdf

Osorio, Y. A. G., y Ayala, N. A. R. (2013). Dificultades en la resolución de problemas multiplicativos. *Revista Científica*, 197-200. Bogotá, Colombia.

Parra, C., y Saiz, I. (1998). *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones*. Paidós.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Nueva York, Wiley y Sons.

Reitman, W. R. (1964). Heuristic decision procedures, open constraints, and the structure of ill-defined problems. *Human judgments and optimality*, 282-315.

Rico, L. (2012). *Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática*. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1(1). 1-20.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). Aspectos básicos sobre el análisis de datos cualitativos. *Metodología de la investigación cualitativa*, Málaga: Aljibe. 197-218.

Romero, L. R., Martínez, E. C., y Solórzano, J. A. C. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, (10), 19-39.

Salgado, A., y Terán, N. (2008). Dificultades infantiles de aprendizaje. Manual Orientativo para Padres y Educadores. *Editorial Grupo cultural*, Madrid: España.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México DF, México: *Iberoamericana*.

Schleppegrell, M. J., y Bowman, B. (1995). Problem-posing: A tool for curriculum renewal. ELT Journal, 49(4), 297-306.

Schlöglmann, W. (2007). Student errors in task-solving processes. Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics education. 359-368.

Sheikhzade, M. (2008). *Promoting skills of problem-posing and problem-solving in making a creative social studies classroom*. Presentado en la 4th Global Conference, Oxford. (pp. 17-19).

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM (Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik), 95*(2), 67-72.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75-80.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154. Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio siglo XXI*, *29*(2), 199-224.

Stoyanova, E. (1998). *Extending and exploring students "problem solving" via problem posing: a study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young australians*. Tesis doctoral, Universidad de Edith Cowan, Australia.

Tallaferro, D. (2006). La formación para la práctica reflexiva en las prácticas profesionales docentes. *Educere*, *10*(33), 269-273.

Vasilachis de Gialdino, I. (1992). *Métodos cualitativos I. Los problemas teórico-epistemológicos*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Londres, Reino Unido: Academy Press.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Facultad de Educación