Construcción de conjeturas y justificaciones en la clase de matemáticas con estudiantes de octavo grado

Julián Alberto Villa Monsalve

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Tutor
Jorge Andrés Toro Uribe, Doctor en Educación Matemática

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Medellín, Antioquia, Colombia
2022

Dedicatoria

A mi familia y compañeros, pues sin sus palabras y apoyo no podría haber llegado al punto en el que me encuentro hoy.

Agradecimientos

A todas aquellas personas que me incentivaron a ver la educación como el arma para enfrentar el mundo, mis profesores, compañeros y por último a mi asesor quien con su paciencia ha podido generar en mí una conciencia por el aprendizaje y la enseñanza.

Tabla de contenido

Lista de Imágenes

Siglas, acrónimos y abreviaturas

Æ•G	Grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional.
MEN	Ministerio de Educación Nacional
cK¢	Teoría de la Unidad Cognitiva
PhD	*Philosophical Doctor*
PTA	Programa Todos a Aprender
TPACK	Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido
UdeA	Universidad de Antioquia

Lista de figuras

Resumen

Este es un informe de trabajo de grado resultado del proceso de la Práctica Pedagógica, la cual fue realizada en el marco de la contingencia global Covid-19. Se buscó favorecer aprendizajes de la matemática en estudiantes de octavo grado en la Institución Educativa Compartir a partir de la conjeturación y justificación, con la mediación del sistema de geometría dinámica *GeoGebra*, pues posibilita la visualización, la exploración y el arrastre como medios para generar y probar conjeturas, entendiendo estas como un primer paso hacia la argumentación en clase de matemáticas. Así mismo, para identificar el razonamiento de los estudiantes y como estos comprenden, se puso en marcha un experimento de enseñanza con el cual se pudiera dar cuenta del fenómeno educativo abordado en este documento. La participación de los estudiantes, el diseño de las tareas y el aprendizaje de la geometría son elementos claves para la consecución del objetivo propuesto.

Palabras clave: Argumentación, Aprendizaje de la matemática, *Geogebra*, Exploración, Visualización, Conjeturación, Justificación.

Abstract

This is a grade work report resulting from the Pedagogical Practice process, which was carried out within the framework of the Covid-19 global contingency. The aim was to promote learning of mathematics in eighth grade students at the Compartir School based on conjecture and justification, with the mediation of the GeoGebra dynamic geometry system, since it enables visualization, exploration and dragging as means to generate and test conjectures, understanding these as a first step towards argumentation in mathematics class. Likewise, to identify the reasoning of the students and how they understand, a teaching experiment was launched with which the educational phenomenon addressed in this document could be accounted for. The participation of the students, the design of the tasks and the learning of geometry are key elements for the achievement of the proposed aim.

Keywords: Argumentation, Mathematics learning, Geogebra, Exploration, Visualization, Conjecture, Justification

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Contexto

El informe presentado en este documento es producto de una investigación educativa, resultado tanto de la Práctica Educativa realizada en la Institución Educativa Compartir, como de las plenarias y discusiones del Seminario de Práctica. Este último ha sido decisivo en cuanto a reflexiones producidas en el marco de las lecturas propuestas para el curso y las conversaciones en torno a los sucesos que se llevaron a cabo durante los semestres de la duración de la práctica.

La Institución Educativa Compartir es de carácter urbano, oficial y mixto, está ubicada en San Antonio de Prado, corregimiento del municipio de Medellín, en la Carrera 62A #42D Sur 26. La Institución Educativa está organizada en cuatro gestiones: administrativa, directiva, académica y comunitaria, lo cual da soporte a su Proyecto Educativo Institucional que busca responder a las necesidades del contexto, de la comunidad educativa y de los procesos que se gestan en el quehacer propio de la institución.

Dicha comunidad educativa está conformada por estudiantes, profesores, familias, egresados, directivos docentes y administradores escolares. La institución atiende a estudiantes de estratos socioeconómicos 2 y 3, son en total 992 estudiantes y 32 profesores (datos del año 2021) sumando las jornadas de la mañana y tarde, cuenta además con dos auxiliares administrativos, dos coordinadoras, una académica y otra de convivencia, y el rector. También cuenta con diferentes programas de la Secretaría de Educación de Medellín, como la Unidad de Apoyo Integral UAI, programa cuyo propósito es atender a los estudiantes con necesidades educativas especiales, el Programa Todos a Aprender PTA y una psicóloga.

La Institución Educativa Compartir específica, en el horario, las horas en que se trabaja aritmética, geometría y estadística, se define también la duración de cada área y se propende por aportarle a los estudiantes generalidades de cada una.

Esta institución también es promotora de generar una cultura digital, teniendo en cuenta el desarrollo de nuevas tecnologías y diferentes formas de comunicación, lo que puede llegar a ser un motor para vincular a los estudiantes en las diferentes alternativas de aprendizaje que las tecnologías ofrecen. Aunque el colegio no tiene suficientes recursos tecnológicos, cuenta con una formación en cultura digital por parte de los profesores, estos realizan intercambios pedagógicos con diferentes instituciones de la ciudad que apoyen tales procesos educativos.

El mayor objetivo de impartir este tipo de cultura es establecer y posicionar criterios y acciones orientadas a la comprensión, apropiación, producción, circulación de contenidos y estrategias de comunicación y cultura en ámbitos digitales; esto muestra la gran importancia que la institución le da a este tipo de innovación en educación, pues de acuerdo con la visión del MEN (1998) se reconoce el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones. En este sentido la institución acoge las diferentes formas de aprendizaje que por medio de la tecnología encuentran una manera de construir y apoyar los conocimientos de los estudiantes. La Institución Educativa Compartir apoya el uso de diferentes tecnologías entendiendo el carácter evolutivo de los tiempos actuales.

De manera particular, esta investigación fue desarrollada en el marco de la situación de contingencia originada por el Covid-19, la cual significó para todos los sectores de la sociedad, económico, social, político y educativo una serie de dificultades y retos, entre las cuales se encuentra el tránsito de la presencialidad a la virtualidad. Para la educación produjo que se debieran de asumir diferentes retos como la planeación de una clase a través de diferentes dispositivos, el acceso a las herramientas tecnológicas y a la conexión a internet, el cambio de ambiente de aprendizaje, de la escuela a la casa. También supuso dificultades, tales como la falta de atención, la baja participación en algunos casos, y la inasistencia (teniendo en cuenta las posibles eventualidades que llevarían a tal caso).

El desarrollo del primer semestre de práctica comenzó en el segundo semestre de 2020 con estudiantes de grado sexto, donde el objetivo fue observar las diferentes dinámicas que se gestaban en la clase, de estas se formularon reflexiones para compartir en el Seminario de Práctica, además se realizó asistencias a las diferentes reuniones que los profesores realizaban cada semana donde comunicaban el desarrollo de sus clases, las diferentes actividades que se realizarían durante la semana o las decisiones que desde las diferentes áreas se impartían en la institución, todo por medio de la virtualidad.

A partir del segundo semestre de práctica, se cambió la dinámica de observación a una participación más activa con los estudiantes, esto conllevó a la creación de un Semillero de Matemáticas a través de la plataforma *Meet*, que tuvo lugar durante el segundo y tercer semestre de practica (2021-1 y 2021-2), los martes durante una hora por 14 semanas. Para los encuentros con los estudiantes se formularon Guías a estudiantes de grado octavo, cuyas edades oscilan entre los 13 y 16 años. Dichas Guías eran discutidas durante el Seminario de Práctica y así discutir detalles logísticos tanto en la clase como en la misma Guía. En general las guías de clase constaban de una primera sección con tareas lógico-matemáticas (triángulos mágicos, ejercicios de razonamiento, entre otros) y una segunda sección focalizada en afianzar y profundizar conceptos de álgebra y geometría.

De manera gradual la segunda sección de la Guía fue orientada a tareas apoyadas con el Sistema de Geometría Dinámica *GeoGebra*, esto para vincular a los estudiantes al programa, de modo que se familiarizaran con las herramientas que este ofrecía.

El día de inicio de las clases en el Semillero de Matemáticas la asistencia fue de 13 estudiantes, al finalizar el segundo semestre de practica la cantidad había reducido a 5 participantes. Lo anterior pudo ser ocasionado por diferentes razones, como la misma situación de contingencia, las dificultades en el acceso a dispositivos electrónicos o a internet, la motivación de los estudiantes, el agotamiento propio de asistir a clases virtuales o el retorno de las clases presenciales que tuvo lugar a partir del mes de julio. Dado este panorama, se tomó la decisión, para finalizar el tercer semestre de la práctica, de invitar a los estudiantes que habían tenido mayor constancia y motivación a encuentros presenciales y con quienes se realizó el trabajo de campo del presente trabajo.

Planteamiento del problema y justificación

Durante el semestre de observación de clases y en el trabajo desarrollado en el Semillero de Matemáticas se identificó que los estudiantes tenían baja participación durante las clases, por lo general no activaban ni sus audios ni sus vídeos y era difícil que respondieran algún tipo de pregunta. Fue difícil que los estudiantes se sintieran motivados a participar de las diferentes actividades propuestas, la distancia fue un factor importante y la contingencia hizo evidencia de eso, también no poder tener un acercamiento con los estudiantes, observar cómo cada uno de los estudiantes asumía una actitud frente a la clase y a las tareas y así poder favorecer el aprendizaje.

También se pudo identificar que las tareas a los cuales estaban acostumbrados los estudiantes correspondían, en su mayoría, a ‘tareas rutinarias’, en donde solo se buscaba la ejercitación de procedimientos. Lo que suele estar asociado solo la asimilación de algoritmos o memorización de propiedades. Al generar preguntas sobre la segunda parte de las tareas propuestas a los estudiantes de las guías, se les dificultó por una parte explorar *Geogebra*, por otra parte la baja participación evitaba evidenciar un posible acercamiento o error en los estudiantes o del profesor en formación a los objetos geométricos pensados para los encuentros o dificultades en la manipulación del software, por ende las preguntas realizadas durante las clases eran respondidas por los estudiantes de manera parcial y en la gran mayoría de casos estos no sentían la responsabilidad para con el semillero de entregar algún tipo de respuesta ya fuese verbal o escrita, así que las posibles justificaciones a las respuestas no permitían visualizar el aprendizaje o un acercamiento a este.

A manera de ejemplo que permita ilustrar la situación problemática, se presentan dos apartados de los encuentros del Semillero. En el primero consiste en un fragmento del encuentro del 13 de abril de 2021. En este encuentro, la guía constaba de retos geométricos visuales, en donde los estudiantes debían identificar cuántos cuadrados tenía una figura (ver Figura 1).

Figura 1

Figura presentada a los estudiantes del semillero en el encuentro del 13 de abril de 2021

Nota. Archivo personal del autor.

Los estudiantes Sebastián y Daniel encontraron 33 cuadrados, ante lo cual el profesor les solicito justificación, como se observa en el siguiente fragmento.

Transcripción del encuentro del 13 de abril de 2021

Turno	Participante	Intervención
1	Sebastián:	Profe yo creo que los están…. Haber moviendo la figura. Usted también la puede partir.
2	Daniel:	Sí profe.
3	Profesor:	Pero entonces solo habría otros dos.
4	Daniel:	Profe otros cuatro por fuera, porque como dijo Jhostin puede partir el coso [aunque no es explícito, es una parte de la figura], pero ahí donde están costadas las partes puede haber otros cuadrados. Sí, se puede partir también.

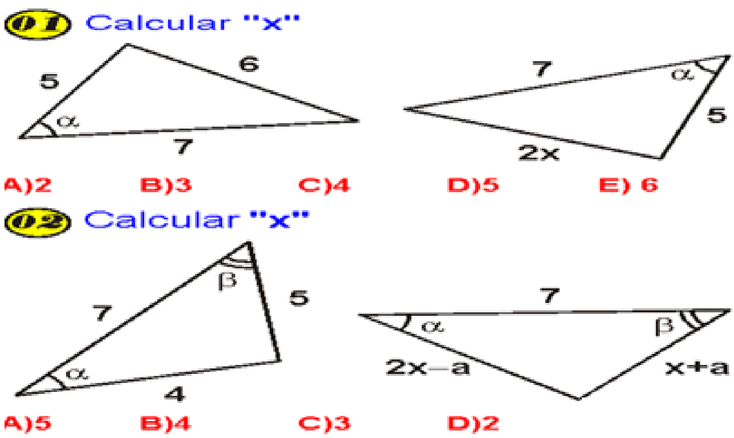
Aunque los estudiantes se salieron un poco de las instrucciones de la tarea, estos no pudieron dar una justificación que se basara en conceptos geométricos pues al decir "partir" [1] no se señala donde se realiza el corte. Sumado a ese hecho, la tarea constaba de una figura compuesta por lo que al decir "el coso" [4] no se da claridad sobre la figura o figuras a destacar. Esto muestra varias dificultades, desde la virtualidad no es posible percibir la forma en que el estudiante expresa su justificación para este tipo de tareas, donde por lo general este usaría sus manos o alguna otra herramienta para detallar el conteo de cuadrados, al no ver directamente las acciones del estudiante, para el profesor es muy difícil establecer un juicio sobre los comentarios de los estudiantes y así realizar el debido diagnóstico de las respuestas a una determinada tarea.

El segundo apartado corresponde al encuentro del 28 de septiembre de 2021.

Mientras se resolvían algunas tareas en el semillero, un estudiante compartió la imagen de un Taller propuesto por el profesor titular del curso, como se aprecia en la Figura 2, que debían resolver para su clase de matemáticas. Este taller constaba de algunas tareas de congruencia de triángulos, pero que parecieran estar más relacionadas con procesos algebraicos que geométricos. Aunque no se pretende deslegitimar la posible relación entre pensamientos matemáticos, se considera que esta forma de presentar la geometría no permite favorecer procesos como la exploración, donde el estudiante pueda aplicar sobre la tarea de la Figura 2 razonamientos producto de la visualización, sin embargo al tener en cuenta el carácter espacial de la geometría se le imposibilita a los estudiantes establecer relaciones entre las propiedades de la geometría, lo que idílicamente seria propicio para el camino hacia la demostración, por eso es necesario que las tareas de geometría permitan a los estudiantes justificar, comunicar y argumentar las conexiones entre propiedades de la geometría que este logre identificar.

Figura 2

Tarea presentada por un estudiante sobre la congruencia de triángulos



Nota. Figura tomada del original.

La importancia de favorecer procesos como, la justificación, la comunicación y la argumentación en la clase de matemáticas radica en que los estudiantes puedan discutir sus ideas u opiniones además de generar y debatir posibles conjeturas como primeros acercamientos a la argumentación. De allí que, primero se posibilite dar cuenta del peso conceptual de estos pensamientos y así legitimar su validez; segundo, al defender y comunicar sus inferencias las demás personas podrán generar su propia opinión (Weston, 1987), aquí la participación y mediación del profesor y del estudiante se hacen imprescindibles, pues son los objetos matemáticos discutidos y/o estudiados los productores de diferentes sensaciones u opiniones que conduzcan en posibles refutación o acepciones y como consecuencia un posible aprendizaje.

Lo anterior muestra el papel, relevancia y posibles habilidades y/o rutas para el favorecimiento de la producción de justificaciones y conjeturas por parte de los estudiantes. Pero que, si la enseñanza se presenta de una manera tradicional, es decir basada en el reconocimiento de figuras, propiedades o atributos de los objetos matemáticos, o en la ejercitación de procedimientos, y sin conexiones con otras áreas como la tecnología, podría no ser un escenario propicio para el favorecimiento de procesos importantes en las clases de matemáticas.

Así que es necesario buscar la forma en que los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Compartir logren generar conjeturas y justificaciones, las cuales deberán ser comunicadas de forma oral o escrita y así desde una fuente de información atender a las posibles dificultades que presenten los estudiantes al plantear enunciados o consecuencias que permitan resolver problemas de naturaleza matemáticas, pues como se dijo anteriormente, al comunicar las ideas estas se someten a ser validadas (en caso de ser veraces) o refutadas (en caso de mostrar falsedad) , además de ser necesario un acercamiento directo a los conceptos geométricos de manera que sean mas afines a los estudiantes y estos puedan incluirlos dentro de sus prácticas comunicativas, incluyendo la escritura.

Esta panorámica lleva a plantear la siguiente pregunta y objetivo de la investigación.

Pregunta de investigación: *¿Cómo favorecer la construcción de conjeturas y justificaciones en la clase de matemáticas con estudiantes de octavo grado?*

Objetivo de la investigación: *Favorecer la construcción de conjeturas y justificaciones en la clase de matemáticas con estudiantes de octavo grado.*

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Antecedentes

Este apartado se plantea en dos líneas, la primera referida a investigaciones sobre la argumentación en la clase de matemáticas, y la segunda referida a investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría mediada por sistemas de geometría dinámica. Para la búsqueda se consultaron algunas bases de datos como *Springer*, Academia y *Scielo*, así como revistas especializadas como Educación Matemática, también el repositorio del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional y el repositorio de la Universidad de los Andes.

Investigaciones referidas la argumentación en la clase de matemáticas

Respecto a la argumentación en la clase de matemáticas, algunos autores como Lozano (2015) afirman que abordar la validación de pruebas pueden encadenar proposiciones, mediante relaciones lógicas para llegar a convencer a un interlocutor. De la misma manera Freire y Mantica (2015) plantean que los estudiantes argumentan sus conjeturas desde el empirismo, dejando de lado el uso de propiedades para darles valor a las mismas. Otros autores como Kosko y Zimmerman (2017) incentivan la argumentación escrita y generan una caracterización de los tipos de escrituras. Por otro lado, Toro (2014) relaciona las diferentes acciones que realizan los profesores para motivar algunos tipos de argumentos. Así mismo Molina et al. (2015) analizan las acciones de los estudiantes al desarrollar una actividad argumentativa, afirman además que un buen desarrollo de esta debe ser mediada por la conjeturación.

De manera específica, Lozano (2015) aborda el proceso de aprendizaje de la prueba matemática a través de la argumentación utilizando *GeoGebra*. Este estudio fue realizado en México con estudiantes de bachillerato. La autora plantea la importancia de que los estudiantes puedan validar sus conjeturas y construir argumentos deductivos de manera autónoma. La unidad cognitiva y la continuidad estructural son los referentes teóricos de dicho trabajo, pues considera que acercar primero a los estudiantes a la argumentación previo a la demostración puede ser útil para construir una relación entre argumentación y demostración y segundo continuar una secuencia de razonamientos lógicos de los estudiantes de bachillerato mientras construyen conjeturas ya sean motivadas por la observación de estos o por preguntas del profesor que conduzca a un argumento deductivo. Lozano (2015) analiza las respuestas de los estudiantes, quienes estuvieron en un ambiente de geometría analítica con el uso de GeoGebra mediante el modelo de Toulmin y el modelo cK¢, para ver que conocimientos usan los estudiantes al resolver problemas con el objetivo de aprender a probar o demostrar. Esto permite concluir que las preguntas que el profesor genere sean abiertas, de modo que sean detonantes de argumentos.

En Freire y Mantica (2014) se plantea una propuesta centrada en la producción de conjeturas a partir de las propiedades de un rectángulo. Las autoras utilizan el modelo Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido o TPACK por sus siglas en inglés para diseñar su propuesta mediada por el sistema de geometría dinámica *GeoGebra*. Este estudio se desarrolló en Argentina con estudiantes de segundo año de secundaria. Las autoras concluyen que los argumentos utilizados por los estudiantes para validar sus conjeturas o responder a las preguntas que ellas hicieron partían del uso de las herramientas y lo que ellos podían observar de estas.

Desde las políticas educativas de EE. UU se afirma que una posible gestión de la argumentación en el aula de clase es la escritura, ya que esto requiere del estudiante un análisis pulido, una secuencia de razonamientos lógicos, y un nivel de detalle que permita la explicación para generar argumentos. En esta línea, Kosko y Zimmerman (2017) analizan la escritura matemática de un grupo de estudiantes en primaria usando el modelo de Toulmin y la lingüística funcional, para examinar cómo funciona la gramática para transmitir el significado. Particularmente se trató de clasificar las características particulares de la escritura en matemática y como estas se manifiestan en las tareas y los niveles educativos. De acuerdo con los escritos matemáticos de los estudiantes, los autores logran identificar además de la escritura emergente, seis patrones distintos en la escritura, estos son enunciados matemáticos, recuentos matemáticos, procedimientos matemáticos, detalles matemáticos, descripciones matemáticas y explicaciones matemáticas. Los autores concluyen que algunas características de los argumentos matemáticos tienden a surgir en dos diferentes secuencias, una enfocada en contextos o casos específicos y otra depende de la tarea y de factores externos.

Por su parte Toro (2014) plantea estudiar la argumentación de estudiantes de grado octavo cuando realizan actividad demostrativa (conjeturación y justificación) usando el software de geometría dinámica *Cabri*. El autor realizó un experimento de enseñanza que fue implementado en tres etapas, la primera centrada en la elaboración de la propuesta de enseñanza; la segunda fue la implementación de esta en el aula con un grupo de estudiantes de octavo grado; y la tercera consistió en el análisis de los resultados obtenidos, en esta etapa se categorizaron los argumentos según el modelo Toulmin. El autor identifica acciones como proporcionar espacios, reaccionar con aclaración o precisión, institucionalizar el saber, exigir justificación, proveer justificación o información, entre otros, las cuales son realizadas por el profesor para promover la argumentación en el aula.

Por su parte Molina et al. (2014) analizan las acciones que realizan algunos estudiantes de edad extraescolar (24-57 años) cuando se involucran en procesos de conjeturación y justificación, mediados por el sistema de geometría dinámica *Cabri*. El foco de atención de los autores es la actividad demostrativa, para ello consideran necesario enmarcar a los estudiantes en una cultura de construcción de teoremas. Se pretendió mediante un estudio de caso analizar las interpretaciones que estudiantes producen cuando dan soluciones a diferentes situaciones. En sus resultados señalan como la conjeturación brinda un primer acercamiento para desarrollar la capacidad argumentativa, pues las afirmaciones provenientes de este proceso son ideas producto de las acciones del profesor al implementar y desarrollar un ambiente de clase donde las tareas a desarrollar están centradas en la observación y exploración que además impliquen conjeturar. Como tal las tareas y la intervención del profesor deben darles a los estudiantes claros indicios de propiedades y objetos geométricos para que logren establecer conjeturas, ya sea de forma verbal o escrita. Algunas de las diversas acciones que aquí se reportan aconsejan claramente exigirles a los estudiantes justificar las conjeturas, con ello se pueden establecer posibles diagnósticos sobre el aprendizaje del estudiante, el diseño de las tareas y las acciones a asumir como profesor.

Se resalta como variada la multiplicidad en las intenciones por estos autores quienes buscan la manera de mejorar su quehacer en el aula y de la misma manera divulgan su trabajo, comparten sus conocimientos, una práctica que representa el valor del conocimiento y la posibilidad que otros accedan a este. Estas investigaciones dejan ver la importancia de implementar la argumentación primero como objeto de estudio y segundo como vehículo para generar aprendizajes, ya sea en estudiantes de primaria, secundaria o extraescolares.

Además de presentar herramientas para incentivar la práctica de la argumentación en los estudiantes, mostrando diversas formas de generar ambientes propicios para ello apoyados por sistemas de geometría dinámica. Estos últimos se han caracterizado por ser recursos de muy amplio espectro, al permitir que se pueda desarrollar la argumentación desde procesos básicos como exploración o la visualización, lo cual puede desencadenar en conjeturas que requieren de argumentos para establecer su validez.

Investigaciones referentes al aprendizaje de la geometría mediado por sistemas de geometría dinámica

Con respecto al aprendizaje de la geometría mediada por sistemas de geometría dinámica, Sánchez y Samper (2020) ponen en evidencia que, a partir de funciones como el arrastre, los estudiantes pueden discernir propiedades geométricas. Para Súa y Camargo (2019) estas funciones mediante el razonamiento científico permiten resolver problemas, Larios (2006a) comenta que estos sistemas permiten una mediación semiótica entre el estudiante y los objetos geométricos. Por otro lado, para Campo, van Vaerenbergh y del Barrio (2021) abordar estos sistemas en el currículo puede servir en el tránsito de la enseñanza tradicional a la digitalización. Por último, Súa (2021) resalta las características de estos sistemas, en particular *GeoGebra* por la capacidad de hacer representaciones tanto bidimensionales como tridimensionales.

Sánchez y Samper (2020) muestran una forma de determinar el uso e interpretaciones que los estudiantes realizan cuando construyen un objeto matemático en un software de geometría dinámica. Para el estudio de dichas teorías se trabajó con 22 estudiantes de octavo grado con edades en los 12 y 14 años, se trató de generar en las clases un momento en torno a *GeoGebra* con la finalidad que este les fuese natural en su diario proceder. En el análisis adoptan la Teoría de variación la teoría de las aprehensiones figurales. Para el análisis se desarrollaron categorías y códigos de acuerdo a los tipos de arrastre (contraste, separación, generalización, fusión) y aprehensiones (perceptuales y discursivas) además como resultado los autores comentan que esta relación permite analizar los procesos de resolución hechos por los estudiantes.

Analizar la búsqueda de una solución y darle sentido a una construcción desde un sistema de geometría dinámica, cobra gran importancia para definir los razonamientos que los estudiantes emplean en la utilización de un artefacto, en relación a esto Súa y Camargo (2019) comentan que promover en los estudiantes experiencias académicas de indagación propias de las ciencias, pero no exclusivas de ellas pueden estar presentes en situaciones de la vida cotidiana y profesional, para ello implementan un problema de geometría a un grupo de estudiantes de noveno grado, para analizar el razonamiento de los estudiantes mientras solucionaban un problema en un sistema de geometría dinámica. Para analizar las respuestas de los estudiantes y establecer la sinergia entre el razonamiento científico y los artefactos que provee el sistema de geometría dinámica *GeoGebra* los autores utilizaron indicadores de génesis instrumental y razonamiento científico. Ellos buscaron interpretar la interacción de un sujeto con el artefacto mientras este lo convierte a su vez en instrumento desde la instrumentalización, como característica del razonamiento científico.

Larios (2006a) considera algunos fenómenos cognitivos que son comunes en la clase de geometría, como por ejemplo la rigidez geométrica y la preferencia por estudiar propiedades de figuras según su posición estándar, para el autor esto se asume dada la percepción de los estudiantes y a las características de los sistemas de geometría dinámica. El problema que se aborda se centra en la dificultad que enfrentan los alumnos sobre las representaciones graficas durante la clase, considerando como objetos de estudio el transito dibujo- figura- objeto geométrico. Con el apoyo de la teoría de los conceptos figurales se pretendió una investigación con estudiantes de Querétaro (México), cuyas edades oscilaron entre los 14 y 15 años. Se valoran estos sistemas pues tienen la particularidad de ser productores de significados (mediadores semióticos), también permite la interacción entre un individuo y un conocimiento geométrico a partir de funciones como el arrastre. El autor comenta varios tipos de arrastre desde un paradigma fenomenológico, por ejemplo, arrastre como retroalimentación, como mediador y como examen entre otros, los cuales sirvieron para denotar la aprehensión de significados. Por último, concluye que las figuras o formas en posiciones estándares no permiten concebir posibilidades de exploración que conduzcan a generalizar propiedades de estas y además que al justificar los estudiantes no ven la necesidad de apoyarse en las propiedades geométricas cuando explican, evidenciando la brecha entre los componentes conceptuales y figurales.

Campo et al. (2021) ven en los sistemas de geometría dinámica una enorme posibilidad para el aprendizaje, una de sus principales razones para afirmar esto, es el tránsito de la enseñanza tradicional o la digitalización impulsada por las medidas adoptadas por la contingencia. Los autores pretenden mostrar que la incursión de estos sistemas al currículo seria óptima para explicar ciertos conceptos de las ciencias dadas las características de los sistemas para construir modelos geométricos de manera interactiva y dinámica. Con ello se pretende compartir una visión del aprendizaje de la geometría que no está ligada a la codificación de conocimientos, y así involucrar a los estudiantes en procesos propios de la geometría como representaciones, visualizaciones y organizaciones de saberes. Se realizo una secuencia didáctica con estudiantes de entre 14 y 15 años en España, donde estos tratarían de adivinar una propiedad geométrica. Como tal, esta es una herramienta formulada desde una metodología activa que además aborda varias competencias (competencia lingüística, aprender a aprender, competencias matemáticas y competencias básicas en ciencias y tecnologías, entre otras) con el ejercicio de estas los estudiantes asumirán un rol activo en su conocimiento. También la perspectiva adoptada cambia la forma rutinaria en la representación de contenidos lo que puede resultar motivador para los estudiantes.

Súa (2021) comparte las posibilidades para el aprendizaje que traen los sistemas de geometría dinámica. El autor comenta que las investigaciones referentes a la geometría plana y estos sistemas han sido ampliamente estudiados, pero por otro lado la geometría espacial no lo suficiente, lo que significa en una novedosa propuesta investigativa. Como tal quiso ayudar a estudiantes de ente los últimos años de primera y primeros de secundaria con alta capacidad para generar aprendizajes sobre la demostración. El autor asume la divergencia entre la producción de una conjetura y su posterior demostración, por lo que el uso de sistemas de geometría dinámica permite solucionar dicho problema. Como tal se implementaron unas actividades diseñadas de una perspectiva de trayectorias hipotéticas, pues era necesario atender a todos aquellos procesos mentales que estaban surgiendo en pro de mejorar el pensamiento matemático. El proceso de aprendizaje para este autor debe ser influenciado por el profesor, quien a través de conversaciones les plantea interrogantes a sus estudiantes sobre sus construcciones para así guiarlos a un objetivo de aprendizaje.

Muchas de las investigaciones actuales sobre el aprendizaje de la geometría están mediadas por los sistemas de geometría dinámica. Aunque no se pretende desestimar la importancia de otras formas para abordar dicho proceso, estos sistemas han permitido un acercamiento directo entre el estudiante, el recurso tecnológico y los objetos geométricos. Tales sistemas junto con un marco teórico permiten establecer múltiples formas para trabajar el aprendizaje de la geometría desde procesos como resolución de problemas y a su vez permite identificar el razonamiento que los estudiantes pueden realizar al solicitarles justificaciones sobre posibles construcciones en la solución de estos, todo mientras asumen un papel activo y participativo pues de su interacción con un objeto de estudio construyen su conocimiento estableciendo significados producto de la interacción con los sistemas de geometría dinámica.

Fundamentación teórica

En este apartado se presenta la fundamentación teórica de este trabajo, por un lado, aspectos relacionados con el aprendizaje de la geometría mediada por sistemas de geometría dinámica y por otro, la argumentación en la clase de matemáticas.

Aprendizaje de la geometría mediada por sistemas de geometría dinámica

Los denominados sistemas de geometría dinámica proporcionan, de un lado, la opción de crear ambientes en los que es posible la experimentación sobre las representaciones de los objetos geométricos (Larios, 2006b); y de otro, permiten la posibilidad de visualizar, explorar, analizar, plantear conjeturas acerca de las propiedades o relaciones observadas y construir demostraciones (Fiallo, 2010). La aparición de los sistemas de geometría dinámica se remonta a los años 80 con la aparición del *Logo*, sin embargo, es hasta el año 1988 que aparece Cabri generando un auge en investigaciones de todo el mundo focalizadas en explorar las posibilidades de estos sistemas para la enseñanza de la geometría (Gutiérrez, 2005).

Respecto a las ventajas educativas de los sistemas de geometría dinámica se resaltan algunas. Por ejemplo, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se comenta que la visualización es un proceso inherente a la percepción de figuras como un todo global. Así mismo, Perry et al. (2013) afirman que se consigue información geométrica de una figura identificando los elementos que la componen y algunas configuraciones que se puedan formar con ellas, o también interpretando símbolos que representan propiedades geométricas con el ánimo de encontrar posibles relaciones.

Además de lo anterior, otros autores como Fernández y Montoya (2013) indican que la construcción de modelos geométricos y su relación con la percepción visual, y también la representación, está vinculada con el potencial humano de visualizar y la búsqueda de mecanismos de argumentación para lograr justificar afirmaciones; y Samper y sus colegas (2012) refieren como el uso de estos sistemas en la solución de tareas puede incentivar actividades matemáticas, como la producción de conjeturas, el razonamiento argumentativo.

Es importante señalar, además, la opción del arrastre en sistemas de geometría de dinámica como *GeoGebra*. En este sentido Toro (2014) alude la posibilidad del arrastre para modificar directamente la forma o posición de los objetos geométricos construidos, preservándose las relaciones geométricas originales y Molina-Luque y Robayo (2014) aseveran como esta función podría permitir explicar posibles conjeturas con base en lo que se observa y así determinar su validez.

Argumentación en la clase de matemáticas

En Colombia los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), plantean algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática, en los cuales se incluye el razonamiento, de manera particular se afirma que se debe “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas y avanzar en el camino hacia la demostración” (p.51). Este proceso incluye particularidades tales como percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas, dar explicaciones, proponer interpretaciones y respuestas posibles, adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones, las cuales pueden adaptarse al nivel educativo de los estudiantes (MEN, 2006).

En este trabajo, la argumentación en la clase de matemáticas será entendida un "acto complejo destinado a resolver una diferencia de opinión, en el cual interesa convencer acerca de la aceptabilidad de un punto de vista a través de la justificación o refutación" (Toro y Castro, 2020, p. 36). Esta consideración respecto a la argumentación, busca atender a determinadas interacciones en la clase de matemáticas, donde profesor y estudiantes discuten durante el desarrollo de una lección sobre una determinada tarea. En lugar de ser solo una entidad estructural, la argumentación está relacionada con la comunicación y la interacción, ocurre por medio del uso del lenguaje y puede desempeñarse en forma oral o escrita.

De otro lado, para dar precisión a los conceptos de conjeturación y justificación se retoman algunos aspectos de Perry et al. (2013). De un lado, los autores afirman que el proceso de la conjeturación tiene como objetivo la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto, pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado.

Camargo (2010) dice que el proceso de conjeturación suele darse desde el empirismo o desde la exploración con la aparición de hipótesis, suposiciones o afirmaciones. Las acciones relacionadas a la conjeturación son detectar un invariante y verificarlo siempre que surjan elementos de incertidumbre, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general (si… entonces), un hecho matemático que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares.

Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan, esta confirmación suele ser puesta en marcha analizando la cadena de argumentos que posibilitasen la aparición de la conjetura, este proceso es conocido comúnmente como demostración, en particular Camargo (2010) lo define como

> Un discurso que respeta ciertas reglas, fundamentado en un sistema teórico de referencia, mediante el cual se da validez a un enunciado al interior del sistema. Para ello, se establece una cadena deductiva de afirmaciones que lleva del antecedente del enunciado (de tipo condicional) al consecuente de este (p.48).

En dicho discurso argumentos, razones, puntos de vista o en este caso justificaciones, según Perry et al. (2013) el proceso de justificación tiene como objetivo la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento o un sistema teórico de referencia. Por lo tanto, la relación entre justificar y argumentar en este trabajo aparece como el convencimiento a partir de razones las cuales se disponen desde un marco teórico el cual es primero cercano a los estudiantes, pues han trabajado Geometría en otros grados, y segundo *GeoGebra* posibilita realizar acciones de manera lógica de forma que se pueda visualizar cuando una construcción geométrica está bien realizada o no.

Las acciones relacionadas a la justificación son seleccionar entre elementos identificados, teóricos o empíricos, aquellos que podrían sustentar la afirmación; organizar esos elementos de manera deductiva; formular la justificación.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describen los elementos metodológicos, tales como el enfoque, el método, las técnicas para la toma y registro de información, los participantes y el rol del profesor/investigador.

Este trabajo al tratar de responder una pregunta que busca favorecer el aprendizaje en el aula de matemáticas se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo (Bisquerra, 2009), pues a la luz de la comprensión del profesor/investigador se estudia e interpreta un fenómeno educativo en el momento que sucede generando un diseño propio de investigación a partir del análisis e interpretación propios. El fenómeno de estudio alude a un contexto educativo y se observa en el mismo en el cual ocurre, esto es en lecciones de clase de estudiantes de octavo grado.

El método corresponde a una investigación de diseño, en particular a un experimento de enseñanza. De manera general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador/profesor, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Molina et al., 2011). En este trabajo hacen parte del experimento de enseñanza el profesor/investigador, cuatro estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Compartir y los compañeros y profesor del Seminario de Práctica Pedagógica.

Un experimento de enseñanza es un proceso iterativo que consta de tres fases, preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y análisis de los resultados. La primera fase, la preparación y diseño del experimento, tuvo lugar en los diferentes encuentros del Seminario de Práctica Pedagógica, donde el profesor/investigador preparaba una guía con tareas para ser trabajadas con los estudiantes de octavo grado, estas eran compartidas con los compañeros y profesor del seminario, y luego tenía lugar un espacio de discusión y reflexión que permitía ajustar las tareas, que luego serían trabajadas durante el encuentro del semillero matemático. La segunda fase tenía lugar durante la implementación de las tareas con los estudiantes. La tercera fase tenía lugar al siguiente encuentro del Seminario de Práctica en donde se analizaban y discutían las fortalezas y aspectos a mejorar, lo cual permitía la preparación de la siguiente guía y el proceso volvía a iniciar. El análisis retrospectivo del experimento de enseñanza es motivo de discusión en el siguiente capítulo.

El experimento de enseñanza es propicio para responder al problema de esta investigación, pues la reflexión constante sobre el diseño de las tareas y la preparación de las mismas a partir de las respuestas de los estudiantes, permite comprender las razones de la aparición de estas, así como las acciones que se podrían llevar a cabo para cumplir el propósito de este trabajo.

El rol que se asumió el profesor/investigador fue de observador participante, este hacía acompañamiento a los estudiantes, daba indicaciones y respondía preguntas, se trató de interactuar lo más mínimo de manera que los estudiantes pudieran dar respuestas lo más genuinas posibles.

Como ya se informó en el primer capítulo, este trabajo fue realizado durante el marco de la contingencia global, lo que condujo el interés de este reporte a las clases virtuales con estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Compartir y que dada la baja participación de estos durante los encuentros, se decidió poner en marcha una serie de encuentros presenciales, en los que los estudiantes debían realizar en cada clase diferentes tareas, y que corresponde con el experimento de enseñanza. El trabajo realizado en los encuentros que precedieron al experimento durante el Semillero Matemático permitió crear un clima de confianza entre el profesor y los estudiantes, acompañar procesos académicos y acercar a los estudiantes en el manejo del software.

De manera específica, el experimento de enseñanza reportado en este trabajo corresponde a tres tareas, las cuales fueron compartidas de forma escrita con los estudiantes y en donde siempre se les solicitaba describir sus construcciones, exploraciones y descubrimientos, apoyándose del sistema de geometría dinámica *GeoGebra*. Dos de estas de tareas (Anexos 1 y 2 respectivamente) son propuestas por el profesor/investigador y para la tercera tarea (Anexo 3) se tomaron algunos aportes de Samper (2008). Las situaciones que se plantean en las tareas requerían que el estudiante las solucionará indicando de manera lógica un camino óptimo para la solución de estas.

Para la implementación del experimento de enseñanza se invitó a cinco estudiantes de grado octavo, quienes durante el Semillero Matemático habían asistido y participado en los encuentros virtuales, sin embargo, para el momento de la aplicación solo asistieron cuatro estudiantes: Tatiana, Ana, Carlos y Lorena, las cuales corresponden a los participantes de esta investigación. Tatiana es una estudiante destacada, pregunta cuando tiene dudas, aunque es un poco tímida fue participativa en las diferentes tareas. Ana al igual que Tatiana es una estudiante destacada y tímida, cuando mostraba inseguridad respecto a alguna respuesta no preguntaba al profesor, si no que se remitía a confirmar la posible respuesta con Tatiana. Carlos es un estudiante un poco distraído, pero con buena disposición, se esforzó por ser participativo en las tareas propuestas, aun cuando no presentaba las mejores respuestas. Lorena mostró interés y compromiso en los diferentes encuentros, tratando de completar las tareas propuestas y preguntando si lo consideraba necesario.

Con el fin de que los estudiantes establecieran durante los encuentros exploraciones y justificaciones que les permitieran acercarse a plantear una conjetura, se les hicieron preguntas todo el tiempo y la consigna fue que debían escribir todo lo que consideraban pertinente para dar respuesta a la tarea y las preguntas.

La tarea diseñada para el primer encuentro (ver Anexo 1) fue hecha con el propósito de que los estudiantes tuviesen la mayor cantidad de datos, con esto y la ayuda de *GeoGebra* supondría que los estudiantes pudieran dar respuesta a las tareas. Se trató de promover el concepto de punto medio entre rectas paralelas. En este encuentro se ideó un cuento con algunos detalles históricos de manera que resultase cercano al contexto en donde se abordó el objeto matemático punto medio entre rectas paralelas. La aplicación de esta tarea se realizó el 24 de septiembre de 2021, se contó con la asistencia de los cuatro estudiantes. Durante este encuentro fue necesario explicar el contenido de tarea, pues parecía haber confusión por la cantidad de información, lo cual ocasionó que los estudiantes no pudiesen dar respuestas concisas, otra razón pudo ser el diseño de las preguntas, pues se les quiso dar ideas claves en las mismas preguntas para resolver los incisos de esta primera tarea, pero no fue tan fructífero, aun así, mediante la interacción profesor/investigador con los estudiantes se llevó a cabo esta tarea. De manera que los estudiantes pudieran acercarse a un proceso de conjeturación se añadió a cada inciso tres preguntas, ¿Qué construí? ¿Qué exploré? ¿Qué descubrí?

Se diseñó la segunda tarea cuyo fin fue establecer la relación entre mediana y bisectriz en ciertos tipos de triángulos, como es el caso del triángulo isósceles y equilátero, donde el segmento une un vértice con el segmento opuesto justo en su punto medio, es decir, la mediana coincide con la semirrecta que biseca un ángulo, por tanto, es también la bisectriz.

También se planteó una situación que fuese real o al menos familiar con la cual poder relacionar el saber matemático con algo un poco más cercano a los estudiantes. Con la ayuda de *GeoGebra* se realizaron algunas representaciones para dar respuesta a las preguntas de las tareas. Para este encuentro al tener dificultades de comunicación solo pudieron asistir Tatiana, Ana y Lorena el día 19 de octubre de 2021. Se pudo notar que la información provista, aunque poca era difícil discriminar el objeto matemático. En el momento en que los estudiantes realizaban algunos acercamientos de manera oral, no lograban recordar sus palabras, de forma que pudieran dar respuesta escrita a las preguntas de la tarea.

En el tercer encuentro se presentaron algunas dificultades de movilización por lo que en una primera parte solo Isabel estuvo presente el 29 de octubre de 2021, posteriormente se implementó esta tercera tarea el 5 de noviembre de ese mismo año con Tatiana y Carlos. Para el diseño de esta tarea se recurrió a Samper (2018) en el cual se tomó una tarea centrada en la proporcionalidad directa. Se eligió tomar este porque se quiso observar cómo respondían los estudiantes a una tarea de un libro escolar pensado para que los estudiantes exploraran y justificaran por medio de *GeoGebra*. A esta tercera tarea se le incluyó un segundo punto. En este, el objeto matemático consistía en la representación de los cuadriláteros que lo estudiantes conociesen y las posibles relaciones que encontrasen al trazar mediatrices, se hace la salvedad pues en la instrucción que se presenta en esta segunda parte está incompleta, pues aunque no está allí escrito se les pidió a los estudiantes que arrastrasen los objetos geométricos que componen la representación geométrica de un cuadrilátero de tal manera que describiesen lo que viesen a partir de los construido. Se resalta que la primera y segunda parte de la Tarea 3 constaba de las mismas preguntas pensadas para tener respuestas con más contenido, ¿Qué construí? ¿Qué exploré? ¿Qué descubrí?

Antes de poner en marcha las tareas anteriormente mencionadas, en el marco del tercer semestre de práctica, los acudientes de los participantes de la investigación firmaron el correspondiente permiso (Anexo 4) con los cuales autorizaron el uso de los registros de los estudiantes, que en este caso concreto fue de forma escrita.

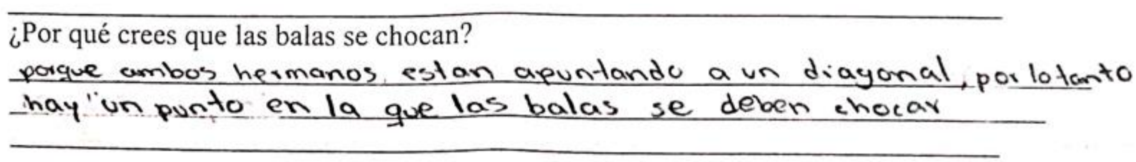
CÁPITULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se muestran los análisis hechos a las respuestas de los estudiantes para la toma y registro de datos, se generaron varios códigos con los cuales señalizar tanto la tarea como la respuesta del enunciado que se pretende analizar. Se hace la salvedad que la Tarea 1 y la Tarea 3 están divididas en dos momentos. Por ejemplo, para caracterizar la primera parte de las tareas se usará el código E1, así uno de los primeros registros será nombrado Tarea 1 E1-1a donde el último código, 1a, especifica el número del enunciado y si está compuesto por más preguntas se usará un orden alfabético. Se analizarán las tres tareas por separado y se ilustrarán los análisis con las producciones de algunos de los estudiantes.

Análisis de la Tarea 1

Figura 3

Respuesta de Lorena a la Tarea 1 E1-1B


¿Por qué crees que las balas se chocan?

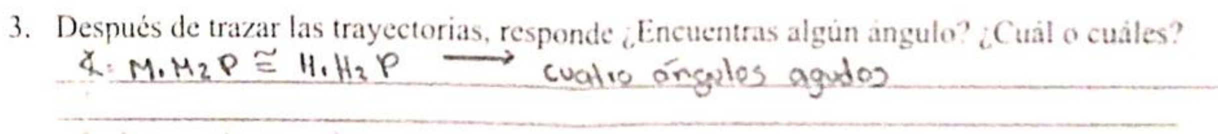
porque ambos hermanos estan apuntando a un diagonal, por lo tanto hay un punto en la que las balas se deben chocar

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

Como se observa en la Figura 2, Isabel además de responder el inciso de la Tarea 1, explora las herramientas de *GeoGebra*, para suponer que la trayectoria de las balas, al ser disparadas, forma posibles diagonales lo que conlleva a que se corten en un punto. Esto pareciera ser cierto, porque en un inicio se plantea a los estudiantes representar dos segmentos paralelos, donde los puntos que componen los segmentos representan la posición de los personajes mencionados en la tarea. Para asegurar que fuesen paralelos se les pidió a todos los estudiantes inscribir estos segmentos en rectas que a su vez fuesen paralelas. Lorena justifica que en algún punto las dos diagonales se cortaran formando un punto entre ambos segmentos, ella usa la palabra “apuntar” para señalar la inclinación de las rectas diagonales. Un punto crucial de esta tarea es que los estudiantes puedan concluir que en todo cuadrilátero paralelogramo se cumple que las diagonales se corten en un punto llamado punto medio (Ver Figura 8).

Figura 4

Respuesta de Lorena a la Tarea 1 E1-3



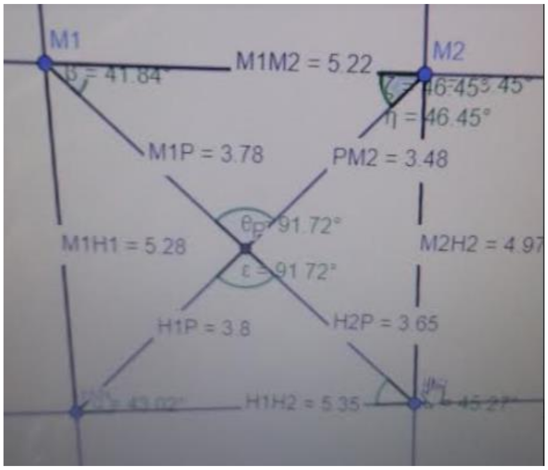
3. Después de trazar las trayectorias, responde ¿Encuentras algún ángulo? ¿Cuál o cuáles?

$\measuredangle$: $M_1M_2P \cong H_1H_2P$ $\longrightarrow$ cuatro ángulos agudos

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

Lorena descubre la congruencia de dos ángulos e intuye que debe haber otros dos ángulos similares y que por ende deben tener la misma medida. Aquí como tal se puede observar un problema, la forma “Si… entonces…” está escrita, pero la proposición antecedente en la Figura 3 está mal formulada aun cuando hay cierta intención por escribir la conjetura en símbolos propios de la matemática, es de señalar que, aunque el antecedente no muestra como tal un contenido veraz o claro el consecuente establece el producto de la observación y la exploración.

Imagen 1

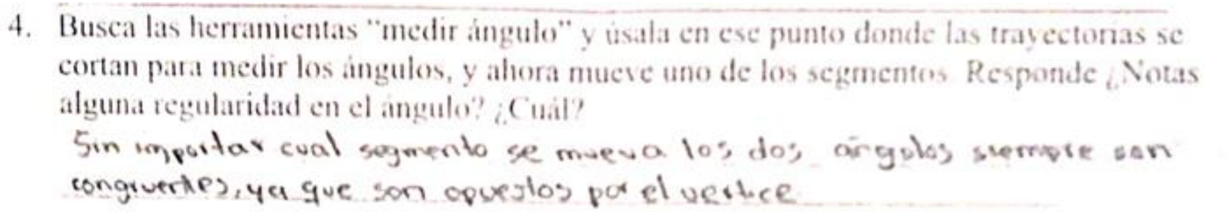


Construcción de Lorena a la Tarea 1 E1-3
Nota. Archivo personal del autor

La Imagen 1 muestra que la medida de los ángulos no es completamente exacta y que no son solo cuatro ángulos agudos sino ocho, aun así, Lorena prevé que si las rectas son paralelas la medida de los ángulos debe ser la misma.

Es de resaltar que la construcción de Lorena no obedece un paralelismo explícito entre las rectas, aun así, ella destaca que la medida de estos ángulos debe ser la misma y además se clasifican dentro de los ángulos agudos. Por lo tanto, la implicación presentada en la Figura 3 se justifica con la Imagen 1, pues los datos empíricos suministrados por el sistema de geometría dinámica muestran que la medida de los ángulos siempre será constante a menos que las rectas que componen la imagen no sean paralelas.

Figura 5
Respuesta de Lorena a la Tarea 1 E1-4

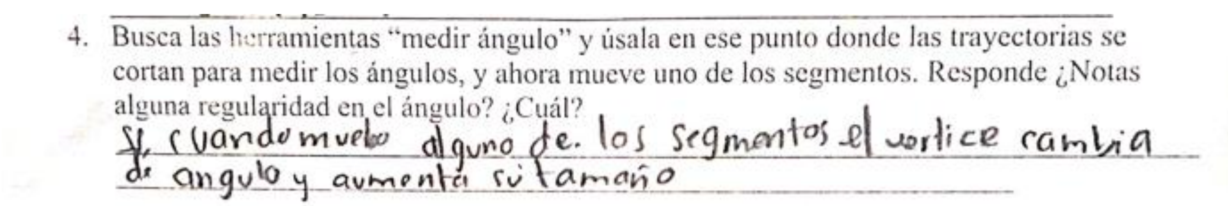

4. Busca las herramientas "medir ángulo" y úsala en ese punto donde las trayectorias se cortan para medir los ángulos, y ahora mueve uno de los segmentos. Responde ¿Notas alguna regularidad en el ángulo? ¿Cuál?
Sin importar cual segmento se mueva los dos angulos siempre son congruentes, ya que son opuestos por el vertice

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

En este inciso de la Tarea 1 los estudiantes debían usar las herramientas de *GeoGebra* para realizar mediciones de los ángulos que aparecían junto al punto medio, posteriormente con la herramienta arrastre notarían que el punto al moverse cambiaba la medida de los ángulos opuestos por el vértice, pero estas se mantienen constantes, Lorena justifica esto pues los ángulos que menciona son opuestos por el vértice (ver Imagen 1). Sin embargo, es incompleta la respuesta, pues no menciona cual es el segmento que decidió arrastrar, pero da cuenta que sin importar la figura resultante por realizar el arrastre el invariante se mantiene.

Figura 6

Respuesta de Ana a la Tarea 1 E1-4



4. Busca las herramientas "medir ángulo" y úsala en ese punto donde las trayectorias se cortan para medir los ángulos, y ahora mueve uno de los segmentos. Responde ¿Notas alguna regularidad en el ángulo? ¿Cuál?

Si cuando muevo alguno de los segmentos el vertice cambia de angulo y aumenta su tamaño

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

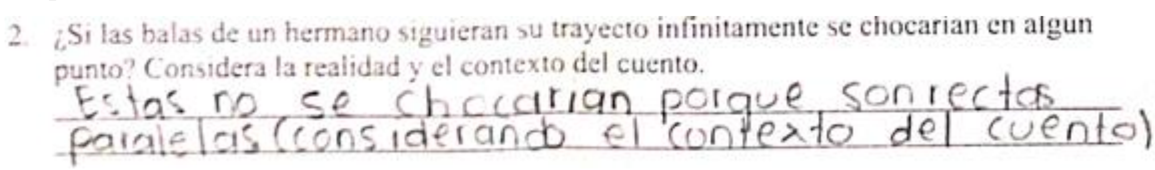
Ana también responde al inciso E1-4 realizando un acercamiento a la intencionalidad de este, algo que Lorena logra, y en el caso de Ana logra escribir su respuesta de la forma "Si… entonces". La palabra "entonces" está inmersa en la respuesta, de esta manera "*Si cuando muevo* (arrastro) *alguno de los segmentos"*, aquí al igual que Lorena se percibe la dificultad para tener explicitas respuestas, al parecer las estudiantes no sienten la necesidad de mencionar el segmento que arrastran, dan por sentado que no importa el segmento, el invariante se mantiene. "[*Entonces*] *el vértice cambia de ángulo y aumenta su tamaño",* tampoco se hace mención sobre el vértice con el que se trabaja, para ella es claro cual está cambiando su medida en relación con los arrastres realizados, ya que con la herramienta "medir ángulo" da cuenta de esto.

Para la segunda parte de la Tarea 1, se plantea a los estudiantes construir e identificar figuras geométricas una vez construido el cuadrilátero de la primera parte, y así pudiesen por medio de la visualización deducir que no importa el arrastre, el punto medio se mantendrá.

En un intento de hacer esto claro, se les presentó a los estudiantes el inciso E2-2 el cual tiene la particularidad de presentarles a los estudiantes la proposición antecedente, presumiendo que estos terminarían de formular una conjetura, la cual está pensada para que partan de los conceptos trabajados en la primera parte, a partir de la construcción hecha a del cuento dedujesen una consecuencia real de la situación y respondieran que pasaría si la situación del cuento se traslada a un escenario no ficticio pretendiendo que lo expliquen y detallen escribiéndolo. En este caso lo que se espera es que respondan las balas no se chocaran a causa del paralelismo entre estas y el efecto de la gravedad sobre estas conllevaría a que caigan al suelo.

Figura 7

Respuesta de Tatiana a la Tarea 1 E2-2

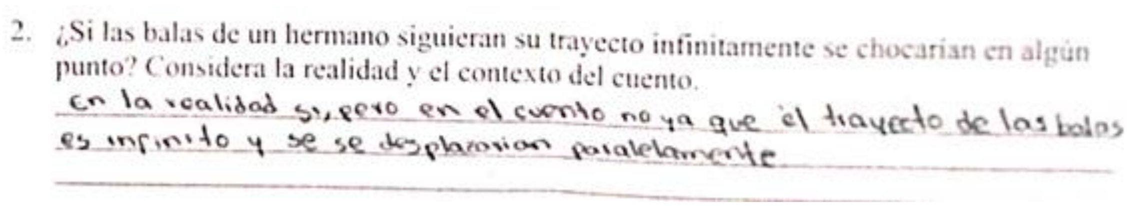

2. ¿Si las balas de un hermano siguieran su trayecto infinitamente se chocarian en algun punto? Considera la realidad y el contexto del cuento.

Estas no se chocarian porque son rectas paralelas (considerando el contexto del cuento)

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

Figura 8

Respuesta de Lorena a la Tarea 1 E2-2


2. ¿Si las balas de un hermano siguieran su trayecto infinitamente se chocarian en algún punto? Considera la realidad y el contexto del cuento.

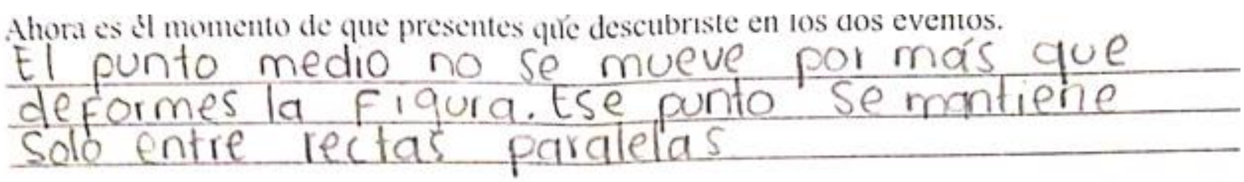
en la realidad si, pero en el cuento no ya que el trayecto de las balas es infinito y se se desplazarian paralelamente

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

En las Figuras 6 y 7 tanto Tatiana como Lorena responden siguiendo una lógica ficticia donde las balas seguirán un trayecto infinito, pero no se chocan. La idea fue partir la forma condicional "Si… entonces", de modo que el condicional si se transformara en causal como si fuese un problema cuya solución depende de determinar un consecuente, esto para evitar cierta rigidez que se pueda presentar al responder de manera formal. Aun así, en las Figuras 6 y 7 subyace el consecuente, pues lógicamente al estar las balas en posiciones paralelas no se tocan, pero ninguno de los estudiantes mencionó que las balas caen, esto quizás dado que durante el desarrollo de las Tareas aún usaban *GeoGebra* lo que les pudo impedir hacer un vínculo con la realidad. Por otro lado, devela la capacidad de los estudiantes para deducir una consecuencia de la situación, gracias a la exploración y experimentación sobre la representación del cuadrilátero por medio del sistema de geometría dinámica, lo cual quiere decir, como lo menciona Hanna (2000) se está promoviendo la conjeturación y justificación.

Figura 9

Respuesta de Tatiana a la Tarea 1 E2-2


Ahora es el momento de que presentes qué descubriste en los dos eventos.
El punto medio no se mueve por más que deformes la Figura. Ese punto se mantiene solo entre rectas paralelas

Nota. Tomado del original del 25 de septiembre de 2021

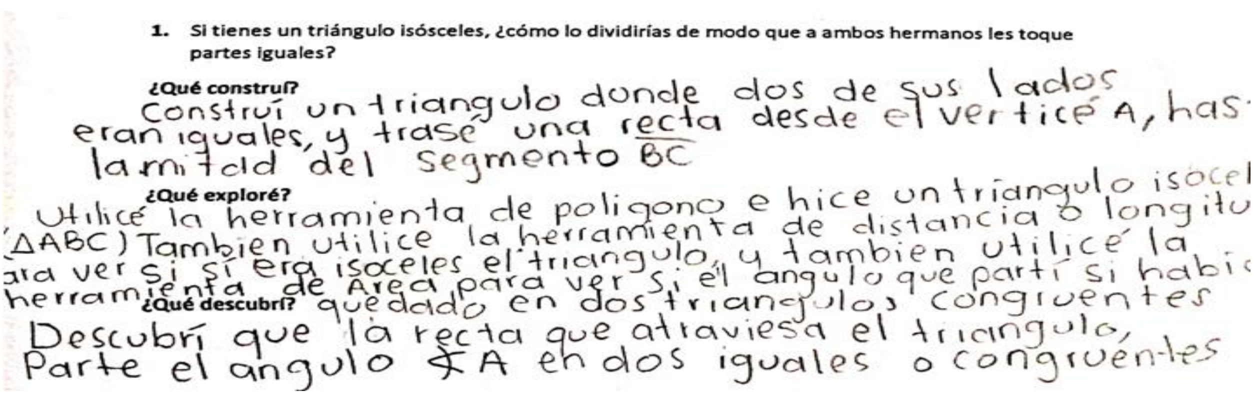
Para finalizar la Tarea 1 se les pidió a los estudiantes que consignasen los descubrimientos hechos en los dos partes, Tatiana menciona que el punto medio en un cuadrilátero cuyos lados son paralelos opuestos mantiene su posición sin importar que se deforme la figura. Ella no alude a segmentos explícitos al arrastrar una parte del cuadrilátero observa que el punto medio mantiene la característica de estar en el centro, una cualidad propia de todo paralelogramo. Da a entender esto, cuando define que solo es posible entre rectas paralelas, pues realizando transformaciones y observando otros cuadriláteros deduce este invariante. Como tal la conclusión de la Tarea 1 está incompleta, pues, aunque los estudiantes si realizaron medidas, estas no fueron usadas al señalar distancias precisas que mantengan su longitud, aun así, es un acercamiento a la argumentación.

Análisis de la Tarea 2

Las respuestas presentadas en la Tarea 2 parecen mostrar una mayor apropiación, los estudiantes se atrevieron a describir lo que exploraban, construían y descubrían, en la medida que *GeoGebra* y el contenido de la tarea lo permitían, esta vez un cuento más corto y menos preguntas.

Figura 10

Respuesta de Tatiana a la Tarea 2 E1-1



1. Si tienes un triángulo isósceles, ¿cómo lo dividirías de modo que a ambos hermanos les toque partes iguales?

¿Qué construí?
Construí un triangulo donde dos de sus lados eran iguales, y trasé una recta desde el vertice A, has[ta] la mitad del segmento $\overline{BC}$

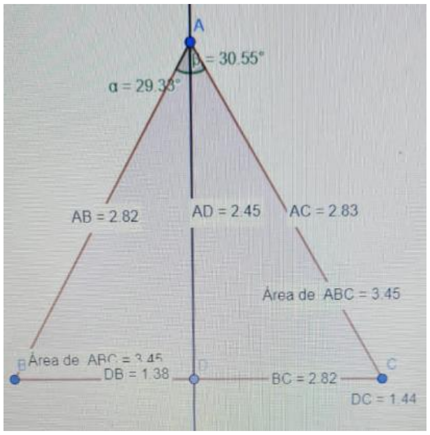
¿Qué exploré?
Utilicé la herramienta de poligono e hice un triángulo isocel[es] (ΔABC) Tambien utilice la herramienta de distancia o longitu[d] [p]ara ver si si era isoceles el triangulo, y tambien utilicé la herramienta de Area para ver si el angulo que partí si habi[a] quedado en dos triangulos congiuentes

¿Qué descubrí?
Descubrí que la recta que atraviesa el triangulo, Parte el angulo $\measuredangle A$ en dos iguales o congruentes

Nota. Tomado del original del 19 de octubre de 2021

Tatiana usa la herramienta de *GeoGebra* polígono para construir un triángulo isósceles, usando la herramienta medir distancia o longitud contrasta la medida de los segmentos transformando el triángulo y así hallar uno con dos lados iguales, esto lo logra arrastrando ya sea uno de los vértices o uno de los segmentos. Luego menciona la construcción de una recta que corta el segmento $\overline{BC}$ en la mitad de este, pero no menciona como lo encuentra. Es la misma estudiante quien encuentra la herramienta en la aplicación y construye el punto medio.

Imagen 2



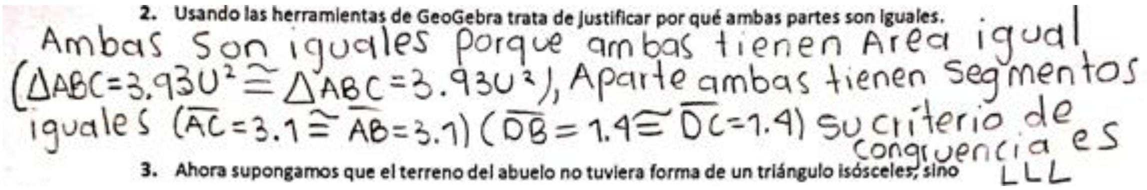
Construcción de Lorena a la Tarea 2 E1-1

Nota. Archivo personal del autor

Para este tarea los estudiantes debían representar un triángulo isósceles además partirlo para visualizar lo que pasa con los componentes de este y justificar dicha construcción, se pensó el inciso E1-1 pretendiendo entender la definición de este tipo particular de triángulo de la siguiente manera, si un triángulo tiene dos lados iguales entonces es isósceles, por lo que se formula una conjetura aparentemente valida de la siguiente forma, si el ángulo esta partido en dos partes iguales (ver Imagen 3) entonces los triángulos resultantes son congruentes. Una vez la estudiante representa el ΔABC procede a comprobar si los dos triángulos resultantes ΔADB y ΔADC tienen la misma área y poder concluir que ambas figuras geométricas son congruentes, Cabe anotar que aquí hay un claro problema conceptual, pues los estudiantes relacionan el tamaño de las áreas como un criterio para la congruencia de los triángulos.

Figura 11

Respuesta de Tatiana a la Tarea 2 E1-2



2. Usando las herramientas de GeoGebra trata de justificar por qué ambas partes son iguales.

Ambas son iguales porque ambas tienen Area igual ($\Delta ABC=3.93U^2 \cong \Delta ABC=3.93U^2$), Aparte ambas tienen Segmentos iguales ($\overline{AC}=3.1 \cong \overline{AB}=3.1$) ($\overline{DB} = 1.4 \cong \overline{DC}=1.4$) su criterio de congruencia es LLL

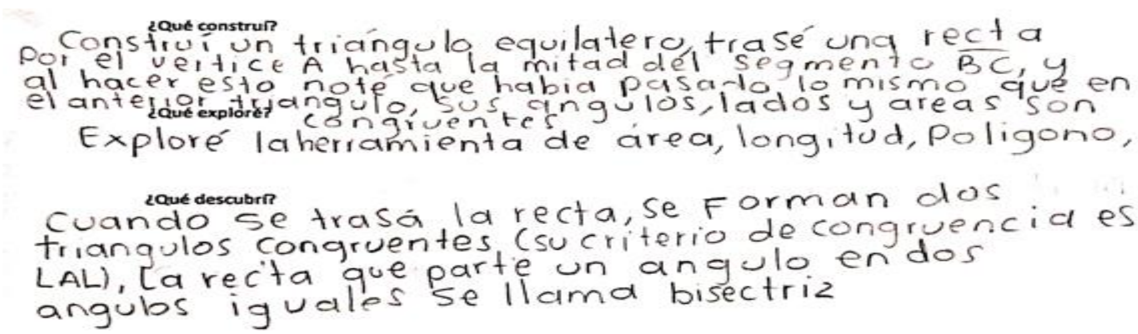
3. Ahora supongamos que el terreno del abuelo no tuviera forma de un triángulo isósceles, sino

Nota. Tomado del original del 19 de octubre de 2021

La Figura 10 es una justificación de porque se asume que los triángulos ΔADB y ΔADC son congruentes, además recalca la dificultad de los estudiantes para entender el uso de los criterios de congruencia.

Figura 12

Respuesta de Tatiana a la Tarea 2 E1-3



¿Qué construí?

Construí un triángulo equilatero, trasé una recta por el vertice A hasta la mitad del segmento BC, y al hacer esto noté que habia pasado lo mismo que en el anterior triangulo, sus angulos, lados y areas son congruentes

¿Qué exploré?

Exploré laherramienta de área, longitud, Poligono,

¿Qué descubrí?

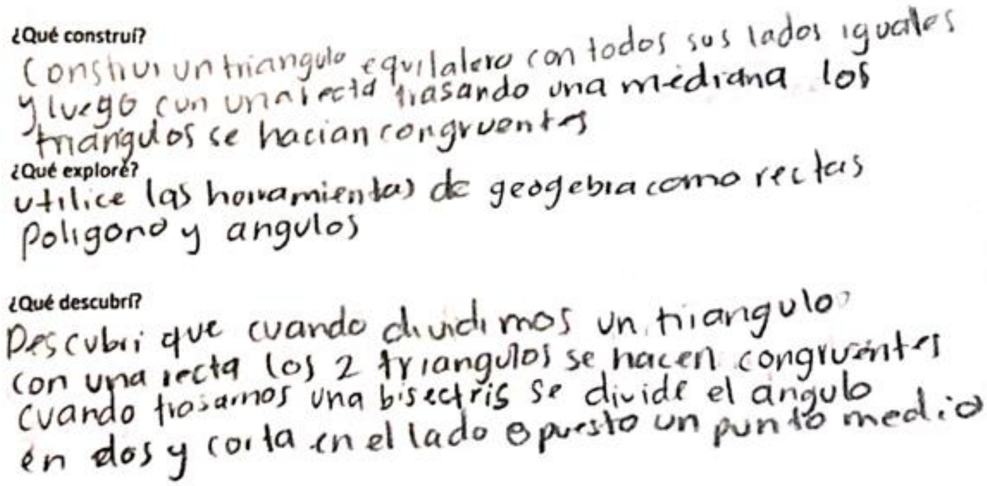
Cuando se trasá la recta, se forman dos triangulos congruentes (su criterio de congruencia es LAL), La recta que parte un angulo en dos angulos iguales se llama bisectriz

Nota. Tomado del original del 19 de octubre de 2021

En el inciso E1-3 Tatiana menciona que pasa lo mismo en el triángulo equilátero resultante de este inciso además descubre el uso de la bisectriz como una recta (en lugar de semirrecta) que divide a un ángulo en dos iguales, así mismo como se mencionó no parece haber suficiente claridad sobre el uso de los criterios de congruencia. Tampoco parece haber un acercamiento a la intencionalidad de la Tarea 2 por parte de Tatiana.

Figura 13

Respuesta de Ana a la Tarea 2 E1-3


¿Qué construí?
Construi un triangulo equilalero con todos sus lados iguales y luego con una recta trasando una mediana los triangulos se hacian congruentes
¿Qué exploré?
utilice las herramientas de geogebra como rectas poligono y angulos
¿Qué descubrí?
Descubri que cuando dividimos un triangulo con una recta los 2 triangulos se hacen congruentes cuando trasamos una bisectris se divide el angulo en dos y corta en el lado opuesto un punto medio

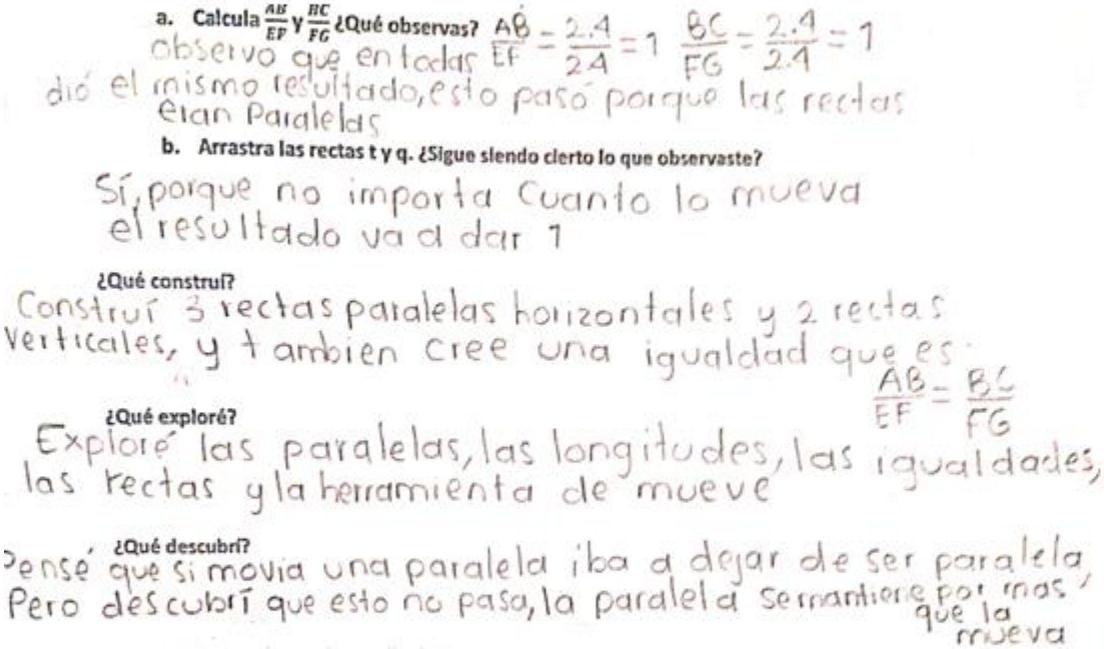
Nota. Tomado del original del 19 de octubre de 2021

Caso contrario con Ana quien implícitamente relaciona la mediana con la bisectriz, algo que no pasa con Tatiana, pero en Ana no es un descubrimiento la relación entre mediana y bisectriz pero no da cuenta de esto. Esto es positivo, porque se puede entrever el acercamiento de los estudiantes en especial Ana al objetivo de la Tarea 2, lograr establecer la relación entre bisectriz y mediana. Posibles razones para que esto no ocurriese, no darles la oportunidad de explorar la bisectriz en otras formas geométricas, también el poco dominio conceptual referente a los criterios de congruencia por parte de los estudiantes. Con esto el diseño de una instrucción más específica se hace necesaria para una comprensión más profunda de los conceptos de bisectriz y mediana.

Análisis de la Tarea 3

Figura 14

Respuesta de Tatiana a la Tarea 3 E1-1a y 1b


a. Calcula $\frac{AB}{EF}$ y $\frac{BC}{FG}$ ¿Qué observas? $\frac{AB}{EF} = \frac{2.4}{2.4} = 1$ $\frac{BC}{FG} = \frac{2.4}{2.4} = 1$
observo que en todas dió el mismo resultado, esto pasó porque las rectas eran Paralelas

b. Arrastra las rectas t y q. ¿Sigue siendo cierto lo que observaste?
Sí, porque no importa Cuanto lo mueva el resultado va a dar 1

¿Qué construí?
Construí 3 rectas paralelas horizontales y 2 rectas verticales, y tambien cree una igualdad que es $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

¿Qué exploré?
Exploré las paralelas, las longitudes, las igualdades, las rectas y la herramienta de mueve

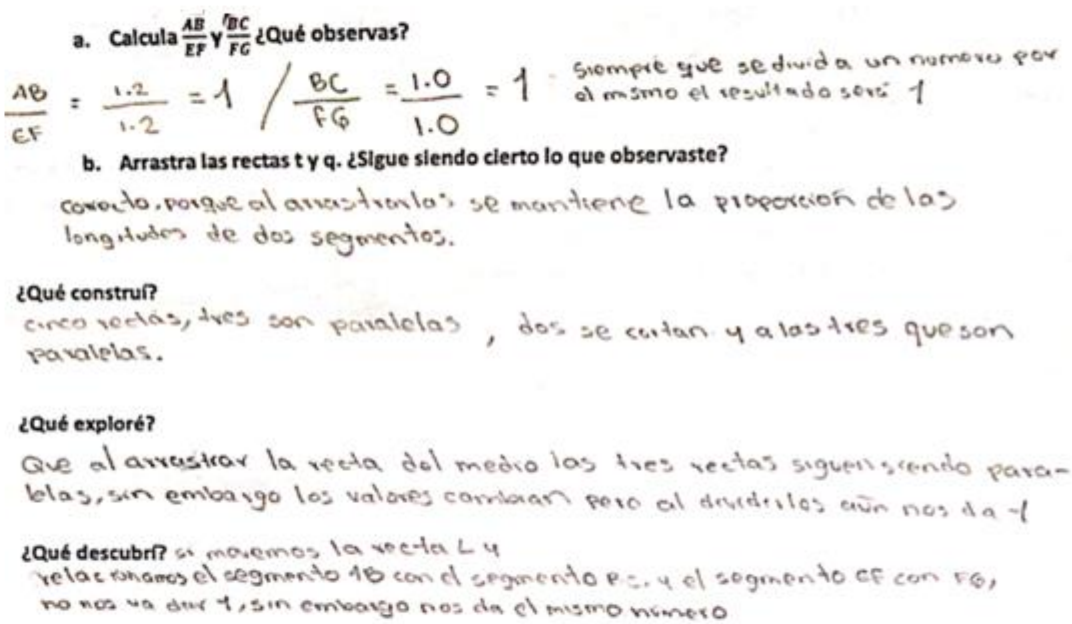
¿Qué descubrí?
Pensé que si movia una paralela iba a dejar de ser paralela, Pero descubrí que esto no pasa, la paralela se mantiene por mas que la mueva

Nota. Tomado del original del 5 de noviembre de 2021

Cómo se observa en el inciso E1- 1a de la Tarea 3 Tatiana responde a esta relatando una consecuencia a partir del paralelismo entre rectas, lo cual puede dar a entender que ella vincula desde *Geogebra* el paralelismo como una condición para la proporcionalidad, esto se podría comprobar con la misma respuesta E1- 1a, pues la estudiante menciona que realiza movimientos sobre la construcción geométrica (ver Anexo 3) donde denota que el valor de la razón se mantiene en 1. Es interesante también, la respuesta que da en el inciso E1-1b donde cuenta uno de los descubrimientos hechos, Tatiana trata de argumentar que al mover una de las paralelas perderían la condición de paralelismo, a lo que se le pidió que arrastrase una de estas, ella observó como esta no perdía dicha condición concluyendo como invariante el paralelismo entra rectas. Tatiana a partir de la construcción en *GeoGebra* conjetura que no es posible mover una recta que es paralela a otra sin perder el paralelismo entre estas, lo cual es una presunción que se refuta al arrastrar y luego observar la constante ya descrita.

Figura 15

Respuesta de Lorena a la Tarea 3 E1-1a y 1b



a. Calcula $\frac{AB}{EF}$ y $\frac{BC}{FG}$ ¿Qué observas?

$\frac{AB}{EF} = \frac{1.2}{1.2} = 1$ / $\frac{BC}{FG} = \frac{1.0}{1.0} = 1$ Siempre que se divida un numero por el mismo el resultado será 1

b. Arrastra las rectas t y q. ¿Sigue siendo cierto lo que observaste?

correcto, porque al arrastrarlos se mantiene la proporción de las longitudes de dos segmentos.

¿Qué construí?

cinco rectas, tres son paralelas, dos se cortan y a las tres que son paralelas.

¿Qué exploré?

Que al arrastrar la recta del medio las tres rectas siguen siendo paralelas, sin embargo los valores cambian pero al dividirlos aún nos da 1

¿Qué descubrí? si movemos la recta L y relacionamos el segmento AB con el segmento BC, y el segmento EF con FG, no nos va dar 1, sin embargo nos da el mismo número

Nota. Tomado del original del 29 de octubre del 2021

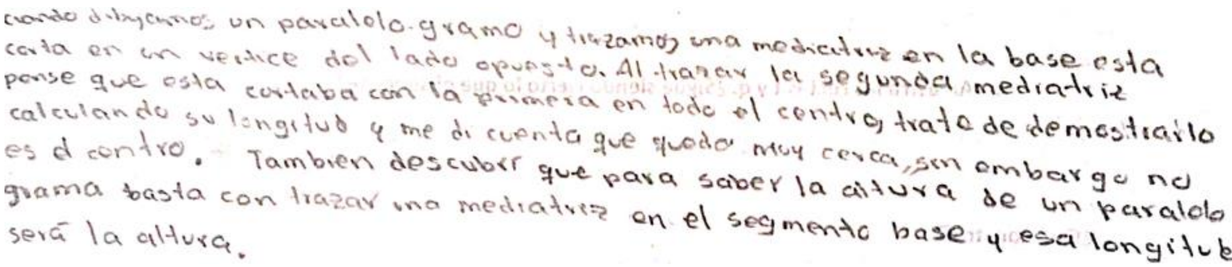
Lorena justifica la respuesta del inciso E1- 1 desde dos perspectivas, en la primera se remite a utilizar una propiedad de los números o sea la división de un número por sí mismo siempre da uno (ver Figura 14 inciso E1- 1a), usa propiedades que comúnmente se pueden caracterizar dentro de otros pensamientos matemáticos tal como el numérico y las trae a un contexto donde la geometría prima. Dicha relación puede clarificarse un poco más al observar la respuesta que da en el inciso E1- 1b en el apartado donde describe la exploración, cuenta la invariabilidad de la razón, pues al arrastrar una de las rectas observaba que las longitudes cambiaban, pero la razón se mantenía. Aunque esto no asegura a ciencia cierta que la estudiante pueda vincular a propósito diferentes pensamientos matemáticos, deja entrever un acercamiento particular a un aprendizaje de la geometría mediado por conceptos matemáticos aparentemente aislados.

Atrae la atención en el inciso E1-1b en el apartado de exploración, Lorena responde a este describiendo la acción que realizó para encontrar el invariante, arrastrando una de las paralelas y observando el cambio de los valores, es interesante porque en el caso de Tatiana (ver Figura 13) no parece haber una concepción de perpendicularidad que le permitiese realizar un arrastre que perpetuase el paralelismo. Esta comparación no evidencia una dificultad total de Tatiana para comprender dicho concepto, pero muestra la necesidad de generar diferentes ejemplos o situaciones en clase centrados en desarrollar diferentes aprendizajes relacionados a la perpendicularidad. Con esto mencionado el papel de la conjeturación y justificación parecen fomentar aprendizajes sobre la geometría a través del diseño de actividades o remitiéndose a la bibliografía.

Posteriormente Lorena logra tener una libertad al explorar y sacar afirmaciones a partir de lo que construyó y fue descubriendo, un ejemplo de esta en el inciso E1-1b donde plantea un descubrimiento, ella plantea otra relación no descrita en las preguntas de la Tarea 3, relaciona los segmentos $\overline{AB}$ con $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ con $\overline{FG}$ logrando establecer una proporcionalidad directa entre las razones. Es interesante pues los estudiantes tenían vagos conocimientos sobre el objeto matemático que se trabajó en este primer parte de la Tarea 3 y aunque Lorena no concluye con sus palabras la presencia de otra proporcionalidad, conjetura una relación que posteriormente comprueba.

Figura 16

Respuesta de Lorena a la Tarea 3 E2- 1

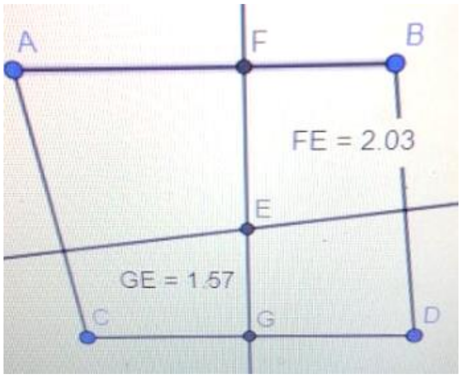


cuando dibujamos un paralelogramo y trazamos una mediatriz en la base esta
corta en un vertice del lado opuesto. Al trazar la segunda mediatriz
pense que esta cortaba con la primera en todo el centro, trate de demostrarlo
calculando su longitud y me di cuenta que quedo muy cerca, sin embargo no
es el centro. Tambien descubri que para saber la altura de un paralelo-
grama basta con trazar una mediatriz en el segmento base y esa longitud
será la altura.

Nota. Tomado del original del 29 de octubre de 2021

En la segunda parte de la Tarea 3 (ver Anexo 3) Lorena intento realizar lo que podría ser catalogado un acercamiento a una demostración (ver Figura 15), aunque propiamente no es una como tal, es un intento por definir una generalización entre los cuadriláteros paralelogramos, es decir, cuando traza dos mediatrices observa o afirma que se cortan en un punto llamado centro, trata de justificarse realizando medidas (ver Imagen 3) pero se da cuenta que no son exactas a lo que concluye que no es posible que ese sea el centro del cuadrilátero. Posteriormente descubre que para encontrarle la altura a un paralelogramo basta con trazarle una mediatriz. Esto no es algo que se cumpla siempre, de hecho, hay paralelogramos a los cuales al arrastrarles uno de los segmentos que lo conforman hacen que las mediatrices trazadas se muevan en relación al segmento seleccionado provocando que dicha mediatriz que parte desde la base no sea siempre la altura. Como tal es una generalización que no parece ser cierta, pero que vale la pena analizar, pues la observación hecha por Isabel puede cumplirse en los cuadriláteros que suelen ser más estudiados en clase de matemáticas, pero no logra convencer pues faltan condiciones para determinar tal validez, lo que pudo estar directamente relacionado con una mala instrucción y en la exploración hecha por Lorena al arrastrar los objetos geométricos compuestos, a saber, punto, segmentos, mediatrices.

Imagen 3

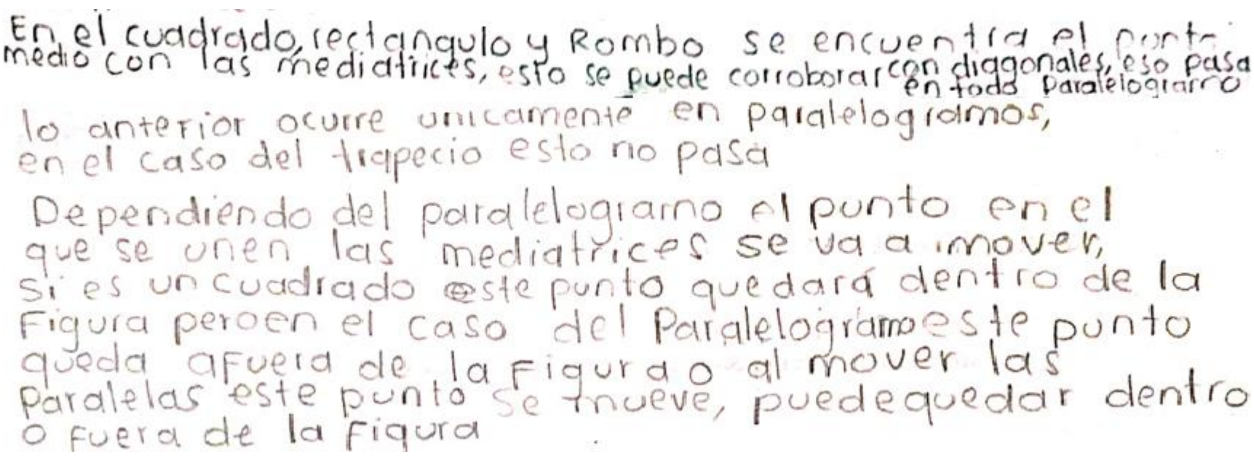


Construcción de Lorena a la Tarea 3 E2-1

Nota. Archivo personal del autor

Figura 17

Respuesta de Tatiana a la Tarea 3 E2-1

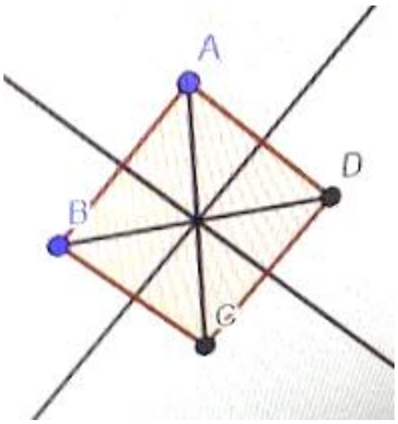


En el cuadrado, rectangulo y Rombo se encuentra el punto
medio con las mediatrices, esto se puede corroborar con diagonales, eso pasa en todo Paralelogramo
lo anterior ocurre unicamente en paralelogramos,
en el caso del trapecio esto no pasa
Dependiendo del paralelogramo el punto en el
que se unen las mediatrices se va a mover,
si es un cuadrado este punto quedará dentro de la
Figura pero en el caso del Paralelogramo este punto
queda afuera de la figura o al mover las
paralelas este punto se mueve, puede quedar dentro
o fuera de la figura

Nota. Tomado del original el 5 de noviembre de 2021

Tatiana por otro lado va un poco más allá, pues explora y justifica la invariabilidad del punto centro al trazar dos mediatrices y observa como este se presenta tanto en el cuadrado, el rectángulo y el rombo, a esto le suma que al encontrar el supuesto punto centro menciona como las diagonales también cortan en dicho punto (ver Imagen 5). Posteriormente Tatiana a diferencia de Isabel realiza una exploración más profunda, deforma y transforma el cuadrilátero determinando que el punto de corte no siempre estará dentro de la figura geométrica, lo que da a entender que ella entiende que si al manipular la representación del cuadrilátero obtendrá un resultado diferente por más que deforme la figura, lo que se asume en que ella manipula el antecedente previendo la consecuencia final, no siempre el punto de corte de las mediatrices estará en el centro.

Imagen 5



Construcción de Tatiana a la Tarea 3 E2-1

Nota. Archivo personal del autor

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

Al pensar sobre qué factores pueden determinar el favorecimiento de la construcción de conjeturas y justificaciones, uno de estos primeros es hacer partícipes a los estudiantes en la formación de su conocimiento, es necesaria una actitud positiva donde el estudiante se plantee el deber de estar en la tarea y por tanto pueda responder a las preguntas planeadas para la clase de matemáticas sin importar si hay dificultades o no, pues lo relevante aquí es que el estudiante pueda sentir cercana la matemática, además que se pueda familiarizar con un ambiente donde pueda manipular conceptos matemáticos por ello *GeoGebra* es relevante en este trabajo.

En línea con las ideas anteriores, Molina et al. (2014) comenta que los sistemas de geometría dinámica promueven la exploración en las matemáticas y alientan a los estudiantes a conjeturar y a justificar en la clase. Otro factor que predomina en la generación de conjeturas y justificaciones, son tareas donde se favorezca la exploración y se puedan encontrar una o varias invariantes, las cuales suelen tener la característica de que se pueden poner a prueba, estas tareas debe tener la cualidad de generar enunciados de la forma "Si…entonces…", aunque esto es algo que no siempre pasa, por ende es necesario una mayor profundidad en el diseño de tareas lo suficientemente claras para que el estudiante pueda establecer respuestas producto de la exploración y descubrimientos validados, ya sea por el mismo sistema de geometría dinámica o por acuerdos establecidos dado un proceso previo.

De otro lado, por motivo de la contingencia originada por el Covid-19 no logró establecerse acuerdos de naturaleza matemática a los cuales los estudiantes puedan remitirse para argumentar y justificar con un lenguaje matemático. Por lo que cabe preguntarse ¿Qué resultados se habrían obtenido de haber realizado con los estudiantes un trabajo previo donde los mismos pudieran comunicarse de forma oral o escrita?

También es necesario preguntarse sobre la participación de los estudiantes, pues si dicha acción hubiese sido constante, el plantear el diseño de las tareas no hubiese sido presencial, por lo que habría que plantear un tipo de herramienta diferente para analizar la información, por ejemplo, en el caso que los datos provengan de una grabación, el análisis podría haberse hecho desde una visión narrativa, en la cual se trate de interpretar el aprendizaje de los estudiantes desde su propia visión.

Este ejercicio investigativo permite vislumbrar la riqueza de tener una visión que problematice y busque una solución, es entendible que las cualidades de la educación son muchas y entender esto abre la posibilidad de problematizar cuestiones sobre la enseñanza, el aprendizaje, cuestiones legales, institucionales, etc. Así los cuatro semestre de prácticas o de investigación también permiten acercarse a la realidad no solo escolar, pues al ser desarrollado este trabajo investigativo durante el tiempo de pandemia se pudo ver de primera mano cómo el sistema económico y político se venían truncados por la falta de desarrollo en tales campos en consecuencia la educación y otros sectores de la sociedad fueron afectados, develando las muchas deficiencias que tiene el sistema educativo actual, como el acceso al internet por algunas personas.

Al comparar las conjeturas y justificaciones de los estudiantes y como estos realizan argumentaciones, se puede ver la riqueza de las respuestas, en cuanto a que posibilitan reflexionar sobre como los estudiantes están aprendiendo y que posibles acciones del profesor permitirían mejorar el proceso de aprendizaje pues, aunque este trabajo trata aspectos más orientados al aprendizaje no deja de lado el papel de la enseñanza, así al querer mejorar la propia practica profesoral se esperaría un mayor domino de los conceptos matemáticos llevados a la educación, esto entendiendo las particularidades de los sujetos y del medio.

De manera particular, en el momento de reflexionar sobre los comentarios de los estudiantes se pueden llegar a generar conjeturas propias del profesor/investigador, planteamientos surgidos de las respuestas de los estudiantes que permitieran vislumbrar un camino hacia una mejor apropiación de los aprendizajes. Al mencionar las conjeturas, ya no desde la visión de Perry et al. (2013), sino, más como juicios u opiniones sobre el proceso matemático que ha llevado el estudiante, o sea en la medida que el profesor/investigador interactúa con los estudiantes en clase de matemáticas, tratando de fomentar la conjeturación y la justificación, también puede plantearse mejores estrategias a partir de los datos que los estudiantes puedan arrojarle a modo de conjeturas, como identificar la dificultad para comprender determinados conceptos matemáticos, identificar la dificultad para desarrollar ciertas operaciones o como un ejercicio autorreflexivo donde se determinan aquellas acciones que pueden promover los aprendizajes o los que no, con lo cual se esperaría mejorar la misma enseñanza.

A modo de ejemplo, al presentarse una duda en clase o un inconveniente para avanzar al objetivo de una clase, el profesor se puede plantear a modo de conjetura, si determinado estudiante presenta una duda, entonces la posible acción del profesor es hacer énfasis en determinado objeto matemático, o realizar una exposición más clara lo que se quiere con alguna tarea ya propuesta o relacionar ejemplos más claros con el objeto en cuestión. Esto es sólo un ejemplo que pretende ilustrar una posible línea de investigación donde son las acciones que el profesor realiza en clase por medio de su discurso las cuales incentivan la argumentación y la producción de conjeturas y justificaciones. También estudiar como desde la estructura de la argumentación es posible identificar posibles justificaciones producto de la conjeturación, donde se pueda comprender el procedimiento discursivo que llevo a cabo al dar una justificación.

Fue difícil hacer que la escritura y la participación en clase de matemáticas fueran prácticas habituales, lo cual puede ser ocasionado por la poca costumbre de los estudiantes en estas prácticas, esto permitiría dejar una línea futura de investigación o también puede ser un limitante de esta investigación, dado que si ello hubiese sucedido lo resultados fuesen otros.

Otra posible línea de investigación seria ¿Cómo favorecer la argumentación en clase de geometría a partir del discurso oral? Donde la interacción con objetos reales y la necesidad de divulgar las ideas permitan la construcción de nuevos saberes en los estudiantes.

Dicho de esa manera es necesario tener en cuenta que la exploración de conceptos matemáticos es clave, por lo que también habría que plantearse, ¿entendiendo el carácter espacial y tangible de la geometría que material o materiales podría generar la aparición de conjeturas? ¿sería posible trabajar o implementar esta pregunta de investigación con estudiantes de grados inferiores al grado octavo? el entorno debe privilegiar la identificación de regularidades, particularidades o semejanzas.

Ahora bien, es necesario mencionar que un posible punto débil de este trabajo es que no se utilizó un marco teórico que apoyase el diseño de tareas o la elección de estas desde la bibliografía. Es necesario tener en cuenta que las tareas abiertas son fuerte precursor para la generación de conjeturas y justificaciones, y que pretender que estos últimos dos procesos se den en clase de matemática deviene en la capacidad del profesor para establecer juicios o conjeturas, con los cuales aproximar a los estudiantes a los objetivos de la clase.

La metodología escogida brindo la libertad de tomar decisiones desde una visión subjetiva, donde lo que se pretendió fue situar al aprendizaje de la geometría en relación con la argumentación, pues los experimentos de enseñanza permiten tener en cuenta desde la preparación del experimento que el investigador también carga con el rol de profesor, pues se logran asumir opiniones y posturas producto de concepciones epistemológicas propias, sumado a esto los diferentes aprendizajes que se lograron cada vez que se implementaba una nueva tarea, permite reflexionar sobre la tarea de enseñar enriqueciendo dicha labor desde la interpretación y análisis de los datos.

Referencias

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Editorial La Muralla.

Campo, J., Van Vaerenbergh, S. Y del Barrio, Á. (2021). Secuencias didácticas basadas en Geogebra para la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. *Revista INFAD De Psicología International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *2*(1), 531–542. https://doi.org/10.17060/ijodaep.2021.n1.v2.2147

Camargo, Leonor (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Doctorado tesis, Universidad de Valencia.

Fernández, D. y Montoya, E. (2013). Geometría dinámica: de la visualización a la prueba. En R, Flores (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 755-763). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Freyre, M. y Mántica, A. (2015). Validación de conjeturas de propiedades del rectángulo a partir de construcciones con *GeoGebra*. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 28, 29 y 30 de octubre de 2015, Ensenada, Argentina.* EN: Actas. Ensenada: Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Ciencias Exactas y Naturales. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.8084/ev.8084.pdf

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7 - 10.

Kosko, K. y Zimmerman, B. (2019). Emergence of argument in children's mathematical writing. *Journal of Early Childhood Literacy*, *19*(1), 82–106. https://doi.org/10.1177/1468798417712065

Larios, V. (2006a). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9(*3), 361-382. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000300003&lng=es&tlng=es.

Larios, V. (2006b). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar.* Recuperado de https://1library.co/document/yjmkpj6y-demostrar-es-un-problema-o-el-problema-es-demostrar.html

Lozano, D. (2015). Argumentación abductiva y prueba en problemas de geometría analítica utilizando *Geogebra*. En E. Sánchez, C. Acuña, M. Rigo, J. Valdez. y O. Torres, Omar (Eds.), *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (pp. 1-10). Cinvestav. http://funes.uniandes.edu.co/15082/

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas.* Cooperativa Editorial.

Ministerio de Educación Nacional, MEN, (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*. MEN.

Molina, O., Luque, C. y Robayo, A. (2014). Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *35*, 39-61. 10.17227/01213814.35ted38.62

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C., y Molina, O. (Eds.), *Geometría plana un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Toro, J. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo.* (Trabajo de Maestría). Maestría en Educación Matemática. Universidad de Medellín.

Toro, J. y Castro, W. (2020). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas en clase. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(1), 35-44. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.11

Samper, C. (2008). *Geometría.* Grupo Editorial Norma.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L, y Molina, Ó. (2012). Un ejemplo de articulación de la lógica y la geometría dinámica en un curso de geometría plana. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* (32), 125-139. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200009&lng=en&tlng=es.

Sánchez, C. y Samper, C. (2020). Dos Teorías de Aprendizaje que se Complementan para Analizar el Proceso de Resolución de Problemas en Ambientes de Geometría

Dinámica. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*(60), 104-118. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/152

Súa, C. y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educación matemática*, *31*(1), 7-37. https://doi.org/10.24844/em3101.01

Súa, C. (2021). Un ambiente de geometría dinámica 3d para el aprendizaje de la demostración por estudiantes con altas capacidades matemáticas. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 195-202). Universidad de La Rioja.

Weston, A (2006). *Las claves de la argumentación*. Barcelona, España. Editorial Ariel.

ANEXOS

Anexo 1: Tarea 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
COMPARTIR

Grado: 8
Área: Matemáticas
Docente: Julián Alberto Villa Monsalve
Tiempo de desarrollo: 1 hora

Agenda de clase

1. **Saludo**
2. **Juego "primera letra"**
3. **Presentación de GeoGebra**
4. **Desarrollo de la guía**

Saberes previos: área del rectángulo, operaciones con racionales

Objetivos de aprendizaje:

-Comprender la representación de elementos algebraicos

GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología.

Guía

Los hermanos Melquiades nacieron un 18 de junio de 1803, gemelos idénticos, a medida que crecían sus semejanzas se hacían cada vez más y más similares, tanto corporal como físicamente ambos eran iguales, lo que uno podía hacer el otro también, incluso sus gustos, ropa, bebidas, comidas y accesorios como armas, los dos gustaban por tener armas dobles, todo en los hermanos Melquiades era similar. Un día común y corriente uno de los hermanos vio pasar por el parque a Rosalina, la mujer más hermosa en la comunidad, iba muy bien vestida su tes consonaba con la luz del día lo que la hacía más bella. Fue amor a primera vista, en ese mismo momento el otro hermano también vio a Rosalina y sin quererlo también quedo enamorado de la señorita, fue amor a primera vista. Ese mismo día ambos se enteraron de las intenciones del otro, ninguno quería ceder ante el amor de sus vidas, por lo que se citaron al otro día a un duelo de armas de fuego. Cuando sonasen las campanas de la iglesia a las 7:00 am se dará inicio al duelo.

En la calle principal, caminaron dando unos cuantos pasos hasta que cada uno quedo en una acera frente al otro y cuando dieron las 7:00 am desenfundaron sus armas y dispararon la primera vez, el pensamiento que rondo por la cabeza de ambos en ese momento antes de disparar fue – no matare a mi hermano- fue el pensamiento de los dos por lo que inconscientemente se las arreglaron para dispararle a las armas del otro.

Primer evento: Disparan apuntando a la izquierda y a la derecha el uno del otro, ambos son diestros por lo que apuntaron primero a la mano derecha y luego a la izquierda, con tan buena suerte que las balas chocaron en un punto

1. Con ayuda de GeoGebra, muestra las trayectorias de las balas y el punto donde se chocan
2. ¿Porque crees que se chocan? ____

____

____

____

3. Muestra cual sería la amplitud entre las armas del primer y segundo hermano en GeoGebra

4. Después de trazar las trayectorias, responde ¿Encuentras algún ángulo? ¿Cuál o cuáles?

   ____
   ____
   ____
   ____

5. Busca las herramientas "medir ángulo" y úsala en ese punto donde las trayectorias se cortan para medir los ángulos, y ahora mueve uno de los segmentos. Responde ¿Notas alguna regularidad en el ángulo? ¿Cuál?

____
____

Segundo evento: Como si fuera poco, ceden ante la presión de la multitud presente en el duelo, y ambos vuelve a disparar, pero esta vez, la coincidencia entre los disparos fue tal, que dispararon como si fuesen el reflejo de un espejo.

1. Con ayuda de GeoGebra muestra el trayecto de las balas.
2. ¿si las balas de un hermano siguieran su trayecto infinitamente se chocarían en algún punto? Considera la realidad y el contexto del cuento

   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Qué figuras geométricas has encontrado?

____
____
____

Mueve los segmentos que representan la amplitud de los brazos, ¿Qué figuras geométricas encuentras? ¿El punto que encontraste en el primer evento mantiene su posición entre los segmentos? ¿Será así en todas las otras figuras? ¿A qué se deberá esto?

____

____

____

____

Anexo 2: Tarea 2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
COMPARTIR

Grado: 8
Área: Matemáticas
Docente: Julián Alberto Villa Monsalve
Tiempo de desarrollo: 1 hora

Agenda de clase

1. **Saludo**
2. **Simbolismo geométrico**
3. **Desarrollo de la guía**

Saberes previos: conocimientos de herramientas de GeoGebra, así como la construcción de segmentos, puntos, rectas y rayos.

Guía

Un día los hermanos Melquiades heredaron la antigua propiedad de su tatarabuelo una hacienda en el municipio de Titiribí, para ese entonces ambos hermanos estaban disgustados el uno con el otro, así que decidieron dividir el terreno de la propiedad a la mitad. Dicho terreno tenía la forma de un triángulo isósceles, pero ambos hermanos no tenían los profundos conocimientos geométricos que tu si tienes, así que usa GeoGebra para representar y responder a las siguientes preguntas

1. Si tienes un triángulo isósceles, ¿cómo lo dividirías de modo que a ambos hermanos les toque partes iguales?

¿Qué construí?

¿Qué exploré?

¿Qué descubrí?

2. Usando las herramientas de GeoGebra trata de justificar por qué ambas partes son iguales.

3. Ahora supongamos que el terreno del abuelo no tuviera forma de un triángulo isósceles, sino de un triángulo equilátero, ¿qué sucedería en este caso?

¿Qué construí?

¿Qué exploré?

¿Qué descubrí?

Anexo 3: Tarea 3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COMPARTIR

Grado: 8
Área: Matemáticas
Docente: Julián Alberto Villa Monsalve
Tiempo de desarrollo: 1 hora

Agenda de clase

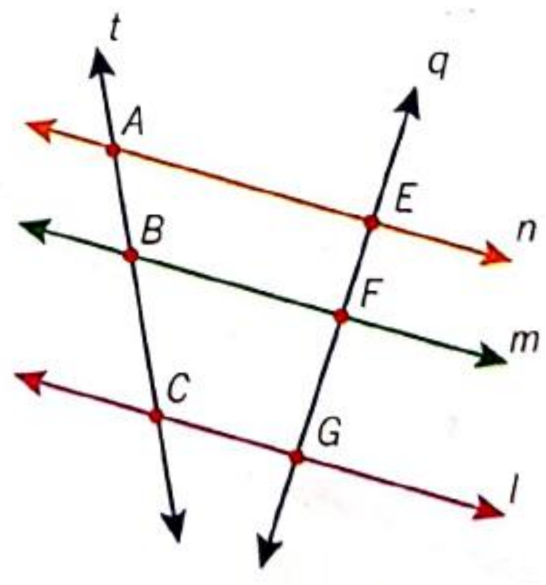
4. **Saludo**
5. **Desarrollo de la guía**

Saberes previos: fracciones, mediatriz, tipos de cuadriláteros, conocimientos de herramientas de GeoGebra, así como la construcción de segmentos, puntos, rectas y rayos.

Guía

Para los siguientes las siguientes tareas quiero que uses el software GeoGebra, sigue las instrucciones que hay allí descritas y si tienes alguna duda pregunta al profesor

4. Utilizando GeoGebra, construye tres rectas paralelas n, m, y i. Luego traza las rectas t y q de manera que corten a las primeras en los puntos A, B y C, E, F y G, como se muestra en la siguiente figura:



a. **Calcula $\frac{AB}{EF}$ y $\frac{BC}{FG}$ ¿Qué observas?**

b. **Arrastra las rectas t y q. ¿Sigue siendo cierto lo que observaste?**

¿Qué construí?

¿Qué exploré?

¿Qué descubrí?

5. Con GeoGebra traza los diferentes cuadriláteros que conoces, trata de dibujar al menos 5 y trázales a cada uno dos mediatrices

¿Qué construí?

¿Qué exploré?

¿Qué descubrí?

Anexo 4: consentimiento

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Ser Maestro
Nuestra esencia

Medellín, 17 de septiembre de 2021

Señor acudiente
Institución Educativa Compartir
Medellín

Asunto: consentimiento informado

Cordial saludo,

Por medio de la presente se le informa que su hijo participará en una investigación en el marco del trabajo final de Práctica Pedagógica de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Dicho trabajo cuenta con el visto bueno de las directivas de la Institución Educativa Compartir.

A través de este comunicado, le solicitamos en su calidad de acudiente del estudiante ______________________________ su autorización para que el menor haga parte de esta investigación. Dicha autorización se hace extensiva para producir algunos registros del estudiante en forma escrita o de vídeo que se generará en la clase. De igual forma, se hace extensiva para hacer públicos los resultados de esta investigación, después de la respectiva sistematización y análisis de registros.

Vale aclarar que el análisis y la divulgación tiene un motivo netamente académico y que los nombres de los participantes serán cambiados para proteger la identidad de los mismos.

Cordialmente,

____

Jorge Andrés Toro Uribe
Profesor e investigador
Universidad de Antioquia

______________________________ ______________________________

Acudiente del estudiante | Estudiante
Cédula:

• Universidad de Antioquia / Calle 67 #53 - 108, Bloque 9, oficina 119 / Informes: 219 5725
• Recepción de correspondencia: calle 70 No. 52 - 21 / http://educacion.udea.edu.co / Medellín – Colombia