Aprendizaje de los cuadriláteros a través de tareas que promueven la argumentación

Yurany Andrea Rendón Urrego

Trabajo de investigación para optar al título de
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Asesor
Jorge Andrés Toro Uribe, Doctor en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Medellín, Antioquia, Colombia
2022

Cita	(Rendón-Urrego, 2022)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Rendón-Urrego, Y. A. (2022). *Aprendizaje de los cuadriláteros a través de tareas que promueven la argumentación*, [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Grupo de Investigación: Matemática, Educación y Sociedad (MES)

Línea de investigación: Argumentación en Educación Matemática

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP)

Centro de Documentación Educación

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: Jhon Jairo Arboleda Céspedes

Decano: Wilson Bolívar Buriticá

Jefe departamento: Cártul Vargas Torres

Dedicatoria

A Dios por su presencia en mi vida y la oportunidad de llegar a este punto.

A María Elly Urrego Giraldo. Su regalo, la escritura… va más allá de la representación gráfica y unión de símbolos que marcaron el origen de este sueño, queda aquí materializado. Ella es pilar y ejemplo fidedigno de compromiso y dedicación, de trabajo y constancia. Inquebrantable es la palabra que le corresponde y en la que se identifica.

A María Kety Urrego Giraldo y María Eddy Urrego Giraldo por su inapreciable acompañamiento y empatía, por la sutileza del buen trato, la generosidad y humanidad que siempre las caracteriza.

A Youwinner Estival Rendón Urrego y Jorge Andrés Acevedo Lezcano por ser referentes académicos destacados en esta vocación por la enseñanza.

A las subordinadas, las silenciadas, las sin nombre, las del sí rotundo al mandato. Aquí; la rara, la loca, la misteriosa, la de normalidad diferente en un mundo aprestado a lazareto… hoy las contradice, con el ánimo de cerrar el ciclo, esperando a que por razones místicas o milagrosas conozcan otros caminos y haya lugar a la prohibición. "Los machos no florecen ni dejan florecer". Abrazo sororo.

A Lina Hungría, Laura Toro, Stivens Vélez y Kelly Aguirre, "Mi Tribu". Apreciados, cordial saludo. Amigos del alma máter; recorrimos por sus pasillos haciendo de la soledad algo transitorio a través de una amistad sólida, fortalecida y rodeada del ejemplo académico propuesto por ustedes. Saludo enfático para María Guadalupe, querida amiga, sin claudicaciones en el alma, gracias por no adentrarte en el prejuicio y seguir sumando. Y a la niña del bullying, ser bonito que denota candidez. "Y píntenme esa taranta, manta que a su mal espanta, yoda, supremo y gurú". No me muevan esa cuadra.

A Carolina Turizo, Franceny Marín, Jhonatan Pulgarín, Jessica Cano, Alejandra Gómez, Carlos Ortiz y Luisa Jaramillo por su acompañamiento y fraternidad.

A mi lugar de trabajo, a mi jefe Héctor, y a la terna matoneadora estimada: Mafe, Alexandra, y Laura.

Y ya que la familia es una estructura social y simbólica, no he de obviar los nombres de Sofía Villegas, Laura Granada, Silvio Rendón, Alejandra Urrego, Luciana Urrego, Neila Urrego y Antonio Zapata.

Agradecimientos

Dedicatoria y agradecimiento al profesor Jorge Andrés Toro Uribe a quien aprecio, respeto y admiro profundamente, gracias por enseñarnos que el compromiso académico se vive con rigor sin ser tortuoso, por permitirnos vivir el trabajo investigativo como una experiencia feliz.

"Nos unió la palabra en azarosa encrucijada, punto de partida de tu amistad sincera y generosa. Y el verbo se hizo carne agradecida, con el que asimilamos las lecciones que tu experiencia nos dictó. Desgranaba en el aula reflexiones desde su sencillez y talante sin que la edad supiera de excepciones. Incansable y asceta caminante, fuiste fiel a tu oficio de estudiante.

Hoy mi voz es de agradecimiento por tanto recorrido enriquecido con tu conducta y con tu pensamiento. No caerá tu nombre en el olvido, alegre y sabio consejero, porque en nuestra memoria siempre has sido: maestro, amigo, alumno y compañero".

A la Institución Educativa Compartir.
A los niños del Semillero Kids quienes me aportaron su alegría y saber en esta primera experiencia como profesora.

A mis compañeros de la Práctica Pedagógica por vehicular su voz de saber y enriquecer este proceso de formación atravesado por la experiencia de estos años como equipo.

A la Universidad de Antioquia y la Facultad de Educación.

A los profesores que marcaron positivamente este proceso académico.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Siglas, acrónimos y abreviaturas

EBC	Estándares Básicos de Competencias
DBA	Derechos Básicos de Aprendizaje
MEN	Ministerio de Educación Nacional
PEI	Proyecto Educativo Institucional
AEM	Argumentación en Educación Matemática
IEC	Institución Educativa Compartir
SPP	Seminario de la Práctica Pedagógica

Resumen

Esta investigación se inscribe en la línea de Argumentación en Educación Matemática y es desarrollada en la Institución Educativa Compartir con estudiantes cuarto grado. Tiene como objetivo favorecer el aprendizaje de los cuadriláteros a través de tareas que promueven la argumentación.

El recorrido metodológico se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo de corte interpretativo, de manera específica, un experimento de enseñanza en donde se llevan a cabo unas tareas de las cuales se hizo revisión antes, durante y después de su aplicación. Cada tarea fue diseñada con la intención de promover la argumentación en la clase de matemáticas.

Para el análisis de los datos se seleccionaron cuatro tareas revisando en ellas las matemáticas relacionadas para cada tarea y la argumentación alrededor de las intervenciones de los estudiantes, que de acuerdo con sus características se clasifican entre diagramática o narrativa.

Los resultados obtenidos muestran que en la clase de matemáticas son combinadas tanto la argumentación diagramática como narrativa, una como complemento de la otra. Dicha combinación permite identificar interpretaciones y aprendizajes obtenidos a través de procesos de negociación de significado, de tal modo, se concluye que es posible favorecer el aprendizaje de cuadriláteros a través de tareas que posibiliten desarrollar la argumentación en el aula de clases.

Palabras clave: aprendizaje de la geometría, diseño de tareas, argumentación diagramática, argumentación narrativa.

Abstract

This research is part of the line of argumentation in Mathematics Education and is developed at the Compartir School with fourth grade students. Its aim is to favor the learning of quadrilaterals through tasks that promote argumentation.

The methodological approach is framed within the interpretative qualitative research paradigm, specifically, a teaching experiment in which some tasks were carried out and reviewed before, during and after their application. Each task was designed with the intention of promoting argumentation in the mathematics class.

For the data analysis four tasks were selected, reviewing in them the mathematics related to each task and the argumentation around the students' interventions, which according to their characteristics are classified as diagrammatic or narrative.

The results obtained show that in the mathematics class both diagrammatic and narrative argumentation are combined, one as a complement to the other. This combination allows the identification of interpretations and learning obtained through processes of negotiation of meaning, thus, it is concluded that it is possible to favor the learning of quadrilaterals through tasks that make it possible to develop argumentation in the classroom.

Keywords: geometry learning, tasks design, diagrammatic argumentation, narrative argumentation.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

“Las matemáticas proporcionan de manera perfecta esa combinación de sensaciones, característica del gran arte, de libertad semidivina e inevitable destino; porque levanta un mundo ideal donde todo es perfecto, pero necesario”.

Bertrand Russel

1.1 Descripción del contexto

Este trabajo de investigación es propuesto desde la Universidad de Antioquia como un primer acercamiento a la práctica profesional y al trabajo investigativo alrededor de la Práctica Pedagógica que se llevó a cabo durante el segundo semestre del año 2020 y el año 2021 en la Institución Educativa Compartir, proceso que contó con el aval de rectoría y de los padres de familia (Ver anexo 1).

Para hablar acerca del contexto en que se desarrolla este trabajo, se mencionan algunas generalidades acerca de la institución, su organización, proyectos que allí se desarrollan, los cambios ocurridos como resultado de la situación de contingencia originada por el Covid-19 y el trabajo con los estudiantes.

En relación con los aspectos generales, la institución fue creada mediante la resolución número 014912 del 4 de diciembre de 2015, es de carácter urbano, oficial y mixto, está ubicada en San Antonio de Prado, corregimiento del municipio de Medellín en la carrera 62a # 42d sur 26 y pertenece al núcleo educativo 937. Ofrece enseñanza en los niveles: preescolar, básica (ciclo primario y ciclo secundario), media académica, y media técnica en los programas de Contabilización de Operaciones Comerciales y Diseño e Integración Multimedia. La institución cuenta con dos auxiliares administrativos, dos coordinadoras, una de ellas académica y la otra de convivencia, y el rector. Atiende a estudiantes de estratos socioeconómicos 2 y 3, que corresponden a una clasificación de estratos bajo y medio, consta de 992 estudiantes y 32 profesores en ambas jornadas, mañana (en su ciclo secundario y media académica / técnica) y tarde (en su ciclo primario).

La institución está organizada en cuatro gestiones: administrativa, directiva, académica y comunitaria, a través de las cuales se atiende a las diferentes particularidades de la institución y la comunidad educativa en general. De acuerdo con el decreto 1075 de 2015, según lo dispuesto en la ley 115 de 1994 en el artículo sexto, se define a la comunidad educativa como aquella que está conformada por estudiantes, educadores, padres de familia o acudientes de los estudiantes, egresados, directivos docentes y administradores escolares. Todos ellos, según su competencia, participarán en el diseño, ejecución y evaluación del Proyecto Educativo Institucional (PEI) y en la buena marcha del respectivo establecimiento educativo. (p.74)

En la institución se desarrollan varios proyectos, tales como el programa Entorno Protector, en el cual los estudiantes cuentan con acompañamiento psicológico. También hay atención para estudiantes con necesidades educativas especiales a través del programa de la Unidad de Atención Integral (UAI). Se resalta la creación de un club de lectura llamado Ignes Ardentis (Fuegos Refulgentes) en donde hay estudiantes de todos los grados de escolaridad. Se busca que la comunidad participe de los diferentes espacios, a través de convenios interinstitucionales se cuenta con el acompañamiento de otras instituciones o entidades para el desarrollo de proyectos y programas que se llevan a cabo en el establecimiento educativo, entre éstas instituciones están: Grupo Nutresa; Instituto Nacional de Deportes, Educación Física y Recreación (INDER); Secretaría de Educación; Junta de Acción Comunal; La Caja de Compensación Familiar de Antioquia (COMFAMA); y la parroquia del barrio. También se programan foros educativos, festivales y encuentros culturales.

Por otra parte, no se puede desconocer los cambios y adaptaciones como resultado de la contingencia originada por el Covid-19, la institución se acogió a las medidas de seguridad dando continuidad de manera virtual a las clases y otras actividades que allí se desarrollaban desde la presencialidad. Se abrieron espacios a través de encuentros sincrónicos en plataformas como Zoom y Meet, desde la página institucional y redes sociales como Facebook, se ampliaron los canales de comunicación permitiendo a la comunidad estar informada y fomentando así su participación en los diferentes eventos y actividades como el día de las matemáticas, el día del inglés (english day), día de la familia, semana de la convivencia, talleres de pintura y encuentros con la comunidad, entre otros.

Con respecto a la modalidad virtual y la participación, el contacto con el estudiante no es tan directo como en la presencialidad en donde es posible interpretar en mayor medida su lenguaje corporal a través de los gestos y expresiones. Es difícil percibir la atención e incluso la disposición que presenta el estudiante en el escenario en el que se encuentra. Se resaltan algunas bondades vinculadas al uso de las tecnologías, como el acceso a la grabación de las clases, el uso de aplicaciones que no siempre se lograban llevar al aula, y los aprendizajes complementarios que fueron necesarios para hacer uso de estos medios en los que se dio continuidad a las clases. También se evidenciaron dificultades de conexión en algunos momentos, y otras vinculadas al uso de las tecnologías, aquí se resalta el acompañamiento de los padres de familia quiénes por lo general estaban muy atentos a lo desarrollado alrededor de los encuentros sincrónicos.

En relación con los semestres en que se desarrolló la Práctica Pedagógica, el primer semestre (2020-2) se realizó un proceso de observación y reconocimiento de la institución, su comunidad educativa y sus modalidades de trabajo. En el segundo semestre de práctica (2021-1) en la Institución Educativa Compartir se aprobó la propuesta para la creación de semilleros de matemáticas dando así participación directa a los estudiantes de práctica quiénes de acuerdo con el grado de escolaridad lideraron algunos de ellos. En el tercer semestre (2021-2) se retomaron los semilleros de matemáticas dando continuidad a las actividades. Cabe resaltar que el trabajo con los estudiantes fue realizado la mayor parte del tiempo a través de encuentros sincrónicos con estudiantes de tercer grado (con edades entre 8 - 10 años) en el año 2020 y cuarto grado (con edades entre 9 - 11 años) en 2021.

De modo inicial, de acuerdo con este proceso de observación y acompañamiento, se puede decir que los profesores utilizaban diferentes canales de retroalimentación, incentivaban el aprendizaje de los estudiantes, trataban de partir de experiencias cercanas al contexto de los estudiantes y se preparaban para afrontar los nuevos retos ocasionados por la contingencia. Por otra parte, se logró evidenciar que los estudiantes son receptivos, participativos, planteaban preguntas a partir de los temas abordados y expresaban aquello que no comprendían durante las clases.

Por otra parte, pensar el contexto en el que serían desarrolladas las tareas fue necesario puesto que tanto la presencialidad como la virtualidad marcan dos escenarios diferentes. Considerando tres aspectos que marcaban algunas restricciones relacionadas al manejo de los tiempos, tareas propuestas y uso de materiales, se desarrollaba el trabajo con los estudiantes.

En cuanto al primer y segundo aspecto, se tiene que contrario a la presencialidad en donde fue posible extender el tiempo de trabajo; la virtualidad en el espacio del semillero implicó pensar en tareas cortas, las cuales incluían una guía por encuentro que era enviada antes de la reunión con los estudiantes dándoles así la posibilidad de que hicieran una revisión previa de ella, posterior a esto, se socializaba y se desarrollaba un trabajo de forma conjunta que aportaba a una optimización del tiempo. Siguiendo el orden de ideas respecto a la planeación de las tareas, el contexto sincrónico o presencial sugiere pensar en tareas que cautiven la atención del estudiante porque en ambos es posible la distracción. En relación con el tercer aspecto, no se solicitaban materiales diferentes a cuadernos de notas, hojas, lápices u otros elementos de uso diario, y en los encuentros presenciales se llevaba el material de trabajo, lo anterior con el fin de facilitar la participación de los estudiantes y evitarles entrar en gastos de papelería.

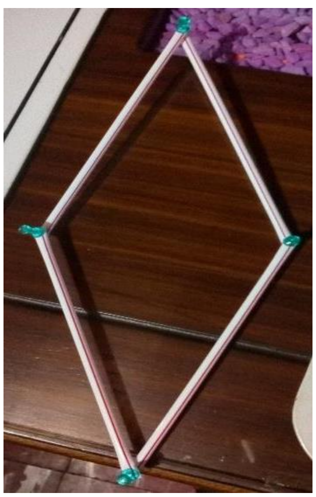
En este trabajo de investigación se toman en cuenta las tareas realizadas en el semillero de matemáticas de cuarto grado ‘Semillero Kids’, nombre propuesto por los mismos estudiantes. En un primer acercamiento se identificaron varias problemáticas que, aunque no serán tema de discusión en este trabajo, sirvieron de inspiración para lo que se encontró después, por tal razón se enuncian en este apartado. Dichas problemáticas van relacionadas al calendario académico, el material escolar, las mallas de aprendizaje y la intensidad horaria. A modo general, estas problemáticas hablan de los tiempos que se deben cumplir para abordar los contenidos, aunque no se alcance a profundizar en algunos temas u objetivos de aprendizaje. El material de apoyo como los libros de texto para desarrollar los temas previstos por área resalta la discusión y revisión que debe hacerse de ellos en asunto de ambigüedades, detalles de contexto, conceptos, lenguaje, complejidad de los temas y ejemplificación, lo anterior con el fin de precisar y fomentar su calidad. Las mallas de aprendizaje y otros formatos que son adaptaciones de los documentos rectores los cuales parten de parámetros y orientaciones generales que en su implementación requieren de un reconocimiento de la singularidad de cada escuela. Y, por último, asumir que la geometría, la estadística y la aritmética son áreas separadas.

1.2 Problemática de estudio y justificación

A través de las tareas realizadas alrededor de los encuentros sincrónicos del Semillero Kids se iba identificando que los estudiantes presentaban dificultades para caracterizar figuras geométricas de acuerdo con sus lados y ángulos, también, al rotar figuras como el cuadrado. Dificultades que fueron más evidentes cuando a través del uso de pitillos (como se muestra en la figura 1) se buscó ilustrar algunas de las particularidades que tienen el cuadrado y el rombo al variar sus ángulos; al rotar 45° un cuadrado los niños lo confunden con el rombo, no identifican claramente similitudes o diferencias entre ambos, la tarea también dejó ver que los estudiantes tienen la percepción de que los lados varían en su tamaño con respecto al ángulo que se forma entre ellos, es decir, los ángulos mayores de 90° tendrán lados de mayor tamaño en comparación con los ángulos menores de 90° que tendrían lados de menor tamaño. Esta relación también la hacen con otros cuadriláteros como el rectángulo, agregando que de acuerdo con el tamaño de la figura los estudiantes asumen que los ángulos varían entre figuras de mayor o menor tamaño, lo mismo sucede con el cuadrado que con respecto a sus lados el estudiante asume que varían sus ángulos, es decir, los ángulos de un cuadrado de lado 4 serían menores a un cuadrado que tenga lado 8.

Figura 1

Construcción de un rombo con pitillos



Nota. Fuente archivo personal de la autora

En adición a lo anterior, en la enseñanza de las matemáticas se tiene en cuenta el lenguaje natural, el lenguaje gráfico y el lenguaje simbólico (Toro, 2014). Cuando la tendencia es a privilegiar lo gráfico y lo simbólico, se presenta una problemática relacionada al aprendizaje de contenidos que se puede asociar a lo memorístico, ya que conocer algoritmos y su tratamiento operativo en relación con la estimación de áreas, nombres o características de algunas figuras, no es precisamente dar cuenta de los aprendizajes obtenidos. Se reconoce que los procesos de elaboración, comparación y ejercitación son aspectos importantes en el desarrollo del pensamiento matemático, la intención aquí no es afirmar que sean buenos o malos, sino mostrar otras posibilidades. Ahora bien, podría pensarse que, si se favorece un lenguaje natural, por ejemplo, a través de la argumentación, se podría lograr un tratamiento menos memorístico de las matemáticas, ya que al argumentar se presenta la posibilidad de expresar, construir, interpretar y producir ideas ya sea de manera verbal o escrita.

La argumentación puede ser vista desde diferentes enfoques, en este trabajo se habla específicamente de argumentación escolar, la cual toma sentido en el marco de esta investigación porque es un tema actual, pertinente y con notables avances en la investigación (e.g., Krummheuer, 1995; Stylianides et al., 2016; Cornejo y Goizueta, 2019).

De acuerdo con lo mencionado, se busca aportar en la investigación en Educación Matemática a través de elementos que permitan un acercamiento a los cuadriláteros con el propósito de favorecer el aprendizaje de la geometría articulando el pensamiento espacial y la argumentación en el aula de clases.

De un lado, considerando ideas como las de Alsina et al. (2008) quienes resaltan que:

el punto de partida en el aprendizaje de las matemáticas es tener claro que los niños necesitan oportunidades para aprender y descubrir aspectos matemáticos de la realidad por sí mismos, donde el estudiante pueda probar, equivocarse, recomenzar a partir del error, construir modelos, proponer soluciones, defenderlas, discutirlas, comunicar los procedimientos y conclusiones (Alsina et al, 2008, citado en Sánchez, 2016, p.55).

Por otra parte, teniendo presente aportes de autores como Solar (2018) quién ha trabajado específicamente acerca de la argumentación, su investigación reúne los aspectos mencionados por Alsina y su equipo a través de la argumentación colectiva que necesariamente está asociada a la idea de enfrentar otros puntos de vista en donde las situaciones de contingencia constituyen oportunidades para profundizar el aprendizaje de los estudiantes a partir de errores cuya gestión tiene la finalidad de asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático.

Se han mencionado las dificultades identificadas que han dado origen a esta investigación partiendo del trabajo alrededor del semillero y las matemáticas que se expresan en diferentes formas del lenguaje y que pueden ser revisadas; también se habló de la argumentación la cual apunta a favorecer las problemáticas mencionadas, lo anterior con el fin de dar claridad acerca del enfoque en que se desarrolla en este trabajo y la pertinencia al abordar la argumentación en el aula de clases, dando así cuenta de las razones por las que se ha escogido desarrollar esta investigación que se realiza, precisamente, buscando aportar a la Educación Matemática. Cabe resaltar que la argumentación escolar no es un tema nuevo, hay varias investigaciones relacionadas. La apuesta de este trabajo es mostrar cómo a través de la argumentación se pueden crear oportunidades de aprendizaje en las clases de matemáticas y contribuir con otras formas de producir conocimiento en el aula dando participación al estudiante.

1.3 Pregunta de investigación y objetivos

De acuerdo con las ideas expuestas en el apartado anterior, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el aprendizaje de los cuadriláteros en estudiantes de cuarto grado a través de tareas que promueven la argumentación?

Para dar respuesta a esta pregunta se plantea el objetivo de esta investigación y los respectivos objetivos específicos.

Favorecer el aprendizaje de los cuadriláteros en estudiantes de cuarto grado a través de tareas que promueven la argumentación.

Objetivo específico 1: diseñar e implementar una propuesta de enseñanza con estudiantes de cuarto grado que favorezca la participación y la argumentación.

Objetivo específico 2: identificar vínculos entre la argumentación y el aprendizaje de los cuadriláteros.

Los términos claves en este objetivo, como aprendizaje de la geometría y argumentación escolar serán desarrollados en el marco teórico, de manera que se pueda dar cuenta de la pregunta de investigación.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

"Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura".

Bertrand Russell

2.1 Revisión de literatura

Para realizar esta revisión se retoman diferentes tipos de fuentes, entre ellas, revistas electrónicas e impresas, así como artículos de reportes de investigación, trabajos de grado profesional y capítulos de libros publicados durante la última década en un periodo comprendido entre el año 2012 y 2022. Se presentan dos líneas, la primera aborda investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la geometría y la segunda presenta investigaciones relacionadas con la argumentación en la clase de matemáticas.

2.1.1 Investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la geometría

De acuerdo con la revisión realizada, se identifican varios trabajos que ilustran acerca del campo de investigación en el aprendizaje de la geometría, algunos aspectos serán considerados en esta investigación.

Para comenzar, se resalta el trabajo de Fripp y Varela (2012) ellos son autores del libro PENSAR geometricaMente en donde trabajan diferentes aspectos vinculados a la enseñanza de la geometría en la escuela primaria con estudiantes entre los 6-11 años. El libro se expone a partir de tres tópicos: mitos y realidades sobre la enseñanza de la geometría, tipos de actividades geométricas y análisis didáctico de actividades. El primer tópico señala que hay un modo de estudiar geometría que está relacionado con la forma de enseñarla, y dentro de esas formas de enseñanza hay ciertas creencias instaladas en el pensamiento de los docentes, entre ellas: una geometría que está presente en todo, las características físicas de los objetos geométricos y la geometría como el aprendizaje de nombres en un trabajo resumido a la estimación de áreas, perímetros y volúmenes, por último, aquellas asociadas a la dificultad de enseñar geometría por ser una disciplina abstracta. Lo anterior forma parte de algunas creencias que a partir de los argumentos y preguntas realizados en el congreso son discutidas. En el segundo tópico, los autores proponen unas actividades que apuntan a desarrollar el pensamiento geométrico, en ellas se incluye la representación física de una figura geométrica o la reproducción de una figura dada, la caracterización de ellas a partir de la comunicación, así como la clasificación y agrupación de figuras. En el tercer y último tópico, se habla acerca del análisis didáctico de las actividades geométricas en donde se da importancia tanto a los objetos matemáticos como a las relaciones, en este orden de ideas las actividades deben ser planeadas estableciendo relación entre el docente y los alumnos, entre los estudiantes y entre el concepto geométrico y los alumnos, considerando así las posibles variables en el desarrollo de la actividad, los procedimientos de resolución de los alumnos y las intervenciones del docente.

En relación con el objeto matemático, Muñoz y Oller (2013) revisan la capacidad de detectar figuras y cuerpos geométricos que se encuentran en los diferentes entornos cotidianos. Los autores recurren a la fotografía para que el estudiante realice una identificación de las posibles figuras geométricas, mostrando la ambigüedad de algunas de ellas.

Por su parte Bernabeu y Llinares (2017) a través de entrevistas a niños de 6 a 9 años, analizan como estos reconocen y relacionan diferentes atributos en las figuras geométricas para clasificarlas. Los resultados permiten reconocer tres características, la primera la existencia de un desfase entre el uso de los nombres de las figuras y su comprensión conceptual; la segunda, que el reconocimiento de los atributos para clasificar las figuras no es proceso uniforme y depende del atributo considerado; y tercero, la influencia que desempeñan las figuras y el dominio semántico restringido del término usado para nombrarla.

Otro trabajo en esta línea es el de Sandoval y Camargo (2021) quienes presentan momentos del aprendizaje de la equidistancia al experimentar la variación de elementos de figuras geométricas, los participantes fueron niños de 10 años que usaron por primera vez un programa de geometría dinámica para construir y explorar propiedades invariantes de circunferencias, triángulos isósceles y equiláteros. Los resultados muestran que la experimentación realizada fue significativa para conceptualizar la equidistancia, en contraste con la colinealidad y la congruencia al resolver problemas de geometría.

Autores como Götz y Gasteiger (2022) realizan un estudio basado en los enfoques que utilizan los estudiantes en el proceso de solución de cuatro tareas de reflexión. Para recopilar datos realizaron 42 entrevistas con estudiantes al final de la escuela primaria en Alemania. Para el análisis, se desarrolló y validó un sistema de categorías con las categorías “propiedades de la reflexión”, “enfoques holísticos”, “gestos y acciones que ilustran el proceso de reflexión” e “imágenes mentales que ilustran el proceso de reflexión”. Los autores pudieron observar que existe una relación entre los enfoques utilizados por los estudiantes durante su proceso de resolución de tareas de reflexión y sus productos de solución.

Por otra parte, incorporando el juego en el proceso de aprendizaje de la geometría, el trabajo de Castro (2015) habla acerca de una experiencia desarrollada en el contexto de la educación infantil alrededor de un taller en el que se realizaron juegos matemáticos, dichos juegos estaban asociados a contenidos de la geometría tridimensional y plana y eran desarrollados a través de la composición y descomposición, las cuales son consideradas como procesos específicos en el razonamiento matemático. En cuanto a la geometría espacial en el juego, en un primer momento son utilizados varios objetos con formas diversas (prismas, cilindros, etc.) para formar una maqueta que representaría el pueblo y que fue construida con materiales de desecho. Complementario a esta actividad, se implementa el trabajo con bloques de madera para construir torres (algo similar al juego Jenga) al componer un “piso” los niños usaban cuatro pilares iguales y una tabla, posteriormente, estas estructuras se componen a través de la repetición para construir torres.

El trabajo con la geometría plana se realizó a través del Tangram que también muestra procesos de composición y descomposición, parte de formas elementales para llegar a figuras más complejas, los niños representaban la descomposición de una figura para luego realizar el dibujo a mano alzada y probar si esa representación estaba bien hecha. Otro de los juegos implementados en el taller es el Tetris en el cual también se trabajó la composición y descomposición de números. La conclusión a la que se llega a través de la implementación de este taller, es a la necesidad de trabajar acerca de la composición y descomposición para profundizar en el conocimiento de las formas, en vista de que la geometría en los primeros grados de escolaridad va más allá de la identificación y descripción de figuras planas (Castro, 2015).

De acuerdo con los documentos leídos, los autores aportan ideas y reflexiones para esta investigación. Como reflexiones está la pregunta acerca del conocimiento de los nombres de las figuras que a veces dista de la comprensión conceptual. El aporte de ideas queda asociado a la identificación de figuras en entornos cotidianos que permita llevar al estudiante a un reconocimiento de las figuras y una caracterización de ellas en donde se estudiaría la posibilidad de conectar el tema de los ángulos. Otra idea será la de revisar las posibilidades de recurrir a la experimentación para explorar propiedades de las figuras, podría ser a partir de construcciones, uso de material tangible o doblado de papel. Por último, se espera propiciar la reflexión en torno a la resolución de tareas considerando los saberes previos del estudiante, de igual forma, quedan ideas relacionadas al aprendizaje de la geometría a través del juego revisando las formas más acertadas para su implementación.

2.1.2 Investigaciones relacionadas con la argumentación en la clase de matemáticas

De acuerdo con la revisión realizada, se identifican varios trabajos que ilustran acerca del campo de Argumentación en Educación Matemática, algunos aspectos serán considerados en esta investigación.

Para comenzar, se destaca el trabajo de Solar (2018) quién habla acerca de los bajos resultados en pruebas internacionales como PISA en donde el enfoque curricular por competencias posiblemente sea un factor considerando que dichos resultados podrían ser explicados a través de políticas de estandarización centradas en la promoción de habilidades básicas en matemáticas. El autor afirma que es necesario repensar la Educación Matemática reconociendo cuáles son las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes en un enfoque por competencias que cumpliendo con algunas condiciones puede servir para superar los bajos resultados. Se hace énfasis en la argumentación como una competencia que contribuye a la justicia social al promover oportunidades de aprendizaje, lo anterior se puede lograr desde una clase dialógica y reflexiva. Por tal razón, el autor habla acerca de la argumentación en el aula de matemáticas comprendida como el intento de convencer o persuadir al otro. Solar destaca la argumentación colectiva como una parte importante del discurso en el aula de matemáticas, esta podría ser explicada como el logro de profesores y estudiantes para establecer sentencias que se puedan asociar con la argumentación, para ello es necesario el uso de estrategias comunicativas por parte del profesor que hagan posible el fomento de la participación cumpliendo algunas condiciones, entre ellas, la gestión del error, preguntas deliberadas, tareas matemáticas abiertas que permitan el contraste de posturas y una planificación de clases en que el docente anticipe la argumentación considerando las posibles preguntas que realizaría y aquellas que también podrían surgir, de darse estas condiciones el docente realiza una gestión argumentativa que también podría darse cuando se obtienen diferentes respuestas, es decir, errores, procedimientos o posturas. Cabe resaltar, que no necesariamente han de cumplirse todas las condiciones.

El desarrollo de la argumentación colectiva en el aula de matemáticas tiene tres implicaciones interesantes a destacar: la identificación de patrones de pensamiento, la interacción dialógica entre profesor y estudiantes, y herramientas para abordar las contingencias. La primera de ellas implica algunas acciones que puede tomar el profesor en la práctica, entre ellas: observar la forma de registrar y operar de los estudiantes, identificar errores comunes, proceder a su corrección, reconocer ideas de sus estudiantes y organizarlas para precisar un concepto. La segunda implicación tiene que ver con las oportunidades de participación, gestión del error y tipo de preguntas, las que han sido claves para promover argumentación en sus clases en donde las oportunidades de participación tienen como finalidad asegurar que todos tengan la oportunidad de aportar. La gestión del error busca asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático. En cuanto al tipo de preguntas que corresponde a la tercera implicación, se realiza una formulación de preguntas adecuadas por parte del profesor, tales como preguntas que favorezcan la explicación, evitar preguntas retóricas, hacer contrapreguntas y preguntas que mantengan el foco en la discusión (Solar, 2018).

Se suma a la línea de argumentación el trabajo de Samper y Toro (2017) quiénes analizan la argumentación de nueve estudiantes de grado octavo cuando resuelven problemas con el apoyo del programa de geometría dinámica Cabri. Los argumentos de los estudiantes se caracterizaron usando el modelo Toulmin. Analizaron, además, las acciones que realizó o dejó de hacer el profesor, cuya intención es favorecer la producción de argumentos. Para caracterizar los argumentos se utilizó un conjunto de categorías; unas tomadas de los referentes teóricos y otras emergentes.

Por otro lado, cabe resaltar que la argumentación tiene una multiplicidad de significados, Ayalon y Even (2016) señalan que, en los últimos años se ha presentado una creciente apreciación de la importancia de incorporar la argumentación en las matemáticas escolares; en primer lugar, porque las matemáticas están directamente relacionadas con la argumentación; en segundo lugar, porque la justificación de afirmaciones, la generación de conjeturas o la evaluación de argumentos, son componentes esenciales del hacer y comunicar las matemáticas. Además, la investigación sugiere la participación en actividades argumentativas en donde se aliente a los estudiantes a explorar, confrontar y evaluar posiciones alternativas con el apoyo de voz u objeciones para justificar diferentes ideas e hipótesis, promoviendo así la comprensión significativa y el pensamiento profundo.

De acuerdo con los documentos leídos, los autores aportan ideas y reflexiones para esta investigación. Como reflexiones está la apreciación que se realiza acerca de la argumentación en los primeros grados de escolaridad, tema que se revisa en este trabajo que es realizado con estudiantes de cuarto grado. El aporte de ideas queda asociado al ejercicio argumentativo para persuadir, también al desarrollo de la argumentación colectiva para promover la comunicación en el aula de clases. Por último, otra de las ideas va asociada con el desarrollo de tareas abiertas que posibiliten construir argumentación en el aula de clases, se espera que a través de dichas tareas sea posible la gestión del error y la conciliación de significado.

2.2 Fundamentación teórica

En este apartado se presenta la fundamentación teórica de este trabajo, por un lado, aspectos relacionados con el aprendizaje de la geometría, y por otro, la argumentación en la clase de matemáticas.

2.2.1 Aprendizaje de la geometría

Esta primera línea relacionada con el aprendizaje de la geometría es abordada de acuerdo a dos aspectos, el primero tiene que ver con su importancia en el campo de las matemáticas mientras que el segundo se vincula a la revisión de los documentos en donde se plantean algunas orientaciones para la enseñanza de la geometría en el contexto colombiano.

En el primer aspecto se resalta que a diferencia de lo que sucede con otros tópicos y ramas de las matemáticas, la geometría se ubica en estrecha relación con la vida cotidiana, pues está ligada a objetos físicos, al espacio físico y la percepción de estos en múltiples formas, lo cual implica que los estudiantes deban poseer un panorama extenso de experiencias y conocimientos (Samper et al., 2010).

Complementario a lo anterior, Vecino (2005) resalta la importancia de incluir en el currículo la enseñanza de la geometría desde los primeros grados de escolaridad, al afirmar que:

resulta evidente que los niños pequeños, de manera informal, en sus juegos, ya realizan numerosas actividades de índole matemático: exploran modelos, formas y relaciones espaciales, comparan magnitudes, cuentan objetos, etc., entonces introducir al niño en el mundo de las formas, las figuras, los espacios, es una tarea que pueden lograr los maestros de educación infantil, esto permitirá que vayan trabajando más a fondo la geometría desde los primeros años de educación infantil. De esta manera la inclusión de temas como espacio y geometría en el currículo infantil parece más que justificada (Vecino 2005 citado en Sánchez, 2016, p.54).

En relación con el segundo aspecto, se realizó una revisión de los documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) observando en ellos cómo se propone abordar el objeto de estudio de esta investigación, así como el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en el contexto colombiano, se hizo lectura de los Lineamientos Curriculares en Educación Matemática, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de aprendizaje.

Según los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se propone recuperar el sentido espacial e intuitivo de manera general en las matemáticas, y no sólo en el pensamiento geométrico, por esto, el tratamiento de los conceptos debe mirarse desde otros aspectos que no sean únicamente ligados a la teoría de los libros de texto.

Para el desarrollo del pensamiento espacial los Lineamientos Curriculares proponen trabajar desde la geometría activa por lo cual hay una aproximación a los conocimientos partiendo del reconocimiento por medio de los sentidos, la observación, la interacción con el objeto tangible y la relación del movimiento del cuerpo con el entorno para luego avanzar a procesos más abstractos. De ahí que se dé prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos (MEN, 1998).

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de cuarto grado relacionados al pensamiento espacial y sistemas geométricos, este trabajo está enfocado en el siguiente estándar: “comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características” (MEN, 2006, p. 82).

Por último, en relación con el aprendizaje de figuras bidimensionales caracterizadas entre los cuadriláteros, los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) enuncian unas habilidades o destrezas que se adquieren y para esto hay unas evidencias de aprendizaje por nivel. En cuarto grado, el DBA No. 6 hace mención a la identificación, descripción y representación de figuras bidimensionales y cuerpos tridimensionales para establecer relaciones entre ellas. Hay dos evidencias que muestran que el estudiante alcanzó algunos aprendizajes, la primera de ellas está relacionada con la capacidad de armar, desarmar y crear figuras bidimensionales y cuerpos tridimensionales, la segunda evidencia tiene que ver con el reconocimiento de los cuerpos geométricos atendiendo a las relaciones entre la posición de las diferentes caras y aristas (MEN, 2016, p.33).

2.2.2 Argumentación en la clase de matemáticas

Esta segunda línea que presenta la fundamentación teórica de este trabajo se desarrolla de acuerdo a dos aspectos, el primero corresponde a la definición acerca de argumentación en la que se fundamenta la investigación siguiendo a autores como Toro y Castro (2020). En el segundo aspecto se muestran los trabajos realizados por Cornejo et al. (2021) y Krummheuer (2013), quiénes aportan a la Argumentación en Educación Matemática enfocada en los primeros grados de escolaridad.

Teniendo en cuenta que la argumentación es un campo amplio en definiciones, para el caso particular de este trabajo se considera la argumentación en la clase de matemáticas como:

> un acto complejo destinado a resolver una diferencia de opinión, en el cual interesa convencer acerca de la aceptabilidad de un punto de vista a través de la justificación o refutación; advierte una dimensión comunicativa, una interaccional y una epistémica, y tiene lugar cuando profesor y estudiantes discuten tareas durante el desarrollo de la lección (Toro y Castro, 2020).

Según Toro (2020) esta consideración respecto a la argumentación busca, de un lado, atender ciertas interacciones en la clase de matemáticas, donde el profesor y sus estudiantes discuten durante el desarrollo de una lección con respecto a una determinada tarea; y de otro lado, aislarse de la postura clásica, en donde la argumentación es asumida como un conjunto de premisas y conclusiones formuladas con la ayuda de símbolos formales cuyo significado se establece de antemano, para acercarse a una postura cercana al lenguaje y la comunicación.

Aunque la literatura sobre la Argumentación en Educación Matemática es amplia, no es tan común que los autores centren su atención en los primeros grados de escolaridad. No obstante, se destacan trabajos como los de Cornejo et al. (2021) y Krummheuer (2013), quienes serán retomados en el cuarto capítulo en donde se muestra de manera puntual cuáles de sus aportes serán tomados en esta investigación, aquí se hablará acerca de sus trabajos.

Para comenzar, en relación con el trabajo de Cornejo et al. (2021), ellos abordan algunas tareas que aportan al análisis y caracterización de la Argumentación en la Educación Matemática Infantil a través de un modelo aplicable para las matemáticas de las primeras edades denominado Situación Argumentativa (SA). Se revisa en este tipo de situaciones sus alcances, limitaciones y proyecciones. La situación argumentativa considera cinco componentes: el argumento, la interacción, la función de la argumentación, el carácter de la argumentación y la matemática.

El primero componente es el argumento (¿qué se argumenta? y ¿por qué?) el cual responde a lo que dicen y hacen los participantes. El segundo componente es el de la interacción (¿quiénes argumentan?) responde a quiénes participan en la argumentación considerando los papeles del profesor y estudiante, aquí se centra la atención en sólo dos de ellos: interacción grupal (profesor dirige, asumiendo por grupo la totalidad de estudiantes de la clase) e interacción individual (cuando un estudiante interactúa consigo mismo para resolver una tarea). Un tercer componente es la función de la argumentación (¿para qué se argumenta?) se refiere al significado, propósito y utilidad que tiene un argumento, se resaltan aquí cinco funciones: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. El cuarto componente es el carácter de la argumentación (¿cómo se argumenta?) lo cual responde al cómo argumentan los niños y niñas y se basa en las ideas de Krummheuer (2013), quien identifica dos tipos de argumentación en el aula de los niveles iniciales: diagramática y narrativa. El quinto y último componente es la matemática (¿sobre qué se argumenta?), se refiere al conocimiento matemático que está en juego en los argumentos de los estudiantes.

Como resultados de este estudio se aporta a un modelo para analizar la Educación Matemática Infantil que permite obtener descripciones de la argumentación. En relación con la situación argumentativa, se obtiene que es posible comprender aspectos de la argumentación que varían en el transcurso de las clases.

Por otro lado, Krummheuer (2013) desarrolla su trabajo con niños entre 3-10 años, el autor se interesa por investigar la relación entre la argumentación diagramática y la argumentación narrativa en el desarrollo del pensamiento matemático y lo explica a través de un marco conceptual denominado "Nicho Interaccional". Su teoría es desarrollada dentro del marco científico de la Educación Matemática, fundamentada empíricamente sobre la generación de pensamiento matemático desde una perspectiva socioconstructivista en la cual el aprendizaje es abordado como un proceso de negociación de significado.

En relación con la argumentación diagramática y narrativa, se tiene que la argumentación diagramática recurre al uso de diagramas (e.g. recursos materiales o pictóricos) que materializan los elementos que se ponen en juego en la conversación, de modo que se hacen tangibles y pueden ser manipulados por los participantes. Los diagramas pueden ser objetos tangibles o representaciones pictóricas. La manipulación de los diagramas muestra el proceso llevado a cabo para realizar una tarea y se constituye en el argumento justificativo. La argumentación narrativa requiere de una narración, a través de la que se establece una relación secuencial entre afirmaciones, donde unas funcionan como causas de otras. En el aula de clase, estas narraciones suelen referirse a secuencias de acciones realizadas para resolver un problema. La resolución de una tarea puede verse como una narración que funciona como un argumento en la que una secuencia de acciones corresponde con una secuencia de relaciones inferenciales.

En artículos anteriores el autor había reconstruido dos tipos de argumentación colectiva: la argumentación diagramática y la argumentación narrativa (Krummheuer, 1999, 2009). En este artículo tiene como intención aclarar la relación entre estos dos aspectos con respecto al desarrollo del pensamiento matemático, el estudio muestra que, al comparar los dos episodios mencionados anteriormente, cuando se combinan elementos diagramáticos y narrativos se logra llegar a algunos argumentos más convincentes.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

"Las matemáticas son el alfabeto con el que Dios escribió el universo".

Galileo Galilei

A continuación, se expone el recorrido metodológico de esta investigación que se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo de corte interpretativo (Hernández et al., 2014), porque se reconoce la importancia que tiene el contexto y los participantes en la investigación, estudiantes de cuarto grado en la clase de matemáticas. Además del trabajo del investigador, quien, a partir de las percepciones, creencias y significados proporcionados por los participantes, cumple la función de comprender e interpretar la realidad en el momento mismo en el que sucede.

Este trabajo corresponde a una investigación basada en diseño (Molina et al., 2011) en particular a un experimento de enseñanza, el cual se compone de tres fases: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. Estas fases implican el diseño de las tareas, su implementación y el respectivo análisis en un proceso cíclico, es decir, luego del análisis de la primera tarea se propone la siguiente tarea e inicia nuevamente el ciclo, con algunos cambios o ajustes en el diseño de la tarea de ser necesario.

El desarrollo de la primera y segunda fase del experimento tuvo lugar durante los encuentros semanales de los cursos del Seminario de la Práctica Pedagógica II y III. La primera fase se presenta en dos momentos, en donde se diseñan las tareas para proponerle a los estudiantes, y posteriormente, llevarlas al Seminario de la Práctica Pedagógica para discutirlas en conjunto con el profesor y los compañeros del curso con el fin de identificar los aspectos positivos y a mejorar. De acuerdo con las observaciones realizadas al diseño inicial, de ser necesario, se reorganizaban las tareas para llegar a la segunda fase de experimentación, en donde las tareas se aplicaban con los estudiantes. Luego de la aplicación de las tareas, se recibe una retroalimentación en los mismos encuentros del Seminario de la Práctica Pedagógica. En el diseño de las siguientes tareas del experimento se repetía este ciclo: análisis del diseño, reorganización (de ser necesario) y retroalimentación. La tercera y última fase corresponde al capítulo 4 en donde se detalla el análisis retrospectivo de acuerdo con los registros tomados.

3.1. Descripción de los protagonistas de la investigación

De acuerdo con los semestres en que se desarrolló la Práctica Pedagógica, los protagonistas que forman parte de este estudio fueron estudiantes de la Institución Educativa Compartir de los grupos 3°1 y 3°2 en el primer semestre de la práctica y 4°1 y 4°2 durante el segundo y tercer semestre de la práctica, en otras palabras, estudiantes de tercer grado en el 2020 promovidos a cuarto grado en el 2021. Teniendo en cuenta algunas particularidades como los cambios de institución o estudiantes que no fueron promovidos de grado, se podría decir que se trabajó con el mismo grupo de estudiantes.

El trabajo con los estudiantes fue desarrollado a partir del semillero de matemáticas el cuál fue creado como un espacio complementario, por tal razón, la inscripción y permanencia de los estudiantes fue voluntaria. De acuerdo con los temas que ellos veían en las clases de matemáticas se iban proponiendo las tareas para cada encuentro. En un comienzo se inscribieron 30 estudiantes de cuarto (4°1 y 4°2), pero a medida que avanzaban los encuentros el número de participantes disminuyó, de esta forma, en cada encuentro solían participar entre 6 y 8 estudiantes. Se desconocen los motivos por los que algunos estudiantes desertaron del semillero, podría ser algo asociado con el regreso a la presencialidad u otras razones de índole personal.

Para efectos de este trabajo, sólo serán considerados como protagonistas de la investigación a los estudiantes que fueron más constantes durante todo el proceso, estos son: Luciana, Christian, Sofía, Jerónimo, Maximiliano y Carlos (se utilizan seudónimos para proteger la identidad de los participantes). Se resalta que son estudiantes con un buen desempeño académico, ordenados y participativos, aportaban sus ideas desde su saber y apreciación, se destaca en ellos la curiosidad por aprender y facilidad para el aprendizaje. En cuanto a la participación, Luciana, Sofía y Carlos, solían ser más reservados, mientras que Christian, Jerónimo y Maximiliano eran más recurrentes en sus intervenciones y agregaban por momentos algunos comentarios cómicos que armonizaban los encuentros del semillero.

3.2 Descripción de las tareas realizadas

A continuación, se comenta acerca de las tareas realizadas con los estudiantes de cuarto grado inscritos en el semillero de matemáticas. El trabajo se desarrolló la mayor parte del tiempo a través de encuentros sincrónicos que eran realizados una vez a la semana los martes entre las 5:15 pm y 6:15 pm a través de la plataforma Meet. En cada encuentro se realizaba una tarea en un tiempo estimado de una hora, de ser necesario se extendía el tiempo sin superar los veinte minutos. El semillero también tuvo dos encuentros presenciales de dos horas cada uno.

En la Tabla 1 se presentan los diferentes encuentros realizados, las fechas y las tareas llevadas a cabo.

Tabla 1
Cronograma de tareas realizadas

Encuentro	**Fecha**	**Tareas**
1	Agosto 24 de 2020	Dibujo de un robot. Tarea 1. Se les propuso a los estudiantes dibujar un robot a partir de cuadriláteros (cuadrados y rectángulos) con el fin de que ellos identificaran qué tienen en común y cuáles son las diferencias entre esas figuras. Ellos podían recurrir a la regla o al conteo de las cuadrículas para realizar el dibujo teniendo presente el trazo de líneas horizontales y verticales.
2	Agosto 31 de 2020	Diagonal del rectángulo. Tarea 2. Retomando la Tarea 1 se les propuso a los estudiantes que sólo dibujaran la cabeza del robot, ellos podían recurrir a la regla o al conteo de las cuadrículas para realizar el dibujo teniendo presente el trazo de líneas horizontales, verticales y diagonales. Con esta tarea se buscó que el estudiante caracterizara el rectángulo identificando qué ocurre con sus lados y ángulos al trazar una diagonal.
3	Septiembre 07 de 2021	Uso del transportador. Tarea 3. En relación con la Tarea 2, resultó permitente retomar el tema de estimación de ángulos y uso del transportador para avanzar hacia la identificación de figuras y su caracterización de acuerdo con sus lados y ángulos.
4	Septiembre 14 de 2021	Estimación de ángulos. Tarea 4. Aprovechando los recursos digitales se realiza un juego de memoria a través de la plataforma “Puzle.org” como repaso de la Tarea 3.

5	Septiembre 21 de 2021	Estimación de ángulos. Tarea 5. Se mostraron diferentes imágenes relacionadas a actividades y objetos reconocibles en el contexto cotidiano para que los estudiantes identificaran los ángulos allí formados, también se llevó una tarea en donde ellos asociaban una pelota a cada animal de acuerdo con el ángulo formado por ellos al abrir su boca. La tarea implicó estimación de ángulos, esta vez, sin el uso del transportador.
6	Septiembre 24 de 2021	Cuadriláteros medidos con cintas. Tarea 6. En esta actividad se utilizó icopor y chinches, presentando al estudiante un pequeño tablero con dos líneas cruzadas. Se les pidió recortar una figura (cuadrado) y al rotar esa figura identificaran qué ocurría con los lados y ángulos, dicha identificación la hacían midiendo con cintas y se podían apoyar desde el conteo de cuadrículas (cuántas cuadrículas mide la cinta). Con La intención de realizar comparación entre figuras, la tarea cerró con el uso de pitillos (ver figura 1) los estudiantes estimaron la medida de ellos y al mover los ángulos establecían semejanzas o diferencias entre el cuadrado y el rombo. Cabe señalar que la tarea ya había sido propuesta anteriormente, se hicieron algunos ajustes para traerla de nuevo.
7	Octubre 19 de 2021	Trapecios recortados. Tarea 7. Se les pidió a los niños que dibujaran tres triángulos: escaleno, isósceles, y rectángulo y que trazaran una línea, preferiblemente por la mitad de cada uno, de modo que al recortar cada figura formaran trapecios. La tarea abrió el tema para la identificación de otras figuras caracterizadas entre los cuadriláteros.
8	Octubre 26 de 2021	Trapecio isósceles. Tarea 8. De acuerdo con lo desarrollado en la Tarea 7 se buscó trabajar de una forma más directa el trapecio isósceles. La tarea inicia comparando trapecios al rotar una de las figuras y mostrarla de diferente tamaño. Luego, a través del doblado de papel se construyó un bote con forma de trapecio isósceles y se iba hablando acerca de las características de la figura.
9	Octubre 29 de 2021	Ángulos, lados y diagonales del rombo y romboide. Tarea 9. Se hizo comparación entre dos figuras (rombo y romboide) de acuerdo con sus ángulos, lados y diagonales. Se utilizó icopor y chinches para identificar lados y ángulos, llevando figuras recortadas y pegadas en tableros, y con el uso de hilo y pitillos ellos identificaban qué ocurre con las diagonales en cada figura.

10	Noviembre 02 de 2021	Asiático de papel. Tarea 10. En esta actividad se les pidió a los estudiantes que dibujaran y recortaran dos rectángulos y dos cuadrados dando la medida de cada figura, ya sea con el apoyo de la regla o el conteo de cuadrículas. o Una vez ellos obtuvieran los dos cuadrados, en uno de ellos dibujaría sus diagonales mientras que en el otro dibujaría sus ejes de simetría. o Una vez ellos obtuvieran los dos rectángulos en uno de ellos dibujaría sus diagonales mientras que en el otro dibujaría sus ejes de simetría. Doblando cada figura recortada por sus diagonales y ejes de simetría formaban la figura (con los cuadrados la cabeza y el cuerpo con los rectángulos).
11	Noviembre 09 de 2021	Figuras formadas a partir de líneas. Tarea 11. Con el propósito de establecer comparación entre figuras como el cuadrado y el rectángulo, se les pidió a los estudiantes que dibujaran líneas horizontales y verticales en forma de más “+” o “L” dándoles la medida de cada línea, dibujando así: o Un más (+) de la misma medida y de diferente medida. o Una L de la misma medida y de diferente medida. También se daban unas condiciones para cerrar cada figura. o Cerrar la L con dos líneas. o Cerrar el más con cuatro líneas.

Nota. Elaboración propia.

Se resalta que la participación de los estudiantes no fue similar en todos los encuentros, considerando que a través de ella se propicia un mejor acercamiento a la argumentación, no se tomarán todas las tareas detalladas en la Tabla 1. Quedan seleccionadas para el análisis las tareas 6, 9, 10 y 11, las cuáles se aproximan de una forma más directa al objeto de estudio de esta investigación.

3.3 Toma y registro de datos

Aquí se toman en cuenta tres aspectos: recolección, selección y análisis que se realiza de los datos. De un lado, la recolección de los datos se realizó alrededor del trabajo en el Semillero Kids en donde hubo encuentros virtuales (en su mayoría) y algunos presenciales. Los registros destacados en este estudio corresponden a las transcripciones, fotografías, escritos realizados por los estudiantes y diario de campo. Con el consentimiento de los estudiantes y sus familias se realizó la grabación de los encuentros para su posterior transcripción. Durante algunos encuentros se tomaron registros fotográficos. Los escritos fueron obtenidos a través de un grupo de WhatsApp en donde los estudiantes compartían imágenes de las tareas realizadas, otros corresponden a la devolución de las copias entregadas a los estudiantes para que ellos agregaran sus respuestas. Alrededor de cada encuentro se tomaban registros en el diario de campo.

Para el análisis de los datos se hace una triangulación, para ello se retoma a Cornejo et al. (2021) a través de la implementación del modelo Situación Argumentativa, pero dado el objeto de investigación se retoma la matemática, en particular, objetos matemáticos de naturaleza geométrica; y a Krummheuer (2013) respecto a la argumentación narrativa y diagramática. Es decir, se hará un análisis individual de los registros tomados en las tareas 6, 9, 10 y 11, atendiendo a estos dos autores y a la propia mirada como investigadora.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y RESULTADOS

"El libro del universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto".

Galileo Galilei

En este capítulo se presentan los análisis y resultados de esta investigación, es importante resaltar que para el análisis se tienen en cuenta los referentes teóricos citados en el segundo capítulo de este trabajo, se retoman de una manera especial los aportes de Cornejo et al. (2021) y Krummheuer (2013).

Alrededor de los encuentros del Semillero Kids quedaron varios registros de los trabajos realizados por los estudiantes y sus intervenciones, la participación fue tomada como un criterio para la selección de las tareas considerando que cumple una función central en esta investigación, por tal razón, se seleccionaron a las Tareas 6, 9, 10 y 11 en las cuáles se generaron discusiones e intervenciones más cercanas al objeto de estudio de este trabajo.

De forma inicial, se habla acerca de las matemáticas relacionadas en cada tarea (ver Tabla 2), luego, siguiendo el orden de las fechas en que fueron propuestas las tareas se detallan algunas intervenciones en particular, revisando en ellas la argumentación que por sus características puede ser diagramática o narrativa.

4.1 Matemáticas presentes en cada tarea

El objeto de estudio de este trabajo es de naturaleza geométrica y está relacionado al aprendizaje de los cuadriláteros, por tal razón, en cada encuentro se abordaron figuras geométricas relacionadas. Cabe resaltar que en la caracterización de figuras bidimensionales como el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide se abordan otros aspectos matemáticos relacionados a la estimación de ángulos e identificación de medidas de longitud a través de procesos de medición que se realizaban ya sea con el uso de la regla u otros elementos como cinta o el conteo de cuadrículas. La siguiente tabla muestra las matemáticas involucradas alrededor de las tareas realizadas:

Tabla 2
Matemáticas presentes en cada tarea

Encuentro	Modalidad	Fecha	Matemáticas (objetos de naturaleza geométrica)
6	Presencial	Septiembre 24 de 2021	Tarea 6: clasificación y comparación de figuras bidimensionales como el cuadrado y rombo, de acuerdo con sus lados, ángulos, vértices y características (al rotar la figura).
9	Presencial	Octubre 29 de 2021	Tarea 9: clasificación y comparación de figuras bidimensionales como el rombo y romboide, de acuerdo con sus lados, ángulos, vértices y características.
10	Virtual	Noviembre 02 de 2021	Tarea 10: clasificación y comparación de figuras bidimensionales como el cuadrado y rectángulo, de acuerdo con sus lados, ángulos, vértices y características.
11	Virtual	Noviembre 09 de 2021	Tarea 11: clasificación y comparación de figuras bidimensionales como el cuadrado y rectángulo, de acuerdo con sus ángulos, vértices y características.

Nota. Adaptación (MEN, 2006, p. 82).

Lo anterior hace referencia al modelo de Situación Argumentativa (SA) siguiendo los aportes de Cornejo et al. (2021), en particular, al quinto componente de las matemáticas que se retoma en esta investigación.

4.2 Intervención de los participantes

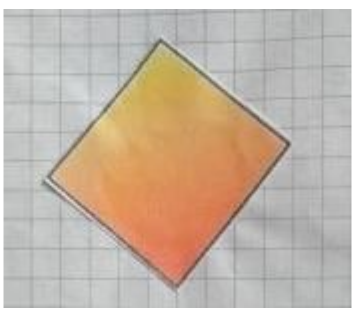
La intervención de los participantes da cuenta de los resultados obtenidos alrededor de cada una de las tareas realizadas. A continuación, se detallan las diferentes intervenciones por encuentro, cada una es desarrollada en dos momentos, en el primero de ellos se hará una descripción de las intervenciones por tarea mostrando algunas evidencias del trabajo realizado con los estudiantes. En el segundo momento se hace un análisis en relación con cada tarea atendiendo a los referentes teóricos tomados en esta investigación y a la propia mirada como investigadora.

4.2.1 Intervenciones relacionadas a la Tarea 6

Alrededor del encuentro se abordaron dos figuras correspondientes a los cuadriláteros (cuadrado y rombo). Las tareas fueron desarrolladas en dos momentos, el primero de ellos relacionado a la discusión acerca del nombre de una figura. En el segundo momento se realizó una tarea práctica acompañada de materiales como tableros de icopor y pitillos.

En un primer momento, se agregó con colbón un cuadrado sobre una hoja de block como se muestra en la Figura 2, luego se iba pasando la hoja por cada uno de los puestos de los estudiantes con el fin de que ellos identificaran la figura y escribieran su nombre. Al finalizar se hizo una socialización de las respuestas dadas.

Figura 2
Cuadrado sobre hoja de block



Nota: Fuente archivo personal de la autora

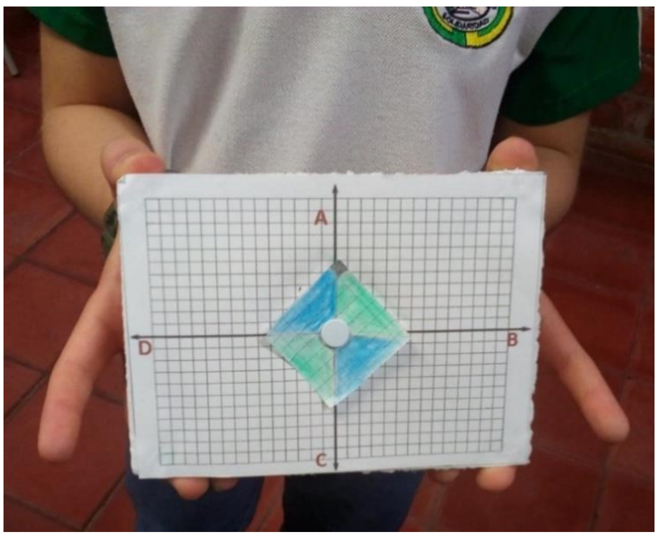
Algunas respuestas dadas por los estudiantes son las siguientes:
Jerónimo: “*creo que es un rombo*”.
Christián: “*puede ser más un rombo, pero también puede ser cuadrado*”.
Maximiliano: “*pienso que puede ser un rombo o un diamante*”.

Palabras como “*creo, puede, pienso…*” parten de las apreciaciones de cada estudiante e inician la discusión del encuentro. Alrededor de las respuestas dadas se desarrollan las tareas siguientes.

En un segundo momento, se le entregó a cada estudiante un tablero con dos líneas cruzadas señalando cada extremo con letras (A, B, C, D) acompañado de hojas cuadriculadas para que dibujaran una figura de cuatro lados iguales y la recortaran. Una vez recortada la figura los estudiantes debían pegarla del tablero, por esta razón identificaban el centro de la figura, lo hacían doblando las diagonales y las doblaban uniendo los ángulos que no compartían lados. La Figura 3 muestra la construcción realizada por Maximiliano, en ella, el doblez de las diagonales tiene diferente color. En la tarea se sugiere marcar uno de los ángulos a modo que los estudiantes lograran identificar el giro de la figura en relación con los extremos marcados por letras (fue sombreado de color gris), de tal modo que al girar la figura tomaran la medida de cada lado.

Figura 3

Construcción de la figura pegada en el tablero con chinches (Maximiliano)



Nota. Fuente archivo personal de la autora

Procurando variar un poco en los instrumentos de medición de uso habitual, la medición de los lados se realizó a través del uso de cinta y conteo de cuadrículas, es decir, cuántas cuadrículas mide la cinta recortada por cada lado. La Figura 4 muestra el instrumento de medición propuesto a los estudiantes (cinta de papel) y el rombo construido con pitillos para establecer comparaciones entre cuadriláteros como el cuadrado y el rombo.

Figura 4

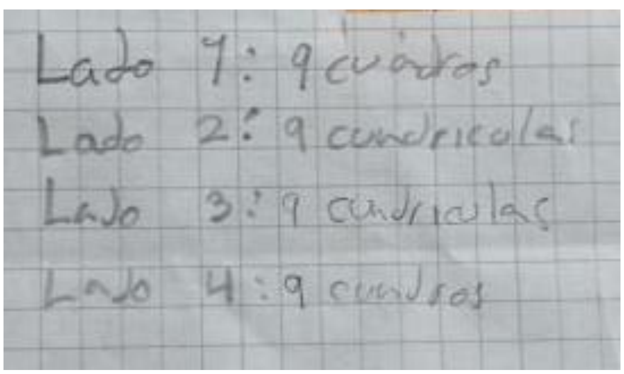
Materiales para el desarrollo del encuentro

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Las Figuras 5, 6, 7 muestran las diferentes formas en que los estudiantes realizaban la medición de los lados de la figura recortada. En la figura 5 se puede ver cómo Maximiliano le asigna a cada lado un número para después indicar su medida en cuadrículas.

Figura *5*

Medición de los lados a través del conteo de cuadrículas (Maximiliano)

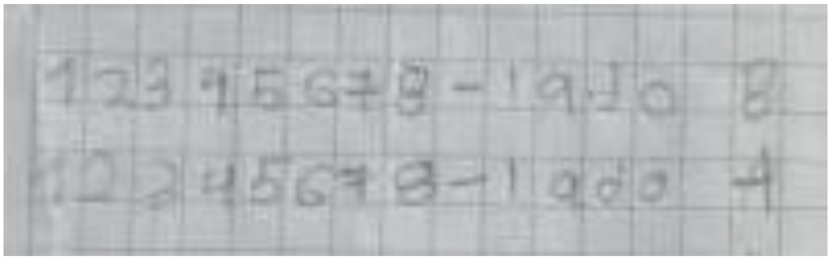


Nota. Fuente: archivo personal de la autora

La Figura 6 muestra la forma en que Carlos sigue una secuencia numérica representando cada cuadrícula a través de un número (noción de conteo), en lugar de nombrar los lados con números, lo hace con letras.

Figura 6

Medición de los lados a través del conteo de cuadrículas (Carlos)

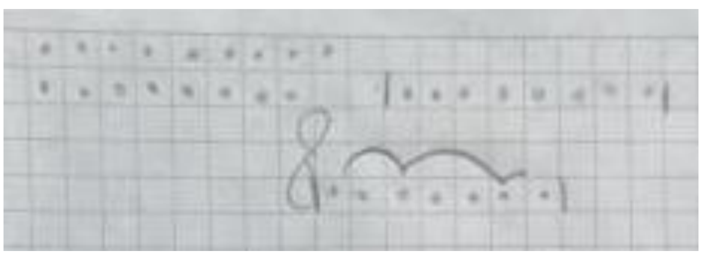


Nota. Fuente archivo personal de la autora

La Figura 7 muestra la forma en que Christián midiendo cada lado de la figura con cinta marca la medida de la cinta recortada a través de dos rayitas que indican el comienzo y el fin para después iniciar el conteo de puntos por cuadrícula, es así como estima la medida por cada lado.

Figura 7

Medición de los lados a través del conteo de cuadrículas (Christián)

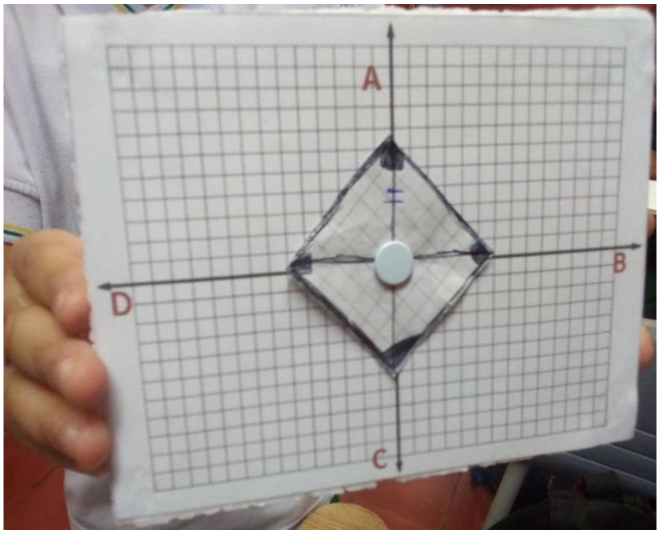


Nota. Fuente archivo personal de la autora

La Figura 8 muestra una de las dificultades presentadas por un estudiante quien marcó todos los ángulos de la figura, al girarla confundía los lados que iba a medir con cintas. Como la intención no era medir los lados de una forma estática el estudiante recurrió a marcar con dos rayitas su figura para identificar los giros.

Figura 8

Construcción de la figura pegada en el tablero con chinches (dificultad)

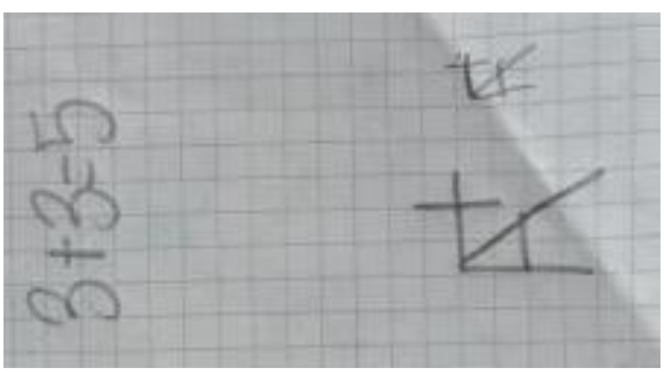


Nota. Fuente archivo personal de la autora

Al preguntarles a los estudiantes acerca de la figura que estaban midiendo, las respuestas fueron divididas, algunos consideraban que se trataba de un rombo, otros de un cuadrado. Alrededor de las discusiones que se realizaban en el encuentro, después de hacer la medición de los lados, Christián afirmó que la figura es un cuadrado y que podía construirlo conociendo tan sólo dos de sus lados *"como formando una L"* pero al trazar la diagonal su medida sería diferente a esos lados porque la suma de los lados daría una cuadrícula menos. La Figura 9 muestra la ilustración y suma de los dos lados realizada por el estudiante.

Figura 9

Construcción de un cuadrado al conocer dos de sus lados y su diagonal (Christián)



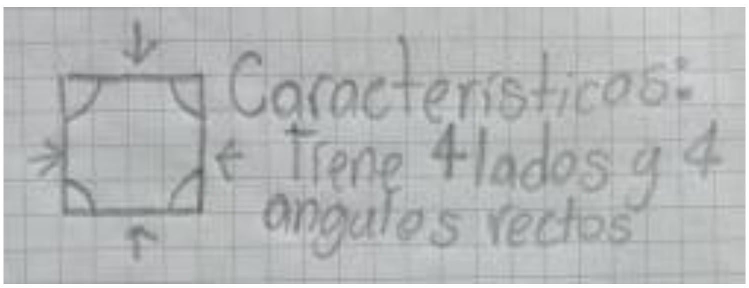
Nota. Fuente archivo personal de la autora

Continuando la discusión acerca del nombre de la figura medida, se les pide a los estudiantes que identifiquen características de las figuras, para luego identificar las semejanzas o diferencias entre el cuadrado y el rombo, la tarea se apoya con el uso de pitillos unidos por chinches (como se mostró en la Figura 4).

En las Figuras 10 y 11 se muestra cómo los estudiantes comienzan a caracterizar figuras como el cuadrado y el rombo para luego establecer comparaciones entre ellas.

Figura 10

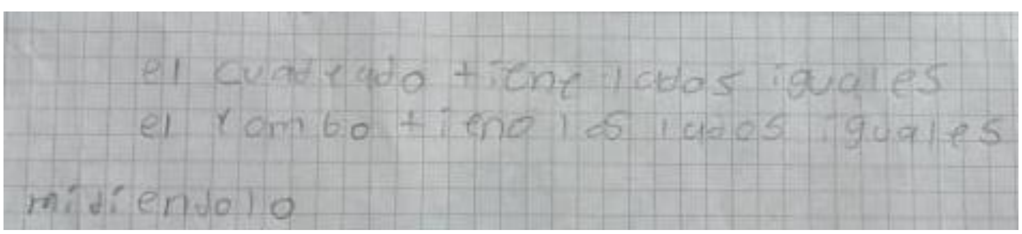
Características del cuadrado (Christián)



Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura *11*

Comparación entre las características del cuadrado y el rombo (Jerónimo)

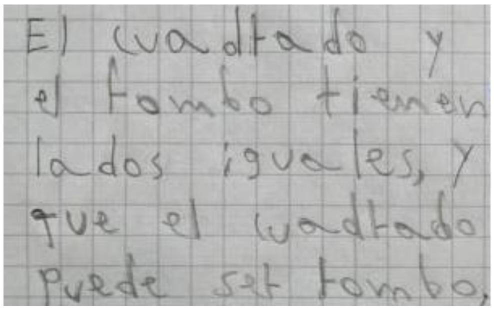


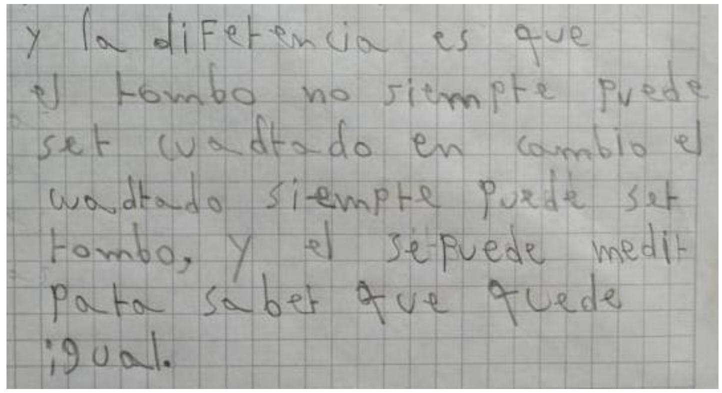
Nota. Fuente archivo personal de la autora

El uso de pitillos muestra la variación de los ángulos al mismo tiempo en que permite ver que los lados no varían, lo cual posibilita que los estudiantes identifiquen a través de ellos las semejanzas o diferencias entre figuras como el cuadrado y el rombo. La Figura 12 muestra una de las respuestas dada por Maximiliano en el momento de cierre de la tarea.

Figura 12

Diferencias entre el cuadrado y el rombo (Maximiliano)





Nota. Fuente archivo personal de la autora

Análisis de las intervenciones relacionadas a la Tarea 6

Se puede ver a través de la aplicación de las tareas realizadas que los estudiantes combinan elementos de la argumentación diagramática y la argumentación narrativa, es decir, las diferentes representaciones gráficas se complementan con narraciones o las narraciones con las representaciones gráficas.

En las Figuras 5, 6, 7 se pueden identificar elementos de la argumentación diagramática, las figuras permiten ver las diferentes representaciones realizadas por los estudiantes para la solución de la tarea, en este caso, relacionada a medir los lados de la figura, los estudiantes realizaron dibujos y estaban en la capacidad de expresar con sus propias palabras el significado de ellos, lo cual da cuenta de sus apreciaciones y procesos desarrollados.

En la Figura 9 se puede ver cómo el estudiante, aunque no tiene claridad conceptual respecto a la medida de la diagonal de la figura, aporta una conjetura que inicia la caracterización de dicha figura al asumir que todos sus lados son iguales. Lo anterior se relaciona con el aprendizaje como proceso de negociación de significado.

En la Figura 12 se pueden ver elementos de la argumentación narrativa, el estudiante encuentra características por cada figura y elabora afirmaciones que den cuenta de las características identificadas para luego establecer comparación entre ambas figuras. Al finalizar, busca elaborar un párrafo que dé cuenta de su proceso, lo construye a través de la unión de las afirmaciones ya realizadas para cada figura. Por lo general, cuando el estudiante busca justificar los procesos que lleva a cabo en la solución de las tareas, recurre a la conjunción *"porque…"* para iniciar su explicación. En la figura se puede evidenciar cómo implícitamente se incluye esta conjunción cuando el estudiante afirma que es posible medir los lados de la figura para comprobar que son iguales, en otras palabras, los lados del cuadrado y el rombo son iguales *porque* al medirlos obtengo la misma medida en todos sus lados.

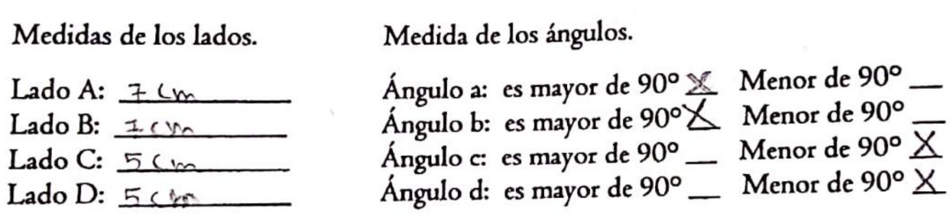
4.2.2 Intervenciones relacionadas a la Tarea 9

Alrededor del encuentro se abordaron dos figuras correspondientes a los cuadriláteros (rombo y romboide), se hizo entrega de una guía para los estudiantes acompañada de las dos figuras recortadas. Las tareas fueron desarrolladas en tres momentos, en el primero de ellos se establecen comparaciones entre ambas figuras a través de la estimación de las medidas de sus lados y ángulos. En el segundo y tercer momento, se realiza la comparación de figuras en relación con sus diagonales haciendo uso de materiales como pitillos e hilo.

Se retomó para la guía una de las tareas desarrolladas en el Semillero Kids en donde se procuraba un reconocimiento más natural e intuitivo en relación con la estimación de ángulos al propiciar en el estudiante la capacidad de observación de figuras para identificar en ellas ángulos mayores o menores de 90 grados. Aplicada a la guía presentada al estudiante, se pide la misma identificación. Al observar la figura ellos podían marcar una X o responder, según el caso, sí / no el ángulo formado era mayor o menor de 90°. En las Figuras 13 y 14 se muestran algunas respuestas dadas por los estudiantes, es posible identificar en ellas algunas dificultades que se siguen presentando en relación con la estimación de ángulos ya que confunden sus medidas.

Figura 13

Estimación de lados y ángulos del romboide (Luciana)


Medidas de los lados.

Lado A: 7 cm
Lado B: 7 cm
Lado C: 5 cm
Lado D: 5 cm

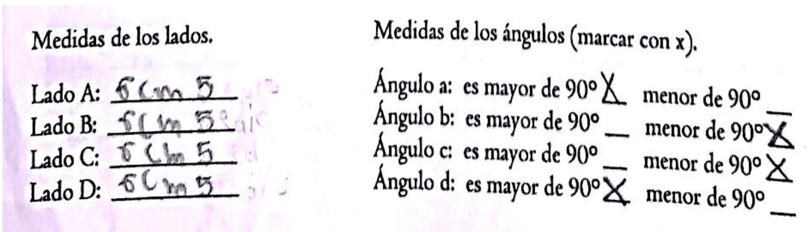
Medida de los ángulos.

Ángulo a: es mayor de 90° X Menor de 90° __
Ángulo b: es mayor de 90° X Menor de 90° __
Ángulo c: es mayor de 90° __ Menor de 90° X
Ángulo d: es mayor de 90° __ Menor de 90° X

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 14

Estimación de lados y ángulos del rombo (Maximiliano)


Medidas de los lados.

Lado A: 5Cm5

Lado B: 5Cm5

Lado C: 5Cm5

Lado D: 5Cm5

Medidas de los ángulos (marcar con x).

Ángulo a: es mayor de 90° X menor de 90° _

Ángulo b: es mayor de 90° _ menor de 90° X

Ángulo c: es mayor de 90° _ menor de 90° X

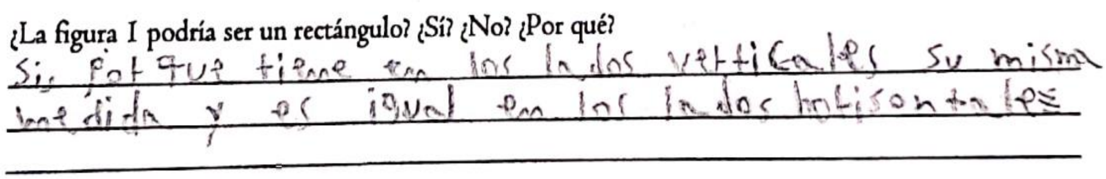
Ángulo d: es mayor de 90° X menor de 90° _

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Se le pregunta al estudiante de acuerdo con esas medidas tomadas si la figura podría tratarse de un rectángulo. En las Figuras 15 y 16 se observan algunas respuestas dadas por Maximiliano y Carlos.

Figura 15

Respuesta dada por Maximiliano

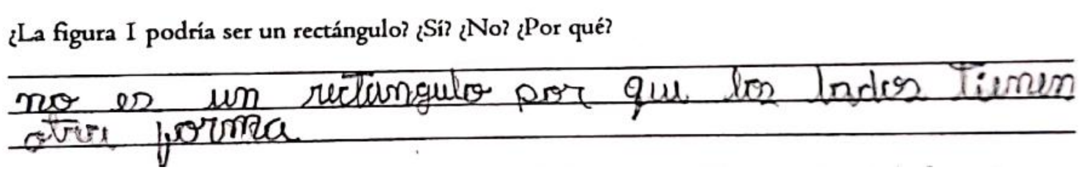

¿La figura I podría ser un rectángulo? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

Si, Por que tiene en los lados verticales su misma medida y es igual en los lados horisontales

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura *16*

Respuesta dada por Carlos


¿La figura I podría ser un rectángulo? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

no es un rectangulo por que los lados Tienen otra forma

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Para lograr un acuerdo o negociación entre las respuestas, se les pide a los estudiantes que recorten un rectángulo que tenga las mismas medidas que la figura dada, de modo que al sobreponerlo logren identificar diferencias entre el romboide y el rectángulo. Las Figuras 17 y 18 muestran algunas de las respuestas dadas por Maximiliano y Carlos.

Figura 17

Respuesta dada por Maximiliano

Dibuja un rectángulo que tenga de base 7,2 cm y de altura 5cm y ubícalo encima de la figura I.
¿Son iguales? ¿Sí? ¿no? ¿por qué?

Si y no pot que sobtan pattesitas de los dos, pot que si le quitamos a los dos esas partecitas setian practicamente iguales

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 18

Respuesta dada por Carlos

Dibuja un rectángulo que tenga de base 7,2 cm y de altura 5cm y ubícalo encima de la figura I.
¿Son iguales? ¿Sí? ¿no? ¿por qué?

no son iguales por los lados que son disparejos

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Continuando con la comparación entre el rectángulo y romboide, se formula otra pregunta. En las Figuras 19 y 20 se muestran las respuestas dadas por Maximiliano y Carlos.

Figura 19

Respuesta dada por Maximiliano

¿Encuentras diferencias entre los ángulos del rectángulo y los de la figura? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

En el tettangulo notmal y en la Figuta son la misma medida pero los dos estan disparejos

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 20

Respuesta dada por Carlos

¿Encuentras diferencias entre los ángulos del rectángulo y los de la figura? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

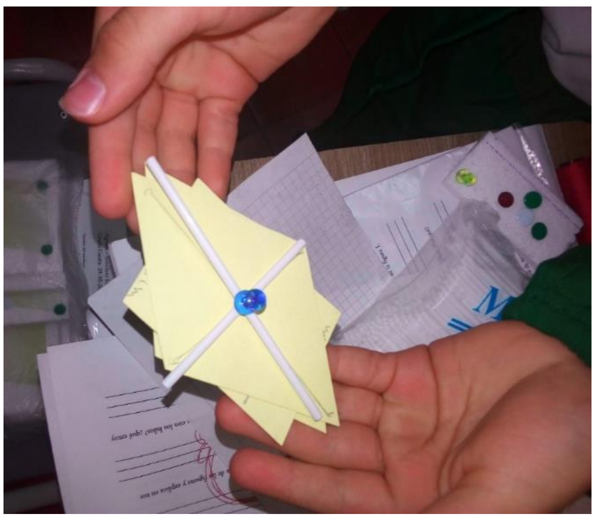
Sobran laditos porque el rectangulo los lados son iguales

Nota. Fuente archivo personal de la autora

En un segundo momento se hacen comparaciones de cada figura en relación con sus diagonales, apoyados en la estimación de medidas y el uso de pitillos es posible una visualización de los ángulos en movimiento. La Figura 21 muestra la construcción de las diagonales del rombo realizada por Luciana. Cabe resaltar que para la estimación de las medidas se recurría a la figura recortada, tomando como referencia a la unión de aquellos ángulos que no tienen lados en común, o, en otras palabras, ángulos que se encuentran uno frente al otro.

Figura 21

Construcción de las diagonales de un rombo



Nota. Fuente archivo personal de la autora

El tercer momento complementa el anterior y se realiza a través del uso de hilo para unir las diagonales de la figura. Se hizo entrega a cada estudiante de unos tableros de icopor que contenía las dos figuras que ya habían sido recortadas. En la Figuras 22 se muestra el proceso llevado por Maximiliano para la representación de las diagonales y en la Figura 23 se puede observar el producto final realizado por Luciana.

Figura 22
Unión de las diagonales (Maximiliano)

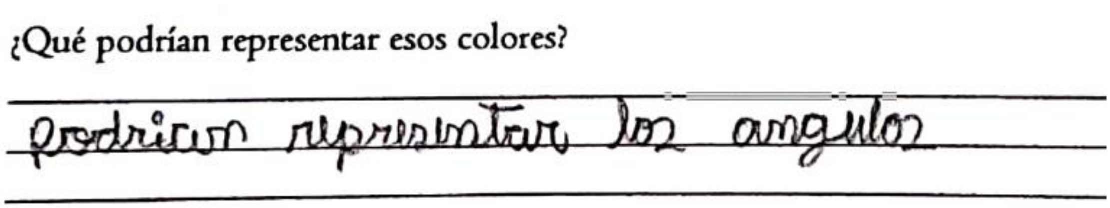
Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 23
Unión de las diagonales (Luciana)

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Se formulan algunas preguntas, la primera de ellas es relacionada a la intención de representar los ángulos con chinches de diferente color. En las Figuras 24, 25 y 26 se muestran algunas de las respuestas dadas por Carlos, Luciana y Maximiliano. Considerando la planeación de las tareas y la anticipación del profesor a las posibles preguntas o respuestas que se podrían dar alrededor de lo que se desarrolla en el aula, la respuesta dada en la Figura 26 se aproxima más a lo que se pretendía llegar a través de la pregunta realizada en la guía.

Figura 24
Respuesta dada por Carlos

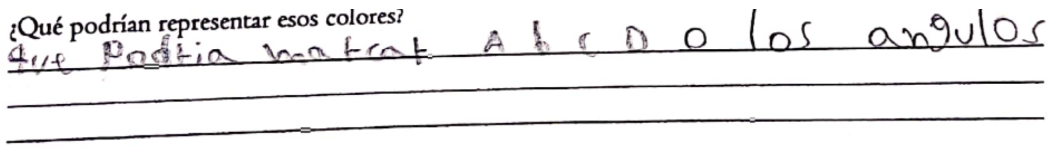

¿Qué podrían representar esos colores?

podrian representar los angulos

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 25

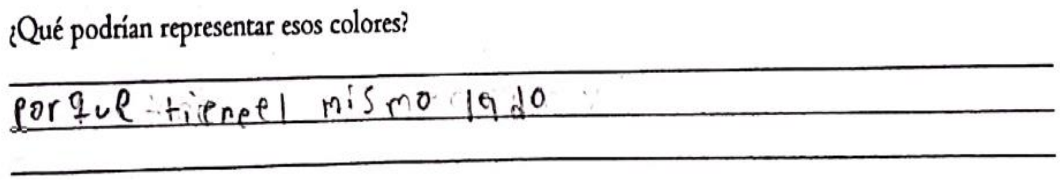
Respuesta dada por Luciana


¿Qué podrían representar esos colores?
que Podtia mostrar A b c D o los angulos

Nota. Fuente archivo personal de la autora

Figura 26

Respuesta dada por Maximiliano

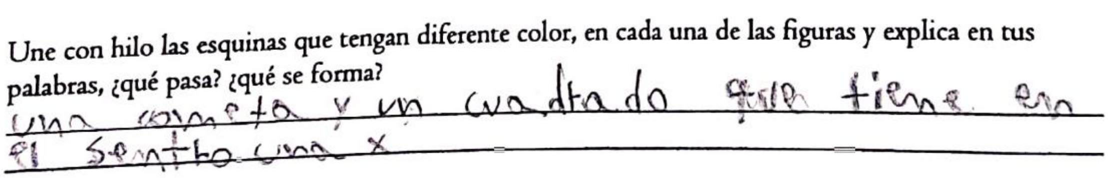

¿Qué podrían representar esos colores?
porque tienenel mismo lado

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

Al unir con hilo las esquinas de diferente color, se les pregunta a los estudiantes qué otras figuras se forman. En la Figura 27 se puede observar una dificultad relacionada con el nombre de la figura, al preguntarle al estudiante él sabe que se trata de un romboide y que es una figura visualmente parecida al rectángulo, pero desde la escritura la nombra como un cuadrado. Se resalta que el estudiante caracteriza a la figura por sus diagonales indicando que forman una X.

Figura 27

Respuesta dada por Maximiliano

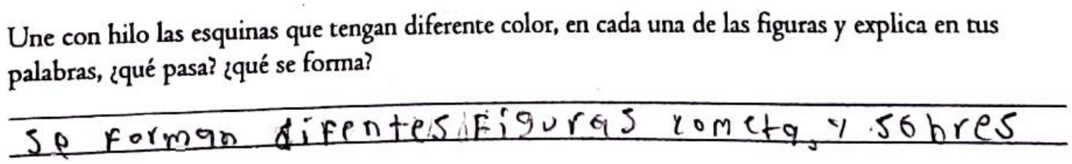

Une con hilo las esquinas que tengan diferente color, en cada una de las figuras y explica en tus palabras, ¿qué pasa? ¿qué se forma?
una cometa y un cuadrado que tiene en el sentro una x

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

La Figura 28 corresponde a la identificación realizada por Luciana la cual coincide con las apreciaciones de otros estudiantes quiénes estuvieron de acuerdo con la respuesta. Todos ellos realizan una identificación de figuras a partir de otras ya conocidas, lo hacen desde la observación de las líneas diagonales formadas en el rombo y romboide, es decir, cada figura es relacionada de acuerdo con sus diagonales, siguiendo este orden de ideas, el rombo para ellos es una figura parecida a una cometa, mientras que el romboide al formar sus diagonales es una figura que se asemeja a un sobre de carta.

Figura 28

Respuesta dada por Luciana



Une con hilo las esquinas que tengan diferente color, en cada una de las figuras y explica en tus palabras, ¿qué pasa? ¿qué se forma?

se forman difentes, Figuras cometa, y sobres

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

Análisis de las intervenciones relacionadas a la Tarea 9

La aplicación de las tareas realizadas permite una identificación de elementos de la argumentación narrativa a través de la escritura y explicación de aquello que escribieron los estudiantes. La argumentación diagramática se presenta cuando el estudiante hace uso de los materiales llevados para el desarrollo de los momentos que componen la tarea, estos a su vez se convierten en insumo para las representaciones gráficas que se hacen necesarias.

Las Figuras 15 y 16, hablan de unos argumentos narrativos en relación con los saberes previos de los estudiantes y su apreciación al observar la figura contenida en la guía. En ambas figuras se puede ver nuevamente el uso de la conjunción *"porque"* que inicia la explicación por parte del estudiante. Agregando que en la respuesta dada en la Figura 15, el estudiante señala que la figura tiene la misma medida en sus lados verticales y horizontales, implícitamente, se incluye el "*además*" a través de la conjunción "*y*".

Las Figuras17 y 18 muestran las respuestas dadas por el estudiante después de recortar una figura y sobreponerla con la figura dada a modo de comparación entre ellas, es así como se verificaba de qué figura se estaba tratando. Aquí se identifican otros elementos de la argumentación narrativa. La Figura 18 está más relacionada a la afirmación incluyendo la conjunción "*porque*" mientras que la figura 17 muestra la conjunción "*porque*" acompañada de una solución que forma parte del argumento y estaría relacionada a quitar "*partecitas*" de la figura para que sí pueda ser igual a la figura dada.

Las Figuras 19 y 20 muestran como los estudiantes desarrollan argumentación narrativa a través de la comparación de las figuras. El argumento de la Figura 19 parece ir más relacionado a corroborar y desarrollar la tarea, lo cual cumple con la intención formulada en la guía, mientras que la Figura 20 va más relacionada con los saberes previos ya que la conjunción *"porque"* va acompañada de una de las características del rectángulo, tener dos lados iguales.

Las Figuras 24, 25, y 26 muestran las respuestas dadas por los estudiantes, la pregunta incluye la palabra "podría" buscando que el estudiante responda de acuerdo con su apreciación. En efecto, los chinches representan ángulos, se puede ver en las respuestas dadas en las Figuras 24 y 25, además, los colores tienen por intención representar lados facilitando la identificación de los ángulos opuestos, es por esta razón que la Figura 26 se aproxima más a lo que se pretendía llegar a través de la pregunta formulada en la guía.

4.2.3 Intervenciones relacionadas a la Tarea 10

Alrededor del encuentro se abordaron dos figuras correspondientes a los cuadriláteros (cuadrado y rectángulo). Las tareas se desarrollan en un sólo momento en donde se realiza la construcción de la figura y al mismo tiempo se hacen intervenciones.

Para la elaboración del asiático de papel se le pide al estudiante que dibuje dos cuadrados y dos rectángulos. Pensando en las posibles dificultades que se podrían generar al doblar el papel se dieron las medidas para cada figura a modo de que no quedaran muy pequeñas o grandes. Los cuadrados fueron dibujados con una medida de 8 centímetros (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla) por cada lado, mientras que los rectángulos fueron dibujados con una medida de base de 12 centímetros (usando regla) ó 24 cuadrículas (sin usar regla) y una altura de 8 centímetros (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla).

Una vez dibujados los dos cuadrados y los dos rectángulos, los estudiantes debían trazar sus ejes de simetría y diagonales. Llevándolo a un lenguaje más natural para ellos, se habla de dibujar sobre cada figura una (X) o un más (+). Se dibujaba una (X) en un cuadrado, luego un más (+) en el otro cuadrado. En el mismo orden de ideas, se dibujaba una (X) en un rectángulo, luego un más (+) en el otro rectángulo. Considerando que la (X) se forma al unir ángulos que no tienen lados en común, mientras que el más (+) se forma al identificar la mitad de un lado horizontal y de un lado vertical. La guía realizada para el desarrollo de la tarea contiene los dibujos de lo que se pide realizar, acompañados de la explicación, Para comprender lo propuesto en la guía, basta con que el estudiante identifique líneas horizontales, verticales y diagonales.

Las intervenciones surgen a partir de la creación de la figura, respondiendo a una pregunta que abrió una discusión relacionada a la posibilidad de que una figura se pueda formar a partir de otra como formando un rompecabezas.

R1: Profesora: ¿Será posible?

R2: Sofía: *"Puede ser…".*

R3: Christián: *"Sí profe, un rectángulo se puede convertir en un cuadrado y un cuadrado en un triángulo".*

Se les pregunta a los estudiantes acerca de las diferencias entre las líneas que trazaron en el cuadrado:

R4: Maximiliano: *"Profe, pues yo veo que la primera tiene líneas diagonales".*

R5: Carlos: *"Profe, son triángulos".*

R6: Profesora: ¿Y cuándo doblo el cuadrado por la mitad que pasa?

R7: Carlos: *"Un rectángulo profe. De un cuadrado se forma un rectángulo".*

Se les pregunta a los estudiantes acerca de las diferencias entre las líneas que se trazaron en el rectángulo:

R8: Profesora: ¿Qué pasa cuando doblo un ladito de la X que formé en el rectángulo?

R9: Carlos: *"No es simétrica, profe".*

R10: Profesora: ¿Qué pasa cuando doblo el rectángulo en cruz?

R11: Maximiliano: *"Quedan iguales porque son dos lados iguales y tienen la misma medida".*

En las Figuras 29, 30, 31, y 32 se muestran algunos de los trabajos realizados por Sofía, Jerónimo, Carlos y Maximiliano, quienes agregaron color y diseños a la construcción de la figura formada a través del doblado de papel.

Figura 29

Asiático de papel (Sofía)

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

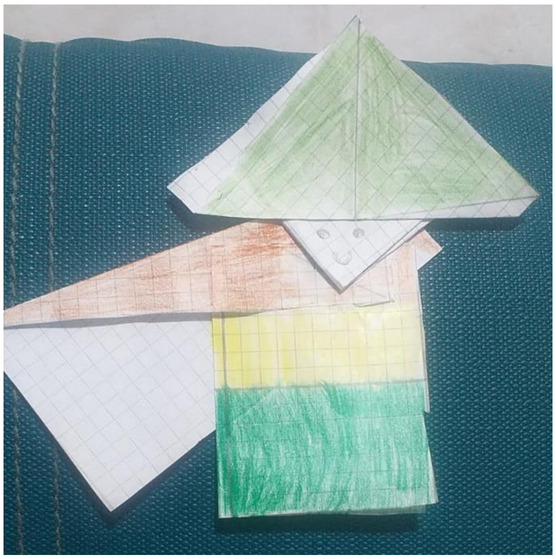
Figura 30

Asiático de papel (Jerónimo)

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

Figura 31

Asiático de papel (Carlos)



Nota.Fuente archivo personal de la autora

Figura 32

Asiático de papel (Maximiliano)

Nota.Fuente archivo personal de la autora

Análisis de las intervenciones relacionadas a la Tarea 10

A través de la tarea realizada se pueden identificar elementos de la argumentación narrativa a través del diálogo con los estudiantes, por esta razón, fue importante pensar en las preguntas formuladas al estudiante. La argumentación diagramática se hace presente a través de las construcciones realizadas alrededor de la tarea en donde las respuestas dadas de forma verbal corresponden con sus observaciones.

En R3 se puede identificar implícitamente la conjunción "*porque*" cuando el estudiante afirma que "*un rectángulo se puede convertir en un cuadrado y un cuadrado en un triángulo".* También se puede ver que su argumento se apoya en su participación de otros encuentros en los que se recurría al doblado de papel (saberes previos). En R7 ocurre algo similar, "*de un cuadrado se forma un rectángulo".* En otras palabras, los argumentos se elaboran a través de afirmaciones, algunas de ellas centradas en los saberes previos y se apoyan en la representación de la figura que se va formando a través del doblado de papel. Aquí la argumentación diagramática se presenta desde lo tangible.

Los estudiantes muestran nociones acerca de algunos conceptos matemáticos, se puede ver cómo en R4 el estudiante identifica líneas diagonales. En R9 otro de los estudiantes aborda el concepto de simetría asociado a aquello que no es simétrico al sobreponer figuras a través del doblado de papel y corroborar que no quedan iguales. En R11 aparecen nuevamente las conjunciones "*porque*" y "*y*" dentro de argumentos narrativos que afirman características relacionadas a la figura doblada por sus ejes de simetría.

4.2.4 Intervenciones relacionadas a la Tarea 11

Alrededor del encuentro se abordaron dos figuras correspondientes a los cuadriláteros (cuadrado y rectángulo). Las tareas se desarrollan en un sólo momento en donde se realiza la construcción de las figuras y al mismo tiempo se hacen intervenciones.

Las tareas van relacionadas a cerrar figuras. Cada figura parte de un bosquejo, los dos primeros se construyen a través de líneas que unidas forman la letra L, mientras que los otros dos, se realizan a través de líneas que al unirse forman un signo más (+). El estudiante podía recurrir al uso de la regla o al conteo de cuadrículas y para cada dibujo se daban las medidas, buscando así que, al cerrar las figuras con líneas horizontales, verticales o diagonales, se formaran cuadrados y rectángulos, para ello, se daban algunas condiciones en relación con la cantidad de líneas con las que se debía cerrar cada figura.

Con respecto a los cuadrados, se dibujaron dos. El primero de ellos se realizaba a partir de un bosquejo de dos líneas que unidas formaban una letra (L) de la misma medida horizontal y vertical, la condición para cerrar la figura era trazar dos líneas. El segundo cuadrado se formaba a partir del bosquejo de un signo más (+) de la misma medida horizontal y vertical, la condición para cerrar la figura era trazar cuatro líneas, al cerrarla con dos líneas horizontales y dos verticales se formaba el cuadrado, en cambio, cuando la figura era cerrada con cuatro líneas diagonales se formaba la misma figura (cuadrado) en una posición diferente, lo cual generaba discusiones interesantes en relación con el rombo, asumiendo que por definición el cuadrado también es un rombo.

Con respecto a los rectángulos, el primero de ellos se formaba a partir de un bosquejo de dos líneas que unidas formaban una letra (L) y tenían diferente medida horizontal y vertical, la condición para cerrar la figura era trazar dos líneas. El otro rectángulo se formaba a partir del bosquejo de un signo más (+) con diferente medida horizontal y vertical, la condición para cerrar la figura era trazar cuatro líneas que de ser horizontales y verticales formaban el rectángulo, en cambio, cuando la figura era cerrada con cuatro líneas diagonales se formaba un rombo.

Inicialmente, surgen algunas intervenciones relacionadas a la estimación de medidas y uso de la regla:

R1: Maximiliano: *“Empezando desde cero, ¿cierto?”.*

R2: Jerónimo: *"Profe, usted se equivocó en algo. Si usted quiere que le de 5 cuadrículas sería menos de eso, serían 6 cuadrículas para que le de los diez. ¡Ve!, serían 6 centímetros para que le de las 10 cuadrículas".*

R3: Profesora: Se le pregunta al estudiante si comenzó a medir desde cero o desde 1 y se le aclara que lo importante es que en ambos lados al formar la (L) del bosquejo sean iguales.

R4: Christián: *"Ah, entonces profe vamos a hacer un ángulo recto. O sea, puede ser, un lado de 10 cuadrículas y otro lado de 10 cuadrículas, o uno de 10 cuadrículas y otro de 5, ó uno de 5 y uno de 5".*

De ahí comienza la discusión en relación con la figura que se formaría al cerrar con dos líneas el bosquejo que ya había sido formado por una línea horizontal y otra vertical de la misma medida:

R5: Christián: *"¡Ah, no profe! Entonces es un cuadrado. ¡Tan fácil profe!".*

R6: Profesora: ¿Y por qué es un cuadrado?

R7: Maximiliano: *"Pues, porque tiene sus lados iguales".*

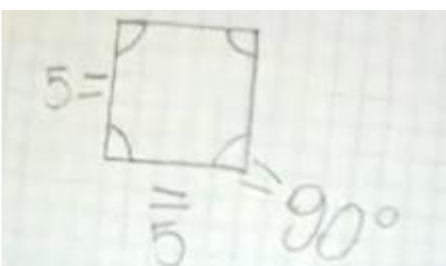
R8: Christián: *"Y porque tienen ángulos iguales".*

R9: Christián: *"Y tienen lados paralelos y también, ¿cómo se dice?… y también los lados, por ejemplo, el cuadrado tiene cuatro lados, y el número cuando es par, creo que si es par es como un ángulo muy exacto".*

En la Figura 33 se muestra la forma en que Christián con dos líneas cierra un cuadrado realizado a partir del bosquejo de una (L) de la misma medida, él agrega algunas de las características de la figura formada, caracterizándola como un cuadrado.

Figura 33

L de la misma medida cerrada con dos líneas (Christián)



Nota. Fuente archivo personal de la autora

Continuando con las discusiones, se les pregunta a los estudiantes cómo hicieron para cerrar la figura.

R10: *" Ah, pues profe, haciendo varios lados iguales".*

R11: Profesora: Y si yo quisiera cerrar la figura con dos líneas de mayor medida, ¿cómo sé que estoy formando un cuadrado?

R12: Maximiliano: *"Una línea más larga que 5 centímetros no sería un cuadrado, sería más bien una figura que ni siquiera podría existir".*

Se les pide a los estudiantes dibujar dos líneas como formando la letra (L) de diferente medida horizontal y vertical con la misma intención de cerrarla trazando sólo dos líneas

R13: Profesora: ¿Qué características tiene la figura que se forma al cerrar?

R14: Christián: *"Profe, tendrían diferente medida, pero tendrían los mismos ángulos".*

R15: Profesora: ¿Qué figura se está formando al cerrar?

R16: Christián: *"Rectángulo profe".*

R17: Profesora: *¿Y por qué saben ustedes que es un rectángulo?*

R18: Christián: *"Porque tienen dos pares de lados paralelos, o sea, el lado horizontal tiene un lado paralelo del otro horizontal, y un lado vertical tiene el otro lado paralelo vertical, pero tienen diferente medida, en cambio el cuadrado tiene la misma medida, entonces ahí podemos saber que el rectángulo tiene diferente medida, pero también dos lados paralelos".*

En la Figura 34 se muestra la figura cerrada por Sofía, de acuerdo con el bosquejo dado para realizar uno de los rectángulos.

Figura 34

L de la diferente medida cerrada con dos líneas (Sofía)

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

Se le pide al estudiante que trace dos líneas de la misma medida que se cruzan formando un signo (+).

R19: Profesora: al trazar las líneas del mismo tamaño, ¿qué tuvieron en cuenta para cruzarlas?

R20: Christián: *"Tuve en cuenta de cuál es la mitad del 6 para poder meter encima la otra, para que pudiera saber la mitad de todas, o como diría… como de todo el símbolo".*

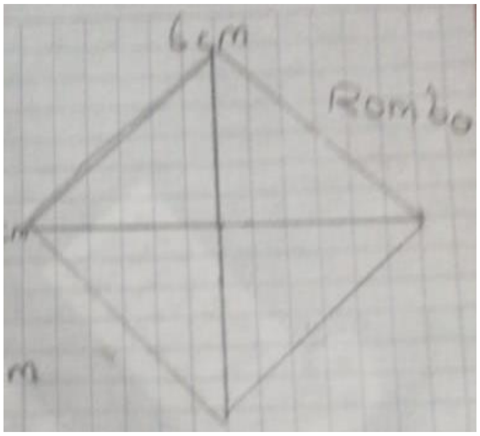
R21: Sofía: *"6 centímetros serían como lo que mostraban ahí, que eran 12 cuadrículas, entonces la mitad de 12 es 6… entonces yo contaba, yo aquí contaba 6 hacia abajo y hacia arriba y ya podía cortar".*

Se le pide al estudiante cerrar el más con cuatro líneas y se le pregunta acerca de la figura que se forma:

R22: Sofía: *"Rombo. Profe, con esas 4 líneas. Hago una línea, así, otra así, otra así y otra así. Las uno, así, diagonal*". Señala con sus dedos su dibujo. En la Figura No. 35 se muestra la forma en que Sofía cerró la figura.

Figura 35

Más (+) de las mismas medidas cerrado con cuatro líneas diagonales (Sofía)

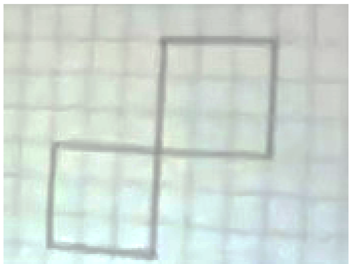


*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

R23: Christián: *"Profe, yo hice otra figura que no es un rombo, hice dos cuadrados juntos".* En la Figura No. 36 se muestra que Christián cumplió con la condición cerrando la figura de una forma diferente.

Figura 36

Más (+) de las mismas medidas cerrado con cuatro líneas (Christián)

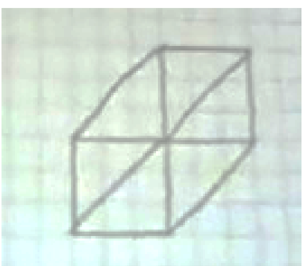


*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

R24: Christián: "*Profe, le añadí otras líneas y ahora es una figura 3D*". En la Figura 37 se muestran las líneas que Christián agregó a la Figura 36.

Figura 37

Más (+) de las mismas medidas cerrado con cuatro líneas 3D (Christián)



*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

En relación con la figura construida a partir del más (+) con sus lados horizontal y vertical de la misma medida, surge otra intervención:

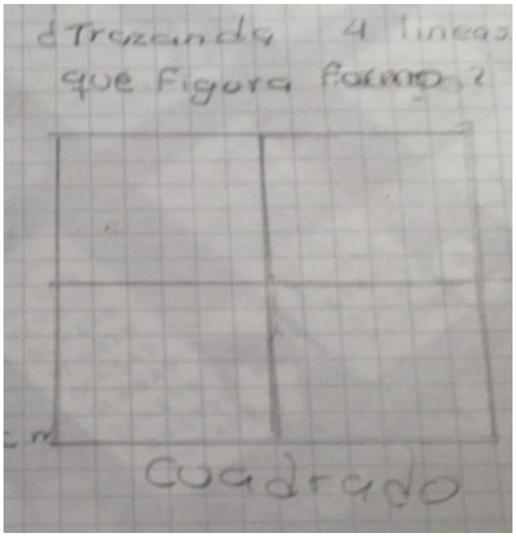
R25: Sofía: *"Profe, tengo una pregunta, ¿pueden ser líneas largas?*

R26: Profesora: Sí, pueden ser líneas largas.

R27: Sofía: *"Ah, entonces es un cuadrado como el que hicimos la vez pasada que tenía un más".*

En la Figura 38 se muestra la figura cerrada por Sofía.

Figura *38*
Más (+) de las mismas medidas cerrado con cuatro líneas (Sofía)



*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

R28: Christián: "*Profe, ¿qué tal éste".* Muestra otro dibujo. En la Figura 39 se muestra otra forma de cerrar la figura cumpliendo con la condición.

Figura 39
Más (+) de las mismas medidas cerrado con cuatro líneas (Christián)

*Nota.*Fuente archivo personal de la autora

Se le pide al estudiante que trace dos líneas de diferente medida que se cruzan formando un signo más (+), preguntándole acerca de las diferencias que hay con relación al más (+) con que se formó la figura anterior.

R29: Maximiliano: *"Da un signo más (+) que no es igual y si lo volteamos así, sería una x muy… ¿cómo es que eso se dice?… ¡muy incoherente! La x está muy mal formada porque la x debe tener lados iguales y esta tiene lados más largos que otros. También el más (+) es incoherente".*

R30: Profesora: *Con el más (+) de la segunda figura, ¿es posible formar un cuadrado?*

R31: Maximiliano: *"No, no se puede porque si dividiéramos ese 8… eh y ese 5 no quedaría bien el cuadrado porque el cuadrado siempre tiene lados iguales, aparte de que no se le pueden sumar dos partes, así que no, pero si se le sumaran, sí sería capaz".*

R32: profesora: *¿cómo quedaría la primera figura en comparación con la segunda?*

R33: Maximiliano: *"En la primera quedaría un cuadrado y en la segunda un rectángulo".*

Análisis de las intervenciones relacionadas a la Tarea 11

En la tarea realizada se identifican elementos de la argumentación narrativa a través del diálogo con los estudiantes. La argumentación diagramática se presenta alrededor de las construcciones realizadas.

En R4 se puede ver alrededor de la afirmación dada por un estudiante que aparecen conectores como "*entonces*" relacionando las posibles medidas que pueden tener los lados que forman ángulos de 90 grados a modo de comprender lo que se va a hacer en un primer momento. Luego, en R5 realiza otra afirmación en la que nombra la figura como un cuadrado y el R8 y R9 realiza afirmaciones caracterizando la figura, dando así cuenta de sus saberes previos y creencias respecto a los ángulos que componen la figura asumiendo que un ángulo par puede indicar un ángulo de mayor exactitud. La Figura 33 muestra cómo el estudiante elabora el dibujo de la figura con el que logra representar su respuesta. Se puede ver aquí cómo la argumentación diagramática y narrativa se combinan para complementar el argumento.

En R10 se puede ver un argumento de tipo narrativo relacionado con la solución de la tarea que implica la construcción del primer cuadrado. El estudiante habla acerca de cómo cerró la figura haciendo varios lados iguales, luego en R12 elabora otra afirmación en la que no estima esa posibilidad de cerrar la figura con líneas más largas. Aquí se puede ver una secuencia corta de afirmaciones que son acompañadas por una conclusión relacionada a la no existencia de la figura. En otras palabras, la figura es cerrada con lados iguales y si tengo lados diferentes no existe.

En R14 se identifican argumentos narrativos relacionados con la solución de la tarea que implica la construcción del rectángulo. El estudiante comienza por una afirmación para luego en R16 indicar de qué figura se trata. En R18 construye un argumento a partir de sus afirmaciones hablando acerca de las semejanzas o diferencias entre el cuadrado y el rectángulo. Su intervención da cuenta de algunos saberes previos que constituyen parte de su explicación. En R20 se muestra el proceso llevado a cabo por uno de los estudiantes para dibujar el bosquejo de dos líneas de la misma medida que se cortan. Aquí los argumentos narrativos son afirmaciones que dan cuenta de las explicaciones dadas por el estudiante para la solución de la tarea, R20 y R21 muestran diferentes procesos.

En R22 se observa de una forma más precisa la combinación entre argumentación diagramática y narrativa, la estudiante a partir de su bosquejo explica una forma de cerrar la figura. En R24 se muestra que a través de la representación hay una noción de lo que es visualmente una figura en 3D. A través de las preguntas realizadas, el estudiante también logra resolver la tarea, se puede ver en R25, la pregunta ayuda a elaborar el argumento respetando las reglas del juego (cerrar la figura usando cuatro líneas). En R27 aparece nuevamente el conector "*entonces*" una afirmación que relaciona el trabajo realizado en uno de los encuentros anteriores.

En relación con el más (+) formado por líneas de diferente tamaño, se puede ver en R29 una afirmación que da cuenta de la representación que tiene el estudiante de cómo siempre debería ir dibujado un (+) o una (X), al afirmar que sus lados siempre son iguales. El estudiante parte de esta afirmación para indicar en R31 que una figura con lados diferentes no formaría un cuadrado, lo hace pensando en la división de las mitades en que se construye el cuadrado formado por dos líneas del mismo tamaño. Y, siguiendo ese orden de ideas, en R33 da una conclusión con base en sus afirmaciones anteriores señalando que de las figuras formadas por un más, la primera figura es un cuadrado mientras que la segunda es un rectángulo. Aquí es posible ver una secuencia de afirmaciones para llegar a una conclusión, lo cual permite identificar argumentos narrativos que se apoyan de representaciones visuales como el bosquejo del que se forma la figura.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

De acuerdo con el objetivo planteado en esta investigación, se resalta que fue posible favorecer el aprendizaje de los cuadriláteros a través de tareas que promueven la argumentación. Esta afirmación se sustenta en los resultados obtenidos en donde se identifican elementos de la argumentación diagramática y narrativa que dan cuenta de aprendizajes obtenidos en procesos de negociación de significado.

La metodología de los experimentos de enseñanza también aportó en el cumplimiento del objetivo porque permitían el diseño y revisión de las tareas que fueron intencionadas con el propósito de promover la argumentación en el aula de clases. Durante el Seminario de la Práctica Pedagógica se hacía revisión las tareas antes, durante, y después de aplicarlas, el espacio aportó a la reflexión y puesta en marcha de la propuesta de trabajo descrita en el tercer capítulo.

Considerando las notables diferencias que hay entre los encuentros virtuales y presenciales, el diseño de las tareas incluía pensar el contexto en que serían aplicadas (sincrónico/presencial). Cabe señalar que el contexto de la virtualidad generado a causa de la pandemia mostró ciertas restricciones en cuanto al manejo de los tiempos, tareas propuestas y uso de materiales, en el trabajo fueron consideradas estas dificultades con el ánimo de compartir tareas de interés para los estudiantes y procurar un buen proceso durante el semillero.

De los resultados obtenidos en la implementación de las tareas, se evidencia que la argumentación diagramática y la argumentación narrativa están presentes en la mayoría de los encuentros descritos por tarea, aunque cada una tiene características diferentes, cumplen un mismo propósito en la negociación de significados: mostrar el proceso del estudiante dando cuenta de sus aprendizajes y apreciaciones. La argumentación diagramática y narrativa, aunque bien, se caracterizan por separado, en su desarrollo son conjuntas, en otras palabras, hay una combinación entre ellas que permite ir de lo diagramático hacia lo narrativo o de lo narrativo hacia lo diagramático, y de acuerdo al caso, una funciona como complemento de la otra al momento de concretar un argumento más convincente que por razones asociadas con el grado de escolaridad y las edades no sigue ciertos rigores en el lenguaje académico, pero expresa y da cuenta de los aprendizajes obtenidos y los procesos desarrollados.

La implementación de las tareas mostró que las representaciones gráficas toman importancia al momento de resolver una tarea, por esta razón, el dibujo pasa a ser un recurso del estudiante porque a través de ilustraciones bosqueja su interpretación. El material tangible llevado a los encuentros forma parte de las representaciones pictóricas de las que se apoya el estudiante, de la misma forma, las producciones realizadas por ellos a través del doblado de papel.

Por otra parte, el diálogo, y la escritura en que se materializa la oralidad, dan cuenta de algunos elementos de tipo narrativo, en donde la argumentación inicia con afirmaciones cortas que unidas como serie de secuencias componen una narrativa que explica o justifica el proceso desarrollado por el estudiante. Las afirmaciones en su estructura contienen conectores como *y* o *entonces*, y conjunciones como *porque*, que en ocasiones parecen estar implícitos. Dichas afirmaciones permiten identificar: creencias, saberes previos o seguimiento estricto de las tareas propuestas alrededor de las guías realizadas.

Podría afirmarse entonces que la combinación entre argumentación diagramática y argumentación narrativa hace que el estudiante nombre figuras, las caracterice y dibuje. No debe cumplirse estrictamente este orden.

En cuanto a la argumentación en el aula de clases, se evidencia que su inicio se da a través de ciertas conjeturas que pueden partir de los saberes previos o creencias, proponer la solución también forma parte del proceso argumentativo.

Respecto al aprendizaje de los cuadriláteros, la investigación realizada deja ver dos aspectos importantes en los que se podría trabajar, el primero de ellos está relacionado a los saberes previos del estudiante y el segundo a las propuestas de trabajo. En el primer aspecto se resalta que cuando el estudiante está en la capacidad de hacer estimación de medidas de longitud y amplitud, se posibilita la caracterización de cuadriláteros considerando sus lados y ángulos para luego establecer comparación entre figuras encontrando semejanzas y diferencias. Con base en lo anterior, es posible avanzar hacia un reconocimiento de figuras a parir de otras, como formando un rompecabezas, identificando en ellas diagonales y ejes de simetría, el segundo aspecto va relacionado a generar propuestas de trabajo más convenientes en las que se incorpore un lenguaje natural y cercano al estudiante.

En cuanto a los materiales, se recomienda fomentar lo visual a través de objetos tangibles o manipulables ya que despiertan el interés del estudiante y contribuyen al aprendizaje. También es importante revisar las preguntas formuladas alrededor de las tareas propuestas y anticiparse a aquellas que se podrían generar en la práctica, considerando que las preguntas toman un nivel de importancia y sirven de apoyo, no sólo para la interpretación y desarrollo de las tareas, también porque a través de ellas es como se promueve la argumentación y participación en el aula de clases.

Finalizando, cabe señalar que la fundamentación teórica de esta investigación está relacionada con el aprendizaje, por lo tanto, el público objetivo son los estudiantes. De tomar otro marco teórico se podrían implementar aspectos relacionados con la enseñanza desde un enfoque que se oriente a la formación de profesores, y de ampliarlo, revisar la conexión entre ambas líneas.

Además del aporte teórico y práctico de esta investigación, se resalta la oportunidad de poderse cualificar como profesora e investigadora, este trabajo permitió una aproximación a la escuela y a algunas realidades que la componen aportando a un reconocimiento de las singularidades en el aprendizaje entre una variedad de gustos e intereses que presentan los estudiantes en el acercamiento con la geometría.

Se espera que esta investigación también aporte a la reflexión de otros lectores que se movilicen en el campo académico, investigativo u otros. Algunas preguntas que abrirían espacio a otras investigaciones serían: ¿cómo debería ser el diseño de tareas que promueven la argumentación?, ¿bajo qué condiciones de posibilidad es viable desarrollar la argumentación en contextos virtuales u otros contextos?, ¿qué otras líneas de formación se identifican con la argumentación en Educación Matemática y cómo relacionarlas?, ¿se podría lograr una identificación menos diferenciada entre geometría, matemáticas y estadística a través de la argumentación?

CAPÍTULO 6: RECOMENDACIONES

De acuerdo con las directrices propuestas desde el Ministerio de Educación Nacional en los Lineamientos Curriculares, se recomienda abordar la geometría desde los primeros grados de escolaridad para así propiciar el desarrollo del pensamiento espacial evitando un reconocimiento por separado de este pensamiento con respecto a otros pensamientos matemáticos (MEN, 1998).

Promover la argumentación en el aula de clases crea posibilidades para avanzar hacia el aprendizaje de la geometría, se podría implementar desde los primeros grados de escolaridad en la medida en que el estudiante participa y construye conjuntamente significados. Al argumentar el estudiante expresa e interpreta de manera verbal, escrita o a través de la manipulación de objetos tangibles, sus saberes, ideas o apreciaciones, por esta razón, es necesario considerar en el diseño e implementación de las tareas los siguientes aspectos:

- Tener presente que en algún momento habrá una formalización de los conceptos matemáticos, se estima conveniente desarrollar las temáticas haciendo uso de un lenguaje más natural o cercano para el estudiante.
- Evitar preguntas cerradas que encasillen al estudiante a una sola respuesta, esto no significa que no se puedan proponer este tipo de preguntas, es revisar la intención que se tenga frente a ellas al proponerlas. Preguntas de este tipo se podrían combinar con preguntas abiertas.
- Hacer uso de material tangible o generar la posibilidad al estudiante de hacer sus propias construcciones.
- Identificar el contexto y los participantes para así generar propuestas cercanas al interés del estudiante, que propicien la interacción en el aula, considerando que hay diferentes formas de aprendizaje, por lo tanto, es pertinente proponerle al estudiante diferentes opciones en la solución de tareas: dibujo, escritura, diálogo, trabajo con material concreto, etc.

Referencias

Ayalon, M. y Even, R. (2016). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 575–601. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9584-3

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Revista Educación Matemática*, 29(2), 9-35. 10.24844/EM2902.01

Cornejo-Morales, C. E., Goizueta, M. y Alsina, Á. (2021). La situación argumentativa: Un modelo para analizar la Argumentación en Educación Matemática Infantil. PNA, 15(3), 159-185. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.16048

De Castro, C. (2015). Romper para conocer: Procesos de composición y descomposición en la geometría infantil. Aula de Infantil, 79, 18-21

Decreto 1075 de 2015 [Departamento Administrativo de la Función Pública]. Por medio del cual se expide el Decreto Único Reglamentario del Sector Educación. Recuperado de: https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma_pdf.php?i=77913

Fripp, A. y Varela, C. (2012). Pensar geométricamente. *Actas del 4° Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguay. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/17656/1/Fripp2012PensarGeometricamente.pdf

Götz, D. y Gasteiger, H. (2022). Reflecting geometrical shapes: approaches of primary students to reflection tasks and relations to typical error patterns. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10145-5

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGrawHill.

Krummheuer, G. (1999). *The narrative character of argumentative mathematics classroom interaction in primary education.* Proceedings of the European Society for Research in Mathematics Education I. Osnabrück, Germany: Forschungsinstitut für Didaktik der Mathematik, 339-349.

Krummheuer, G. (2009). *Inscription, narration and diagrammatically based argumentation: The narrative accounting practices in the primary school mathematics lesson*. In M.-W. Roth (Ed.), Mathematical representation at the interface of the body and culture. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 219-243.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(2), 249–265. http://www.jstor.org/stable/43589785

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Matemáticas: *Lineamientos Curriculares*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas V2*. MEN.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29 (1), 75-88, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824

Muñoz, J. y Oller. A. (2013). Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación. *Revista Summa*, *85*, 105-122. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/83/Articulos_03.pdf

Samper, C., Camargo, L. y Leguizamón, C. (2010). Como promover el razonamiento por medio de la geometría. *Universidad Pedagógica Nacional*.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentacıón en un ambıente de geometría dınámıca. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 50,* 367-382. http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Sánchez, M. (2016). Competencias profesionales de futuros profesores de educación infantil al analizar tareas escolares de simetría [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2016/hdl_10803_399896/masa1de1.pdf

Sandoval, I. y Camargo, L. (2021). Aprendizaje de la equidistancia a través de la variación: un estudio con niños de primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 63-81. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3254

Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación, 74*, 155-176.

Toro, J. (2014). Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo [Tesis de Maestría, Universidad de Medellín].

Toro, J. y Castro, W. (2020). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas en clase. *Revista Chilena De Educación Matemática*, *12*(1), 35-44. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.11

Toro, J. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase* [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia].

Anexos

Anexo 1: Consentimiento informado.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Ser Maestro
Nuestra esencia

Medellín, 17 de septiembre de 2021

Señor acudiente
Institución Educativa Compartir
Medellín

Asunto: consentimiento informado

Cordial saludo,

Por medio de la presente se le informa que su hijo participará en una investigación en el marco del trabajo final de Práctica Pedagógica de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Dicho trabajo cuenta con el visto bueno de las directivas de la Institución Educativa Compartir.

A través de este comunicado, le solicitamos en su calidad de acudiente del estudiante ________________________________, su autorización para que el menor haga parte de esta investigación. Dicha autorización se hace extensiva para producir algunos registros del estudiante en forma escrita o de vídeo que se generará en la clase. De igual forma, se hace extensiva para hacer públicos los resultados de esta investigación, después de la respectiva sistematización y análisis de registros.

Vale aclarar que el análisis y la divulgación tiene un motivo netamente académico y que los nombres de los participantes serán cambiados para proteger la identidad de los mismos.

Cordialmente,

JorgeAToro

____
Jorge Andrés Toro Uribe
Profesor e investigador
Universidad de Antioquia

______________________________ ______________________________
Acudiente del estudiante Estudiante
Cédula:

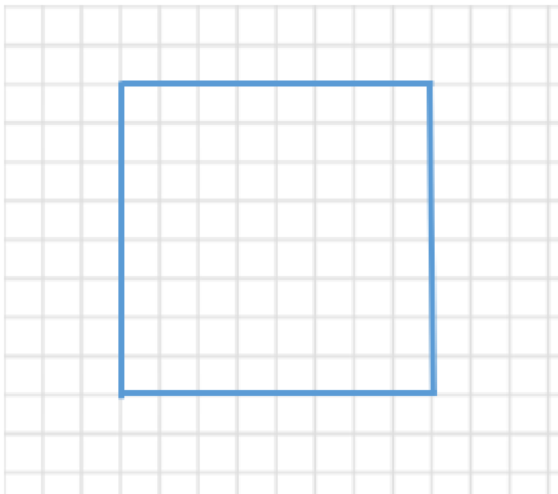
• Universidad de Antioquia / Calle 67 #53 - 108, Bloque 9, oficina 119 / Informes: 219 5725
• Recepción de correspondencia: calle 70 No. 52 - 21 / http://educacion.udea.edu.co / Medellín – Colombia

Anexo 2: Tarea 6

Momento I.

1. Toma una hoja de block.
2. Dibuja una línea contando 8 cuadrículas (horizontal).
3. Dibuja una línea contando 8 cuadrículas (vertical).
4. Se repiten los pasos 2 y 3 intentando cerrar la figura.

Quedará algo así:



Cuando hayas finalizado recorta con las tijeras la figura.

Una vez hayas recortado, asigna letras a cada ángulo (A, B, C, D) y responde a la siguiente pregunta: ¿qué ángulos están al lado opuesto?, ¿por qué?

____

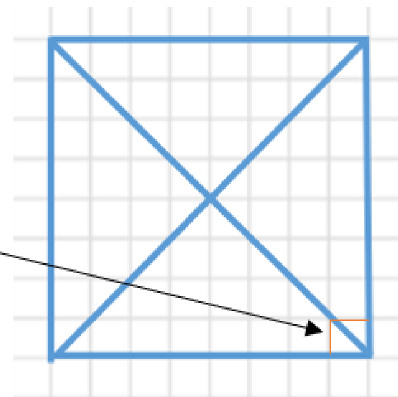
____

____

____

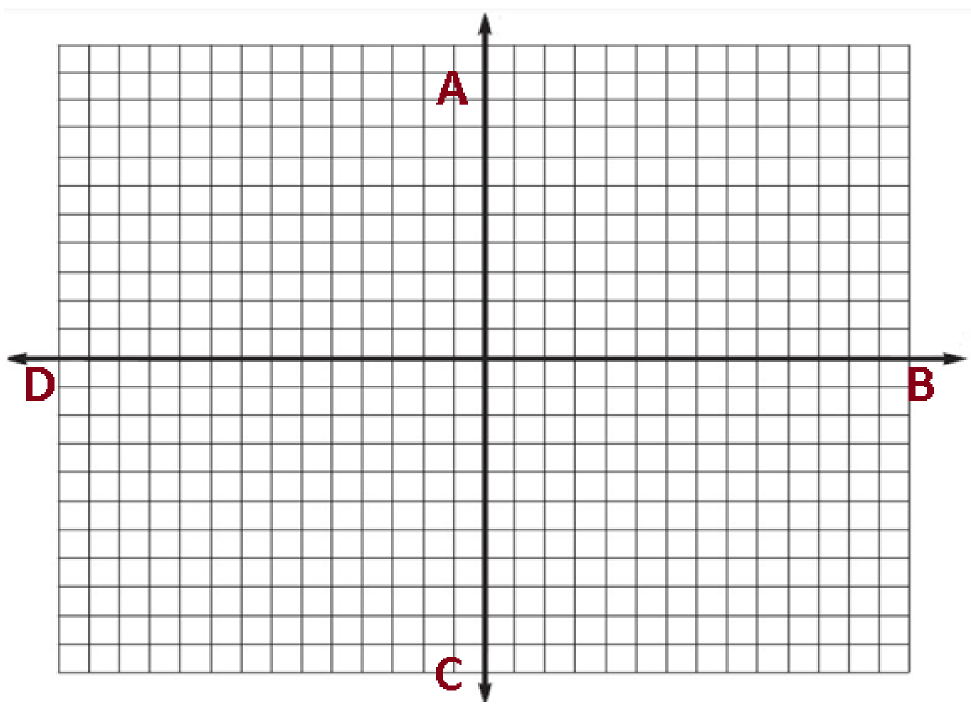
Después de identificar los ángulos puedes unirlos doblando el papel.
Al abrir la figura quedará algo así:

Resalta uno de los ángulos.



Momento II.

A continuación, encontrarás un plano, cada extremo está asociado a una letra (A, B, C, D).



1. Ubica en el centro de ese plano la figura recortada y pégala con un chinche.
2. Revisa que las líneas dobladas coincidan con el plano.

Rotación de la figura.

3. ¿Recuerdas el ángulo que resaltaste?

Servirá como referencia para rotar la figura.

Ubica el ángulo en el lado **A** (para iniciar).
Mide cada lado con cinta.
¿Sus ángulos son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Sus lados son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Qué figura puedo formar con los lados?

Ubica el ángulo en el lado **B**.

Mide cada lado con cinta.
¿Sus ángulos son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Sus lados son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Qué figura puedo formar con los lados?

Ubica el ángulo en el lado **C**.

Mide cada lado con cinta.
¿Sus ángulos son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Sus lados son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Qué figura puedo formar con los lados?

Ubica el ángulo en el lado **D**.

Mide cada lado con cinta.
¿Sus ángulos son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Sus lados son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?
¿Qué figura puedo formar con los lados?

Al ubicar el ángulo (referencia) en cada lado (A, B, C, D), ¿qué diferencias o semejanzas encuentras, entre:

- Los lados tomando el lado A en comparación con los lados tomando el lado B, ¿por qué?
- Los ángulos tomando el lado A en comparación con los ángulos tomando el lado B, ¿por qué?

¿Qué aprendí?
Vas a reflexionar respecto a cómo te sentiste y qué tanto aprendiste en el desarrollo de esta guía.
¡Debes de ser muy sincero!

Valoro mi aprendizaje	Sí	No	A veces
¿Te gustaron las actividades?			
¿Comprendiste lo que decía la guía?			
¿Relacionas lo trabajado en la guía con las matemáticas?			

Anexo 3: Tarea 9

Nombre del estudiante:

____

Momento I

Las siguientes figuras han sido recortadas:

Figura 1

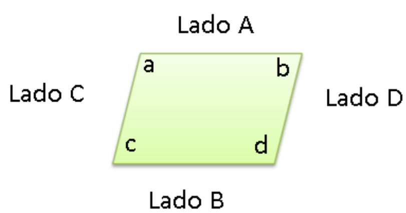


Figura 2

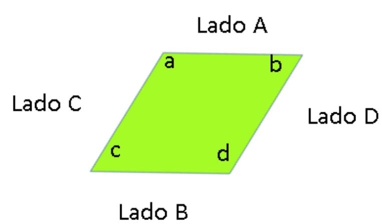


Figura 1

Medidas de los lados.

Lado A: ______________
Lado B: ______________
Lado C: ______________
Lado D: ______________

Medida de los ángulos.

Ángulo a: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo b: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo c: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo d: es mayor de 90° __ menor de 90° __

¿La figura 1 podría ser un rectángulo?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?

____
____
____

Dibuja un rectángulo que tenga de base 7,2 cm y de altura 5cm y ubícalo encima de la figura 1.
¿Son iguales?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?

____
____
____

¿Encuentras diferencias entre los ángulos del rectángulo y los de la figura?, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?

____
____

Figura 2

Medidas de los lados.

Lado A: ____________
Lado B: ____________
Lado C: ____________
Lado D: ____________

Medidas de los ángulos (marcar con x).

Ángulo a: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo b: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo c: es mayor de 90° __ menor de 90° __
Ángulo d: es mayor de 90° __ menor de 90° __

¿De qué figura se podría tratar?, ¿por qué?

____
____
____

Momento II

Figura I

- Traza una línea que una los ángulos a y d.
- Luego, traza otra línea que una los ángulos c y b.

¿Cómo se llamarían esas líneas? _____________ ¿Cuánto mide cada una? _____ y _____
Toma dos pitillos y recórtalos de la misma medida, los uniremos con chinches.

Figura 2.

- Traza una línea que una los ángulos a y d.
- Luego, traza otra línea que una los ángulos c y b.

¿Cómo se llamarían esas líneas? _____________ ¿Cuánto mide cada una? _____ y _____
Toma dos pitillos y recórtalos de la misma medida, los uniremos con chinches.

Momento III

A continuación, tienes un tablero con las mismas figuras que mediste.
En la parte superior, en un mismo lado, cada esquina o ángulo está representado por un color.
En la parte inferior, en un mismo lado, cada esquina o ángulo está representado por otro color.

¿Qué podrían representar esos colores?

Une con hilo las esquinas que tengan diferente color, en cada una de las figuras y explica en tus palabras, ¿qué pasa?, ¿qué se forma?

¿Qué relación encuentras entre la actividad con los pitillos y la que realizaste con los hilos?, ¿qué estoy representando?

Valoro mi aprendizaje	Sí	No	A veces
¿Te gustaron las actividades?			
¿Comprendiste lo que decía la guía?			
¿Relacionas lo trabajado en la guía con las matemáticas?			

Anexo 4: Tarea 10

Momento I.

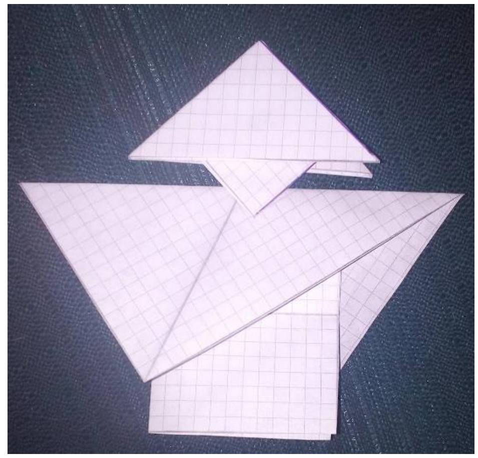
Saludo y asistencia.

Materiales:

- 2 Hoja de block (cuadriculada).
- Lápiz.
- Regla.
- Tijeras.

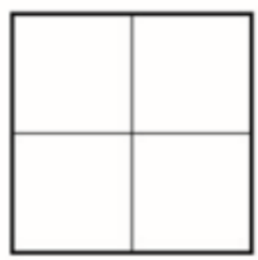
Momento II.

Construcción, asiático de papel.



En la primera hoja de papel voy a dibujar dos cuadrados y las líneas marcadas en cada uno como se muestra en las figuras.

- Traza dos cuadrados, cada lado va a medir 8 centímetros (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla).

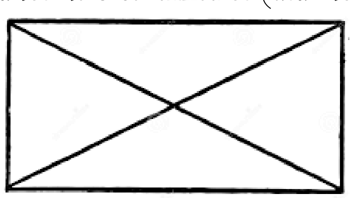


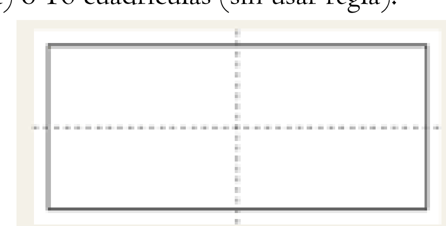
¡Recórtalos!

En la segunda hoja de papel voy a dibujar dos rectángulos y las líneas marcadas en cada uno como se muestra en las figuras.

Traza dos rectángulos, cada uno de ellos tendrá:

- Dos lados de 12 centímetros (usando regla) ó 24 cuadrículas (sin usar regla).
- Dos lados de 8 centímetros (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla).

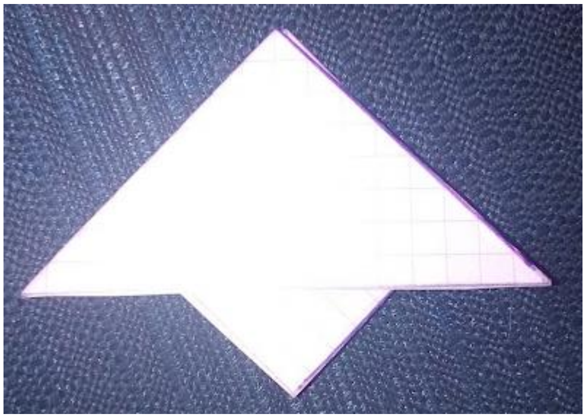




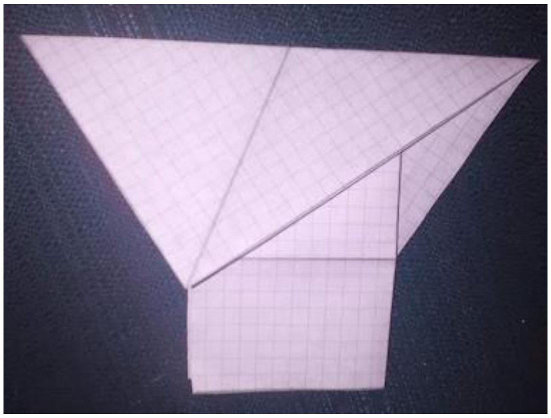
¡Recórtalos!

Una vez hayas recortado, vas a doblar cada figura de acuerdo a los trazos realizados.

Con los cuadrados formarás la cabeza de la figura.



Con los rectángulos formarás el cuerpo de la figura.



¿Qué aprendí?

Vas a reflexionar respecto a cómo te sentiste y qué tanto aprendiste en el desarrollo de esta guía.
¡Debes de ser muy sincero!

Valoro mi aprendizaje	Sí	No	A veces
¿Te gustaron las actividades?			
¿Comprendiste lo que decía la guía?			
¿Relacionas lo trabajado en la guía con las matemáticas?			

Anexo 5: Tarea 11

Momento I.

Saludo y asistencia.

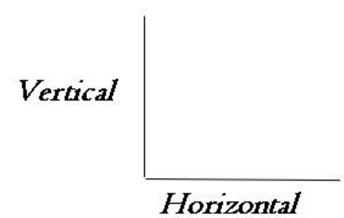
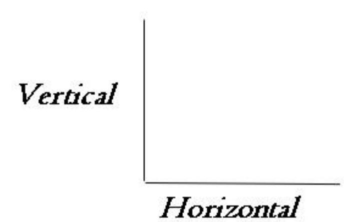
Materiales:

- 1 Hoja de block (cuadriculada).
- Lápiz.
- Regla.

Momento II.

Formando figuras.

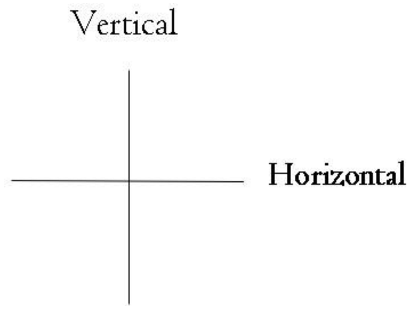
Toma una hoja de block.

Vamos a dibujar dos líneas como formando la letra (L). ○ Una línea horizontal de 5 cm (usando regla) ó 10 cuadrículas (sin usar regla). ○ Una línea vertical de 5 cm (usando regla) ó 10 cuadrículas (sin usar regla). *Trazando 2 líneas para cerrar la figura,* *¿qué figura puedo formar?, ¿por qué?*	
Vamos a dibujar dos líneas como formando la letra (L). ○ Una línea horizontal de 5 cm (usando regla) ó 10 cuadrículas (sin usar regla). ○ Una línea vertical de 8 cm (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla). *Trazando 2 líneas para cerrar la figura,* *¿qué figura puedo formar?, ¿por qué?*	

Vamos a dibujar dos líneas como formando un signo más (+).

- Una línea horizontal de 6 cm (usando regla) ó 12 cuadrículas (sin usar regla).
- Una línea vertical de 6 cm (usando regla) ó 12 cuadrículas (sin usar regla).

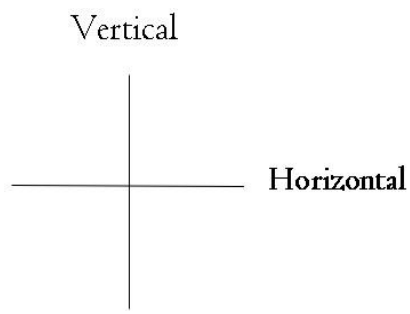
Trazando 4 líneas (sin contar las que me formaron el signo +) para cerrar la figura, ¿qué figura puedo formar?, ¿por qué?



Vamos a dibujar dos líneas como formando un signo más (+).

- Una línea horizontal de 5 cm (usando regla) ó 10 cuadrículas (sin usar regla).
- Una línea vertical de 8 cm (usando regla) ó 16 cuadrículas (sin usar regla).

Trazando 4 líneas (sin contar las que me formaron el signo +) para cerrar la figura, ¿qué figura puedo formar?, ¿por qué?



¿Qué aprendí?

Vas a reflexionar respecto a cómo te sentiste y qué tanto aprendiste en el desarrollo de esta guía.
¡Debes de ser muy sincero!

Valoro mi aprendizaje	Sí	No	A veces
¿Te gustaron las actividades?			
¿Comprendiste lo que decía la guía?			
¿Relacionas lo trabajado en la guía con las matemáticas?			