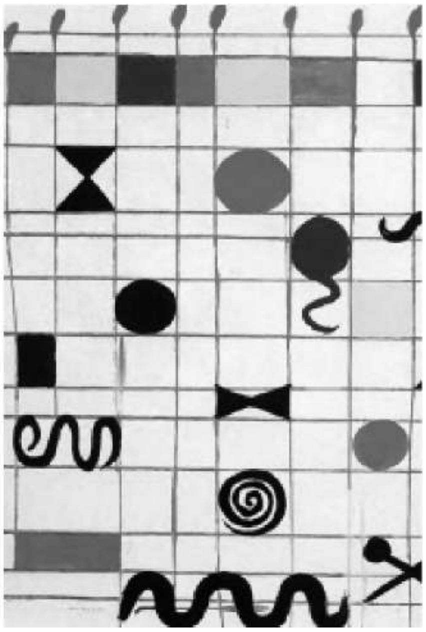
Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele

Carlos Mario Jaramillo López
Pedro Vicente Esteban Duarte



Alexander Calder, *Rejilla con símbolos,* **fragmento, aguada y tinta sobre papel, 1966.**

Resumen

Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele

El propósito de este artículo es mostrar la importancia de la red de relaciones que un alumno puede llegar a construir cuando se enfrenta a un concepto matemático y su estrecha relación con la idea de estructura en el modelo educativo de Van Hiele. Además, que la comprensión de la forma como funcionan las estructuras en el proceso de pensamiento permite el diseño de material didáctico que favorece en el alumno el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Résumé

Enseignement et apprentissage des structures mathématiques à partir du modèle de Van Hiele

Le but de cet article est de montrer l'importance du réseau de relations qu'un élève peut arriver à construire quand il fait face à un concept mathématique et sa relation étroite avec l'idée de structure dans le modèle éducatif de van Hiele. En outre, on tente de faire entendre que la compréhension de la manière dont fonctionnent les structures dans le processus de pensée permet la conception du matériau didactique qui favorise le processus d'apprentissage des mathématiques chez l'élève.

Abstract

Teaching and Learning of mathematical structures from the Van Hiele model

The purpose of this article is to show the importance of the net of relations that a student could get to build when facing a mathematical concept and its close relationship with the idea of structure in the Van Hiele educational model. Besides, the understanding of the ways in which the structures function in the process of thought allows the design of didactic material that favors the student in the process of math learning.

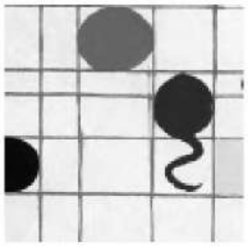
Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, estructura, niveles de razonamiento, fases de aprendizaje, modelo de Van Hiele.

Teaching of math, structure, reasoning levels, learning stages, Van Hiele model.

Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele

Carlos Mario Jaramillo López*
Pedro Vicente Esteban Duarte**



Introducción

El modelo educativo de Van Hiele se compone de tres elementos principales: 1) percepción —*insight*—, que se entiende como comprensión de las estructuras; 2) los niveles de Van Hiele, que son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, y 3) las fases de aprendizaje, que sirven de guía para diseñar la instrucción a la que se deben exponer los alumnos para ayudarlos a progresar del nivel en

que se encuentren al siguiente.
En investigaciones recientes que tienen como marco teórico el modelo de Van Hiele, se integra una componente visual geométrica al concepto matemático estudiado, para explorar el nivel de razonamiento en que se encuentra un alumno. Por ejemplo, Jaramillo explora el nivel de razonamiento en alumnos de último grado de bachillerato y primer año de universidad, con respecto al concepto *convergencia de una serie de términos positivos,* empleando la componente geométrica de zigzags, cuyas líneas poligonales están formadas por segmentos de rectas (Jaramillo, 2000).

En este artículo, siguiendo el modelo de Van Hiele, se analizan las características de las *estructuras matemáticas* y la necesidad de implementar actividades concretas que pongan de manifiesto la red de relaciones que el alumno posee en su mente, con el propósito de diseñar módulos de instrucción pertinentes y adecuados en concordancia con las fases de aprendizaje del modelo. Se espera que los alumnos expuestos a los módulos progresen en su nivel de razonamiento.

La estructura matemática en el modelo de Van Hiele

En el marco teórico del modelo de Van Hiele no se define específicamente lo que es una estructura; sin embargo, muestra variados ejemplos de la geometría de lo que puede en-

* Doctor en Ciencias Matemáticas, profesor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia.
E-mail: cama@matematicas.udea.edu.co

** Doctor en Ciencias Matemáticas, profesor del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Eafit.
E-mail: pesteban@eafit.edu.co

tenderse como tal. La idea la toma de los trabajos de la psicología Gestalt, y afirma que se tiene *insight* cuando se percibe una estructura. Es decir, cuando el alumno logra entender cómo funciona y cuáles son las reglas de formación. Para Van Hiele, "el *insight* existe cuando una persona actúa en una nueva situación adecuadamente y con intención" (1986: 24); es por esto que afirma que estructura e *insight* están estrechamente relacionadas.

El concepto *estructura,* en matemática, lo explican Resnick y Ford, así:

> ¿En qué consisten exactamente las estructuras matemáticas? La mayoría de los profanos nunca han concebido las matemáticas como nada más que una colección de procedimientos que sirven para resolver cálculos. Pero cualquier matemático sabe que las matemáticas forman un sistema unificado de conceptos y de operaciones que explican algunos patrones y relaciones que existen en el universo. Además de conceptos y operaciones, hay declaraciones más o menos abstractas de patrones y relaciones, expresadas en forma de axiomas o de reglas en fórmulas matemáticas, que dan significado a dichos patrones en relación con los otros. Y, además, existe un cuerpo de procedimientos que permiten manipular conceptos y patrones de forma ordenada y precisa. Es corriente que estos patrones y procedimientos se descubran de forma "accidental" o que se intuyan antes de presentarlos con demostraciones matemáticas formales; tanto la intuición como la presentación formal son actividades reconocidas en el ámbito de las matemáticas (1998: 132).

La psicología estructural (psicología Gestalt) define cuatro propiedades que gobiernan una estructura (Van Hiele, 1986: 28):

1. Es posible extender una estructura. Quien conoce una parte de la estructura, también conoce la extensión de ella. La extensión de una estructura está sujeta a las mismas reglas dadas para una parte de ella.

2. Una estructura puede ser vista como parte de una estructura más fina. La estructura original no se afecta por esto: las reglas de juego no son cambiadas, solamente son ampliadas. De esta manera, es posible tener más detalles que toman parte en la construcción de la estructura.

3. Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura *más- inclusive.* Esta estructura *más-inclusive* también tiene más reglas. Algunas de ellas definen la estructura original.

4. Una estructura puede ser isomorfa con otra. En este caso, las dos estructuras se definen mediante reglas que corresponden a cada una de ellas. Por tanto, si se ha estudiado la estructura dada, también sabe cómo la otra estructura está construida.

Van Hiele clasifica las estructuras en *rígidas* y *flexibles.* Las rígidas son aquellas de las que se puede lograr un conocimiento suficiente para extenderlas sin cometer errores. En las flexibles, pueden adaptarse varias formas o posibilidades para extenderlas, pudiendo presentarse ambigüedades.

En matemáticas, a menudo se presentan estructuras rígidas. Por ejemplo, las propiedades de adición y multiplicación definidas en los números reales siguen las mismas reglas de formación.

Para la suma de números reales a, b y c, se dan las siguientes cinco reglas:

1. Propiedad clausurativa: a y b son números reales; $a + b$ es un numero real.
2. Elemento neutro: $a + 0 = a$.
3. Elemento inverso: $a + (-a) = 0$.
4. Conmutativa: $a + b = b + a$.
5. Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

La multiplicación de números reales a, b y c tiene análogamente las mismas propiedades, de la siguiente manera:

1. Propiedad clausurativa: a y b son números reales; $a\ x\ b$ es un numero real.
2. Elemento neutro: $a\ x\ 1 = a$.
3. Elemento inverso: si a es diferente de 0, $a\ x\ a^{-1} = 1$.
4. Conmutativa: $a\ x\ b = b\ x\ a$.
5. Asociativa: $a\ x\ (b\ x\ c) = (a\ x\ b)\ x\ c$.

Como se puede observar, la suma de reales y la multiplicación de reales, sin el cero, presentan la misma estructura matemática, ambas son grupos.

Una estructura más amplia que involucra a las operaciones de suma y multiplicación es la propiedad distributiva de la segunda operación con respecto a la primera:

$$a\ x\ (b + c) = (a\ x\ b) + (a\ x\ c)$$

Las siguientes sucesiones numéricas son ejemplos de estructuras rígidas y flexibles:

1. En *la sucesión de Fibonnacci,* los dos primeros términos de esta sucesión son 1 y 1, el tercero es 2, que se forma sumando los dos anteriores; el cuarto, que es 3, se obtiene sumando los términos segundo y tercero. Los seis primeros términos son: 1, 1, 2, 3, 5 y 8.
2. Sucesiones numérica de potencias de 2: 2, 4, 8, ... 16, 32 ... 128, 256, ...
3. Sucesión que se forma con el inverso multiplicativo de los números naturales: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...
4. Sucesión de números enteros y racionales: 1, 2/5, 2, 3/10, ...

Las sucesiones 1, 2 y 3 se caracterizan porque puede encontrarse una fórmula para expresar cualquiera de sus términos, mientras que la 4, en apariencia, tiene muchas posibilidades para expresar los términos que siguen. En la terminología expuesta, 1, 2 y 3 son estructuras rígidas, mientras que 4 es flexible.

Estructuras geométricas

Las estructuras geométricas están presentes en todas las formas de la naturaleza. Se pueden encontrar en lo microscópico o en lo macroscópico. Tal vez las estructuras geométricas rígidas más reconocidas sean los mosaicos. Por ejemplo, en la figura 1 es posible fijar la mirada en una parte y desde ésta construir toda la estructura.

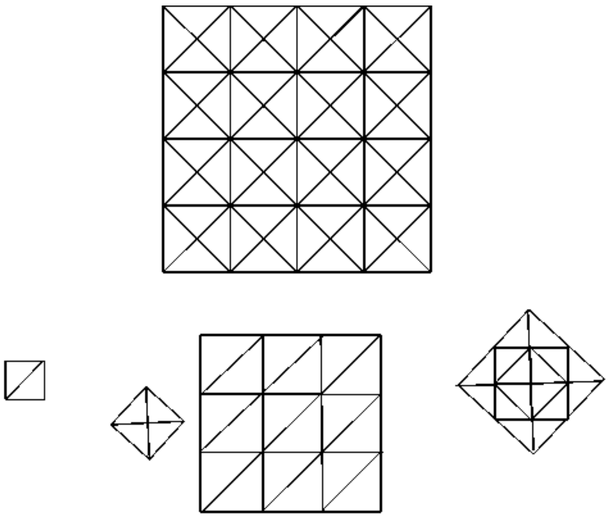


Figura 1. Diferentes aspectos de una misma estructura. Por un lado, si se conoce una parte es posible construirla a partir de ella; por otro, observando toda la estructura se puede encontrar su parte constitutiva más elemental.

Ejemplos de estructuras geométricas son, entre otras, la escalera de Orton (figura 2), la curva de Koch (figura 3) y líneas poligonales abiertas o cerradas sin ninguna ley de formación (figura 4).

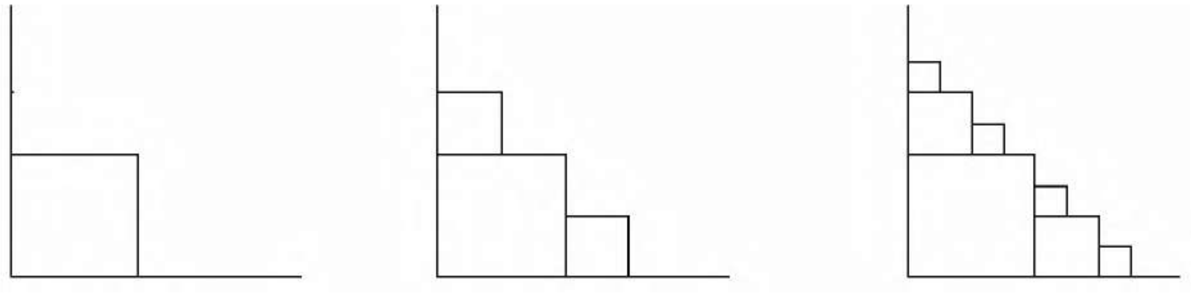


Figura 2. Escalera de Orton. Es una estructura rígida.

Para construir la escalera de Orton (Cornu, 1991: 164) se dibuja un cuadrado de lado uno en el primer cuadrante del plano cartesiano; luego se construyen cuadrados de lado un medio que se ubican como se muestra en la parte central. En una tercera parte del proceso se construyen cuadrados de lado un cuarto, como se observa en la parte derecha de la figura 2. El proceso puede continuar indefinidamente.

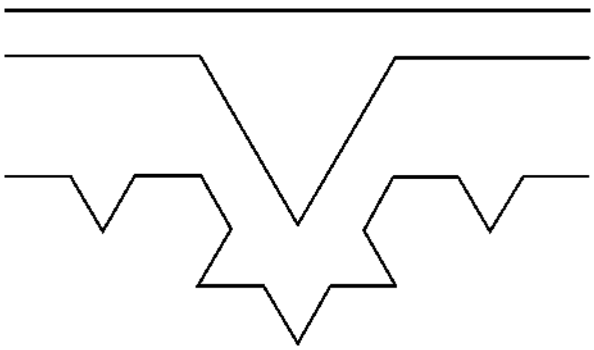


Figura 3. Curva de Koch.
Es una estructura rígida.

La curva de Koch (Stewart, 1999: 641) se construye partiendo de un segmento de recta de una longitud cualquiera. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central. Desde cada uno de los extremos internos de los segmentos que quedan, se trazan segmentos de un tercio de la longitud del segmento inicial. Estos dos nuevos segmentos se deben encontrar sobre la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento inicial, como se muestra en la parte central de la figura 3. Este proceso puede continuar indefinidamente, realizando el mismo proceso descrito para cada uno de los lados de la línea poligonal abierta obtenida, como se muestra en la parte inferior de la misma figura. Partiendo de un triángulo equilátero se obtiene la versión bidimensional, y de un tetraedro su contraparte tridimensional.

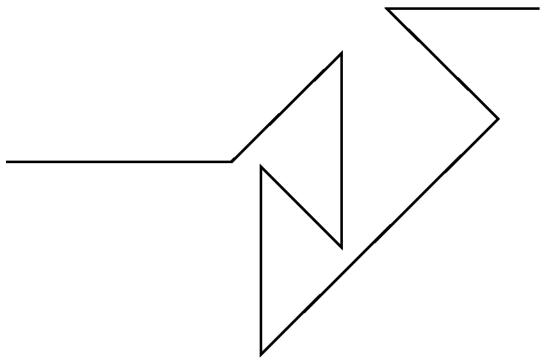


Figura 4. Línea poligonal abierta sin ninguna ley de formación. Es una estructura flexible.

No todas las líneas poligonales abiertas o cerradas que se encuentran en la naturaleza o se pueden construir tienen una ley de formación. En la figura 4 no se puede saber la dirección o la longitud del segmento que se le debe agregar para continuar prolongando la línea poligonal partiendo de cualquiera de sus extremos.

Niveles de razonamiento de Van Hiele

Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a un mismo concepto matemático. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante sólo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.

El modelo de Van Hiele propone que, para la comprensión de un concepto matemático al que se le puede dotar de una componente geométrica, un alumno debe avanzar por cinco *niveles de razonamiento,* a saber: nivel 0: básico o predescriptivo; nivel I: de reconocimiento o visual; nivel II: de análisis; nivel III: de clasificación, y nivel IV: de deducción formal. Los estudiantes deben superar los obstáculos que se les presenten para poder ascender de un nivel a otro.

En el nivel 0, el alumno percibe las figuras geométricas como una totalidad, limitándose a describir su aspecto físico. Establecen semejanzas con otros objetos de la vida cotidiana y, en general, no reconocen las partes de las que están compuestas ni sus propiedades matemáticas.

En el nivel I, el alumno es capaz de reconocer las partes que componen las figuras geométricas y, de manera informal, propiedades matemáticas de las que están dotadas. Es decir, reconocen, mediante la observación, sus elementos y algunas de sus propiedades. Aunque todavía no relacionan las propiedades entre sí ni realizan clasificaciones lógicas a partir de las figuras.

En el nivel II, el alumno establece relaciones entre las propiedades que tiene una figura.

En el nivel III, el alumno emplea las propiedades que tiene una figura para deducir otras, utilizando el razonamiento formal.

En el nivel IV, el alumno puede establecer similitudes y diferencias entre distintas estructuras a partir de las propiedades que las definen.

Como se puede ver, a partir de la descripción de los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele, el reconocimiento de una estructura y de sus propiedades es el factor que potencia la comprensión de los conceptos y propiedades en la geometría y en las matemáticas.

El proceso de aprendizaje según el modelo de Van Hiele

El estudio de las matemáticas debe orientarse a la comprensión de las estructuras que la conforman. Si la educación se orienta al desarrollo del *insight,* se debería estimular a los alumnos a desarrollar su reconocimiento, haciendo énfasis en la aplicación de la segunda y tercera propiedad de las estructuras.

Una estructura debe percibirse como un holograma: "Es muy importante que una estructura pueda ser vista como una totalidad; una estructura es más que la suma de sus elementos" (Van Hiele, 1986), porque a partir de ellas es posible construir otras estructuras potenciando la comprensión de conceptos en forma de espiral.

La importancia del trabajo escolar desde el reconocimiento de estructuras y de sus partes constitutivas radica en que los alumnos no necesitan "aprenderse" toda la información que puedan encontrar referida a un concepto; basta que comprendan la forma como éste opera, y a partir de este proceso pueden aplicar el concepto en distintas circunstancias del aprendizaje o en la solución de diversos problemas cotidianos.

Por tanto, diseñar experiencias de aprendizaje para que los alumnos las reconozcan en cada una de las etapas de la escolaridad, es un objetivo que debe estar presente en todos los microcurrículos de ciencias y matemáticas.

Los niveles de razonamiento están en correspondencia con la red de relaciones que el alumno debe construir en su estructura mental para adquirir un avanzado nivel de razonamiento. Para progresar de un nivel al siguiente, el alumno debe superar cinco *fases de aprendizaje:* 1) información, 2) orientación dirigida, 3) explicitación, 4) orientación libre, y 5) integración (Van Hiele, 1957). Van Hiele las describe como una *función del aprendizaje:*

> [...] la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje (1986: 50).

Van Hiele considera que el lenguaje es un aspecto crucial para poder explicar las estructuras referidas a la geometría; además, es una extensión del pensamiento, pues a medida que éste se refina, es necesario hacer un uso adecuado, con el propósito de comunicar las ideas, es decir: socializar el conocimiento. Aunque existen estructuras (algunos tipos de mosaicos) que para comprender su ley de formación sólo se requiere tener una visión de una de sus partes, considera que para el desarrollo y comprensión de las ciencias, el lenguaje cumple un papel determinante (Van Hiele, 1986: 13-25).

Las fases de aprendizaje le permiten al profesor diseñar actividades para que el alumno progrese desde un nivel de pensamiento al siguiente. Las actividades para cada una de las fases deben estar organizadas en módulos de instrucción, con apoyo de material tangible cuando éste sea necesario. En la transición de un nivel al siguiente, todas las actividades propuestas deben ser realizadas por cada uno de los alumnos.

La idea central del modelo es estudiar con detenimiento el proceso mediante el cual un alumno comprende un concepto matemático utilizando herramientas geométricas de visualización. Es decir, entender cómo un alumno accede a niveles avanzados de razonamiento cuando se le expone a experiencias adecuadas de aprendizaje. Las preguntas que deberían guiar un proyecto de investigación de esta magnitud son:

— ¿Cómo lograr que el alumno adquiera nuevas habilidades de razonamiento?

— ¿Existen formas de favorecer el proceso de aprendizaje de los alumnos?

— ¿Cómo garantizar que un mayor número de alumnos progrese a avanzados niveles de razonamiento?

Para responder estas preguntas, es necesario pensar en la transformación de las estructuras mentales, presentes en los alumnos, en otras nuevas que permitan estudiar los cambios en su transformación. Para ello se pueden representar las estructuras mentales como una *red de relaciones,* en las que los vértices son los conceptos asimilados o diferentes representaciones del mismo concepto. Las líneas de conexión entre vértices son las relaciones establecidas entre conceptos que pueden estar próximos entre sí, o distantes. Van Hiele afirma que sin la existencia de una red de relaciones el pensamiento es imposible (1986: 50-51).

Según lo anterior, Van Hiele considera que el paso de un nivel al siguiente se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones, obtenida al incorporar a la anterior nuevos conceptos y nuevas relaciones (más complejas, más abundantes que las que se tenían en la red desde la que se partió) entre ellos. En el siguiente párrafo Einstein, mediante una carta a Hadamard, da cuenta de lo que significaban la visualización de imágenes mentales y el lenguaje en su proceso de pensamiento:

> Las palabras o el lenguaje, como son escritas o habladas, no parecen jugar ningún papel en mi forma de pensamiento.

> Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento, son ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Estas combinaciones parecen ser la característica esencial en el pensamiento productivo, antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros (Hadamard, 1954: 142).

El profesor debe tener en cuenta, en el proceso de aprendizaje, que las experiencias previas de los alumnos cobran importancia en la comprensión de las estructuras de carácter visual que ellos tienen en sus mentes.

El modelo de Van Hiele y los mapas conceptuales

Las fases de aprendizaje de Van Hiele se centran en el papel de la instrucción, con el propósito de ayudarle al alumno a crear y fortalecer su red de relaciones en conceptos matemáticos; por tanto, se hace necesario diseñar, elaborar, desarrollar y validar módulos de instrucción que potencien, en el alumno, alcanzar un avanzado nivel de razonamiento. El uso de la técnica de los mapas conceptuales puede manifestar cada una de las fases del proceso de aprendizaje por el cual el alumno atraviesa, permitiéndole ampliar su estructura de pensamiento, agregando otros conceptos para dar lugar a la creación de una nueva estructura más amplia, abundante y compleja, en la que el lenguaje desempeña un papel primordial.

Estudios recientes llevados a cabo (Esteban, Vasco y Bedoya, 2004: 151-154) muestran que el empleo de la técnica de los mapas conceptuales es una estrategia adecuada en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos. El diseño de mapas conceptuales es una acción concreta que el alumno debe ejecutar para poner de manifiesto y en forma explícita su estructura de pensamiento. Los mapas conceptuales son una estructura visual que permiten representar las relaciones significativas que un alumno tiene en su mente. Además, permiten indagar por los saberes previos que él posee en su estructura cognitiva. Un factor importante a tener en cuenta es que el alumno debe usar el lenguaje para intercambiar ideas con sus compañeros y de esta forma explicarles el conjunto de significados relacionados con los conceptos presentes en el mapa elaborado.

Los mapas conceptuales en el diseño de los módulos de instrucción reflejan el espíritu de los niveles y las fases de Van Hiele, ya que su empleo constituye una experiencia de aprendizaje que le permite al alumno recorrer cada una las fases en el proceso, para avanzar de un nivel al siguiente.

Consideraciones finales

Es necesario hallar alternativas que ayuden a fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y su relación con otras áreas de la matemática, pues el reconocimiento del estudio de las estructuras geométricas permite el planteamiento y la solución de problemas complejos en matemáticas.

La estructura visual de la red de relaciones que un alumno adquiere en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se puede fortalecer con el empleo de la técnica de los mapas conceptuales, dado que, mediante esta representación concreta, el alumno puede poner de manifiesto su estructura de pensamiento y darse cuenta por sí mismo de los aspectos que debe mejorar en su aprendizaje para adquirir un avanzado nivel de razonamiento.

Referencias bibliográficas

Esteban, P; Vasco, E. y Bedoya, A., 2004, "Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de Van Hiele", en: Concepts Maps: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping, vol. 2, núm. 1, pp. 151-154.

Hadamard, J., 1954, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* Nueva York, Dover Publications.

Jaramillo, C. M., 2000, "La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de Van Hiele", Tesis doctoral publicada, Universidad Politécnica de Valencia, España.

Cornu, B., 1991, "Limits", en: *Advanced Mathematical Thinking,* Tall, ed., Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

Resnick, Laurent B. y Ford, Wendy W, 1998, *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos,* Barcelona, Paidós.

Stewart, J., 1999, *Cálculo. Conceptos y contextos,* Bogotá, Thomson.

Van Hiele, P M., 1957, *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría,* Holanda, Universidad Real de Utrecht.

________ , 1986, *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education,* Nueva York, Academic Press.

Vasco, E. y Bedoya, A., 2005, "Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele", Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Antioquia.

Referencia

Jaramillo López, Carlos Mario y Esteban Duarte, Pedro Vicente , " Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele", *Revista Educación y Pedagogía,* **Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVIII, núm. 45, (mayo-agosto), 2006, pp. 109-118.**

Original recibido: abril 2006
Aceptado: junio 2006