Procedimientos, instrumentos y conceptos relativos al razonamiento proporcional en estudiantes de grado séptimo

Paola Andrea Gómez Úsuga

Tesis de maestría presentada para optar al título de Magíster en Educación

Asesor
Gilberto Obando Zapata, Doctor (Ph.D) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación
Medellín, Antioquia, Colombia
2022

Cita	(Gómez Úsuga, 2022)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Gómez Úsuga, P. A. (2022). *Procedimientos, instrumentos y conceptos relativos al razonamiento proporcional en estudiantes de grado séptimo* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Maestría en Educación, Cohorte XIX.

Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano/Director: Wilson Bolívar Buriticá

Jefe Departamento de Educación Avanzada: Ruth Elena Quiroz Posada

Dedicatoria

A mi esposo, mi familia, mi asesor el doctor Gilberto Obando y a mis amigos más cercanos, gracias por acompañarme en este proceso formativo.

A la Universidad de Antioquia, infinitas gracias por ser la casa de todos, por abrirme el mundo, por hacerme una mejor persona y una ciudadana crítica.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de diálogos

Siglas, acrónimos y abreviaturas

OCDE	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico
DBA	Derechos Básicos de Aprendizaje
MEN	Ministerio de Educación Nacional
PISA	Program for International Student Assessment
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study

Resumen

Esta investigación pretendió caracterizar los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan algunas estudiantes de grado séptimo de un colegio en Medellín, al trabajar con situaciones de proporcionalidad inversa. En este sentido, se abordó la proporcionalidad inversa por la vía de la bilinealidad y los razonamientos analíticos, promoviendo el reconocimiento de la covariación y la búsqueda de invariantes. La investigación se enmarcó en un paradigma cualitativo. Para su desarrollo se empleó un enfoque metodológico de investigación de diseño. Esto permitió estructurar un proceso que a partir del estudio de situaciones de proporcionalidad inversa promoviera el desarrollo del razonamiento proporcional y, al tiempo, caracterizar los procedimientos, instrumentos y conceptos que las estudiantes ponían en juego cuando se enfrentaban a dichas situaciones. Dadas las circunstancias del COVID 19, se emplearon las plataformas virtuales que disponía el colegio, a través de las cuales se recogió la información de las socializaciones en clase, entrevistas cortas y registros escritos. Los principales hallazgos de la investigación se pueden resumir así:

I. Se evidencia un uso instrumental de las representaciones, las que se configuran como una herramienta a través de la cual las estudiantes producen pensamiento y estructuran procedimientos.

II. Los procedimientos corroboran que el desarrollo del razonamiento proporcional es un proceso gradual, donde las estudiantes transitan por las distintas etapas de manera recurrente.

III. En las relaciones de proporcionalidad inversa, el producto constante entre los sistemas de cantidades se posiciona como el elemento central en la descripción de la correlación entre las cantidades.

Palabras clave: Razonamiento proporcional, proporcionalidad inversa, covariación, razonamientos analíticos.

Abstract

This research aimed to characterize the instruments, procedures, and concepts related to proportional reasoning that some seventh-grade students at junior high school in Medellín mobilize when they address situations of inverse proportionality. In this sense, inverse proportionality was addressed through bi-linearity and analytical reasoning, promoting the recognition of covariation and the search for invariants. The research was framed in a qualitative paradigm. For its development was used an approach of design research. This allowed to structure a process what that promoted studied of situations of inverse proportionality in order to development of proportional reasoning and, at the same time, characterize the procedures, instruments, and concepts that the students put into play when faced these situations. Given the circumstances of COVID 19, the virtual platforms available to the school were used, through which information on socialization in class, short interviews, and written records were collected. The main findings of the research can be summarized as follows:

I. An instrumental use of representations is evidenced, as they are configured as a tool through which students produce thought and structure procedures.

II. The procedures corroborate that the development of proportional reasoning is a gradual process, where the students repeatedly go through the different stages.

III. In inverse proportionality relationships, the constant product between the quantity systems is positioned as the central element in describing the correlation between the quantities.

Keywords: Proportional reasoning, inverse proportionality, covariation, analytical reasoning.

Introducción

La presente tesis, como requisito para obtener el título de Magíster en Educación, se localiza en el campo del razonamiento proporcional. Este campo ha sido ampliamente investigado en los últimos 60 años, lo que ha permitido problematizar la enseñanza, el aprendizaje, la fundamentación epistemológica y cognitiva del razonamiento proporcional, así como de la *razón*, la proporción, la proporcionalidad, el conjunto numérico de los racionales y, en general, las relaciones multiplicativas (Inhelder & Piaget, 1964; Obando, 2015; Schwartz, 1988; Vergnaud, 1988).

De acuerdo con los principios y estándares de la National Council Teacher Mathematics (NCTM, 2000), el razonamiento proporcional tiene un papel integrador y estructurante en los currículos escolares de matemáticas, dado que al correlacionar dos o más cantidades y describir procesos de variación y cambio a través de la proporcionalidad, conceptualiza componentes relacionados tanto con lo numérico como con lo variacional. Así mismo, dado su papel en los procesos de covariación, se encuentra en la base de un tratamiento adecuado de las cantidades que intervienen en fenómenos de otras ciencias como la física, la biología y la química.

Sin embargo, a pesar de su papel transversal en el currículo, algunos autores, tanto nacional como internacionalmente, llaman la atención sobre la manera como se enseña la proporcionalidad en la escuela, dado que con frecuencia se privilegia lo numérico sobre lo variacional. En particular, Sánchez et al. (2012) manifiestan que, en Colombia, tradicionalmente el razonamiento proporcional es abordado definiendo la *razón* y la proporción, para luego “enseñar a resolver problemas típicos mediante la regla de tres y la multiplicación en cruz” (p. 992). Esta aproximación a la proporcionalidad a través de reglas nemotécnicas y algoritmos, aunque faculta a los estudiantes para resolver con rapidez problemas de cuarta proporcional, de acuerdo con Rivas et al. (2012) dificulta el desarrollo del razonamiento proporcional, “dando lugar a respuestas correctas, pero sin la manifestación de este tipo de razonamiento” (p. 562).

En este sentido, algunas investigaciones han propuesto aproximaciones teóricas que promueven una comprensión de la proporcionalidad en la integración de aspectos numéricos y variacionales (Fernández & Llinares, 2012; Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, 2016; Obando, 2015; Posada & Obando, 2006; Sánchez, 2013; Silvestre & Ponte, 2011). No obstante, en su mayoría estas investigaciones se han dedicado a estudiar la proporcionalidad directa y apenas han logrado algunos acercamientos a la proporcionalidad inversa.

Es por eso, que se propone esta investigación sobre el razonamiento proporcional con 15 estudiantes de grado 7° de la educación básica, de una institución educativa de carácter privado en la ciudad de Medellín, que busca caracterizar los instrumentos, los procedimientos y los conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan estas estudiantes al abordar situaciones de proporcionalidad inversa. En este marco, la presente tesis se organiza en seis capítulos que se presentan a continuación.

El **primer capítulo** hace una presentación del planteamiento del problema a través de tres aspectos: la revisión de la literatura sobre el razonamiento proporcional, *razón*, proporción y proporcionalidad; los documentos de referencia del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006, 2016) y el desempeño de estudiantes colombianos en pruebas locales e internacionales (OCDE, 2018; TIMSS, 2009, 2015). Este recorrido permitió mostrar, por un lado, la relevancia del razonamiento proporcional tanto para el campo investigativo como educativo y, por otro lado, resaltó las dificultades en la enseñanza del razonamiento proporcional pues su estudio principalmente se limita a la aplicación de fórmulas y frases nemotécnicas, dejando de lado el análisis de los procesos de covariación entre las variables, al igual que el estudio relacional entre las cantidades involucradas en la situación. Elementos como estos muestran la necesidad de continuar ampliando las comprensiones respecto a una aproximación a la proporcionalidad que permita integrar los razonamientos numéricos y variacionales. Con base en lo anterior, en el **capítulo 2** se enuncian los objetivos de investigación.

Al llegar al **capítulo 3,** se encuentra la base teórica que da soporte a la investigación. Para iniciar, con Obando (2015) y Posada y Obando (2006), se indica la organización conceptual que incluye los conceptos: cantidad, *razón* y sus usos, proporción y proporcionalidad directa e inversa, ambas fundamentadas en las relaciones funcionales y los razonamientos analíticos. Seguidamente, se desarrollan los aspectos principales del razonamiento proporcional, a saber: el sentido de covariación, el reconocimiento de regularidades y patrones de variación y la identificación de comportamientos lineales y no lineales. Además, se exponen las etapas de razonamiento proporcional propuestas por Harel et al. (1991) y Koellner-Clark y Lesh (2003) las cuales permitieron caracterizar los procedimientos realizados por las estudiantes. Finalmente, con los planteamientos de Godino (2002) y Obando (2015) sobre la propuesta de configuración epistémica y la teoría de la actividad, se definen las nociones de procedimiento, instrumento y concepto.

En el **capítulo 4** se desarrollan los aspectos metodológicos que orientan la investigación la cual se enmarca en una Investigación de diseño. En este sentido, la investigación se desarrolla acorde con sus tres fases: preparación, experimento y análisis retrospectivo, a través de las cuales se amplían detalles sobre el contexto de la investigación, los criterios de construcción y adaptación de las tareas, el proceso llevado a cabo para recolectar, categorizar y analizar la información. Así mismo, se explicitan las consideraciones éticas que guían la investigación.

Seguidamente, en el **capítulo 5** titulado Análisis de Resultados, se describen los resultados obtenidos al desarrollar con el grupo de 15 estudiantes las tareas de proporcionalidad inversa, además, se hace una interpretación de dichos hallazgos a la luz de los referentes teóricos. Para que finalmente, en el **capítulo 6**, con las evidencias e interpretaciones realizadas se elaboraran las conclusiones, las cuales se presentan de manera sintética a continuación.

En primer lugar, se exhibe en la actividad matemática de las estudiantes un uso instrumental de las representaciones, posicionadas como medios que permiten guiar el accionar de las estudiantes y generar conocimiento. Además, se evidencia una correspondencia entre los tipos de representación realizados por las estudiantes y la etapa del razonamiento proporcional alcanzada.

En segundo lugar, los procedimientos realizados indican la capacidad natural de las estudiantes para reconocer y describir procesos de variación y cambio. No obstante, también confirman que el desarrollo del razonamiento proporcional es un proceso paulatino, donde las estudiantes transitan de manera recurrente por las distintas etapas. Si bien, la mayoría de los procedimientos realizados por las estudiantes se pueden explicar a través de las etapas de razonamiento proporcional de Koellner-Clark y Lesh (2003), se reconoce la necesidad de una nueva etapa que esté entre la 4 y 5, que describa procedimientos donde los análisis no implican un uso explícito de las funciones, pero tampoco un procedimiento por razonamientos analógicos.

Finalmente, se reconoce el papel central del producto constante entre los sistemas de cantidades en las relaciones de proporcionalidad inversa, que permite describir cuantitativamente de la correlación entre las cantidades.

1. Planteamiento del problema

El razonamiento proporcional es considerado mundialmente como un proceso relevante en los currículos de la matemática escolar y de la actividad matemática de los estudiantes (Mochón, 2012; Rivas et al., 2012; Silvestre & Ponte, 2011). Dicha importancia se debe a que esta forma de razonamiento está en diálogo con una amplia variedad de conceptos y procesos matemáticos, que van desde la multiplicación y la división hasta la *razón*, la proporción, la proporcionalidad y las funciones. En este sentido autores como Lesh et al. (1988) indican que el razonamiento proporcional tiene un papel articulador en las matemáticas escolares dado que "por un lado, es la cúspide de la aritmética en la primaria; [y] por otro lado, es la base de todo lo que sigue [en el álgebra]" (p. 97).

Investigaciones relacionadas con el razonamiento proporcional se reportan desde hace más de 60 años. Estas han tenido como foco de atención aspectos relacionados con: la enseñanza y el aprendizaje, la fundamentación epistemológica y cognitiva, al igual que aspectos matemáticos como: *razón*, proporción, proporcionalidad y el conjunto numérico de los racionales (Inhelder & Piaget, 1964; Schwartz, 1988; Vergnaud, 1988). Esta producción ha sido categorizada por Obando (2015) como investigación en el campo del *razonamiento proporcional* o *razonamiento multiplicativo,* el cual será entendido como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación entre dos cantidades; la capacidad para reconocer el comportamiento lineal y no lineal entre las cantidades involucradas en una situación y la habilidad para identificar patrones estructurales en relaciones de segundo orden (relaciones entre relaciones).

No obstante, a pesar de su condición privilegiada en el currículo escolar y en el contexto investigativo, algunos autores (Mochón, 2012; Rivas et al., 2012; Sánchez, 2013) llaman la atención sobre la rapidez con la cual el razonamiento proporcional es reemplazado en las aulas de clase por los algoritmos de la multiplicación cruzada y la regla de tres. Estos algoritmos a menudo permiten resolver rápidamente tareas comunes de proporcionalidad en el ámbito educativo, social y profesional, sin embargo, por su naturaleza nemotécnica no siempre se hace explícita la naturaleza de la covariación entre las cantidades involucradas, dejando de lado la conceptualización de la *razón* y la proporción y, por consiguiente, no todas las veces se promueve en los estudiantes procesos de razonamiento matemático (Lamon, 2007).

Es por esto que algunas investigaciones (Mochón, 2012; Obando, 2015; Posada & Obando, 2006) insisten en resaltar las dificultades y la complejidad para enseñar la *razón*, la proporción, la proporcionalidad y más aún, para desarrollar el razonamiento proporcional en los estudiantes. En este sentido, estos autores sugieren que es necesario continuar explorando los conceptos, procesos y problemáticas concernientes a esta línea de investigación a través de otras interpretaciones, marcos teóricos y estrategias metodológicas (Obando, 2015).

Así entonces, se propone esta investigación sobre el razonamiento proporcional con estudiantes de grado 7° de la educación básica,[1] buscando caracterizar los instrumentos, los procedimientos y los conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan estas estudiantes al abordar situaciones de proporcionalidad inversa. En lo que sigue, se presenta una revisión de la literatura sobre razonamiento proporcional, seguidamente se analizan los documentos Referentes de referencia del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006) sobre *razón*, proporción y proporcionalidad y finalmente, una revisión de los resultados de estudiantes en algunas pruebas estandarizadas internacionales y nacionales. Con estos tres elementos se busca problematizar y justificar la pregunta de investigación.

1.1 Aportes de la literatura a la línea del razonamiento proporcional

A finales de los años cincuenta se reporta el inicio de la investigación alrededor del razonamiento proporcional, con el estudio precursor realizado por Inhelder y Piaget (1958) sobre el desarrollo del pensamiento lógico. En este, el razonamiento proporcional aparece como un esquema que marca una transición del estadio de lo concreto a lo formal. Hoy, más de 60 años después, se puede reconocer no solo que el campo del razonamiento proporcional ha seguido creciendo, sino que también se ha venido consolidando. Como evidencia de lo anterior se pueden reconocer estudios a nivel doctoral y un amplio número de trabajos alrededor de este campo (Godino & Batanero, 2002; Mochón, 2012; Najarro, 2018; Obando, 2015; Posada & Obando, 2006; Silvestre & Ponte, 2011; Torres, 2015) los cuales dan cuenta de una discusión todavía vigente.

[1] El grado séptimo hace parte de los niveles de la educación básica secundaria en Colombia. Este grado lo cursan jóvenes entre los 12 y 14 años.

Esta revisión de la literatura se estructura caracterizando 3 épocas o momentos: los procesos cognitivos sobre el razonamiento proporcional, la estructura del conocimiento matemático sobre el razonamiento proporcional y, finalmente, apuestas antropológicas y semióticas sobre el conocimiento matemático. Esta clasificación es tomada de Obando et al. (2014) dado que permite describir las líneas de trabajo y la producción investigativa desarrollada alrededor del campo del razonamiento proporcional a través de épocas. En este apartado se pretende recopilar un contexto general que haga alusión a las producciones y discusiones alrededor de este campo investigativo.

1.1.1 Los procesos cognitivos

Desde sus inicios, los estudios en este campo de la educación matemática mostraron interés en los procesos cognitivos al cuestionarse sobre cómo se desarrollaba el razonamiento en los sujetos al enfrentarse a situaciones como el equilibrio de la balanza y la proyección de sombras.

En cuanto a este primer momento, las investigaciones estuvieron influenciados por los trabajos de Inhelder y Piaget (1958) sobre el razonamiento lógico, en su libro "*De la lógica del niño a la lógica del adolescente*". Los autores plantean que el razonamiento alrededor de la proporcionalidad es uno de los ocho esquemas del razonamiento formal, el cual supone en los sujetos una mirada sistémica de los problemas, es decir, considerando que estos se componen de relaciones entre cantidades y variables.

Además, este tipo de razonamiento implica en los sujetos habilidades para generar hipótesis sobre los experimentos sin necesidad de manipularlos, "la capacidad del manejo simultáneo de clases (multiplicación de clases) y la constitución del grupo INRC [Identidad, Negación, Recíproca y correlación]" (Obando, 2015, pp. 8-9). Esto es, la capacidad de reconocer la correspondencia entre magnitudes, al notar que el incremento o el cambio en una de las variables produce cambios en la otra, de tal forma que se conserva un principio de invariancia entre ambas cantidades (que gobierna la covariación entre ambas), evidenciando una relación de compensación entre las magnitudes relacionadas.

Alrededor de los años 80, y con la influencia de Freudenthal (1986) en el terreno de la Educación Matemática, la pregunta por los procesos cognitivos toma fuerza en las investigaciones, pero trasladando su mirada hacia la escuela. Así, las investigaciones comienzan a interesarse por cómo puede ser enseñado y desarrollado el razonamiento alrededor de la proporcionalidad en las aulas de clase, así como preguntarse por las estrategias, tareas y procesos que habría que promover para conducir a los estudiantes a razonar proporcionalmente (Noelting, 1980b; Obando, 2015).

A partir de esta óptica, y teniendo como referencia las etapas de razonamiento de Piaget e Inhelder (1958), las investigaciones estudian los procesos evolutivos de los estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad en la escuela y los factores asociados que comienzan a emerger (Karplus et al., 1983; Noelting, 1980a; Tourniaire, 1986; Tourniaire & Pulos, 1985).

Así, las investigaciones desarrolladas en este periodo permitieron avanzar en la comprensión de los procesos cognitivos del razonamiento proporcional, sus etapas y la influencia de los tipos de tareas, entre otros. Sin embargo, al solo contemplar la óptica cognitiva no tuvieron en cuenta otros factores que podían afectar el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad como, por ejemplo, las implicaciones epistemológicas de concepto matemático.

1.1.2 La estructura del conocimiento matemático sobre el razonamiento proporcional

En los años noventa la investigación en el campo del razonamiento proporcional experimenta un cambio en sus problemas de investigación (Obando, 2015). Esto en tanto que, además de problematizar la cognición en la escuela, advierte la necesidad de estudiar otro aspecto importante: el conocimiento matemático. Este giro estuvo determinado por el desarrollo que alcanzó la didáctica de las matemáticas en la década de los ochenta, postulando la necesidad de hacer una lectura más integral de los problemas didácticos, considerando, al lado de lo cognitivo, lo contextual y lo epistemológico.

A partir de esta coyuntura, las investigaciones comienzan a problematizar y discutir temáticas como las relaciones y proximidades entre la *razón* y el conjunto de los números racionales (Behr et al., 1992, 1997; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988); el desarrollo y los obstáculos del razonamiento proporcional y de los aspectos meta-cognitivos implicados (Modestou & Gagatsis, 2009, 2010); la aritmética de las cantidades (Schwartz, 1988); el campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Harel et al., 1991; Vergnaud, 1988, 1991, 1994) y la estructura cognitiva y didáctica del razonamiento multiplicativo (Kaput & West, 1994; Spinillo & Bryant, 1991 citado en Obando et al., 2014). En particular durante este momento, el estudio del razonamiento proporcional estuvo enfocado tanto en alcanzar una precisión teórica del término como, en el análisis de los problemas didácticos y cognitivos.

Por un lado, en cuanto a la definición teórica del razonamiento proporcional, se reconocen los aportes de Modestou y Gagatsis (2009) quienes en sus trabajos critican la idea generalizada de pensar que el razonamiento proporcional es equivalente a resolver correctamente problemas de proporcionalidad. Lo anterior en tanto un estudiante puede resolver correctamente un problema de proporcionalidad utilizando el algoritmo de la regla de tres y sin apelar a ningún proceso de razonamiento proporcional.

Así, Modestou y Gagatsis (2009, 2010) sustentan que un sujeto que pueda razonar proporcionalmente debería tener la capacidad para reconocer regularidades entre cantidades que se relacionan, identificar las formas o tipos de relaciones que se dan entre dichas cantidades o variables, generalizar o modelar los patrones y, además, tener la capacidad para resolver problemas de cuarta proporcionalidad. Así, los autores proponen que el razonamiento proporcional es la conjunción de tres aspectos: el razonamiento por analogías, la solución de problemas de proporcionalidad y la conciencia metacognitiva de la linealidad.

Además, Pantziarra y Pitta-Pantazi (2005) y Pitta-Pantazi y Christou (2011), aportan a la definición teórica al resaltar un vínculo entre el razonamiento proporcional y los números racionales. De manera que el uso de este conjunto numérico promueve en los sujetos algunas habilidades que son específicas del razonamiento proporcional, a saber: la *unitización* como la capacidad de hacer nuevas particiones (de otros tamaños) en la unidad, la variación de las cantidades, el pensamiento relativo y la coordinación de conteos iterados crecientes y decrecientes.

Por otro lado, en cuanto a las dificultades didácticas y cognitivas, se puede mencionar la *generalización de la linealidad* la cual es propuesta por Freudenthal en 1986, entendida como “una propiedad de las relaciones tan sugestiva que [ante cualquier relación numérica] uno se siente inclinado a tratarla […] como si fuera lineal” (Freudenthal, 1986 citado en Van Dooren et al., 2006, pp. 116-117).

Algunos autores intentaron encontrar las causas de esta dificultad proponiendo la existencia de un obstáculo epistemológico (Modestou & Gagatsis, 2010). Sin embargo, otros autores han defendido la idea de que más que un obstáculo epistemológico, la generalización de la linealidad es producto de un obstáculo didáctico generado por la forma cómo se enseña la proporcionalidad

(Van Dooren et al., 2006). Esto es, enseñar la proporcionalidad es sinónimo de enseñar el mecanismo de la regla de tres y la multiplicación cruzada, reduciendo este concepto a la apropiación de reglas que se aplican de manera mecánica y descontextualizada (Lamon, 2005, 2007; Posada & Obando, 2006; Rivas et al., 2012).

No obstante, si se revisan las prácticas de algunas culturas antiguas como la china y la árabe se reporta que en situaciones de su cotidianidad como en los procesos de intercambio de bienes y servicios, se utilizaban técnicas similares a la regla de tres actual, aun en la ausencia de una conceptualización de las razones y las proporciones (en el sentido moderno). Esto pone en relieve, como lo sugiere Obando (2018), que el algoritmo de la regla de tres es un elemento potente, sin embargo,

> cuando [su] enseñanza se hace sin el reconocimiento de los fundamentos teóricos que le dan su valor matemático, es una regla vacía, carente de significado que se aplica de forma indistinta a cualquier situación de cuatro términos, […] sin importar las formas de covariación entre tales cantidades. (p. 122)

Aunado a esto, se reporta también que los tipos de problema trabajados en clase, sus características lingüísticas y las cantidades que lo componen tiene una fuerte influencia en la persistencia de la generalización de la linealidad. En su mayoría, estos problemas conservan la estructura de cuarta proporcional (situación que involucra cuatro cantidades, una de las cuales es desconocida y, para resolverlos, hay que encontrar ese valor desconocido) y son resueltos a través del algoritmo de regla de tres, sin preguntar por los invariantes, la *razón*, que permite relacionar las cantidades (Posada & Obando, 2006). Estas dificultades evidencian que los estudiantes han construido significados débiles sobre la noción de *razón* y los criterios asociados a la linealidad.

Así pues, el razonamiento proporcional visto en un sentido más profundo se vincula con el reconocimiento de patrones estructurales en los procesos de covariación entre cantidades, esto es, del reconocimiento de las variables y las relaciones entre ellas, así como de los invariantes operatorios que intervienen en este proceso variacional. Y en este sentido, el estudio de la generalización de la linealidad destaca la importancia de continuar fortaleciendo el razonamiento proporcional y, a propósito, Obando (2015) sugiere que

> los modelos lineales pueden ser una forma natural de organización del pensamiento, una primera aproximación en la comprensión de situaciones o fenómenos más complejos y, por lo tanto, más que un obstáculo epistemológico, es una forma alternativa de organización del pensamiento. (p. 18)

1.1.3 Apuestas antropológicas y semióticas sobre el conocimiento matemático

De acuerdo con Obando et al. (2014) en la primera mitad de la década de los noventa, toman fuerza en el campo de la Educación Matemática dos enfoques teóricos: la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la perspectiva de las representaciones semióticas, los cuales aportan al campo desde sus formas particulares de abordar la investigación.

En concreto, la línea de la Teoría Antropológica de lo Didáctico problematiza la uniformidad en las propuestas sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, las cuales enfatizan el estudio en una aproximación aritmética, privilegiando lo numérico y desconociendo los vínculos con lo variacional, esencialmente con las relaciones y las funciones (Bosch, 1994; García, 2005; Hersant, 2001).

Así, teniendo en cuenta los aportes epistemológicos de Hersant (2001) sobre las teorías para estructurar tareas relativas a la proporcionalidad, Obando (2015) presenta dos miradas a partir de las cuales se puede entender el razonamiento proporcional según las relaciones entre las magnitudes: *escalar y funcional*. La mirada *escalar* o de *razonamientos por analogía*, en la cual la atención está sobre lo numérico y los procesos multiplicativos entre parejas de la misma familia de cantidad. Mientras que la mirada *funcional* o de *razonamiento analítico* centra su actuar en el invariante que vincula o compara parejas de cantidades heterogéneas.

De acuerdo con Sánchez (2011) aún hoy sigue primando un enfoque aritmético de las razones, proporciones y proporcionalidad, las cuales "son enseñadas centrado su atención en lo algorítmico y privilegiando lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos de conocimiento matemático con lo variacional, esencialmente con las relaciones y las funciones" (p. 1). No obstante, es posible reconocer algunas investigaciones que han comenzado a dar el giro, o al menos, a considerar dentro de sus categorías de análisis la perspectiva funcional (Fernández & Llinares, 2012; Posada & Obando, 2006; Sánchez, 2013; Silvestre & Ponte, 2011, Obando, 2015).

Así, como se ha mostrado, este primer apartado presenta un breve recorrido por la producción investigativa alrededor del campo del razonamiento proporcional. En lo que sigue, se resaltan algunos aspectos y discusiones que aportan a la justificación del problema de esta investigación.

Una primera idea que prevalece es que el razonamiento proporcional no es únicamente el estudio de la proporcionalidad y, en particular, de la regla de tres. Esto dado que se necesita del reconocimiento y el análisis de las relaciones multiplicativas entre las cantidades y de la identificación de patrones estructurales invariantes en las relaciones entre las cantidades (Modestou & Gagatsis, 2010). Adicional a lo anterior, se requiere del reconocimiento de la *unitización* (Pitta-Pantazi & Christou, 2011) como característica específica del razonamiento proporcional, al igual que los vínculos con otros conceptos matemáticos como las estructuras multiplicativas, las funciones, la razón de cambio e, incluso, la probabilidad (Obando, 2015).

Estos vínculos ponen en evidencia el papel articulador del razonamiento proporcional entre lo numérico y lo variacional (Lesh et al., 1988). Sin embargo, como lo sugieren Obando et al. (2014) a nivel escolar e incluso investigativo, el razonamiento proporcional es presentado con mayor recurrencia a través de una aproximación aritmética, con pocas conexiones a otras áreas del currículo. Aun así, algunas investigaciones han comenzado a explorar otras visiones analizando la influencia de una mirada funcional (Fernández & Llinares, 2012; Posada & Obando, 2006; Sánchez, 2013; Silvestre & Ponte, 2011), poniendo en el centro los procesos de covariación entre las cantidades relacionadas (lineales y no lineales).

De esta manera se propone el estudio de la proporcionalidad desde las relaciones lineales y se centra en los análisis de un invariante estructural, es decir, de una constate de proporcionalidad que vincule las cantidades heterogéneas. Esto es relevante dado que los estudiantes pueden reconocer, en el caso de la proporcionalidad directa, la *razón* como cuantificador o medida relativa entre un par de las cantidades heterogéneas relacionadas y luego, bajo los razonamientos analíticos, multiplicar o dividir la cantidad conocida por dicha *razón* para encontrar la cantidad faltante y no solo utilizando la regla de tres como es común, la cual, por la forma como es presentada en la escuela, no hace explícito el fundamento conceptual que la hace funcionar: la covariación lineal entre dos familias de cantidades.

También, de acuerdo con Obando (2015) respaldar el estudio de la proporcionalidad a partir de la mirada funcional o de razonamientos analíticos, además, de promover un "cambio de foco en la manera como se comprenden las relaciones involucradas en la tarea" (pp. 213-214) también implicará que en el aula de clase, se reconozcan otras formas de acción en la práctica matemática de los estudiantes y, al mismo tiempo, se promuevan el uso de otros instrumentos que privilegien el análisis de la covariación y correlación entre familias de cantidades distintas, como las tablas de valores.

Para finalizar, otro aspecto que se puede identificar en esta revisión de la literatura es que parte de las investigaciones se han concentrado principalmente en el estudio de la proporcionalidad directa y en el papel de la *razón*. No obstante, existen otro tipo de relaciones multiplicativas, como es el caso de la proporcionalidad inversa o compuesta, de las cuales apenas se han dejado algunos esbozos sobre los procesos de covariación y de los invariantes detrás de ellas.

1.2 Una mirada al currículo nacional colombiano de Matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha expedido una serie de documentos de referencia (1998, 2006, 2016), los cuales ofrecen a las instituciones educativas orientaciones conceptuales, didácticas y pedagógicas para el diseño y la construcción de sus currículos en las áreas fundamentales.[2] Estas orientaciones invitan a las instituciones educativas a reconocer una apuesta epistemológica en la que la Educación Matemática escolar se comprende a partir de pensamientos y procesos, y no alrededor de los contenidos. Esta visión, supone una manera de entender la enseñanza y el aprendizaje a través de las capacidades, la interpretación, la solución de problemas y la comunicación, concibiendo los contenidos como medios que permiten potenciar el pensamiento matemático.

[2] En Colombia, la educación formal está divida en 3 niveles los cuales son: Preescolar y educación básica primaria (cinco grados), educación básica secundaria (cuatro grados) y educación media (dos grados y culmina con el título de bachiller).

Al rastrear en estos documentos vínculos con el razonamiento proporcional y la proporcionalidad se identifican algunos elementos importantes, tanto desde el punto de vista de los pensamientos numérico y variacional, como de los procesos de razonamiento y modelación. Estas conexiones permiten evidenciar lo que Lesh et al. (1988) ya han enunciado: el concepto de proporcionalidad transversaliza el currículo de matemáticas al articular las relaciones multiplicativas (correspondientes al pensamiento numérico) con la variación y el álgebra (propios del pensamiento variacional), en el marco de un desarrollo progresivo del razonamiento y la modelación.

En términos generales, el MEN (1998) entiende el razonar como “la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión” (p. 54). No obstante, cuando se particulariza en el *razonamiento matemático*, el MEN (2006) sugiere ampliar la noción antes presentada con otros aspectos como: la capacidad de reconocer regularidades, patrones y relaciones; la habilidad para generar predicciones, explicarlas y justificarlas; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.

No obstante, para propiciar el razonamiento matemático el MEN (1998) insiste en la necesidad de que los maestros articulen este proceso de razonamiento a todas las actividades desarrolladas en las clases de matemáticas, independiente del concepto que se esté trabajando. También, estos documentos sugieren que es importante que los maestros puedan motivar a sus estudiantes a pensar más que a memorizar, generando en sus aulas de clase ambientes críticos y de discusión, que convoquen a los estudiantes a comprender y resolver situaciones matemáticas a través de la lógica y los argumentos, a través de situaciones que estimulen la exploración, la generación de hipótesis y la comprobación de dichas conjeturas.

En este contexto, el desarrollo del razonamiento proporcional debería comenzar desde los primeros años de escolaridad, no necesariamente aludiendo a estructuras algebraicas formales, pero sí promoviendo en los niños la exploración, la indagación, el análisis de las regularidades y patrones en fenómenos naturales (MEN, 2006). Por ejemplo, en la rutina diaria de cada niño, en la observación del crecimiento de una planta, en el seguimiento al lugar por donde sale el sol durante un mes, entre otros.

Así, con la mirada en el cambio, los maestros promueven en los estudiantes habilidades para reconocer y analizar las situaciones desde la variación, lo cual, a largo plazo puede favorecer acercamiento en la construcción e interpretación de modelos matemáticos y por qué no, “caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial” (MEN, 2006, p. 66).

Entre los conceptos, procedimientos y métodos que según el MEN (1998) permiten el desarrollo del pensamiento variacional se pueden reconocer: el estudio de los números reales, las magnitudes, la función como dependencia y los modelos de variación multiplicativa, donde la proporcionalidad cobra sentido. Aquí, la proporcionalidad aporta a la comprensión de la variación con el estudio de las variables intensivas, ya que a través de los recursos lingüísticos de los estudiantes se hacen las primeras caracterizaciones y comparaciones de las relaciones entre las cantidades. Estas primeras aproximaciones, seguidamente, ayudarán a los estudiantes a tener otras comprensiones en el razonamiento proporcional.

Otros documentos de referencia nacional son los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) publicados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016). Estos documentos pretenden orientar a las instituciones educativas sobre el conjunto mínimo de saberes básicos y fundamentales para cada grado, los cuales sirven de base y estructura en la consolidación del currículo y la planeación de las clases. Al indagar en estos documentos, se encuentra que en los últimos grados de primaria y en los primeros de secundaria algunos indicadores están relacionados con el conjunto de los números racionales, la *razón*, proporción, proporcionalidad y el razonamiento proporcional.

Al respecto, estos indicadores aluden a una aproximación a la proporcionalidad a través del reconocimiento de la variación, la conceptualización de la *razón* desde sus distintos usos y contextos, el uso e interpretación de diferentes formas de representación (verbal, gráfica y tabular), el reconocimiento de regularidades y de la dependencia entre cantidades. Todo lo anterior, estudiado a partir de contextos matemáticos y cotidianos, mostrando que los indicadores van más allá de los contenidos, posicionando el desarrollo del razonamiento proporcional a partir de una aproximación que articula lo aritmético, lo métrico y lo variacional.

1.3 *Razón*, proporción y proporcionalidad en pruebas estandarizadas

Como ya lo han sugerido algunos autores, internacionalmente, los conceptos de *razón*, proporción y proporcionalidad tienen un papel importante en el currículo de matemáticas. Al revisar los informes de reconocidas pruebas mundiales estandarizadas como, por ejemplo, Program for International Student Assessment (en adelante PISA) y Trends in International Mathematics and Science Study (en adelante TIMSS), se reconoce que los conceptos de *razón*, proporción y proporcionalidad son valorados dentro del grupo de conocimientos fundamentales que deben ser evaluados en matemáticas.

Por su parte, desde el año 1995, la prueba TIMSS evalúa competencias matemáticas y científicas de estudiantes de tres niveles: un primer nivel dirigido a niños de 9 años, un segundo nivel a estudiantes de 13 años y finalmente a estudiantes del último grado de secundaria, estos niveles académicos equivalen en Colombia a estudiantes de grados cuarto, séptimo/octavo y grado once, respectivamente. Para TIMSS la evaluación se organiza en torno a dos dimensiones: la dimensión de los contenidos que involucra números, álgebra, geometría, datos y probabilidades; y la dimensión cognitiva que hace relación a los procesos de pensamiento, conformada por conocimiento, aplicación y razonamiento. En este contexto, la *razón*, proporción y proporcionalidad hacen parte de la dimensión conocimiento, al ser una de las áreas temáticas del núcleo números tanto para el primer y segundo nivel.

Figura 1

Pregunta de nivel intermedio TIMSS 2015 para estudiantes de 13 años sobre razón, proporción y proporcionalidad

Esta tabla presenta el número de hojas de papel que hay en una pila de hojas y la altura de la pila.

Complete la tabla.

Número de hojas de papel en la pila	100	150	200
Altura de la pila (mm)	8		

Nota. Tomada de TIMSS 2015 International Results in Mathematics (TIMSS, 2015).

Al revisar los resultados de TIMSS 2015, se puede resaltar, por ejemplo, la pregunta que aparece en la **Figura 1** presentada a los estudiantes del segundo nivel, en la cual se pedía encontrar la altura de una pila de hojas teniendo en cuenta la cantidad de hojas. Si bien, a pesar de que esta pregunta hace parte del nivel intermedio, los resultados evidencian que apenas un 53% de los estudiantes del mundo, en promedio, la resuelven de manera apropiada. Y particularmente, para los países latinoamericanos que hicieron parte de TIMSS 2015, Chile y Argentina, solo un 38% y 35% de sus estudiantes respectivamente pudieron resolver correctamente la situación. Estos resultados, dejan ver que temáticas relativas a las razones, proporciones y proporcionalidad no son tan sencillas para estudiantes de diferentes lugares del mundo.

Por su parte, el desempeño de los estudiantes colombianos en las pruebas TIMSS no ha sido muy alentador. Específicamente en el año 2007, que fue la última vez que Colombia participó de dichas pruebas, el porcentaje de estudiantes en niveles avanzados de matemáticas apenas fue de 1% comparado con otros países que alcanzaron hasta un 32% de sus estudiantes. Mientras que en el nivel inferior registra un 41% de los estudiantes colombianos, un poco menos de la mitad de los estudiantes evaluados. Estos resultados, evidencian el bajo nivel en las competencias matemática de los estudiantes colombianos, además de la brecha tan amplia entre el currículo y los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. Según Obando (2015), el desempeño de los colombianos para TIMSS 2007 en preguntas relacionadas con razones, proporciones y proporcionalidad es significativamente bajo, considerado este tema como “el punto más crítico de los aspectos evaluados” (p. 27).

Actualmente, trece años después, los resultados de Colombia en pruebas internacionales continúan estando por debajo de la media mundial. Es el caso en las pruebas PISA 2018, en las cuales un 36% de los estudiantes no alcanza el nivel 1, un 30% está en el nivel 1, un 21% en el nivel 2, un 10% en el nivel 3, solo un 3% en el nivel 4 y ningún estudiante en los niveles 5 y 6. Es importante aquí aclarar, que el rendimiento matemático en PISA se organiza en una escala por niveles de acuerdo con la capacidad de los estudiantes para realizar tareas específicas, siendo el nivel 6 el más alto y el nivel 1 el más bajo.

En relación con estos niveles, PISA considera que cualquier estudiante al terminar su educación secundaria obligatoria mínimamente deberían estar en el nivel 2. Sin embargo, como se puede ver, por lo menos un 66% de los estudiantes colombianos no alcanzan ese mínimo, estando en los niveles más bajos considerados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (en adelante OCDE) como estudiantes en riesgo que solo pueden llevar a cabo tareas obvias y por estímulo recibido.

Figura 2

Resultados de preguntas 4, 9 y 10 de la Prueba de articulación por proceso PENSAR 2019

Nro	Materia	Estándar	Competencia	Componente	Tarea	Rta	% Nac	% Pl
4	Matemáticas	Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.	Planteamiento y Resolución de Problemas	Numérico - Variacional	Resolver problemas utilizando la fracción en forma de porcentajes.	C	71	81
9	Matemáticas	Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	Comunicación, Representación y Modelación	Numérico - Variacional	Interpretar ejercicios de proporcionalidad directa utilizando razones.	A	50	57
10	Matemáticas	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.	Planteamiento y Resolución de Problemas	Numérico - Variacional	Resolver problemas de proporcionalidad directa.	B	88	95

Nota. Tomada de las publicaciones sobre resultados de la Prueba Pensar 2019 (Asesorías académicas Milton Ochoa, 2019).

En esta misma línea y a un nivel micro, se pueden analizar los resultados de una prueba estandarizada realizada por una empresa externa y aplicada en una institución educativa de carácter privado, ubicada en la ciudad de Medellín.[3] Como se puede ver en la **Figura *2***, los resultados revelan que buena parte de las estudiantes responden de manera correcta a los problemas en los cuales se debe aplicar la proporcionalidad directa a situaciones de porcentajes, escalas y semejanza. Sin embargo, al utilizar e interpretar la fracción en distintos contextos, en este caso como *razón*, se evidencia una disminución en el porcentaje de estudiantes que aprueban.

[3] Institución de carácter privado ubicada en Medellín. Esta institución tiene estudiantes de género femenino, estratos 4, 5 y 6 y ofrece formación para niveles de preescolar, primaria y secundaria.

Figura 3

Pregunta 2 de la Prueba de articulación por proceso PENSAR sobre proporcionalidad inversa

Para realizar una obra, un contratista tiene 24 empleados que trabajan todos al mismo ritmo, ellos pueden hacer la obra completamente en 120 días. La persona a la que le va a hacer la obra le dice que se la deja si la puede realizar en 90 días; el contratista decide entonces recibir más empleados para poder entregar la obra en el tiempo requerido. El procedimiento correcto para determinar cuántos empleados más se deben contratar, donde x es el número total de empleados necesarios, es:

A. $90x = 120 * 24$, entonces, $x = 120 * 24/90 = 32$, es decir, faltan 8 empleados.
B. $120x = 90 * 24$, entonces, $x = 90 * 24\ /120 = 18$, es decir, faltan 18 empleados.
C. $24x = 120 * 90$, entonces, $x = 120 * 9\ /24 = 45$, es decir, faltan 21 empleados.
D. $90x = 120$, entonces, $x = 120\ /\ 90 = 13$, es decir, faltan 13 empleados.

Nota. Imagen tomada de Asesorías académicas Milton Ochoa (2019).

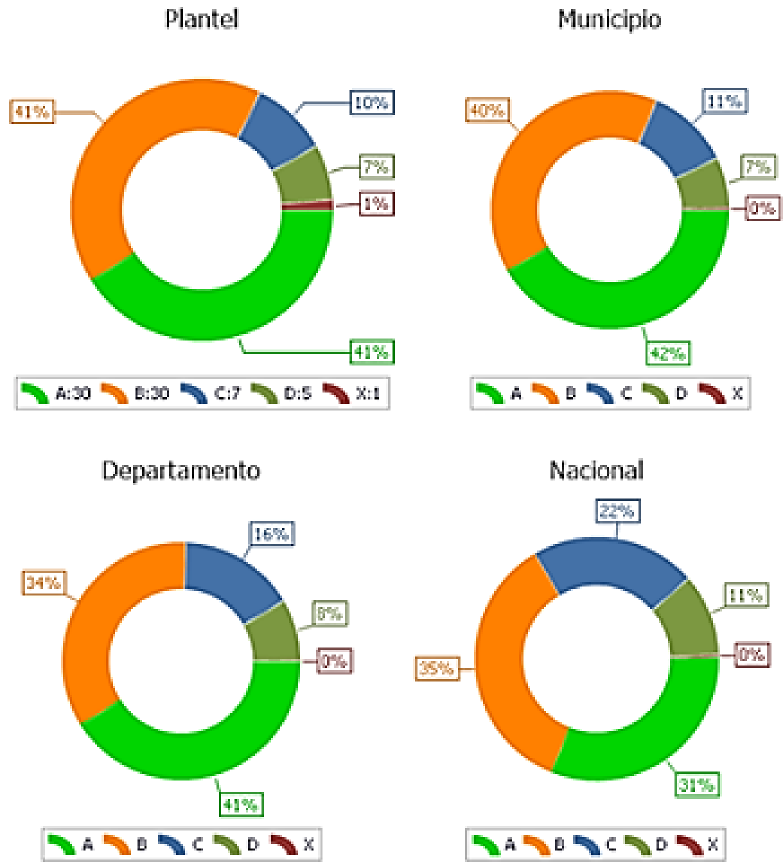
Por otro lado, se perciben resultados distintos cuando las situaciones presentadas implican relaciones inversas entre las variables. En concreto, en la prueba se presenta la situación de la **Figura 3** en esta se expone un problema rutinario en el cual se relacionan las variables cantidad de trabajadores y tiempo requerido para terminar una obra. Esta relación es de proporcionalidad inversa, ya que, en primer lugar, se señala que todos los empleados trabajan al mismo ritmo y, además, se puede identificar la correlación negativa entre las cantidades dado que, entre más trabajadores se puedan contratar, el tiempo para realizar la obra será menor en la misma proporción. De acuerdo con esto, la solución a la pregunta es la opción A.

Sin embargo, como se puede ver en los resultados de la **Figura 4**, las respuestas de las estudiantes están divididas entre las opciones A y B. Para ser más específicos, un 41% de las estudiantes escogieron la opción correcta A y un 41% de las estudiantes escogieron la opción incorrecta B. Esta tendencia no solo se verifica en la institución, sino también en el municipio, el departamento y la nación donde el patrón se repite.

Si se analiza la opción B se comprueba que corresponde a una solución de la situación como si la relación entre las cantidades fuera directa, es decir, que entre más trabajadores se emplearan mayor sería el tiempo invertido para realizar la obra en el mismo factor.

Figura 4

Resultados por plantel, municipio, departamento y nación de la pregunta 2 de la prueba Pensar 2019 sobre proporcionalidad inversa



Nota. Fuente Asesorías académicas Milton Ochoa (2019).

Al igual que internacionalmente (Lesh et al., 1988; Vergnaud, 1988, 1991), estos resultados reflejan la dificultad que tienen los estudiantes para reconocer, en una situación de proporcionalidad, si las relaciones multiplicativas entre las magnitudes son directas o inversas, pues con frecuencia los estudiantes resuelven los “problemas de proporcionalidad inversa de la misma manera como se resuelven los problemas de proporcionalidad directa” (González et al., 2003, p. 134).

Esto deja en evidencia lo reportado en la literatura especializada sobre el razonamiento proporcional, la cual sugiere que además de aprender reglas y algoritmos, los estudiantes necesitan desarrollar capacidades y criterios propios del razonamiento proporcional, los cuales les permitan “decidir si un problema se resuelve aplicando proporción directa, proporción inversa, razonamiento aditivo o cualquier otra relación numérica” (Modestou & Gagatsis, 2009, p. 27).

Así, estos resultados permiten sugerir que las estudiantes pueden utilizar los algoritmos de la multiplicación cruzada y la regla de tres, sin embargo, tal parece que no siempre están seguras de cuando utilizarlos, evidenciando dificultades sobre el concepto de proporcionalidad y el razonamiento proporcional. Esto quizá, como lo sugiere Ledesma (2004) responde a la primacía de prácticas mecánicas y operativas que siguen teniendo un papel privilegiado en el aula de clase, dejando a los estudiantes con significados limitados sobre los conceptos estudiados y “con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico lejano de la significatividad que requiere el tema de la proporcionalidad inversa” (p. 336).

A partir de lo anterior, y manera de hipótesis, se puede plantear que existe la necesidad de indagar sobre las formas como los estudiantes se enfrentan a situaciones en las que la variación no es directamente proporcional, en particular, en donde la covariación es inversamente proporcional, con el fin de ampliar la comprensión sobre los conceptos, los instrumentos y los procedimientos que dan forma a su razonamiento proporcional, en particular, aquellos que configuran la comprensión de las covariaciones inversamente proporcionales.

1.4 El razonamiento proporcional, más allá de la regla de tres

Las tres secciones previas resaltan tanto en términos investigativos como curriculares y educativos, dos discusiones. Por un lado, no cabe duda de la importancia del razonamiento proporcional en los currículos escolares de matemáticas de todo el mundo, dado su papel transversal y transitorio en todos los niveles de escolaridad y entre los componentes aritméticos y algebraicos, así, como sus vínculos e influencias sobre conceptos y situaciones de otras áreas del conocimiento (Mochón, 2012; Obando, 2015; Posada & Obando, 2006; Silvestre & Ponte, 2011).

Pero de otro lado, la literatura nacional e internacional continúa recalcando la desafortunada planeación de la enseñanza del razonamiento proporcional tanto en las prácticas educativas escolares como en los libros de texto que las orientan (Reyes et al., 2014; Rivas et al., 2012; Sánchez et al., 2012; Sánchez, 2013). Tanto en las prácticas educativas, como en los libros de texto prevalece un enfoque algorítmico y memorístico donde el razonamiento proporcional es reemplazado rápidamente por el estudio de la proporcionalidad a través de la regla de tres, la multiplicación cruzada y las frases nemotécnicas como: 'cuando una magnitud aumenta, la otra también' y 'cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye', las cuales se consolidan como criterios para hacer la elección de la regla de tres entre directa o inversa.

Esta orientación didáctica tradicional en muchos casos permite que los estudiantes respondan correcta y ágilmente las tareas de cuarta proporcional. Sin embargo, al no considerar el estudio de los procesos de covariación entre las magnitudes, el análisis de regularidades entre las cantidades y la conceptualización de la *razón* y la linealidad deja a los estudiantes desprovistos de herramientas para comprender y explicar los significados que están detrás de sus procedimientos y, por lo tanto, no se dan las condiciones para que se desarrolle el razonamiento proporcional (Mohr, 2008).

De igual manera, este enfoque de enseñanza hace persistente el obstáculo didáctico de la generalización de la linealidad, llevando a los estudiantes a resolver situaciones que no son de proporcionalidad como si lo fueran, ya que al no tener los conceptos y comprensiones necesarias para discutir, discriminar y evaluar la naturaleza de las correlaciones entre las cantidades, su criterio se basa únicamente en analizar la covariación cualitativa entre las misma, criterio que es necesario pero no suficiente, principalmente cuando las tareas propuestas no tienen la estructura de cuarta proporcional o cuando las relaciones que se dan entre las magnitudes no son proporcionales.

Adicionalmente, como ya se ha mencionado el MEN (1998, 2006, 2016), tanto en sus lineamientos como en sus documentos más recientes, los DBA, propone que en Colombia la Educación Matemática garantice el desarrollo de pensamientos y procesos. Particularmente, en relación con el razonamiento proporcional se propone una aproximación a la proporcionalidad vista como un concepto estructurante que al estudiar "los procesos de variación y cambio, permite conceptualizar aspectos relativos a lo numérico y a lo variacional" (Posada & Obando, 2006, p. 77), de manera que, se pueden promover procesos del componente aritmético, así como dar paso al concepto de función. No obstante, una visión de la enseñanza tradicional solo provee una mirada de la proporcionalidad en lo aritmético enfocada en la aplicación y solución de algoritmos y operaciones.

Como lo destacan distintos autores (Castañeda et al., 2016; Gairín & Oller, 2011; Obando, 2015), estas y otras dificultades continúan influyendo en los aprendizajes de los estudiantes, lo cual se ve reflejado en el bajo desempeño de estudiantes de todo el mundo en preguntas relacionadas con razonamiento proporcional, *razón*, proporción y proporcionalidad que aparecen en pruebas internacionales como TIMMS y PISA.

No obstante, a pesar de la fuerte influencia de la concepción algorítmica que privilegia lo numérico en la enseñanza de la proporcionalidad, comienzan a reconocerse otras miradas tanto en los referentes institucionales nacionales como en la literatura que apuntan a una integración de lo aritmético y lo variacional para abordar la proporcionalidad (Fernández & Llinares, 2012; MEN, 2006, 2016; Obando, 2015; Posada & Obando, 2006; Sánchez, 2013; Silvestre & Ponte, 2011). Al respecto, estas investigaciones resaltan el cambio de mirada en el estudio de la proporcionalidad, a partir del análisis de las relaciones entre las cantidades, del estudio de los procesos covariacionales entre ellas (lineales y no lineales) y del reconocimiento de los invariantes operativos. Además, del reconocimiento de otras prácticas que permiten el análisis de la covariación entre cantidades de distinta familia.

Sin embargo, estas investigaciones se han concentrado principalmente en el estudio de la proporcionalidad directa y las funciones de la razón en ella, dejando apenas esbozos de los procesos de covariación y de los invariantes detrás de la proporcionalidad inversa, los cuales aluden a una posible integración de la proporcionalidad directa e inversa desde la perspectiva de los invariantes y prometen un campo de investigación fructífero que puede explorarse en mayor amplitud. Por eso, pensar en otras situaciones que se aborden no solo desde una mirada aritmética sino en integración con la variación podría generar en los estudiantes otras representaciones, procedimientos y conceptualizaciones en clave del cambio, el reconocimiento de las variables, los procesos de covariación y los patrones o invariantes multiplicativos.

Con este panorama esta investigación pretende responder a la pregunta:

¿Cómo son los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan algunas estudiantes de grado séptimo al abordar situaciones de proporcionalidad inversa?

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Para lograr dar respuesta a la pregunta de investigación, se plantea como objetivo caracterizar los instrumentos, los procedimientos y los conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan algunas estudiantes de grado séptimo al abordar situaciones de proporcionalidad inversa.

3. Marco teórico

Este capítulo presenta los objetos teóricos que permitieron caracterizar los procedimientos, instrumentos y conceptos de razonamiento proporcional que movilizaron las estudiantes al enfrentarse a tareas de proporcionalidad inversa. En las primeras secciones se abordan la *razón*, proporción y proporcionalidad directa e inversa retomando los planteamientos de Obando (2015), Obando et al. (2014) y Posada y Obando (2006). En la siguiente sección se exponen nociones relacionadas con el razonamiento proporcional de acuerdo con lo que plantean Modestou y Gagatsis (2009, 2010) y finalmente, en la última sección se retoman algunos planteamientos de Obando (2015) y Godino et al. (2002) sobre la teoría de la actividad y la propuesta de configuración epistémica.

3.1 Sobre la *razón* y la proporción

Un par de conceptos afines al razonamiento proporcional son la *razón* y la proporción. Estos no solo tienen influencia en la solución de problemas de proporcionalidad sino también en la fundamentación conceptual de esta forma de razonamiento al permitir el desarrollo de procesos de comparación y covariación respectivamente (Modestou & Gagatsis, 2010).

Obando (2015) realiza un recorrido histórico sobre algunas culturas y costumbres antiguas, en el cual rastrea cómo el concepto de *razón* emerge alrededor del intercambio de bienes y servicios, el cobro de impuestos, el cultivo y la navegación. Esta diversidad de actividades cotidianas a través de las cuales emerge un concepto de *razón* produce una multiplicidad de significados y usos para este concepto.

Esta multiplicidad antes mencionada, ha producido también a nivel teórico e investigativo diferentes sentidos y aproximaciones conceptuales a la *razón*, proporción, proporcionalidad y los números racionales. Y, aunque estas apuestas no son contradictorias, dicha diversidad ha dificultado la consolidación de un consenso que es necesario en el marco de la educación matemática. Por esta razón, en esta investigación se abordan las nociones de *razón* y proporción a través Obando et al. (2013) dado que con su visión proponen dar orden a la variedad de interpretaciones poniendo en el centro los invariantes que dan sentido a la covariación entre las cantidades.

En primer lugar, para hablar de *razón* hay que ahondar sobre la noción de cantidad, fundamental no solo en este campo del razonamiento proporcional sino en general para las matemáticas. De acuerdo con Obando et al. (2013), una cantidad es una atribución que se puede realizar sobre un fenómeno, objeto, evento o una sucesión de estos, lo que permite un ordenamiento en diferentes estados (de ese objeto, evento o fenómeno). Es decir que, siempre que un atributo cumpla la relación de orden se puede llamar cantidad y, por ende, si bajo una misma atribución de cantidad se identifican dos estados posibles de un mismo objeto, ambos estados deben ser susceptibles de comparar cuantitativamente, permitiendo establecer cuándo una cantidad es equivalente a otra, o cuándo una cantidad es mayor o menor que otra.

Esto significa que en el marco de una atribución de cantidad se debe definir una relación de equivalencia que permita establecer cuando dos estados son equivalentes uno al otro, y, por ende, cuando uno difiere del otro. Así, al tener una relación de equivalencia, entonces las manifestaciones posibles de un objeto, evento o fenómeno bajo una determinada atribución de cantidad debe permitir la definición de clases de equivalencia. Por ejemplo, “cuando la atribución de cantidad refiere a una longitud, las clases de equivalencias formadas se pueden llamar cantidades de longitud” (Obando et al., 2013, p. 980). Así, las clases de equivalencia y las relaciones de orden dan lugar a los sistemas de cantidades, concepto englobante que permite definir la *razón*.

Por lo tanto, para hablar de una atribución de cantidad desde esta postura, es suficiente con que el fenómeno permita establecer una relación de orden y no es necesaria la medición, ni la definición de la operación aditiva. Estas nociones permiten conceptualizar la *razón* sin necesidad de hacer distinciones entre número o magnitud, evitando así la diferenciación sobre magnitud en las matemáticas y en la física.

También, dado que es posible establecer relaciones de orden entre cantidades entonces, es posible compararlas. Y en este punto es importante mencionar, en particular, dos tipos de comparaciones. Por un lado, es posible comparar cantidades a través de la diferencia entre estas, lo que permite concluir cuándo una cantidad es igual a otra, cuándo una de las cantidades es mayor o menor que la otra y por cuánto. En este caso, aludimos a relaciones de naturaleza aditiva o a la razón aritmética. Por otro lado, cuando las cantidades son comparadas a través del cociente entre ellas se puede expresar cuantas veces está contenida una de las cantidades en la otra y se habla de una relación de naturaleza multiplicativa o razón geométrica.

Sin embargo, aunque existen las dos acepciones de razón antes mencionadas, en la modernidad cuando en el lenguaje matemático se hace referencia a la *razón* se alude principalmente a la comparación multiplicativa. En este sentido, para esta investigación el concepto de *razón* entre dos cantidades será entendido como una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre dos cantidades, la cual expresa la cuantificación de la relación entre dichas cantidades. De acuerdo con Obando et al. (2013) cuando se comparan dos cantidades *x* e *y* a través del cociente, se pueden definir dos razones: la *razón de x* a *y* o la *razón* de *y* a *x*. Este par de razones son recíprocas entre sí, y al encontrar una de ellas es posible hallar la otra, dado que, si la *razón de x* a *y* es igual a *p* entonces, la *razón* de *y* a *x* se puede encontrar como p^{-1} ó $\frac{1}{p}$.

La *razón* se puede interpretar de dos maneras de acuerdo con la naturaleza de las cantidades que se comparan. Por un lado, cuando las cantidades son homogéneas, la *razón* se comprende como la cuantificación de una de las cantidades en relación con la otra y, por otro lado, cuando las cantidades que se comparan son heterogéneas, la *razón* se puede entender como la relativización o normalización de una de las cantidades por cada unidad de la otra.

Para entender la *razón* entre cantidades homogéneas se presenta el ejemplo de la comparación entre las edades de una madre y su hija, dado que ambas cantidades pertenecen al mismo sistema de cantidad: edad de vida. Si se sabe que la madre tiene 30 años y su hija tiene 6 años, la *razón* entre la edad de la madre y su hija representada como $\frac{30\ años}{6\ años}$ es igual a 5, lo cual permite interpretar que la edad de la madre es el quíntuple de la edad de la hija. Y, como la comparación por cociente también permite definir la *razón* inversa, asimismo se puede concluir que la edad de la hija es la quinta parte de la edad de la madre.

Por otra parte, cuando las cantidades son heterogéneas es posible analizar un ejemplo de compra. Sea el caso, cuando se compran 30 cuadernos por un total de \$105.500 en una papelería, al comparar estas cantidades por cociente así $\frac{105.500\ pesos}{30\ cuadernos}$, se puede concluir que la *razón* es igual a 3500 pesos/cuaderno. Este valor de la *razón* permite interpretar que por cada cuaderno se paga un valor de \$3.500 pesos.

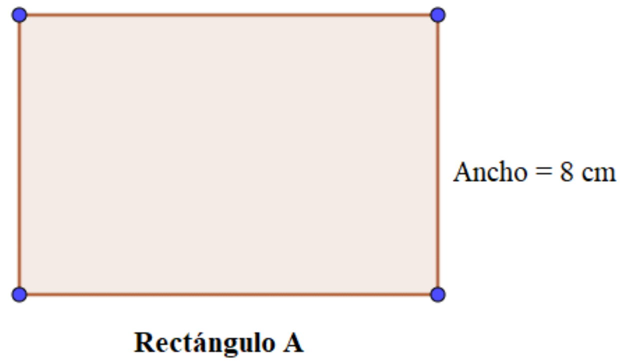
Dadas las dos interpretaciones de la *razón* de acuerdo con la naturaleza de las cantidades involucradas es posible describir dos funciones para la *razón*: como *relator* y como *correlator*. Por un lado, cuando las dos cantidades son de la misma familia, la *razón* actúa como relator y produce una cantidad intensiva adimensional, la cual se interpreta como cuántas veces está contenida una cantidad en la otra. “Por ejemplo, entre dos cantidades *x* e *y* en donde *x* es el doble de *y*, 2 objetiva la *razón* entre dichas cantidades y la expresión “es el doble de” la relación entre ellas” (Obando et al., 2013, p. 982).

Por otro lado, cuando las cantidades comparadas son de distinta familia entonces la *razón* se representa como una cantidad intensiva dimensional, la cual cumple la función de correlator expresando la medida relativa de una de las cantidades tomando la otra como unidad. Por ejemplo, cuando se indica que un automóvil realizó un recorrido a una velocidad constante de *60km/h*, esto se refiere a que, por cada hora transcurrida el carro recorrió *60 km*.

Además, de acuerdo con su función, la *razón* también puede categorizarse como *operador* o como *transformador*. Por un lado, cuando se tienen una cantidad y la *razón* entre esta cantidad dada y otra desconocida, “entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida” (Obando et al., 2013, p. 982). Así, si la cantidad dada y la cantidad desconocida son homogéneas entonces la *razón* hace el papel de un operador escalar que expresa el factor ya sea de ampliación o reducción, es decir, que aplicado sobre alguna de las cantidades produce la otra.

Por otro lado, cuando la *razón* dada es un correlator y la cantidad inicial y la final son heterogéneas, entonces la *razón* tiene la función de *transformador* y al aplicarlo “sobre una de las cantidades, la transforma en la otra con la que se correlaciona” (Obando et al., 2013, p. 982). En este caso, al aplicar la *razón* sobre una de las cantidades conocidas perteneciente a un sistema de cantidad la transforma en la cantidad correspondiente del otro sistema de cantidad relacionado.

Figura 5
Ejemplo de razón como operador



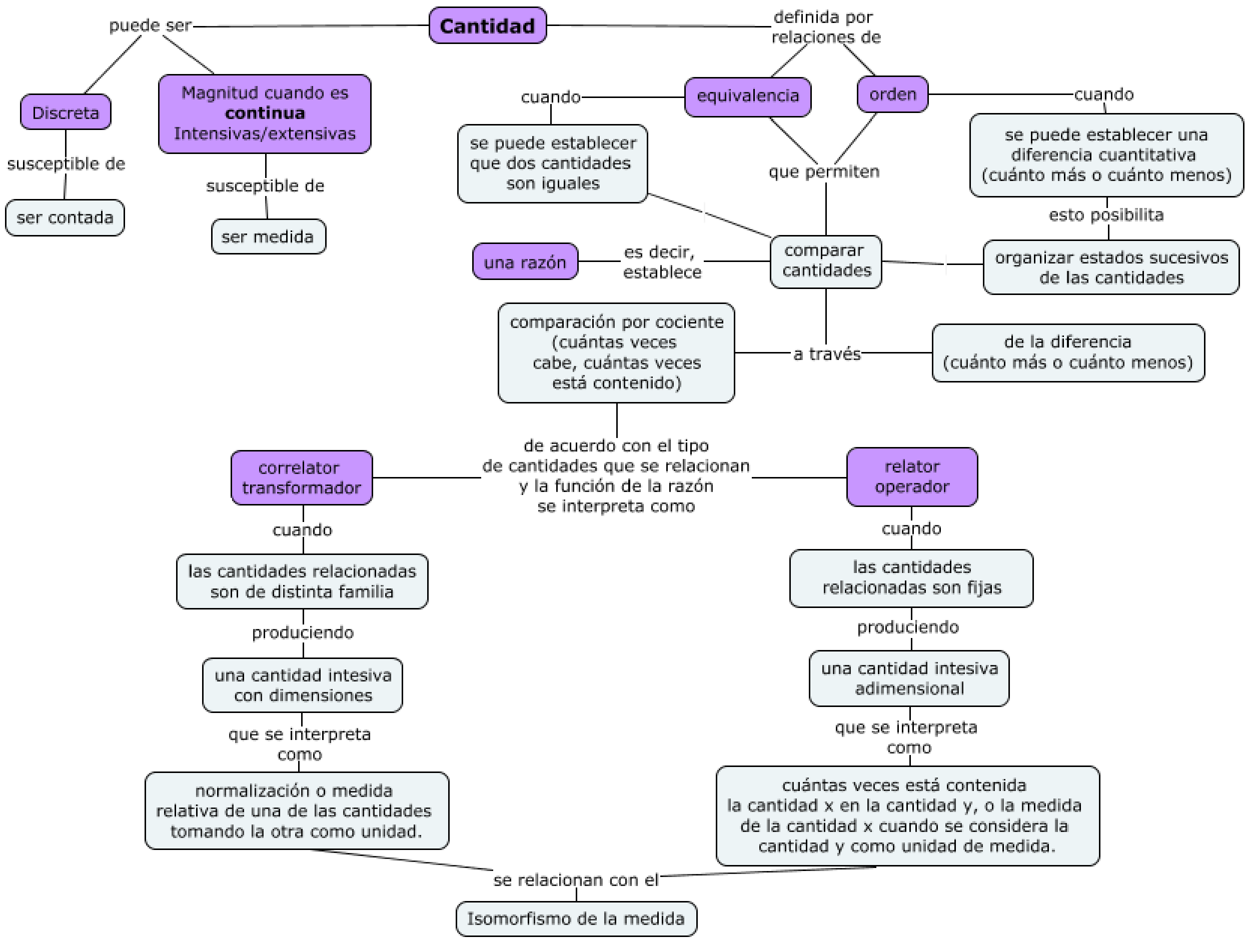
Para entender la función de la *razón* como operador piense el siguiente ejemplo, se tiene un rectángulo como se muestra en la **Figura 5**, del cual se sabe que la medida del largo es el triple de la medida del ancho y que el ancho mide 8 cm. Con esta información, se quiere encontrar la medida del largo. En este sentido, como la medida del largo es el triple de la medida del ancho, esto significa que el largo mide 3 veces lo que mida el ancho, es decir, que la *razón* es 3 y, por lo tanto, para encontrar dicha medida y utilizando la *razón* como operador, se multiplica la medida del ancho del rectángulo por la *razón*, esto es, 8 *cm* por 3 que da como resultado 24 *cm*, luego el largo mide 24 *cm*.

Por su parte, para comprender la función de la *razón* como transformador se retoma el ejemplo del vehículo antes mencionado, suponga que la velocidad constante del viaje fue de 60 *km/ h* y que, además, se sabe que el recorrido fue de 3 horas. En este caso, la cantidad inicial es el tiempo de recorrido y la *razón* es la velocidad, información que permite concluir que por cada hora el vehículo recorrió 60 *km*, entonces el recorrido final es equivalente a multiplicar 60 *km/h* por 3*h* lo que permite conocer que el carro recorrió 180 *km*. Aquí, la *razón* 60 *km/h* se aplica sobre 3*h* y la transforma en 180 *km*.

Sobre la proporción, será entendida como la equivalencia entre dos razones, lo que significa que dos razones que formen una proporción deben tener igual medida relativa o normalización. Polya (1954) sugería que la proporción es un caso especial de analogía, dado que las proporciones al igual que las analogías exigen analizar “las relaciones entre las relaciones centrándose en el hallazgo del patrón estructural entre los términos” (Modestou & Gagatsis, 2010, p. 40). En la **Figura *6*** que aparece a continuación se presenta una síntesis de este apartado.

Figura 6

Mapa resumen del apartado 3.1 Sobre la razón y la proporción



Nota. Este mapa conceptual sintetiza este apartado.

3.2 Sobre la proporcionalidad directa e inversa

A partir de la formulación de Obando et al. (2014), la proporcionalidad será entendida como “una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de la identificación de una propiedad invariante a todas las parejas de cantidades correspondientes” (p. 986). Es por lo que, desde esta visión, se resaltará tanto en la proporcionalidad directa como en la inversa aquella propiedad invariante que se conserva entre las cantidades o familias de cantidades relacionadas.

La proporcionalidad directa e inversa están incluidas dentro de un tipo correlación en el cual las variables se corresponden de manera lineal. Por un lado, en la proporcionalidad directa, dos variables se relacionan a través de una correlación positiva lineal describiendo un modelo funcional de línea recta de la forma $y = mx$, donde m es un número real. Esta expresión significa, que "variaciones en un cierto factor en una de las variables, generan en la otra variable variaciones en el mismo sentido, y en el mismo factor" (Posada & Obando, 2006, p. 106) y, además, que para una pareja de cantidades de cada variable que se corresponden, el cociente o *razón* siempre será igual a m, la cual hace el papel del factor o constante de proporcionalidad entre los dos sistemas de cantidades correlacionados.

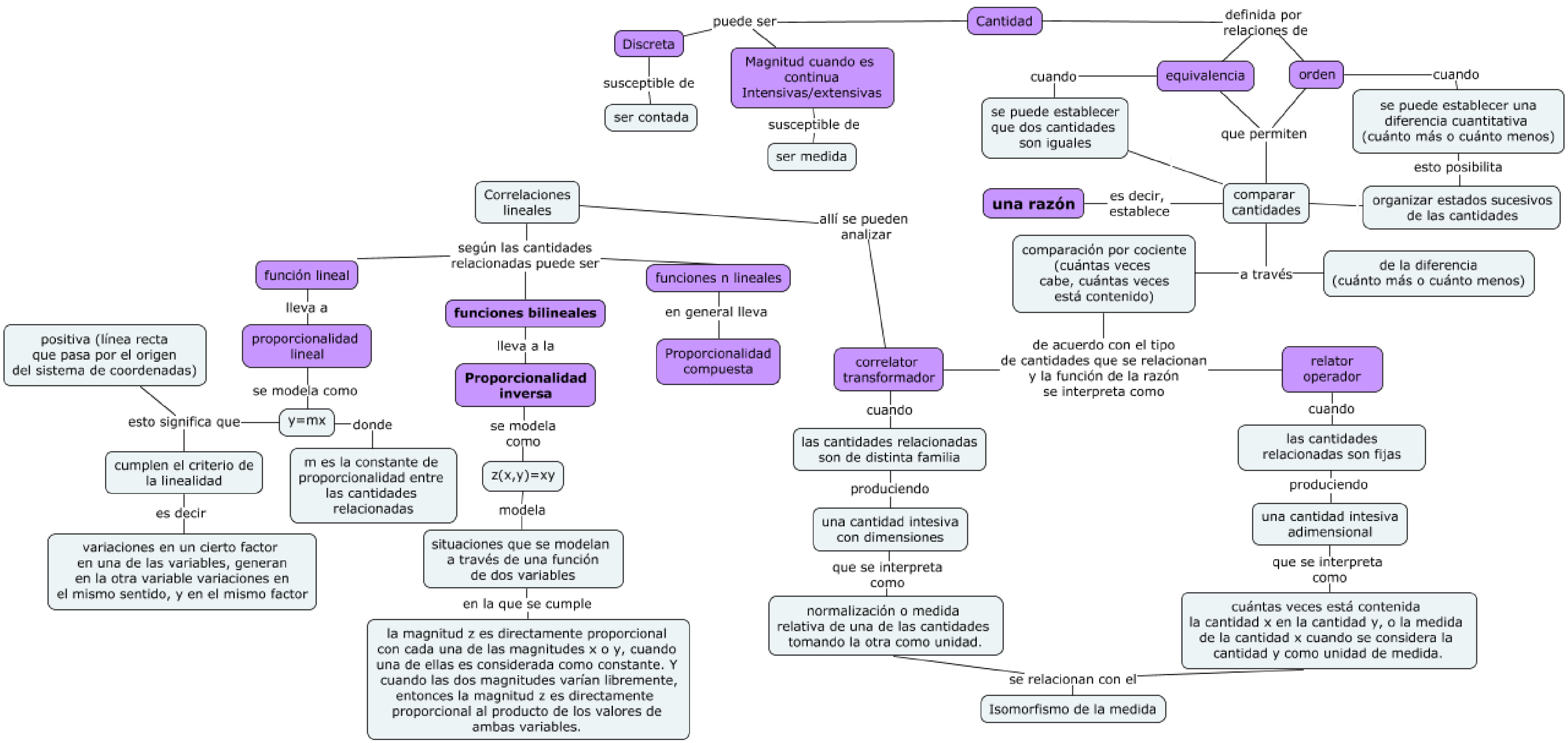
Por otro lado, en la proporcionalidad inversa una variable se relaciona con dos variables y lo hace con cada una de manera lineal produciendo una correlación bilineal de la forma $z(x, y) = kxy$, donde k es un número real y hace las veces de constante de proporcionalidad. En estos modelos funcionales, la variación de *z* está descrita en términos de la variación simultánea de *x* e *y*, de manera que, la variable z es

> directamente proporcional con cada una de las magnitudes x o y, cuando una de ellas es considerada como constante. Pero cuando las dos magnitudes varían libremente, entonces la magnitud z es directamente proporcional al producto de los valores de ambas variables. (Posada & Obando, 2006, p. 114)

Como z es directamente proporcional al producto de las variables *x* e y, entonces cuando z se fija como constante, las variables *x* e *y* deben variar inversamente proporcional, es decir, que cuando una de las cantidades varía la otra cantidad debe variar de tal forma que se conserve el producto entre ellas. Esto por lo que, en la proporcionalidad inversa, la propiedad invariante es el producto entre las dos cantidades de cada sistema de cantidades, y así, el cambio en una de variables en un cierto factor produce en la otra variable un cambio en el factor inverso.

Figura 7

Mapa resumen de conceptos sobre razón, proporción y proporcionalidad



Nota. Este mapa se sintetizan los dos apartados anteriores sobre *razón*, proporción y proporcionalidad.

3.3 Razonamiento proporcional

En sus investigaciones sobre el pensamiento lógico, Inhelder y Piaget (1958) fueron pioneros en resaltar el papel del razonamiento proporcional en la constitución de las operaciones formales en el sujeto, al promover el desarrollo de habilidades relacionadas con la variación simultánea entre clases y la constitución de algunas transformaciones como la identidad, la negación, la reciprocidad y la correlación.

Para estos autores, el razonamiento proporcional empieza a desarrollarse, en primer lugar, de manera cualitativa y lógica cuando los sujetos a través de sus recursos lingüísticos manifiestan relaciones de coordinación, compensación y conservación entre los objetos y las cantidades. Ese primer acercamiento permite que, en segundo lugar, los sujetos puedan prepararse para procesos cuantitativos, en los cuales se espera alcancen las capacidades de correlación entre cantidades al reconocer patrones de variación que vinculen dichas cantidades.

Con este desarrollo de procesos y tránsitos de estadios, Piaget sustenta que el desarrollo del razonamiento proporcional depende tanto de un componente lógico como de otro matemático. Pues, por un lado, con el componente lógico el sujeto desarrolla capacidades para descubrir relaciones entre relaciones y, por otro lado, con el componente matemático, comprueba cuantitativamente las relaciones de compensación entre las razones que forman una proporción.

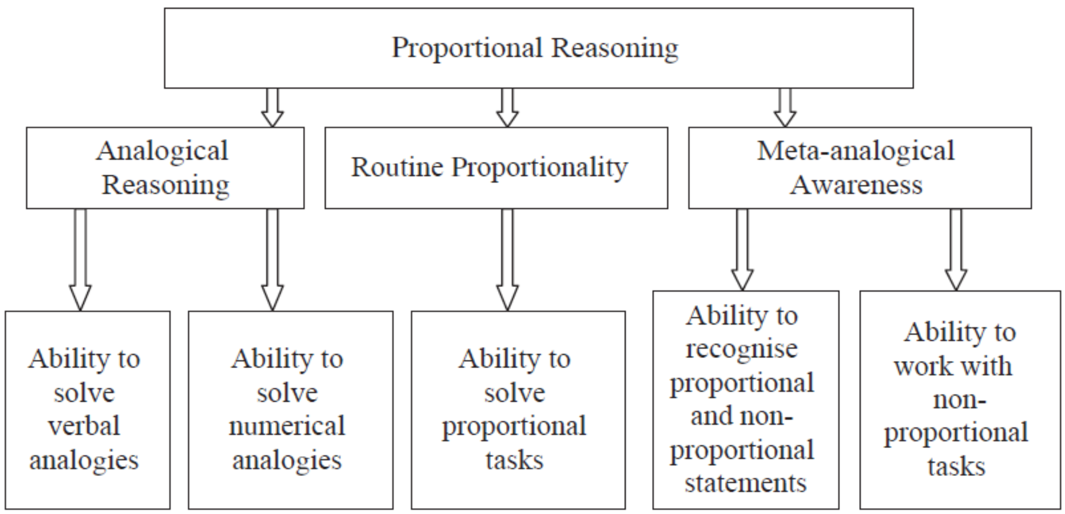
Por su parte, como ya se ha mencionado, Lesh et al. (1988) y Modestou y Gagatsis (2010) coinciden en que el razonamiento proporcional no se debería determinar únicamente por la capacidad de un sujeto para resolver correctamente problemas de cuarta proporcional. Si bien este aspecto, hace parte del desarrollo del razonamiento proporcional, algunas veces la solución de estos problemas se presta a recursos algorítmicos que acentúan la automatización de una regla.

Lo que sí es esencial para Lesh et al. (1988) en relación con el razonamiento proporcional, es que un sujeto pueda reconocer una similitud estructural en los dos lados de una ecuación de la forma $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, identificando allí un patrón de relaciones u operaciones multiplicativas, de manera que al realizar transformaciones en las cantidades se mantenga una invarianza, es decir, las relaciones multiplicativas entre las cantidades se conserven proporcionales entre ellas.

Mientras que, Modestou y Gagatsis (2010) como ya se ha comentado, proponen que el razonamiento proporcional se da a partir de una tríada en la que se integran y se desarrollan: la capacidad de razonar analógicamente, la presencia de una conciencia de la linealidad y la habilidad para resolver problemas de cuarta proporcional tal como se muestra en la **Figura *8***. Así, de manera indirecta, los autores sugieren que el razonamiento proporcional "no es un proceso de un componente, sino que abarca espectros más amplios y complejos de habilidades cognitivas" (Modestou & Gagatsis, 2010, p. 38).

Figura 8

Modelo de Razonamiento proporcional propuesto por Modestou y Gagatsis



Nota. Fuente Modestou y Gagatsis (2010, p. 39).

Así, como ya se ha mencionado, esta investigación comprenderá el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra: el sentido de covariación entre cantidades, la capacidad para reconocer patrones estructurales e invariantes operativos entre relaciones de segundo orden (relaciones entre relaciones) y la habilidad para identificar el comportamiento lineal y no lineal entre las cantidades relacionadas en una situación.

Respecto al sentido de covariación, se espera que un estudiante pueda reconocer los sistemas de cantidades que están involucrados en la situación y al fijar la atención en la manera cómo estas cantidades cambian, identifique las relaciones que entre ellas se dan. En particular, al hablar de covariación se hace referencia a la capacidad para identificar en la relación entre dos cantidades, que el cambio en una de las cantidades produce una variación en la otra cantidad y, por tanto, los procesos de covariación encontrados pueden expresarse incluso de manera cualitativa o pre numérica. Cuando la covariación se logra expresar a través de un modelo funcional, entonces se habla de cantidades correlacionadas (Posada & Obando, 2006).

Así, el sentido de covariación que describa el razonamiento proporcional debe considerar los efectos de la covariación simultánea de dos o más sistemas de cantidades a partir de la identificación de un invariante multiplicativo. Esto, a diferencia de los procesos de variación aditivos, en los cuales hay un solo sistema de cantidad (o solo se considera uno de los sistemas de cantidades involucrados) y se analizan los cambios secuenciales en dicho sistema de cantidad independientemente de otros sistemas de cantidades (si existen).

Como se deja ver en los párrafos anteriores, un análisis de la variación que implique razonamiento proporcional está estrechamente ligado con el segundo aspecto: la capacidad para reconocer patrones estructurales o invariantes operativos en relaciones de segundo orden, es decir, relaciones entre relaciones. Para Modestou y Gagatsis (2010) esta habilidad para identificar regularidades, emplear patrones y manipular analogías tanto visuales, verbales como aritméticas no es otra cosa que el razonamiento analógico.

Este vínculo entre razonamiento proporcional y analógico tiene sentido, pues como aludía Polya (1954) toda proporción es un caso especial de analogía, dado que en una analogía al igual que en una proporción se comparan varios elementos a partir de una semejanza o característica en común. En el caso de la proporción, la *razón* cumple el papel de patrón estructural o semejanza en común, la cual permite analizar las relaciones que se dan entre las cantidades comparadas.

De manera que encontrar el patrón estructural será equivalente a descubrir un invariante que permite percibir el cambio entre cualquier par de sistemas de cantidades relacionados. En el caso de la proporcionalidad directa, la *razón* entre dos valores correspondientes de los sistemas de cantidades relacionados hace el papel de patrón estructural o constante de proporcionalidad. Esta *razón* permite comprender la coordinación simultánea entre los dos sistemas de cantidades relacionados pues, por un lado, soporta que cuando se produzca una variación en una de las cantidades en la otra cantidad correspondiente también ocurra una variación en el mismo sentido y, además, expresa la manera cómo se coordina dicho cambio, es decir, conserva la misma proporción de cambio. Véase la siguiente situación hipotética de proporcionalidad directa tomada de un libro de texto hipertexto para ejemplificar lo que se acaba de enunciar.

Un tanque que tiene una profundidad de 2,5 *m* contiene 85.000 litros de agua cuando está completamente lleno. Con esta información, encontrar la cantidad de agua que contiene el tanque cuando el nivel del agua baja 1,5 *m* (Chizner et al., 2010).

En esta situación, los sistemas de cantidades que se relacionan son el nivel de agua del estanque y la cantidad de agua. La *razón* que vincula cualquier par de valores correspondientes de ambos sistemas de cantidades se encuentra comparando las cantidades correspondientes:

$$\frac{\text{Cantidad de agua}}{\text{Nivel del agua}} = \frac{85.000\ l}{2{,}5\ m} = \frac{34.000\ l}{1\ m}$$

La cantidad encontrada 34.000*l*/1*m*, significa que por cada metro de altura de ese estanque hay 34.000 litros de agua. Esta *razón* permite saber que cada vez que la altura del estanque aumente o disminuya en 1*m* entonces el contenido de agua del estanque debe aumentar o disminuir, respectivamente, 34.000 litros, es decir, que la *razón* fija una relación que coordina la covariación entre las cantidades en la situación.

En el caso de la proporcionalidad inversa, lo que se mantiene invariante es el producto entre todas las parejas de cantidades correspondientes de los dos sistemas de cantidades relacionados. De manera que, los efectos en uno de los sistemas de cantidades en un cierto factor deben producir efectos en el otro sistema de cantidades, en el factor inverso, así la multiplicación entre ambos se mantiene constante. Véase la siguiente situación hipotética de proporcionalidad inversa tomada de un libro de texto hipertexto para ejemplificar lo que se enuncia.

“Un vehículo gasta 6 horas para viajar de un lugar a otro a una velocidad de 40 *km/h*. ¿Cuánto tiempo gasta el mismo vehículo para hacer el mismo recorrido viajando a una velocidad de 70 *km/h*?” (Chizner et al., 2010)

En esta situación, al ser de proporcionalidad inversa, lo que se mantiene invariante es el producto entre los valores correspondientes al tiempo y la velocidad así:

$$tiempo.velocidad = (6\ h).\left(40\frac{km}{h}\right) = 240\ km$$

Lo que se encuentra al multiplicar las dos cantidades de distinto sistemas de cantidades, es una tercera cantidad, la distancia recorrida por el vehículo entre las dos ciudades, cantidad que no se sugiere o pide encontrar en el enunciado. Esto significa, que por más tiempo que se toma el carro o más rápido o lento que viaje el carro, la distancia que debe recorrer siempre será la misma, es decir, 240 *km*. Así, teniendo cualquier velocidad siempre será posible saber cuánto tiempo se demora y viceversa, dado que ese invariante coordina el proceso de variación entre los dos sistemas de cantidades relacionados. En suma, en situaciones de proporcionalidad inversa, como se expresó antes, existe una cantidad (constante), que es el producto de otras dos cantidades (variables), y esta tercera cantidad, la mayoría de las veces está implícita en la situación.

También existen otros tipos de relaciones entre cantidades que varían de tal manera que al aumentar una de las variables produce aumentos en la otra variable, pero no necesariamente son lineales o que, al aumentar una de las variables la otra disminuye y no por eso son relaciones bilineales. Esto deja ver, que el invariante caracteriza la covariación entre las cantidades y, además, que existen otro tipo de relaciones entre cantidades como por ejemplo variaciones exponenciales, logarítmicas, cuadráticas, entre otras. Es por esto, que el último aspecto relacionado con el desarrollo del razonamiento proporcional en un sujeto tiene que ver con la capacidad para identificar los procesos de covariación entre las cantidades y analizarlos a través del invariante multiplicativo que gobierna dicha covariación.

Un elemento fundamental de este aspecto es la facultad para analizar y valorar las situaciones antes de resolverlas, teniendo en cuenta las cantidades involucradas, los tipos de patrones que se forman y las relaciones entre las cantidades, las cuales no siempre son de covariación lineal o bilineal.

Este último aspecto se ve influenciado por un factor experiencial, el cual permite a cada individuo hacer una interpretación de las situaciones de acuerdo con lo vivido, este le da los elementos a una persona para pensar un problema, comprender cuáles son las variables, cómo es que estás se comportan en su cotidianidad, si tiene o no sentido los valores que toman, entre otros. Sobre esto Obando (2015) se refiere a una especie de ley social que caracteriza los fenómenos.

Estos aspectos dejan ver que el razonamiento proporcional en los sujetos se desarrolla de manera gradual y progresiva, partiendo del análisis de variación cualitativa y sobre la adición, hasta formas de razonamiento proporcional. Por eso, se tomarán en cuenta las etapas propuestas por Lesh et al. (1988) y Koellner-Clark y Lesh (2003), las cuales recogen los tres aspectos mencionados anteriormente y esbozan el trasegar de las capacidades de los estudiantes en relación con el razonamiento proporcional, a saber:

Etapa 1: Al abordar una situación, el estudiante puede identificar datos e información notable de la misma, sin embargo, analiza de manera aislada las cantidades que intervienen en el problema.

Etapa 2: Al analizar los cambios entre las cantidades, el estudiante reconoce una covariación entre las variables, no obstante, solamente de manera cualitativa utilizando frases o expresiones verbales. En esta fase se considerarán la percepción no numérica cuando los estudiantes utilizan expresiones generales para cuantificar las relaciones como, por ejemplo: mucho, poco, varios, etcétera y la percepción cuantitativa pre numérica cuando las expresiones utilizadas por los estudiantes además de cuantificar comparan y establece relaciones entre las cantidades (Obando, 2015).

Etapa 3: Luego de fijar la atención en la covariación, el estudiante intenta encontrar patrones estructurales que vinculen las dos variables, pero desde una perspectiva aditiva al preguntarse por los incrementos o disminuciones y las relaciones parte todo.

Etapa 4: En esta etapa, el estudiante reconoce patrones estructurales que permiten describir la correlación de las cantidades en la coordinación de regularidades multiplicativas crecientes y decrecientes en términos de un factor o escalar, por ejemplo, el doble, el triple, una sexta parte, etc, estas expresiones se nombrarán como percepciones numéricas ya que los estudiantes describen la covariación a través de una expresión o frase numérica (Obando, 2015).

A esta estrategia de análisis de la covariación de las cantidades, Obando (2015) la nombra razonamientos analógicos, en donde al encontrar la relación entre dos o más cantidades en uno de los sistemas de cantidades, esta relación se trasladada de forma análoga a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades.

Etapa 5: Ante una situación de variación, un estudiante puede comprender la coordinación de las cantidades que se relacionan en función de una constante de proporcionalidad la cual relaciona cualquier par de valores pertenecientes a los dos sistemas de cantidades relacionados. A este tipo de procedimiento, Obando (2015) lo nombra razonamientos analíticos, en estos se identifica una relación ya no entre cantidades del mismo sistema de cantidad, sino las parejas de distintos sistemas de cantidades, que no es más que la *razón* para la proporcionalidad directa y el producto para la proporcionalidad inversa. Este autor, llama a estos razonamientos como analíticos, dado que se basan en la relación funcional entre las cantidades conjuntas de dos sistemas de cantidades.

3.4 Sobre los procedimientos, instrumentos y conceptos

En cuanto a los procedimientos, instrumentos y conceptos se retomaron algunos planteamientos de Obando (2015) y Godino et al. (2002) sobre la teoría de la actividad y la propuesta de configuración epistémica a través de las cuales se puede entender la formación del conocimiento matemático en los contextos escolares. A continuación, se presentan algunos elementos que hacen parte del entramado teórico y permiten entender la función de los procedimientos, instrumentos y conceptos en la práctica matemática de un estudiante.

3.4.1 Sistema de práctica

Para Lave y Packer (2011) la cultura no puede ser entendida solamente como el cúmulo de objetos con valor ancestral que conservan las tradiciones de una sociedad, pues, aunque para entender su complejidad se debe considerar este aspecto tradicional, también es importante abarcar las relaciones y transformación que se dan entre los sujetos. En parte, estas relaciones son evidentes desde que las personas nacen, ya que cuando el individuo está inmerso en actividades culturalmente organizadas, la sociedad lo dota de unas herramientas propias de la cultura: símbolos, significados, tensiones y el lenguaje mismo que describe, que comunica, que invita, que recibe y que transforma.

Así, la experiencia y la red estructural cognitiva no es solo una construcción producto de la acción mental de cada individuo, esta también se constituye como el resultado de las interacciones que este individuo tiene con los otros y con el medio externo a él. De manera que, la actividad humana es posible por la coexistencia de lo individual y lo social.

Un individuo al estar inmerso en una sociedad comparte con el resto de los individuos unos valores, acuerdos y condiciones que dirigen, demarcan y limitan las formas de actuar y pensar de dicho grupo social, esto da una identidad a quienes pertenecen allí, puesto que hay elementos definidos que rigen la acción, el análisis y la interpretación, pero al tiempo, dada la singularidad de cada individuo y sus capacidades reflexivas y propositivas, dicho consenso social y cultural puede transformarse y reconfigurarse. A esta idea responde lo que Bourdieu nombra sistema de práctica.

3.4.2 Objeto matemático

De acuerdo con Blumer (1982), los objetos matemáticos son entendidos como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo que puede hacerse referencia" (Godino, 2002, p. 245) cuando se realizan, transmiten o aprenden matemáticas. Para Obando (2015), en la medida en que un individuo se relaciona con un objeto, lo utiliza y opera con él, este objeto matemático se va constituyendo en la abstracción a partir de la acción sobre este, como "la percepción de un conjunto complejo de operaciones y relaciones que se tematizan a partir de la experiencia vivida" (Obando, 2015, p. 37).

Estos objetos matemáticos se ven representados en los signos, los cuales al ser una materialización de los objetos permiten a los individuos operar con ellos. Sin embargo, más allá de externalizar los objetos, en los signos se cristalizan "un conjunto de significados, de patrones de actividad de los sujetos, haciendo entonces de este signo una construcción cultural con capacidad para orientar la acción de los individuos" (Obando, 2015, p. 42). Esto significa que, el signo además de ser una representación simbólica del objeto matemático personifica un conglomerado de significados y sentidos los cuales se van constituyendo en la cultura y a través de las experiencias que tienen los individuos en su acción. De manera que, el objeto matemático es contextualizado y por eso mismo, no es estático, antes bien, se va transformando junto con los patrones culturales de acción de los individuos y las sociedades.

También, en los signos es posible reconocer una doble relación respecto al conocimiento, por un lado, los signos se presentan como instrumentos para representar y expresar los procesos de pensamiento y, por otro lado, son un medio a través del cual se ejecutan las acciones cognitivas en el proceso de constitución de la conciencia. Así, como sugiere Cassirer "el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario" (Godino, 2002, p. 239) permitiendo no solo expresar lo que se piensa sino también conducir y desarrollar los razonamientos.

A este proceso de dotar de significados y sentido a los signos, Obando (2015 siguiendo a Radford, 2003) lo llama ‘objetivación’, entendida como “un proceso social activo y creativo de construcción de sentidos y significados (para los objetos de conocimiento) relativos a las formas culturales de hacer y de pensar (conocimiento matemático)” (p. 38). La construcción de estos significados no solo es producto del conocimiento formal en el cual está inmerso el objeto matemático, también, se va configurando y estructurando en sus usos, aplicaciones y modos de hacer, en los medios que permiten esas formas de hacer y en los discursos y formas de comunicación y razonamientos, en fin, los objetos matemáticos, a través de los signos, emergen en los sistemas de practica matemática.

Todas aquellas acciones o manifestaciones operativas y comunicativas que le permiten a los individuos relacionarse con los objetos de conocimiento matemático y aprender de ellos, definen la práctica matemática, la cual, de acuerdo con Obando (2015), es el

> conjunto de acciones de los individuos (en sus relaciones entre sí, y con el medio) que, en el curso de su actividad matemática, orientan sus procesos de objetivación y subjetivación tanto de la cantidad y la forma (por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar, etc.), como de la variación de una u otra (movimiento, cambio, comparación, transformación, etc.). (p. 55)

Dado que la práctica matemática se da en el seno de una cultura, inmersa en un sistema de prácticas, esta se va configurando en la interacción y tensión de diferentes recursos culturales como lo son: los instrumentos, el lenguaje o los discursos, los procedimientos, los objetos, los conceptos y los problemas. De manera que, a partir de los problemas se promueve la actividad matemática hacia un fin, actuando sobre y con unos objetos de conocimiento específicos, de los cuales, a través, de procedimientos y los instrumentos, se van gestando y enunciando conceptos que se materializan gracias al lenguaje y sus distintas formas de discursividad.

3.4.3 Instrumentos y procedimientos

A todos aquellos recursos simbólicos como los signos, símbolos, expresiones algebraicas, modelos, gráficas, tablas, software, calculadoras, entre otros, que se establecen como un medio para que los individuos configuren su acción matemática se les entenderá como instrumentos. No obstante, para Lerman (2001) además de estos recursos simbólicos antes mencionados, en esta categoría de instrumentos también se podrían incluir aquellos elementos del lenguaje como lo son "los significados, las conexiones, las estrategias […] y los métodos, brindados tanto por los profesores como por sus pares" (citado en Obando, 2015, p. 59), los cuales les permiten a los estudiantes pensar y comunicarse matemáticamente.

De acuerdo con Obando (2015), los instrumentos al cumplir con su función mediadora en la realización de las acciones matemáticas de los individuos se van constituyendo en objetos sociales que representan formas de hacer, técnicas y procedimientos que se elaboran socialmente. Así, al estar inmerso en una cultura, los instrumentos dejan de ser un agregado y se convierten en una ampliación que les permite a las personas expandir su cognición, desplegando nuevas posibilidades en su estructura cognitiva.

3.4.4 Conceptos

La consolidación de un concepto es un proceso que va más allá de aprender una definición o de asociar una palabra o significado a un signo, este proceso implica llevar el objeto y los instrumentos a un nivel más sofisticado, poniéndolos en funcionamiento en la acción, reconociéndolos y utilizándolos en el análisis y la interpretación de distintos tipos de problemas y contextos. Siguiendo a Obando (2015), el concepto es la condensación de un "conjunto de operaciones (mentales) que permiten la abstracción de los atributos del objeto que son resaltados. [… es] un proceso de generalización de atributos, pero, sobre todo, la síntesis de dichos atributos en una nueva unidad" (p. 39).

Para que se de este proceso, es fundamental que el individuo enfrente diferentes tipos de problemas y situaciones, en los cuales emerjan los objetos en cuestión y al interactuar con ellos, en diversos escenarios, se pueda ir configurando el concepto en la acción. Así, la formación de un concepto es un proceso personal en el cual cada individuo hace una reconstrucción de la realidad externa a partir de las experiencias vividas con el medio, con los otros y con los objetos, de manera que, dicha reconstrucción implica una transformación en la cognición del individuo.

Esto significa que, en la consolidación de un concepto, el individuo confronta las experiencias vividas con las ideas previas que ya tenía establecidas sobre el objeto, las cuales hacen parte de una estructura cognitiva y como producto de la confrontación el individuo hace un proceso de reelaboración del concepto. Luego, los conceptos reelaborados entran en interacción y diálogo con una red de conceptos consolidando una estructura relacional entre objetos y conceptos matemáticos.

4. Metodología

4.1 Caracterización de la investigación

En esta investigación se buscó caracterizar los instrumentos, los procedimientos y los conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizaban 15 estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de carácter privado, al enfrentarse a situaciones de proporcionalidad inversa en el aula de clase. Esta tarea supuso explorar los razonamientos y representaciones que las estudiantes realizaron al trabajar en las tareas propuestas, a partir de lo cual se buscó identificar instrumentos, procedimientos y conceptos matemáticos emergentes al promoverse el estudio de la proporcionalidad inversa a partir del análisis de procesos de covariación entre cantidades y de los invariantes operatorios en tales procesos de covariación.

Sin embargo, aproximarse a los razonamientos de las estudiantes para caracterizar los instrumentos, procedimientos y conceptos relacionados con el razonamiento proporcional no es una tarea directamente observable, dado que el razonamiento proporcional involucra un conjunto amplio y complejo de procesos que deben ser comprendidos de manera profunda y teniendo en cuenta las dimensiones tanto cognitiva como matemática.

En virtud de esto y para responder a la pregunta de investigación, se consideraron como unidad de análisis las representaciones, los enunciados y las explicaciones escritas y orales que las estudiantes manifestaron al resolver las situaciones de proporcionalidad inversa, dado que a través de estos datos la investigadora caracterizó los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional. Tal como lo sugieren Hernández et al. (2010), en la investigación cualitativa se comprenden "los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes" (p. 364). Lo anterior resalta el papel interpretativo de la investigadora quien, a partir de los significados elaborados por las estudiantes, y expresados en los datos, encuentra sentido a su objeto de estudio.

A su vez, esta investigación se desarrolló en el espacio de las clases de matemáticas, inicialmente de manera presencial en el aula de clase y luego, por motivos de la pandemia COVID 19, a través de plataformas digitales que el colegio dispuso para dar continuidad al proceso de formación. Esto permitió observar a las participantes en su transcurrir cotidiano de clase, obteniendo "un conocimiento directo de la vida social, no filtrado por conceptos, definiciones operacionales ni escalas clasificatorias" (Van Maanen, 2003, p. 26), favoreciendo un espacio de confianza para la participación y la interacción, ya que las situaciones se desarrollan, en su mayoría, de manera grupal. Así, dadas las consideraciones mencionadas en los párrafos anteriores, esta investigación se enmarcó en un enfoque cualitativo.

4.2 Investigación de diseño

En consonancia con lo anterior, se direccionó el estudio hacia una investigación de diseño, en inglés "Desing Based Research", la cual, de acuerdo con Molina et al. (2011), es un enfoque de investigación cualitativa desarrollado en el campo de las Ciencias del Aprendizaje, que busca ampliar y profundizar teorías sobre el aprendizaje de un concepto particular y, al mismo tiempo, promover los medios que apoyarán dicho aprendizaje en los procesos interactivos del aula. En ese sentido, esta investigación pretendió continuar ampliando las comprensiones sobre proporcionalidad inversa y el razonamiento proporcional a partir de una mirada de los razonamientos analíticos y, simultáneamente, configurar un diseño compuesto con algunas tareas de proporcionalidad inversa para caracterizar los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizan algunas estudiantes de grado séptimo.

Asimismo, según Bakker (2018), en la investigación de diseño "los investigadores manipulan deliberadamente una condición o enseñan de acuerdo con ideas teóricas particulares (por ejemplo, basadas en la investigación o aprendizaje basado en problemas)" (p. 7) con la intención de promover o mejorar el aprendizaje a partir de tales supuestos teóricos. Es por esto, que en esta investigación se consideraron los aportes de Obando et al. (2014) y Posada y Obando (2006) sobre la proporcionalidad inversa, quienes proponen una articulación entre lo aritmético y lo algebraico al poner en el centro de las relaciones de covariación y los invariantes multiplicativos.

Con este horizonte teórico se buscó favorecer el estudio de la proporcionalidad a partir de los razonamientos analíticos, promoviendo en las estudiantes una mirada reflexiva de las situaciones. Esto implicó centrar el análisis en el reconocimiento de las cantidades, las relaciones de covariación que se dan entre ellas, la búsqueda de patrones e invariantes multiplicativos entre familias de cantidades y la interpretación de tales invariantes en el contexto de las situaciones.

Como se mencionó antes, para caracterizar los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizaron las estudiantes, se diseñaron y se ajustaron algunas tareas de proporcionalidad las cuales en conjunto conformaron el diseño, elemento fundamental para este enfoque de investigación. Siguiendo a Mintrop (2016 citado en Bakker, 2018), el diseño es entendido como una secuencia de tareas “que juntas, o en combinación, intervienen en el conocimiento, creencias, disposiciones o rutinas existentes para impulsar un nuevo aprendizaje que conduzca a nuevas prácticas” (p. 133).

Es así como este diseño se desarrolló con un grupo de 15 estudiantes en los espacios de clase virtuales y con ellos se buscó caracterizar los instrumentos, procedimientos y conceptos relativos al razonamiento proporcional cuando la proporcionalidad inversa se entiende a través del producto constante entre parejas de valores de familias de cantidades.

4.2.1 Participantes

La investigación se llevó a cabo con un grupo de 15 estudiantes del grado séptimo de un colegio de carácter privado en la ciudad Medellín. Este grupo de estudiantes se caracterizaba por su dinamismo y apertura en la realización de las tareas propuestas, aunque por momentos manifestaban dificultades para trabajar en equipo. En este colegio, la investigadora desempeña sus labores como maestra, lo cual le permitió el reconocimiento del contexto y de las interacciones entre las estudiantes, una mirada sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de manera procesual, además, de contar con la disponibilidad legal y ética para participar en la investigación por parte del colegio y las familias de las estudiantes.

Dadas las dinámicas de la contingencia sanitaria del año 2020 respecto al COVID 19, el colegio trasladó su oferta educativa a plataformas virtuales, a través de las cuales dio continuidad a los procesos formativos y mantuvo la comunicación con las familias. Es por esto, que el inicio de la investigación el cual estuvo relacionado con la indagación y caracterización de los participantes se realizó de manera presencial y a partir del trabajo de campo el contacto con las participantes se desarrolló a través de educación remota, apoyada en las TICs. El colegio diseñó un campus virtual en Moodle, en el cual cada estudiante encontraba un curso para cada una de sus asignaturas y en cada una de ellas, los maestros disponían el día a día de sus clases: actividades, recursos y evaluaciones. Adicionalmente, el colegio dispuso la plataforma Teams de Microsoft Office 365 a través de la cual se realizaban los momentos de clase sincrónicos, se desarrollaban los trabajos grupales, se daban asesorías y en general, se mantuvo la comunicación con las estudiantes. Al interior de esta plataforma, también se utilizan herramientas como las pizarras virtuales.

También, alrededor del acercamiento al contexto se realizó una revisión de los planes de estudio del colegio, en donde se reconoció que en el grado 5° de primaria se introducen la *razón*, la proporcionalidad directa y la aplicación de la regla de tres. En el grado 7° se retoma el estudio la *razón*, la proporción y la proporcionalidad directa y, además, se adiciona la proporcionalidad inversa, la compuesta y algunas aplicaciones como los repartos proporcionales, los porcentajes y el interés simple.

4.2.2 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Otro elemento característico de la investigación de diseño es la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (en inglés, Hypothetical Learning Trajectory). Este es un instrumento de diseño e investigación que, de acuerdo con Moss y Lamberg (2019), permite al investigador “proyectar posibles caminos para apoyar el aprendizaje de los estudiantes a través de un conjunto de tareas de instrucción” (p. 170). Estas se diseñan y desarrollan teniendo en cuenta algunas hipótesis sobre las formas y niveles de razonamiento más comunes que se han reportados en la literatura. En palabras de Simon (1995), la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje debe integrar los siguientes elementos: “el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético” (p. 136).

Así entonces, con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje la investigadora contempla un marco de referencia con el cual se aproximará al razonamiento de los estudiantes, es por esto que en esta investigación, la trayectoria se basó en las etapas de razonamiento proporcional propuesta por Lesh et al. (1988) y Koellner-Clark y Lesh (2003) en las cuales se articulan distintos hallazgos reportados en la literatura en relación con los procedimientos realizados por los estudiantes, en la **Tabla *1*** se presentan la trayectoria hipotética de aprendizaje, los conceptos y los datos.

Tabla 1

Trayectoria hipotética de aprendizaje considerando y adaptando los aportes de Lesh et al. (1988) y Koellner-Clark y Lesh (2003)

	Etapa 1	**Etapa 2**	**Etapa 3**	**Etapa 4**	**Etapa 5**
Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Adaptación de las etapas del desarrollo del razonamiento proporcional propuestas por Lesh et al. (1988) y Koellner-Clark y Lesh (2003)	Se identifican datos e información notable de la situación, sin embargo, cada sistema de cantidad es analizado de manera aislada y particular	Al analizar los cambios entre las cantidades, se reconoce la covariación entre las variables, pero solamente de manera cualitativa. Y se puede clasificar como percepción no numérica o pre numérica	Luego de fijar la atención en la covariación, se buscan patrones estructurales que vinculen las dos variables, pero desde una perspectiva aditiva al preguntarse por los incrementos o disminuciones y las relaciones parte todo	Se reconoce la relación entre dos o más valores en uno de los sistemas de cantidades, esta relación se trasladada de forma análoga, pero en el factor inverso a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades	Se comprende la covariación entre los sistemas de cantidades relacionados en función del producto constante entre cualquier par de valores relacionados pertenecientes a los sistemas de cantidades relacionados
Conceptos relativos	Cantidades y unidades de medida	Percepción de la covariación no numérica y pre numérica	Correlaciones lineales y no lineales entre cantidades, modelos aditivos, relaciones parte todo	Percepción numérica de las cantidades, *razón* como relator y operador, inverso de la *razón*	La constante de proporcionalidad (el producto) como transformador

A continuación, se describe cada una de las fases que se siguieron en esta investigación con el fin de caracterizar los procedimientos, instrumentos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que movilizaban estudiantes de grado séptimo.

4.3 Fases de la investigación

4.3.1 Fase I: Preparación del diseño.

Esta fase inició con la revisión de la literatura en las bases de datos Scopus, Dialnet, Scielo, Redalyc, Taylor & Francis online y en catalogo público de la biblioteca de la Universidad de Antioquia OPAC. En ellas se indagó por la producción académica relacionada con el razonamiento proporcional, la *razón*, proporción y proporcionalidad. Adicionalmente, se hizo lectura de los documentos de referencia nacionales en Educación Matemática escolar (MEN, 1998, 2006, 2016) y de los resultados de algunas pruebas estandarizadas nacionales e internacionales (Asesorías académicas Milton Ochoa, 2019; ICFES, 2016; OCDE, 2018; TIMSS, 2009, 2015).

Esta revisión puso en evidencia entre otras cosas, la manera como se enseña usualmente la proporcionalidad y los efectos no deseados de esas formas de enseñanza en la comprensión del razonamiento proporcional. Así mismo, se identificaron elementos que han dado fundamento a la orientación del trabajo escolar sobre los conceptos de proporcionalidad a través de la variación entre magnitudes. Además, se identificaron algunos artículos que resaltan tareas sobre proporcionalidad y razonamiento proporcional que luego aportaron en la propuesta de diseño. Al respecto, estos artículos se analizaron teniendo en cuenta las tareas propuestas, el objetivo de la investigación y los hallazgos encontrados.

Al mismo tiempo, en esta fase se hizo la lectura del contexto, en la cual se reconocieron las dinámicas y apuestas del colegio, el área de matemáticas y las dinámicas culturales del espacio concreto del aula de clase de las estudiantes de séptimo grado. Esto fue posible a través de procesos de observación, charlas informales y la lectura de documentos instituciones como: el Proyecto Educativo Institucional (PEI), el plan de área, las mallas curriculares y las planeaciones de la docente encargada. Además, se tomó como insumo, los resultados de una prueba de desempeño estandarizada que se aplicó en septiembre del 2019.

Esta revisión de la literatura, de las pruebas estandarizadas y del contexto permitió reconocer los avances del campo del razonamiento proporcional tanto a nivel investigativo como en el contexto educativo, identificando allí fortalezas y dificultades en la comprensión y desarrollo del razonamiento proporcional en las estudiantes. Así, se reunieron insumos que permitieron delimitar el planteamiento del problema de investigación y el reconocimiento de propuestas que buscan promover la integración de aspectos aritméticos y variacionales al abordar la proporcionalidad.

Durante esta fase, también se comenzó la elaboración del diseño, es importante aquí mencionar que como maestra de la institución se diseñaron y aplicaron algunas tareas que transitaron por la *razón*, sus funciones y usos, la proporción, la proporcionalidad directa e inversa, sin embargo, para la investigación solo se retoman dos tareas correspondientes a la proporcionalidad inversa ya que estas se alineaban con el objetivo de investigación. Las dos tareas estaban compuestas por situaciones de proporcionalidad inversa, las cuales se definieron y estructuraron integrando varios aspectos, a mencionar: el propósito de la investigación, la revisión de la literatura y la consolidación del horizonte teórico, a continuación, se presenta el diseño en la **Tabla *2***.

Tabla 2

Secuencia del diseño sobre proporcionalidad inversa

Diseño			
Descripción de la tarea	**Duración (1 momento de clase = 45 minutos)**	**Desarrollo**	**Objetivo de la tarea**
Tarea introductoria de proporcionalidad inversa Se presentan dos situaciones de proporcionalidad inversa cada una con literales que llevan a suponer distintas condiciones de las situaciones	3 momentos de clase	Solución individual de las dos situaciones de proporcionalidad inversa utilizando los saberes previos (2 momentos de clase) Cada estudiante socializa con el resto del grupo los procedimientos realizados sobre las dos situaciones de proporcionalidad (1 momento de clase)	Las estudiantes resolverán las situaciones utilizando su lógica y sus saberes previos. Esto permitirá indagar por los procedimientos, instrumentos y conceptos puestos en juego por las estudiantes. También, se espera que puedan descubrir la multiplicación como invariante en la proporcionalidad inversa.
Estudio formal de la proporcionalidad inversa y sus generalidades (4 momentos de clase)			
Tarea 2: Construcción de rectángulos Adaptada de Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2019) en la cual se propone problematizar la multiplicación de familias de cantidades como constante de proporcionalidad en la proporcionalidad inversa al considerar la construcción de rectángulos de igual área.	3 momentos de clase	Solución de la tarea en grupos de 3 estudiantes (2 momentos) Cada grupo socializa con el resto de sus compañeras sus procedimientos y hallazgos (1 momento)	Con esta tarea se espera que las estudiantes problematicen la variación entre los lados de un rectángulo cuando el área se mantiene constante, reconociendo que en la proporcionalidad inversa intervienen 3 magnitudes e interpretando la constante de proporcionalidad en el contexto de la tarea.

Las tareas se aplicaron durante el tiempo de clase regular programado en el colegio para matemáticas, cada una tomó 3 momentos de clase de 45 minutos cada uno. El diseño se inició con una tarea introductoria de proporcionalidad inversa, la cual estaba compuesta de dos situaciones que las estudiantes debían resolver de manera individual utilizando su lógica y sus saberes previos. Se dieron dos momentos de clase para resolverlas y se tomó otro momento para poner en común los procedimientos utilizados.

Retomando las conclusiones y hallazgos encontrados en la socialización de la tarea introductoria, se destinaron 4 momentos de clase para abordar la proporcionalidad inversa, sus generalidades y la constante de proporcionalidad con las estudiantes y proponiendo algunas situaciones en clase. Finalmente, se presentó la tarea 2 adaptada de Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2019) en la cual se problematiza la variación entre los lados de un rectángulo cuando se mantiene constante el área. Esta tarea se realizó en equipos de 3 estudiantes y se destinaron tres momentos de clase para su desarrollo: dos momentos para el trabajo en equipo y un momento para socializar con el grupo los hallazgos.

4.3.2 Fase II: Experimento de diseño

Durante esta segunda fase se pasa a la implementación del experimento del diseño el cual buscó promover aprendizajes en las participantes de la investigación y al mismo tiempo, desarrollar una comprensión de cómo las estudiantes resuelven las situaciones, a través de qué instrumentos y con el uso de qué conceptos, y así, caracterizar los procedimientos, instrumentos y conceptos relativos al razonamiento proporcional que las estudiantes van movilizando cuando las situaciones que se abordan implican un análisis de las correlaciones desde los invariantes.

En este punto se retomaron las ideas de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, las cuales además de guiar la estructuración del diseño, también permitieron a la maestra investigadora evaluar cómo cada tarea "podrían realizarse en la interacción en el aula […], lo que los estudiantes podrían aprender al participar en ellas" (Gravemeijer & Cobb, 2006, p. 24) y aquellos aspectos en los cuales ella debía concentrarse al enseñar, observar y orientar a las estudiantes.

Así mismo, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje permitió analizar la implementación de cada una de las tareas, revisando el cumplimiento de los objetivos de las mismas, haciendo un seguimiento de cómo se va desarrollando cada una y observando si cada tarea fue acorde con el ambiente y la participación del grupo, esto dado que la investigación de diseño se caracteriza por ser cíclica e iterada. No obstante, como es de esperarse, las ideas de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje son solo una guía de orientación, pues en la realidad social del aula de clase la investigadora está abierta a otras interpretaciones y hallazgos, dada la diversidad de las estudiantes.

El desarrollo de cada una de las tareas se documentó a través de las notas de campo de la observación, los registros escritos realizados por las estudiantes para cada tarea y las grabaciones de audio y vídeo en las cuales se registraron las discusiones producto de la socialización entre las estudiantes y cortas entrevistas.

La observación y las notas de campo permitieron a la investigadora registrar sucesos y tomar nota de aquello que acontecía durante los momentos de clase, dando un especial énfasis en aspectos como las reacciones, preguntas, procedimientos y explicaciones que las estudiantes iban manifestando al abordar las situaciones de proporcionalidad inversa.

Por su parte, los registros escritos se comprendieron como aquella producción que las estudiantes consignan en sus cuadernos, en la cual se plasman procedimientos matemáticos y representaciones, producto de resolver las situaciones propuestas en las tareas. Estos registros son la fuente inicial de información, a través de la cual la investigadora reconoce procedimientos matemáticos realizados, instrumentos utilizados y conceptos asociados a la solución.

Sin embargo, no en todas las ocasiones el razonamiento y los significados movilizados por las estudiantes quedan plasmados completamente en los registros escritos, es por esto que también se grabaron en vídeo los encuentros de socialización de clase, de trabajo en los equipos y, además, se realizaron algunas entrevistas cortas con unas cuantas estudiantes. Estas fuentes de información permitieron a la investigadora hacer seguimiento de los procesos de cada estudiante durante el desarrollo del diseño, ampliar y profundizar los significados, procedimientos y explicaciones encontrados en los registros escritos, ya que como lo sugiere Obando (2015) “los fragmentos de [la] producción escrita [de las estudiantes] van acompañados de una serie de afirmaciones verbales que completan el sentido de lo que consigna en su hoja de trabajo” (p. 74).

4.3.3 Fase III: Análisis retrospectivo del diseño

En esta última etapa se transcribieron las grabaciones de vídeo de los momentos de clase y las entrevistas cortas realizadas a algunas de las estudiantes, y se organizaron todos los datos recolectados en carpetas para cada estudiante.

Luego, para el proceso de sistematización y codificación, se revisaron los registros escritos de las estudiantes, la transcripción de las clases y de las entrevistas, y estos se analizaron a partir de tres categorías iniciales: los procedimientos realizados, los cuales dan forma a las acciones de las estudiantes; los instrumentos, que median los razonamientos de las estudiantes; y los conceptos, que permite identificar los usos y fines del invariante multiplicativo. Así, a partir de estos tres puntos de vista se hizo una lectura inicial y agrupación de las distintas fuentes de datos.

Tabla 3

Formato de matriz de análisis de datos por categoría

Categoría	**Subcategoría 1**	**Subcategoría 2**	**Subcategoría 3**	**Subcategoría 4**
Testimonio	*Fragmentos y citas tomadas explícitamente de los datos*			
Análisis e interpretación de los testimonios				
Resultados: *Diálogo entre los fragmentos citados, el análisis y la interpretación y el marco teórico.*				

Nota. Este formato fue sugerido por los maestros Mary Luz Marín y Jaime Saldarriaga, quienes acompañaron el curso de análisis de datos cualitativos 2020/2 de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Una vez revisada y categorizada toda la información, se tomaron los fragmentos que coincidían con la misma categoría y se ordenaron en un documento Word y, al mismo tiempo, se iban insertando algunos comentarios iniciales a los fragmentos de la información. Cada documento Word se revisó nuevamente en busca de posibles subcategorías, de acuerdo con los datos obtenidos, con el reconocimiento de aspectos comunes entre las distintas fuentes e interrelacionando la información inicial identificada con las ideas de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Luego esta información se organizó en una matriz, como se muestra en la **Tabla *3***, en la cual se evidencia la categoría inicial de análisis, las subcategorías o categorías de segundo nivel, los fragmentos de información agrupada, los comentarios iniciales y el diálogo entre los elementos antes mencionados con la teoría. Cabe anotar que, en esta fase la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje le permitió a la investigadora determinar los aspectos y elementos de análisis en los cuales debía centrarse, así como contrastar las ideas de la literatura que en la trayectoria se condensan respecto a la participación real de las estudiantes.

Es importante aclarar que, dada la condición cíclica e iterada de la investigación de diseño, el análisis de los datos no solo se realizó una vez finalizado el diseño, también se incluyó el análisis a medida que se iban desarrollando las tareas. Este análisis, al final de cada episodio de clase se le conoce como análisis prospectivo y permitió repensar y reflexionar el diseño y su implementación, consolidar las categorías de análisis y entender cómo se van dando los procesos de razonamiento en las estudiantes durante todo el experimento de diseño. También, permiten reconocer fracasos y éxitos en los procedimientos seguidos lo cual aporta a la confiabilidad en la investigación.

Asimismo, una vez finalizada la intervención de campo y desarrollado el análisis de la información, se hizo una nueva revisión del diseño y de la Teoría Hipotética de Aprendizaje, a la luz de la experiencia y los hallazgos encontrados, con el fin de redefinir y proponer ajustes a aquellos aspectos que necesitaron ser adaptados. En la investigación de diseño también, como lo sugieren Gravemeijer y Cobb (2006), es posible que en el proceso de análisis se reconozcan algunas ideas o hipótesis que no se puedan sustentar concretamente con la información recogida, esto permite la generación de nuevas ideas de diseño o posibles campos de investigación.

Ahora bien, antes de emitir cualquier tipo de conclusión se apeló a un proceso de triangulación entre instrumentos, ya que esta estrategia aportó en la validación y la confiabilidad de la investigación al permitir la verificación de las interpretaciones y conclusiones en las diferentes fuentes de datos: los registros escritos, las grabaciones de los espacios de socialización de clase y las entrevistas cortas. En concreto, al considerar las transcripciones de los vídeos de clase y las entrevistas cortas, se buscó verificar y ampliar la comprensión sobre los procedimientos, representaciones y explicaciones dadas por las estudiantes en los registros escritos.

4.4 Consideraciones éticas de la investigación

En términos éticos, el colegio donde se desarrolló la investigación ha permitido la realización del proyecto. En una primera etapa, a través de reuniones virtuales y de un vídeo, se socializó con los directivos, con los padres de familia y las estudiantes los aspectos relevantes del proyecto, lo posibles alcances, beneficios, riesgos y oportunidades. Luego, en una segunda etapa, se procedió a la formalización del consentimiento informado por parte de las familias, esto permitió brindar suficiente información a los participantes y así, garantizar el conocimiento de criterios para decidir sobre su participación.

Se respetó la información suministrada, considerando la intimidad y actuando con cautela en la emisión de juicios. Además, para cuidar la integridad física y mental de los participantes se recurrió al uso de seudónimos, evitando así, la utilización de nombres particulares o institucionales. La información citada no ha sido manipulada, ni falsificada, por el contrario, se solicitó de forma prudente los documentos legales del colegio.

Siguiendo los postulados de Bakker (2018) en la investigación de diseño el investigador puede tener un doble rol: investigador y al mismo tiempo, maestro. Esta doble relación permite un conocimiento cercano de la cultura del aula, el factor confianza con las estudiantes y que la investigadora no sea un observador externo, sino antes bien pueda involucrarse en el proceso de investigación en busca del conocimiento. Así, más allá de sesgar el proceso investigativo, la intención de la maestra investigadora es reflexionar su práctica pedagógica, aproximarse al aprendizaje de sus estudiantes y caracterizar sus procedimientos de razonamiento proporcional cuando las tareas que se les proponen tienen un énfasis en lo variacional.

Por otro lado, el material bibliográfico utilizado en el desarrollo de la investigación es debidamente citado, siguiendo las normas APA y respetando los derechos de autor.

5. Análisis de resultados

5.1 Sentido de covariación en situaciones de proporcionalidad inversa

A mediados de octubre del 2020 se realizaron los primeros acercamientos a las estudiantes con la proporcionalidad inversa y para comenzar, se les propuso una tarea introductoria en la cual se presentaban dos situaciones hipotéticas de proporcionalidad inversa, las cuales fueron tomadas y adaptadas de Chizner et al. (2010). Tal como se muestra en la **Figura *9***, la situación 1 que conformaba dicha tarea introductoria relacionaba la cantidad de vacas que había en la finca y la duración de la comida para alimentar dichas vacas, además, expresaba que para 6 vacas la comida dura 90 días. Con esta información, se pidió a las estudiantes encontrar la cantidad de días que la misma comida podía durar para 12 vacas, dando la misma porción a cada vaca y luego, con la misma información completar la tabla.

Figura 9

Situación 1 que compone la tarea introductoria sobre proporcionalidad inversa

Situación 1: *Catalina tienen en su finca 6 vacas. Ella ha comprado una cantidad de comida la cual le ha durado 90 días dando a cada vaca la misma porción diaria. Un día, su padre llega a la finca con otras 6 vacas por lo cual ella se pregunta* ***A)*** *¿Cuántos días le va a durar la misma cantidad de cuido para alimentar todas las vacas que tiene ahora en su finca?*

B) Explica cómo resolviste el problema. ¿Qué información descubriste que te ayudó a llegar a la respuesta?

C) Ahora, Catalina quiere hacer los cálculos para saber cuántos días le dura la comida dependiendo la cantidad de vacas que tenga, para eso ayúdale a llenar la siguiente tabla.

Cantidad de vacas	Cantidad de días que dura la comida
1	
2	
3	
6	**90**
8	
15	
18	

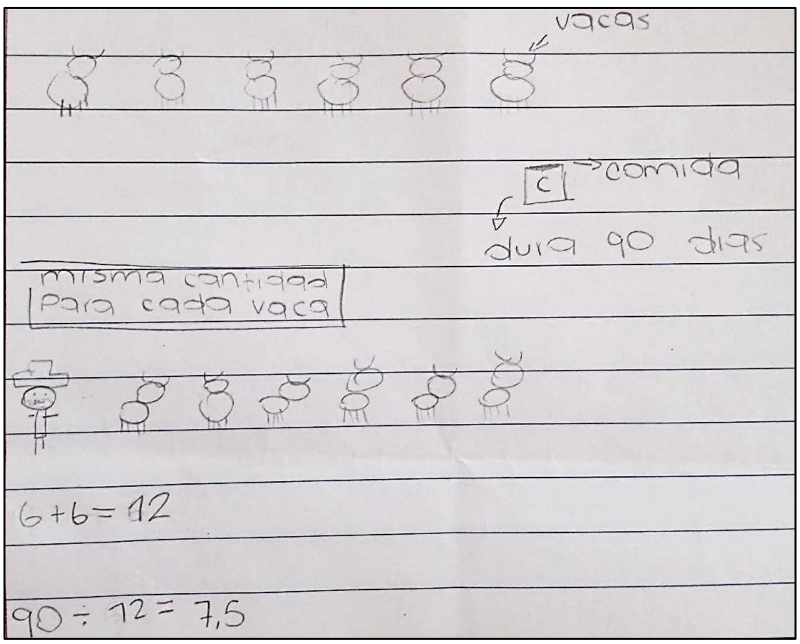
D) Explica cómo lograste completar la tabla. ¿Cómo encontraste el valor de 15?

Nota. Situación típica de proporcionalidad inversa tomada y adaptada de Chizner et al. (2010).

A su vez, no se dio a las estudiantes ninguna explicación inicial sobre el objeto matemático en cuestión y se les solicitó que, para comprender y dar solución a las situaciones que conformaban la tarea introductoria, utilizaran sus conocimientos previos y su lógica. Lo anterior, en tanto con esta tarea introductoria se buscó explorar la capacidad de las estudiantes para reconocer y analizar los procesos de variación entre cantidades y, en particular, la covariación bilineal. Dicho lo anterior, a continuación, se presentan algunos procedimientos realizados por las estudiantes como solución a la situación 1 de la tarea introductoria de proporcionalidad inversa analizados a la luz de las etapas de razonamiento proporcional de Lesh et al. (1988) y Koellner-Clark y Lesh (2003).

Figura 10

Registro escrito realizado por la estudiante 7 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. Fuente Archivo de imagen Registro escrito 1 tarea intro prop inver oct 2020 Est 7.

En la **Figura *10*** se presenta el procedimiento realizado por una estudiante para la situación 1, en el cual se puede reconocer que la estrategia implementada por la estudiante estuvo mediada por el uso de representaciones analógicas: dibuja las 12 vacas, un costal con la letra C para representar la comida, una frase para identificar el tiempo que dura la comida y una pequeña muñeca para mostrar a Catalina. Esto sugiere que la estudiante identifica tres cantidades involucradas en la situación: la cantidad de vacas, la duración de la comida y la comida. Particularmente, la estudiante parece identificar, aunque no lo expresa de manera explícita, que la cantidad de comida es una cantidad cuantitativa no numérica.

También, los registros escritos indican que la estudiante establece dos relaciones invariantes, la primera, entre la cantidad de vacas (6 vacas) y el tiempo que dura la comida: cada vaca come la misma cantidad de comida y, la segunda, hay una cantidad fija de comida que se reconoce como variable, pero sobre la cual no se conoce su valor numérico. Así, con el reconocimiento de los dos tipos de relaciones invariantes, la estudiante define las acciones que se realizan en el contexto de la situación: una cantidad fija de comida, que dura 90 días, y que, cada vaca come la misma cantidad de comida.

Diálogo 1

Explicación verbal de la estudiante 7 sobre sus procedimientos de la situación 1

2:27 **Profesora:** Cuéntanos, ¿tú cómo pensaste la situación?

2:32 **Estudiante:** mmm… pues profe, no sé cómo explicarlo mmm … Me puse como a dibujar vacas, entonces lo que yo pensé, no sé si está bueno, fue que como la comida duraba 90 días y como le habían regalado unas seis vacas más, entonces sumé las vacas que me dio 12 y luego, 90 que sería la comida, pues, lo que dura la comida lo dividí entre 12 que serían 12 vacas.

3:20 **Profesora:** Y sobre eso ¿Qué significa cuando divides los 90 entre las 12 vacas? ¿Qué estaríamos encontrando ahí?

3:40 **Estudiante:** Lo que le toca a cada vaca

Nota. Fuente archivo Grabación socialización tarea introductoria proporcionalidad inversa Oct 2020.

Sin embargo, finalmente la estudiante realiza operaciones solo con las cantidades que fueron identificadas de forma cuantitativa numérica, ignorando la cantidad de comida como algo con lo que se pueda operar y, por tanto, asociándole un valor numérico que le permita manipularla. Es así, como la estudiante centra su mirada en el hecho de cada vaca come la misma cantidad de comida, y divide 90 entre 12, que es la nueva cantidad de vacas. Evidenciando que no tuvo en cuenta que 90 refiere al tiempo que dura la comida, y no, a la cantidad de comida, dado que ese valor no es proporcionado en el enunciado de la situación. De esta manera, la estudiante concluye que, para encontrar la duración de la comida para 12 vacas, se debe dividir el total de la "comida" (que ella asume como 90) entre el número total de vacas que debe alimentar (12 días), encontrando que, para cada vaca la comida dura 7,5 días, tal como se muestra en el **Diálogo *1***.

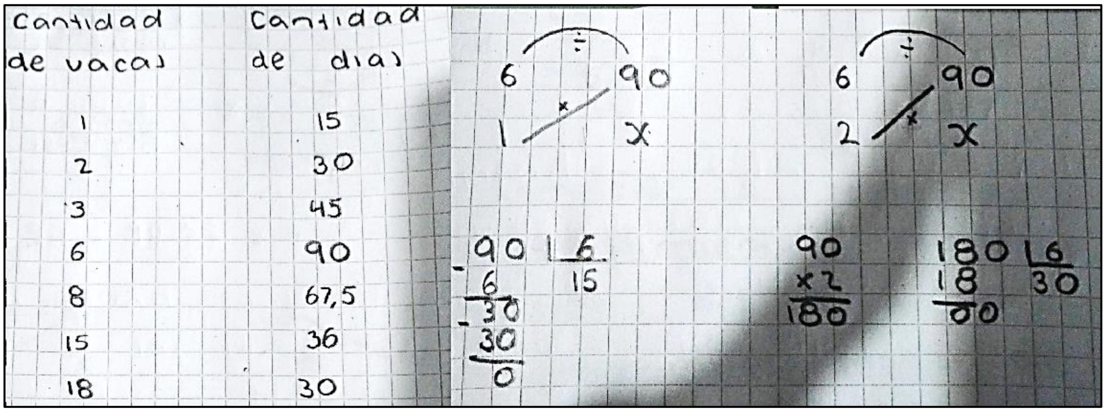
El procedimiento realizado por la estudiante está alineado con la etapa 1 de razonamiento proporcional, en la cual, de acuerdo con Koellner-Clark y Lesh (2003), los estudiantes realizan una interpretación del problema poniendo su atención en parte de los datos y el análisis que proponen está mediado por sus nociones preconcebidas. En este caso, la estrategia propuesta por la estudiante deja ver el papel de sus conocimientos y experiencias previas con la multiplicación, la división y la proporcionalidad directa, ya que al asociar los 90 días con el total de comida y dividirlo entre el total de vacas (12 vacas), la estudiante manifiesta estar encontrando la cantidad de comida que corresponde a cada vaca (**Diálogo *1***), lo cual indica que la estudiante asumió la situación como una de reparto equitativo.

También, es posible llamar la atención sobre las representaciones propuestas por la estudiante en la **Figura *10***. Estas, se caracterizan por presentar de una manera concreta los elementos que intervienen en la situación, mostrando prevalencia en los detalles y los elementos contextuales más que en las cantidades y las relaciones entre ellas. Estas formas de representación son clasificadas por Obando (2015) como analógicas, las cuales al ser explícitas y centrarse en los datos contextuales, no permiten con facilidad manipular las cantidades, operar con aquellas cantidades que tienen la particularidad de ser cuantitativas no numéricas, como en este caso, la cantidad de comida y representar las relaciones entre ellas. Además, al representar con tanto detalle los elementos de la situación se hace más difícil representar las nuevas situaciones (por ejemplo, 18 vacas, 50 vacas, n vacas).

Por su parte, en la **Figura *11*** se presentan los procedimientos realizados por otra estudiante para la situación 1, los cuales denotan, para las primeras 3 filas de la tabla, el uso de técnicas propias de la proporcionalidad directa y para el resto de las filas, una estrategia distinta.

Figura 11

Registro escrito realizado por la estudiante 1 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. Fuente Archivo de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 Est 1.

En este sentido, el registro escrito indica que la estudiante toma como referencia la relación 6 vacas y 90 días y, mediada por sus conocimientos previos sobre proporcionalidad directa, plantea un procedimiento de tipo regla de tres directa para las primeras tres filas. Así, como se ve en la **Figura *11***, ella se basa en la forma de organización del algoritmo, que implica poner cuatro cantidades, una de las cuales es desconocida, en los vértices del cuadrado. Sin embargo, cuando el número de vacas aumenta parece perder de vista la estrategia utilizada hasta el momento y para las siguientes 3 filas lo que hace es multiplicar 6 por 90 y este resultado lo divide por 8, 15 y 18 respectivamente, procedimiento que corresponde al algoritmo de la regla de tres inversa.

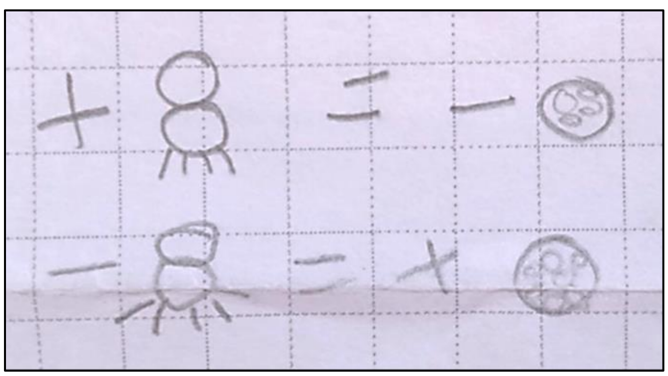
Este procedimiento, al igual que el anterior, también puede alinearse con la etapa 1 de razonamiento proporcional, en el cual la estudiante mediada por conceptos previos, reconoce en el lenguaje de la situación y en las cantidades, la posibilidad de plantear una regla de tres. Así, este procedimiento realizado por la estudiante permite ver, tal como lo sugieren Lesh et al. (1988), que, al abordar la proporcionalidad desde una mirada algorítmica, es posible que las estudiantes se centren más en la organización espacial de las cantidades que en la manera cómo las cantidades se relacionan y covarían, haciendo que el procedimiento en vez de promover el razonamiento proporcional, lo que haga es impedirlo.

Asimismo, este episodio permite traer a colación la discusión respecto de la “sobre generalización de la linealidad” (Van Dooren et al., 2006), resaltando como se ve en los procedimientos, la tendencia de la estudiante por emplear modelos lineales en situaciones en donde no son aplicables. Así, más que un obstáculo epistemológico, la generalización de la linealidad es un obstáculo didáctico, que marca como reto para la enseñanza, desarrollar en los estudiantes, además, del uso de algoritmos, una amplia conceptualización de la linealidad.

Sobre la **Figura *11*** también llama la atención que la estudiante haya asignado el mismo valor en la tabla a la duración de la comida para 2 vacas y 18 vacas, aludiendo a que con la misma comida se pueden alimentar tanto 2 vacas como a 18 vacas, en el mismo tiempo y con las mismas porciones. Este hecho evidencia que la estudiante se confía en la aplicación de un par de algoritmos que le han enseñado en la escuela (regla de tres simple directa y regla de tres simple inversa), los cuales producen resultados que son incuestionables, pero qué además, no tiene como partida el análisis de las cantidades en situación, esto es, las acciones sobre las cantidades y las relaciones entre ellas, lo que determina que solo aplique el algoritmo conocido sobre las cantidades seleccionadas y no se confronten los resultados con la situación propiamente dicha.

Figura 12

Registro escrito realizado por la estudiante 7 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. En esta imagen se representa una percepción pre numérica de la covariación de las cantidades. Fuente Archivo de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 Est 7.

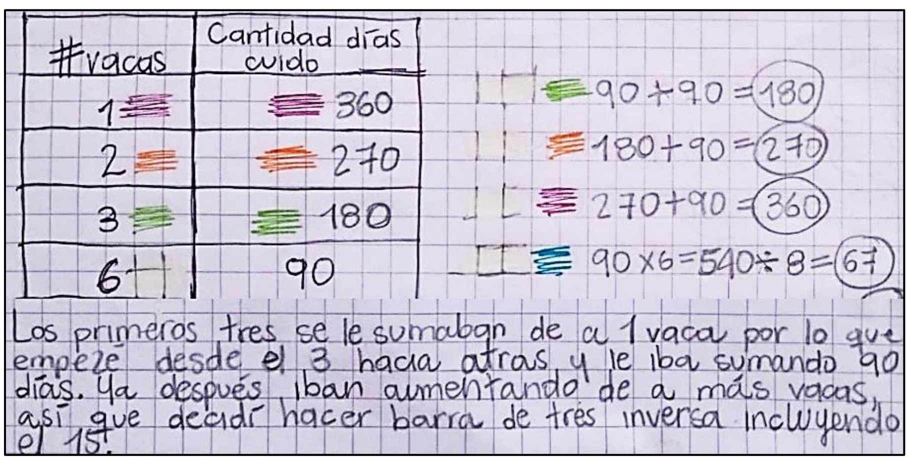
Por otro lado, procedimientos realizados por las estudiantes como el presentado en la **Figura *12***, se alinean con la etapa 2 de razonamiento proporcional en la cual las estudiantes manifiestan una percepción pre numérica de relaciones de covariación inversa entre cantidades. Al respecto, se puede ver en el registro escrito, como la estudiante expresa la relación entre las cantidades a través de una representación icónica en la cual da a entender que tener más vacas es equivalente a que la comida dure menos y, en el otro sentido, tener menos vacas supone que la comida dure más.

Estas percepciones pre numérica iniciales evidenciadas en algunas estudiantes muestran que se identifican formas de variación simultánea entre las cantidades relacionadas, las cuales según Merino et al. (2018) se dan cuando los estudiantes descubren que los cambios en los valores de una de las variables afectan los cambios en los valores de la otra variable.

Ahora bien, aunque este tipo de conclusiones cualitativas pre numéricas no necesariamente llevan a las estudiantes a la solución adecuada de la situación, sí les permiten cuestionar y "verificar la viabilidad de las respuestas […], establecer parámetros apropiados para las situaciones" (Koellner-Clark & Lesh, 2003, p. 78) y dar sentido a sus resultados dentro del contexto del problema. Además, son evidencia del reconocimiento por parte de las estudiantes de una estructura o patrón de percepción pre numérica entre las cantidades.

Figura 13

Registro escrito realizado por la estudiante 6 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. Reconocimiento de un patrón aditivo en la variación de uno de los sistemas de cantidad. Fuente archivo de imagen Registro escrito tarea prop inver Oct 2020 Est 6.

En los episodios anteriores se evidencia que las estudiantes reconocen la covariación entre algunas cantidades, no obstante, en cada caso predomina el uso de procedimientos aprendidos sobre la regla de tres simple directa. Por su parte, en el procedimiento desarrollado por una estudiante en la **Figura *13***, se puede ver que no solo reconoce la covariación entre las cantidades, sino que también la utiliza en el análisis de la situación para llegar a una solución. Específicamente, la estudiante determina la relación entre las casillas por llenar en la tabla y el número de días que puede durar la comida, a través de la percepción cuantitativa numérica del patrón que le permite completar las casillas vacías.

Es así como, la estudiante efectúa el conteo tomando como base un valor dado para la variable duración de la comida (90) y guiada por la relación encontrada entre los valores de la primer variable número de vacas (uno en uno en las primeras tres filas), extiende el conteo en las casillas de la segunda variable (duración de la comida) tomando el 90 como la unidad de variación, tal como se explica en la **Figura *14***. Asimismo, la manera como la estudiante llena la tabla refleja que su estrategia estuvo determinada por la percepción pre numérica encontrada entre las cantidades relacionadas, dado que este análisis le permite deducir que debe utilizar un patrón de correlación negativo para completar la segunda variable (cantidad de días), solo así se cumple que, entre menos vacas se tengan más días debe durar la comida.

Figura 14

Explicación gráfica del procedimiento realizado por la estudiante 6 en la Figura 13

	Número de vacas	Cantidad de días que dura la comida	
+1	1	360	+90
+1	2	270	+90
	3	180	+90
	6	90	

Nótese que esto es coherente con lo que se enseña en la escuela a propósito de la proporcionalidad inversa, ya que se deja la percepción del proceso de covariación en un nivel cuantitativo pre numérico: si una cantidad aumenta, la otra disminuye, lo cual podría entenderse como un error, dada la excesiva simplificación del concepto. Así, entender la variación inversamente proporcional únicamente a través de la covariación negativa entre las cantidades, evidencia un conocimiento incompleto del concepto, pues en muchas ocasiones será posible encontrar variaciones negativas entre cantidades y no por eso son de proporcionalidad inversa.

Los procedimientos presentados en la **Figura *13*** son representativos de la etapa 3 del razonamiento proporcional, dado que los estudiantes establecen la covariación entre las dos cantidades al descubrir relaciones aditivas proporcionales entre las cantidades, en este caso, la estudiante advierte la forma de variación de una de las cantidades (el número de vacas) y la traslada en la otra variable, pero como una covariación inversa. Esto se evidencia en la explicación que da la estudiante junto a sus procedimientos: "los primeros tres se les sumaba de a 1 vaca por lo que empecé desde el 3 hacia atrás y le iba sumando 90 días" (Registro escrito tarea prop inver Oct 2020 Est 6).

Así, tal como lo sugieren Lesh et al. (1988) aunque el establecimiento de patrones aditivos no sea un indicador definitivo de razonamiento proporcional en los estudiantes, sí es evidencia de etapas tempranas en su desarrollo, al ser un indicio de los primeros intentos de cuantificación numérica de las relaciones entre cantidades a través de la búsqueda de constantes, o en este caso, de invariantes operatorios. Además, con el razonamiento aditivo los estudiantes "pueden aplicar reglas relacionales de comparación, disminución, aumento y esquemas de parte-todo a modelos de razonamiento proporcional" (Koellner-Clark & Lesh, 2003, p. 56). Sin embargo, a diferencia de lo planteado por Lesh et al. (1988) en los procedimientos realizados por la estudiante de la **Figura *13***, hay algo más que un patrón aditivo, ya que la estudiante identifica una correlación negativa entre las cantidades.

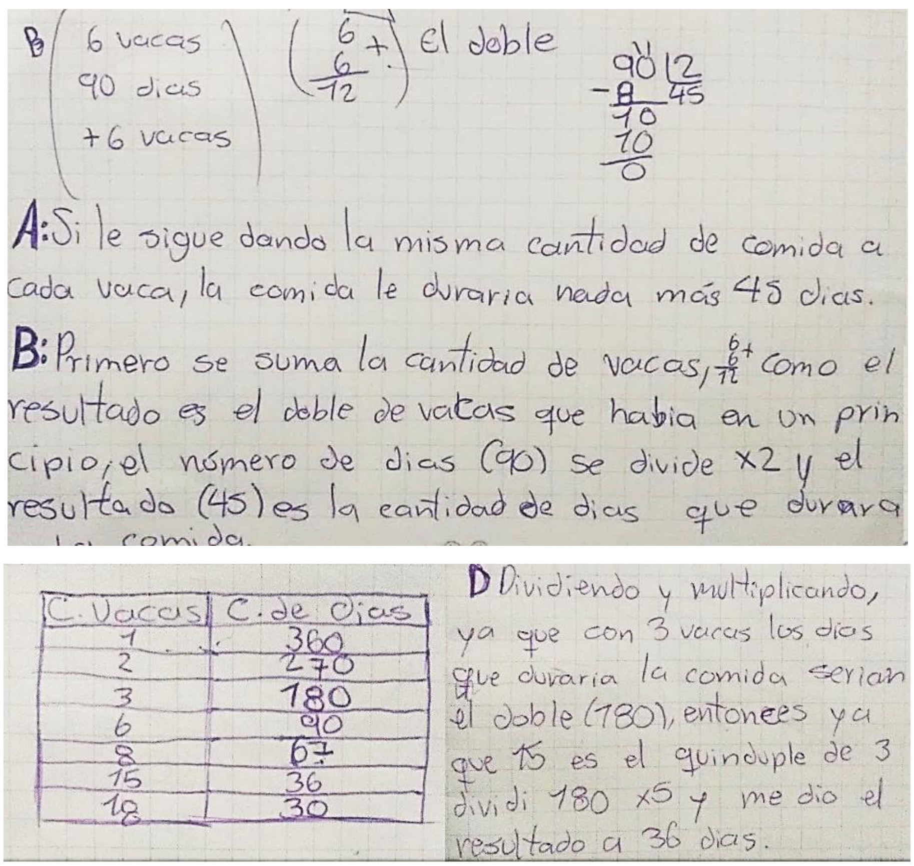
Vale la pena apuntar, que es posible encontrar algunos casos en los cuales la utilización de patrones aditivos sea un indicativo de razonamiento proporcional, conduciendo a soluciones para las situaciones. Así, a pesar de tener un patrón aditivo tiene sentido desde el punto de vista de la proporcionalidad directa toda vez que, para las correlaciones lineales positivas se tiene que: $f(x+1) = f(x) + f(1)$. Por ende, cuando los estudiantes en situaciones de proporcionalidad directa identifican el valor de la unidad, lo pueden repetir aditivamente tanto como quieran, y eso permite solucionar situaciones de proporcionalidad directa.

En la explicación verbal que acompaña sus procedimientos en la **Figura *13***, la estudiante expresa que las vacas aumentan de más, haciendo referencia a que ya no cambian de uno en uno, ya que de 6 pasa a 8, a 15 y a 18 y aunque con el registro escrito no es suficiente para concluir lo siguiente, si se replica su estrategia, al restar otros 90 en la siguiente fila a la cantidad de días, el resultado sería cero días, valor que parece ir en contrasentido de su análisis, es así como a partir de allí acude a la regla de tres inversa para finalizar los espacios faltantes en la tabla. Dejando ver que cuando los análisis no coinciden con lo interpretado, la salida fácil es utilizar la regla de tres, pues resuelve la situación incluso cuando lo que pasa allí no es comprendido o no tiene lógica dentro de los razonamientos desarrollados.

Por su parte, el procedimiento propuesto en la **Figura *15*** respecto a la situación 1, es característico de la etapa 4 de razonamiento proporcional. En este registro escrito se puede ver, cómo la estrategia de la estudiante está fundada en el reconocimiento de una relación (*razón*) entre una pareja de valores dados pertenecientes a un sistema de cantidad (la cantidad de vacas), la cual luego es replicada en el otro sistema de cantidad, pero de manera inversa.

Figura 15

Registro escrito realizado por la estudiante 11 sobre la situación 1 de la tarea introductoria, relacionado con los razonamientos por analogía



Nota. Archivos de imagen Registro escrito 1 y 2 tarea intro prop inver Oct 2020 Est 11.

Concretamente en la situación 1, se indica que Catalina pasa de tener 6 vacas a tener 12 vacas y es entre este par de valores del sistema de cantidad, número de vacas, que la estudiante identifica la relación “tener el doble”, asignando a la *razón* el papel de relator. Seguidamente, dado que la estudiante es consciente de la percepción cuantitativa pre numérica entre las cantidades, traslada la *razón* encontrada al segundo par de valores del otro sistema de cantidad (cantidad de días que dura la comida) pero de forma inversa, haciendo que estos se relacionen con la *razón* “la mitad”, obteniendo que la comida pasa de durar 90 días a 45 días, que es la mitad (*razón* como operador con el inverso).

Vale la pena llamar la atención que, en la situación presentada, la relación (*razón*) entre el par de valores dados sobre el sistema de cantidad (número de vacas) no hace parte de la información dada y tampoco se indica en el enunciado que deba ser calculada para llegar a la solución. Sin embargo, cuando los estudiantes acuden a esta estrategia, dicha *razón*, el reconocimiento de la percepción cuantitativa pre numérica inversa y los razonamientos por analogía, se vuelven deducciones relevantes para llegar a la solución. En concreto, la percepción cuantitativa pre numérica de la relación entre las cantidades, evidente en la identificación numérica de las relaciones a través de expresiones numéricas como el doble, dos veces, la mitad, dividido dos, da a la estudiante una capacidad operatoria particular sobre las cantidades, tanto como relator como operador.

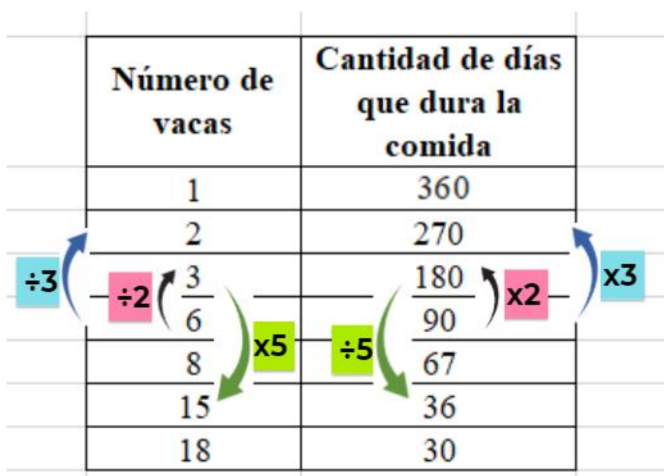
Para continuar completando la tabla, la estudiante continúa indagando por las relaciones que vinculan la cantidad inicial de vacas (6 vacas) con los demás valores del mismo sistema de cantidad que hay en la tabla y luego, aplica dichas razones encontradas de manera análoga, pero con la *razón* inversa, en el otro sistema de cantidad para hallar la duración de la comida (ver **Figura *9***), por ejemplo, cuando argumenta “con 3 vacas los días que durará la comida serían el doble (180), entonces ya que el 15 es el quíntuplo de 3 dividí 180 [entre] 5 y me dio el resultado a 36 días” (Registro escrito 1 y 2 tarea intro prop inver Oct 2020 est. 11).

En la forma de proceder presentada en la **Figura *15***, también se puede resaltar la influencia de los conceptos previos y saberes de referencia. Ya que cuando la estudiante expresa el aumento de la cantidad de vacas a través de la expresión “el doble” declara el reconocimiento de una relación entre las cantidades involucradas y la califica a través de una expresión verbal pre numérica y la convierte en un operador: multiplicar por dos, lo que le permite operar con las cantidades. Tomando esta relación como referencia y con el conocimiento de la correlación negativa y la covariación inversa entre las cantidades, la estudiante deduce que, si la cantidad de vacas aumenta al doble, la duración de la comida debe variar a la inversa, en este caso, debe disminuir a “la mitad”.

Este primer acercamiento pre numérico es crucial porque, por un lado, la estudiante determina la *razón* entre las cantidades, aunque sea de manera verbal y, por otro lado, asocia la operación multiplicar por dos (x2) con la *razón* el “doble de” y la operación dividir por dos (÷2) con la *razón* la “mitad de”. Dichas asociaciones entre la *razón* y la multiplicación o la división por un factor, llevan a la estudiante a buscar otras relaciones entre los valores correspondientes a la cantidad de vacas, ya no necesariamente en términos de relaciones pre numéricas sino también numéricas, como se muestra en la **Figura *16***. Es así como a una expresión pre numérica se le asocia un operador.

Figura 16

Explicación gráfica del procedimiento realizado por la estudiante 3 en la figura 15



Número de vacas	Cantidad de días que dura la comida
1	360
2	270
3	180
6	90
8	67
15	36
18	30

Así, la estudiante termina equiparando la multiplicación *x3* con la *razón* el triple y la división por tres con la *razón* un tercio, la multiplicación por *x5* como la *razón* un quíntuplo y la división por 5 con la *razón* la quinta parte y así sucesivamente. Esto se puede ver, cuando en su explicación escrita la estudiante alude a que la tabla se pudo completar “dividiendo y multiplicando”, en particular “hacia arriba de 6 vacas debo dividir y a la vez debo multiplicar los días por ese mismo número” (Socialización tarea introductoria, Est. 11, 12:06).

Asimismo, en este episodio aparece una doble acepción de la *razón*, por un lado, se entiende como un relator cuando permite establecer la comparación entre las dos cantidades iniciales del mismo sistema de cantidad (6 y 12 vacas, 6 y 3 vacas, etcétera) y, por otro lado, como operador cuando al aplicarla de manera inversa sobre la tercera cantidad del otro sistema de cantidad (duración de la comida) permite encontrar la cuarta cantidad de este mismo sistema de cantidad. En todos estos casos, ya sea que la *razón* sea usada como relator o como operador que se aplica sobre cantidades, la acción de usar la *razón* se asocia a un operador, multiplicar por un entero si la razón es entera o dividir por un entero si la razón es una fracción unitaria.

Se puede resaltar que incluso para valores como 15 vacas, los cuales no son un múltiplo de la cantidad inicial (6 vacas), la estudiante logra llegar a la solución valiéndose de los demás valores ya encontradas, donde sustenta que, como 15 vacas es 3 veces 5 vacas entonces en el otro sistema de cantidad debe dividir 180 días entre 5. Sin embargo, a pesar de tener claridad en la lógica, pierde de vista la duración estimada de la comida para una vaca como se ve en la **Figura *15***.

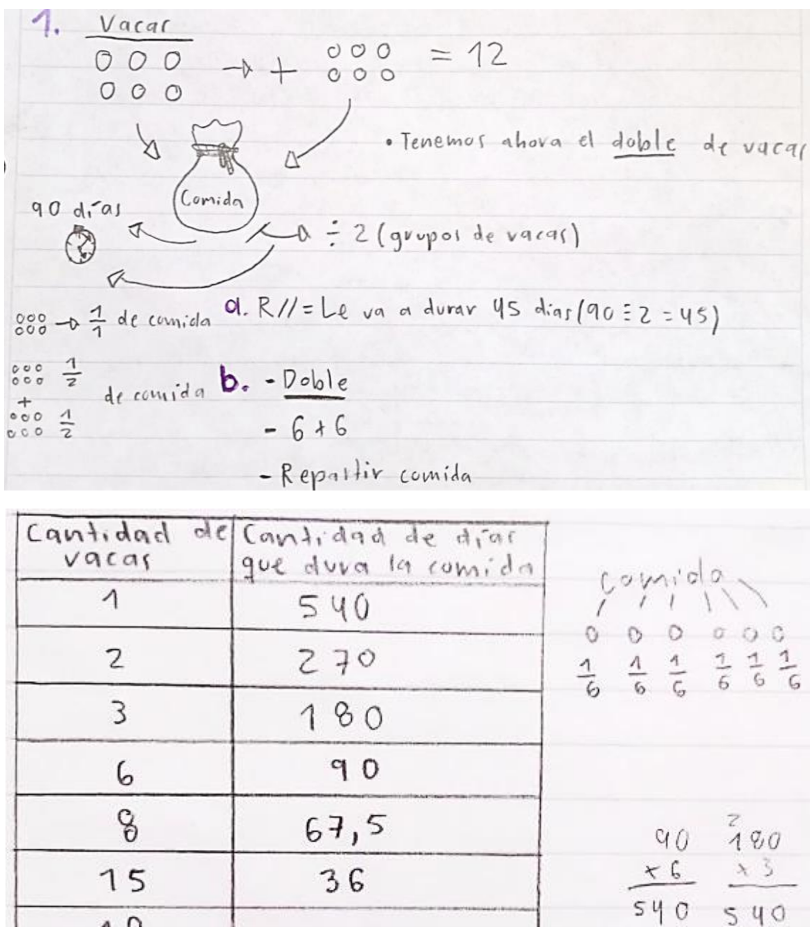
A este tipo de procedimientos donde se traslada de manera análoga una relación identificada entre dos valores de un sistema de cantidad al par de valores correspondientes del otro sistema de cantidad, Obando (2015) lo llama razonamientos por analogía. Con respecto a la proporcionalidad inversa, la relación encontrada entre el par de valores conocidos del primer sistema de cantidad se traslada de manera análoga al otro par de valores del segundo sistema de cantidad, pero en el factor inverso. Esta forma de proceder es representativa de la etapa 4 del razonamiento proporcional, en la cual prevalecen estrategias de identificación y reproducción de patrones (Lesh et al., 1988) asociadas al manejo "más eficiente del proceso incremental utilizando la multiplicación y la división en lugar de un método aditivo como el conteo de saltos" (Koellner-Clark & Lesh, 2003, p. 55). Un hallazgo que las estudiantes reflejaron en sus procedimientos tiene que ver con la posibilidad de asociar la *razón* con un operador, de tal manera que si la razón es entera se multiplica por un entero o si la razón es una fracción unitaria se divide por un entero.

Cabe anotar que en investigaciones recientes como en las de Obando (2015) y Sánchez (2011), los razonamientos por analogías han surgido naturalmente en el análisis realizado por los estudiantes, lo que hace que sean usados repetidamente al abordar situaciones de proporcionalidad. Dados estos antecedentes, se esperaba que las estudiantes recurrieran con frecuencia a los razonamientos por analogías para resolver las situaciones de proporcionalidad inversa, no obstante, los registros escritos mostraron que solo dos estudiantes abordaron y finalizaron la situación desde esta perspectiva, a diferencia de los procedimientos asociados a la proporcionalidad directa donde fue más común (a pesar de no ser procedimientos correctos).

Hay que detallar que sumado a los antecedentes, habían otros factores que podían estimular los razonamientos por analogía en las estudiantes como fue, por un lado, presentar parte de la tarea introductoria a través de una tabla y con relaciones iniciales que son cercanas a la realidad de las estudiantes (la mitad y el doble), pues siguiendo a Koellner-Clark y Lesh (2003) los razonamientos por analogía "ocurren cuando los niños pueden organizar su información de tal manera que determinen un patrón, como una tabla, una gráfica o una tabla de razones" (p. 93).

Figura 17

Registro escrito realizado por la estudiante 2 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. Archivos de imagen Registro escrito 1 y 2 tarea intro prop inver Oct 2020 Est 2.

Un último procedimiento planteado por algunas estudiantes para la situación 1 se presenta en la **Figura *17*** y en la **Figura *18*** el cual se acerca a las características planteadas en la etapa 5 del razonamiento proporcional. Este, a diferencia de los antes mencionados está soportado bajo la comparación de parejas de cantidades de distintos sistemas de cantidades (cantidades heterogéneas) a través del producto entre ellas. No obstante, con el **Diálogo *2*** y el **Diálogo *3***, los cuales presentan la explicación verbal de la estudiante (de la **Figura *17***), también se logra evidenciar cómo el análisis y los procedimientos desarrollados por la estudiante no reflejan en un inicio los comportamientos de la última etapa del razonamiento proporcional, sino que a medida que la estudiante va solucionando los literales de la situación su estrategia va cambiando progresivamente, pasando por varias de las etapas del razonamiento proporcional nombradas anteriormente.

Diálogo 2

Explicación verbal sobre sus procedimientos realizados por la estudiante 2 sobre la situación 1 de la tarea introductoria

0:06 **Estudiante:** La comida que le daba, pues lo que compraba le duraba 90 días, entonces, yo lo que pensé como en ese instante, es que dijeron que nos dieron otras 6 vacas, en total ya tendríamos 12, pero yo lo pensé más bien como el doble. Entonces teníamos el doble de vacas y pues según mi lógica [risa], si estábamos diciendo digamos las vacas por dos, para mí era como el tiempo que duraba esa comida dividido dos. Porque esa comida duraba como para un grupo, eh… esto, y después si se duplicaba había que partir a la mitad a la comida para darle a los dos grupos. Así saqué entonces que le iba a durar 45 días.
Luego en la tabla apliqué como lo mismo para … [silencio], pues nos daban como varias cantidades de vacas entonces primero completé la del seis que ya la tenía

1:19 **Profesora:** Eso, esa era la que nos daban ¿cierto? que para seis vacas duraba 90 días

1:24 **Estudiante:** sí, y después como apliqué la misma lógica que había hecho en el punto 1 con el resto, entonces dije que, si eso era igual y cada vez que si era el doble o la mitad, se hacia la operación contraria, por así decirlo. Entonces si dividíamos la cantidad de vacas, ahora eran tres [vacas], pues se multiplicaba por dos la cantidad de días que duraba la comida y pues eso me dio 180.

Nota. Fuente archivo Transcripción entrevista Est 2 explicación de procedimientos tarea intro propor inver Oct 2020.

En un inicio, tal como se puede ver en el fragmento presentado en el **Diálogo *2***, la estudiante exhibe conciencia cuantitativa pre numérica y analógica de la covariación inversa entre cantidades, la cual es posible reconocer en sus razonamientos cuando menciona: “Porque esa comida duraba como para un grupo, eh… esto, y después si se duplicaba había que partir a la mitad a la comida para darle a los dos grupos […] y cada vez que si era el doble o la mitad, se hacia la operación contraria” (Diálogo 2, Est 2, 00:06), aludiendo a que un cambio en la cantidad de vacas necesariamente produce un cambio inverso en la duración de la comida (etapa 2).

Seguidamente, la estudiante también manifiesta que el abordaje inicial de la situación estuvo determinado por el reconocimiento de la *razón* “el doble” (relator) entre un par de valores de la variable cantidad de vacas. Y, teniendo en cuenta que las variables relacionadas covarían de manera inversa entonces, toma la *razón* encontrada entre el par de valores (conocidos) de la misma familia de cantidad y la traslada como el operador “*razón* inversa” al otro par de valores correspondientes (de la otra familia de cantidad), de los cuales uno es desconocido.

Así, haciendo uso de los razonamientos por analogías, tal como se evidencia en la explicación que acompaña el procedimiento: “después como apliqué la misma lógica que había hecho en el punto 1 con el resto, entonces dije que, si eso era igual y cada vez que si era el doble o la mitad, se hacia la operación contraria […]. Entonces si dividíamos la cantidad de vacas, ahora eran tres [vacas], pues se multiplicaba por dos la cantidad de días que duraba la comida y pues eso me dio 180” (Diálogo 2, Est 2, 1:24), la estudiante continúa indagando sobre las relaciones que vinculan la cantidad inicial de vacas (6 vacas) con los demás valores de ese mismo sistema de cantidad y luego, aplica esa misma *razón* de manera análoga, pero a la inversa, en el otro sistema de cantidad para hallar la duración de la comida (etapa 4).

Para los demás valores presentados en la tabla no fue tan sencillo reconocer la relación que los vinculaba, por tal motivo la estudiante plantea un procedimiento distinto mediada por sus saberes previos sobre los números racionales y la relación parte-todo. En este, ella considera la aparición de un elemento crucial, la comida, que asume como una cantidad constante con la cual se puede operar sin necesidad de conocer su valor absoluto y que representa la unidad, el entero o el todo que se descompone en partes iguales de acuerdo con la cantidad de vacas que se deban alimentar y con la duración de la misma.

Diálogo 3

Explicación verbal sobre sus procedimientos realizados por la estudiante 2 sobre la situación 1 de la tarea introductoria

2:06 **Estudiante:** Entonces lo que hice fue multiplicar la cantidad de vacas por la cantidad de días que duraba la comida. Porque yo lo pensé como si esa comida que le tocaba a cada una de esas seis vacas, como un sexto, porque era un sexto del total de la comida. Entonces si sumas todos esos un sexto, todas esas partes, pues te debería dar el total de una vaca, entonces lo multiplique por seis, esa cantidad de días y eso me dio 540 y como comprobación también lo hice con 3 y también me dio 540.

3:20 **Profesora:** […] Entonces para los demás que hiciste?

3:26 **Estudiante:** para los demás pues dije, si multiplico entonces la cantidad de vacas por la cantidad de días que dura la comida y esto me da el total, pues si divido el total entre la cantidad de vacas que es la otra información que me están dando, me debería dar la cantidad de días, que es la operación contraria, entonces hice eso con cada uno, 540 dividido 18, dividido 15, dividido 8, todo, y pues así saque la tabla.

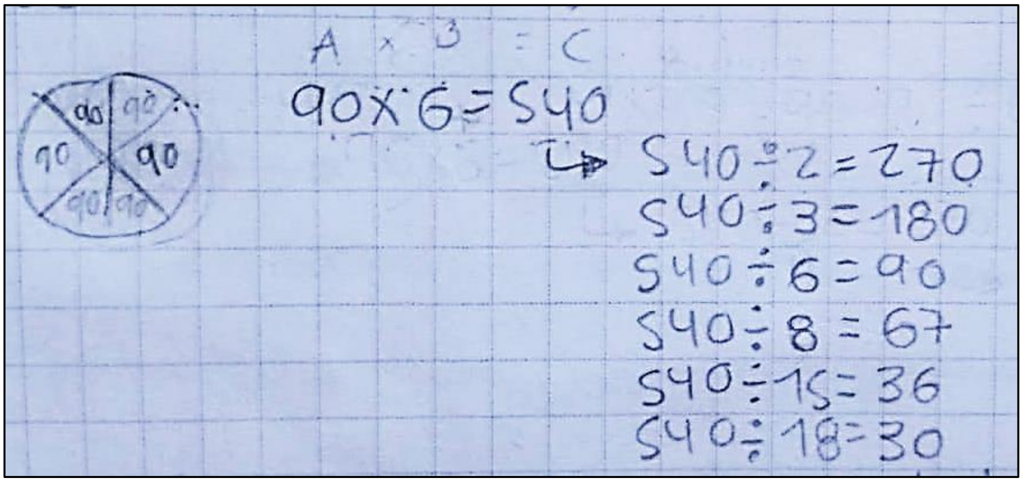
Nota. Fragmento tomado del archivo Transcripción entrevista Est 2 explicación de procedimientos tarea intro propor inver Oct 2020.

La inclusión de la comida en el análisis de la situación, como una cantidad fija sobre la cual se opera como si fuera un número, conlleva a la estudiante a descubrir otra cantidad: comida - día. Esta es una nueva unidad constante o invariante que permite la correlación entre la cantidad de vacas y duración de la comida, de la cual, aunque no se conoce su total, si se tiene un estimado de 540 días-comida. Sobre ella, es interesante como la estudiante la usa como una relación funcional: $\left((\#vacas) \times \frac{(\#días-comida)}{vaca}\right) = 540\ días - comida.$

Así, la estudiante deduce que, si para 6 vacas la comida dura 90 días, dando a cada vaca la misma porción, entonces con estas condiciones cada una de estas vacas está comiendo un sexto (1/6) del total de la comida en 90 días. Luego, si ya no se tuvieran seis sino una sola vaca, esta debería comer en los primeros 90 días un sexto del total de la comida, en los siguientes 90 días comería otro sexto del total de la comida, en otros 90 días otro sexto y así hasta completar unidad. Por lo que, si lo que se quiere es encontrar la duración de comida para una vaca entonces se multiplica 90 días por 6 partes, encontrando que para una vaca la comida dura 540 días.

Figura 18

Registro escrito realizado por la estudiante 8 sobre la situación 1 de la tarea introductoria



Nota. Archivos de imagen Registro escrito 1 y 2 tarea intro prop inver Oct 2020 Est 8.

Luego, como se menciona en el **Diálogo *3***, la estudiante decide comprobar su hallazgo corroborando que la estrategia hallada también cumpla para 3 vacas. Para esto, utiliza las cantidades encontradas con anterioridad a través de los razonamientos por analogía, las cuales corresponden con: para 3 vacas la comida debe durar 180 días. Por lo cual, la estudiante multiplica la cantidad de vacas por la duración de la comida esperando que el resultado de ese producto sea 540 días-comida, pues según sus hipótesis y hallazgos anteriores $A \times B = C$, siendo C siempre igual a 540.

Es así como la estudiante valida que si multiplica la cantidad vacas por la cantidad de días este producto siempre debe ser igual a 540 comida-días, tal como lo enuncia en el **Diálogo *3*** "si multiplico entonces la cantidad de vacas por la cantidad de días que dura la comida y esto me da el total" (Est 2, 3:26). Justamente este hallazgo la lleva, en primer lugar, a reconocer la constante de proporcionalidad característica de la covariación bilineal y, en segundo lugar, con esta constate su manera de proceder corresponde a los procedimientos analíticos: $x \times y = 540$. Entonces, conocida una de las cantidades (de una familia de cantidad), se puede encontrar la cantidad correspondiente (de la otra familia de cantidad), simplemente dividiendo la constante de proporcionalidad entre la cantidad conocida, es decir, si lo que desea es encontrar el total de días que dura la comida para una cantidad de vacas determinada solo debe dividir 540 entre el número de vacas, tal como se muestra en el siguiente fragmento del **Diálogo *3*** "si divido el total entre la cantidad de vacas que es la otra información que me están dando, me debería dar la cantidad de días, que es la operación contraria" (Est 2, 3:26).

En esa misma línea, la estudiante concluye que para cualquier par de valores correspondientes de dos distintos sistemas de cantidades relacionados (cantidades heterogéneas), la multiplicación siempre será igual a la constante de proporcionalidad, en este caso 540 comida-días, luego, 2 vacas por 270 días y 3 vacas por 180 días es igual a 540 comida-días.

Estos procedimientos se acercan a la etapa final del razonamiento proporcional, ya que, hay un reconocimiento de las variaciones y de la relación analítica que correlaciona las cantidades, sin embargo, aún no es explícito el tratamiento algebraico de las relaciones. En esta etapa final, las estudiantes analizan la correlación entre las cantidades en función de un invariante que relaciona cualquier par de valores pertenecientes a los dos sistemas de cantidades heterogéneos. En este caso, para la proporcionalidad inversa, dicho invariante está soportado en la multiplicación entre las parejas de valores correspondes de las cantidades heterogéneas. A esta forma de razonamiento, Obando (2015) la nombra como razonamientos analíticos ya que están soportados en la relación funcional entre parejas de cantidades heterogéneas.

En esa misma línea, de acuerdo con Villa-Ochoa (2020) un indicador de razonamiento proporcional se evidencia en que los estudiantes puedan reconocer la existencia de una nueva cantidad, la cual es producto de la transformación de cantidades particulares e individuales. Esta cantidad, al igual que en los razonamientos por analogías, no es especificada en la información inicial y mucho menos se sugiere que deba ser calculada para encontrar la solución. Sin embargo, esto deja ver que, en la comprensión del sentido de covariación inversa a partir de la relación entre los sistemas de cantidades involucrados, la posibilidad de reconocer el producto constante entre cualquier par de valores correspondientes se vuelve un elemento clave en la solución cuantitativa de las situaciones.

Por otro lado, vale la pena llamar la atención sobre las representaciones desarrolladas por las estudiantes en las **Figura *17*** y **Figura *18***, estas, en comparación por ejemplo con la **Figura *10***, están centradas no solo en las cantidades que intervienen en la situación sino también en las relaciones que se dan entre dichas cantidades, lo que permite a las estudiantes tomar decisiones sobre el tipo de operaciones que deben realizar con dichas cantidades. Véase, por ejemplo, cómo las vacas no son representadas de manera explícita sino a través de círculos y cómo con el uso de flechas, símbolos de operaciones, algunas palabras (el doble y repartir) e incluso de expresiones generalizadas ($A \times B = C$), las estudiantes expresan conexiones entre las cantidades, de manera que los iconos quedan configurados al expresar las relaciones que surgen entre los elementos del contexto.

Estas formas de representación donde prevalecen las relaciones entre las cantidades por encima de las particularidades y que son medios instrumentales a través de los cuales las estudiantes piensan y configuran su acción y sus procedimientos, se asemejan a lo que Obando (2015) refiere como representaciones icónicas (objetivan las relaciones) y simbólicas (cuando las relaciones son expresadas en una generalización).

En términos generales, los párrafos anteriores permiten reconocer cómo al adentrarse en una situación de proporcionalidad inversa, las estrategias y procedimientos realizados por las estudiantes fueron cambiando progresivamente, muchos de ellos transitando por distintas etapas del razonamiento proporcional. Algunas estudiantes iniciaron la situación centrando su análisis en las particularidades contextuales; otras, influenciadas por sus experiencias personales previas, idearon la relación entre las cantidades solo de manera cualitativa, analizando que cambios en una de las variables produce cambios inversos en la otra variable, esto llevó a muchas ha intentar materializar dichos cambios de manera cuantitativa.

En ese sentido, se evidenció como algunas de las estudiantes se centraron inicialmente en reconocer aumentos o disminuciones aditivas entre los valores de una sola variable, otras plantearon comparaciones multiplicativas en una sola variable que luego trasladaron de manera inversa a la otra e incluso, varias pasaron a reconocer un patrón invariante el cual permitió coordinar la correlación entre las cantidades. Esto, refuerza los planteamientos de Koellner-Clark y Lesh (2003) quienes insisten en que el desarrollo del razonamiento proporcional no es definitivo ni lineal, antes bien, es recurrente y va cambiando de acuerdo con las situaciones que se vayan trabajando, moviéndose “hacia adelante y hacia atrás a lo largo del continuo, a medida que [los estudiantes le] dan sentido a diferentes actividades problemáticas y hacen conexiones con conocimientos previos” (p. 97).

De manera que, más allá de mostrar que los procesos que describen cada etapa están instituidos en las estudiantes, este apartado resalta la condición progresiva y gradual de cómo se desarrolla el razonamiento proporcional sustentado en la capacidad de las estudiantes para analizar las situaciones desde la variación y el cambio, promoviendo el reconocimiento de las cantidades y la búsqueda de patrones e invariantes que coordinen los procesos de covariación y correlación entre las cantidades. Mostrando que las estudiantes poseen una capacidad natural para hacer análisis variacionales, incluso cuando las relaciones son correlaciones bilineales.

Por otro lado, también se puede destacar el posible vínculo entre las representaciones y los procesos de razonamientos propuestos por las estudiantes, sugiriendo que las representaciones parecen tener una influencia en la manera cómo las estudiantes resuelven las situaciones, es decir, las representaciones parecen ser un medio instrumental a través del cual las estudiantes pueden configurar su acción y, por ende, sus procedimientos.

5.2 El papel del invariante multiplicativo en la proporcionalidad inversa

Como se mostró en el apartado anterior, las estudiantes pueden aproximarse con naturalidad a fenómenos de cambio y allí, reconocer procesos de covariación entre las cantidades, descubrir patrones aditivos y multiplicativos e, incluso, utilizar dichos patrones para describir los procesos de correlación entre las cantidades que varían aun cuando no se les ha instruido explícitamente sobre dichas relaciones. En ese sentido, en esta sección se pretende ampliar la reflexión sobre el papel de la constante de proporcionalidad en la proporcionalidad inversa, analizando cómo interpretan las estudiantes el invariante multiplicativo en las correlaciones bilineales.

Tal como se ha mencionado, la tarea introductoria de proporcionalidad inversa estaba compuesta por dos situaciones. La primera situación, problematizada en el apartado anterior, aludía a la relación entre una cantidad de vacas para alimentar y la duración de determinada comida (**Figura *9***) y la segunda situación, presentada en esta sesión, (ver **Figura 19**), indicaba que al final de una jornada de trabajo, la señora Tulia envasa una cantidad total de aceite para hacer empanadas en 8 barriles cada uno de 20 litros de capacidad. Sin embargo, al no encontrar los barriles en los cuales guarda normalmente el aceite, utiliza otros barriles que tienen 6 litros de capacidad. Es por esto que ella debe averiguar ¿cuántos barriles de 6 litros necesita para guardar el total de aceite?

De acuerdo con los registros escritos y las entrevistas cortas (**Diálogo 4**), el reconocimiento del invariante que correlaciona las cantidades en la situación 2, visto como la multiplicación de los valores de las dos cantidades heterogéneas, surge de una manera más natural para las estudiantes.

Al parecer, las experiencias previas y el conocimiento social de las estudiantes, elementos decisivos en el razonamiento proporcional, conducen e influyen en la planificación de las soluciones ya que con seguridad las estudiantes han tenido la oportunidad de hacer vaciados de líquidos en botellas.

Figura 19

Situación 2 de la tarea introductoria de proporcionalidad inversa

Situación 2: *La vecina de mi abuela, la señora Tulia vende empanadas. Al final de su jornada ella envasa el total del aceite que utilizó en 8 barriles cada uno de 20 litros de capacidad.*

A) *Ayer no logró encontrar sus barriles, así que utilizó otros que tenían una capacidad de 6 litros cada uno ¿Cuántos barriles en total llenó doña Tulia sabiendo que siempre le queda la misma cantidad de aceite al final de su jornada? Recuerda explicar cómo encontraste la respuesta.*

B) *A la semana siguiente su hijo le llevó 10 barriles distintos a los anteriores y en ellos pudo envasar todo el aceite ¿Cuál es la capacidad de esos barriles?*

Nota. Situación típica de proporcionalidad inversa adaptada de Chizner et al. (2010).

Diálogo 4

Explicación verbal sobre sus procedimientos realizados por la estudiante 2 sobre la situación 2 de la tarea introductoria

9:40 **Profesora:** cuéntame tú cómo lo pensaste la situación 2.

9:46 **Estudiante:** si, la impresión del problema dos fue que me pareció mucho más fácil, porque me dijeron que tenía 8 barriles cada uno de 20 litros y después los llena de seis litros cada uno y, entonces yo dije, primero necesito el total de aceite y multipliqué los 20 litros de cada 8 barriles, entonces 8 por 20 que me dio 160, entonces eran 160 litros de aceite y después lo dividí entre seis.

10:27 **Profesora:** ahí, por ejemplo, en la forma como se solucionan los dos problemas, encuentras algo en común, en los procedimientos, ¿en la manera de pensarse?

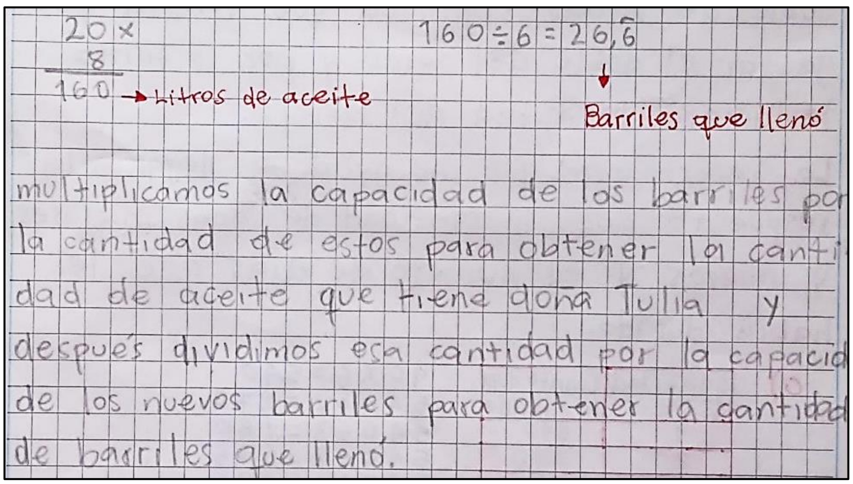
10:41 **Estudiante:** pues la verdad yo los diferencié mucho porque, cuando los comparaba no me parecían mucho, ósea, se me venía ahí mismo a la mente la solución del segundo, el primero era más como un experimento, de ir probando cosas porque era más desconocido, el segundo fue como ahí mismo la respuesta, que lo leí y bueno, hay que hacer esto, esto y esto, el primero lo leí y dije, voy a ponerme a ver que hago.

Nota. Fragmento tomado del archivo Transcripción entrevista est. 2 explicación de procedimientos tarea intro propor inver Oct 2020.

De manera que, como se muestra en la **Figura 20** y la **Figura 21**, las estudiantes expresan que, al multiplicar la cantidad de barriles iniciales por su capacidad se puede hallar el total del aceite utilizado por doña Tulia, en otras palabras, comprenden que la relación multiplicativa 8 veces 20 litros es equivalente al total de litros de aceite, encontrando que $20\, litros \times 8\, barriles = 160\, litros$ que serán repartidos en barriles. Este valor encontrado se funge como una nueva cantidad en la situación: 160 litros, que corresponde a una cantidad invariante de aceite que llenaría un solo barril de 160 litros de capacidad.

Figura 20

Registro escrito realizado por la estudiante 6 sobre la situación 2 de la tarea introductoria

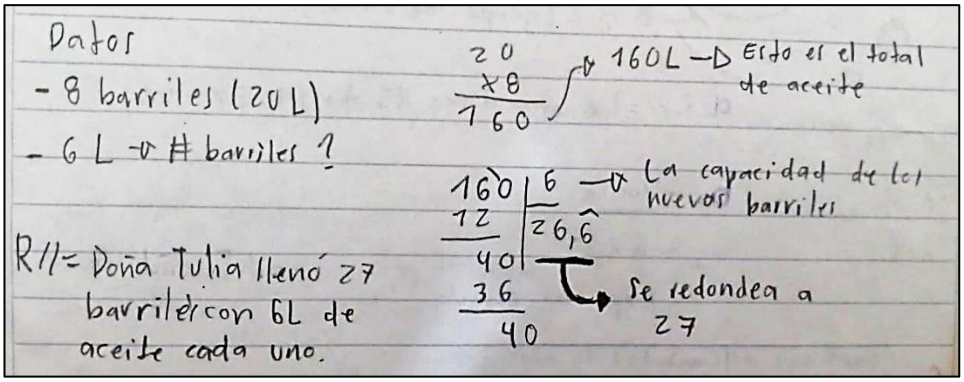


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 est 6.

Lo interesante, es que, una vez encontrada dicha cantidad constante, la estudiante puede hallar con facilidad el número de barriles necesarios con *n* litros de capacidad, dividiendo el total de aceite entre los *n* litros de capacidad, esto al saber que la partición de 160 litros en *n* partes iguales produce el valor de *m* cantidad de barriles. Así, cuando se le pregunta por la cantidad de barriles de 6 litros que contienen el aceite, simplemente la estudiante divide el total de aceite en 6 partes iguales, como se muestra en el **Diálogo *4***, encontrando que pueden llenar 26 barriles y otro poco.

Figura 21

Registro escrito realizado por la estudiante 2 sobre la situación 2 de la tarea introductoria

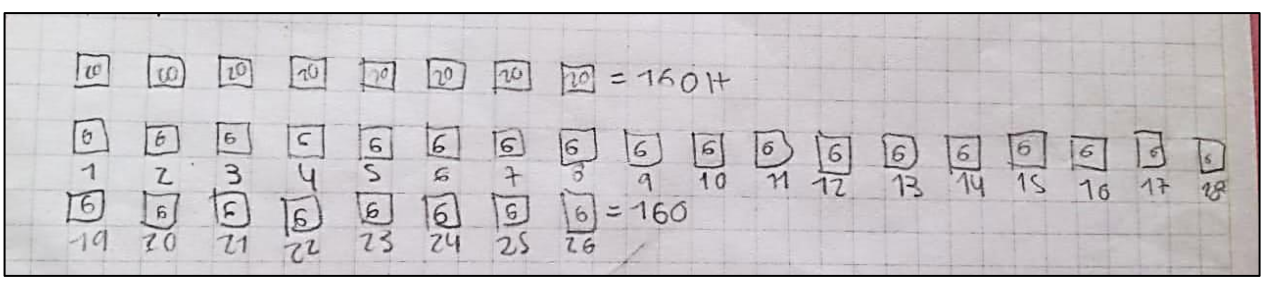


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 est 2.

Igualmente, es posible que la naturalidad con la cual las estudiantes respondieron a esta situación esté relacionada con la similitud que esta tiene a situaciones rutinarias de multiplicación, que se pueden resolver a través de una suma iterada. Quizá, también por eso, la estudiante de la **Figura 22** representa la situación de manera aditiva, dibujando la cantidad de barriles dados y sumando su capacidad las veces que se repite para encontrar el total de litros que posee, ósea, repite 8 veces el valor 20 equivalente a 160. Luego, con esta información, la estudiante una vez más realiza una suma iterada, agregando 6 litros todas las veces que sean necesarias hasta alcanzar 160 litros, encontrando que 26 veces 6 es equivalente a 160.

Figura 22

Registro escrito realizado por la estudiante 9 sobre la situación 2 de la tarea introductoria



Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 est 9.

De manera que, tanto en la situación 1 como en la situación 2 de la tarea introductoria de proporcionalidad inversa, algunas estudiantes descubrieron que, al multiplicar las parejas de valores correspondiente de los dos sistemas de cantidades relacionados, siempre encontrarían un valor constante y, además, que este valor, incluso aunque no se da o se pide encontrar explícitamente en el enunciado de las situaciones, al usarlo es posible llegar a la solución. Esto deja ver entonces, un comienzo en el uso de los razonamientos analíticos por parte de algunas estudiantes, evidenciado en el reconocimiento de las covariaciones y de la relación analítica que correlaciona las cantidades. No obstante, también marca un camino por recorrer hacia el tratamiento algebraico de las relaciones, donde los procedimientos realizados por las estudiantes puedan trascender un enfoque aritmético que aún es marcado y hagan uso de las unidades de medida, las cuales son fundamentales para comprender el invariante multiplicativo como una nueva unidad de medida.

Diálogo 5

Explicación verbal sobre sus procedimientos realizados por la estudiante 2 sobre la situación 2 de la tarea introductoria

5:45 **Profesora:** bueno, te voy a hacer otra pregunta. Cuando tu encuentras ese total que cuando multiplicas todo te da 540 como podríamos interpretar ese 540 en el problema, es decir, por ejemplo, al principio dijimos que seis corresponde a seis vacas, ósea, las cantidades dentro del problema tienen un significado, ¿cómo podríamos entender esos 540?, ¿qué dices?

6:12 **Estudiante:** pues para mi ese 540 eran como el total, por así decirlo, porque si estaba diciendo que a cada vaca le tocaba un sexto estaba diciendo que ese 540 representaba el total de esa comida.

6:33 **Profesora:** ¿ósea que 540 es comida? ¿O es días o es vacas o es combinación de ambos?

6:40 **Estudiante:** 540 era como el total de días que duraba la comida

6:46 **Profesora:** ¿para cuántas vacas?

6:48 **Estudiante:** para una y como era uno yo lo representaba como el total

Nota. Fragmento tomado del archivo Transcripción entrevista est 2 explicación de procedimientos tarea intro propor inver Oct 2020.

A propósito, se presenta en el **Diálogo 5** un fragmento tomado de la entrevista realizada a la estudiante 2, en ella llama la atención cómo cuando la maestra cuestiona a la estudiante sobre el significado del invariante en el contexto de la situación, ella parece no tener claridad en la interpretación de la misma. Inicialmente, la estudiante asocia la cantidad constante (540) con el procedimiento realizado, en donde es protagonista la relación parte-todo y resalta que dicho valor corresponde al todo o al entero, por lo cual al agruparse todas las partes de sextos de comida se tendría el total de la comida, como lo amplía la estudiante cuando dice “pues para mi ese 540 eran como el total, por así decirlo, porque si estaba diciendo que a cada vaca le tocaba un sexto estaba diciendo que ese 540 representaba el total de esa comida” (Diálogo 5, est. 2, 6:42). No obstante, la maestra nuevamente interroga a la estudiante en busca de que ella misma reafirme su respuesta, a lo que la estudiante responde que corresponde al total de días que dura la comida para una sola vaca.

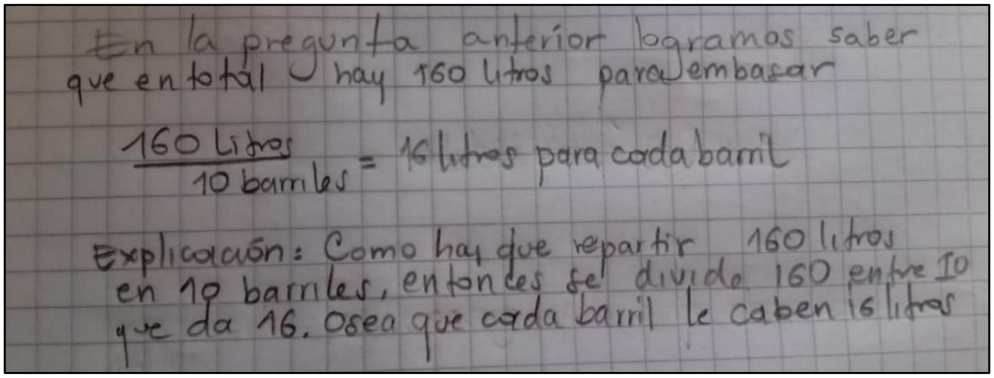
Es así como este episodio permite ver que al referirse a un tratamiento analítico es importante, más no suficiente, descubrir el patrón que se mantiene constante en la covariación de las cantidades heterogéneas. Dado que, una vez identificada la constante es fundamental interpretarla en el contexto de la situación y analizar su rol en el proceso de correlación entre las cantidades, en donde es crucial el papel de las unidades de medida, las cuales transforman un valor numérico en una cantidad o sistema de cantidad.

En ese sentido, Sánchez (2011) insiste en la necesidad de incluir y operar con las unidades de medida de cada cantidad cuando se trabaja con razones, proporciones y proporcionalidad, esto permitirá hacer explícito en el lenguaje la relación entre las cantidades, además, que “favorece en los estudiantes la identificación de los distintos roles de la *razón*, principalmente de la *razón* como relator cuando se trabaja con magnitudes heterogéneas” (p. 201) y en este caso, del invariante o la constante como transformador.

A diferencia del literal A, en el literal B de la situación 2 ya no se daba capacidad y se pedía el número de barriles, sino que se conocía el número de barriles y se preguntaba por su capacidad. Sin embargo, para resolverlo las estudiantes nuevamente tomaba como referencia el valor constante encontrado, este como ya se mencionó es resultado de multiplicar *n* veces la capacidad por barril. Luego, si lo que se sabe es el número de barriles iguales entre los que se va a repartir el aceite, se puede encontrar cuántos litros de aceite le corresponden a cada uno dividiendo el total de aceite entre el número de barriles, así lo expresa la estudiante de la **Figura 23**.

Figura 23

Registro escrito realizado por la estudiante 10 sobre la situación 2 literal B de la tarea introductoria



En la pregunta anterior logramos saber que en total hay 160 litros para embasar

$$\frac{160 \text{ Litros}}{10 \text{ barriles}} = 16 \text{ litros para cada barril}$$

Explicación: Como hay que repartir 160 litros en 10 barriles, entonces se divide 160 entre 10 que da 16. Osea que cada barril le caben 16 litros

Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea intro prop inver Oct 2020 est 10.

Con todo esto, los procedimientos de la figura 20, 21 y 23 dejan ver el papel del invariante en las situaciones de proporcionalidad inversa, en donde este, más allá de permitir el cálculo aritmético de cantidades, asume un rol de transformador que al aplicarlo sobre la cantidad de litros por barril los transforma en número de barriles y viceversa, al aplicarlo sobre el número de barriles los transforma en capacidad por barril, es decir, si se considera a k como la constante se tiene

$$k(n, m)\ litros = n\ barriles \times m\ \frac{litros}{barril}$$

Luego, si se aplica la constante con cada una de las familias de cantidades se obtiene:

$$\frac{k\ litros}{n\ barriles} = m\ \frac{litros}{barril} \qquad \text{ó} \qquad \frac{k\ litros}{m\ \frac{litros}{barril}} = n\ barriles$$

Esto se da, porque el invariante está acompañado de unas unidades de medida “litros” las cuales le dan la categoría de cantidad, que al aplicarse sobre uno de los sistemas de cantidades lo transforma en el valor correspondiente del otro sistema de cantidad. Así, siguiendo a Obando (2015) el invariante se puede interpretar como “una especie de función que correlaciona familias de cantidades (es decir, pone en correspondencia biunívoca cantidades de una familia con cantidades de otra) o transforma cantidades en una de las familias en cantidades en la otra" (p. 218).

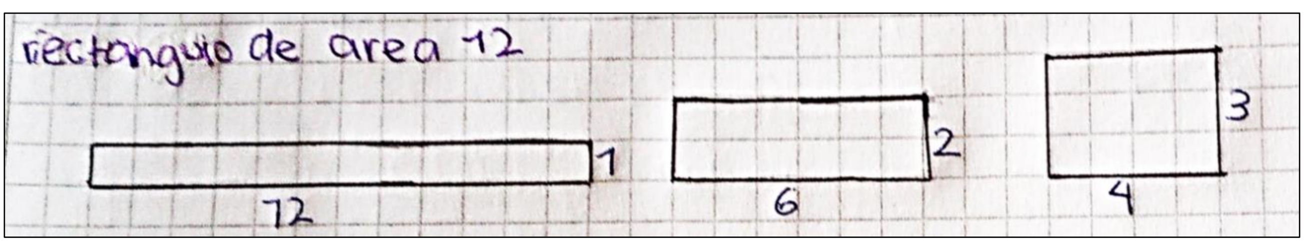
5.3 Tarea 2: Construyendo rectángulos de igual área

Una vez finalizada la tarea introductoria se desarrollaron 4 momentos de clase magistral en los cuales se discutieron con las estudiantes generalidades y características de la proporcionalidad inversa. Luego, a principios de noviembre se les propuso una tarea final para realizar en equipos de 3 estudiantes, en la cual se buscaba problematizar la covariación entre los lados de un rectángulo cuando su área se mantiene constante igual a $12\ cm^2$.

Para iniciar se le pidió a cada equipo dibujar en sus cuadernos todos los posibles rectángulos que cumplieran la condición de tener como área $12\ cm^2$ y que prestaran atención en la manera cómo cambiaban las medidas de la base y la altura entre los rectángulos dibujados. Una vez que los equipos finalizaron sus construcciones se dio paso al momento de socialización con el resto del grupo y allí se encontró que 4 de los 5 equipos concluyeron que se podían dibujar solo tres rectángulos, o en su defecto, 6 rectángulos intercambiando las medidas de su base y su altura, un primer rectángulo de base 12 cm y altura 1 cm, un segundo rectángulo de base 6 cm y altura 2 cm y un último rectángulo de base 4 cm y altura 3 cm, como se puede ver en la **Figura *24***.

Figura 24

Registro escrito realizado por el equipo 1 tarea 2: Construcción de rectángulos



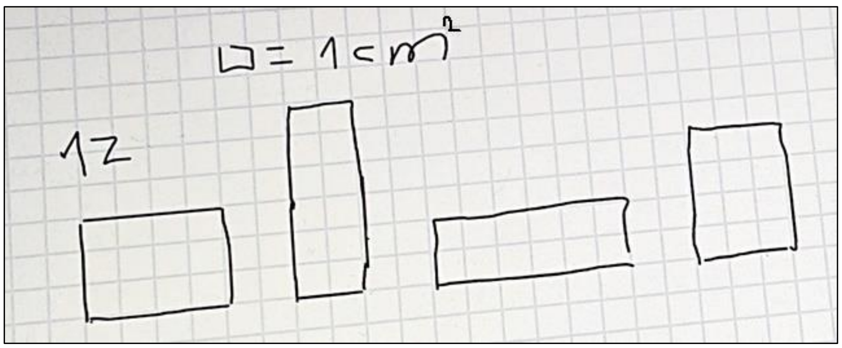
Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo1 Est 11.

La semejanza en los rectángulos dibujados por los equipos refleja que las estudiantes han desarrollado una noción de área relacionada con encontrar el número de unidades cuadradas que pueden cubrir una superficie dada que, en este caso, correspondía con 12 unidades cuadradas

(**Figura 25**). Con esta idea, las estudiantes buscaron todos los posibles rectángulos que encerraran exactamente 12 cuadrados de 1 cm^2, hallando los tres rectángulos ya mencionados. Sin embargo, dicha aproximación al concepto de área también dificultó la exploración de otra variedad de rectángulos por parte de las estudiantes, en los cuales las medidas de sus lados tomaban valores racionales y generaban un dibujo que, aunque visualmente no parecía contener exactamente 12 cuadrados de 1 cm^2, al agrupar particiones de la unidad más pequeñas completaban exactamente 12 cuadrados de 1 cm^2.

Figura 25

Registro escrito realizado por el equipo 5 sobre la tarea 2: Construcción de rectángulos

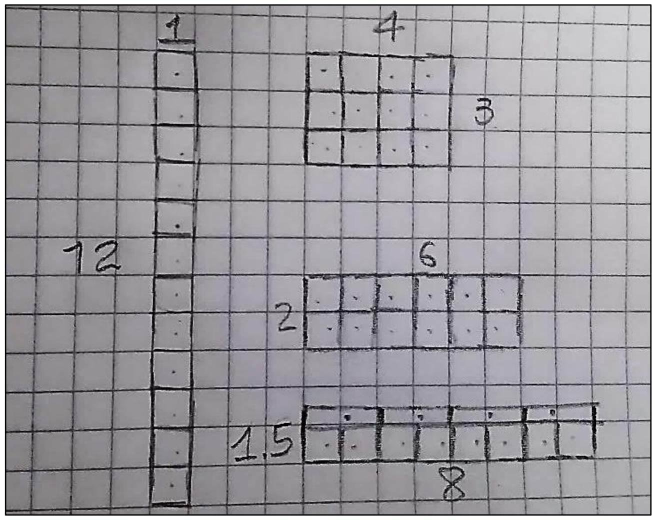


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 2 Est. 5.

Solo uno de los equipos propuso un rectángulo adicional que tenía 8 cm de base y 1,5 cm de altura. En la **Figura 26** se puede observar que este grupo de estudiantes tuvo una concepción similar de área, sin embargo, a diferencia de los demás grupos ellas realizaron particiones a la unidad patrón de medida. En particular, dividieron a la mitad el rectángulo de 1 cm^2, encontrando que con 2 mitades de rectángulo podían hacer una unidad completa, por lo que, agruparon 8 mitades para conformar 4 unidades completas que sumadas con las 8 unidades de la base completaban un total de 12 cuadrados de 1 cm^2.

Figura 26

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3 est 10.

Esta manera de abordar la tarea, fragmentando la unidad 1 cm^2 en porciones de área más pequeñas pero igualmente familiares y operables (mitades, cuartos, octavos, entre otros) permitió a la estudiantes encontrar otras posibles soluciones y al mismo tiempo, refleja el desarrollo de algunas habilidades que según Pitta-Pantazi y Christou (2011) y Lamon (2007) son propias del razonamiento proporcional como la partición, la relación parte - todo y la unitización, esta última entendida como el proceso cognitivo de dividir una cantidad dada en piezas equivalentes o de tamaño conveniente para operar con dicha cantidad.

Diálogo 6

Explicación verbal procedimientos estudiante 1 sobre la tarea 2: Construcción de rectángulos

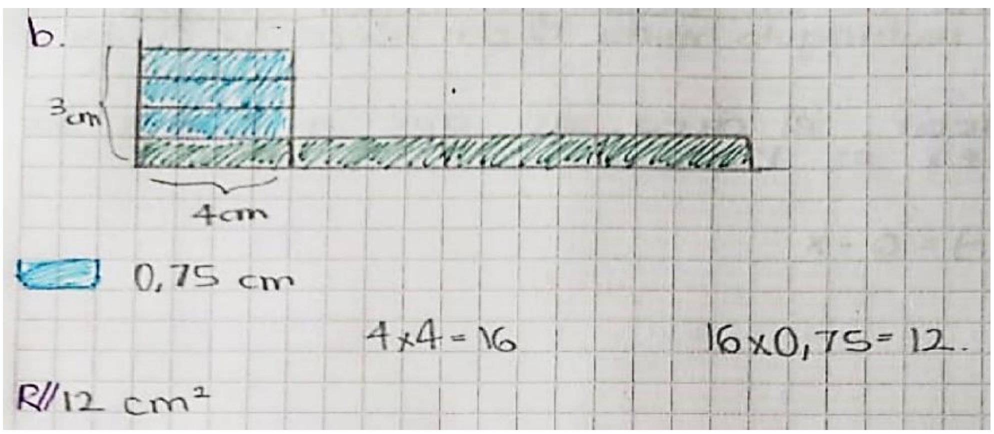
06:09 **Profesora:** Mira que en el primer punto por ejemplo cuando hacíamos los rectángulos, apenas encontramos 3 soluciones, encontramos la de 6 por 2, 1 por 12 y la de 4 por 3. ¿Por qué crees que uno tenga esa visión tan limitada al principio?

06:27 **Estudiante:** Porque normalmente uno como que, por decirlo así, es muy esquivo con los números decimales porque pues no sé, es como más largo el procedimiento para hallar con las comas entonces yo creo que uno siempre se centra en los números enteros, es más sencillo para uno.

De igual modo, este suceso sobre el dibujo de los rectángulos refleja la necesidad por parte de las estudiantes de continuar familiarizándose con los números racionales pues, aunque son conscientes de su existencia, al momento de resolver un problema no es usual que los utilicen en sus procedimientos o logren integrarlos en sus soluciones, tal como lo sugiere la estudiante 1 en el **Diálogo 6**. Y en ese sentido, como lo ratifica Lamon (2007) el conocimiento y la comprensión del conjunto de los racionales es fundamental en el camino hacia el desarrollo del razonamiento proporcional, partiendo de su acepción como parte-todo e interrelacionándolo con los demás constructos como la *razón*, el operador, el cociente y la medida.

Figura 27

Registro escrito realizado por el equipo 4 sobre la tarea 2: Construcción de rectángulos

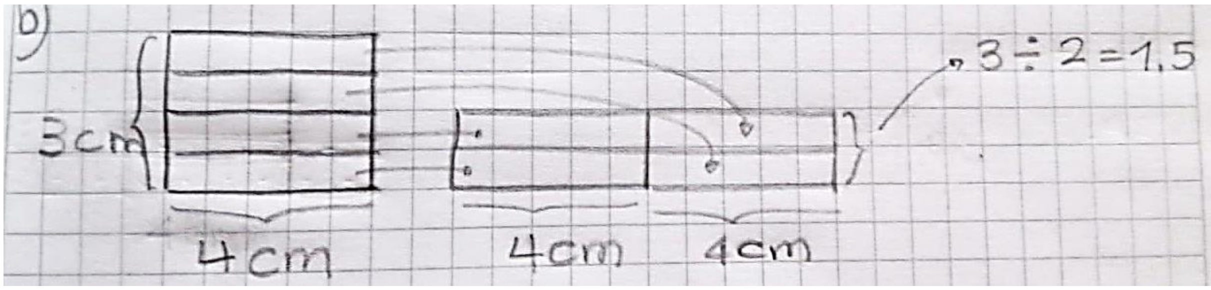


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 4 est 3.

Fue así como los siguientes literales de la tarea buscaban ampliar la mirada de las estudiantes llevándolas a construir otros rectángulos de área $12\ cm^2$, con valores racionales en la longitud de su base y altura. Para iniciar, se les pidió tomar como referencia el rectángulo de base 4 cm y altura 3 cm del cual ya tenían certeza de la medida de su área igual a $12\ cm^2$. Sobre este rectángulo se les indicó hacer una partición horizontal en cuatro partes iguales y luego, reacomodar dichas partes de tal manera que se formaran rectángulos diferentes a los ya encontrados, como se muestra en la **Figura 27** y Figura **28**.

Figura 28

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

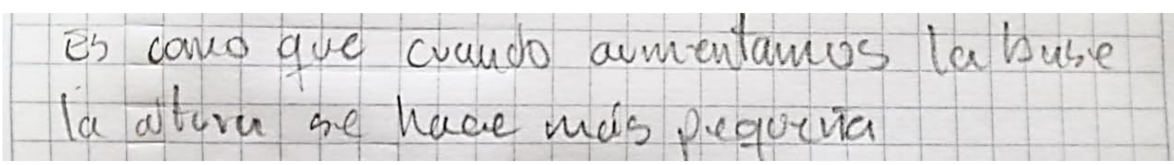


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3 est 10.

Siguiendo las indicaciones de las particiones, las estudiantes encontraron otros dos rectángulos. El primero de base 16 cm y de altura 0,75 cm, como resultado de agrupar las cuatro superficies de manera horizontal (ver **Figura *27***) y el segundo de base 8 cm y altura de 1,5 cm, que se formaba al agrupar en dos columnas los 4 rectángulos pequeños (ver **Figura *28***). Junto a los rectángulos dibujados, las estudiantes agregaron las explicaciones escritas para cada caso, ampliando sus percepciones numéricas sobre el cambio en las cantidades de magnitud involucradas: las medidas de los lados iniciales y finales.

Figura 29

Registro escrito realizado por el equipo 2 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

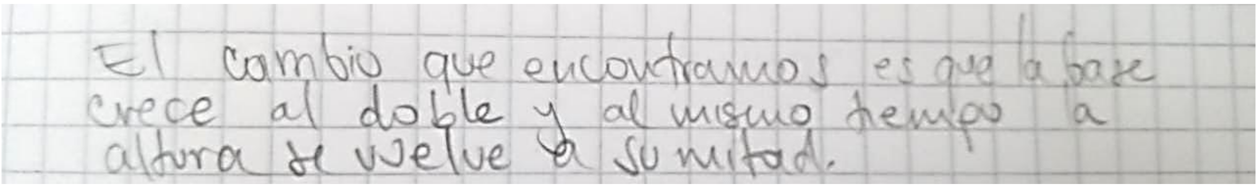


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 2 est 9.

De modo que uno de los equipos, a través de la visualización de los dibujos, reconoció un de forma no numérica un cambio cualitativo negativo entre los lados del rectángulo expresando que “cuando aumentamos la base, la altura se hace más pequeña” (Figura 29, est. 9) y reflejando con este argumento, conciencia sobre la correlación negativa que vincula las variables base y altura del rectángulo, donde, al hacer mayor la longitud de la base, la altura se reduce (etapa 2) (ver **Figura 29**).

Figura 30

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



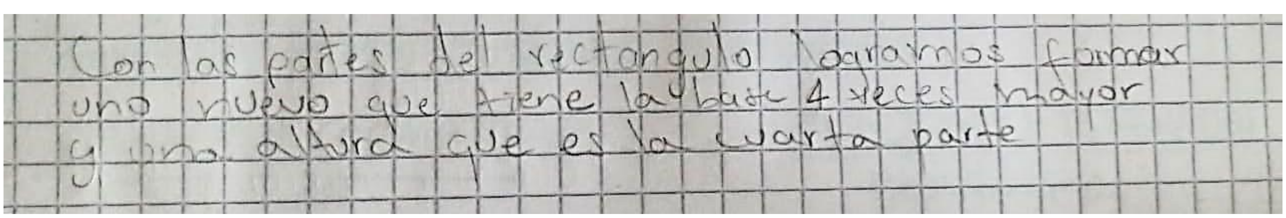
Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3 est 10.

Otros dos equipos fueron un poco más allá y sumado al reconocimiento pre numérico de la covariación inversa, encontraron una relación cuantitativa que describía la covariación entre las cantidades. El equipo 3 describió que si se duplicaba la base del rectángulo (× 2) entonces la altura se debía reducir a la mitad (÷ 2), es decir, los cambios estaban determinados a través de los factores inversos (Ver **Figura 30**). Asimismo, el equipo 4 notó que en comparación con el rectángulo de 3×4, en este nuevo la base se cuadriplicaba (× 4) y la altura disminuía en su cuarta parte (÷ 4) (**Figura 31**).

Este reconocimiento de la correlación entre las cantidades denota las características de la etapa 4 del razonamiento proporcional, dado que las estudiantes realizan inicialmente un análisis de la variación de las cantidades de manera particular, dando cuenta de cómo cambia la altura entre rectángulo y rectángulo y cómo cambia la base entre rectángulo y rectángulo. Y una vez encontrada la *razón* que vincula los valores en una cantidad, esta los lleva a reconocer una relación inversa entre las dos cantidades, observando que cuando la base aumenta en un factor, la altura disminuye en ese mismo factor.

Figura 31

Registro escrito realizado por el equipo 4 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

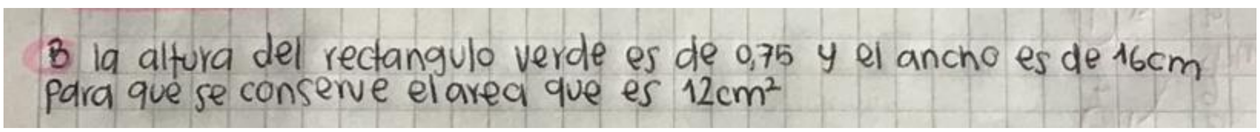


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 4 est 3.

El resto de los equipos igualmente coincidieron en la identificación de la variación inversa y la expresaron numéricamente a través de una regla que gobierna tal proceso de covariación, pero agregaron que el motivo por la cual los lados del rectángulo variaban de esa manera era para conservar el valor del área del rectángulo, igual a 12 cm^2 (ver **Figura 32**), ya que independiente de la manera cómo se acomodaran los pequeños rectángulos el área seguía siendo la misma. Así que, los lados del rectángulo debían variar inversamente, de tal forma que si uno de ellos disminuía el otro lado debía compensar ese cambio aumentando en el factor inverso, para mantener constante el área.

Figura 32

Registro escrito realizado por el equipo 1 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



B la altura del rectangulo verde es de 0,75 y el ancho es de 16cm para que se conserve el area que es $12cm^2$

Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 4 est 12.

Luego, las siguientes preguntas de la tarea conservaban una estructura similar, en ellas se pedía a los equipos encontrar la medida de uno de los lados del rectángulo conociendo el otro lado. En una de ellas incluso, se daba una tabla de valores en la cual las estudiantes debían completar la medida de altura dada la base, de la base dada la altura y los valores correspondientes para la base y la altura sin conocer ninguno de los dos. Estas preguntas terminaban con el interrogante inicial ya planteado sobre ¿cuántos rectángulos diferentes se podían formar que tuvieran un de área 12 cm^2?

Diálogo 7

Registro escrito realizado por el equipo 1 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

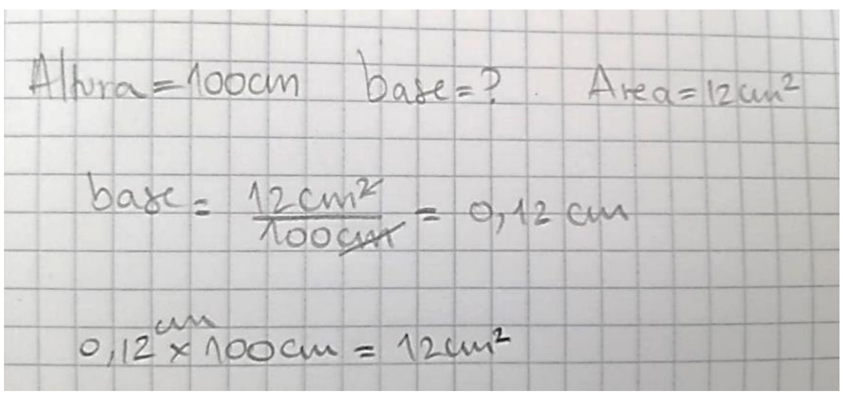
05:15 **Profesora:** Si tuviéramos que decir aquí, que cuál es el elemento más importante en este tipo de problemas, tú qué crees ¿Cuál sería?

05:23 **Estudiante:** Pues, saber cuáles son las operaciones inversas, ósea como, porque si digamos se multiplica para hallar el área, entonces para encontrar los datos que nos falta tendríamos que dividir.

De modo que esta secuencia de preguntas llevó a las estudiantes, en primer lugar, a hacer explícita la relación entre la multiplicación y la división, tal como lo menciona la estudiante en el **Diálogo 7,** donde especifica que para llegar a la solución fue indispensable conocer la relación inversa entre las operaciones multiplicación y división, dado que, si "se multiplica para hallar el área, entonces para encontrar los datos que nos falta tendríamos que dividir" (Est. 1, 05:23, Diálogo 7). Más adelante, pero utilizando otras palabras, nuevamente la estudiante 1 ratifica la importancia del vínculo entre la multiplicación y la división cuando menciona: "yo lo que pensé fue, el área sale cuando multiplico la base y la altura, pero no tengo base, solo el área y la altura entonces lo que necesito es saber por cuánto multiplico la altura para que de 12, ósea que tengo que dividir el área entre la base" (Est.1, Entrevista corta, 07:06).

Figura 33

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

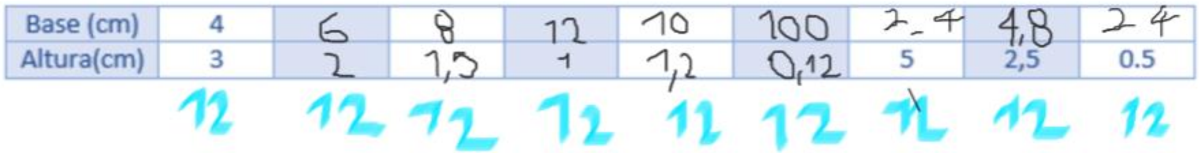


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3 est 10.

Estos procedimientos presentados en la **Figura 33** y en el **Diálogo 7** tienen sentido y se justifican dado que, entre las variables área, base y altura de un rectángulo se establece una correlación bilineal de la forma $Área\ (base, altura) = base \times altura$, donde la variación del área del rectángulo se determina con respecto a la longitud de sus dos lados. Asimismo, la variación del área en cuanto a cada uno de sus lados, tomando uno de ellos constante, es directamente proporcional, lo cual significa que, si uno de los lados se mantiene constante y la longitud del otro aumenta al doble, al triple o al cuádruple entonces el área también aumenta en ese mismo factor, al doble, al triple o al cuádruple respectivamente (Posada & Obando, 2006).

Figura 34

Registro escrito realizado por el equipo 5 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



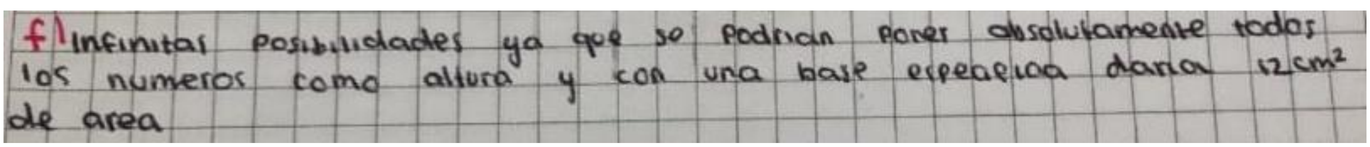
Base (cm)	4	6	8	12	10	100	2,4	4,8	2,4
Altura(cm)	3	2	1,5	1	1,2	0,12	5	2,5	0.5
	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 5 est 5.

En segundo lugar, la secuencia de preguntas también condujo a las estudiantes a determinar que es posible hallar infinitos rectángulos que tengan como área 12 cm^2, pues sin importar la medida de la altura o de la base dada (tomando valores del conjunto de los Reales positivos), siempre será posible encontrar una pareja correspondiente que al multiplicar la medida dada hace que se mantenga constante el área (**Figura 34** y **Figura 35**). Es así como el área del rectángulo se objetiva como la constante de proporcionalidad que correlaciona los lados de un rectángulo de manera inversamente proporcional.

Figura 35

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



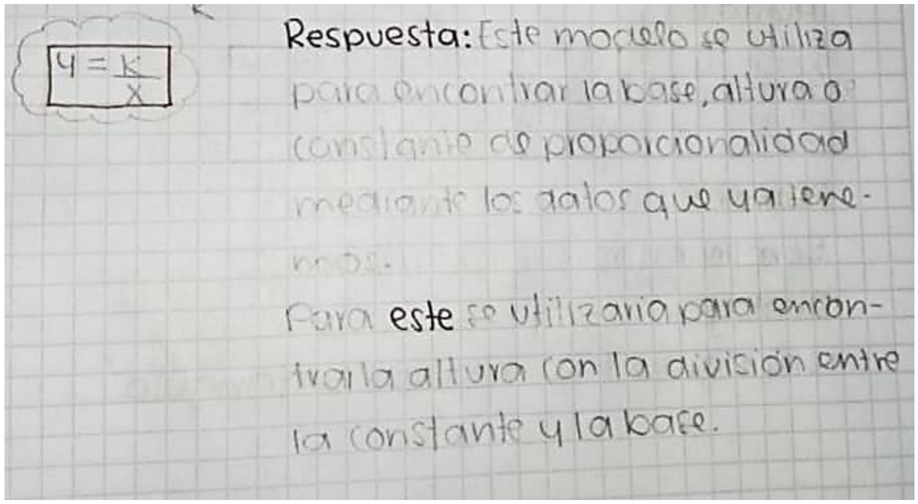
f) Infinitas posibilidades ya que se podrian poner absolutamente todos los numeros como altura y con una base especifica daria 12cm² de area

Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3 est 14.

Por último, tal como se presenta en la **Figura 36**, al pedir a los equipos construir un modelo que describiera la variación entre las cantidades base, altura y área, las estudiantes una vez más se apoyaron en la secuencia de interrogantes ya resueltos. Luego de analizar la similitud en los procedimientos utilizados para encontrar la base o la altura, ellas establecieron que una vez conocida el área y uno de los lados, para encontrar la medida del otro lado solo debían dividir el área entre la medida del lado conocido, expresándolo como $base = \frac{Área}{altura}$. El equipo de la **Figura 36** puntualiza que este modelo tiene versatilidad en la medida en que puede usarse tanto para encontrar la base como la altura e incluso el área, teniendo uno de sus lados.

Figura 36

Registro escrito realizado por el equipo 1 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos

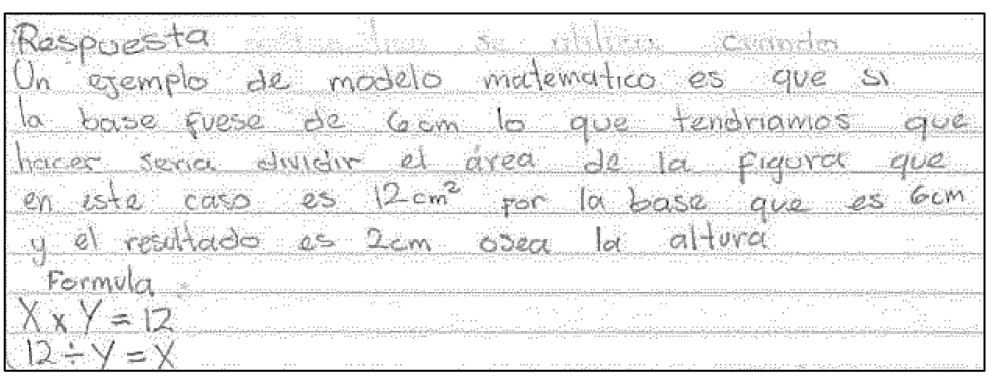


Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 1 est 1.

Vale agregar que muchas de las estudiantes acompañaron su modelo con un ejemplo (ver **Figura 37**), como una manera de validar por ellas mismas la representación propuesta y de hacer explícito el funcionamiento del modelo. Asimismo, en los hallazgos de Villa-Ochoa (2020), la ejemplificación de casos numéricos particulares aparece como un mecanismo utilizado por los estudiantes en el camino hacia el reconocimiento de objetos multiplicativos, entendidos como la transformación de la relación entre cantidades en una nueva cantidad conjunta.

Figura 37

Registro escrito realizado por el equipo 3 sobre tarea 2: Construcción de rectángulos



Nota. Archivos de imagen Registro escrito tarea 2 Construcción de rectángulos Nov 2020 Equipo 3.

Para terminar, cabe resaltar la postura de Obando (2015) cuando insiste en que una aproximación a la covariación de cantidades desde los razonamientos analíticos implica tanto una comprensión distinta sobre las relaciones entre las cantidades como “otras formas de acción ahora ligadas a la comparación de cantidades heterogéneas y al uso de instrumentos que permiten la comparación no sólo de parejas de cantidades, sino de familias de parejas de cantidades” (p. 214).

En esta línea, se puede destacar la necesidad de continuar promoviendo en la clase de matemáticas tareas que susciten la percepción de la covariación, no limitándolas únicamente a la búsqueda de un valor específico, antes bien, proponiendo que las tareas impliquen la indagación de distintos valores, los cuales permitan analizar el comportamiento de las cantidades en diferentes condiciones, hacer comparaciones y encontrar patrones, como el caso de la construcción de los variados rectángulos con un área determinada, la duración de la comida para *x* cantidad de vacas o el número de recipientes que pueden contener una cantidad específica de aceite.

También, es fundamental fomentar en las estudiantes el uso de tablas de valores, dado que a través de esta forma de representación se promueve el reconocimiento de las cantidades involucradas en las situaciones, el manejo más simple y cómodo de los datos, la identificación de regularidades, de relaciones de dependencia entre las cantidades y las familias de parejas de cantidades y de la constante de proporcionalidad. Para Corellano et al. (2015) cuando la información es reordenada y presentada a través de tablas, promueve en los estudiantes otras formas de dialogar con los datos, y, por tanto, con las situaciones. Además, el trabajo con las tablas se conecta con la construcción e interpretación de gráficos cartesianas, aspecto que no pudo ampliarse en esta investigación pero que es vital en el paso de los razonamientos por analogía hacia los analíticos, donde se gesta la función como dependencia.

6. Conclusiones

En este proceso de caracterizar los procedimientos, instrumentos y conceptos relativos al razonamiento proporcional se han conseguido diversos aprendizajes.

A propósito de los procedimientos

Los registros escritos, socializaciones grupales y entrevistas cortas realizadas a las estudiantes respaldan la idea de que el desarrollo del razonamiento proporcional es un proceso gradual y paulatino, en el cual las estudiantes transitan por las distintas etapas de manera recurrente y no lineal. Esto, se evidencia en el apartado 5.1 donde se muestra cómo van cambiando los procedimientos y las representaciones realizadas por las estudiantes, a medida que se profundiza en los análisis y se consideran otras variables, mostrando que justamente ese paso por las diferentes etapas es lo que permite a las estudiantes configurar conceptos y determinar la correlación entre las cantidades.

De igual modo, en este apartado 5.1 se evidenció como el desarrollo del razonamiento proporcional se ve influenciado por distintos factores como los son: los tipos de tareas propuestas, el tipo de números que se utilizan en las situaciones (enteros, racionales, etcétera), las relaciones propuestas entre las cantidades, el lenguaje, la estructura de la situación, los conceptos previos del estudiante, entre otros.

La actividad matemática de las estudiantes señaló la capacidad natural que poseen para reconocer procesos de variación y cambio. En este sentido, ellas a partir de los procesos de de percepción no numéricas, pre numéricas y numéricas, identifican información relevante de la situación como, por ejemplo, los sistemas de cantidades que intervienen y la variación entre las cantidades manifestada a través de expresiones verbales numéricas y no numéricas. Así mismo, en las primeras etapas las estudiantes realizan comparaciones entre los valores de un solo sistema de cantidad y luego, pasan a reconocer comparaciones entre valores de distintos sistemas de cantidades. En particular, es común que en las relaciones de proporcionalidad inversa las estudiantes declaren que, al incrementar los valores de un sistema de cantidad, los valores del otro sistema de cantidad disminuyen, demostrando una percepción no numérica de la covariación entre las cantidades.

Enunciar de manera no numérica las relaciones entre cantidades es crucial en el desarrollo del razonamiento proporcional, pues, por un lado, estas formas no numéricas de las relaciones se constituyen en la comprensión inicial sobre la manera en la cual cambian y se correlacionan las cantidades y, por otro lado, porque conducen a las estudiantes a expresar de una manera más precisa las relaciones de variación y covariación entre las cantidades. A partir de esta percepción no numérica de las relaciones se avanza en etapas posteriores del razonamiento proporcional al desarrollo de patrones numéricos y algebraicos. Sin embargo, se espera que la descripción no numérica no sea la etapa final de análisis de los estudiantes, porque si bien es necesaria, no es suficiente para determinar las relaciones de proporcionalidad inversa. Esto resalta la importancia de continuar fortaleciendo el análisis de la variación incluso a partir de los primeros años de escolaridad, promoviendo la búsqueda de patrones, la creación de secuencias y la comparación cualitativa.

Luego de establecer la percepción pre numérica (aumenta, disminuye, se hace más pequeña, crece, decrece) aparece la necesidad de describir de manera más puntual la relación entre las cantidades, acudiendo a las operaciones numéricas. En este tránsito, con frecuencia las estudiantes acuden a modelos aditivos como resultado de realizar comparaciones a través de la diferencia, analizando cuánto aumentan o disminuyen las cantidades de un valor al otro, aun en la proporcionalidad inversa (**Figura 13** y **Figura 22**).

Ocurre un salto significativo entre lo aditivo y lo multiplicativo, cuando las comparaciones entre las cantidades realizadas por las estudiantes pasan de centrarse en el "cuánto más o cuánto menos" a centrarse en el "estar contenido". Previamente y de manera pre numérica aparecen expresiones como ser el doble, el triple, la mitad, la tercera parte, entre otras, con las cuales se indica cuántas veces cabe un número en el otro, haciendo que la comparación tenga otra lógica, donde se toma una de las cantidades como la unidad de medida respecto a la otra (**Figura 15**, **Figura 17** y **Diálogo 2**).

Estos procedimientos mencionados en el párrafo anterior marcan el comienzo de la etapa 4 del razonamiento proporcional, donde aparece como protagonista la *razón*, sus usos como relator y operador y los razonamientos analógicos. En particular, en un problema de cuarta proporcional las estudiantes encuentran la *razón* como relator entre dos cantidades de un mismo sistema de cantidad y luego, por analogía, la aplican de manera inversa como operador, sobre uno de los valores del otro sistema cantidad para encontrar la cantidad faltante.

En este punto, vale la pena llamar la atención sobre la necesidad de promover una adecuada conceptualización de la *razón*, ya que esta al ser una medida relativa entre dos cantidades se puede definir en dos sentidos. Por un lado, al comparar *x* respecto a *y*, ósea, $\frac{x}{y} = \omega$ y, por otro lado, al comparar *y* con respecto a *x*, luego, $\frac{y}{x} = \frac{1}{\omega}$, lo cual significa que al definir una *razón* necesariamente se define también su *razón* inversa, fundamental en los razonamientos por analogía para la proporcionalidad inversa, donde al cambiar las cantidades respecto a una *razón* en el otro sistema de cantidades, los valores correspondientes cambian a la *razón* inversa.

Con todo esto, en el apartado 5.1 se muestra como buena parte de los procedimientos realizados por las estudiantes se pueden describir con las características propuestas en las etapas de razonamiento proporcional de Koellner-Clark y Lesh (2003) y Lesh et al. (1988). Sin embargo, algunos procedimientos han permitido sugerir algunas aclaraciones que no han sido tenidas en cuenta en dicha clasificación.

Respecto a la etapa 3 del razonamiento proporcional, Koellner-Clark y Lesh (2003) indican que los estudiantes pueden identificar y describir la covariación entre las cantidades a través de patrones aditivos. No obstante, al ser tan general dicha descripción se ha encontrado que algunas estudiantes logran describir la covariación a partir de patrones aditivos, pero analizando de manera particular cada sistema de cantidad y otros, por su parte, aunque también se valen de modelos aditivos, correlacionan de manera conjunta e inversa los dos sistemas de cantidades.

Además, otra idea que no se menciona en las etapas tiene que ver con un modelo aditivo que es válido desde el punto de vista de la proporcionalidad directa donde se cumple que $f(x+1) = f(x) + f(1)$. Esto es, cuando en una situación de proporcionalidad directa se determina la *razón* que vincula los dos sistemas de cantidades (el valor unitario), este se puede repetir aditivamente tanto como se quiera, dado que gracias a la propiedad de homogeneidad de la suma, una cantidad se puede expresar como combinación aditiva de otros valores del mismo sistema de cantidad, luego, la cantidad correspondiente en el otro sistema de cantidad es la suma de los valores correspondientes a cada uno de los sumandos que la componen.

También, los hallazgos de esta investigación nos permiten sugerir que algunos procedimientos realizados por las estudiantes, aunque comparten características de la etapa 4 y 5 del razonamiento proporcional, no se pueden ubicar explícitamente en una de ellas. Es el caso de la **Figura *17***, donde se evidencia un reconocimiento por parte de la estudiante de las cantidades, su covariación inversa y del producto constante que correlación analíticamente los sistemas de cantidades. Sin embargo, el tratamiento de las relaciones que allí se da, está a mitad del camino entre la aritmética y el álgebra, pues no equivale a un uso intencionado de funciones, pero tampoco a una multiplicación genuina. De otro lado, no se evidencia en todos los casos un tratamiento juicioso de las unidades de medida, aspecto fundamental en la compresión de la proporcionalidad inversa.

En cuanto a los instrumentos.

Los registros escritos evidenciaron una correlación entre los tipos de representación realizadas y las etapas de razonamiento alcanzadas por las estudiantes, exhibiendo un uso instrumental de las representaciones vistas como herramienta a través de los cuales las estudiantes producen pensamiento y configuran procedimientos.

Así, por ejemplo, en el apartado 5.1 se puede ver cómo las estudiantes que alcanzaron etapas iniciales del razonamiento proporcional sostienen sus procedimientos en representaciones analógicas, en las cuales explicitan detalles, dibujos sofisticados y elementos de contexto. Mientras que las estudiantes que, poco a poco iban llevando sus procedimientos a las últimas etapas del razonamiento proporcional los sustentaban con representaciones de tipo icónicas y simbólicas, en las cuales resaltaban, además, de los elementos contextuales; las conexiones con conceptos previos como los números racionales, las tortas fraccionarias y la *razón* pre numérica (el doble, la mitad, el triple); la utilización de iconos como flechas y operadores para establecer relaciones entre las cantidades y la creación de modelos generalizadores a través de expresiones algebraicas.

Estas evidencias muestran que las representaciones pueden ser entendidas a partir de dos roles no excluyentes, por un lado, como un medio a través del cual los individuos crean conocimientos y configuran su acción sobre las cantidades y, por otro lado, como un instrumento que permite exteriorizar y materializar los conocimientos y conceptos objetivados por las estudiantes.

También, la ejemplificación de valores específicos surgió como un instrumento potente a través del cual las estudiantes se aproximaron a las situaciones para comprender las relaciones entre las cantidades y encontrar posibles patrones de comportamiento, con lo cual solucionaron cuestionamientos más complejos y lograron describir modelos de generalización.

Inclusive, como se mencionaba en el apartado 5.3, promover el uso de procedimientos analíticos para el análisis de la covariación de cantidades implica impulsar en el aula de clase medios que lleven a las estudiantes a cuestionar la variación, indagar patrones de cambio y constancia y reconocer covariaciones conjuntas que vinculan los sistemas de cantidades. En este sentido, cuando se estudie la proporcionalidad es importante promover el uso de las tablas de valores, de manera que estas permitan transformar las situaciones de cuarta proporcional, así no se limita la búsqueda de un solo valor de una variable, sino que se encuentran varios valores de ambas variables, permitiendo tener una visión más completa de los procesos de covariación y correlación entre las cantidades. Así mismo, es fundamental proveer de preguntas que aludan a describir y caracterizar los procesos de covariación tanto cualitativos como cuantitativos y que inviten a la indagación de patrones, regularidades e invariantes.

Estos instrumentos permiten visibilizar la correspondencia y la variación conjunta entre las cantidades, el reconocimiento de patrones y regularidades, el desarrollo de estrategias y cálculos y la movilización de reflexiones que activan nuevos procedimientos y análisis.

Sobre los conceptos

El análisis de la proporcionalidad inversa a partir de procedimientos analíticos y por la vía de la bilinealidad, requirió el reconocimiento de tres cantidades y no solo dos como se considera comúnmente, a través de las cuales se establece la covariación conjunta. Como se evidenció, en las situaciones multiplicativas de proporcionalidad inversa se establece una relación entre tres sistemas de cantidades, donde uno de ellos covaría bilinealmente respecto a los otros dos sistemas. Esta correlación se describe como la función $z(x, y) = x.y$, donde la variable z es directamente proporcional al producto entre los sistemas de cantidades x e y.

Como se mencionó en las etapas de razonamiento proporcional, cuando las estudiantes se disponen a resolver situaciones de cuarta proporcional es usual que comiencen vinculando las dos cantidades conocidas pertenecientes al mismo sistema de cantidad a través de procedimientos analógicos, encontrando la *razón* que relaciona los valores conocidos pertenecientes al mismo sistema de cantidad. Luego, trasladando por analogía la *razón* a la inversa (operador) a la otra pareja de cantidades del otro sistema de cantidad, encuentren el valor desconocido.

Allí, la *razón* aparece como un concepto estructurante, dado que establece una relación multiplicativa entre las dos cantidades conocidas (del mismo sistema de cantidad) como lo es, por ejemplo, ser el doble, la mitad, estar multiplicado por dos, por tres, etcétera. También, debido a que al definir la *razón* entre dos cantidades como x es a y, implícitamente se determina la *razón* inversa y es a x.

En cuanto a los razonamientos analíticos, se evidenció que desde esta aproximación es fundamental que las estudiantes puedan reconocer la tercera cantidad z constante involucrada en el proceso de correlación. Debido a que, a través de ella, por un lado, se puede interpretar y dar sentido a la manera como covarían las otras dos cantidades, descubriendo que deben variar en un factor inverso de tal forma que los cambios en un sistema compensen multiplicativamente los del otro sistema y así, se mantenga constante el producto.

Y, por otro lado, una vez encontrada la cantidad z como el producto entre los sistemas de cantidades x e y, se vuelve muy sencillo para las estudiantes encontrar el valor de cualquier par de cantidades, pues el producto constante z asume un rol como transformador, ya que al relacionarse con x permite encontrar y y viceversa, al aplicarlo sobre un valor y permite encontrar a x, correspondiente.

Sin embargo, no en todos los casos es tan simple para las estudiantes reconocer e interpretar la cantidad z, dado que con frecuencia no se hace un uso adecuado del análisis dimensional, el cual es primordial al momento de caracterizar un sistema de cantidad y relacionarlo con otro.

Así las cosas, vale la pena llamar la atención sobre la importancia del concepto de *razón*, sus usos como *relator* y *operador* y la coordinación inversa en el proceso de identificar la covariación entre las cantidades x e y a través de los procedimientos analógicos. De igual modo, tal como quedó planteado, hay que destacar el papel del producto invariante como el encargado de gobernar la correlación entre los dos sistemas de cantidades, posicionándose como la constante de proporcionalidad en las correlaciones bilineales.

Perspectivas para futuras investigaciones

En el desarrollo de esta investigación fueron surgiendo algunas ideas y preguntas que han quedado abiertas, ya que por el alcance y los objetivos inicialmente trazados no fue posible estudiarlas a profundidad y en detalle. Sin embargo, estos cuestionamientos pueden configurarse como objetos de interés para futuros investigadores del campo del razonamiento proporcional.

Como se mencionó en el apartado previo de las Conclusiones, los procedimientos realizados por las estudiantes se relacionan con algunos aspectos de la etapa 4 y 5 del razonamiento proporcional propuestas por Koellner-Clark y Lesh (2003). Sin embargo, al analizar rigurosamente el tratamiento de las relaciones que hacen las estudiantes, podría decirse que ninguna de las etapas (4 y 5) describe fielmente sus procedimientos, ya que no hay un uso intencionado de las funciones, pero tampoco se trata de una simple multiplicación. En este sentido, aunque lo desarrollado da muestras de que es potente una aproximación por la vía de la bilinealidad, se sugiere a futuras investigaciones desarrollar más evidencia empírica que permita comprender ¿cómo se puede llegar a promover procedimientos analíticos que impliquen de manera clara el uso de funciones? Así mismo, valga la pena confirmar si en otros contextos y bajo otros problemas se puedan encontrar procedimientos que implique incluir una nueva etapa del razonamiento proporcional que describa la transición entre la etapa 4 y la etapa 5.

En cuanto a los instrumentos, es importante anotar que durante esta investigación no se logró recolectar información que diera cuenta sobre la implementación e interpretación de las gráficas cartesianas en la consolidación de los procedimientos analíticos al estudiar la proporcionalidad inversa. Por eso, se propone a futuras investigaciones buscar ¿Qué conceptualizaciones objetivan los estudiantes al interpretar la covariación inversa entre cantidades y de la constante de proporcionalidad a través las gráficas cartesianas?

Por último, en el marco de la investigación no se realizó un proceso de estudio de situaciones donde las cantidades se correlacionaran a partir de la proporcionalidad compuesta. Sin embargo, siguiendo la línea propuesta en esta tesis se recomienda a futuras investigaciones, proyectar un estudio en el cual se analice la proporcionalidad compuesta a partir de la correlación lineal entre tres o más variables. Así mismo, se plantea reconocer ¿Qué implicaciones se derivan del estudio de la proporcionalidad inversa a partir de la bilinealidad para la proporcionalidad compuesta?

Referencias Bibliográficas

Asesorías académicas Milton Ochoa. (2019). *Prueba de articulación por proceso PENSAR*.

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers* (1st Editio). Routledge.

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). Macmillan Publishing.

Behr, M., Khoury, H., & Harel, G. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48–69.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad.* [Tesis de doctorado, Univesidad Autónoma de Barcelona].

Castañeda, M. O., Ruiz, A. P., Vergara, L. N., & Escudero, R. (2016). *La clase para pensar como modelo para el aprendizaje de la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa*. Universidad del Norte.

Chizner, J., Romero, J., Salazar, F., Joya, A., & Cely, V. (2010). *Hipertexto Matemáticas 7*. Santillana.

Corellano, A. I., Krank, V. A., & Salgado, A. E. (2015). *Estudio de relaciones entre variables: proporcionalidad directa e inversa en la escuela secundaria*. [tesis de pregrado, Universidad Nacional de Córdoba].

Fernández, C. V., & Llinares, S. C. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *30*(1), 129–142.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Gairín, J. M., & Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. *Investigaciones En Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de La Matemática y Educación Matemática*, *2011*, 179.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. [Tesis de doctorado, Universidad de Jaén].

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2019). *Matemática. Relaciones de proporcionalidad inversa: la medida como contexto: séptimo grado* (M. C. Ortiz, Ed.).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. *Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo Del Ministerio de Ciencia y Tecnología*.

González, I., Cortés, R., & Velásquez, W. (2003). Correlación inversa y directa: ¿Dos caras de una misma moneda? In P. Perry, E. Guacaneme, L. Andrade, & F. Fernández (Eds.), *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer* (pp. 133–146). Una empresa docente: Universidad de los Andes.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 29–63). Routledge.

Harel, G., Behr, M. J., Post, T. R., & Lesh, R. (1991). Variables affecting proportionality: Understanding of physical principles, formation of quantitative relations, and multiplicative invariance. In *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*.

Hernández, R. S., Fernández, C. C., & Baptista, P. L. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. [tesis de doctorado, Université Paris-Diderot].

ICFES. (2016). *Saber 3º, 5º y 9º 2015 Cuadernillo de prueba Primera edición. Matemáticas Grado 9°*.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures* (Vol. 22). Psychology Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child: Classification and seriation*. Routledge.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-velue proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45–90). Academic Press.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Lawrence.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics*, *103*(2), 92–98.

Lamon, S. J. (2005). *More: In-depth discussion of the reasoning activities in Teaching fractions and ratios for understanding*. Routledge.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629–667). National Council of Teachers of Mathematics.

Lave, J., & Packer, M. (2011). Hacia una ontología social del aprendizaje. *Revista de Estudios Sociales, 40*, 12–22.

Ledesma, F. (2004). Significatividad para la proporcionalidad inversa en estudiantes del décimo año de escolaridad. In L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 334–340). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.

Merino, R. A. M., Cañadas, M., Brizuela, B., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *36*(3), 59–78.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio. Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas*. Revolución Educativa.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas* (V. 2). Ministerio de Educación Nacional.

Mochón, S. C. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, *24*(1), 133–157.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics 9*, 25−40.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36–53.

Mohr, M. J. (2008). Mathematics knowledge for teaching: The case of preservice teachers. In *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19–43). Brill Sense.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(1), 75–88.

Moss, D. L., & Lamberg, T. (2019). Conceptions of expressions and equations in early algebra: A learning trajectory. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *20*(2), 170–192.

Najarro, L. (2018). *Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria*. [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].

National Council Teacher Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. *Reston, VA: NCTM*.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I-differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217–253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331–363.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica*. [tesis de doctorado, Universidad del Valle].

Obando, G. (2018). Regla de tres simple directa: avatares de un algoritmo. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 113–124.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 979–988). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(1), 59–81.

OCDE. (2018). *PISA 2018 Results. What School Life Means for Students' Lives*.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, *2*, 53–92.

Pantziarra, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). The development of informal proportional thinking in primary school. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 363–372.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference* (Vol. 2). Princeton University Press.

Posada, F., & Obando, G. (2006). *Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Reyes, D., Montiel, G., & Cantoral, R. (2014). "Cuando una crece, la otra decrece"...¿ proporcionalidad inversa o directa? *Premisa*, *62*, 3–15.

Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42b), 559–588.

Sánchez, E. (2011). *Razones, Proporciones y Proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: Una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos*.

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *16*(1), 65–97.

Sánchez, E., Escobar, G., & Muñoz, J. (2012). Sistemas de prácticas de estudiantes de grado séptimo en la solución de algunos tipos de situaciones de proporcionalidad. In G. Obando (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 991–999). Sello Editorial Universidad de Medellín.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. *Research Agenda for Mathematics Education Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, *2*, 41–52.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. da. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Educación y Pedagogía*, *23*(59), 137–158.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 114–145.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. E. (1991). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181–197.

TIMSS. (2009). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. TIMSS & PIRLS International Study Center.

TIMSS. (2015). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center Chestnut Hill, MA.

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad*. [tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona].

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 401–412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181–204.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa: Boletín de Estudios e Investigación, Extra 4,* 115–138.

Van Maanen, V. (2003). *Investigación educativa y experiencia vivida: Ciencia humana para una pedagogía de la acción y la sensibilidad*. Idea books.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141–161). Lawrence Erlbaun Associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41–59). SUNY series.

Villa-Ochoa, J. (2020). Razonar con la covariación. Un estudio sobre las estrategias en un curso de formación de futuros profesores. In C. Gaita, J. Salazar, V. Flores, & F. Ugarte (Eds.), *Actas CIEM 2020* (pp. 44–55). Pontificia Universidad Católica del Perú.