Matemática primitiva y realismo platónico

DARÍO VÉLEZ BOTERO
Profesor Jubilado Universidad de Antioquia
dvb1940@une.net.co

NÚMEROS NATURALES

El descubrimiento de los números naturales (NN)

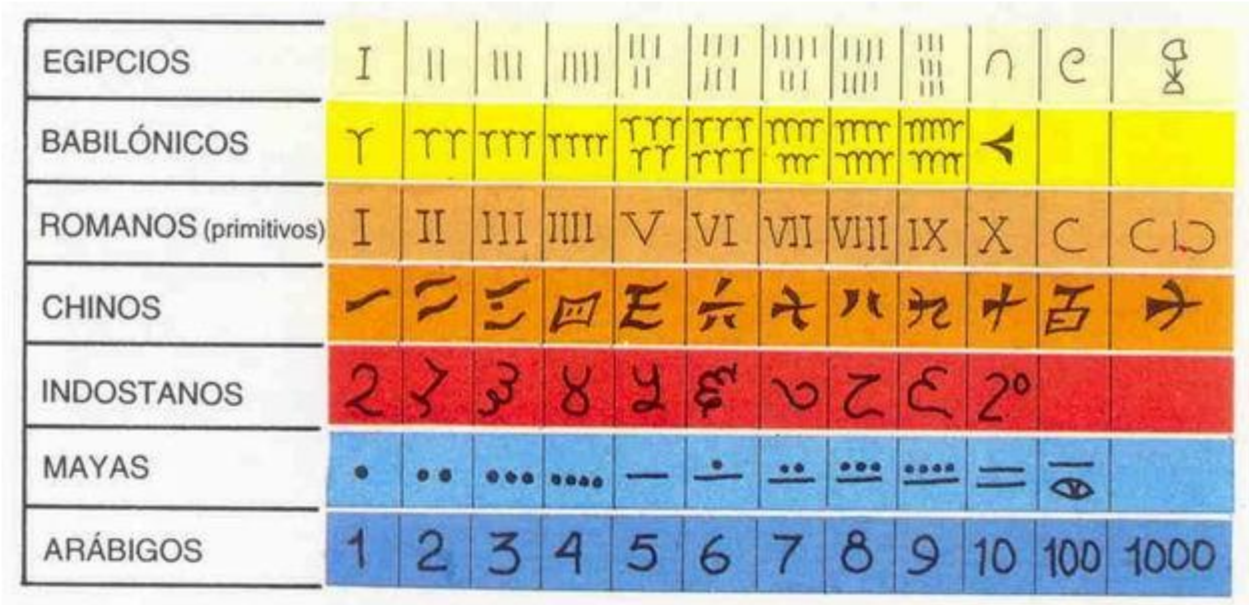
Después de publicar un artículo titulado *¿La necesariedad y universalidad de la Aritmética?* [1], he querido presentar unas reflexiones complementarias acerca del tema llamado «platonismo matemático», que indaga por la pregunta de si la matemática se descubre o si la matemática se inventa. En los planteamientos del «realismo platónico» se incluyen otras consideraciones mucho más exigentes, digámoslo así, que determinan que la matemática existe fuera de la mente humana –que no la crea- y del espacio y del tiempo, que no admite relaciones de causalidad con nosotros, y que existiría incluso si no vivieran los hombres. En este documento extiendo el análisis a la geometría euclídea y al álgebra antigua.

En la matemática me parece básico ubicarse en los orígenes, preguntar cómo se introdujo la noción de número, de polinomio, de propiedades geométricas; cuál fue su desarrollo inicial y posterior y eso nos hará comprender con mayor facilidad el desenvolvimiento de la matemática moderna. Todo mirado bajo el prisma filosófico del realismo platónico.

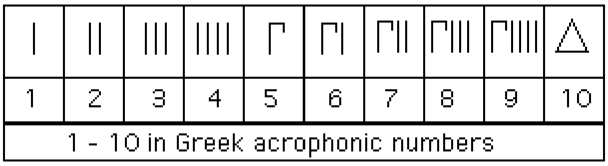
Retomando los NN, uno observa que casi todas las civilizaciones del mundo, cuando eran pequeños asentamientos, pequeñas ciudades, empezaron a desarrollar sistemas numéricos en lugares muy distintos y en épocas en ocasiones coincidentes, pero en la mayoría de las veces diferentes. El solo hecho de que esos sistemas numéricos se hicieran en partes tan dispersas, donde la comunicación era imposible -porque hablamos, también, de separaciones en el tiempo de 3.000, 2.000 o 1.000 años-, nos sorprende porque en todos ellos hay una esencia común en la construcción. Se daban diferencias accidentales en los tres modelos utilizados: aditivo, posicional e híbrido, en los signos empleados y en las bases elegidas (número de signos diferentes necesarios para construir el sistema).

El sistema <u>aditivo</u> juntaba los signos apropiados para designar el número elegido. Por ejemplo, 1 designado por / y 10 por Δ, nos permitía escribir 33 así: ///ΔΔΔ. Fue empleado por los egipcios, los romanos, los griegos, etc. El posicional, más refinado, lo utilizaron los babilonios, los mayas y los indios. Nuestro sistema actual es posicional y se caracteriza porque los signos tienen valores según el lugar que ocupan, por ejemplo, en 453 el 5 vale 50, en cambio vale 5, cuando se lo toma solo. La mayoría de los sistemas son en base 10, los babilonios trabajaron en base 60 y los mayas en base 20.

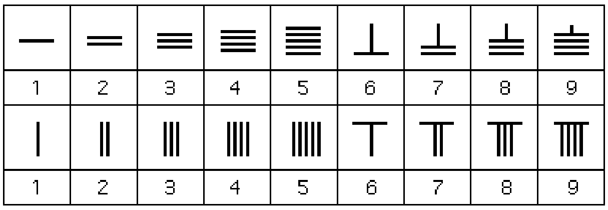
Presentamos a continuación unas tablas que nos ilustran sobre los 10 primeros números en diversas culturas:



SISTEMAS NUMÉRICOS DE LAS ANTIGUAS CIVILIZACIONES [2]



NÚMEROS ACROFÓNICOS GRIEGOS [3]



LA NUMERACIÓN CHINA CON VARILLAS [4]

Conviene citar al profesor José Ferreirós [5], sobre estas características comunes de los sistemas numéricos:

> Es un rasgo universal de las culturas conocidas el disponer de numerales y prácticas de contar. Aunque algunos sistemas son incipientes, no hay ningún caso en que se haya desarrollado un sistema no estándar que fuera incompatible con los demás. La numeración maya y la china son equivalentes a la griega antigua. Las diferencias importantes que se registran son al nivel de la base de numeración y al de los distintos principios de la notación simbólica. Pero incluso la diversidad de bases de numeración se ha explicado por relación a prácticas naturales de contar empleando nuestras extremidades, manos y pies.

La pregunta es ¿por qué en esas condiciones se producen ideas generales análogas?, la respuesta es a mi juicio: primero, hay un acto empírico en el manejo de la numeración y en su uso, que surge en la administración de las ciudades, los impuestos, los edictos del gobierno y, el comercio en general, que se basa en el ejercicio de contar y es práctico. Se hacen cuentas rudimentarias con los símbolos adecuados o inventados y se calculan pequeños valores en compras, ventas, etc. La compresión popular del manejo de los números aislados, es un ejercicio empírico. Pero, segundo, la idea global del sistema es intelectual es un acto que se capta racionalmente. En mi artículo ya citado lo llamé *percepciones racionales*, pero sin la menor intención de compararlas con las percepciones sensoriales, porque aquellas no son un acto de los sentidos, sino un acción de la inteligencia, que vislumbra que ciertas relaciones matemáticas nuevas se pueden dar en un fenómeno que se está estudiando.

Nótese que en esta etapa de desarrollo incipiente en la cual se presentan aislados los símbolos numéricos, no como una sucesión infinita, no puede hablarse de la estructura del Sistema numérico decimal (SND) ni de su esencia. Ni mucho menos de la Aritmética general, podemos decir que lo que es básico en este periodo es inventar algunos símbolos y usarlos como expresiones de intercambio en el comercio y demás actividades que lo requirieran, o, también, con otros significados; pero con el desarrollo futuro de la estructura completa (SND y la Aritmética) y la aprehensión de las propiedades de los números como entidades abstractas, se llega a establecer posteriormente que se trata de un descubrimiento no de una invención, como veremos más adelante. Además, como el descubrimiento habla de objetos y propiedades que son *universales y necesarias* la visión fragmentada de la invención toca tangencialmente partes que son de la estructura general de los números. Por ejemplo, ir de uno en uno aunque sea a trechos (según la nomenclatura de la época) exhibe ya rasgos del principio de inducción. Se debe comprender que todo esto es un proceso histórico que tiene su gradualidad y que hay que mirar su desarrollo en el espacio (muchas regiones) y en diversidad de tiempos. Ya hicimos notar que pese al hecho de que las construcciones antiguas son rudimentarias, en esencia tienen la misma naturaleza y se inspiran en los mismos principios en los distintos pueblos.

Estos números de los antiguos construidos con fines instrumentales son, segura y transitoriamente, una invención, como ya lo anotamos, puesto que surgen del comercio –empleamos esta palabra en el sentido general de cualquier tipo de intercambio social que sea cuantitativo- y no están inscritos como sistema de numeración completo (SND) que debe darles sustento, ni expresan las propiedades que los caracterizan modernamente como la asociatividad, la conmutatividad, ni el manejo, por ejemplo, de los números primos. Ni están explicados por pertenecer a una sucesión de referencia. Además, los diversos modelos no están unificados, cada pueblo utiliza su notación y no hay uniformidad en los símbolos. Tampoco se tiene en esa época remota una comprensión abstracta del sistema numérico ni de la Aritmética.

El sistema numérico se configura a grandes rasgos <u>como un descubrimiento</u>, en primer término, con los trabajos de Brahmagupta (nacido en la India, en el 598 d. C.) y sus antecesores indios, que encuentran las reglas de operación de los números, pero hay que ir hasta los trabajos de Fermat (siglo XVII) y otros que llegan a comprender plenamente la estructura (siglo XIX). Pero no puede haber confusiones. Los matemáticos mencionados no están construyendo el SND y la Aritmética, la están desarrollando y descubriendo, como en el caso del teorema de la suma de los números impares que hay que demostrarlo e igualmente todos los teoremas deben ser probados, pero sus enunciados son independientes de la mente humana en el sentido de que aunque los capta no puede generarlos y son cuasi-platónicos. A la mente no le corresponde determinar cuál es la suma de los primeros números impares esa es una propiedad que brota de la propia estructura de los números. Pero el cerebro aprehende esa propiedad mediante la demostración Los números tienen la curiosa característica de ser primero una invención (etapa empírica) y luego un descubrimiento.

Hay que diferenciar en la matemática clásica entre invención y descubrimiento –nos ocuparemos posteriormente de este tema- y se puede afirmar que el descubrimiento se distingue por corresponder a un teorema o al hallazgo de una estructura completamente definida (como SND). Por ejemplo, en la geometría la propiedad del punto común del corte de las tres medianas está plenamente determinada por una demostración, en cambio, si no se tuviera esa prueba y alguien vislumbrara esa propiedad diríamos que se trata de una invención.

Pero a medida que se avanza en la comprensión de los números, se entiende su base teórica y la explicación de por qué todos trabajaban en la misma dirección y bajo el mismo soporte. Todos los pueblos de hecho actuaron de acuerdo con el mismo **principio que descubrieron**, la circunstancia de que hayan concurrido esencialmente en la misma estructura de sistema numérico revela con certeza que no se trata de una invención o creación humana, sino, lo repetimos, de un verdadero descubrimiento. El principio encontrado, tal vez inconscientemente, es que se necesita un concepto, un objeto y un nombre que definan lo que nosotros denominamos actualmente «uno (1)». Además, la claridad de que ese número no tiene antecedente en la sucesión (se podría, en una aplicación más moderna, empezar por el cero, porque éste fue introducido tardíamente). Adicionalmente, descubrir el principio de inducción (del que forma parte la noción de «1»), la esencia más profunda del sistema numérico, que se puede formular así: «dado cualquier número natural, si se le añade el primero, el 1, se obtiene de manera única el siguiente, que se suele llamar el *sucesor*». Esto obliga a construir el sistema paso a paso, en la notación moderna: 1, 2, 3, 4, 5, 6…. Esta regla única condujo a construcciones equivalentes en los pueblos antiguos. No importa la base que eligieran, no importa los símbolos que adoptaran, no importa si asignaran signos de manera continua o alternada; esa era la regla que tenían que aplicar todos.

Es muy interesante reconocer ese origen de los NN porque es doblemente cruzado; de un lado, es empírico porque se realiza como experiencias de los pueblos, pero de otro, es teórico: es un proceso de reflexión intelectual que conduce a un **descubrimiento** de un modelo racional. Se podría, tal vez, utilizar la clasificación general que hace Kripke y considerar que los NN son un sistema *a posteriori pero necesario y universal.* Hacemos la siguiente referencia de Wilkipedia:

> Tradicionalmente, el conocimiento *a priori* se asocia con el conocimiento de lo universal y necesario, mientras que el conocimiento *a posteriori* se asocia con lo particular y contingente. Como la experiencia sensorial en la que generalmente se basan las justificaciones de las proposiciones *a posteriori* no siempre es confiable, estas proposiciones pueden rechazarse sin caer en contradicciones. Sin embargo, y especialmente a partir del trabajo de Saul Kripke, actualmente se debate la posibilidad del conocimiento contingente *a priori* y el conocimiento necesario *a posteriori*. (Wikipedia, *A priori y A posteriori*).

A propósito se da un fenómeno muy notorio y es que los teoremas de la aritmética de los NN vienen implícitos en la estructura del sistema. No vienen formulados explícitamente, pero sí al alcance de un ojo matemático entrenado. O sea que el sistema numérico después de esa fase experimental establece relaciones de causalidad o mejor interacciones con nosotros. Y no depende para nada de la axiomática de Peano, como lo analizaremos posteriormente.

Voy a citar ejemplos en defensa de la tesis que he expuesto:

> **Imaginémonos los números** escritos 1, 2, 3,… indefinidamente hasta que lleguen a cualquier número apropiado, y observemos ciertas regularidades en la estructura:
>
> $1 = 1^2$
>
> $1 + 3 = 2^2$
>
> $1 + 3 + 5 = 3^2$
>
> $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Y así sucesivamente. Pero atención, la estructura está revelando una proposición intrínseca que nadie *inventó* y que debe ser demostrada como teorema. Su enunciado, basado en los ejemplos, se puede describir así: «La suma de los primeros **n** números naturales impares es $\mathbf{n^2}$.» El enunciado también fue descubierto. Nótese que esta propiedad –después de su prueba por el matemático- se reconoce como universal, necesaria, inmodificable en el espacio y el tiempo e independiente de la mente humana. Pero estas características son distinguidas con posterioridad a la acción de efectuar la demostración y las llamaremos *cuasi platonismo.*

Más bonito todavía es el llamado «Teorema de Nicomaco». Tomemos nuevamente los impares y los organizamos así: (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19)….y nos da la siguiente propiedad que salió de la estructura del sistema numérico y que nadie *inventó* por ser *cuasi platónica*:

$1^3 = 1$
$2^3 = 3 + 5$
$3^3 = 7 + 9 + 11$
$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

Y así sucesivamente. Pero el sistema numérico proporciona la idea intuitiva que debe ser demostrada utilizando el principio de inducción generalizado.

Fermat es reconocido como una mente con una intuición genial para captar proposiciones de la aritmética, he aquí uno de sus teoremas.
Fermat observó que los siguientes números tenían una propiedad especial: 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61 y así sucesivamente. Que eran números primos de la forma 4n + 1 y que se podían descomponer de manera única en la suma de dos cuadrados:

$5 = 2^2 + 1^2$
$13 = 2^2 + 3^2$
$17 = 4^2 + 1^2$
$29 = 2^2 + 5^2$
$37 = 1^2 + 6^2$
$41 = 4^2 + 5^2$
$61 = 5^2 + 6^2$

De la misma forma que en los anteriores casos, se reconoce en la estructura de los naturales que «todo número natural se puede descomponer *de manera única en el producto de factores primos.*» Este es el llamado «Teorema fundamental de la Aritmética» y damos algunos modelos, como ejemplos, que con otros similares, seguramente, sirvieron de inspiración para formular la propiedad: $5 = 1 \times 5$; $32 = 1 \times 2^5$; $70 = 1 \times 2 \times 5 \times 7$; $169\,785 = 1 \times 3^2 \times 5 \times 7^3 \times 11$. (Nótese que hemos utilizado el 1 como factor primo, algunos textos convencionalmente no consideran dicho número como tal).
De manera similar se podrían mostrar la conmutatividad y la asociatividad de la suma y del producto de los números naturales y revelar su carácter universal y necesario.

Hemos dado ejemplos de cómo se podrían configurar propiedades, que mediante una demostración, utilizando básicamente el principio de inducción generalizado (el efecto dominó), se convierten en teoremas de la aritmética de los NN. Y aquí damos la regla de oro del descubrimiento matemático: <u>decimos que se descubre una propiedad cuando se produce una demostración universal de la misma.</u>

Entonces, es parcialmente cierto el platonismo en el sistema de los NN, las propiedades se descubren y no se inventan. Por descubrirse las propiedades se dan dos cosas: las entidades aritméticas de los NN establecen relaciones con nosotros (las demostraciones) y nos permiten actuar como *descubridores*. Sus objetos están por fuera de nuestra mente, no son invención nuestra, pero los podemos aprehender como en las demás ciencias. No preexisten al género humano, pues necesitan una experiencia asociada *al contar* para que se abran a nosotros. Son inmodificables en el espacio y el tiempo, pero están siempre estimulando nuevos desarrollos como en el caso del Teorema de Fermat o de las matemáticas contemporáneas. Aunque sus propiedades son *necesarias y universales,* no son *a priori* (en el sentido Kantiano). Este doble ejercicio empírico intelectual garantiza una epistemología apropiada para conocer la aritmética de los NN, lo que disuelve el dilema de Benacerraf. Ya que las demostraciones establecen un vínculo inquebrantable con los teoremas, que son las entidades abstractas básicas. Entonces los objetos y entidades matemáticas y sus propiedades son consustanciales a la propia estructura del «contar» Sus proposiciones son verdaderas. Existen y, en particular, los números son objetos dotados de una realidad propia. Y como hemos visto son *a posteriori* no *a priori*. Ese tipo de realidad está conformada por sus objetos y propiedades. Por ejemplo, objeto: "elemento neutro del producto"; característica: "deja invariante la operación de la multiplicación"; modelo: "1x5 = 5x1 =5"

En este punto se debe precisar el significado de: "los números existen con independencia de la mente humana". Hay que decir que ésta tiene un intenso papel en la aritmética. En efecto, la mente no inventa los teoremas de la aritmética, pero los descubre mediante la demostración. La categoría "contar" va asociada al principio de inducción que le es intrínseco y ajeno, por consiguiente, a la mente humana (no es invención suya), aunque ésta lo capta fácilmente. Esto quedó probado con los modelos construidos en todas las culturas, que en definitiva no encontraron un proyecto alternativo de numeración, porque además no existe (salvo equivalencias) y que mostraron así que el sistema numérico tiene el carácter de *descubrimiento*. Como parte de aquellas reglas, se *requiere* un sistema posicional en una base elegida, equivalente o igual, por caso, al sistema indo-arábigo de base 10. Por todas estas razones, los números son independientes de nosotros, puesto que se generan, lo reiteramos, a partir de una estructura «contar» que es ajena a la mente humana.

De paso, citamos un párrafo del propio autor en su artículo *¿La necesariedad y universalidad de la Aritmética?* [1]:

> Un criterio esencial es que cualquier número escrito en cualquier base puede ser *representado de manera única* en otra base y recíprocamente, es decir, los sistemas numéricos son equivalentes. O más generalmente: *El sistema numérico que engendra la aritmética y a toda la matemática es único.* Este es un argumento contundente en favor de que la aritmética se descubre y no se inventa y más de 2500 años dedicados a este esfuerzo revelan la enorme complejidad de esta empresa.

Y como expresamos anteriormente: la mente humana tiene un rol determinante en la aritmética. Dado el sistema numérico, el hombre tiene que introducir los términos o definiciones apropiadas (número primo, impar, etc.), descubrir los enunciados ("La suma de los n primeros números impares es n^2») y demostrarlos. Y aquí viene la explicación, de ¿cómo se descubre y se demuestra algo nuevo? Desde luego, que el investigador tiene el conocimiento profundo de su disciplina, tiene talento creativo, capacidad de razonamiento, pero necesita, en ocasiones, una chispa que le permita enfrentarse a lo desconocido y esa se llama intuición.

Creo que la aritmética elemental es la más pura de las ciencias, con razón, Gauss, la llamaba «La reina de las Matemáticas». Cito la opinión de un lógico destacado [6] contenida en el artículo *Un paseo alrededor de la teoría de conjuntos* escrito por el profesor José Luis Gómez Pardo:

> Un ejemplo lo proporciona la siguiente declaración de S. Feferman en [39]: En el lado negativo, soy un anti-platónico confirmado. En el lado positivo, soy un realista en lo que a

> los números naturales se refiere, es decir, creo que los enunciados sobre la estructura de los números naturales tienen un valor de verdad determinado, independiente de las demostraciones y construcciones humanas.

Los pueblos antiguos le dieron presencia física a los números en los signos que utilizaron (generalmente palitos o rayas), y esos símbolos alcanzaron plena realidad en las prácticas sociales. En las monedas quedó un concepto claro de ese pensamiento: una moneda de 5 unidades era equivalente a 5 unidades de la moneda. Algunos filósofos han querido limitar el papel de los números a ciertas «posiciones» en una sucesión, cosa que es parcialmente cierta. El 5 vale porque se ha construido por inducción y ocupa el quinto puesto y antecede a sus sucesores. Pero lo han hecho a consta de negar la individualidad de los números: un número es un grupo de «unos (1)» conceptuales **que tiene la propiedad teórica y empírica que deben representar en el mundo material.** O sea, que el cinco representa también 5 personas. Es decir, el cinco es un símbolo de algo teórico y empírico. Cuando me muestran el número 5, yo le atribuyo el valor de 5 unidades conceptuales, sin necesidad de pensar en 5 objetos materiales, que también puede ejemplificar. Es inevitable la tautología, pero aporta algo nuevo (5 es 1 + 1 + 1 + 1 + 1 o 4 + 1 en la construcción paso a paso. <u>Convencionalmente lo designamos, también, «11111»</u>). Por eso Hermann Weyl se asombraba de que cualquier número –salvo razones prácticas- tuviera nombre verbal y escrito, lo que mostraba una individualidad en una sucesión infinita. Pero se dan ejemplos de esa individualidad de manera más refinada. Recordemos el teorema fundamental de la Aritmética «todo número natural se puede descomponer *de manera única en el producto de factores primos.*» Pues este teorema le otorga a todo número natural una especie de cédula de ciudadanía por ser individual y única, por ejemplo, $1 \times 3^2 \times 5 \times 7^3 \times 11$ es la cédula de ciudadanía del 169 785 y ningún otro número la tiene.

Para mí los números naturales tienen una existencia real específica y sus propiedades demostradas son verdaderas, no sólo en el sentido lógico sino en una visión semántica, máxime que, como lo he dicho, los números teóricos se confunde con los números de las aplicaciones. Se podría siguiendo a Putnam y Quine adoptar un principio de «indispensabilidad de la aritmética elemental» como garante del desarrollo y supervivencia de nuestra sociedad. Si se afirma que los números no existen o que sus propiedades son ficciones, ¿cómo explicar que inventos y ficciones son el soporte del mundo real? Así como hemos dicho que la esencia de nuestros números naturales es la repetición reiterada del concepto de unidad o «1» , que *es un término indefinido*, cualquier uso empírico muestra la misma naturaleza que el teórico: «5 manzanas» equivalen a «5 veces 1».

La Aritmética de Peano y las aritméticas conjuntistas

Y en toda la presentación anterior no me he referido a la axiomática de Peano, ni a la visión conjuntista de los números naturales, sino a la aritmética elemental y sus propiedades, que como hemos visto debemos descubrir. La idea de esta decisión es que mientras que **el sistema numérico es la estructura esencial de los números naturales**, las otras son formalizaciones de la aritmética, posiblemente invenciones humanas que buscan representar del mejor modo la naturaleza de los números o que tienen pretensiones unificadoras de la matemática. Prueba de mi afirmación es que hay varias alternativas en la teoría de conjuntos para definir los números naturales, y los axiomas de Peano **son obvios en la estructura elemental del sistema numérico,** con la aclaración de que el quinto axioma es considerado como un método de demostración intuitivamente válido en la aritmética elemental (el principio de inducción). Para aclarar la tesis de que los sistemas conjuntistas y de Peano pueden ser invenciones humanas que buscan formalizar la estructura de la aritmética elemental, hacemos la siguiente cita que aclara muy bien cómo se complementan la invención y el descubrimiento en la matemática.

Cito, pues, al profesor Fernando Zalamea Traba [7], quien a su vez hace una cita del gran matemático Grothendieck:

> Así, en la perspectiva de Grothendieck, las estructuras matemáticas se encuentran dentro del espectro fenomenológico del mundo, y por tanto se descubren, pero se trata de descubrimientos que sólo se pueden obtener al inventar –en una dialéctica casi sincrónica– adecuadas *representaciones* de las estructuras. […]De nuevo, es instructivo oír directamente a Grothendieck:
> «La estructura de una cosa no es de ningún modo una cosa que podamos *inventar*. Sólo podemos develarla pacientemente, modestamente –conocerla, *descubrirla*. Si hay alguna invención en ese trabajo, y si realizamos algún tipo de labor de herrero o de infatigable constructor, no es en modo alguno para *dar forma* o para *elevar* estructuras. ¡Éstas no nos han esperado para ser, y para ser exactamente lo que son! Es más bien para *expresar*, lo más fielmente que podamos, esas cosas que estamos descubriendo y sondeando, esa estructura reticente a entregarse, que intentamos cercar a tientas y con un lenguaje tal vez aún balbuceante. Así, nos vemos llevados constantemente a *inventar el lenguaje* más apto para expresar finamente la estructura íntima de la cosa matemática, y a *construir*, gracias a ese lenguaje, paso a paso y por entero, las *teorías* que deben dar cuenta de lo que ha sido aprehendido y visto. Hay allí un movimiento de vaivén continuo, ininterrumpido, entre la *aprehensión* de las cosas y la *expresión* de lo que es aprehendido, gracias a un lenguaje que se afina y se recrea al hilo del trabajo, bajo la presión constante de las necesidades inmediatas.»

Veamos ahora la construcción de los primeros números naturales conjuntistas en la teoría de Zermelo- Fraenkel; como ya hemos dicho son tal vez formalizaciones de la aritmética elemental:

Número natural conjuntista	Equivalente Zermelo – Fraenkel Número natural conjuntista (NNC)	Otra presentación NNC
0	Φ (conjunto vacio)	0
1	{ Φ }	{ 0 }
2	{ Φ, { Φ }}	{ 0, 1}
3	{Φ, { Φ}, { Φ, { Φ }}	{ 0, 1, 2}
4	{Φ, { Φ }, { Φ, { Φ }, {Φ, { Φ}, { Φ, { Φ }}	{0, 1, 2, 3}

TEORÍA DE ZERMELO - FRAENKEL

Número natural	Numero conjuntista (NNC)	Otra presentación
0	Φ(conjunto vacío)	0
1	{ Φ }	{ 0 } igual a 1
2	{{ Φ }}	{ 1}
3	{{{Φ }}}	{ 2 }
4	{{{{ Φ }}}}	{ 3 }
5	{{{{{ Φ }}}}}	{ 4 }

OTRO MODELO UTILIZADO (ZERMELO)

La idea del cuadro de Zermelo- Fraenkel se atribuye a Von Neuman.

La construcción de los naturales en la teoría de conjuntos está muy distante de la intuición y del modelo de la aritmética elemental de los NN.
Por ejemplo, el número 3 se puede definir:

3= {ϕ, {ϕ}, {ϕ, {ϕ}} = {0, 1, 2} (Ver cuadro de Zermelo-Fraenkel)

Nos propone ZF como explicación que el número 3 *es un conjunto* formado con tres *conjuntos* –pero distintos y no iguales como deberían ser– y que tienen cierta propiedad inductiva al ser los tres primeros NNC los objetos elegidos, propiedad que se desdibuja, sin embargo, al tratarlos como conjuntos. Él problema filosófico es que los números no son *conjuntos,* además, sustancialmente son unidades repetidas del número natural 1, el caso 111, por ejemplo, colapsaría como conjunto {1, 1 ,1} = {1}. Prevalece en los antiguos, por el contrario, la construcción de los naturales empleando el principio de inducción (contar) y no la comparación biyectiva de conjuntos como en Frege y Russell o el tratamiento conjuntista moderno.

Pero en la otra presentación de la teoría de conjuntos se define así el número 3:

3= {{{ϕ}}}= {2}, donde ϕ =0 (ϕ es el conjunto vacío). Mucho más alejada de la intuición y del concepto de número. Los tres pares de corchetes nos sugieren remotamente el número tres y el conjunto con el número dos nos muestra el antecedente del 3 (Interpretación muy ficticia de la inducción)).

Veamos otras diferencias entre los números naturales y los números conjuntistas. Los números naturales tienen la propiedad simple de obtener el sucesor de un número agregando el primer término de la serie (1). En cambio el sucesor del número conjuntista x se obtiene de la siguiente manera S(x) = x U {x}. Veamos de nuevo la tabla de ZF.

Número natural conjuntista	Número natural conjuntista (conjuntos)	Conjunto marginal para encontrar el sucesor	Relación de orden en los naturales conjuntistas (ε, pertenencia)
0	0		0 ε 1 (0 < 1)
1	{ 0 }	{0}	1 ε 2 (1 < 2)
2	{ 0, 1}	{1}	2 ε 3 (2 < 3)
3	{ 0, 1, 2}	{2}	3 ε 4 (3< 4)
4	{0, 1, 2, 3}	{3]	4 ε 5 (4 < 5)
5	{0, 1, 2, 3, 4}	{4}	

TEORÍA DE ZERMELO - FRAENKEL

Ya vimos que en ZF los naturales son conjuntos, el 4, por ejemplo, es un conjunto con **cuatro elementos: 4 = {0, 1, 2, 3}** y para pasar al siguiente debo aplicar la fórmula: S(4) = 4 U {4} = 5, entonces, tuve que añadir un conjunto con el elemento {4}. Pero, a diferencia de la aritmética elemental (agregar siempre el término 1), aquí cada elemento adicional es distinto (aunque con un único elemento). Son formalizaciones que no logran expresar bien el modelo.

Se establece una relación de orden en los naturales conjuntistas *m < n* sii *m ε n*. Por ejemplo. 1 < 2 en virtud de que 1 *ε* 2.

También, se construye una relación de orden con la inclusión. Se cumple que 0 C 1 C 2 C 3… Formalismos muy distantes de las propiedades de los números naturales de la aritmética elemental que es la base real de dicha ciencia.

Existe cierta circularidad al denominar con los números naturales los números-conjuntistas, porque los números naturales son conceptos ya aceptados que trasmitirían así forzadamente sus propiedades a entes arbitrariamente construidos. Realmente, no puede ser tres –número natural- el objeto que está nombrando al conjunto {{{ϕ}}}, sino más bien éste conjunto el que se adhiere al “concepto tres natural” para derivar un soporte claro.

Pero el problema más grave lo plantea Benacerraf que hace notar la incongruencia de los dos modelos; en el primero (ZF) 2 ε 4, en el segundo, 2 no pertenece a 4. Esta inconsistencia impide decidir cuál de las dos construcciones de los números naturales conjuntistas es la correcta. Siguiendo a la profesora Mariana Córdoba [8] en su artículo titulado *¿Relatividad ontológica o radicalidad ontológica?...*nos dice que:

> Benacerraf concluye que los números no son conjuntos […] que lo que realmente importa no es ninguna condición que se imponga a los objetos, sino la condición que se imponga a la relación bajo la cual forman una progresión. Que una secuencia cualquiera valdría de

> evidencia de que lo que importa no es la individualidad de cada elemento, sino la *estructura* que exhiben esos elementos juntos.

Pero Benacerraf va aún más lejos al afirmar que los números no son objetos. La profesora Córdoba, nos presenta esta posición:

> Según Benacerraf es imposible individualizar los números *independientemente del rol que cumplen en una estructura*. Afirma (Benacerraf): «Los números no son objetos porque estableciendo las propiedades (esto es, las condiciones necesarias y suficientes) de los números, se caracteriza meramente una estructura abstracta –y la distinción descansa sobre el hecho de que los *elementos* de la estructura no tienen otras propiedades que aquellas que los relacionan con otros *elementos* de la misma estructura» (Benacerraf, 1965, p. 291).

En resumen, los números son lugares o posiciones dentro de una estructura (sistema numérico) y sus propiedades y relaciones se derivan exclusivamente del rol que allí cumplen. El trasfondo del asunto es atacar el «realismo platónico», debilitando presuntamente la esencia de los números; en efecto, la propiedad básica de un número en el *sistema* sería la de servir de antecedente o sucesor de los demás y a eso quieren reducirlos. Los números serían marcas o señales o nombres ¿cómo manejar cuantitativamente esos símbolos con significados tan insulsos? La pretensión es vana, no se puede trivializar la base teórica de la aritmética aplicada, que es el soporte de toda la sociedad.

Desde luego que no compartimos la argumentación del profesor Benacerraf. Para nosotros los números son objetos matemáticos bien definidos y con las propiedades usuales. Para replicar la tesis que hemos mencionado vamos a mostrar que los números, fuera del papel que juegan en el sistema numérico, por ser miembros de esa progresión, tienen vida propia y características independientes y bien delimitadas

CASO 1
Sabemos, desde los griegos, que los polígonos regulares de 3 y 5 lados -números primos-, se pueden inscribir con regla y compás en una circunferencia, ¿cuál es el polígono que sigue? La respuesta tuvo que esperar hasta el siglo XIX, que la genialidad de Gauss la encontrara:
$2^{2^2} + 1 = 17$

Demostró que el polígono regular de 17 lados se puede inscribir en una circunferencia. Aquí los números naturales tienen pleno sentido individual (son objetos) por fuera de la estructura del sistema numérico.

CASO 2
El teorema de Euler establece una relación entre el número de caras (C), aristas (A) y Vértices (V) en un poliedro regular

$C + V = A + 2$

Por ejemplo, un cubo tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas:

$6 + 8 = 12 + 2.$

Problema que no tiene nada que ver con los lugares que ocupan los números en el sistema numérico.

CASO 3
Descubrimiento de los números irracionales por los pitagóricos. Encontrar la hipotenusa de un rectángulo cuyos catetos valen la unidad.

$\sqrt{2}$= 1, 414213562…

¿Qué son estos números?

CASO 4
Diversas apariciones de los naturales por fuera del sistema numérico.

$5x^7 - 3x^5 + 12x^2 + 9$, sen30, cos45, ln20, 180 (ángulos del triángulo)

Los números, pues, no se pueden reducir a *simples posiciones* en una estructura, actúan libremente y con pleno significado por fuera de ellas, esto les da una esencia propia y hace discutible la pretensión de reducirlos a fichas en un sistema que sería más genealógico que matemático.

El número en Frege y Russell

El problema, a mi modo de ver, radica en la forma como Frege y los logicistas construyeron la teoría de números. Veamos la siguiente cita de Alfred North Whitehead [9] sobre su concepto de cardinal:

> Durante un largo período se debieron de comparar grupos de peces con grupos de peces con respecto a su multiplicidad, y grupos de días con grupos de días. Y el primer hombre que notó una cierta analogía entre un grupo de siete peces y un grupo de siete días realizó un notable adelanto en la historia del pensamiento. Fue el primer hombre que tuvo un concepto perteneciente a la matemática pura.

Es obvio que su posición sobre el concepto de número es la de la escuela logicista, que demanda la correspondencia uno a uno entre las *clases*[1], como lo define Bertrand Russell: «El número que corresponde a una clase, es la clase de todas las clases que son equinumerables entre sí.» (Ver nota 10 en la bibliografía).

Un ejemplo sería el NNC que corresponde a este «conjunto» Ω = {(a, b, c), (x, y, z), (#, & *)…….}, que por proceder de una relación de equivalencia (la equipotencia) permite seleccionar un conjunto (o un símbolo) representante, para los diferentes *número* de objetos. El problema es que se afirme, en este caso particular, que este conjunto es el «3», porque la comparación entre los conjuntos de Ω no permite por si sola decir cuál número es, <u>salvo que se acuda a contar los elementos</u>. La operación de correspondencia uno a uno es la siguiente: los dos primeros conjuntos pertenecen al conjunto Ω por cumplir $a \leftrightarrow x$, $b \leftrightarrow y$, $c \leftrightarrow z$ y *nada más*. La relación de equipotencia me dice que los dos conjuntos tienen el **mismo número de objetos, pero no**

---

[1] Cuando hay una relación de equivalencia, como es el caso de la equipotencia de conjuntos que estamos tratando, por una larga tradición se habla de «clases» de equivalencia, o de elemento representante de la clase, en realidad en la TZFC se deben llamar conjuntos, pues esta teoría no maneja clases. Seguiremos usando la palabra conjunto en todos los casos salvo que se trate de citas.

cuántos objetos hay. Si le doy el valor de «3» al conjunto Ω incurro en un círculo vicioso, pues, estábamos definiendo los números por el camino logicista y tengo que acudir a la inducción (contar), que contradice aquella construcción, porque dicho principio es extra lógico y supone que ya existen los números conjuntistas que se están definiendo, es decir, la inducción se sobrepone a la equipotencia entre conjuntos Los antiguos no usaron la correspondencia biunívoca para elaborar sus tablas numéricas sino la inducción aritmética, es decir, I, II, III… (Añadiendo unidades paso a paso). Claro que la equipotencia aparece continuamente en las operaciones de comercio y se usa simultáneamente con la versión inductiva, pero con esta regla general: primero se cuenta y luego se compara.

Donde los logicistas fallaron, pues, fue en que la comparación 1-1 se hace entre conjuntos, y los números no son conjuntos, son agrupamientos de signos iguales (de unos, «1»). Probablemente si se me presenta un grupo de 10 manzanas yo lo asimilo a un montón o incluso a un conjunto, pero no en el sentido técnico y formal de la palabra conjunto.

Pero, además, el «conjunto» que pretende definir al 3 es multitudinario (no existe en ZFC) y eso que es sólo un caso, porque estamos definiendo la construcción de todos los Naturales, no solamente del 3. Tal «conjunto» Ω, pues, no se puede precisar y si no se procede con cuidado puede dar lugar a paradojas. La equipotencia plantea problemas insuperables

Pero la cosa tiene más complicaciones, veamos las tesis del profesor Fernando Hernández Hernández en su libro *Teoría de Conjuntos* [10] donde afirma que «2 es aquello común a todos los conjuntos equipotentes a {Φ, {Φ}}.» Como se trata de una relación de equivalencia se deben determinar **los conjuntos (**llamados por tradición clases**) de equivalencia** o **el conjunto de los representantes de la equipotencia**, que serían los números naturales conjuntistas. Citamos al profesor Hernández:

> Desgraciadamente ambas maneras están lejos de nuestro alcance. Por ejemplo, se puede mostrar que si A diferente de ϕ, *el conjunto de todos los conjuntos equipotentes a A, no existe,* es decir, las «*clases*» *de equivalencia* de la relación de equipotencia no son conjuntos. Este es el mismo hecho que nos impide aplicar la segunda forma. Al parecer, si tuviéramos en estos momentos establecido al Axioma de Elección podríamos aplicar éste a las *clases de equivalencia* de la relación de equipotencia y obtener de este modo un conjunto de representantes para tal relación, el gran problema es que el Axioma de Elección (como todos los Axiomas de nuestro sistema ZFC) es aplicable únicamente a objetos de la Teoría de Conjuntos; o sea, a conjuntos.

Después del reconocimiento de que es imposible la caracterización conjuntista de los números naturales, que pretendía que 2 representara a esa multitud de conjuntos que tienen la misma cardinalidad que {Φ, {Φ}}. El profesor Hernández invierte la propuesta, pretende, sin argumentos válidos, que sea el 2 de la aritmética elemental, que no es un conjunto, quien represente al agregado {Φ, {Φ}}.

> Sin embargo, quizá pudiéramos realizar esa caracterización procediendo a la inversa, definiendo explícitamente cada número natural, como un representante conveniente para tal multitud de conjuntos; después de todo eso es lo que pretendíamos hacer al tomar a { Φ, {Φ}} como parámetro para definir a 2. La forma de realizar esta definición explícita se sustenta en la idea intuitiva de que los números naturales se van generando uno a partir del otro.

Se comprueba, entonces, que los números conjuntistas se pretenden construir a partir de los naturales usuales que «se van generado uno a partir del otro». No obstante, fracasó la misión de definir en términos lógicos y como conjuntos a los números naturales. Veamos la siguiente cita de Wikipedia [11]:

> La idea original para escoger un representante de cada cardinalidad de manera única era definir un cardinal como una clase de equivalencia de todos los conjuntos equipotentes a uno dado. Esta noción sencilla, que prevaleció en la literatura hasta los años 50, es inapropiada dado que esta clase de equivalencia no es un conjunto. Sin embargo, recurriendo al concepto de rango, puede demostrarse que la colección de todos los conjuntos equipotentes a uno dado *de rango mínimo* es un conjunto.

Los matemáticos buscan alternativas que les resuelvan sus problemas. Pero en filosofía el cambio del modelo implica modificaciones sustanciales en las tesis. Tal es el caso de la tesis logicista, que pretendía representar cada uno de los números naturales como el conjunto apropiado de todos los conjuntos que son equipotentes entre sí. Ahora, declarada su imposibilidad matemática se reduce a otra visión completamente distinta y que también es problemática. Porque nos hace depender de otro axioma no previsto en las tesis iniciales: el axioma de regularidad, que tiene una presentación discutible: «De este modo, es sencillo entender que el axioma de regularidad prohíbe la existencia de conjuntos *patológicos* —no regulares— como por ejemplo: Un conjunto que sea su único elemento, $x = \{x\}$.» [12]

Una teoría matemática, como la teoría de conjuntos, que introduce axiomas para prevenir que los restantes postulados originen resultados absurdos, tiene interrogantes filosóficos que responder.

La axiomatización de Peano probablemente es invención humana. Del mismo modo se podría plantear que la axiomatización de los números naturales en la teoría de conjuntos es, también, una invención. La aritmética elemental es la estructura madre, pues es independiente de nosotros. Ambas versiones conjuntistas son sospechosas de circularidad, porque introducen los números naturales para nombrar las estructuras de los nuevos números-conjuntos, que no le aportan el concepto que representan al número natural, sino al contrario, lo reciben. De otro modo no es la estructura conjuntista la que le da sentido al concepto de «tres», sino a la inversa. El hecho de que en la aritmética conjuntista existan dos métodos sustancialmente distintos para introducir el sistema numérico pone en duda el carácter universal y necesario de la misma.

Conviene terminar esta parte con la posición que expresa el profesor Francisco Miró Quesada en su artículo *La objeción de Rieger y el horizonte de la ontología matemática* [13]:

> En efecto, de dicho teorema (primer teorema de Gödel) se desprende que la disciplina comúnmente llamada aritmética intuitiva (que no es sino la aritmética tal cual la han entendido los matemáticos de todos los tiempos) rebasa la disciplina constituida por la aritmética formalizada. Si la rebasa quiere decir que el concepto de número no se agota en la definición implícita determinada por el conjunto formalizado de postulados (los postulados de Peano o cualesquiera otros equivalentes) o sea, el concepto de número no se agota en el uso de ningún simbolismo. No existe ningún sistema de símbolos por más perfecto que sea, que pueda expresar por completo las propiedades de los números naturales […] Pero si esos entes trascienden el simbolismo que los expresa, entonces pertenecen a un mundo objetivo independiente de la conciencia que los conoce.

Recordemos el sistema acrofónico griego [3] que se utilizó en una época, para constatar las ideas que hemos presentado:

Ι	ΙΙ	ΙΙΙ	ΙΙΙΙ	Γ	ΓΙ	ΓΙΙ	ΓΙΙΙ	ΓΙΙΙΙ	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 - 10 in Greek acrophonic numbers									

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Escuetamente hablando la geometría euclidiana consta de:

> Unos términos indefinidos que nos son dados, según la rama de la axiomática que vamos a construir. En este caso: punto, recta, plano, etc. nosotros no podríamos proponer arbitrariamente objetos o relaciones.
>
> Un grupo de definiciones: triángulo, mediana, altura, bisectriz, rombo, etc.
>
> Unos axiomas que se basan y le dan sentido a los términos dados, por ejemplo, «dos puntos determinan una recta».
>
> Dados los axiomas y las definiciones queda determinado un conjunto de teoremas que normalmente deben ir en cierto orden establecido, por ser los unos prerrequisitos de los otros. El núcleo de teoremas que le corresponde a los postulados está dado. Nosotros, estrictamente hablando, no conocemos ni el orden de los teoremas ni los enunciados ni las demostraciones y tenemos que *descubrirlos*. Pero en el caso de los griegos, que llevaban cientos de años de trabajo empírico, es casi seguro que ya conocían los axiomas y muchos teoremas, cuando Euclides empezó a escribir sus *Elementos.*

Sobre los términos indefinidos cabe hacer la siguiente observación que plantea el profesor Ferreirós [14]: «En toda teoría matemática se consideran *dados* ciertos objetos, relaciones y funciones, mientras que otros son *definidos*, es decir, *construidos* lógicamente a partir de aquéllos. En geometría, se toman como dados los puntos, rectas y planos, así como algunas relaciones (p.e., *estar sobre* o *estar entre*) y otras relaciones más complejas son definidas». Y añade el profesor Ferreirós: «Platonismo *interno* o propiamente *matemático*: es característico de las teorías de la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada (se podría hablar de *existencia ideal*).»

Completando esta presentación esquemática de la geometría euclidiana formularemos los llamados postulados:

> Por dos puntos pasa una única recta.
>
> Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
>
> Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
>
> Todos los ángulos rectos son iguales.
>
> Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sola una paralela.

La geometría euclidiana tiene como objeto principal la construcción de figuras utilizando la regla y el compás o las demostraciones de sus propiedades, citemos algunos de los temas que son motivo del trabajo geométrico: rectas, ángulos, triángulos, semejanzas, congruencias, áreas, polígonos, circunferencias, esferas, poliedros, sólidos, etc. Estudiando detalladamente la materia se comprueba que tanto las demostraciones como las construcciones se refieren a propiedades intrínsecas de los objetos o figuras geométricas; en consecuencia, nosotros las *descubrimos y no las inventamos* Para ilustrar al lector transcribo los enunciados de un gran número de teoremas. Empezamos por el más destacado, el de Pitágoras. Se debe resaltar la universalidad de la propiedad, pues se cumple para cualquier triángulo rectángulo y el ser humano no está en capacidad de establecer a voluntad la relación que hay entre la hipotenusa y los catetos, eso es inmanente al triángulo rectángulo.

Antes de enunciar los teoremas debo insistir que estructuralmente hablando cuando se fijan los axiomas y las definiciones quedan consecuentemente determinados los teoremas que deben ser descubiertos y demostrados, es decir, establecen relaciones iniciales con nosotros. El hombre participa en la definición de los axiomas pero restringido a los términos indefinidos que les son dados. Es importante destacar la tesis de Riemann de que los postulados de la geometría euclídea son empíricos, esto está en consonancia con la aritmética, por eso hablamos del carácter *a posteriori y necesario* de estas matemáticas primitivas. Pero adicionalmente, en el caso de la geometría euclidiana los enunciados mismos revelan que no pueden ser construcciones humanas, porque los teoremas derivan sus propiedades intrínsecamente de las figuras, lo que les confiere el mencionado carácter de universalidad y necesariedad. Pero la universalidad está restringida **a un marco general trazado por los axiomas**. La geometría euclidiana se cumple y está propuesta para el plano, no pueden extenderse, pues, sus propiedades a la superficie de la esfera, por ejemplo. En el caso del teorema de Pitágoras se ve claramente que la relación ente los catetos y la hipotenusa no permite una asignación voluntaria, depende de la estructura del triángulo rectángulo y eso la hace inmodificable en el espacio y el tiempo. Pero, eso sí, siempre en el plano.

> *En todo triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los dos catetos.*
>
> *Las tres alturas de un triángulo –perpendiculares desde un vértice al lado opuesto- se cortan en un mismo punto llamado ortocentro.*
>
> *Las tres medianas de un triángulo –rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto- se cortan en un mismo punto llamado baricentro, que dista 2/3 del vértice respectivo.*
>
> *Las tres bisectrices de un triángulo –rectas que dividen cada ángulo en partes iguales- se cortan en un mismo punto llamado incentro, que equidista de los lados del mismo y es centro de una circunferencia inscrita en él.*
>
> *En toda circunferencia la relación entre el perímetro y el diámetro es constante y se denomina π= 3,1415….* Es imposible imaginar que nosotros le asignamos esa propiedad a la circunferencia.
>
> *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene por medida la mitad de éste.*
>
> *En un mismo triángulo, si dos lados no son congruentes (iguales), entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y al lado mayor se opone ángulo mayor.*
>
> *La base media de un trapecio (segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos del mismo), es paralela a las bases y su medida es la semisuma de las medidas de éstas.*

Los puntos medios de los lados de un rectángulo son los vértices de un rombo y los puntos medios de los lados un rombo son los vértices de un rectángulo.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Recalcamos los casos 2, 3 y 4 como las típicas estructuras que debemos *descubrir* y no se pueden inventar. El caso de que las tres medianas se corten en el mismo punto y que ese punto esté precisamente a $\frac{2}{3}$ del vértice, depende de la estructura del triángulo y no de la voluntad humana.

Pero los griegos no eran carpinteros, sino pensadores de alto nivel, a lo que pudiera ser un simple recetario de fórmulas, le dieron el carácter de matemática pura. Derivaron de unos pocos axiomas y postulados un magnífico cuerpo de teoremas, empleando el razonamiento lógico. Los cuatro primeros axiomas se han aceptado siempre como evidentes. Y del quinto axioma se deshizo cualquier duda sobre su validez, con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, que no tocó ni un centímetro del trabajo de Euclides. Ahora quedó claro que ***en el plano*** no se puede trazar ***sino una paralela*** (como aseguraba Euclides). En la superficie de una esfera no existen paralelas (Geometría elíptica) y en una figura muy extraña, parecida a la silla de montar a caballo, se puede construir ***más de una paralela*** (Geometría hiperbólica)***.***

No debe creerse que la geometría euclídea cambió sus características esenciales, debido a la aparición de las geometrías no euclidianas. La geometría euclidea mantiene inalterables la *universalidad* de sus resultados, la *necesariedad* de los mismos y su *inmodificabilidad* en el espacio y el tiempo. El teorema de Pitágoras, **en el plano,** sigue siendo válido para cualquier persona; no es el caso que se pueda negar y es inmutable en el tiempo. Sin embargo, mantiene relaciones con nosotros a través de sus aplicaciones en diversos campos o en los nuevos desarrollos de la matemática en los que sirve de apoyo.

Debo admitir que la obra de Euclides presentaba ciertas imperfecciones que se corrigieron con el tiempo. Si admitimos que los postulados y axiomas de Euclides son ciertos (como creo que se reconoce hoy en día) y más a la luz de los resultados de los teoremas, que han comprobado su validez. ¿Quién puede dudar del teorema de Pitágoras o de la existencia y del valor de π? Podemos concluir, entonces, que la geometría euclidiana es <u>consistente.</u> De verdades materiales no pueden derivarse incoherencias. Sus teoremas son ciertos y la práctica lo refrenda con aproximaciones aceptables de medida para sus construcciones. Además de la universalidad de la geometría eucidiana –los resultados son inmodificables en el espacio y el tiempo-, se debe reconocer que es *necesaria* (no es el caso que algún teorema o propiedad pueda ser de otro manera). Aunque, como he mostrado, la aritmética de los NN y la geometría euclidiana *nos son dadas*, lo que les otorga un grado de existencia –quizá ontológica- y una identidad aseguradas.

La geometría euclidiana por ser *a posteriori necesaria* no puede preexistir al ser humano. El hombre debe intervenir en el descubrimiento de los términos indefinidos, en las definiciones de las figuras y otros objetos matemáticos y, sobre todo, en la formulación de los axiomas, en el descubrimiento de los enunciados y en la demostración de los teoremas. Todo ello en una proporción adecuada de experiencia y razonamiento. <u>Solamente después de este proceso se constata que el resultado del trabajo fue un *descubrimiento.*</u> En el cielo platónico −habida consideración de la tarea humana para llegar a esa etapa feliz de encontrar objetos que nos sorprenden por su universalidad− no debe haber mucho guardado, la mayoría está aquí en la tierra, en realidad todo. El teorema de Pitágoras requiere para su formulación y aplicación que haya una definición previa de «triángulo rectángulo». Dada ésta, para cualquier triangulo rectángulo la relación entre sus catetos y la hipotenusa es una propiedad intrínseca del triángulo, que *es necesario descubrir y demostrar* y nosotros no podemos cambiar.

Ahora precisemos cómo es la práctica y la historia que está detrás de esta axiomática tan refinada. La geometría tiene una larga trayectoria empírica. Desde edades muy remotas los pueblos se familiarizaron con la mayoría de las figuras de esta ciencia, con las áreas y volúmenes, tenían, además, conocimientos destacados de la medición y la construcción; sabían los egipcios, por ejemplo, restituir las tierras después de las inundaciones del Nilo. Pero, es más, todavía nos asombran las pirámides, los templos, las viviendas, aunque no hay más que recetas prácticas en la antigüedad tuvieron que comprender en un sentido especial muchos principios teóricos de la geometría.

Antes de Euclides, los griegos con Tales de Mileto empiezan a desarrollar un sentido teórico de la ciencia. Tales demuestra, o mejor, presenta ciertos enunciados cuyos resultados, aunque conocidos, vienen con unas pruebas incipientes. Por ejemplo, que *todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.* Platón estimuló mucho el método deductivo en la geometría y algunos de sus seguidores hicieron axiomatizaciones parciales anteriores a Euclides. De otro lado, en sus investigaciones Hipócrates de Chíos (No confundir con el médico) que nació hacia el año 470 a. de J.C., descubrió muchas propiedades del círculo y de los ángulos, así como otras verdades geométricas, extendiendo considerablemente la esfera de estos conocimientos. Escribió un libro, que puede considerarse como el primer texto de Geometría pura.

Entonces, la Geometría es también, siguiendo a Kirpke, *a posteriori necesaria.* Sin la existencia del hombre que propone los axiomas no habría geometría. Se debe aclarar que pese a su origen empírico ya *la construcción teórica o la demostración de cualquier teorema no está remitida a la experiencia ni se apoya en ella.* Incluso el uso de las gráficas es discutible. En el caso de Euclides debió haber mucho tanteo previo en la elección de los axiomas y en el reconocimiento de los términos indefinidos (que Euclides definió inútilmente, puesto que ninguna de esas definiciones se utiliza en los teoremas).

Los matemáticos modernos -comentario de paso- no siguen necesariamente en su práctica el orden académico que demanda en general la axiomática –ellos abordan el estudio de conjeturas, por ejemplo, que los obligan a pensar simultáneamente los axiomas y los teoremas−, pero eso no cambia el sentido de la estructura y mucho menos que la geometría se *descubre.* Como en el caso de la aritmética que requiere previamente el ejercicio empírico de contar para ser descubierta, la geometría demanda que el hombre proponga la nomenclatura, los axiomas, las figuras básicas y los posibles teoremas que aspire a descubrir, que pueden ser elegidos por intuición o por inducción o por experiencia, pero, en todo caso, requieren facultades o conocimientos adquiridos en un largo trecho histórico empírico.

ÁLGEBRA

Los Babilonios parecen ser los primeros que enfrentaron la solución de ecuaciones referidas a problemas prácticos; en unas tablillas llamadas Neugebaveren, cuya antigüedad es de unos 4000 años, constan esas actividades Desde el segundo milenio a.C. los egipcios resuelven ecuaciones de primero y segundo grado, empleando recetas para encontrar respuestas a algunos tipos de ecuaciones elementales, ligadas a asuntos de la vida diaria. Ellos no usan letras para las incógnitas. Y su método de trabajo es llamado el de la «falsa posición», que consiste en darle un valor arbitrario a la incógnita para ir acercándose al resultado. Los griegos entran posteriormente en escena y utilizan lo que se conoce como «algebra geométrica», porque ellos resolvían los problemas con métodos geométricos. En todos los casos el manejo de las ecuaciones es empírico, hasta que se encuentran, después de un largo período, las respuestas universales. Para encontrar la solución general, por ejemplo, de la ecuación de primer grado $ax + b = c$ transcurrieron más de tres mil años.

Hay evidencias de que los babilonios, alrededor del año *1600 a.C.,* ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución. La ecuación de segundo grado definida por la conocida fórmula: $ax^2 + bx + c = 0$ tiene como solución general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Y admite dos raíces reales o complejas. Se sabe que su origen es muy antiguo y se tienen registros de que Diofanto de Alejandría manejaba las soluciones *positivas* de esta ecuación.

La ecuación general de tercer grado la abordan los algebristas italianos, en el siglo XVI. La ecuación es $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. En la resolución de esta ecuación intervienen Tartaglia, Cardano, Scipion de Ferro y a este último se le atribuye la solución de la ecuación de 4° grado.

Los imaginarios –llamados en la actualidad números complejos− **los descubren** los algebristas del renacimiento, quienes les asignaron propiedades místicas. Hasta Leibniz estuvo confundido con estos números: «El divino creador ha encontrado ocasión de manifestar su sublime inteligencia en esta maravilla del análisis, este portento del mundo ideal, este anfibio entre el ser y el no-ser que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa».

Grandes fueron las dificultades de los europeos con los imaginarios. Aparecieron al resolver las ecuaciones de segundo grado y especialmente las de grado tres. Cardano plantea el problema de dividir 10 en dos partes cuyo producto sea 40 obtiene la ecuación $x(10 - x) = 40$. Resultan las raíces $(5 + \sqrt{-15})$ y $(5 - \sqrt{-15})$ y luego dice: "dejando a un lado las torturas mentales que ello implica" multipliquemos las dos raíces y da $25 - (-15) = 40$. Afirma, entonces, que: «así progresa la sutileza aritmética.»

En los siglos siguientes los matemáticos van mejorando las notaciones e introducen las incógnitas usando letras como variables y constantes. Destacan Viete y Descartes. Pero hay que esperar hasta las primeras tres décadas del siglo XIX para que el matemático noruego Niels Henryk Abel demostrara que la ecuación de 5° grado no tiene solución general y Evaristo Galois rematara el problema dando origen a una de las teorías más trascendentales del álgebra, la teoría de grupos, que en sus geniales manos sentó las bases para el verdadero desarrollo del álgebra moderna.

Nosotros, para nuestro propósito, sólo estamos interesados en la primera fase del desarrollo del álgebra que asimilamos al estudio de las ecuaciones y polinomios.

Con las ecuaciones pasa una cosa que es muy evidente *y es que no se pueden inventar las soluciones*; pensemos en la solución general de segundo grado, esa fórmula que está ligada <u>a la estructura de la ecuación</u> obliga a *descubrirla*. Lo mismo ocurre con la ecuación de tercer grado, la solución depende de la estructura y obliga a nuestro ingenio a *descubrirla.* Es evidente que con las ecuaciones algebraicas se cumplen los postulados del realismo platónico. Sin embargo, como en los casos anteriores, se necesita un largo período empírico, con ecuaciones prácticas antes de acceder a las ecuaciones generales que son propiamente hablando los entes matemáticos. O sea que la teoría de ecuaciones es *a posteriori necesaria y universal.*

<u>REFERENCIAS</u>

[1] VÉLEZ BOTERO, Dario. «¿La necesariedad y universalidad de la aritmética?» ∑ΟΦΙΑ-SOPHIA: Revista de investigaciones en educación 8. Universidad la Gran Colombia, Armenia. No. 8, Enero-Diciembre 2012.

[2] MAGAÑA HERRERA, Pedro Pablo. Los sistemas numéricos en la antigüedad. Tomado de www.monografías.com/trabajos38/origen-numeros/origen-numeros2.shtml. Visto el 2 de agosto de 2013.

[3] IFRAH, G. «A universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer» (London, 1998). Traducido por Covadonga Escandón Martínez: «La numeración Griega» Tomado de MacTutor History of Mathematics Archive. Tomado de http://www.astroseti.org/articulo/3734/ visto el 28 de Julio de 2013.

[4] ARMESTO, José. «Historia de la numeración china». Artículo extraído desde MacTutor History of Mathematics Archive. Tomado de http://www.astroseti.org/articulo/4488/ visto el 29 de julio de 2013.

[5] FERREIRÓS, José. «Certezas e hipótesis: Perspectivas históricas y naturalistas sobre la matemática». Filosofía de las ciencias naturales, sociales y matemáticas. Volumen 28, 2005. P 45-74.

[6] GOMEZ PARDO, José Luis. «Un paseo alrededor de la teoría de conjuntos». La Geceta de la Real Sociadad Española de Matemáticas, Vol. 11, No. 1, 2008. P 45-96. Tomado de http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/ GACETARSME_2008_11_1_01.pdf. Visto el 2 de agosto de 2013.

[7] ZALAMEA TRABA, Fernando. Hacia una filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2009.

[8] CORDOBA, Mariana. «¿Relatividad ontológica o radicalidad ontológica? La respuesta estructuralista de Shapiro al problema de la identificación y la obstinación por el realismo». Revista de filosofía (Universidad Complutense). No. 38, Fasciclo 1, 2013. P 7-28.

[9] WHITEHEAD, Alfred North. «La matemática como elemento en la historia del pensamiento». En Sigma Vol. 1 Ed. James R. Newman. Grijalbo. Barcelona, 1974. P. 326.

[10] HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Fernando. Teoría de conjuntos. Sociedad Matemática Mexicana. México, 2003.

[11] Wikipedia, búsqueda: «Número cardinal (Teoría de conjuntos)»: Visto el 12 de agosto de 2013. http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_cardinal_(teor%C3%ADa_de_conjuntos)

[12] Wikipedia, búsqueda: «Axioma de regularidad»: Visto el 12 de agosto de 2013. http://es.wikipedia.org/wiki/Axioma_de_regularidad

[13] MIRÓ QUESADA, Francisco. «La objeción de Rieger y el horizonte de la ontología matemática». Crítica, Revista Latinoamericana de Filosofía. Vol. 2, No. 5, 1968. P 31-56.

[14] FERREIRÓS, José. «Matemáticas y Platonismo(s)» La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas. No. 2, 1999. P 446-473.