

# **Transición de fase en algunos modelos de percolación**

Por:

**DIEGO ALEJANDRO GALLEGO CEBALLOS**

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO  
DE MATEMÁTICO**

Orientador:

**PROF. ALEJANDRO ROLDAN CORREA**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS**

2021

# ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN . . . . .	4
1.. MODELO DE PERCOLACIÓN DE ARISTAS SOBRE $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	7
1.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	7
1.2. EL MODELO . . . . .	7
1.3. TRANSICIÓN DE FASE . . . . .	9
1.4. REFINAMIENTO DE COTAS PARA $p_c$ . . . . .	15
2.. MODELO DE PERCOLACIÓN SOBRE ÁRBOLES . . . . .	16
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	16
2.2. EL MODELO . . . . .	16
2.3. PERCOLACIÓN Y TRANCISIÓN DE FASE . . . . .	17
3.. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN BIENAYMÉ-GALTON-WATSON . . . . .	21
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	21
3.2. EL MODELO . . . . .	21
3.3. PROCESO BGW Y EL MODELO DE PERCOLACIÓN DE ARISTAS SOBRE $\mathbb{T}_+^d$ . . . . .	27
3.4. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN EN AMBIENTE VARIABLE CON SELECCIÓN. . . . .	27
4.. PERCOLACIÓN DE ACCESIBILIDAD SOBRE $\mathbb{T}_+^d$ . . . . .	30
4.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	30
4.2. EL MODELO . . . . .	30
4.3. HOUSE OF CARDS (HOC) . . . . .	31
4.4. ROUGH MOUNT FUJI (RMF) . . . . .	32

5.. PERCOLACIÓN DE ACCESIBILIDAD EN ÁRBOLES ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICOS	<b>38</b>
5.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	38
5.2. EL MODELO . . . . .	38
BIBLIOGRAFÍA . . . . .	<b>42</b>

# INTRODUCCIÓN

Percolación, como área de la probabilidad, estudia modelos que sirven para representar el transporte de un fluido, como gas o agua, a través de un medio poroso, como una roca. Los poros están conectados por canales que pueden estar abiertos o cerrados, permitiendo o no el paso del fluido. La cuestión fundamental, en estos modelos, es determinar condiciones bajo las cuales es posible que el fluido atraviese el medio.

Supongamos que sumergimos una gran roca (porosa) en un cubo de agua, ¿Cuál es la probabilidad de que el centro de la roca se moje? Broadbent y Hammersley [3] formularon un modelo estocástico simple para tal situación, llamado “*Modelo de Percolación*”. En dos dimensiones, el modelo puede definirse como sigue. Sea  $\mathbb{Z}^2$  el retículo cuadrado plano<sup>1</sup> y sea  $0 < p < 1$ . Cada arista de  $\mathbb{Z}^2$  es declarada *abierta* con probabilidad  $p$  y *cerrada* con probabilidad  $1 - p$ , independientemente de todas las demás aristas. Las aristas de  $\mathbb{Z}^2$  representan los canales internos de la roca, y el parámetro  $p$  es la proporción de canales que son lo suficientemente anchos para permitir que el agua pase por ellos. Pensamos que la roca está modelada por una sección grande y finita de  $\mathbb{Z}^2$  (ver Figura 1). Al sumergir la roca en el agua, un vértice  $x$  dentro de la roca se humedece si y sólo si existe un camino en  $\mathbb{Z}^2$  desde  $x$  a algún vértice en el borde de la roca, utilizando únicamente aristas abiertas. La Teoría de Percolación se ocupa principalmente de la existencia de tales “caminos abiertos”.

Si eliminamos las aristas cerradas, nos queda un subgrafo aleatorio de  $\mathbb{Z}^2$ . Es de especial interés estudiar la estructura de este subgrafo, particularmente con respecto a la forma en que esta estructura depende del valor de  $p$ . Es natural suponer que la fina estructura de los canales interiores de la roca son demasiado pequeños en comparación con el tamaño total de la roca. En tales circunstancias, la probabilidad de que un vértice cerca del centro de la roca sea mojado por el agua que penetra la roca desde su superficie, se comporta de manera similar a la probabilidad de que este vértice sea el vértice final de una trayectoria infinita de aristas abiertas en  $\mathbb{Z}^2$ . Es decir, a gran escala, la penetración de agua hacia el interior de

---

<sup>1</sup>Con abuso de notación usual, por  $\mathbb{Z}^d$  denotamos el grafo con conjunto de vértices  $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}\}$  y conjunto de aristas  $\{((x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d)) : |x_1 - y_1| + \dots + |x_d - y_d| = 1\}$ .

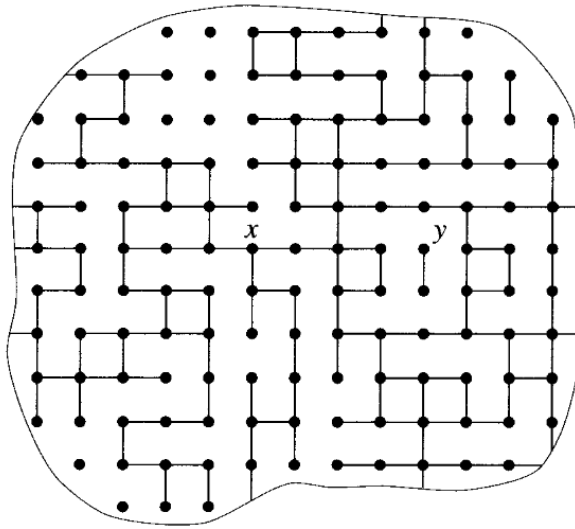


Figura 1: Bosquejo de una roca porosa 2-dimensional. Las líneas indican las aristas abiertas; las aristas cerradas han sido omitidas. Si la roca es sumergida en agua, el vértice  $x$  será mojado por la penetración del agua, pero el vértice  $y$  permanecerá seco.

la roca está relacionada con la existencia de conjuntos infinitos de vértices conectados por caminos abiertos.

¿Cuándo pueden existir dichos conjuntos infinitos? Broadbent y Hammersley [3] respondieron esta pregunta probando la existencia de un parámetro crítico,  $p_c \in (0, 1)$ . Cuando  $p < p_c$ , todos los conjuntos de vértices conectados por caminos abiertos son finitos; pero cuando  $p > p_c$ , existe un conjunto infinito (tales comentarios deben interpretarse con “probabilidad 1”). La existencia de dicho valor crítico  $p_c \in (0, 1)$ , se conoce también como existencia de *transición de fase*. Harris [9] mostró que  $p_c \geq 1/2$ , y veinte años después, Kesten [11] probó que  $p_c = 1/2$ . Aizenmann, Kesten y Newman [1] probaron que, cuando  $p > p_c$ , hay un único conjunto infinito de vértices conectados por caminos abiertos.

El modelo de percolación descrito tiene sentido y es matemáticamente interesante no sólo sobre  $\mathbb{Z}^2$ , sino también para  $\mathbb{Z}^d$ , con  $d \geq 2$ . Así mismo puede extenderse a otros grafos, obteniendo resultados interesantes y sorprendentes asociados a la estructura del grafo, ver por ejemplo Grimmett [8].

El modelo de percolación de aristas planteado anteriormente, tiene propiedades interesantes cuando se plantea sobre un grafo con estructura de árbol infinito. Este grafo tiene propiedades que nos permite calcular no sólo el valor exacto del parámetro crítico para la

transición de fase, sino también la probabilidad exacta del evento de percolación (existencia de caminos abiertos infinitos).

Recientemente, han sido desarrollados otros modelos de percolación, conocidos como *Percolación de Accesibilidad*, motivados desde la biología evolutiva. En su forma más general, el problema de percolación de accesibilidad se puede formular de la siguiente manera. Considere un grafo  $G = (V, E)$  donde cada vértice  $u \in V$  está etiquetado por un número aleatorio de valor real  $X_u$  extraído de una distribución continua. Decimos que un camino entre dos vértices  $u$  y  $v$  es accesible si los números aleatorios a lo largo del camino aumentan monótonamente. El interés en este modelo es determinar la probabilidad de existencia de caminos accesibles cuando la distancia entre  $u$  y  $v$  es grande en relación al tamaño del grafo. En particular, cuando el grafo es infinito, el interés es determinar la existencia de caminos infinitos accesibles. Motivaciones y variantes de modelos de percolación de accesibilidad pueden encontrarse en Krug [13].

En esta monografía estudiamos el fenómeno de transición de fase en los modelos de percolación antes descritos. En el primer capítulo, estudiamos el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$  probando la existencia de transición de fase y estableciendo cotas para el parámetro crítico. En el segundo capítulo, estudiamos el modelo de percolación de aristas sobre árboles, determinando la probabilidad exacta de percolación y el valor del parámetro crítico que determina la transición de fase. En el tercer capítulo, presentamos los procesos de ramificación de Galton-Watson y su conexión con los modelos de percolación sobre árboles. En el cuarto capítulo, estudiamos el modelo de percolación de accesibilidad sobre árboles regulares infinitos, siguiendo los enfoques “*House of Cards*” y “*Rough Mount Fuji*”. Finalmente, en el capítulo 5, estudiamos el modelo de percolación de accesibilidad sobre árboles esféricamente simétricos y su conexión con procesos de ramificación en ambiente variable con selección.

# Capítulo 1

## Modelo de Percolación de aristas sobre $\mathbb{Z}^d$

### 1.1. Introducción

En este capítulo introducimos el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$ , en la Sección 1.2 damos algunas definiciones y conceptos básicos y en la Sección 1.3 presentamos resultados referentes a la transición de fase del modelo.<sup>1</sup>

### 1.2. El modelo

Denotamos  $\mathbb{Z}^d$  como el conjunto de las  $d$ -tuplas de números enteros, es decir,  $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, d, d \geq 1\}$ . Podemos construir el grafo  $d$ -dimensional asociado  $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}^d)$ , llamado también red hipercúbica  $d$ -dimensional, donde  $\mathcal{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\}$  es el conjunto de aristas entre vecinos más próximos. Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  denotamos  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ . Por simplicidad nos referiremos a  $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}^d)$  como  $\mathbb{Z}^d$  de ahora en adelante.

A cada arista de  $\mathbb{Z}^d$  le asignamos el estado de abierta o cerrada de la siguiente manera, consideremos  $\chi := \{X_e, e \in \mathcal{E}^d\}$  como una familia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, con distribución Bernoulli de parámetro  $p$ , de esta manera:

$$\mathbb{P}_p(X_e = 1) = 1 - \mathbb{P}_p(X_e = 0) = p.$$

Para cualquier  $e \in \mathcal{E}^d$ ,  $p \in [0, 1]$  y donde  $\mathbb{P}_p$  denota la medida de probabilidad asociada a  $\chi$ . La esperanza asociada a esta medida de probabilidad será denotada por  $\mathbb{E}_p$ .

---

<sup>1</sup>Los resultados presentados en este capítulo pueden consultarse en [5].

De manera más formal, nuestro espacio muestral será  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$ . La  $\sigma$ -álgebra que usaremos, es la generada por los subconjuntos finitos de  $\Omega$  (eventos cilíndricos). La medida de probabilidad  $\mathbb{P}_p$  será la medida producto en  $\Omega$ . Para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $X_e$  es la proyección de la coordenada  $e$ , es decir:

$$X_e(\omega) = \omega(e).$$

Cuando  $X_e = 1$  decimos que la arista  $e$  está abierta y cuando  $X_e = 0$  decimos que la arista  $e$  está cerrada. Llamaremos *camino* a un conjunto de aristas  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} \in \mathcal{E}^d$ ,  $n \geq 1$ , donde  $e_i = \{x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son distintos y  $y_i = x_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Diremos que un camino es abierto si cada uno de sus aristas está abierta. Dos puntos  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  estarán *conectados* si existe un camino abierto  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  tal que  $e_1 = x$  y  $e_n = y$ ; si  $x$  y  $y$  están conectados lo denotamos como  $x \leftrightarrow y$ , por definición diremos que  $x \leftrightarrow x$ . Notemos que la conectividad define una relación de equivalencia; denotamos por  $C_x := \{y \in \mathbb{Z}^d | y \leftrightarrow x\}$  a la clase de equivalencia de  $x \in \mathbb{Z}^d$  y la llamaremos *aglomerado* de  $x$ . Denotamos por  $C$  al aglomerado del origen por simplicidad en la notación.

En este modelo es de interés estudiar la cardinalidad de  $C$ , específicamente determinar la probabilidad de que  $C$  sea infinito. Denotamos por  $|C|$  a la cardinalidad de  $C$ . Observe-mos que la distribución de  $|C|$  y  $|C_x|$  son la misma, pues  $\mathbb{P}_p$  es invariante sobre traslaciones. Ahora, considerando la variable aleatoria  $|C|$  definimos:

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C| = \infty),$$

y por las propiedades del complemento, también podemos escribirla de la forma

$$\theta(p) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| = i).$$

Es fácil ver, que  $\theta(p) = 1$  si  $p = 1$ , pues de esta manera todos sus aristas estarán abiertas con probabilidad 1 y el origen estará conectado con todos los vértices de  $\mathbb{Z}^d$ ; además,  $\theta(p) = 0$  si  $p = 0$ , ya que todos las aristas estarán cerradas con probabilidad 1, es decir el origen estará conectado sólo consigo mismo. En la siguiente sección estudiamos la función  $\theta(p)$  para  $0 < p < 1$ .



### 1.3. Transición de fase

En el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$ , llamamos *transición de fase* a la existencia de un *valor crítico*,  $p_c \in (0, 1)$ , tal que  $\theta(p) = 0$  si  $p < p_c$  y  $\theta(p) > 0$  si  $p > p_c$ . En esta sección mostramos la no existencia de transición de fase para  $d = 1$  y probamos la transición de fase para  $d \geq 2$ .

**Teorema 1.3.1** *No existe transición de fase para el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}$ .*

**Prueba:** Primero escribamos el evento  $\{|C| = \infty\}$  de la siguiente manera

$$\{|C| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [\{0 \leftrightarrow n\} \cup \{0 \leftrightarrow -n\}].$$

Ahora definamos el evento  $A_n$  como

$$A_n = \{0 \leftrightarrow n\} \cup \{0 \leftrightarrow -n\}.$$

Claramente  $A_{n+1} \subseteq A_n$ .

De esta manera

$$\mathbb{P}(|C| = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(\{0 \leftrightarrow n\}) + \mathbb{P}(\{0 \leftrightarrow -n\}) - \mathbb{P}(\{-n \leftrightarrow n\}) \\ &= p^n + p^n - p^{2n} \\ &= 2p^n - p^{2n} \end{aligned}$$

Así, para  $0 < p < 1$ , tenemos que

$$\mathbb{P}(|C| = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2p^n - p^{2n}) = 0.$$

De esta manera no existe  $p \in (0, 1)$  tal que  $\theta(p) > 0$ . □

A fin de probar transición de fase para el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$ , cuando  $d \geq 2$ , introducimos los siguientes resultados.

**Lema 1.3.1** *La función  $\theta(p)$  es no decreciente en  $p$ .*

**Prueba:** Para esta prueba usaremos un argumento de acoplamiento. Consideremos dos modelos de percolación con parámetros  $p_1, p_2$  con  $p_1 \leq p_2$ , definidos en un mismo espacio de probabilidad, inducido por la familia de variables aleatorias independientes y con distribución Uniforme(0,1),  $\{U_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ . Definimos

$$X_e(p_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_e \leq p_1 \\ 0 & \text{si } U_e > p_1 \end{cases}, \quad X_e(p_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_e \leq p_2 \\ 0 & \text{si } U_e > p_2. \end{cases}$$

Notemos que de esta manera  $X_e(p_1) \sim \text{Bernoulli}(p_1)$  y  $X_e(p_2) \sim \text{Bernoulli}(p_2)$  y claramente  $X_e(p_1) \leq X_e(p_2)$ . Así, denotando  $C_{p_i}$  al aglomerado del origen para el modelo de percolación con parámetro  $p_i$ , con  $i = 1, 2$ , tenemos que  $C_{p_1} \subseteq C_{p_2}$ . Por lo tanto,

$$\theta(p_1) = \mathbb{P}(|C_{p_1}| = \infty) \leq \mathbb{P}(|C_{p_2}| = \infty) = \theta(p_2).$$

De esta manera concluimos que la función  $\theta(p)$  es no decreciente en  $p$ . □

**Lema 1.3.2** *La función  $\theta(p)$  es no decreciente en  $d$ .*

**Demostración:** Notemos que podemos construir el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$  sobre un hiperplano de la red  $\mathbb{Z}^{d+1}$  que contenga el origen, declarando cerradas todas las aristas externas al hiperplano  $\mathbb{Z}^d$ . De esta manera, si consideramos el aglomerado del origen  $C$  en  $\mathbb{Z}^d$ , existe un aglomerado  $C'$  en  $\mathbb{Z}^{d+1}$ , tal que  $C \subseteq C'$  y por lo tanto

$$\theta(p, d) = \mathbb{P}(|C| = \infty) \leq \mathbb{P}(|C'| = \infty) = \theta(p, d + 1).$$

Así la función  $\theta(p)$  es no decreciente en  $d$ . □

**Teorema 1.3.2** *Para  $d \geq 2$  y  $p$  suficientemente próximo de 0,  $\theta(p) = 0$ .*

**Prueba:** Primero probemos que  $\mathbb{E}_p(|C|) < \infty$  cuando  $p$  está suficientemente próximo de 0.

Notemos que podemos escribir

$$|C| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} I_{\{x \leftrightarrow 0\}},$$

donde  $I_{\{\cdot\}}$  es la función indicadora. De esta manera,

$$\mathbb{E}_p(|C|) = \mathbb{E}_p\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} I_{\{x \leftrightarrow 0\}}\right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(x \leftrightarrow 0),$$

donde la última igualdad se obtiene por el Teorema de la Convergencia Monótona.

Ahora, la probabilidad  $\mathbb{P}(x \leftrightarrow 0)$  se puede escribir como probabilidad de la unión de todos los posibles caminos abiertos  $\alpha$ , que conectan a  $x$  con 0, es decir

$$\mathbb{P}(x \leftrightarrow 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\alpha} \{\alpha \text{ es abierto}\}\right),$$

y por las propiedad de subaditividad de la probabilidad tenemos

$$\mathbb{E}_p(|C|) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\alpha} \mathbb{P}(\alpha \text{ es abierto}).$$

Reescribiendo la suma de la derecha, en términos de la longitud de los caminos  $\alpha$ , tenemos que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\alpha} \mathbb{P}(\alpha \text{ es abierto}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|\alpha|=n} \mathbb{P}(\alpha \text{ es abierto}).$$

Si  $\alpha$  tiene longitud  $n$ , la probabilidad de que este sea abierto es  $p^n$ . Además, si denotamos por  $\sigma(n)$  la cantidad de caminos de longitud  $n$  partiendo del origen, tenemos

$$\mathbb{E}_p(|C|) \leq \sum_{n \geq 0} \sigma(n) p^n.$$

Observemos que  $\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$ . Esto debido a que cada camino partiendo del origen tiene  $2d$  opciones para la primera arista,  $2d-1$  opciones para la segunda arista (no se permite repetir vértices en la definición de camino) y así sucesivamente. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(|C|) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} 2d(2d-1)^{n-1} p^n.$$

Reescribiendo tenemos

$$\mathbb{E}(|C|) \leq \sum_{n \geq 1} 2dp((2d-1)p)^{n-1} + 1.$$

Dado que  $p$  es próximo a 0, podemos suponer que  $p < \frac{1}{2d-1}$  y de esta manera la serie anterior es una serie convergente y por tanto  $\mathbb{E}(|C|)$  es finito si  $p < \frac{1}{2d-1}$ .

Para finalizar observe que

$$\{|C| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|C| \geq n\},$$

donde  $\{|C| \geq n+1\} \subset \{|C| \geq n\}$ . Así, usando la desigualdad de Markov, se obtiene que

$$\theta(p) = \mathbb{P}(|C| = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|C| \geq n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(|C|)}{n} = 0,$$

donde la última igualdad es obtenida asumiendo  $p < \frac{1}{2d-1}$  y por tanto  $\mathbb{E}(|C|) < \infty$ . Así concluimos que para  $p$  próximo de 0 y  $d \geq 2$ ,  $\theta(p) = 0$ .  $\square$

Para el siguiente resultado es necesario definir el concepto de red dual.

**Definición 1.3.1 (Red Dual)** Para  $\mathbb{Z}^2$  definimos la red dual  $d$ -dimensional de  $\mathbb{Z}^2$  como

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Observe que  $\mathbb{Z}_*^2$  es un desplazamiento de  $\frac{1}{2}$  unidades en cada una de las coordenadas de  $\mathbb{Z}^2$ , como se representa en la Figura 1.1. Asignamos una relación 1 a 1 entre las aristas de  $\mathbb{Z}^2$  y  $\mathbb{Z}_*^2$  como sigue. La arista  $e$  en  $\mathbb{Z}^2$  la asociamos a la arista  $e_*$  en  $\mathbb{Z}_*^2$  si  $e$  y  $e_*$  se cortan.

También podemos inducir un modelo de percolación de aristas en  $\mathbb{Z}_*^2$ , estableciendo que una arista  $e_*$  está abierta si la arista correspondiente  $e$  en  $\mathbb{Z}^2$  está abierta; y de forma análoga definimos que  $e_*$  está cerrada.

**Definición 1.3.2 (Circuito)** Llamamos *circuito* a un camino  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} \in \mathcal{E}^2$  tal que  $e_i = \{x_i; y_i\}$  y  $x_1 = y_n$ . Es decir, un circuito es un camino que se cierra a sí mismo (ver Figura 1.2).

Notemos que la finitud del aglomerado del cero en  $\mathbb{Z}^2$  es equivalente a la existencia de un circuito cerrado en la red dual alrededor del cero. Para esto observe que si el aglomerado es finito, existe su frontera y alrededor de ésta podemos construir un circuito cerrado en la red dual envolviendo el aglomerado en la red original.

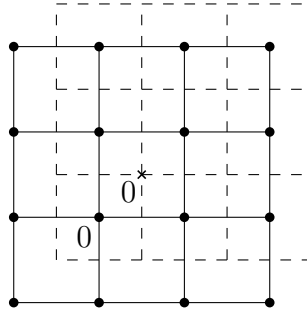


Figura 1.1: Red dual de  $\mathbb{Z}^2$ .

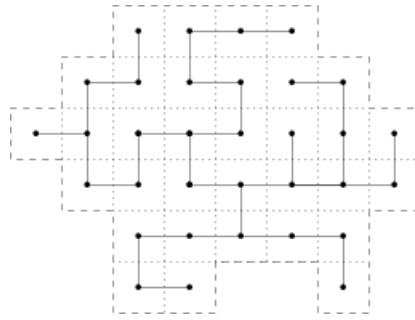


Figura 1.2: Circuito alrededor de un aglomerado en  $\mathbb{Z}^2$ .

**Teorema 1.3.3** Para  $d = 2$  y  $p$  suficientemente próximo de 1,  $\theta(p) > 0$ .

**Prueba:** Mostraremos que la probabilidad de que exista un aglomerado finito del cero es estrictamente menor que 1 para  $p$  próximo de 1. De esta manera, la probabilidad de que exista un aglomerado infinito del cero será estrictamente positiva para  $p$  próximo de 1. Observe que

$$\mathbb{P}(\text{existe un circuito cerrado en la red dual alrededor del origen}) \leq \sum_{\gamma} \mathbb{P}(\gamma \text{ está cerrado}),$$

donde  $\gamma$  es un circuito alrededor del origen. Además,

$$\mathbb{P}(\gamma \text{ está cerrado}) = \sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ está cerrado}),$$

donde la segunda suma es sobre los circuitos alrededor del origen de longitud  $n$ .

Si  $\gamma$  tiene longitud  $n$ , la probabilidad de que esté abierto es  $p^n$ . Además, si denotamos  $\lambda(n)$  la cantidad de circuitos alrededor del origen en la red dual y de longitud  $n$ , obtenemos

$$\sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ está cerrado}) \leq \sum_{n \geq 4} \lambda(n)(1-p)^n.$$

Ahora notemos que un circuito de longitud  $n$  en la red dual corta una arista de la red original de la forma  $\{(0, m); (0, m + 1)\}$ , con  $-\frac{n}{2} \leq m \leq \frac{n}{2}$ . A partir de esta arista secante, para cada una de las  $n - 1$  aristas siguientes hay 3 opciones. Así,

$$\lambda(n) \leq n3^{n-1}.$$

Reemplazando tenemos

$$\sum_{n \geq 4} \lambda(n)(1-p)^n \leq \sum_{n \geq 4} \frac{n}{3} (3(1-p))^n.$$

Ahora desarrollamos la serie

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 4} \frac{n}{3} (3(1-p))^n &= (1-p) \sum_{n \geq 4} n(3(1-p))^{n-1} \\ &= (1-p) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(3(1-p))^{n-1} - \sum_{n=1}^3 n(3(1-p))^{n-1} \right] \\ &= (1-p) \left[ \frac{1}{(1-3(1-p))^2} - \sum_{n=1}^3 n(3(1-p))^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Notemos que el lado derecho de la ecuación (1.3.1) es continua en  $p$ , se anula si  $p = 1$  y es decreciente si  $p > \frac{2}{3}$ . Así, existe  $p_0 < 1$  tal que la expresión en (1.3.1) es menor que 1 si  $p > p_0$ . Equivalentemente,  $\theta(p) > 0$  para  $p > p_0$ .  $\square$

**Observación 1.3.1** *Del Lema 1.3.2 y el Teorema 1.3.3, obtenemos que para  $d \geq 2$  y  $p$  suficientemente próximo de 1,  $\theta(p) > 0$ . Esto, junto con el Teorema 1.3.2 nos permite concluir transición de fase para el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{Z}^d$ , cuando  $d \geq 2$ . Lo cual enunciamos en el siguiente Teorema.*

**Teorema 1.3.4** *Para  $d \geq 2$ , existe un valor crítico  $p_c \in (0, 1)$  tal que*

*i) Si  $p < p_c$  entonces  $\theta(p) = 0$ .*

*ii) Si  $p > p_c$  entonces  $\theta(p) > 0$ .*

## 1.4. Refinamiento de cotas para $p_c$

El siguiente argumento muestra que la probabilidad de que el aglomerado alrededor del cero es estrictamente positiva si  $p > \frac{2}{3}$ . Denotemos por  $C_M$  el cuadrado centrado en el origen y de lado  $2M + 1$  en la red dual, por  $A_M$  al evento que todas de las aristas de  $C_M$  están abiertas y por  $B_M$  al evento que existe un circuito cerrado en la red dual por fuera de  $C_M$ . Repitiendo el argumento de la prueba del Teorema 1.3.3 obtenemos que

$$P_p(B_M) \leq \sum_{n \geq 8M+4} \frac{n}{3} (3(1-p))^n.$$

Consideremos  $p > \frac{2}{3}$ , entonces la expresión anterior es menor que 1 si  $M$  toma un valor lo suficientemente grande, digamos  $M_0$ . De esta manera,  $P_p(B_{M_0}^c) > 0$ . Además, tenemos que  $P(A_{M_0}) = p^{(2M_0+1)^2} > 0$ . Ahora notemos que si ocurren  $A_{M_0}$  y  $B_{M_0}^c$  entonces existe un aglomerado infinito, pues no existe un circuito alrededor del cuadrado  $C_{M_0}$ . Observemos también que  $A_{M_0}$  y  $B_{M_0}^c$  son eventos independientes, debido a que dependen de aristas diferentes para que ocurran. Por lo tanto,

$$\theta(p) \geq P_p(A_{M_0} \cap B_{M_0}^c) = P_p(A_{M_0})P_p(B_{M_0}^c) > 0.$$

Con lo que concluimos el resultado.

Los Teoremas 1.3.2 y 1.3.3 nos brindan una cota útil para la probabilidad crítica  $p_c$  en función de la dimensión  $d$  de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2d-1} < p_c(d) < \frac{2}{3}.$$

En general, encontrar el valor  $p_c$  no es una tarea fácil, algunos autores como Kesten [12] mostraron que para dimensiones grandes se tiene que

$$p_c(d) \sim \frac{1}{2d}.$$

Además, Kesten [11] probó uno de los resultados más notable para el modelo de percolación de aristas en  $\mathbb{Z}^d$  cuando  $d = 2$ . Específicamente, mostró que el parámetro crítico para la transición de fase cuando  $d = 2$  es  $p_c = \frac{1}{2}$ .

## Capítulo 2

# Modelo de percolación sobre árboles

### 2.1. Introducción

En este capítulo estudiamos el modelo de percolación de aristas sobre un grafo con estructura de árbol infinito. En la Sección 2.2 presentamos la definición formal del modelo. En la Sección 2.3 establecemos resultados sobre transición de fase, explicitando la probabilidad de percolación y el valor exacto del parámetro crítico.

### 2.2. El modelo

Definimos el árbol  $\mathbb{T}_+^d := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  como un grafo conectado, infinito y sin ciclos, para el cual cada vértice tiene grado  $d + 1$ , excepto un vértice raíz, denotado por  $0$ , que tiene grado  $d$ . En nuestra notación,  $\mathcal{V}$  representa es el conjunto de vértices y  $\mathcal{E} \subseteq \{(u, v) : u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$  el conjunto de aristas. Por simplicidad en la notación, diremos que  $\mathbb{T}_+^d = \mathcal{V}$ . Como es usual, si  $(u, v) \in \mathcal{E}$  decimos que  $u, v$  son vecinos y lo denotamos como  $u \sim v$ ; el grado de un vértice  $v$  es la cantidad de vecinos de  $v$ . Un camino en  $\mathbb{T}_+^d$  es una secuencia de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tales que  $v_i \sim v_{i+1}$ . Dados dos vértices  $u, v$  en  $\mathbb{T}_+^d$ , existe un único camino que los conecta. La cantidad de aristas del camino que conecta a  $u$  y  $v$  define la distancia entre ellos y es denotada por  $d(u, v)$ . Al conjunto de vértices que están a una distancia  $n$  de la raíz  $0$  del árbol se denomina nivel  $n$  del árbol. La Figura 2.1 representa a  $\mathbb{T}_+^2$  hasta el nivel 4.

Sea  $p \in [0, 1]$ , decimos que cada arista de  $\mathbb{T}_+^d$  está abierta con probabilidad  $p$  y cerrada con probabilidad  $1 - p$ . Un camino abierto en  $\mathbb{T}_+^d$  es un camino en el cual todas sus aristas



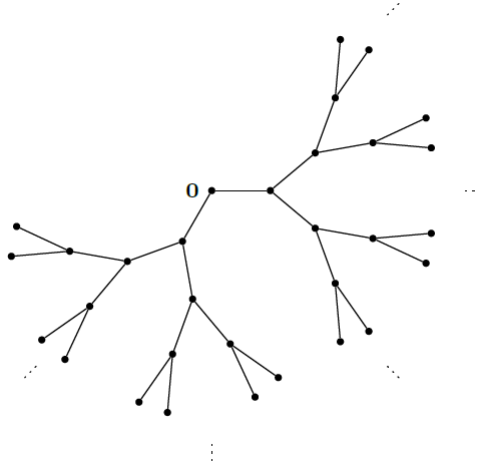


Figura 2.1: Gráfico  $\mathbb{T}_+^2$  hasta el nivel 4.

están abiertas. Denotamos por  $P_n$  como la probabilidad de que exista un camino abierto desde 0 hasta algún vértice en el nivel  $n$  del árbol. Observe que  $P_n > P_{n+1}$ , y  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión acotada, por lo tanto  $\theta(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  existe. La función  $\theta(p)$  se denomina función de percolación y determina la probabilidad de la existencia de un camino abierto infinito comenzando en la raíz del árbol.

En la siguiente sección estudiamos la función  $\theta(p)$ , mostrando que existe de un parámetro crítico  $p_c \in (0, 1)$ , tal que  $\theta(p) = 0$  si  $p \leq p_c$  y  $\theta(p) > 0$  si  $p > p_c$ . La existencia de  $p_c \in (0, 1)$  se conoce como *transición de fase*.

### 2.3. Percolación y transición de fase

En esta sección establecemos resultados de percolación y transición de fase para  $\mathbb{T}_+^d$ .

**Lema 2.3.1** *La función de percolación  $\theta(p)$  es no decreciente en  $p$ .*

La demostración del Lema 2.3.1 es análoga a la del Lema 1.3.1 y por tanto la omitimos. A continuación establecemos un resultado que nos permite calcular, de manera recursiva, la probabilidad de tener un camino abierto desde la raíz hasta el nivel  $n$  del árbol.

**Lema 2.3.2** *La probabilidad de tener un camino abierto desde la raíz hasta el nivel  $n$  de*

$\mathbb{T}_+^d$  está dada por

$$P_n = 1 - (1 - pP_{n-1})^d.$$

**Demostración:** Comenzamos etiquetando los  $d$  vértices del nivel 1 del árbol con los números  $1, 2, \dots, d$ , respectivamente. Consideremos un camino que va desde la raíz 0 hasta el nivel  $n$  del árbol, pasando por el vértice 1. Notemos que la probabilidad de que este camino esté abierto es  $pP_{n-1}$ , donde  $p$  es la probabilidad de que la arista entre la raíz y el vértice 1 esté abierta y  $P_{n-1}$  es la probabilidad de que haya un camino empezando desde el vértice 1 hasta un vértice en el nivel  $n$ . Esto se debe a que la probabilidad de que un camino empiece desde 0 y termine en el nivel  $m$ , es la misma de que empiece desde un vértice en el nivel  $n$  y termine en el nivel  $m + n$ . De esta manera, la probabilidad de que no haya un camino abierto pasando por el vértice 1 desde la raíz 0 hasta un vértice en el nivel  $n$  es  $1 - pP_{n-1}$ . De manera análoga, la probabilidad de que no haya un camino abierto desde la raíz pasando a través del vértice  $i$ , con  $i \in \{1, \dots, d\}$ , hasta un vértice en el nivel  $n$  es también  $1 - pP_{n-1}$ . Ahora, dado que estos eventos son independientes, la probabilidad de que no exista un camino desde la raíz 0 hasta un vértice en el nivel  $n$  es  $(1 - pP_{n-1})^d$  y así

$$P_n = 1 - (1 - pP_{n-1})^d.$$

□

Con el anterior lema, podemos mostrar el siguiente teorema, el cual establece la existencia de transición de fase y percolación para  $\mathbb{T}^d$ .

**Teorema 2.3.1** *Para el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , para  $d \geq 2$  tenemos:*

$$\theta(p) = 0 \quad \text{si } p \leq \frac{1}{d};$$

$$\theta(p) > 0 \quad \text{si } p > \frac{1}{d}.$$

Más aún, para  $p > \frac{1}{d}$ ,  $\theta(p)$  es la única solución en  $(0, 1)$  de la ecuación

$$1 - (1 - px)^d = x.$$

**Demostración:** Consideremos la siguiente función continua y diferenciable:

$$f_p(x) = 1 - (1 - px)^d.$$

Por el lema anterior, se tiene que  $f(P_{n-1}) = P_n$  y dado que  $f_p$  es una función continua, tomando el límite a ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_p(P_{n-1}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= f_p(\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}) \\ \theta(p) &= f(\theta(p)).\end{aligned}$$

De esta manera, encontrar la probabilidad  $\theta(p)$  se reduce a encontrar los puntos fijos de la función  $f_p(x) = 1 - (1 - px)^d$ , esto es equivalente a encontrar los ceros en  $[0, 1]$  de la función.

$$F(x) = 1 - (1 - px)^d - x.$$

Notemos que  $F(0) = 0$ , para encontrar las otras raíces encontremos los puntos críticos de  $F(x)$ , así, derivando tenemos:

$$F'(x) = dp(1 - px)^{d-1} - 1.$$

Igualando a 0 para obtener los puntos críticos (estacionarios) de  $F(x)$  en  $[0, 1]$  tenemos que, de existir, el único punto crítico es

$$px_c = 1 - \left(\frac{1}{dp}\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Ahora consideremos los casos:

1. Si  $p < \frac{1}{d}$  tenemos que  $x_c = \frac{1}{p} \left[1 - \left(\frac{1}{dp}\right)^{\frac{1}{d-1}}\right] < 0$ . Por lo tanto,  $F(x)$  no tiene puntos críticos en  $[0, 1]$ . Mas aún,  $F'(0) = dp - 1 < 0$ , y así  $F'(x) < 0$  para  $x \in (x_c, 1]$ . De esta manera  $x = 0$  es la única solución de  $F(x) = 0$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Por lo tanto,  $\theta(p) = 0$  cuando  $p < 1/d$ .
2. Si  $p = \frac{1}{d}$  tenemos que  $F'(x) < 0$  en  $[0, 1]$ . Como  $F(0) = 0$ , se sigue que la única raíz de  $F(x)$  en  $[0, 1]$  es  $x = 0$ . Por lo tanto,  $\theta(p) = 0$  cuando  $p = 1/d$ .
3. Si  $p > \frac{1}{d}$ , tenemos que  $x_c = \frac{1}{p} \left[1 - \left(\frac{1}{dp}\right)^{\frac{1}{d-1}}\right] > 0$ . Además,  $F'(0) = dp - 1 > 0$  y de esta manera  $F$  es creciente en  $(0, x_c)$ . Ahora veamos que  $x_c \in [0, 1]$ . Razonando por contradicción supongamos que  $x_c > 1$ . Como  $F$  es creciente en  $(0, x_c)$ , tenemos que  $F(1) > F(0) = 0$ , pero  $F(1) = -(1-p)^d < 0 = F(0)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $x_c < 1$ . Además,  $F(x)$  es decreciente en  $[x_c, 1]$ . Así, con el Teorema del

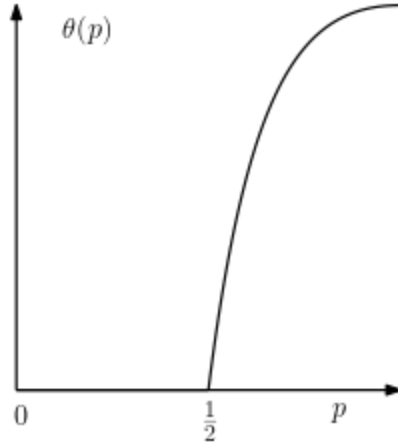


Figura 2.2: Función de percolación para  $\mathbb{T}_+^2$ .

Valor Intermedio, existe un único  $x_1 \in (x_c, 1)$  tal que  $F(x_1) = 0$ .

Dado que  $P_n \leq P_{n-1}$ , tenemos que

$$P_n = f_p(P_{n-1}) \leq P_{n-1}.$$

Notemos que  $f_p''(x) = F''(x) = -p^2 d(d-1)(1-px)^{d-2} < 0$  para  $x \in [0, 1]$ , luego  $f_p$  es cóncava hacia abajo y  $f_p(x) > x$  cuando  $x \in (0, x_1)$ . Por lo tanto  $P_n$  no puede estar en el intervalo  $[0, x_1]$ , pues  $f_p(P_{n-1}) \leq P_{n-1}$ . Así, el límite de  $P_n$  no puede ser 0, de donde se sigue que el límite de  $P_n$  es  $x_1$ . Por lo tanto,  $\theta(p) = x_1 > 0$  cuando  $p > \frac{1}{d}$ .

□

Como corolario del Teorema 2.3.1 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.3.1.1** *Para el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^2$ ,*

$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2p-1}{p^2} & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

El corolario anterior muestra que la transición de fase del modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^2$ , ocurre en el parámetro crítico  $p_c = \frac{1}{2}$ , mostrando además que la función  $\theta(p)$  es continua. Ver Figura 2.2.

## Capítulo 3

# Procesos de ramificación Bienaymé-Galton-Watson

### 3.1. Introducción

En este capítulo estudiamos los procesos de ramificación de Bienaymé-Galton-Watson. En la Sección 3.2 definimos el modelo clásico y establecemos resultados sobre supervivencia y extinción. En la Sección 3.3 comparamos los procesos de ramificación con el modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^d$ . Finalmente, en la Sección 3.4 presentamos una generalización del modelo clásico, llamado proceso de ramificación en ambiente variable con selección. Este último modelo es usado para probar algunos resultados sobre percolación de accesibilidad en el Capítulo 5.

### 3.2. El modelo

Supongamos que tenemos una población donde cada individuo tiene descendientes de manera independiente, siguiendo la distribución de una variable aleatoria  $X$  que toma valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$  con función de densidad de probabilidad dada por

$$P(X = k) = p_k,$$

para  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Supongamos que en el tiempo  $n = 0$  tenemos un individuo en la población y que para el tiempo  $n = 1$  este individuo tiene  $k$  de descendientes determinados por la variable aleatoria  $X$ . De manera general, cada individuo presente en el tiempo  $n$  da nacimiento, en el tiempo  $n + 1$ , a una cantidad de nuevos individuos, de acuerdo a una variable aleatoria *i.i.d.* a la variable  $X$ .

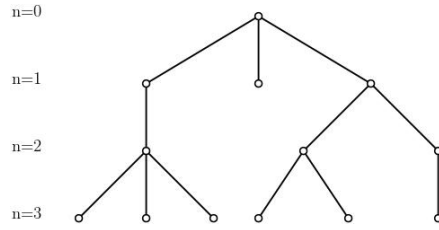


Figura 3.1: Proceso de Bienaymé-Galton-Watson

Al individuo presente en el tiempo  $n = 0$  lo llamamos la generación 0. A los individuos que nacen en el tiempo  $n$  los llamamos la generación  $n$ . Denotamos por  $G_n$  a la variable (aleatoria) que cuenta el número de individuos de la generación  $n$ . De esta manera,  $G_0 = 1$ , y para  $n \geq 1$ ,

$$G_n = \sum_{j=1}^{G_{n-1}} X_{n,j},$$

donde  $\{X_{n,j}\}$  son variables aleatorias *i.i.d.* a la variable  $X$ , donde  $X_{n,j}$  representa el número de descendientes del  $j$ -ésimo individuo de la generación  $n - 1$ .

El proceso estocástico  $(G_n)_{n \geq 0}$  se denomina proceso de ramificación de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). La Figura 3.1 representa una posible realización del proceso  $(G_n)$  hasta el tiempo  $n = 3$ .

Estamos particularmente interesados en los eventos de *sobrevivencia* y *extinción* del proceso BGW, los cuales definimos a continuación.

**Definición 3.2.1** Decimos que el proceso BGW sobrevive si existe por lo menos un individuo en cada generación, es decir, si ocurre el evento  $\{G_n > 0, \text{ para todo } n \geq 0\}$ . Caso contrario, decimos que el BGW se extingue, es decir, si ocurre el evento  $\{G_n = 0, \text{ para algún } n \geq 0\}$ .

Observemos que los eventos de *Sobrevivencia* y *Extinción* pueden escribirse como

- *Sobrevivencia*  $\equiv \bigcap_{n > 1} \{G_n \geq 0\}$
- *Extinción*  $\equiv \bigcup_{n > 1} \{G_n = 0\}$

Denotaremos por  $\alpha$  la probabilidad de extinción y dado que  $\{G_n = 0\} \subset \{G_{n+1} = 0\}$ , tenemos que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[G_n = 0].$$

Veamos algunos casos simples donde  $\alpha$  es fácilmente calculada.

- Si  $p_0 = 0$ , entonces  $\alpha = 0$ .
- Si  $p_1 = 0$ , entonces  $\alpha = 1$ .
- Si  $0 < p_0 < 1$  y  $p_0 + p_1 = 1$ , entonces del número total de individuos en la población tiene distribución  $geo(p_1)$  y por lo tanto  $\alpha = 1$ .

Para el caso  $0 < p_0 < 1$  y  $p_0 + p_1 < 1$  también es posible determinar el valor de  $\alpha$ . Para esto es necesario hacer un estudio sobre la función generadora de probabilidad (f.g.p.) de  $X$ , el número de descendientes por individuo, la cual se define por

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

El siguiente resultado, establece una relación entre la f.g.p. del número de descendientes por individuo y la f.g.p. del número de individuos en la generación  $n$ .

**Proposición 3.2.1** Sean  $\varphi(t)$  y  $\varphi_n(t)$  las f.g.p. de las variables aleatorias  $X$  y  $G_n$ , para  $n \geq 1$ , respectivamente, entonces

$$\varphi_n(t) = \varphi^{(n)}(t),$$

donde

$$\varphi^n(t) = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi(t)}_{n \text{ veces}}.$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(t) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[t^{G_n} | G_{n-1} = k] P(G_{n-1} = k) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E} \left[ t^{\sum_{j=1}^k X_{nj}} | G_{n-1} = k \right] P(G_{n-1} = k) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E} [t^X]^k P(G_{n-1} = k) \\
 &= \sum_{k \geq 0} [\varphi(t)]^k P(G_{n-1} = k) \\
 &= \mathbb{E} [\varphi(t)^{G_{n-1}}] \\
 &= \varphi_{n-1}(\varphi(t)) \\
 &= (\varphi_{n-1} \circ \varphi)(t)
 \end{aligned}$$

Aplicando el proceso anterior  $n - 1$  veces tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(t) &= ((\varphi_{n-2} \circ \varphi) \circ \varphi)(t) \\
 &= (\varphi_1 \circ \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n-1 \text{ veces}})(t) \\
 &= (\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_n)(t).
 \end{aligned}$$

Así se tiene el resultado. □

**Observacion 3.2.1** Sea  $\varphi(t)$  la f.g.p. de las variable aleatoria  $X$ . Es fácil verificar que si  $p_0 + p_1 < 1$  entonces  $\varphi$  satisface las siguientes propiedades

1.  $\varphi$  es creciente en  $[0, 1]$ .
2.  $\varphi$  es cóncava hacia arriba en  $[0, 1]$ .
3.  $\varphi(0) = p_0$  y  $\varphi(1) = 1$ .
4.  $\varphi'(1) = \mathbb{E}(X)$ .

El siguiente resultado nos brinda el valor del  $\alpha$  para el caso  $0 < p_0 < 1$  y  $p_0 + p_1 < 1$ .

**Teorema 3.2.1** Sea  $\varphi(t)$  la f.g.p. de las variable aleatoria  $X$  y  $\mu = \mathbb{E}(X)$ . Si  $0 < p_0 < 1$  y  $p_0 + p_1 < 1$ , entonces la probabilidad de extinción del proceso  $(G_n)$ , denotada por  $\alpha$ , es la menor solución no negativa de la ecuación  $\varphi(t) = t$ . Además,



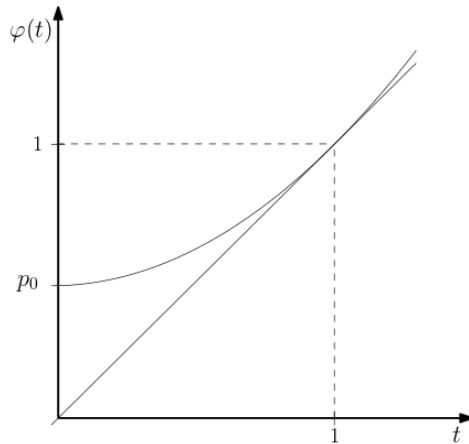


Figura 3.2: Gráfica de la función  $\varphi(t)$  con un punto fijo,  $\mu \leq 1$ .

1. Si  $\mu \leq 1$  entonces  $\alpha = 1$ .
2. Si  $\mu > 1$  entonces  $\alpha < 1$ .

**Demostración:** Primero veamos que  $\alpha = \varphi(\alpha)$ .

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[G_n = 0] \quad (3.2.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi \circ \varphi_{n-1})(0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\varphi_{n-1}(0))$$

$$= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{n-1}(0))\right) \quad (3.2.2)$$

$$= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P[G_{n-1} = 0]\right)$$

$$= \varphi(\alpha),$$

donde la igualdad en (3.2.2) es dada por la continuidad de  $\varphi$ .

Debido a que  $\varphi(1) = 1$ , a la concavidad hacia arriba de  $\varphi(t)$  y a que  $\varphi(0) = p_0 > 0$ , tenemos  $\varphi(t)$  debe tener a lo sumo un punto fijo en  $(0, 1]$ . Ver Figuras 3.2 y 3.3. Además, como  $\varphi'(1) = \mu$  tenemos que

1. Si  $\mu \leq 1$  entonces  $t = 1$  es la única solución de  $\varphi(t) = t$  y por lo tanto  $\alpha = 1$ . Ver Figura 3.2.
2. Si  $\mu > 1$  entonces existe un  $x_0 \in (0, 1)$  tal que  $\varphi(x_0) = x_0$ . Ver Figura 3.3. Así,  $\alpha = 1$  o  $\alpha = x_0$ . Veamos ahora que  $\alpha = x_0$ .

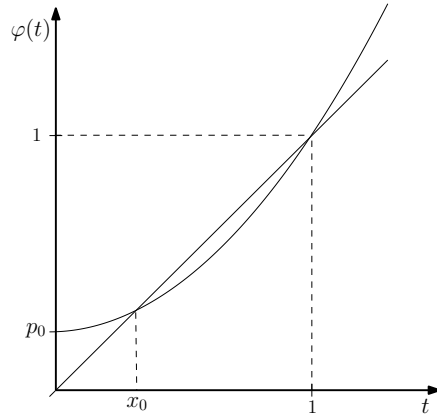


Figura 3.3: Gráfica de la función  $\varphi(t)$  con dos puntos fijos,  $\mu > 1$ .

Como  $\varphi(t)$  es creciente y  $x_0$  es punto fijo de  $\varphi(t)$  tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(x_0) \\ &\geq \varphi(0) \\ &= P[G_1 = 0], \end{aligned}$$

con esto la Proposición 3.2.1 obtenemos,

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(\varphi(x_0)) \\ &\geq \varphi(\varphi(0)) \\ &= \varphi^{(2)}(0) \\ &= P[G_2 = 0]. \end{aligned}$$

De esta manera, repitiendo este proceso  $n$  veces tenemos que

$$x_0 \geq \varphi^{(n)}(0) = P[G_n = 0]$$

y por tanto,

$$x_0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P[G_n = 0] = \alpha.$$

Como  $x_0 \geq \alpha$  y  $x_0 \neq 1$  entonces  $\alpha \neq 1$ , y dado que  $\varphi(t)$  tiene un único punto fijo en  $(0, 1)$ , concluimos que  $x_0 = \alpha$ .  $\square$

En la siguiente sección establecemos una aplicación del Teorema 3.2.1 al modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^d$ .

### 3.3. Proceso BGW y el modelo de percolación de aristas sobre $\mathbb{T}_+^d$

Consideremos un proceso de ramificación BGW donde el número de descendientes por individuo tiene distribución Binomial( $d, p$ ). Notemos que en este caso el proceso de ramificación se puede asociar a un modelo de percolación de aristas sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , donde la probabilidad de que una arista esté abierta es  $p$ . Además, el evento de percolación ocurre si y sólo si el proceso BGW sobrevive. De esta manera, la probabilidad de percolación está dada por  $\theta(p) = 1 - \alpha$ , donde  $\alpha$  es la probabilidad de extinción del proceso BGW.

Del Teorema 3.2.1 sigue que si  $pd \leq 1$  entonces  $\theta(p) = 0$ . Si  $pd > 1$  entonces  $1 - \theta(p)$  es la menor solución de  $\varphi(x) = x$  en  $(0, 1]$ , donde  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} p^i (1-p)^{d-i} x^i$ . Esto es,

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} p^i (1-p)^{d-i} (1-\theta(p))^i = 1 - \theta(p).$$

Por el Binomio de Newton, la anterior ecuación es

$$[p(1 - \theta(p)) + (1 - p)]^d = 1 - \theta(p).$$

Simplificando, obtenemos

$$\theta(p) = 1 - [1 - p\theta(p)]^d.$$

De esta manera tenemos que la probabilidad de percolación  $\theta(p)$  es solución a la ecuación  $x = 1 - (1 - px)^d$  en  $(0, 1]$ , tal como vimos en el Teorema 2.3.1.

### 3.4. Procesos de ramificación en ambiente variable con selección.

Los modelos y resultados presentados en esta sección son definidos y probados en Bertachi *et al.* [2]. Aquí presentaremos una forma simplificada de los modelos, omitiendo las pruebas de los resultados. Estos modelos son usados por nosotros en el Capítulo 5 para probar resultados de percolación de accesibilidad sobre árboles esféricamente simétricos.

Iniciamos definiendo el proceso de ramificación en ambiente variable (PRAV), el cual es una generalización del proceso BGW considerando que la distribución del número de

descendientes por individuo es igual sólo para los individuos de la misma generación. Formalmente, el proceso PRAV es definido por

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} W_{n,j}, \quad n \geq 1,$$

donde  $Z_n$  representa el número de individuos en la  $n$ -ésima generación y  $\{W_{n,j}\}_{j \geq 1, n \geq 0}$  es una familia de variables aleatorias independientes tal que  $\{W_{n,j}\}_{j \geq 1}$  son copias idénticamente distribuidas de una variable  $W_n$ , donde  $W_{n,j}$  representa el número de descendientes del  $j$ -ésimo individuo de la generación  $n - 1$ .

Como es usual, decimos que el proceso PRAV se *extingue* si  $\mathbb{P}[\cup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\}] = 1$ . Caso contrario, decimos que el proceso PRAV *sobrevive*. En adelante, denotamos por  $m_n$  y  $m_n^{(2)}$  al primer y segundo momento, respectivamente, de la variable  $W_n$ . Es decir,  $m_n = \mathbb{E}(W_n)$  y  $m_n^{(2)} = \mathbb{E}(W_n^2)$ . Los siguientes resultados establecen condiciones suficientes para extinción y sobrevivencia del proceso PRAV.

**Teorema 3.4.1 (Proposición 2.4 en [2])** Si  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i=0}^n m_i = 0$ , entonces, entonces el PRAV se extingue.

**Teorema 3.4.2 (Teorema 2.5 en [2])** Considere un PRAV tal que  $m_n^2 < \infty$  para un  $n$  suficientemente grande. Entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{m_j^{(2)} - m_j}{m_j^2} (\prod_{i=n}^{j-1} m_i)^{-1} < \infty \\ \inf_{j \in \mathbb{N}} \prod_{i=0}^j m_i > 0 \end{array} \right.$
2.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ (\prod_{i=n}^{n+k} m_i)^{-1} + \sum_{j=n}^{n+k} \frac{m_j^{(2)} - m_j}{m_j} (\prod_{i=n}^j m_i) \right] < \infty.$

Más aún, si cualquiera de las condiciones anteriores se cumple para algún  $n$ , entonces el PRAV se sobrevive.

Basados en el PRAV, se define el Proceso de Ramificación en Ambiente Variable con Selección (PRCS) de la siguiente manera. Dado un PRAV asignamos a cada individuo una etiqueta que representa su *fitness*. Dicha etiqueta es una variable aleatoria continua, asignada de manera independiente a cada individuo en el momento de su nacimiento. Asumimos también que estas variables tienen la misma distribución. Definimos el mecanismo de selección de la siguiente manera: los descendientes del individuo con *fitness*  $x$  sobreviven si y sólo si su *fitness* es mayor que  $x$ .

En un proceso PRCS, denotamos por  $\mathcal{A}_n$  el conjunto aleatorio de los *fitness* de las partículas de la generación  $n$  y por  $N_n := |\mathcal{A}_n|$ , el cardinal de  $\mathcal{A}_n$ . Decimos que el proceso PRCS, comenzando con una partícula de *fitness*  $x$ , sobrevive si

$$\mathbb{P}[N_n > 0, \forall n > 0 \mid \mathcal{A}_0 = \{x\}] > 0.$$

**Teorema 3.4.3** *Suponga que existe una sucesión  $\{c_i\}_{i \geq 0}$  de números reales tales que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{m_i} < \infty$  y además*

$$\begin{cases} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{m_j^{(2)} - m_j}{m_j^2} (C^j \prod_{i=n}^{j-1} c_i)^{-1} < \infty \\ \inf_{n \in \mathbb{N}} C^n \prod_{j=0}^n c_j > 0 \end{cases}$$

*para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $C > 0$ . Entonces el PRCS, empezando con una partícula con *fitness*  $x$ , sobrevive si la probabilidad de cualquier partícula tener *fitness* mayor que  $x$  es positiva.*

## Capítulo 4

# Percolación de accesibilidad sobre $\mathbb{T}_+^d$

### 4.1. Introducción

En este capítulo estudiamos un tipo especial de percolación sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , llamado percolación de accesibilidad. En la Sección 4.2 definimos el modelo de forma general y presentamos definiciones de los eventos de interés sobre el mismo. En la Sección 4.3 presentamos un caso particular del modelo de percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , conocido como modelo *House of Cards (HoC)* y para el cual probamos que no existe transición de fase. En la Sección 4.4 presentamos el modelo *Rough Mount Fuji (RMF)* sobre  $\mathbb{T}_+^d$  y establecemos resultados de transición de fase en un caso particular, mostrando el valor exacto del parámetro crítico.

### 4.2. El modelo

Consideramos el árbol  $\mathbb{T}_+^d$  como fue definido en la Sección 2.2. A cada vértice  $v \in \mathbb{T}_+^d$ , con  $v \neq 0$ , lo etiquetamos con una variable aleatoria continua  $X(v)$ . Para el vértice raíz, consideramos  $X(0) = -\infty$ .

Decimos que un camino,  $\{0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , desde la raíz hasta el nivel  $n$  del árbol  $\mathbb{T}_+^d$  es *accesible* si  $X(v_1) < X(v_2) < \dots < X(v_n)$ , es decir, si las etiquetas de los vértices están en orden creciente respecto a los niveles del árbol. Sea  $N_n$  el número de caminos accesibles desde la raíz  $0$  hasta el nivel  $n$  de  $\mathbb{T}_+^d$ . Definimos el evento de percolación de accesibilidad como el evento  $\bigcap_{n \geq 0} \{N_n \geq 1\}$ . Es decir, decimos que hay percolación si existe por lo menos un camino accesible de longitud infinita.

Dado que  $\{N_{n+1} \geq 1\} \subseteq \{N_n \geq 1\}$  tenemos que la probabilidad de percolación está

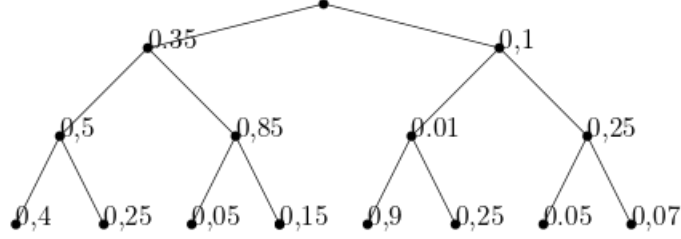


Figura 4.1: Modelo de percolación accesible en  $\mathbb{T}_+^2$

dada por

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n \geq 0} \{N_n \geq 1\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_n \geq 1).$$

A continuación estudiamos dos casos particulares en los que analizamos la existencia de percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , considerando la dinámica de los modelos House of Cards (HoC) y Rough Mount Fuji (RMF), cuyas definiciones pueden encontrarse de manera general en [6, 10].

### 4.3. House of cards (HoC)

Para el modelo de percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , definido anteriormente, asumimos que las variables aleatorias  $\{X(v)\}_{v \in \mathbb{T}_+}$  son independientes e idénticamente distribuidas. Este último supuesto es lo que referimos como propiedad HoC.

Sea  $\{0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un camino desde la raíz hasta el nivel  $n$  de  $\mathbb{T}_+^d$ . Denotemos por  $P_n$  la probabilidad de que este camino sea accesible, es decir,

$$P_n = \mathbb{P}(X(v_1) < X(v_2) < \dots < X(v_n)).$$

Dado que la distribución de las variables  $X(v)$  es la misma, tenemos que  $P_n$  depende únicamente de la cantidad de maneras que podemos ordenar las  $n$  etiquetas de los vértices, es decir, de  $n!$  formas. Por lo tanto, para el modelo HoC tenemos

$$P_n = \frac{1}{n!}.$$

**Teorema 4.3.1** *Para el modelo de HoC la probabilidad de percolación de accesibilidad es cero.*

**Demostración:** Por definición de esperanza tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{d^n} \mathbb{I}\{\text{el camino } i \text{ es accesible}\}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{d^n} \mathbb{E}[P(\text{el camino } i \text{ es accesible})] \\
&= \sum_{i=1}^{d^n} \frac{1}{n!} \\
&= \frac{d^n}{n!}
\end{aligned}$$

Ahora por la desigualdad de Markov tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_n \geq 1) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[N_n]}{1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{n!} = 0.
\end{aligned}$$

□

## 4.4. Rough Mount Fuji (RMF)

En el modelo Rough Mount Fuji (RMF) consideramos que para cada  $v \in \mathbb{T}_+^d$  asignamos la variable aleatoria  $X(v) = \theta d(0, v) + Y(v)$ , con  $\theta > 0$ , donde  $d(0, v)$  es la distancia de  $v$  a la raíz de  $\mathbb{T}_+^d$  y  $\{Y(v)\}_{v \in \mathbb{T}^d}$  son variables aleatorias *i.i.d.* Aquí, consideramos el caso particular cuando  $\{Y(v)\}_{v \in \mathbb{T}^d}$  tienen distribución Gumbel. Iniciamos presentando la definición de la distribución Gumbel y algunas de sus propiedades.

**Definición 4.4.1** *Decimos que una variable aleatoria continua  $X$  tiene distribución Gumbel si su función de densidad de probabilidad está dada por*

$$f(x) = \exp(-x - \exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Observación 4.4.1** *La función de distribución acumulada de la distribución Gumbel está dada por  $F(x) = \exp(-e^{-x})$  y fácilmente se comprueba que  $F(x+t) = F(x)^{\exp(-t)}$ .*



**Lema 4.4.1 (Franke et. al. [7])** Sea  $X_n = \theta n + Y_n$  donde  $(Y_n)_{n \geq 1}$  son v.a. i.i.d. Gumbel. Entonces

$$P(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = [a(\theta)]^n b(\theta, n)$$

donde

$$a(\theta) = 1 - e^{-\theta} \quad y \quad b(\theta, n) = \left[ \prod_{k=1}^n (1 - e^{-\theta k}) \right]^{-1}.$$

**Demostración:** Denotemos por  $f_n$  la función de densidad de probabilidad de  $X_n$  y por  $f$  la función de densidad de probabilidad de  $Y_n$ . Observe que  $f_n(x) = f(x - \theta n)$ . De esta manera para  $P_n = P(X_1 < X_2 < \cdots < X_n)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f_n(x_n) \cdots \int_{-\infty}^{x_3} dx_2 f_2(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} dx_1 f_1(x_1). \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y_n) \int_{-\infty}^{y_n + \theta} dy_{n-1} f(y_{n-1}) \cdots \int_{-\infty}^{y_2 + \theta} dy_1 f(y_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y_n) \int_{-\infty}^{y_n + \theta} dy_{n-1} f(y_{n-1}) \cdots \int_{-\infty}^{y_3 + \theta} dy_2 f(y_2) F(y_2 + \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y_n) \int_{-\infty}^{y_n + \theta} dy_{n-1} f(y_{n-1}) \cdots \int_{-\infty}^{y_3 + \theta} dy_2 f(y_2) F(y_2)^{\exp(-\theta)}, \quad (4.4.1) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad reemplazamos  $F(y + \theta)$  por  $F(y)^{\exp(-\theta)}$ , de acuerdo a la Observación 4.4.1. Ahora, denotando  $F(y_n) = \mu$  y  $\exp(-\theta) = \alpha$  en (4.4.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y_n) \int_{-\infty}^{y_n + \theta} dy_{n-1} f(y_{n-1}) \cdots \int_0^{F(y_3 + \theta)} \mu^\alpha d\mu \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y_n) \int_{-\infty}^{y_n + \theta} dy_{n-1} f(y_{n-1}) \cdots \int_0^{F(y_4 + \theta)} \mu^{\alpha(1 + \alpha)} d\mu \\ &= \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right) \left( \frac{1}{1 + \alpha + \alpha^2} \right) \cdots \left( \frac{1}{1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sum_{i=0}^k \alpha^i} \\ &= (1 - e^{-\theta})^n \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{-\theta k}}. \end{aligned}$$

□

**Observacion 4.4.2** *Notemos que  $b(\theta, n)$  es creciente en  $n$  y acotada, por lo tanto existe  $b(\theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} b(\theta, n)$ . Así,*

$$1 \leq b(\theta, n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b(\theta, n) = b(\theta).$$

Volviendo al modelo de percolación de accesibilidad RMF sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , observe que el Lema 4.4.1 nos permite calcular la probabilidad de que un camino fijo de longitud  $n$ , partiendo desde la raíz del árbol, sea accesible. Observe que para cada vértice  $v$  del camino, con  $d(0, v) = n$ , la variable  $X_v$  es representada por  $X_n = \theta n + Y_n$  en el Lema 4.4.1. A continuación presentamos un lema que nos ayudará a calcular la probabilidad de tener por lo menos un camino accesible de longitud  $n$  partiendo desde la raíz de  $\mathbb{T}_+^d$ .

**Lema 4.4.2** *Sea  $X$  una variable aleatoria con  $\mathbb{E}[X] < \infty$ ,  $\mathbb{E}^2[X] < \infty$ , entonces*

$$\mathbb{P}[X \neq 0] \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}$$

**Demostración:** Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \neq 0\}} X]^2 \leq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X \neq 0\}}^2] \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{P}[X \neq 0] \mathbb{E}[X^2]$$

por lo tanto

$$\mathbb{P}[X \neq 0] \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

□

Observemos que hay  $d^n$  caminos desde la raíz hasta el nivel  $n$  de  $\mathbb{T}_+^d$ . Por simplicidad denotaremos por  $\Theta_i$  a la variable indicadora definida por

$$\Theta_i = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo camino es accesible,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Lema 4.4.3 (Nowak and J. Krug [14])** *Sea  $N_n$  el número de caminos accesibles desde la raíz 0 hasta el nivel  $n$  de  $\mathbb{T}_+^d$ . Entonces,*

$$\mathbb{E}[N_n^2] \leq \mathbb{E}[N_n] + \frac{(d-1)}{d^2} [b(\theta)]^3 y^{n+2} \left[ \frac{y^n - 1}{y - 1} \right],$$

donde  $y = a(\theta)d$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^{d^n} \Theta_i \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{d^n} \Theta_i + \sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j \right] \\
&= \mathbb{E}[N_n] + \mathbb{E} \left[ \sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j \right].
\end{aligned}$$

Notemos que si el camino  $i$  y el camino  $j$  son diferentes, entonces pueden compartir a lo sumo  $n - k + 1$  vértices, con  $1 \leq k \leq n$  (ver Figura 4.2). De esta manera, si llamamos  $m_k$  al número de caminos que comparten  $n - k + 1$  vértices y  $\pi_k$  a la probabilidad de que dos caminos que compartan  $n + k - 1$  vértices sean accesibles, tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j \right] = \sum_{k=1}^n m_k \pi_k.$$

Ahora haciendo un cálculo combinatorio nos damos cuenta que  $m_k = d^n(d-1)d^{k-1}$  y además  $\pi_k \leq P_{n-k+1}P_kP_k$ , donde  $P_k$  es la probabilidad de que un camino de longitud  $k$  sea accesible. De esta manera, aplicando el Lema 4.4.1,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n m_k \pi_k &\leq \sum_{k=1}^n d^n(d-1)d^{k-1}P_{n-k+1}P_kP_k \\
&= \sum_{k=1}^n (d-1)d^{n+k-1}[a(\theta)]^{n-k+1}b(\theta, n-k-1)[a(\theta)]^{2k}[b(\theta, k)]^2 \\
&\leq \frac{(d-1)}{d^2}[b(\theta)^3] \sum_{k=1}^n d^{n+k+1}[a(\theta)]^{n+k+1} \\
&= \frac{(d-1)}{d^2}[b(\theta)^3][a(\theta)d]^{n+1} \sum_{k=1}^n [a(\theta)d]^k.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $a(\theta)d = y$  tenemos que

$$\frac{(d-1)}{d^2}[b(\theta)^3][a(\theta)d]^{n+1} \sum_{k=1}^n [a(\theta)d]^k = \frac{(d-1)}{d^2}[b(\theta)^3]y^{n+2} \left[ \frac{y^n - 1}{y - 1} \right].$$

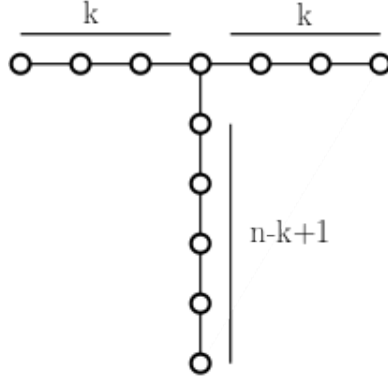


Figura 4.2

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[N_n^2] \leq \mathbb{E}[N_n] + \frac{(d-1)}{d^2} [b(\theta)^3] y^{n+2} \left[ \frac{y^n - 1}{y - 1} \right].$$

□

Ahora podemos enunciar y mostrar el resultado más relevante de esta sección, la existencia de transición de fase para el modelo de percolación de accesibilidad RMF sobre  $\mathbb{T}_+^d$ .

**Teorema 4.4.1 (Nowak and J. Krug [14])** *Para el modelo de percolación de accesibilidad RMF sobre  $\mathbb{T}_+^d$ , asociado a la distribución Gumbel, el parámetro crítico de transición de fase es  $\theta_c = \ln(\frac{d}{d-1})$ . Es decir,*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_n \geq 1) = 0$  si  $\theta < \theta_c$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_n \geq 1) > 0$  si  $\theta > \theta_c$ .

**Demostración:** 1. Por la desigualdad de Markov y Lema 4.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq 1) &\leq \mathbb{E}[N_n] \\ &= d^n [a(\theta)]^n b(\theta, n). \end{aligned}$$

Para  $\theta < \ln(\frac{d}{d-1})$ , como  $a(\theta)$  es creciente, tenemos que  $a(\theta)d < 1$ . Además, recordando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(\theta, n) = b(\theta) < \infty$ , sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \leq \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} (da(\theta))^n \right] b(\theta) = 0.$$

2. Por el Lema 4.4.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N \geq 1] &\geq \frac{\mathbb{E}[N_n]^2}{\mathbb{E}[N_n^2]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[N_n]^2}{\mathbb{E}[N_n] + \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[N_n]}{1 + \mathbb{E}[N_n]^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j\right]} \\
&= \frac{y^n b(\theta, n)}{1 + \mathbb{E}[N_n]^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j\right]}
\end{aligned}$$

Por el Lema 4.4.3 y haciendo  $y = a(\theta)d$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n]^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j\right] &\leq \frac{(d-1)[b(\theta)^3]y^{n+2}(y^n-1)}{d^2 y^n b(\theta, n)(y-1)} \\
&= \frac{(d-1)[b(\theta)]^2 y^2 (y^n-1)}{d^2 (y-1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{y^n b(\theta, n)}{1 + \mathbb{E}[N_n]^{-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j}^{d^n} \Theta_i \Theta_j\right]} \geq \frac{y^n b(\theta, n)}{1 + (d-1)[b(\theta)]^2 y^2 (y^n-1) d^{-2} (y-1)^{-1}}.$$

Tomando el límite cuando  $n$  tiende a infinito tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^n b(\theta, n)}{1 + (d-1)[b(\theta)]^2 y^2 (y^n-1) d^{-2} (y-1)^{-1}} = \frac{d^2 (y-1)}{(d-1)y^2 b(\theta)} > 0,$$

donde hemos usado el hecho de que  $\theta > \ln\left(\frac{d}{d-1}\right)$  y por tanto  $y = a(\theta)d > 1$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) > \frac{d^2 (y-1)}{(d-1)y^2 b(\theta)} > 0.$$

□

## Capítulo 5

# Percolación de accesibilidad en árboles esféricamente simétricos

### 5.1. Introducción

En este capítulo estudiamos el fenómeno de transición de fase en el modelo de percolación de accesibilidad sobre árboles esféricamente simétricos, definido por Coletti *et. al* [4]. En la siguiente sección definimos el modelo y estudiamos los resultados de transición de fase del mismo. Los resultados aquí presentados se basan en los procesos de ramificación en ambiente variable con selección estudiados en la Sección 3.4.

### 5.2. El modelo

Definimos como árbol esféricamente simétrico, denotado por  $\mathbb{T} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , a un grafo conectado, infinito y sin ciclos, para el cual todos los vértices que están a una misma distancia de un vértice fijo, denominado raíz, tienen el mismo grado. Denotamos por  $0$  la raíz de  $\mathbb{T}$ . En nuestra notación,  $\mathcal{V}$  representa el conjunto de vértices y  $\mathcal{E} \subseteq \{(u, v) : u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$  el conjunto de aristas. Por simplicidad en la notación, diremos que  $\mathbb{T} = \mathcal{V}$ . Como es usual, si  $(u, v) \in \mathcal{E}$  decimos que  $u, v$  son vecinos y lo denotamos como  $u \sim v$ ; el grado de un vértice  $v$  es la cantidad de vecinos de  $v$ . Un camino en  $\mathbb{T}$  es una secuencia de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tales que  $v_i \sim v_{i+1}$ . Dados dos vértices  $u, v$  en  $\mathbb{T}$ , existe un único camino que los conecta. La cantidad de aristas del camino que conecta a  $u$  y  $v$  define la distancia entre ellos y es denotada por  $d(u, v)$ . Al conjunto de vértices que están a una distancia  $n$  de la raíz  $0$  del árbol se denomina nivel  $n$  del árbol y lo denotamos por

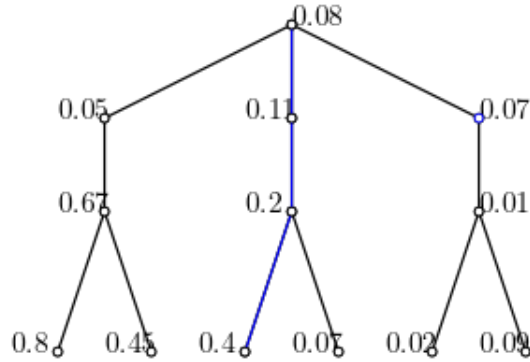


Figura 5.1: Camino accesible desde la raíz hasta el nivel 3 del árbol.  $N_3 = 1$ .

$\partial\mathbb{T}_n = \{v \in \mathcal{V} : d(0, v) = n\}$ . A cada árbol esféricamente simétrico se le asigna una función  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ , denominada función de crecimiento, para la cual  $f(0)$  es el grado del vértice raíz 0 y para  $n \geq 1$ ,  $f(n) = d_n - 1$ , donde  $d_n$  es el grado de los vértices en  $\partial\mathbb{T}_n$ .

Para cada vértice  $v \in \mathbb{T}$  asignamos una variable aleatoria continua,  $X_v$ , de tal forma que  $\chi = \{X_v : v \in \mathcal{V}\}$  es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Decimos que un camino  $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{T}$  es accesible si  $X_{v_1} < X_{v_2} < \dots < X_{v_n}$ . Denotamos por  $\Lambda_n$  al evento de que  $\partial\mathbb{T}_n$  es accesible desde la raíz, es decir, que existe un camino accesible de longitud  $n$  empezando desde la raíz. Denotamos  $N_n$  al número de caminos accesibles hasta el nivel  $n$  del árbol. Notemos que  $\mathbb{P}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(N_n \geq 1)$ . La Figura 5.1 muestra un ejemplo de una posible realización sobre un árbol esféricamente simétrico.

Decimos que existe percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}$  si el evento  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$  ocurre con probabilidad positiva y denotamos dicha probabilidad por  $\theta(\mathbb{T})$ . Dado que  $\{N_{n+1} \geq 1\} \subseteq \{N_n \geq 1\}$ , tenemos entonces que

$$\theta(\mathbb{T}) = \mathbb{P}[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\Lambda_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n).$$

El interés en el modelo descrito anteriormente, es determinar la existencia de percolación de accesibilidad, sobre árboles esféricamente simétricos, respecto a la función de crecimiento asociada al mismo.

A fin de probar resultados de transición de fase sobre algunos árboles esféricamente

simétricos, introducimos la siguiente relación de orden parcial entre árboles. Consideremos dos árboles  $\mathbb{T}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$  y  $\mathbb{T}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ . Decimos que  $\mathbb{T}_1$  es dominado por  $\mathbb{T}_2$ , denotado por  $\mathbb{T}_1 \prec \mathbb{T}_2$ , si  $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$  y  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ . En el siguiente resultado mostramos que la probabilidad de percolación es una función creciente respecto a la relación de dominación.

**Lema 5.2.1** *Si  $\mathbb{T}_1 \prec \mathbb{T}_2$ , entonces  $\theta(\mathbb{T}_1) \leq \theta(\mathbb{T}_2)$ .*

La demostración del Lema 5.2.1 es análoga al los Lemas 1.3.1 y 2.3.1.

Denotemos por  $\mathbb{T}_!$  el árbol esféricamente simétrico, cuya función de crecimiento está dada por  $f(i) = i + 1$ ,  $i \geq 0$ . A continuación mostramos que sobre  $\mathbb{T}_!$  no existe percolación de accesibilidad.

Observe que sobre  $\mathbb{T}_!$ , usando el mismo argumento de la Sección 4.3, tenemos que

$$\mathbb{E}(N_n) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} f(i)}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Por la desigualdad de Markov tenemos que

$$\mathbb{P}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(N_n \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(N_n)}{1} = \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$\theta(\mathbb{T}_!) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Así, para la existencia de percolación de accesibilidad sobre árboles esféricamente simétricos, es necesario considerar árboles con una función de crecimiento superlineal. Este comportamiento no es sorprendente ya que el modelo dificulta la accesibilidad en caminos largos. Por lo tanto, se consideran árboles esféricamente simétricos, denotados por  $\mathbb{T}_\alpha$ , con función de crecimiento dada por  $f(i) = \lceil (1+i)^\alpha \rceil$  y  $\alpha > 0$  constante.

Por el Lema 5.2.1,  $\theta(\mathbb{T}_\alpha)$  es una función no decreciente en  $\alpha$  y el parámetro crítico de transición de fase,  $\alpha_c := \inf\{\alpha : \theta(\mathbb{T}_\alpha) > 0\}$ , está bien definido. El siguiente resultado establece que  $\alpha_c = 1$ .



**Teorema 5.2.1 (Coletti *et. al* [4])** Para el modelo de percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_\alpha$  se cumple que:

1. Si  $\alpha \leq 1$  entonces  $\theta(\mathbb{T}_\alpha) = 0$ .
2. Si  $\alpha > 1$  entonces  $\theta(\mathbb{T}_\alpha) > 0$ .

**Demostración:** Para el caso  $\alpha \leq 1$ , debido a que  $\lceil(1+i)^\alpha\rceil \leq (i+1)$ , tenemos que  $\mathbb{T}_\alpha \prec \mathbb{T}_1$  y por el Lema 5.2.1 se sigue que  $\theta(\mathbb{T}_\alpha) \leq \theta(\mathbb{T}_1) = 0$ .

Para el caso  $\alpha > 1$ , observemos que el modelo de percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_\alpha$  puede asociarse a un proceso de ramificación en ambiente variable con selección (PRCS), donde el valor esperado del número de descendientes por individuo (antes de selección) en el proceso de ramificación corresponde a la función de crecimiento del árbol en el modelo de percolación. Es decir,  $m_i = \lceil(1+i)^\alpha\rceil$ . Así, el PRCS sobrevive si y solo si existe percolación de accesibilidad sobre  $\mathbb{T}_\alpha$ .

Ahora, por el Teorema 3.4.3, teniendo  $m_i = \lceil(1+i)^\alpha\rceil$  y  $m_i^{(2)} = m_i^2 = \lceil(1+i)^\alpha\rceil^2$  y considerando la sucesión  $\{c_i\}_{i \geq 0}$  siendo  $c_i = 1$ , para todo  $i \geq 1$  y  $C = 2$ , tenemos que para  $\alpha > 1$ ,

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lceil(1+i)^\alpha\rceil} < \infty$ .
- $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j^2 - m_j}{m_j^2} (2^j)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) (2^j)^{-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$ .
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} 2^n = 2 > 0$ .

Así, podemos concluir que el PRCS sobrevive y por lo tanto  $\theta(\mathbb{T}_\alpha) > 0$ . □

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Aizenman, M., Kesten, H. and Newman, C.M., Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short- and longrange percolation, *Communications in Mathematical Physics* **111**, 505- 532 (1987).
- [2] Bertacchi, D., Rodriguez, P., Zucca,F., Galton-Watson processes in varying environment and accessibility percolation *Braz. J. Probab. Stat.* **34** (3) 613 - 628 (2020).
- [3] Broadbent, S.R. and Hammersley, J.M., Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **53**, 629-641 (1957).
- [4] Coletti, C. Gava, R. and Rodriguez, P., On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model, *Physica A.*,(2018).
- [5] Fontes, L.R. Notas em Percolção. IMPA (1998).
- [6] Franke J., Kloezer A., de Visser J. A. G. M. and Krug J., Evolutionary Accessibility of Mutational Pathways, *PLOS Comput. Biol.*, 7 (2011). e1002134.
- [7] Franke, J., Wergen, G. and Krug, J. Records and sequences of records from random variables with a linear trend. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* P10013 (2010).
- [8] Grimmett, G. Percolation, 2.ed. Springer, Berlin (1999).
- [9] Harris, T., A lower bound for the critical probability in a certain percolation process, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56**, 13-20 (1960).
- [10] Hegarty P. and Martinsson A., On the existence of accessible paths in various models of fitness landscapes, *Ann. Appl. Probab.* **24**, 1375–1395 (2014).
- [11] Kesten, H., The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ , *Communications in Mathematical Physics* **74**, 41-59 (1980).

- [12] Kesten, H., Asymptotics in high dimensions for percolation. *Disorder in physical systems*, Oxford University Press, 219–240 (1990).
- [13] Krug, J. Accessibility percolation in random fitness landscapes. *Probabilistic Structures in Evolution* (E. Baake and A. Wakolbinger, eds.), EMS Press, Berlin, pp. 1-22, (2021).
- [14] Nowak S. and Krug J., Accessibility percolation on n-trees, *Europhysics Letters*. **6**,(2013).