

IDENTIFICACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO DE ALGUNOS
ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO FRENTE AL CONCEPTO DE LOS
SÓLIDOS SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE

AUTORES

GABRIEL DE JESÚS BLANDÓN DÍAZ
ZULMA ALEXANDRA SÁNCHEZ AGUDELO
GLORIA ISABEL VALENCIA VALENCIA
NATALIA YEPES MONTOYA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADOS EN EDUCACIÓN BÁSICA CON
ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

ASESORA: FLOR MARIA JURADO

FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
2008

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	iii
PROBLEMA	1
OBJETIVO GENERAL	1
Objetivos específicos.....	1
JUSTIFICACIÓN.....	2
MARCO LEGAL	4
MARCO TEÓRICO	9
ASPECTO DESCRIPTIVO	9
Los Niveles de razonamiento	9
Propiedades de los niveles.....	12
ASPECTO PRESCRIPTIVO: FASES	20
EL INSIGHT	22
METODOLOGÍA.....	24
ENFOQUE	24
CONTEXTO, POBLACIÓN Y MUESTRA DE LA INVESTIGACIÓN	24
Diagnóstico de la población	25
Institución Educativa Consejo de Medellín.....	25
Colegio Calasanz de Medellín.....	27
INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS UTILIZADOS.....	30
PROCEDIMIENTO	32
Revisión bibliográfica	32
Errores conceptuales encontrados en la Revisión Bibliográfica	39
DISEÑO DE LOS DESCRIPTORES	42
Descriptores para el concepto de los sólidos	44
Elaboración del test	46
Test final y clasificación por niveles	47
Preguntas obligatorias de cada nivel	56
RESULTADOS	59
ANÁLISIS PARA ALGUNAS DE LAS VARIABLES ESTUDIADAS.....	59
ANÁLISIS DE ALGUNAS DE LAS PREGUNTAS OBLIGATORIAS DE CADA NIVEL	63
ANÁLISIS DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN LOS DIFERENTES NIVELES DE RAZONAMIENTO SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE.....	74
Clasificación de cada uno de los estudiantes en el nivel de razonamiento que le corresponde.....	75
Análisis de la clasificación de niveles para algunos estudiantes	77
CONCLUSIONES.....	82
BIBLIOGRAFÍA	85
ANEXOS	- 1 -

INTRODUCCIÓN

La geometría es una rama de las matemáticas que cobra gran importancia en la edad escolar, por tal razón para un docente es necesario conocer que sabe un estudiante en su proceso de formación del pensamiento geométrico. En este trabajo presentaremos un estudio que busca determinar el nivel en el que se encuentra un estudiante en un concepto determinado, de acuerdo al modelo de van Hiele, el cual se ha tomado como punto de referencia para analizar la evolución del pensamiento espacial y además ha sido trabajado por varios autores como Crowley, Jaime y Gutiérrez entre otros. Por otra parte, este modelo, es propuesto desde los lineamientos curriculares por el Ministerio de Educación Nacional como el que mejor describe la evolución de dicho pensamiento.

Para determinar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante, fue necesario elegir un concepto clave que direccionará el estudio. En este caso fue elegido el concepto de los sólidos como punto de partida en la elaboración de un test organizado bajo la propuesta de van Hiele, el cual pasó por diferentes procesos: una revisión bibliográfica del concepto, la construcción de unos descriptores¹ que “describan” las acciones que debe realizar un estudiante para situarse en determinado nivel, la elaboración de un test producto de la revisión bibliográfica y aportes personales, la aplicación del test a una población de estudiantes de la educación básica específicamente del grado octavo de dos instituciones del municipio de Medellín (de esta población se extrajo una muestra no aleatoria que corresponden a un grupo de la I. E. Concejo de Medellín y al Colegio Calasanz de Medellín). Y por último la clasificación de los estudiantes por medio del análisis de conglomerados en el software SPSS10 y, el análisis de los resultados obtenidos (ver resultados).

¹ Este término será desarrollado en el marco teórico de este trabajo.

PROBLEMA

Determinar el nivel de razonamiento según el modelo de van Hiele en el que se encuentra un estudiante de grado 8° frente al concepto de los sólidos, a través de un test y la manipulación de diversos recursos didácticos.

OBJETIVO GENERAL

Identificar el nivel de razonamiento -según el modelo de van Hiele- en el que se encuentran algunos estudiantes del grado octavo frente al concepto de los sólidos, a través de un test que servirá como instrumento para los docentes de matemáticas que deseen saber cómo están sus estudiantes respecto a dicho concepto.

Objetivos específicos

- Diseñar e implementar un test como instrumento que permita la clasificación de los estudiantes en los niveles de razonamiento de van Hiele.
- Utilizar el software SPSS10 para clasificar a los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento en el que se encuentran.
- Realizar un análisis descriptivo de algunas variables relevantes en la investigación efectuada para presentar las conclusiones pertinentes.

JUSTIFICACIÓN

En Colombia, la educación matemática viene dada en una variedad y riqueza de conceptos que organiza el currículo en cinco tipos de pensamiento matemático en donde uno de ellos es el Pensamiento espacial y sistemas geométricos entendido este último como “...el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (MEN, 1998, p. 56); de este modo, la geometría juega un papel importante en la enseñanza de las matemáticas puesto que ésta permite el estudio y tratamiento de los objetos del espacio físico que nos rodea.

Teniendo en cuenta lo anterior, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas sustentan que el desarrollo del pensamiento espacial tiene una evolución muy lenta y para ello presentan el modelo de van Hiele como una propuesta que parece describir muy acertadamente como se desarrolla dicho pensamiento desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales. Este modelo está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a la geometría escolar².

Como consecuencia de este hecho, esta propuesta está enfocada en la búsqueda del nivel de razonamiento de los estudiantes frente al concepto de los sólidos a partir de la manipulación de diversos recursos didácticos, considerando como aspecto importante de este pensamiento la exploración activa de la realidad externa y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio; ya que vemos desde la experiencia como estudiantes que el razonamiento sobre los conceptos se puede observar a través de materiales concretos, sobre todo con aquellos con los que nos encontramos en la vida diaria: una caja, un vaso, una pelota, una hoja, una pirámide, entre otras.

² Parfraseando MEN, (1998). Matemáticas: Lineamientos Curriculares y Áreas Obligatorias. (pág. 58)

Para nuestros días, ante una sociedad que va en una carrera de continuo cambio, la educación es llamada a generar avances que lleven al desarrollo social, científico, económico, cultural y tecnológico del país. Así, el docente de hoy está llamado a diseñar procesos de enseñanza mediados por espacios culturales y sociales en donde el aprendizaje debe darse como un proceso activo que emerge de las interacciones entre los estudiantes y el contexto, teniendo en cuenta que sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes son la base de sus procesos de aprendizaje.

MARCO LEGAL

Desde la propuesta hecha por el Ministerio de Educación Nacional, la formación matemática es un pilar fundamental en el desenvolvimiento social e intelectual de un individuo. Por lo tanto, se debe fomentar una educación para todos, con las mismas posibilidades pensadas desde la diversidad intercultural; que formen hombres y mujeres acordes al mundo de hoy.

Por esta razón, y teniendo en cuenta que los educadores deben adecuar sus procesos de enseñanza y estar a la vanguardia de la educación matemática, esta propuesta investigativa propone una manera de observar en qué nivel de razonamiento se encuentran los estudiantes frente a un concepto geométrico por medio de un test; así, el maestro que estudie esta investigación podrá diseñar, innovar y proponer herramientas que sean útiles para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en el aula de clase, a partir de los resultados obtenidos en la implementación de esta propuesta.

Como se mencionó antes, este trabajo se basa en observar y determinar cuál es el nivel de razonamiento en el que se encuentran los estudiantes de grado 8° según el modelo de van Hiele frente a conceptos geométricos y espaciales –en este caso los sólidos-, los cuales hacen parte de la amplia gama de elementos de uno de los cinco pensamientos matemáticos propuestos en los estándares básicos de competencias: Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Pero antes de abordar el pensamiento espacial, se debe tener en cuenta que para la realización del test deben haber conocimientos implícitos encubiertos, de los cuales se asume que los estudiantes de grado 8° deben saber. Por medio de la siguiente afirmación hecha en el documento de los estándares, se aclara que:

Con el fin de permitir un desarrollo integrado y gradual a lo largo de los diversos niveles de la educación, los estándares de cada área se expresan en una secuencia de complejidad creciente y se agrupan en grupos de grados, estableciendo lo que los estudiantes deben saber y saber hacer al finalizar su

paso por ese grupo de grados, así: de primero a tercero, de cuarto a quinto, de sexto a séptimo, de octavo a noveno, y de décimo a undécimo. (MEN, 2007, p. 14)

Así mismo, sobre el Pensamiento Espacial y sistemas geométricos en el documento de los Estándares se argumenta que:

El pensamiento espacial, entendido como “... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales.

...En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana (p. 61).

Ningún tipo de pensamiento trabaja aislado de los otros; existen relaciones entre los cinco tipos de pensamiento. Así, conviene resaltar que aunque no se mencionan los demás pensamientos matemáticos, ellos son transversales al proceso geométrico; pues se necesita el numérico para establecer relaciones de cantidades y donde se involucre el número; el métrico para los procesos de medida de diversas magnitudes; el variacional para observar los comportamientos de los objetos geométricos en diferentes situaciones y el estocástico, para entre muchas otras cosas, analizar e interpretar los datos recogidos en el estudio de un concepto geométrico.

Ahora bien, existen dos tipos de conocimiento matemático (conceptual y procedimental), los cuales son importantes a la hora de observar y analizar como razonan los estudiantes; puesto que es a partir de ellos como reflexionan, relacionan, conjeturan, declaran, justifican, construyen, hacen procedimientos, comparan, usan estrategias y resuelven. Esta idea tiene que ver con la noción de competencias propuesta por el Ministerio de Educación Nacional y explicada en el texto de los Estándares como:

...La significatividad del aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. ...la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma.

En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la

construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo. (p. 48–50)

Como componentes fundamentales en esta propuesta se encuentran el razonamiento espacial, la modelación, la comunicación y el uso de los recursos didácticos. Para todos éstos componentes se tendrá en cuenta las definiciones que se presentan en este documento legal de los estándares básicos de competencias:

Razonamiento

El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. (p. 54)

La modelación

Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. (Pág. 52)

La comunicación

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y

comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido. (p. 54)

Los recursos didácticos

Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos.

Dicho de otra manera, cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático.

En este sentido, a través de las situaciones, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos. (p. 74)

Los recursos didácticos a utilizar serán los elementos que les permitirán a los estudiantes razonar sobre el concepto geométrico como por ejemplo la caja de cuerpos geométricos, regla, compás, entre otros.

MARCO TEÓRICO

Nuestra propuesta investigativa se fundamenta en la teoría del modelo de razonamiento de Van Hiele, ya que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se afirma que el desarrollo del pensamiento espacial tiene una evolución muy lenta. Del mismo modo, presentan este modelo como una propuesta útil que describe los procesos de pensamiento de los estudiantes desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, en actividades de geometría. Este modelo comprende tres aspectos: *descriptivo, prescriptivo y el insight*.

Nos basaremos en una traducción personal del texto *Structure and Insight* de van Hiele y el aporte de otros autores donde se expone dicho modelo; y nos enfocaremos en el aspecto descriptivo; mencionando los otros dos aspectos así como sus propiedades.

ASPECTO DESCRIPTIVO

Comprende la adquisición y explicación de los diferentes niveles de razonamiento que obtiene una persona frente a un concepto determinado.

Los Niveles de razonamiento

Nivel 1: El nivel visual. “... Del primer nivel es dicho: las cosas visuales directas son en realidad como se le presenta a los estudiantes, como el estudiante habla de ellas...” (Van Hiele, 1985, p. 41)

Van Baalen (1980) menciona lo siguiente respecto a este primer nivel del razonamiento de van Hiele: “El primer nivel es aquel en el cual la gente (incluyendo a los estudiantes) piensa en la vida cotidiana, en la que ocurren sus experiencias y con las cuales toman sus decisiones. Los demás niveles (a mi parecer niveles menores) son aquellos en los cuales, desde una perspectiva limitada, partes del primer nivel son escogidas para hacer

modelos que sirvan de ayuda para pensar y decidir en el primer nivel.” (Van Hiele, 1985, p. 42)

Jaime y Gutiérrez (1990) hacen la interpretación de este nivel como el nivel de *reconocimiento* y frente a éste realiza las siguientes anotaciones:

- Los estudiantes perciben las figuras geométricas, en su totalidad de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
- Además, perciben las figuras como objetos individuales, es decir, que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
- En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como: “...se parece a...”, “...tiene forma de...”, entre otras. (p. 308)

Nivel 2: segundo nivel superior *descriptivo*. Para este nuevo nivel se describen las relaciones y los elementos. Según Van Hiele (1985), este nivel lo alcanzan los estudiantes que “pueden aplicar características operativas de una figura bien conocida” (pág. 41). En una conversación de van Hiele con van Baleen (1985), vemos como se avanza al estudio de las relaciones de los conceptos: “El segundo nivel es, si te entiendo correctamente, que los conceptos son precisados por sus nombres matemáticos y puestos en conexiones formales” (p. 41).

Jaime y Gutiérrez (1990) interpreta el segundo nivel de razonamiento como el de “análisis” y describe las acciones de las personas que están en este como:

- Pueden describir las partes que conforman una figura y enunciar sus propiedades siempre de manera informal.
- Se pueden deducir otras propiedades generalizándolas a través de la experimentación.

- No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. (p. 308)

Nivel 3: el nivel teórico. Aquí la coherencia deductiva es predominante. “Se logra un tercer nivel (1981) cuando un estudiante es capaz de operar con relaciones conocidas sobre figuras conocidas. Esto significa que un estudiante que ha alcanzado este nivel es capaz de aplicar la congruencia de figuras geométricas para probar ciertas propiedades de un conjunto geométrico del cual hacen parte otras figuras congruentes” (p. 42).

Van Hiele define este nivel como el nivel teórico con relaciones lógicas, geometría acorde con lo que dice Euclides en sus elementos.

Jaime y Gutiérrez (1990) a su vez lo dilucidan como el nivel de clasificación y dice lo siguiente:

- Aquí comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes. Pueden reconocer que unas propiedades se deducen de otras, y, de deducir estas implicaciones pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas.
- Pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y la importancia de una definición correcta. (p. 309)

Nivel 4: Nivel de deducción: lógica formal. “En el nivel 4 el estudiante debe haber conectado la posibilidad de estar comparando, transponiendo y operando con relaciones. En este nivel sin ayuda para las operaciones es necesario extensiones de teorema, pruebas indirectas, etc.” (Van Hiele, 1985, p. 44).

Jaime y Gutiérrez (1990) hablan de este nivel como el de “deducción formal” en el que los estudiantes realizan lo siguiente:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales, las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.

- Ya pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Se logra la plena capacidad del razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se esté estudiando. (p. 310)

Nivel 5: La naturaleza de las leyes lógicas. En este nivel el estudiante, según Crowley (1987, p. 1-16)

...puede trabajar sobre una variedad de sistemas axiomáticos, es decir puede estudiar geometrías no euclídeas y puede comparar los diferentes sistemas axiomáticos. La geometría se ve en abstracto.

Este último nivel es el menos desarrollado en los trabajos originales y ha recibido escasa atención por parte de los investigadores. P.M. van Hiele ha reconocido que él está interesado en los tres primeros niveles (comunicación personal con Alan Hoffer, 25 de febrero de 1985). Dado que la mayoría de los cursos de geometría de los centros de Enseñanza Media son impartidos en el nivel 3. (p. 6)

En nuestra investigación no se trabajará este nivel de razonamiento, ya que se considera que este es de difícil adquisición para el público al cual va dirigido este trabajo.

Propiedades de los niveles

Las propiedades de estos niveles son muy importantes para los docentes porque les permitirá diseñar estrategias de enseñanza para sus estudiantes.

Estas propiedades son cinco:

1. **Secuencial:** Una persona debe progresar por los niveles. Para trabajar con éxito en un nivel determinado un estudiante debe haber adquirido las estrategias de los niveles anteriores.

Van Hiele (1985) menciona que “las formas de pensamiento del nivel base, del segundo nivel y del tercer nivel tiene un orden jerárquico. Los pensamientos del segundo nivel no son posibles fuera del nivel base; los pensamientos del tercer nivel no son posibles fuera de los pensamientos del segundo nivel...” (p. 50).

A continuación se presenta un ejemplo de ello, con el siguiente texto:

Se alcanza un nuevo nivel cuando el estudiante es capaz de aplicar propiedades operativas de una figura conocida (segundo nivel. Por ejemplo, si un estudiante sabe que las diagonales de un rombo son perpendiculares, después de haber alcanzado el segundo nivel, debe ser capaz de llegar a la conclusión de que si dos círculos³ tienen dos puntos en común, el segmento que une los puntos de intersección y el segmento que une los centros de los círculos se cortan perpendicularmente (ver figura 1). Puede suceder que no vea directamente el rombo en la figura, pero debería ser capaz de verlo después de que su atención ha sido dirigida hacia este rombo. Por otra parte, el estudiante que no haya alcanzado este nivel no verá la importancia del conocimiento de la figura que contiene al rombo. Si a un niño que no ha alcanzado el segundo nivel lo consideramos como que está en el primer período, y a un niño que haya alcanzado ese nivel, como que está en el segundo período, está claro que un niño del primer período no puede comprender ninguna serie de razonamientos que contengan elementos de los tipos mencionados anteriormente. Vemos que lo importante no es, como frecuentemente pesábamos, el número de conexiones, sino la naturaleza de esas conexiones... (Van Hiele, 1985, p. 41)

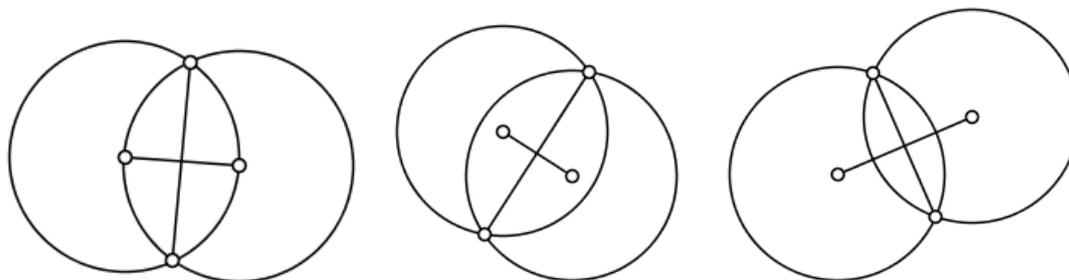


Figura 1

³ Para que la condición de que se forme un rombo se cumpla, es necesario que los círculos sean de igual radio.

2. **Progreso:** El progreso de un nivel a otro depende más de los contenidos y los métodos de enseñanza recibidos que de la edad. “La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; toma lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje...”⁴ (Van Hiele, 1985, p. 50)

Van Hiele en su tesis, presenta el siguiente caso que hace referencia a esta propiedad y a la intervención de los maestros en la misma:

... Es bastante posible presentar un teorema de forma que se refiera al paralelismo, mientras que un estudiante, para la comprensión del teorema, no necesite haber alcanzado el (tercer) nivel, debido a que el teorema ha sido formulado de tal modo que en él el paralelismo no sea visto como una relación necesaria entre rectas. Está por ejemplo el teorema: En un cuadrilátero con dos ángulos rectos consecutivos, los otros ángulos juntos suman 180° . Cuando todavía no se ha demostrado que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° , puedes pensar que el uso del paralelismo es inevitable. Se puede esperar el siguiente razonamiento: si en un cuadrilátero dos ángulos consecutivos son rectos, dos lados del cuadrilátero son paralelos, ya que hemos definido el paralelismo entre dos rectas mediante la existencia de una tercera recta perpendicular a ambas. Los otros dos ángulos son interiores en el mismo lado de la transversal, así que tienen una suma de 180° . Pero si un estudiante sólo está en el (segundo) nivel, puede ayudarse a sí mismo a salir del apuro considerando la figura como una totalidad. Ve un trapecio con dos ángulos rectos y ha aprendido que los otros dos ángulos suman 180° .

De modo similar el estudiante puede ser ayudado por la introducción de estructuras: Los ángulos alternos internos se reconocen como parte de una forma de **Z**, los ángulos interiores de un mismo lado de la línea de intersección como parte de una forma de **U** y los ángulos correspondientes se reconocen como parte de una forma de **F** (Ver figura 2). De este modo la relación entre los ángulos y líneas se reduce a las propiedades de una figura simple, por ejemplo la **Z**, la **U** o la **F**.

⁴ Esta afirmación también sustenta una parte del aspecto prescriptivo del modelo de van Hiele que corresponde a las fases de aprendizaje.

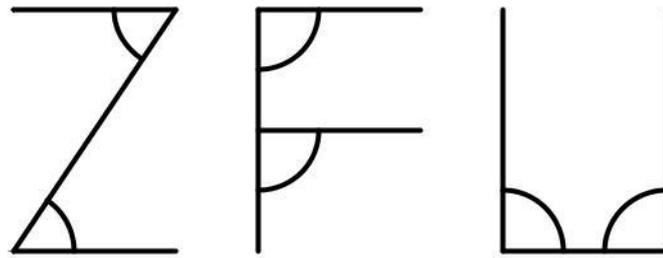


Figura 2

Tales recursos didácticos pueden usarse cuando se deben alcanzar ciertos resultados lógicos y el estudiante está todavía en el (segundo) nivel. Quizá deba de haber un estímulo para alcanzar el (tercer) nivel. Pero de hecho un estudiante que usa este recurso y que no está todavía en el (tercer) nivel no progresa al utilizarlo. Además, este método puede volverse perjudicial si el profesor, en su entusiasmo por los resultados rápidos, considera estas estructuras “aprendidas” por los estudiantes. Al hacer esto debilita la necesidad del estudiante de llegar a un orden superior de pensamiento, evita la crisis de pensamiento.

Aun existen profesores que nunca o escasamente han conocido las anteriores dificultades. Hay dos métodos para resolver este tipo de problemas de modo que, en el primer año al menos, no se presenten. El primero es explicar los teoremas en la escuela y más tarde hacer que los estudiantes los aprendan de memoria en la casa. También se puede exigir a los estudiantes que sean capaces de realizar pruebas con figuras diferentes a las vistas en clase. El estudiante sin estar en el nivel requerido puede ayudarse simplemente aprendiendo de memoria el orden de los pasos en la prueba. Es muy difícil determinar si el estudiante comprende la prueba porque sabe exactamente cuales propiedades de las figuras debe usar. Si él no se encuentra en el tercer nivel, no sabe por qué las tiene que usar pero no pregunta. Además sabe qué relaciones debe aplicar. Si no ha logrado el nivel no sabrá por qué pero tampoco pregunta. Siempre que él no haya alcanzado el nivel, no sabrá por qué las tiene que usar, pero no pregunta. El profesor, luego de proponer un nuevo problema, dirá que el estudiante carece de ingenio, pero no es consciente de que el estudiante no está en el nivel que le permite hacer uso de ese ingenio.

El segundo método es que el profesor cambie el contenido de forma que las actividades de pensamiento que el estudiante necesita permanezcan limitadas a un nivel inferior. El engaño por parte del profesor es menor que con el primer método. Ahora él sabe que deberá modernizar los temas de la materia para que queden de un nivel más bajo para sus estudiantes.

Los anteriores métodos obviamente no son la solución, así como no lo es el evitar el conflicto de pensamiento, que es necesario para desarrollar el pensamiento en los estudiantes. Por otro lado, el corto tiempo que tenemos para enseñar no permite que se de ese conflicto de pensamiento. Los estudiantes preguntan al profesor por una explicación, esta es una reducción a un nivel más bajo... Si examinamos de cerca varios teoremas de geometría, nos encontraremos con muchas dificultades que se pueden aclarar fácilmente a los estudiantes. Aun cuando no sepamos si un teorema es de tercer nivel o no, siempre debe haber una explicación.... (Van Hiele, 1985, p. 42,43)

3. **Intrínseco y extrínseco:** Los objetos inherentes a un nivel llegan a ser los objetos de estudio en el nivel siguiente.

En la discusión precedente nosotros hemos visto que el pasaje de Nivel 1 al Nivel 2 es un proceso complicado. También es difícil dado ayudar a un estudiante con este proceso de aprendizaje. A veces puede ser útil dar un nombre al periodo entre Nivel 1 y Nivel 2; nosotros lo llamaremos Periodo 1 simplemente. Después de que el segundo nivel de pensamiento se ha logrado, y Periodo 1 se completa. Nosotros entramos en Periodo 2 que tiene su extremo en el tercer nivel de pensamiento.” (Van Hiele, 1985, p. 63)

4. **Lenguajes:** Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre estos símbolos. “La transición de un nivel a otro no es posible fuera del aprendizaje de un nuevo lenguaje... Un grupo de estudiantes, comenzando de manera homogénea, no pasa al nivel siguiente del pensamiento al mismo tiempo. Ocasionalmente, una mitad de la clase hablará una lengua que la otra mitad no puede entender: Esto es inevitable...” (Van Hiele, 1985, p. 40).

Es verdad que en el nivel básico (primer) hay un lenguaje, pero su uso está limitado a la indicación de configuraciones que se han hecho claras por observación. En el primer nivel se puede decir: “Esto es un rombo”.

Es un fenómeno importante que sin una explicación posterior (¡Cómo podría ser una explicación de este tipo!) otra persona puede decir: “y esto también es un rombo”. Pero no supongamos erróneamente que estos fenómenos están restringidos a la geometría. Este es el tipo de fenómenos sobre los que se construye toda la comunicación humana. Tú enseñas a tu hijo una pequeña bestia melenuda y dices: “Esto es un perro”. Después el niño ve un gran alsacian y dice: “Perro”. Analizar el fenómeno “perro” en términos de características no es relevante aquí. Esta es una aplicación de una de las leyes de la psicología de la Gestalt: Un tipo de nociones puede ser reconocido con sólo un ejemplar significativo... (Van Hiele, 1985, p. 49)

5. **Emparejamiento:** Si el estudiante está en un nivel y la instrucción se está desarrollando en un nivel diferente, puede que no se de el aprendizaje y el progreso deseado.

En el trabajo expuesto por Van Hiele (1985), se encuentran las siguientes afirmaciones que sustentan esta propiedad de los niveles:

... Es evidente que el profesor tiene que enfrentar en esta etapa las dificultades que los estudiantes experimentan cuando estudian la geometría, él tiene que ser cuidadoso con el tema; pero por otra parte, no puede imposibilitar la crisis del pensamiento... Es obvio que el profesor tiene que considerar la composición heterogénea de la clase, aun cuando él ha tenido la ventaja de un método ideal de la selección. Un grupo de estudiantes, comenzando de manera homogénea, no pasa al nivel siguiente del pensamiento al mismo tiempo. (p. 40)

Los estudiantes preguntan al profesor por una explicación, esta es una reducción a un nivel más bajo, y el profesor, feliz porque su clase le entiende... (p. 43)

El maestro, cuando empieza enseñando geometría debe hacerlo en el lenguaje que ellos entienden, no debe usar el lenguaje de un nivel superior, porque los estudiantes no han avanzado a este nivel. Estos sucesos están inspirados en sus confidencias; los estudiantes lo han intentado comprender. Después de un tiempo hay que hablar del asunto que se requiere en el segundo nivel. Es necesario posponer este momento para después de un tiempo, para que no solo los estudiantes lo intenten comprender, sino para que tengan éxito. La crisis es superada por el deseo de mantenerse al día con el programa de estudios de la clase y para saber cuando los estudiantes entienden al profesor. (p. 45)

La mayoría de los profesores no tienen el valor de presentar el tema en un nivel superior. En su lugar intentan comprometerse: Dan de hecho el tema requerido, pero reducido [al tercer] nivel. Daremos un ejemplo para ver las consecuencias de esto.

A los estudiantes se les pide probar que las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo tienen un punto en común. Un estudiante en un nivel superior del pensamiento puede dar una prueba como esta:

A la declaración: “un punto equidistante a los lados a y b del triángulo ABC es equivalente a la declaración “el punto se sitúa en la bisectriz del ángulo C .”

Puesto que esta declaración es suficiente y necesaria, sigue que la intersección de los bisectores de los ángulos B y C es equidistante a los lados a , b , y c . (Estamos seguros ahora de que existe un punto dentro de un triángulo equidistante a los tres lados.) este punto de la intersección es llamado I .(Ver figura 3)

Puesto que I es equidistante a los lados b y c , sigue que I está situado necesariamente en el bisector del ángulo A .

I fue definido como el punto de intersección de los bisectores de los ángulos b y c . También los tres bisectores tienen un punto I en común.

En la forma reducida, la prueba puede ser dada como sigue:

Un punto es elegido en una bisectriz de un ángulo. Con la ayuda de la congruencia de triángulos puede ser probado que las distancias de este punto a

las líneas de la reunión son iguales. Ahora dibuja un triángulo arbitrario ABC. Mira la intersección de los bisectores de los ángulos B y C. Prueba que este punto es equidistante a los tres lados del triángulo.

Ahora llama el punto de la intersección de los bisectores I. Ya que hemos visto que las distancias de este punto a los lados AB y CA son iguales. Prueba con la ayuda de congruencia que AI biseca el ángulo A. AI, BI, y CI, son los bisectores de los ángulos de un triángulo, ahora sabemos que todos tienen un punto en común.

La segunda prueba no se diferencia matemáticamente de la primera. Pero el lenguaje de la segunda prueba es mucho más fácil para un estudiante que el de la primera. En la primera prueba, tendrá que esforzarse más para conseguir terminarla. En la segunda prueba, cada paso puede ser localizado fácilmente. Quizás el estudiante incurrirá en una equivocación al probar la congruencia pasada porque la primera congruencia lo distrajo al parecerle que es igual. Pero si todo procedió sin dificultad, él, al final, estará asombrado de que la prueba ahora esté acabada: Él ha realizado los pasos sin entender su significado, todo siguió siendo misterioso para él, la prueba es una trampa.

Un profesor que tiene que explicar una prueba de la primera clase debe tomar cuidado para no hacer de él una prueba de la segunda clase. Su explicación se debe centrar en los puntos “necesarios y suficientes,” en el hecho que en la primera parte de la prueba la existencia de un punto equidistante a los tres lados se ha probado. Por otra parte, la existencia de tal punto garantiza que todos los bisectores de los ángulos del triángulo pasan a través de él. El profesor será feliz si los estudiantes pueden reproducir la prueba espontáneamente: él será mucho más feliz si pueden dar una prueba similar en una situación similar. Para un profesor cuidadoso, la reproducción de una prueba aprendida esta sin valor. Y él está muy asustado del resultado de lecciones adicionales fuera de la escuela donde se le da al estudiante explicaciones del tema con la ayuda de un substituto acercándolo al nivel inferior... (p. 46 y 47).

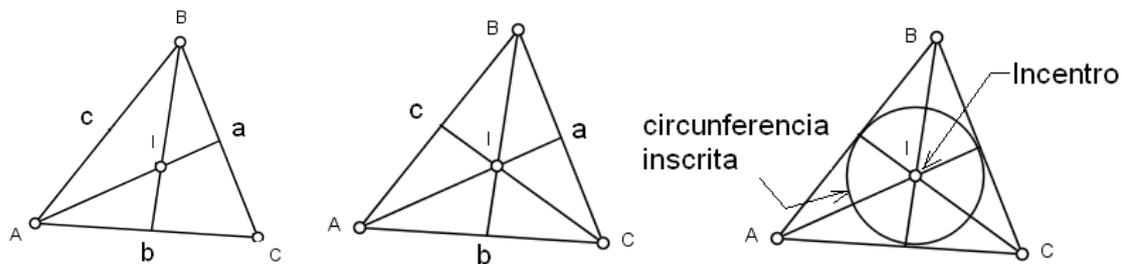


Figura 3

ASPECTO PRESCRIPTIVO: FASES

Como ya se dijo antes, el avance en cada uno de los niveles depende más de la metodología utilizada que de la edad; así, el método, la enseñanza, los contenidos, los materiales⁵ utilizados juegan un papel importante desde la didáctica. De este modo el modelo de van Hiele desarrolla un conjunto de fases secuenciales que promueven la adquisición de un nivel. Estas fases son:

FASE 1, La de información, los estudiantes la obtienen con el dominio activo; es decir trabajando directamente.

FASE 2, orientación guiada, ellos están guiados por los métodos (que les da el profesor o lo que ellos hacen por sí mismos) con diferentes relaciones del trabajo en equipo que ha sido formado.

FASE 3, de explicación, ellos llegarán conscientes de las relaciones, ellos tratarán de expresar esto con sus palabras. Ellos aprenden el lenguaje técnico, acompañado con el sujeto principal.

FASE 4, de orientación libre, ellos aprenderán por lo general, a encontrar su propio camino en las relaciones de trabajo.

⁵ Los materiales serán comparados con los recursos didácticos que fueron justificados en el marco legal de este trabajo.

FASE 5, de integración, ellos construirán con todo lo visto teniendo aprendizaje de un sujeto, la nueva forma del trabajo en grupo, y de las relaciones que ahora están puestas (van Hiele, 1985, p. 53 y 54).

Según Crowley (1987), estas fases tienen las siguientes características:

Fase 1: preguntas/información

En esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los objetos de estudio de este nivel. Se hacen observaciones, se plantean preguntas y se introduce un vocabulario específico de este nivel (Hoffer 1982, p. 208). El objetivo de estas actividades es doble: (1) el profesor se da cuenta de cuáles son los conocimientos previos que los estudiantes tienen sobre el tema y (2) los estudiantes aprenden qué dirección tomarán los estudios que vienen a continuación.

Fase 2: Orientación dirigida

Los estudiantes exploran el tema de estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel. De este modo, la mayoría del material serán tareas simples diseñadas para obtener respuestas específicas. Por ejemplo, el profesor podría pedirles a los estudiantes que usaran el geoplano para construir un rombo con diagonales iguales, para construir otro que sea más grande, para construir otro que sea más pequeño. Otra actividad podría ser construir un rombo con cuatro ángulos rectos, después con tres ángulos rectos, con dos ángulos rectos, con un ángulo recto...

Fase 3: Explicación

Apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de vista acerca de las estructuras que han observado. Aparte de ayudar a los estudiantes en el uso del lenguaje correcto y apropiado, el papel del profesor es mínimo. Durante esta fase, es cuando el sistema de relaciones del nivel empieza a hacerse patente. Continuando con el ejemplo de

los rombos, los estudiantes discutirán entre ellos y con el profesor que figuras y propiedades surgieron en las actividades anteriores.

Fase 4: Orientación libre

Los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas. “Ellos adquieren experiencia buscando su propia forma de resolver las tareas. Al orientarse ellos mismos en el campo de la investigación, se hacen explícitas para los estudiantes muchas relaciones entre los objetos de estudio. (Hoffer, 1983, p. 208)

Fase 5: Integración

Los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones. El profesor puede ayudar en esta síntesis “proporcionando orientaciones globales” (van Hiele, 1984^a, p.247) de los que los estudiantes han aprendido. Es importante, sin embargo, que estos resúmenes no presenten nada nuevo. Las propiedades de los rombos que han aparecido deberían ser resumidas y revisados sus orígenes.

Al final de la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio del pensamiento reemplaza al antiguo y están preparados para repetir las fases de aprendizaje en el nivel siguiente... (p. 1-16)

EL INSIGHT

Según Ford & Resnick, (1998) se puede explicar el insight de la siguiente manera: “*un alumno tiene insight cuando puede aplicar los conceptos aprendidos para resolver correctamente diversos problemas en distintas situaciones*”. Tanto los niveles de pensamiento como las fases de aprendizaje deben orientarse para que los estudiantes alcancen el insight.

Para van Hiele, el insight está íntimamente relacionado con la intuición, y en su trabajo se expresa de ella de la siguiente manera:

Una decisión basada en la intuición, que es una consideración cercana sin fundamento en el pensamiento discursivo, puede ser correcta. Si se tiene acceso a una estructura más fuerte, la seguridad de la decisión podría estar justificada. En tal caso, se ha vislumbrado una estructura clara de la cual se puede sacar fácilmente la solución a un problema... Del mismo modo es importante reconocer que la intuición no es un acto inconsciente como se cree, la lectura de una estructura visual ocurre en plena conciencia. Además la acción en el campo del pensamiento visual es esencial para el desarrollo del pensamiento. (1985, p. 72)

Para una persona que aún no tiene una estructura de pensamiento discursivo desarrollada, la intuición se da espontáneamente: “Una convicción lograda a través de la intuición aparece más o menos de repente: el sujeto no puede dar una explicación para ello y usualmente supone que no existe. Sin embargo, está ocupada por una noción intensiva de seguridad subjetiva. (Wiersma, D. citado por van Hiele, 1985)... Si se actúa desde el ‘razonamiento intuitivo’ probablemente se concluya desde las estructuras visuales. Como normalmente es difícil expresar estas estructuras en palabras, las conclusiones a veces parecen meras suposiciones”. (1985, p. 71)

Si una persona es capaz de ver la solución directa de un problema, sin ser capaz de decir cómo está organizada la estructura que vio, entonces se puede hablar de intuición. Y si luego de este proceso intuitivo es capaz de hacer todo un discurso para explicar como con la conexión interna o mental de sus conocimientos llegó a la solución de un problema, entonces se puede hablar de insight.

METODOLOGÍA

ENFOQUE

Esta investigación se da a partir del modelo mixto, ya que integra los enfoques cualitativo y cuantitativo con sus diversas variables. Según Hernández (2004, p.21), los modelos cuantitativos y cualitativos de la investigación se: “entremezclan y combinan en todo el proceso de investigación o al menos, en la mayoría de sus etapas. Requiere de un manejo completo de los dos enfoques y una mentalidad abierta.”

Desde esta perspectiva, el enfoque cualitativo se da en la revisión de los textos, las entrevistas realizadas a las diferentes personas, la construcción de cuerpos geométricos, las pruebas piloto, la observación del entorno donde se realizó la investigación, las fotografías, el estudio de las respuestas dadas por los estudiantes, entre otros. Y el enfoque cuantitativo aparece en la recolección y el análisis de los datos, la construcción de las graficas, la clasificación en los diferentes niveles.

CONTEXTO, POBLACIÓN Y MUESTRA DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio fue realizado en un contexto escolar cuya población fue la I.E. Concejo de Medellín y el Colegio Calasanz de Medellín, tomando como muestra uno de los grupos del grado octavo de cada uno de ellas.

La muestra elegida para la realización de la presente investigación es una muestra no aleatoria, ya que en la población elegida se seleccionó un grado completo para ser investigado, sin supeditarse a los beneficios de la probabilidad; es decir, el grado fue elegido por los investigadores sin haber realizado cálculos para elegir al azar los encuestados como es el caso de la muestra aleatoria, ya que ésta es una muestra sacada de una población de manera que todo elemento de la población tenga la misma probabilidad de ser seleccionada.

Diagnóstico de la población

Nuestra propuesta investigativa se llevará a cabo en dos centros educativos de la ciudad de Medellín: la Institución Educativa Consejo de Medellín y el Colegio Calasanz de Medellín; ubicados en el barrio la Floresta (ver anexo No. 1).

A través de unas visitas previas, se logró realizar el siguiente diagnóstico:

Institución Educativa Consejo de Medellín

Institución de carácter oficial y de población mixta; ubicada en la carrera 82 N° 67-42.

- *Clima escolar*

En el tiempo de nuestro trabajo de investigación año (2007-2008), la planta física de la institución está pasando por un proceso de remodelación y restauración; razón por la cual, es posible notar algunas incomodidades en cuanto a la contaminación ambiental que produce dicha obra.

Una de las consecuencias de este proceso, es la desescolarización de algunos grupos; ya que no se cuenta un número de aulas disponibles para atender la demanda de estudiantes que tiene la institución matriculados. Sin embargo el espacio de las aulas en situación normal es acorde y apropiado para la enseñanza y el aprendizaje.

Se tienen laboratorios de química, biología, inglés, informática, una biblioteca no muy actualizada y con un espacio muy reducido. Aunque se cuenta con una planta física un tanto amplia, el espacio para la convivencia, la recreación y alimentación, no es suficiente; porque es muy pequeño para la población allí presente; se ha presentado la problemática de que cuando se programa un partido de fútbol en el momento del descanso, los estudiantes ya no tienen el espacio de la cancha para recrearse, pues este estará siendo utilizado por unos cuantos que son una minoría de la población estudiantil. En cuanto al aseo el orden y la decoración, son agradables aunque por estos días están siendo afectados por la construcción en curso.

Es de anotar aquí el aspecto de algunas aulas las cuales son espacios antipedagógicos por el estado físico (ventilación, ruido) en el que se encuentran.

- *Talento humano*

El equipo administrativo y docente se encuentra bien preparado y capacitado para el desempeño de su labor; se observa el deseo de cualificación continua por ello el proyecto de la certificación del ICONTEC. Además se presenta una alta calidad humana y profesional.

En la institución se cuenta con una filosofía la cual tiene como elementos una visión y una misión:

Visión: Para el año 2007 la Institución Educativa Concejo de Medellín será una Institución de alto rendimiento académico, técnico y científico y sus egresados tendrán una formación de acuerdo con las exigencias de la sociedad moderna.

Misión: La Institución Educativa Concejo de Medellín, tiene por Misión formar a sus estudiantes de los niveles de Preescolar, Básica Primaria, Básica Secundaria, Media Académica y Media Técnica en valores humanos y principios académicos, técnicos, cívicos, ecológicos, deportivos y culturales que favorezcan el mejoramiento de su calidad de vida, su sentido de pertenencia y capacidad de servicio a los demás”. (Manual de convivencia de la Institución)

- *Relaciones con el entorno*

La institución debería implementar estrategias efectivas en lo referente a sus relaciones con el sector productivo y la evaluación de los padres de familia en el proceso de formación de sus hijos ya que se puede notar una marcada ausencia de éstos en dichos procesos.

- *Diseño pedagógico*

La población estudiantil está conformada por grupos heterogéneos de jóvenes; los cuales vienen de diferentes instituciones y anexos en donde los espacios para el esparcimiento son más reducidos y cerrados. Con características económicas muy diversas que intervienen en el desarrollo del aprendizaje.

Dentro de los recursos para el aprendizaje, como ya se dijo, se encuentra la biblioteca que no tiene personal especializado.

No se cuenta con material didáctico suficiente y apropiado para acompañar los procesos de enseñanza aprendizaje.

En cuanto a la transversalidad de las áreas, es necesario implementar el trabajo en equipo en todas las áreas; no existen estrategias de integración de áreas ni de aplicación del conocimiento a referentes reales; algunos profesores no hacen uso de los recursos disponibles.

- *Seguimiento y evaluación*

Se realizan de acuerdo al marco legal vigente del Ministerio de Educación, con el decreto 0230.

Colegio Calasanz de Medellín

Esta institución está ubicada en la Cara. 82 # 48 A 120. Es de carácter privado mixta y con una jornada única.

- *Clima escolar*

La planta física de este colegio cuenta con un amplio número de aulas de clase, acorde a la población matriculada. Poseen diferentes laboratorios como el de química, física y biología. Cuentan además, con oratorios, templo, auditorio, coliseo, cafeterías, biblioteca, ludoteca, sala de lectura infantil, aulas de artística y expresión corporal, salas de informática, instalaciones deportivas de fútbol, fútbol de salón, baloncesto y voleibol.

De este modo la planta física del colegio es acorde para la enseñanza, el aprendizaje y la recreación. Es un espacio bastante agradable y permanece en orden. Su decoración es sobria y pertinente para desarrollar las actividades escolares.

- *Talento humano*

El equipo administrativo y docente se encuentra bien preparado y capacitado para el desempeño de su labor. Se rigen bajo la filosofía calasancia basada en valores cristianos

y en la formación de personas responsables, rectas, íntegras y comprometidas con el cambio del mundo.

La misión y la visión del colegio Calasanz se presenta de la siguiente manera:

Misión: El Colegio Calasanz de Medellín es una institución educativa de la Orden Religiosa de las Escuelas Pías (PP Escolapios) que educa y evangeliza a la niñez y juventud de cualquier condición, mediante la Piedad y las Letras. Contamos con una historia, una espiritualidad y una pedagogía propias, que se hacen vida a través de un equipo humano comprometido

Visión: En el año 2015, el Colegio Calasanz de Medellín responde a los nuevos retos educativos y sociales con una propuesta de formación integral y abierta en Piedad y Letras, a partir de los principios calasancios de calidad, acompañamiento y compromiso social.

- *Relaciones con el entorno*

Este colegio cuenta con un fuerte acompañamiento por parte de los padres de familia en el proceso formativo de sus hijos y en los momentos en que el colegio así lo requiera. Este colegio implementa estrategias efectivas en lo referente a sus relaciones con el sector productivo.

- *Diseño pedagógico*

La población estudiantil está conformada por grupos heterogéneos de jóvenes, los cuales en su gran mayoría han estado en el colegio desde sus primeros años de estudio. Las características económicas de los estudiantes son buenas lo cual permite que el desarrollo del aprendizaje sea adecuado.

Existe transversalidad entre las áreas y se cuenta con buen material didáctico que es apropiado para acompañar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El aprendizaje académico en el Colegio Calasanz conjuga la adquisición de conocimientos clasificados y codificados con el dominio de los instrumentos y operaciones que hacen posible la construcción del saber. De esta manera, la persona aprende a comprender el mundo que la rodea, buscando vivir con dignidad, desarrollar sus capacidades profesionales y comunicarse con los demás, a la vez que disfruta del

placer de comprender, conocer y descubrir. Se pretende, pues, crear las posibilidades para comprender mejor las facetas del propio entorno, favorecer el despertar de la curiosidad intelectual, estimular el sentido crítico y adquirir una autonomía de juicio.

- *Seguimiento y evaluación*

Se realizan de acuerdo al marco legal vigente del Ministerio de Educación, con el decreto 0230.

INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS UTILIZADOS

Para efectuar el análisis de la investigación, se utilizó un software de estadística, puesto que evita el trabajo de hacer cálculos manuales y este tiempo se emplea analizando los datos arrojados del estudio. Este software es SPSS10 (Statistical Package for the Social Sciences), es uno de los principales paquetes estadísticos conocidos y se usa como herramienta de tratamiento de datos y análisis estadístico, que funciona mediante menús desplegables y cuadros de diálogo que permiten la mayor parte del trabajo utilizando el puntero del ratón.

El software SPSS es un programa apropiado para el trabajo estadístico ya que permite ordenar y representar los datos de un estudio estadístico para posteriormente hacer un análisis de datos recogidos. Dicho programa permite:

- ✓ Ingresar los datos de manera directa o abrirlos desde otro programa (como desde Excel por ejemplo).
- ✓ Categorizar las diferentes variables con sus distintos datos y valores.
- ✓ Observar, construir y modificar las representaciones gráficas acordes a cada tipo de variable.
- ✓ Hacer un análisis detallado de lo que se observa con cada variable y de este modo poder dar los aportes necesarios para la clasificación de los datos en nuestro trabajo de investigación.
- ✓ La plantilla que se genera con los datos recogidos, sirve para posteriores estudios con otros grupos bajo los mismos parámetros de la investigación.

En el test diseñado, trabajaremos variables tales como la edad, el sexo, el grado de escolaridad, el tiempo de respuesta, entre otros; que deberán ser analizados estadísticamente para poder presentar resultados veraces y valederos de los elementos que conforman dicho trabajo. De este modo, el programa SPSS nos brindará la facilidad de analizar cada una de estas variables en la medida en que se necesite; de forma independiente, compartida y en comparación con muchas otras variables.

Para ubicar los estudiantes en cada nivel de razonamiento, se utiliza el *análisis de agrupamientos o conglomerados* que es una técnica para agrupar los casos o elementos de una muestra en grupos sobre la base de una o más variables. El software SPSS permite hacer este análisis bajo el nombre de conglomerados de K-medias y al respecto presenta lo siguiente:

Este procedimiento intenta identificar grupos de casos relativamente homogéneos basándose en las características seleccionadas y utilizando un algoritmo que puede gestionar un gran número de casos. Sin embargo, el algoritmo requiere que el usuario especifique el número de conglomerados. Puede especificar los centros iniciales de los conglomerados si conoce de antemano dicha información. Puede elegir uno de los dos métodos disponibles para clasificar los casos: la actualización de los centros de los conglomerados de forma iterativa o sólo la clasificación. Asimismo, puede guardar la pertenencia a los conglomerados, información de la distancia y los centros de los conglomerados finales. Si lo desea, puede especificar una variable cuyos valores sean utilizados para etiquetar los resultados por casos.

Ejemplo. ¿Cuáles son los grupos identificables de programas de televisión que atraen audiencias parecidas dentro de cada grupo? Con el análisis de conglomerados de k-medias, podría agrupar los programas de televisión (los casos) en k grupos homogéneos, basados en las características del televidente. Este proceso se puede utilizar para identificar segmentos de mercado. También puede agrupar ciudades (los casos) en grupos homogéneos, de manera que se puedan seleccionar ciudades comparables para probar diversas estrategias de marketing. (SPSS10, manual del programa).

PROCEDIMIENTO

Los pasos a seguir para el desarrollo de esta investigación fueron los siguientes: una selección de la muestra, un diagnóstico de las instituciones participativas en la investigación, una revisión bibliográfica en textos de geometría, analizar los errores encontrados, el diseño de unos descriptores basados en los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele, la elaboración de un test organizado bajo dichos descriptores, la aplicación del mismo, y el estudio estadístico que comprende la clasificación de los estudiantes y el análisis de los resultados obtenidos. A continuación hablaremos de cada uno de ellos respectivamente.

Revisión bibliográfica

Como se ha mencionado con anterioridad, el concepto central de esta investigación son los sólidos o cuerpos geométricos por lo tanto, se hace necesario desarrollar una revisión bibliográfica para tener claras las definiciones, conocer los temas que se plantean con respecto a dicho concepto y con estos datos crear un banco de preguntas que servirá para la elaboración del test.

En consecuencia con lo anterior, se realizó el rastreo bibliográfico en medios electrónicos y textos escolares.

A continuación se presentan algunos elementos relevantes de dicha búsqueda.

En medios electrónicos

Según lo encontrado, los cuerpos geométricos se clasifican de acuerdo a la forma de sus caras:

- **Poliedros:** son aquellos que tienen todas sus caras planas y poseen vértices y aristas. Estos poliedros, a su vez, pueden dividirse en **poliedros regulares** y

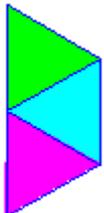
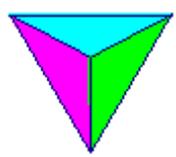
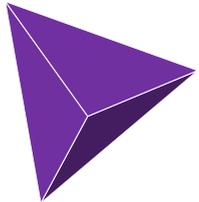
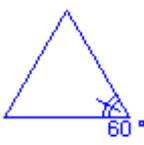
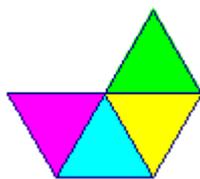
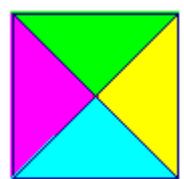
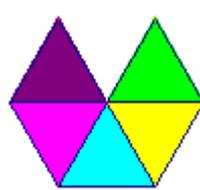
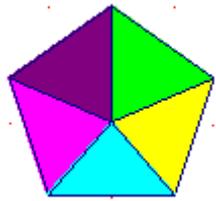
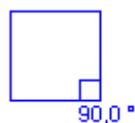
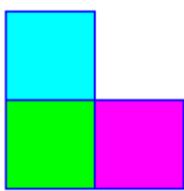
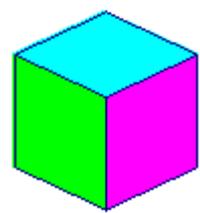
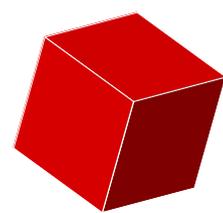
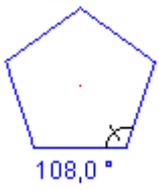
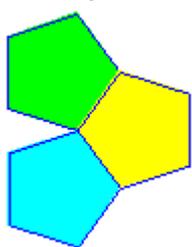
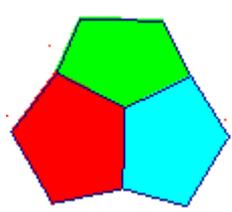
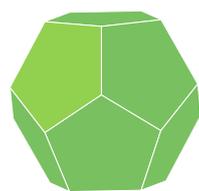
poliedros irregulares. Es importante aclarar que todas las caras de un poliedro son polígonos.

- **Poliedros regulares:** Un poliedro es regular cuando cumple con dos propiedades fundamentales: que sus caras sean polígonos regulares e iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de polígonos.

Existen cinco poliedros regulares también llamados platónicos, éstos son poliedros convexos y son los siguientes:

- ✓ El tetraedro: Es un poliedro con cuatro caras triangulares congruentes. Sus triángulos son equiláteros.
- ✓ El cubo o hexaedro regular: es un poliedro de seis caras cuadrados congruentes.
- ✓ El octaedro: Es un poliedro con ocho caras triangulares congruentes. Sus triángulos son equiláteros.
- ✓ El dodecaedro: Es un poliedro con doce caras pentagonales congruentes. Sus pentágonos son regulares.
- ✓ El icosaedro: Es un poliedro con veinte caras triangulares congruentes. Sus triángulos son equiláteros.

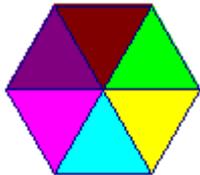
En el siguiente cuadro se observan claramente los componentes de un poliedro regular: polígonos regulares que los componen, número de polígonos por vértice, cómo se ve el vértice del poliedro y cuál es la apariencia del poliedro regular como tal.

POLÍGONO REGULAR	Nº Polígonos por vértice	Vértice del poliedro	POLIEDRO REGULAR
	3		TETRAEDRO
			
	$3 \times 60 = 180 < 360$		
Triángulo Equilátero	4		OCTAEDRO
			
	$4 \times 60 = 240 < 360$		
	5		ICOSAEDRO
			
	$5 \times 60 = 300 < 360$		
Cuadrado	3		CUBO
			
	$3 \times 90 = 270 < 360$		
Pentágono Reg.	3		DODECAEDRO
			
	$3 \times 108 = 324 < 360$		

El desarrollo anterior, demuestra que no puede haber más que cinco poliedros regulares.

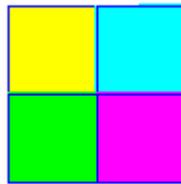
En los casos en que el producto del ángulo interior por el número de polígonos en cada vértice es 360° , no se forma poliedro, se forma un mosaico regular como los siguientes:

6 Triángulos equiláteros



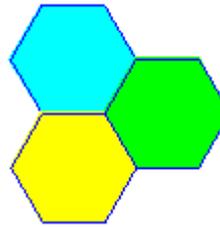
$$6 \times 60 = 360$$

4 cuadrados



$$4 \times 90 = 360$$

3 hexágonos regulares



$$3 \times 120 = 360$$

Así mismo, cuando la suma de los ángulos que componen los vértices es menor de 360° se puede asegurar que se genera un cuerpo geométrico⁶.

- **Poliedros irregulares:** Cuando no son regulares, por no cumplirse algunas o todas las condiciones precisas para ello; tales como que sus caras no son poliedros regulares y en sus vértices no concurren el mismo número de caras.

Dentro de los poliedros (antes de clasificarse en regulares o irregulares) existen tres grupos importantes:

- ✓ los prismas
- ✓ los paralelepípedos
- ✓ las pirámides

⁶ Estas definiciones han sido tomadas y adaptadas de CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa) España.

Por **Prisma** se entiende que es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos en las bases y paralelogramos en las caras laterales. El cubo puede clasificarse como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base.

Un **Paralelepípedo** se define como prismas en los cuales todas sus caras son paralelogramos. Tienen 6 caras y cada par de caras opuestas son iguales. Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos.

De **Pirámide** se define que es un poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y varias caras laterales, que son triángulos con un vértice común llamado cúspide de la pirámide⁷.

- **Cuerpos rodantes:** Son aquellos que tienen por lo menos una cara curva. Estos cuerpos se dividen en:
 - ✓ Conos
 - ✓ Esferas
 - ✓ Cilindros

Estos cuerpos rodantes se conocen también como sólidos de revolución pues son generados por el movimiento de alguna figura que los engendra. Veamos:

Un Cono, en geometría elemental, es un sólido generado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se llama vértice.

Un cilindro es un sólido de revolución formado por un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, lo engendra.

Una esfera se genera por el movimiento de un círculo sobre uno de sus diámetros⁸.

⁷ Estas definiciones han sido tomadas y adaptadas de Liceo Paula Albarracín Sarmiento. Argentina.

⁸ Estas definiciones han sido tomadas y adaptadas de Wikipedia.com.

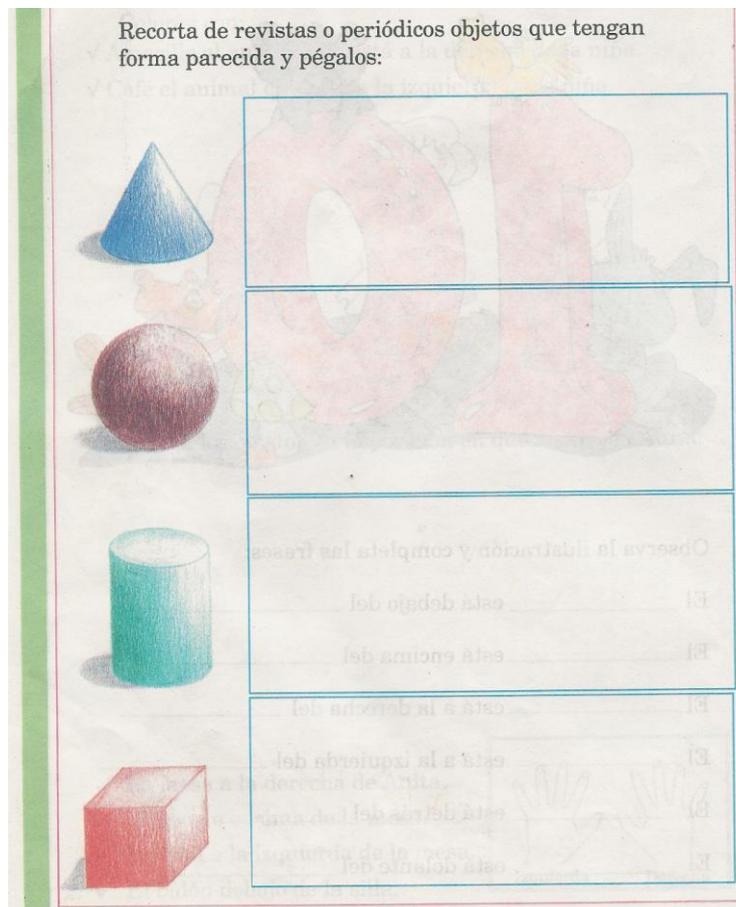
Dentro de las definiciones encontradas para los sólidos o cuerpos geométricos es importante tener en cuenta la definición de arista y de vértice.

- ✓ **Arista:** Recta donde se encuentran dos caras de un sólido.
- ✓ **Vértice:** Punto en el que se unen los lados de un ángulo o las aristas de tres o más planos de un sólido.

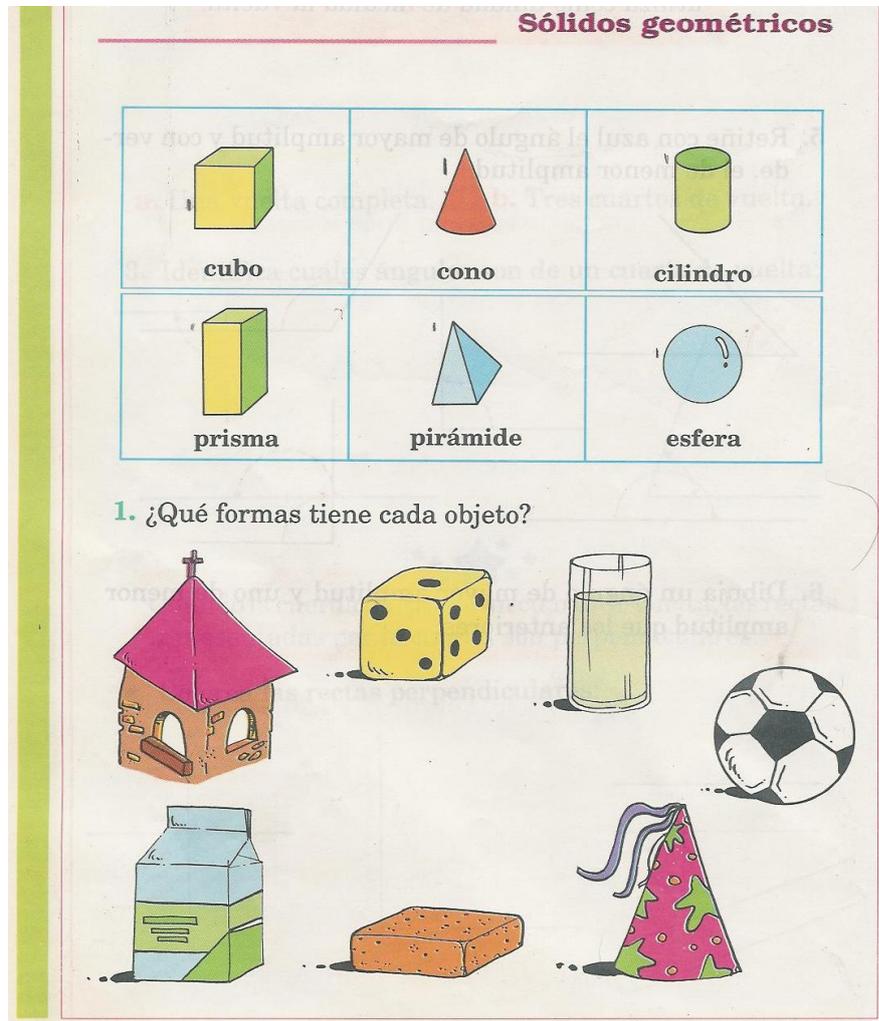
En textos escolares

Dentro de la revisión bibliográfica de textos escolares desde el grado primero a noveno, se encontró que todos coinciden con muy buena representación gráfica de los cuerpos geométricos. Algunas ideas localizadas, fueron:

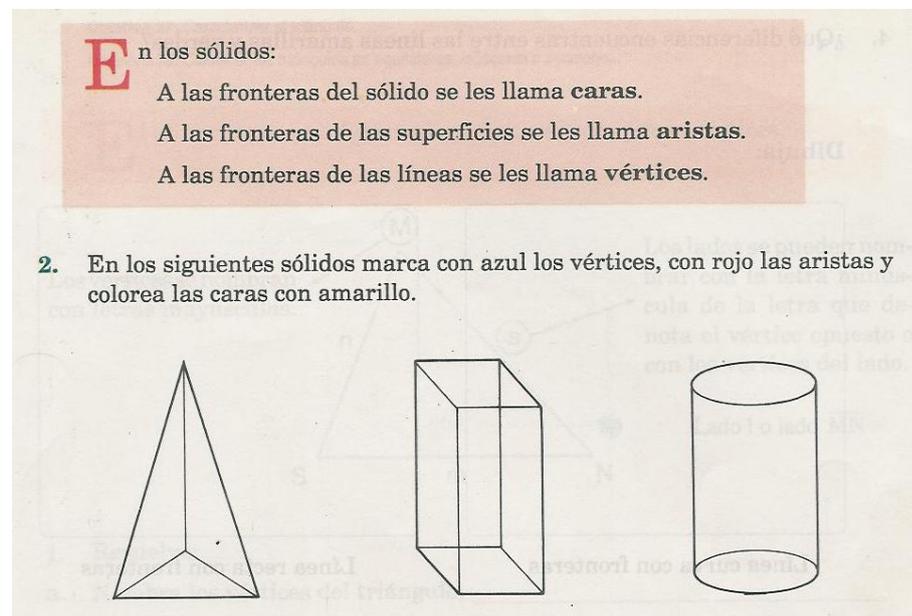
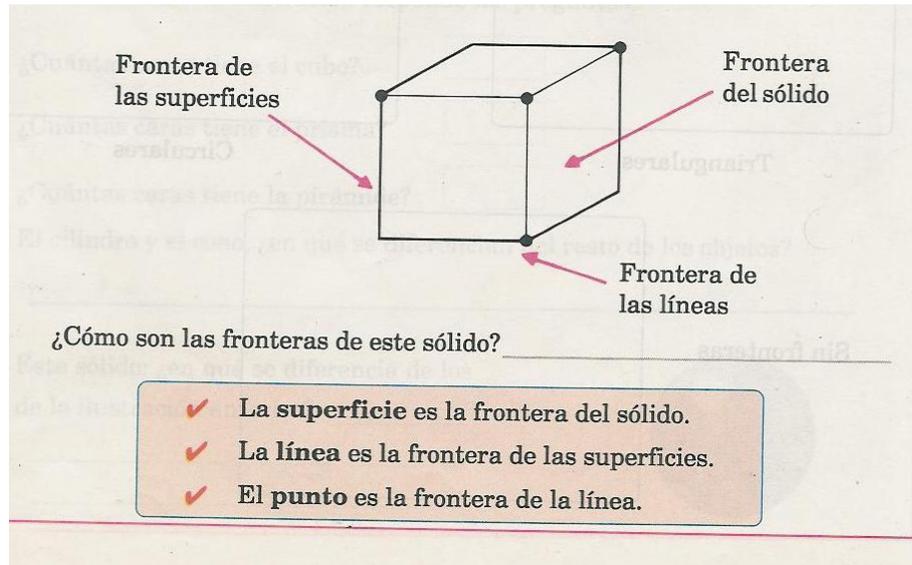
- En el grado primero se hace referencia al tema de los sólidos a partir de la búsqueda de objetos que tengan forma parecida a ellos que le presentan (esfera, cono, cubo, tetraedro...).



- En segundo se va avanzando en el análisis de algunas de sus características; donde se indaga en una colección, qué formas tiene cada objeto.



- En tercero se inicia la conceptualización; se presentan objetos de la vida cotidiana (vaso, caja, bombillo, pirámide) y se definen ideas como: “estos objetos reciben el nombre de sólidos. Cada sólido ocupa un lugar en el espacio. El lugar que ocupa está limitado por una superficie. Hay superficies planas como la de la caja y curvas como la del bombillo”. (Recreo Matemático 3. 1996). Luego se presentan situaciones de la vida cotidiana donde se deben observar, comparar, dibujar sólidos y patrones de los sólidos.



Errores conceptuales encontrados en la Revisión Bibliográfica

Los siguientes son los errores conceptuales encontrados en el tema de los sólidos:

- “Hay otras figuras con formas redondas... -se presentan ejemplos gráficos del cono, cilindro y esfera y al pie de éstos describen-“un cilindro tiene dos caras planas circulares, dos aristas y no tiene vértices. Un cono tiene una cara plana circular, una arista y un vértice. Una esfera no tiene caras, ni aristas ni vértices”. (Sánchez, A. 2005).



Las definiciones de los cuerpos redondos son imprecisas, les faltan datos para describir correctamente el cuerpo al que hacen mención; además que utilizan la palabra arista⁹ como una parte de los cuerpos redondos, lo cual es completamente incorrecto para este tipo de cuerpos.

Teniendo en cuenta varias definiciones de diferentes fuentes, el cilindro consta de dos bases circulares y una superficie lateral curva formada por un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, lo engendra. Posee dos bordes, cada uno en cada base y no tiene vértices.

El cono posee una base plana circular, una cara lateral curva engendada por un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno de sus catetos. Tiene un vértice y un borde.

La esfera también debe poseer algún elemento porque sino no existiría; decimos que es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. De esta manera podemos señalar que tiene una cara curva que la envuelve completamente.

Desde la vida cotidiana aparecen expresiones que pueden convertirse en errores conceptuales para los estudiantes; como es el caso del mal nombrado “cubo de...” que se utiliza para designar la presentación de algunos productos de uso doméstico como el caldo de gallina o la mantequilla; que representan realmente un prisma (ver figura). Un

⁹ Para tal caso, hemos decidido llamar a esta parte del cuerpo redondo como “borde”.

cubo desde su definición misma es “un hexaedro regular: un poliedro de seis caras cuadradas congruentes”.



DISEÑO DE LOS DESCRIPTORES

Para la clasificación y organización de las preguntas del test, primero se hace un estudio de los diferentes niveles de razonamiento que propone van Hiele los cuales están determinados por descriptores¹⁰ que son los encargados de “describir” en cual nivel está una persona según su razonamiento frente a determinado tema.

Entenderemos por descriptor lo siguiente:

“Un descriptor es una proposición o un conjunto de proposiciones que expresan de manera concisa los conceptos y fundamentos que debe poseer o alcanzar un estudiante para ubicarse en los niveles de razonamiento de Van Hiele, en el desarrollo del aprendizaje matemático”. (Valencia, G., 2006)¹¹

Dichos descriptores se definen y organizan según el concepto geométrico a trabajar.

Es necesario también hablar de los descriptores de separación, que son aquellos que precisan el paso al siguiente nivel; es decir, es lo que el estudiante sabe en el nivel inferior pero que no es suficiente, o le falta para pasar al siguiente nivel.

Se tendrá en cuenta para entender los descriptores de separación que van Hiele en su trabajo no los identifica de este modo sino que los denomina períodos y al respecto dice lo siguiente:

...El pasaje del Nivel 1 al Nivel 2 es un proceso complicado. También es difícil dado ayudar a un alumno con este proceso de aprendizaje. A veces puede ser útil dar un nombre al periodo entre Nivel 1 y Nivel 2; nosotros lo llamaremos Periodo 1 simplemente.

¹⁰ Es importante aclarar que en el trabajo de van Hiele no aparece la palabra “descriptor”; pero otros autores como Guillén y Gutiérrez utilizan este término para designar las características que debe cumplir una persona que esté en determinado nivel. Los descriptores hacen referencia al aspecto descriptivo del modelo.

¹¹ Esta definición fue construida en el espacio de conceptualización de nuestro trabajo de investigación: Seminario Integrativo XII y Práctica docente.

Después de que el segundo nivel de pensamiento se ha logrado, y Periodo 1 se completa. Nosotros entramos en Periodo 2 que tiene su extremo en el tercer nivel de pensamiento. Durante el proceso de aprendizaje del segundo periodo de geometría, la clasificación de propiedades de figuras geométricas es objeto de estudio. Con esta clasificación, el símbolo viejo consigue los nuevos contenidos, y al final del proceso de aprendizaje las figuras se entienden como un juego ordenado de propiedades. Pero en este periodo los nuevos símbolos también nacen, como 'la congruencia', 'la equivalencia', 'el paralelismo', y 'la continuidad'. Estos símbolos sólo pueden entenderse después de que el contexto del primer periodo se ha cambiado. Los nuevos símbolos son típicos para el nuevo contexto. (p. 63)

Del primer nivel ya se ha dicho: las “cosas visuales directas son en realidad como se le presenta a los estudiantes, como el estudiante habla de ella.”(Van Hiele, 1985) Un estudiante en el nivel de separación no puede entender ninguna serie de razonamientos de una figura determinada; él ve y reconoce qué figura es la que se le presenta pero no razona sobre ella. Por otra parte, el estudiante que logra el primer nivel no ve la importancia del conocimiento de la figura. Ya cuando se logra un nuevo nivel, el estudiante puede aplicar características operativas de una figura bien conocida.

Descriptores para el concepto de los sólidos



Imagen tomada de: <http://www.clopotel.ro/>

Los descriptores a tener en cuenta con el concepto de los sólidos son:

Nivel 1:

1. Usa propiedades imprecisas (cualidades) para comparar e identificar los cuerpos.
2. Utiliza referencias a prototipos visuales para caracterizar los cuerpos (compara pirámides con triángulos y cubos con cuadrados, entre otros).
3. Asocia los cuerpos a objetos de la vida cotidiana (un globo, una pirámide, una pelota...)
4. Reconoce la diferencia entre un cuerpo redondo y un poliedro.
5. Identifica las figuras geométricas que componen cada poliedro (cuadrados, triángulos, polígonos)
6. Incapacidad para usar propiedades como condiciones necesarias para determinar y nombrar un cuerpo geométrico.

Nivel 2:

1. Compara y describe los cuerpos explícitamente por medio de las propiedades de sus componentes.
2. Utiliza conceptos ya conocidos e implicados en el estudio de los sólidos como por ejemplo las figuras planas y las cualidades de cada una de ellas.
3. Construye definiciones personales de las diferentes clases de sólidos.
4. Reconoce las definiciones pero de manera aislada, y aún no establece relaciones entre los conceptos necesarios para el estudio de los sólidos.

Nivel 3:

1. Reconoce las definiciones y establece algunas relaciones entre los conceptos necesarios para el estudio de los sólidos.
2. Construye definiciones completas de tipos de cuerpos.
3. Clasifica los cuerpos de manera precisa según sus atributos matemáticos.
4. Encuentra y descubre patrones de construcción de los sólidos.
5. Hace uso explícito de enunciados como “si, entonces” en sus expresiones a cerca de los conceptos.
6. No comprende las funciones de los axiomas, teoremas y definiciones en la observación y construcción de poliedros.

Nivel 4:

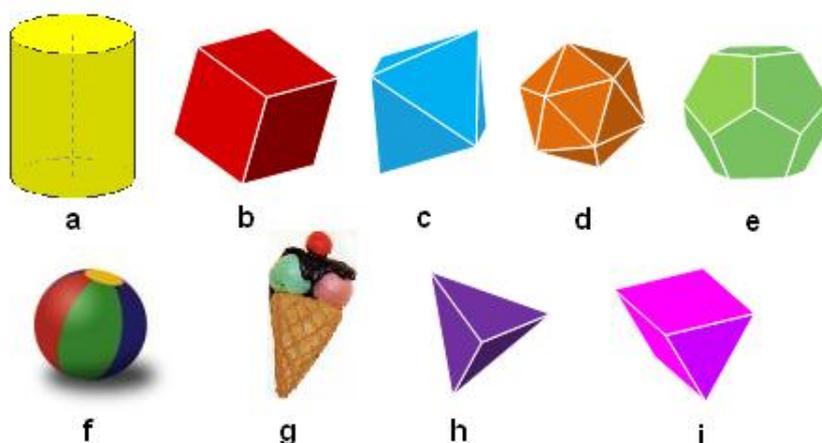
1. Comprende las funciones de los axiomas, teoremas y definiciones en la observación y construcción de poliedros
2. Produce espontáneamente conjeturas y se esfuerza por verificarlas deductivamente.
3. Confía en la demostración como autoridad final para decidir la verdad de una proposición matemática.
4. Acepta implícitamente los postulados de la geometría euclidiana.

Elaboración del test

Para el diseño del test, se inició con una recolección de preguntas que fueron recopiladas de diferentes textos y de nuestra apreciación personal respecto al concepto de los sólidos. Las opciones de respuesta fueron extraídas de diversas pruebas piloto que se realizaron a estudiantes universitarios y escolares de diferentes grados (ver anexo No. 2). A continuación se presentan unas preguntas, seguidas de algunas opciones de respuesta ofrecidas por los estudiantes (a, b, c...):

1. ¿A que se te parecen estos objetos?

Nota: esta colección de cuerpos se presentó de manera tangible y real a los estudiantes y el formato de respuesta será anexado al final



- a. Vaso, cilindro, tubo.
- b. Cubo, cuadrado, dado, caja cubo, caja, hexaedro.
- c. Un rubí, diamante, hexágono, prisma, octaedro, globo, rombo.
- d. Bote de basura, prisma, icosaedro, tuerca, pentágono.
- e. Figura de 12 lados, dodecaedro, casi circulo, dodecágono, pentágono, prisma.
- f. Balón, pelota, esfera, círculo, balón.
- g. Helado, cono.
- h. Triángulo, pirámide, pirámide de eguito, cuatro triangulados.
- i. Carpa, prisma triangular, choza.

2. ¿Sabes qué es un polígono?
- Forma geométrica.
 - Figura cerrada que donde comienza termina.
 - Algo de varias superficies.
 - Figura que tiene muchos lados.
 - Instrumento que utilizan para practicar tiro al blanco.
 - Figura geométrica cerrada formada por líneas rectas.
 - Figura geométrica de lados curvos y rectos.
3. ¿Es posible tener un polígono con menos de tres lados?
- No se puede.
 - No porque apenas hay dos lados.
 - Si. Un círculo tiene un solo lado.
4. ¿Qué crees que sea un poliedro?
- Figura geométrica de más de cinco lados matemáticos.
 - Es un polígono de no se cuántos lados.
 - Es un polígono de muchos lados.
 - Algo de varias superficies planas, líneas que forman triángulos, cuadros y puntos.

Test final y clasificación por niveles

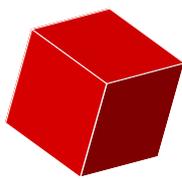
La elección de las preguntas está sujeta a los diferentes descriptores de cada nivel. Para realizar el posterior análisis estadístico fue necesario dar unos valores previos a las opciones de respuesta de cada pregunta para que el software SPSS clasifique a los estudiantes de una manera ordenada y confiable; así, la respuesta más acertada tiene un valor de la media 1 que hace que el estudiante pertenezca a este nivel y esté listo para pasar al siguiente. Las respuestas más cercanas tienen valores de 0.5, 0.6 y 0.8 (según criterio de los investigadores), donde el estudiante se encuentra en ese nivel pero le faltan más elementos conceptuales para pasar al siguiente y las respuestas incorrectas con un valor de 0 donde el estudiante no tiene los elementos necesarios para pertenecer

a ese nivel y se encuentra en el inmediatamente anterior. El test completo y de la manera como se les llevó a los estudiantes está anexo a este trabajo. (Ver anexo No. 3)

Nivel 1

Para el nivel 1, el siguiente bloque de preguntas corresponde a las referidas a propiedades visuales de los cuerpos geométricos desde su comparación y asociación a objetos de la vida cotidiana; usando propiedades imprecisas de éstos, reconociendo los polígonos que los componen y diferenciando los cuerpos redondos de los cuerpos poliédricos pero sin hacer clasificaciones específicas de ellos.

¿A qué se te parecen estos objetos? ¿Hay en tu casa o en tu entorno algo que se les parezca?



- 1. a. Cuadrado (0)
- b. Dado (0.6)
- c. Cubo (1)
- d. Hexaedro regular (1)
- e. b, c y d (0.8)



- 6. a. Dodecaedro (1)
- b. Hexágono (0)
- c. Casi círculo (0)
- d. Balón cuadrado (0.5)
- e. b y c (0)



- 2. a. Globo (0.6)
- b. Rombo (0)
- c. Rubí (0)
- d. Rombo 3D (0)
- e. Octaedro (1)



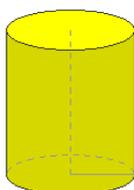
- 7. a. Decágono (0)
- b. Diamante (0.5)
- c. Hexágono (0)
- d. Icosaedro (1)
- e. Prisma (0)



- 3. a. Pirámide (0.6)
- b. Carpa (0.5)
- c. Triángulo (0)
- d. Prisma Triangular (1)
- e. Choza



- 8. a. Esfera (1)
- b. Pelota (0.8)
- c. Balón (0.8)
- d. Círculo (0)
- e. a, b y c (0.8)



- 4. a. Vaso (0.5)
- b. Cilindro (1)
- c. Tubo (0.5)



- 9. a. Helado (0.8)
- b. Cono (1)
- c. Triángulo (0)

d. Prisma (0)

d. Helado y cono (1)

e. Cono (0)

e. Cilindro (0)



5. a. Triángulo (0)

b. Pirámide de Egipto (0.6)

c. 4 triangulados (0.5)

d. Pirámide regular (1)

e. Ninguna de las anteriores (0)

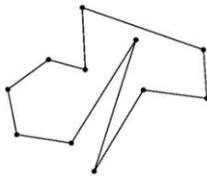
Para el nivel 2

Además de las preguntas del nivel 1¹², aparece este grupo que está más enfocado al reconocimiento de conceptos implicados en el estudio de los sólidos y las propiedades de sus componentes. Los estudiantes intentan articular sus concepciones visuales a ideas un poco más formales y hacen generalizaciones a través de la experimentación.

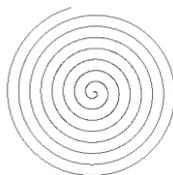
Reconocen las definiciones de manera mecánica y aislada, lo que hace que no establezcan relaciones entre los conceptos necesarios para el estudio de los sólidos.

Veamos:

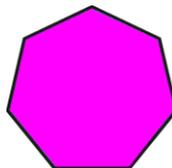
10. Observa las siguientes imágenes que se clasifican en polígonos y no polígonos:



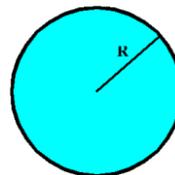
Polígono



No polígono



Polígono



No polígono

Elige la opción que se acerca a lo que es un polígono:

a. Figura que tiene muchos lados. (0.8)

b. Instrumento que utilizan para practicar tiro al blanco. (0)

c. Figura geométrica cerrada formada por líneas rectas. (1)

d. Figura geométrica de lados curvos y rectos. (0.3)

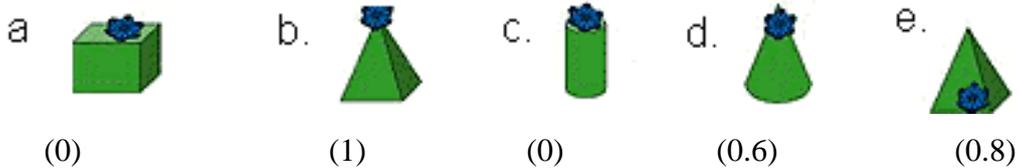
e. Ninguna de las anteriores. (0)

¹² Es necesario recordar que una persona no puede estar en un nivel superior, sin haber pasado por los niveles inferiores. De ahí, que se retomen las preguntas de los niveles anteriores al mencionado.

12. Los niños del curso celebraron el día del amor y la amistad. Luego de tener distintas actividades para conocerse mejor, intercambiaron obsequios hechos por ellos. Para retirarlos, había que seguir una pista.

Andrés también tiene regalo y su pista dice: estoy envuelto en un poliedro de caras verdes, tengo solo una base que me afirma y en una de mis caras laterales en forma de triángulo, llevo una hermosa flor azul en la parte de arriba.

Responde. ¿Cuál de estos paquetes es el regalo de Andrés?



13. ¿Es suficiente con tener el número de caras, vértices y aristas de un poliedro para identificarlo como tal?

- a. Si (1)
- b. No (0)
- c. Le faltan elementos (0)
- d. Le sobran elementos (0)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

14. Un poliedro tiene por caras triángulos equiláteros. Cuando se apoya sobre una de sus caras la disposición de éstas es la siguiente: una cara, seis caras, una cara. ¿De qué poliedro se trata?

- a. Pirámide (0)
- b. Bipirámide de base cuadrada (0.8)
- c. Octaedro (1)
- d. b y c (1)
- e. a y d (0)

17. Los poliedros que tienen todas las caras regulares e iguales ¿a qué familia de poliedros pertenecen?

- a. A los Arquimedianos (0.5)
- b. A las pirámides (0.2)
- c. Son cubos (0.2)
- d. Los regulares (1)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

Señala el nombre de la figura que cada adivinanza describe:

18. Soy un cuerpo geométrico con una sola cara plana redonda ¿Qué soy?

- a. El cilindro (0.5)
- b. El prisma (0)
- c. El cono (1)
- d. La esfera (0)
- e. Todas las anteriores (0)

19. Soy un cuerpo geométrico sin vértices ni aristas ¿Qué soy?

- a. No existe tal cuerpo (0)
- b. La esfera (1)
- c. Un balón (1)
- d. b y c (1)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

20. Si me utilizas seis veces, dibujarás un cubo ¿Qué soy?

- a. Una pirámide (0)
- b. Un cuadrado (1)
- c. Un triángulo (0)
- d. Un polígono cualquiera (0)
- e. Ninguno de los anteriores (0)

21. Simón pegó dos pirámides de base cuadrada idénticas por la cara de los cuadrados haciendo coincidir sus vértices. ¿Cuántas caras tiene el nuevo cuerpo geométrico que se formó? ¿Cuántas aristas? ¿Cuántos vértices?

- a. 6 caras, 12 aristas, 8 vértices (0.5)
- b. 8 caras, 12 aristas, 6 vértices (1)
- c. 9 caras, 10 aristas, 20 vértices (0)
- d. 12 caras, 6 aristas, 8 vértices (0.5)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

Resolución de los siguientes problemas:

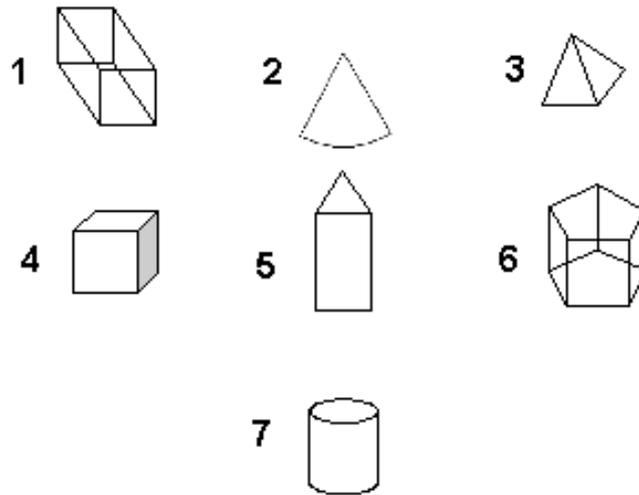
22. ¿Cuántas caras y aristas tienen 3 pirámides cuadradas?

- a. 25 caras y 24 aristas (0)
- b. 28 caras y 29 aristas (0)
- c. 5 caras y 8 aristas (0)
- d. 24 caras y 25 aristas (0)
- e. Ninguna de las anteriores (1)

26. De acuerdo a los cuerpos que observas a continuación y basados en las afirmaciones, elige la opción verdadera de acuerdo con las condiciones dadas:

- a. 1, 4, 2, 7 Son prismas (0)
- b. El 5 tiene tres vértices (0)
- c. 2, 3 Son pirámides (0)
- d. 4, 1 Tiene seis caras (1)

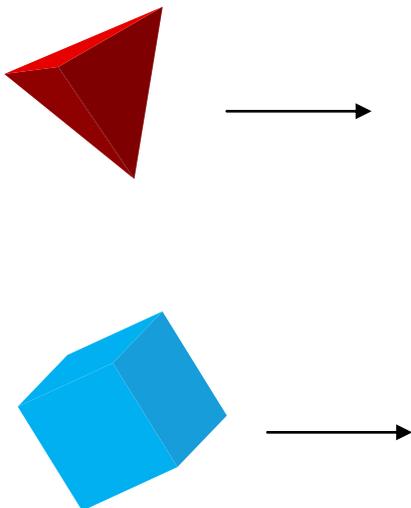
e. El 7 tiene siete caras y diez vértices (0)



Para el nivel 3

En el nivel tres, además de las preguntas de los niveles 1 y 2, se encuentran las preguntas que implican que los conceptos frente a las diferentes clases de sólidos estén claros; esto hace que se expresen atributos matemáticos como por ejemplo, establecer relaciones entre el número de caras, vértices y aristas y que se presenten patrones de construcción de dichos cuerpos geométricos (como sus plantillas).

11. ¿Puedes imaginar la plantilla que se genera al desdoblar un cuerpo? Construye la plantilla que se obtiene con el sólido de la izquierda, que se presenta a continuación y elige la opción que los nombra correctamente.



- a. triángulo y cubo (0)
- b. tetraedro y hexaedro (0.6)
- c. pirámide regular y cubo (0.8)
- d. Ninguna de las anteriores (0)
- e. b y c (1)

15. ¿Será posible partir un cubo en sólo pirámides?

- a. Si (1)
- b. No (0)
- c. Le faltan elementos (0)
- d. Le sobran elementos (0)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

En caso afirmativo, explica como lo harías, pero en caso negativo responde porque no es posible.

16. ¿Cómo hallarías la longitud de la diagonal de un cubo?

- a. Midiendo con regla. (0.4)
- b. Utilizando el teorema de Pitágoras. (0.6)
- c. Determinando la diagonal de una cara para utilizarla como el cateto de un triángulo rectángulo, y con este dato utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa que sería la medida que se necesita. (1)
- d. Ninguna de las anteriores (0)
- e. Todas las anteriores (0)

23. ¿Cuántas caras planas suman en total 3 cilindros, 2 esferas, 2 prismas rectangulares y 1 cono?

- a. 20 caras en total (0.6)
- b. 17 caras en total (0)
- c. 15 caras en total (0)
- d. 19 caras en total (1)
- e. 25 caras en total (0)

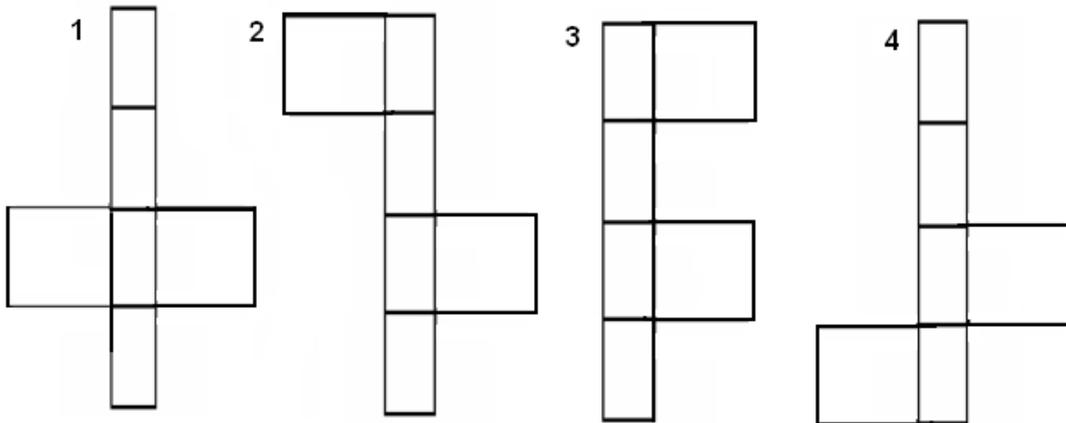
24. En un poliedro regular cinco aristas convergen en cada uno de sus vértices. ¿Qué poliedro es éste?

- a. Pentágono (0)
- b. Dodecaedro (0)
- c. Hexágono (0)
- d. Tetraedro (0)
- e. Icosaedro (1)

25. ¿Cómo determinar el volumen de una naranja?

- a. Exprimiéndole el jugo a la naranja (0.5)
- b. Pesando la naranja (0.4)
- c. Utilizando un recipiente con agua que tenga medidas e introduciendo la naranja en el mismo. (0.7)
- d. Hallar la longitud de la circunferencia (de la naranja) y el radio para obtener el volumen. (0.8)
- e. c y d son correctas (1)

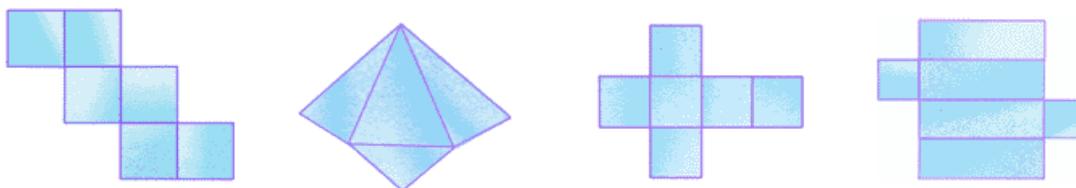
27. Una caja de fósforos es un objeto que tiene determinada forma geométrica. Teniendo en cuenta esta forma, reconoce su plantilla. Identifica cual de las opciones es verdadera.



- a. La figura (1) no es la plantilla. (0)
- b. La figura (3) es la plantilla. (0)
- c. Las figuras (2) y (3) son correctas. (0.3)
- d. Las figuras (1), (2) y (4) son correctas. (1)
- e. Ninguna de las anteriores respuestas. (0)

28. Señala la opción que enuncie el nombre del cuerpo que arman las siguientes plantillas.

NOTA: Los nombres deben ir en el orden que aparecen las gráficas



- a. Pirámide, Hexaedro, cubo, prisma (0)
- b. Hexaedro, diamante, prisma, cubo (0)
- c. Hexaedro, pirámide recta, hexaedro, prisma rectangular (1)
- d. Cubo, pirámide, cubo, anti prisma (0.5)

31. Imagina (u observa) un cubo suspendido por uno de sus vértices por un hilo, al cual se le ha hecho un corte horizontal por los vértices; que lo divide en sub-figuras. ¿Qué clase de figuras puedes imaginar (observar) que se forman?



Nota: a esta pregunta se anexará una hoja para graficar lo que crees que se forma.

Para el nivel 4

Como se ha mencionado en cada grupo, a este nivel corresponden las preguntas de los niveles 1,2 y 3 más la pregunta 29 y la situación 30, porque sus soluciones encierran todos los descriptores de los anteriores niveles. Para este momento es necesario que conozca los postulados axiomas y definiciones de la geometría euclidiana que le ayudan al estudiante a encontrarse en dicho nivel.

29. Los puntos medios de las aristas del tetraedro regular equidistan del centro, por tanto, este punto es también el centro de una esfera que toca todas las aristas del poliedro en sus puntos medios. A esta esfera se le llama esfera media. ¿Cómo hallar el radio de esta esfera?

- a. Construir un triángulo formado por las alturas de dos caras del poliedro, la paralela media de la cara que se encuentra entre estos dos segmentos construidos y la paralela media del triángulo isósceles; establecer una relación de semejanza entre estos dos triángulos en la que un lado de uno de ellos es el radio de la esfera.
- b. La única forma de hallar dicho radio, es por un método de análisis matemático avanzado. (0.4)

- c. Sólo se puede hallar teniendo una experiencia concreta (interacción física) con el objeto a estudiar y utilizando instrumentos de medida. (0.5)
- d. No está toda la información suficiente para resolver el problema. (0)
- e. Ninguna de las anteriores. (0)

30. Vamos a construir el siguiente cuerpo geométrico:

- Traza una circunferencia de radio O cualquiera.
- Inscribe el polígono de lados iguales A, B, C, D, E, F
- Sobre uno de los lados del hexágono generado en el paso anterior, construye otro polígono hacia el exterior de lados B, C, G, H .
- Sobre los dos lados AB y CD , construye los polígonos ABI y CDJ de lados iguales.
- Traza un segmento de recta que pase por el centro del polígono inscrito, uniendo los puntos A y D y que sea paralelo al segmento BC .
- Hazle pestañas alternadas a la figura que obtuviste en su parte exterior.
- Arma con la plantilla que acabas de construir un poliedro de 5 caras.
- Repite el ejercicio hasta obtener otro poliedro igual.
- Con los dos poliedros arma un tetraedro regular.
- Describe la estrategia que empleaste para hallar la solución.

Nota: a esta actividad se anexará una hoja para hacer dicha construcción.

Preguntas obligatorias de cada nivel

Para cada opción de respuesta en cada una de las preguntas del test se dará un porcentaje diferente el cual permitirá en el análisis de conglomerados, ubicar a los estudiantes en el nivel que corresponde según el valor de la opción elegida. De este modo, la opción que tenga como valor 1 es la opción más acertada según las condiciones de los descriptores que hace que el estudiante pertenezca a ese nivel y pueda pasar al otro. Los valores más cercanos a 1 serán como los descriptores de separación que hacen que esté en ese nivel pero aun no pueda pasar al siguiente. Las

opciones de respuesta con valores de 0 o muy cercanos a este, identifican al estudiante en el nivel inferior.

Por ejemplo, para el nivel 1 tenemos la pregunta: ¿A qué se te parece este objeto? ¿Hay en tu casa o en tu entorno algo que se les parezca?



5. a. Triángulo (0)
- b. Pirámide de Egipto (0.6)
- c. 4 triangulados (0.5)
- d. Pirámide regular (1)
- e. Ninguna de las anteriores (0)

La opción a vale 0 porque no corresponde al cuerpo tridimensional como tal, sino a una figura plana que lo compone haciendo referencia a un prototipo visual (pirámide con triángulo).

La opción b vale 0.6 –acercándose a 1- porque lo relaciona con algo del entorno poniendo énfasis en su característica tridimensional.

La opción c vale 0.5 pues aunque todavía utiliza el prototipo visual del triángulo, se le reconoce que por lo menos nombra los cuatro triángulos que lo componen.

La opción d vale 1 porque es la opción “correcta” que supera las características visuales del nivel 1 para entrar en las propiedades de los cuerpos del segundo nivel.

La opción e por obvias razones vale 0.

Así se da lugar a las preguntas obligatorias que son necesarias para pertenecer a determinado nivel pues cumplen con las condiciones de los descriptores de dicho nivel.

Nivel 1: 1 y 5. Haciendo la aclaración de que todas las preguntas del nivel 1 –que son similares en estructura- se refieren a la observación de las características visuales de los cuerpos geométricos; y siendo consecuentes con el nivel 1 de van Hiele, estas dos preguntas fueron seleccionadas como obligatorias porque se refieren a dichas características visuales de dos cuerpos geométricos muy conocidos en la vida cotidiana: el hexaedro regular y la pirámide regular.

Nivel 2: 17, 18, 19, 21, 22. Las preguntas de este nivel corresponden al análisis -por parte de los estudiantes- de propiedades de los cuerpos como número de caras, vértices, aristas, polígonos que los componen, clases de sólidos, entre otros, que impliquen un conocimiento de las cualidades y elementos de éstos de una manera informal.

Nivel 3: 11, 15, 24, 25. Para este nivel, estas preguntas implican un mayor razonamiento espacial, no solo desde lo visual sino desde las representaciones mentales que se posean de un cuerpo geométrico y las que debe construir para llegar a una respuesta. Para lograrlo debe tener claros los conceptos y conocer de manera precisa los atributos matemáticos de dichos cuerpos.

Nivel 4: 29 y 30: Estas preguntas exigen mayor razonamiento deductivo por parte de los estudiantes, además que la pregunta 30 es un caso muy especial, pues presenta de manera explícita el paso por todos los anteriores niveles hasta llegar a este nivel donde requiere tener claros axiomas, teoremas y definiciones para la construcción del cuerpo geométrico y hacer los análisis pertinentes.

RESULTADOS

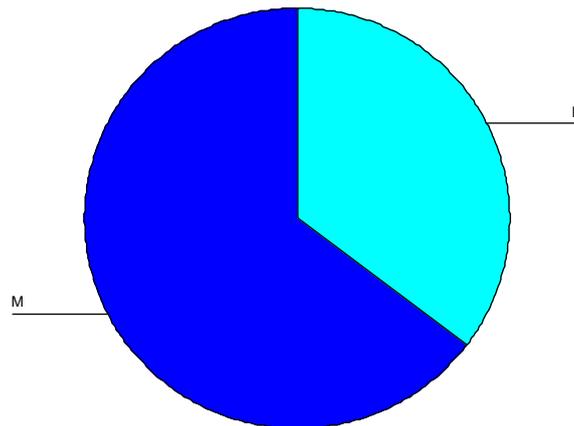
ANÁLISIS PARA ALGUNAS DE LAS VARIABLES ESTUDIADAS

Análisis estadístico para la variable sexo

SEXO DE LOS ESTUDIANTES

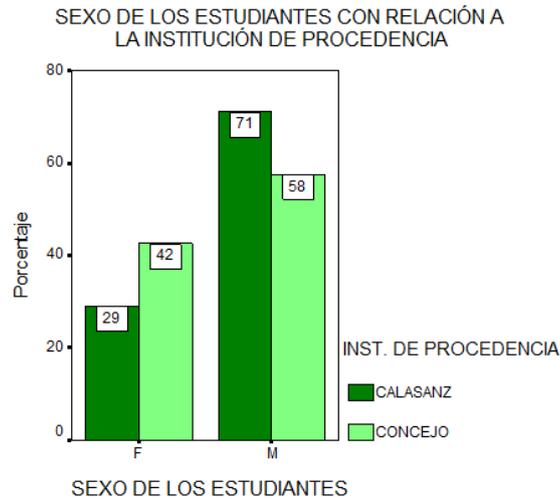
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	F	25	35.2	35.2	35.2
	M	46	64.8	64.8	100.0
	Total	71	100.0	100.0	

SEXO DE LOS ESTUDIANTES



Al realizar una interpretación de esta tabla, junto con su gráfica, es evidente que en la muestra no aleatoria hay más hombres que mujeres, teniendo los hombres el 65% del total de la muestra no aleatoria y las mujeres el 35% restante.

A nivel general de las Instituciones participantes, la moda en esta variable es el género masculino.



Para este nuevo gráfico de datos agrupados, observamos que en el Colegio Calasanz hay mayor cantidad de hombres con un 71% y un 29% de mujeres del total de la muestra de esta institución. En la Institución Educativa Concejo de Medellín se cuenta con un 58% de hombres y un 42% de mujeres del total de la muestra de esta institución.

Análisis estadístico para la variable Edad

Estadísticos para la variable edad de los encuestados

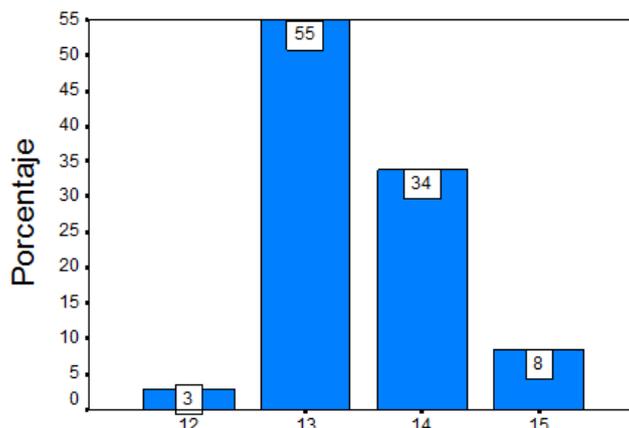
EDAD DE LOS ESTUDIANTES

N	Válidos	71
	Perdidos	0
Media		13.48
Mediana		13.00
Moda		13

EDAD DE LOS ESTUDIANTES

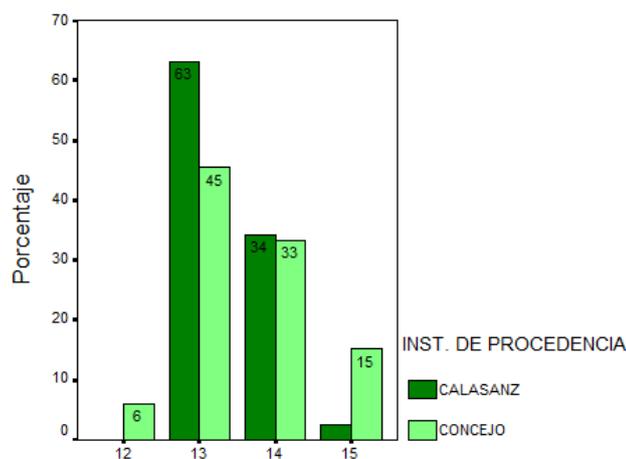
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos 12	2	2.8	2.8	2.8
13	39	54.9	54.9	57.7
14	24	33.8	33.8	91.5
15	6	8.5	8.5	100.0
Total	71	100.0	100.0	

EDAD DE LOS ESTUDIANTES



En el gráfico se hace evidente que la moda en el grupo de encuestados es 13 años que es la edad promedio para este grado. Son pocos los estudiantes que tienen 12 años y los que tienen 15 años.

EDAD DE LOS ENCUESTADOS RESPECTO A LA INSTITUCIÓN DE PROCEDENCIA

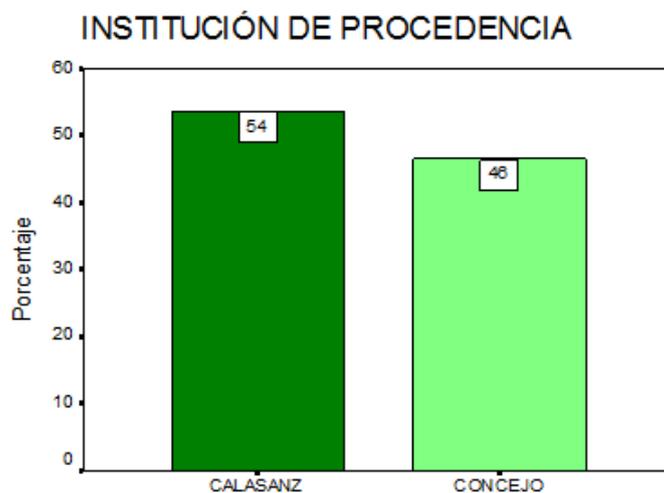


Respecto a la Institución de procedencia, en las dos la moda sigue siendo la misma y es de 13 años.

Análisis de la variable Institución de procedencia de los estudiantes

INSTITUCIÓN DE PROCEDENCIA

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CALASANZ	38	53.5	53.5	53.5
	CONCEJO	33	46.5	46.5	100.0
	Total	71	100.0	100.0	

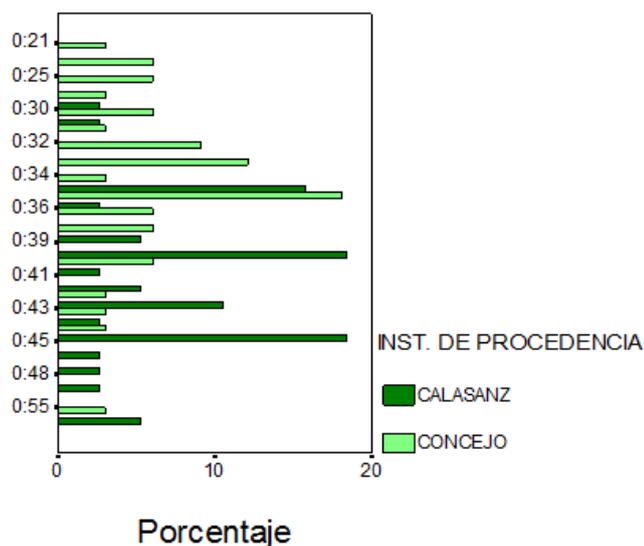


En este gráfico de barras se muestra claramente que 54% del total de los estudiantes que desarrollaron el test, pertenecen al colegio Calasanz de Medellín y el 46% pertenecen a la Institución Educativa Concejo de Medellín.

Respecto a esta variable, se realizarán análisis más profundos con las respuestas del test y la clasificación de los estudiantes en el nivel que les corresponde.

Análisis e interpretación del tiempo empleado en desarrollar el test

TIEMPO EMPLEADO PARA DESARROLLAR EL TEST RESPECTO A CADA INSTITUCIÓN



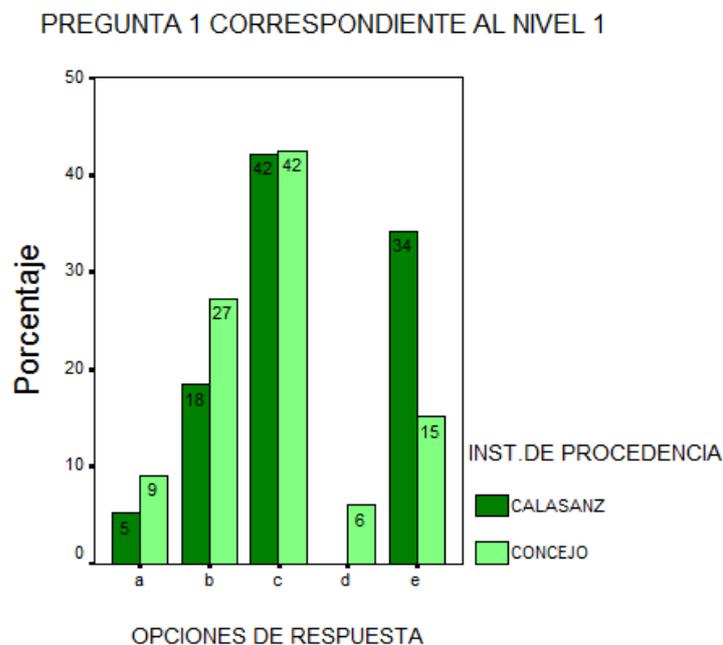
Más de la mitad de la población del Colegio Calasanz se tomaron 34 minutos o más para resolver el test.

Más de la mitad de los estudiantes del concejo se tomaron entre 38 minutos o menos para resolver el test.

Varios estudiantes de la I. E. Concejo de Medellín, parecen no haber dedicado el tiempo suficiente a la solución del test, lo que no permitió un buen razonamiento y compromiso para desarrollarlo. En cuanto al Calasanz, La mayoría de los estudiantes le dedicó entre 40 y 55 minutos a la solución del test, tomándose el tiempo necesario para hacer estudios a los cuerpos que fueron llevados como material de apoyo.

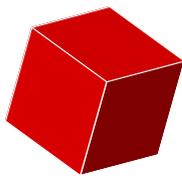
ANÁLISIS DE ALGUNAS DE LAS PREGUNTAS OBLIGATORIAS DE CADA NIVEL

A continuación se presentarán diferentes gráficas que corresponden a algunas de las preguntas obligatorias del test con sus respectivas opciones de respuesta, así como los porcentajes de respuesta de cada institución.



Pregunta 1

¿A qué se te parecen estos objetos? ¿Hay en tu casa o en tu entorno algo que se les parezca?



1. a. Cuadrado (0)
- b. Dado (0.6)
- c. Cubo (1)
- d. Hexaedro regular (1)
- e. b, c y d (0.8)

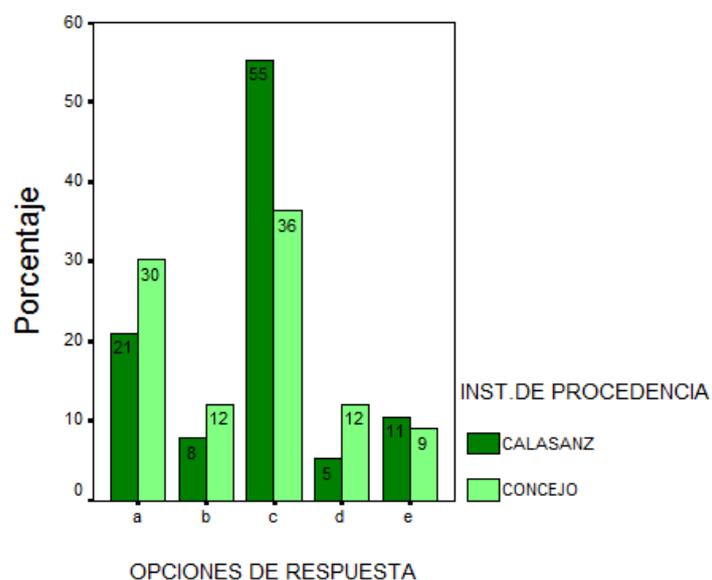
Esta pregunta pertenece al nivel 1 y hace parte de las condiciones obligatorias para pertenecer a este nivel.

El 5% de los estudiantes del Colegio Calasanz y el 9% del Concejo de Medellín respondieron que la figura representada se les parece a un cuadrado (opción a).

El 18% de los estudiantes del Calasanz y 27% de los estudiantes del Concejo respondieron que la figura presentada se les parecía a un dado (opción b).

Para la opción c: cubo, las dos instituciones concuerdan con un 42% del total de los estudiantes. En la opción d, sólo el Concejo de Medellín respondió con un 6% que se le parecía a un hexaedro regular. Para la opción e que encerraba las respuestas b, c y d, el Colegio Calasanz respondió con un 34% que se le parecía a un dado, un cubo y un hexaedro regular, mientras que en el Concejo de Medellín sólo el 15% aceptó esta opción de respuesta. De acuerdo a los resultados anteriores, los estudiantes están muy familiarizados con este cuerpo y lo asocian a lo que conocen según sus experiencias.

PREGUNTA 18 CORRESPONDIENTE AL NIVEL 2



Pregunta 18

Soy un cuerpo geométrico con una sola cara plana redonda ¿Qué soy?

En esta gráfica para la opción (a), el 21% de los estudiantes del Colegio Calasanz respondieron que el cuerpo geométrico correspondiente, era el cilindro. Y la IE Concejo de Medellín el 30% admitió esta misma respuesta.

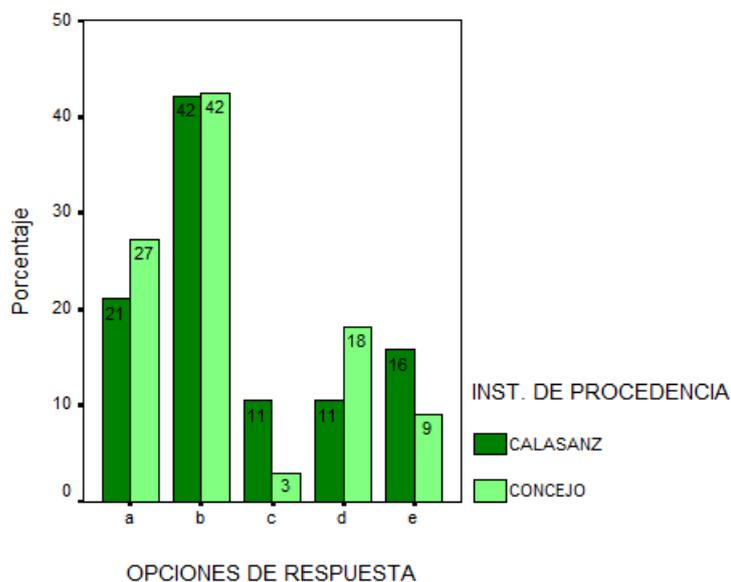
El 8% de los estudiantes del Colegio Calasanz y el 12% de los estudiantes del Concejo de Medellín respondieron que dicho cuerpo era el prisma (opción b).

Con una mayoría del 55% y 36% de los estudiantes del Colegio Calasanz y Concejo de Medellín respectivamente se optó por la opción (c): el cono.

Para la opción (d), 5% de los estudiantes del Colegio Calasanz eligieron la esfera al igual que el 12% de los estudiantes del Concejo de Medellín.

Ante esta pregunta, más de la mitad de los estudiantes del Calasanz tienen claro que la figura pedida era el cono y solo el 36% del Concejo tiene clara esta pregunta.

PREGUNTA 21 CORRESPONDIENTE AL NIVEL 2



Pregunta 21

Simón pegó dos pirámides de base cuadrada idénticas por la cara de los cuadrados y de lados iguales. ¿Cuántas caras tiene el nuevo cuerpo geométrico que se formó? ¿Cuántas aristas? ¿Cuántos vértices?

El 21% de los estudiantes del Colegio Calasanz y el 27% de la IE Concejo de Medellín, eligieron la opción (a): 6 caras, 12 aristas, 8 vértices.

Para la opción (b) 8 caras, 12 aristas, 8 vértices; la más acertada, el 42% de los estudiantes de ambas instituciones asintió en esta respuesta.

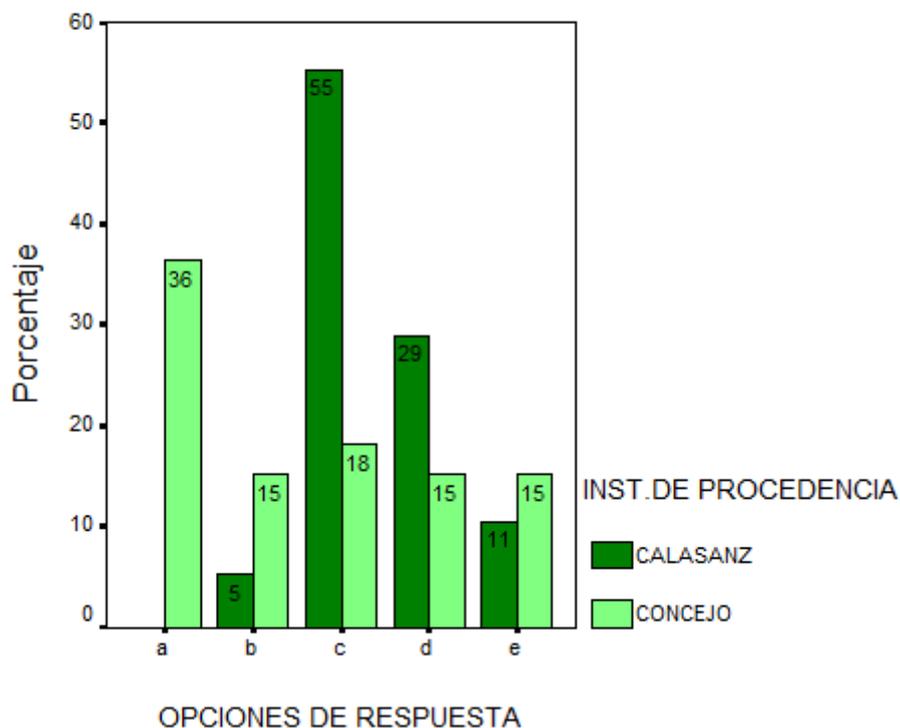
En la opción (c) 9 caras, 10 aristas, 20 vértices, el 11% y el 3% de los estudiantes del Colegio Calasanz y I.E. Concejo de Medellín respectivamente, eligieron esta respuesta.

El 11% y el 18% de los estudiantes del Colegio Calasanz y La I.E. Concejo de Medellín eligieron la opción (d) como 12 caras, 6 aristas y 8 vértices.

El 16% de los estudiantes del Calasanz y el 9% de los estudiantes del Concejo de Medellín, prefirieron la opción (e): “ninguna de las anteriores”.

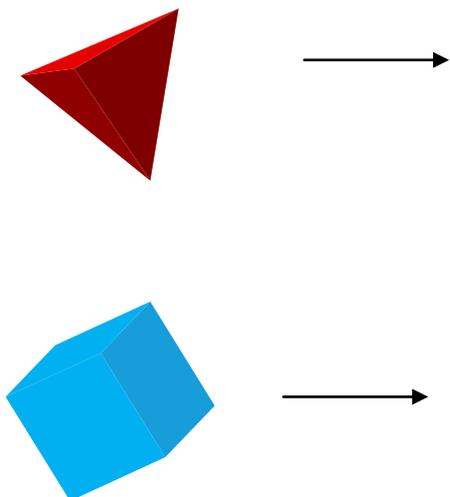
La mayor parte de la muestra elegida presenta confusiones entre los conceptos de vértice, cara y arista. Los conocen, pero al nombrarlos dudan de “cuál es cuál”; por tal motivo les dio dificultad elegir la opción correcta.

PREGUNTA 11 CORRESPONDIENTE AL NIVEL 3



Pregunta 11

¿Puedes imaginar la plantilla que se genera al desdoblar un cuerpo? Construye la plantilla que se obtiene con el sólido de la izquierda, que se presenta a continuación y elige la opción que los nombra correctamente.

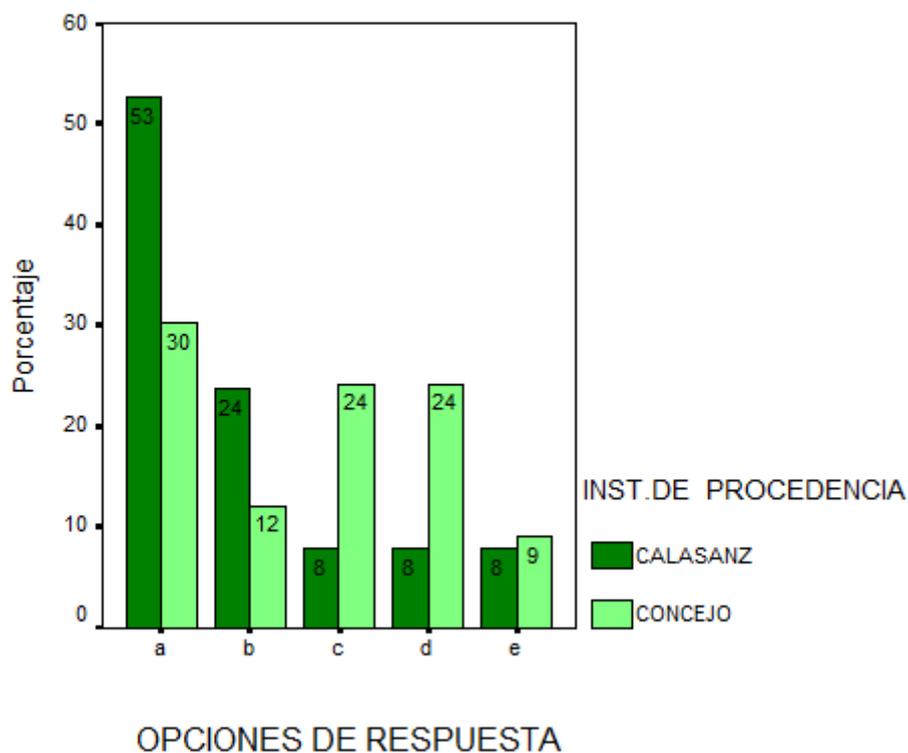


Para esta gráfica se observa claramente que la moda corresponde al 55% de los estudiantes del Calasanz con la opción (c): pirámide regular y cubo; sin ser la misma moda del Concejo para esta opción (18% de los estudiantes). Consecuente con ello la moda del Concejo de Medellín se encuentra en la opción (a): triangulo y cubo, con un 36% de los estudiantes y siendo un dato atípico ya que en el colegio Calasanz ningún estudiante optó por la opción de respuesta (a).

La opción (d): “ninguna de las anteriores”, corresponde a la respuesta dada por el 29% de los estudiantes del Calasanz y el 15% de los estudiantes del Concejo de Medellín.

Esto indica que algunos de los estudiantes de ambas instituciones no tienen claras las definiciones de lo que son estos cuerpos y sus respectivos nombres así como la diferencia de lo plan o lo bidimensional con lo tridimensional, ya que los siguen asociando a figuras planas y no a cuerpos que poseen un volumen.

PREGUNTA 24 CORRESPONDIENTE AL NIVEL 3



Pregunta 24

En un poliedro regular cinco aristas convergen en cada uno de sus vértices. ¿Qué poliedro es éste?

El 53% de los estudiantes del Calasanz y el 30% de los estudiantes del Concejo contestaron la opción (a): pentágono, siendo el 53% la moda del Calasanz.

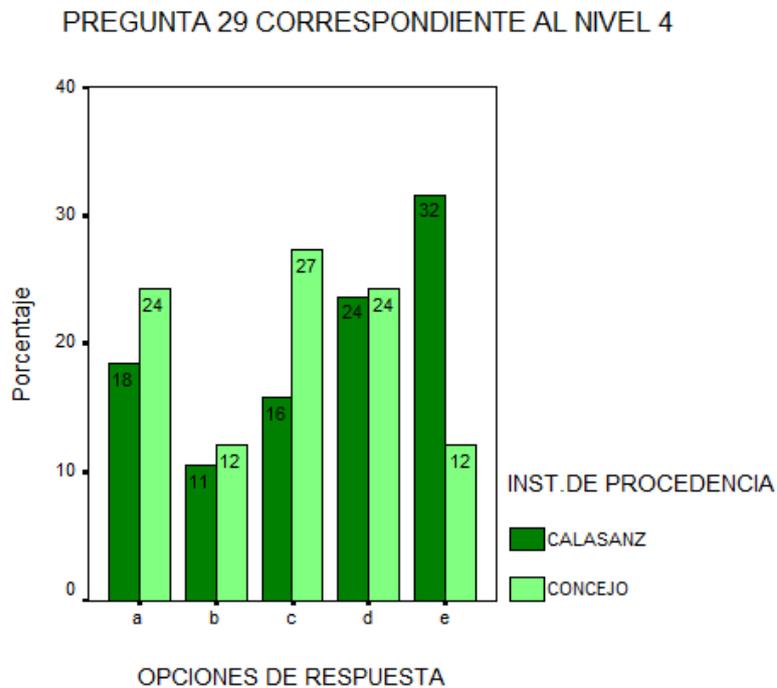
El 24% de los estudiantes del Calasanz y el 12% de los estudiantes del Concejo respondieron la opción (b): dodecaedro.

Se presenta una particularidad con las opciones (c): hexágono y (d): tetraedro, donde el Calasanz y el Concejo tienen un 8% y 24% respectivamente en ambas opciones.

Una segunda particularidad es que las dos instituciones tuvieron el menor porcentaje en la opción (e): icosaedro, que es la acertada.

Esto indica que pocos de los estudiantes participantes se atrevieron a tomar los cuerpos geométricos presentados como material didáctico y hacer su respectivo estudio para dar una respuesta acertada a esta pregunta.

Los dos gráficos siguientes corresponden a las preguntas únicas y obligatorias del nivel 4 (preguntas 29 y 30)



Pregunta 29

Los puntos medios de las aristas del tetraedro regular equidistan del centro, por tanto, este punto es también el centro de una esfera que toca todas las aristas del poliedro en sus puntos medios. A esta esfera se le llama esfera media. ¿Cómo hallar el radio de esta esfera?

Para la opción (a) el 18% de los estudiantes del Calasanz y el 24% de los estudiantes del concejo respondieron que se debía “construir un triángulo formado por las alturas de dos caras del poliedro, la paralela media de la cara que se encuentra entre estos dos segmentos construidos y la paralela media del triángulo isósceles; establecer una relación de semejanza entre estos dos triángulos en la que un lado de uno de ellos es el radio de la esfera”.

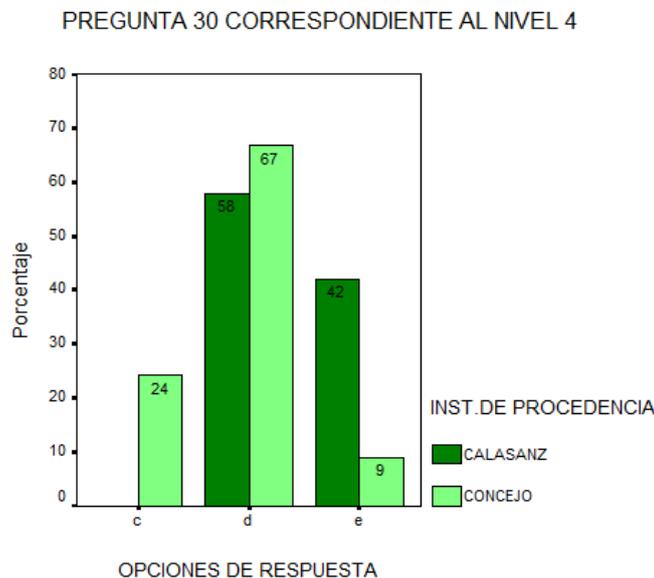
En la opción (b): “La única forma de hallar dicho radio, es por un método de análisis matemático avanzado”, el 11% de los estudiantes del Calasanz y el 12% de los estudiantes del Concejo de Medellín eligieron esta opción como respuesta.

El 16% y el 27% de los estudiantes del Calasanz y el Concejo de Medellín respectivamente aceptaron la respuesta (c): como que “sólo se puede hallar teniendo una experiencia concreta (interacción física) con el objeto a estudiar y utilizando instrumentos de medida”.

El 24% de las dos instituciones acepta que “no está toda la información suficiente para resolver el problema” como opción (d).

El 32% y el 12% del Calasanz y el Concejo de Medellín respectivamente dicen que la opción es la (e): “ninguna de las anteriores”.

En esta gráfica se evidencia que hubo un porcentaje notable de la muestra que eligió la opción correcta (a), pero esto no garantizó su clasificación dentro del nivel 4. La razón por lo que esto se dio, fue porque no justificaron los conocimientos necesarios para el nivel 3. Con estos resultados se verifica nuevamente la tesis de van Hiele donde nadie puede estar en un nivel superior sin haber pasado por los anteriores.



Pregunta 30

Para esta pregunta no hay opciones de respuesta que utilicen los estudiantes ya que aquí se construye un rompecabezas de un cuerpo geométrico llamado: rompecabezas tetraédrico. De este modo se crearon unas opciones que valoran las acciones realizadas por el estudiante que son las siguientes con sus respectivas medias o valores para el análisis de conglomerados o clasificación por niveles:

- a. Construye las plantillas del sólido y arma el rompecabezas tetraédrico (1)
- b. Construye las plantillas del cuerpo geométrico (0.6)
- c. Arma el rompecabezas tetraédrico (0.6)
- d. No hace nada. (0)
- e. No sigue instrucciones en la construcción de la plantilla del cuerpo geométrico. (0)

En la opción (c) solo el 24% de los estudiantes del Concejo de Medellín armó el rompecabezas tetraédrico.

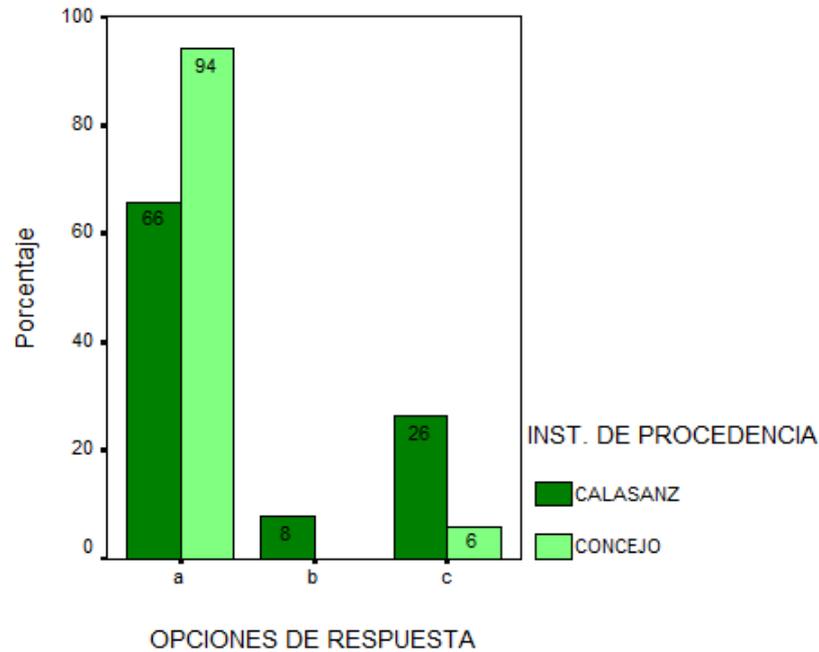
En la opción (d), el 58% de los estudiantes del Calasanz y el 67% de los estudiantes del Concejo de Medellín “no hace nada”; es decir no construye la plantilla ni arma el rompecabezas.

En la opción (e): “no sigue instrucciones en la construcción de la plantilla del cuerpo geométrico”, hay una gran diferencia entre los porcentajes obtenidos en cada una de las instituciones, mientras el Calasanz posee un 42%, el Concejo de Medellín obtuvo un 9%.

Aquí se observa claramente que la mayoría de los estudiantes del Concejo no hacen nada para dar solución a este rompecabezas, sin dejar de lado a los estudiantes del Calasanz que también están incluidos en que la mayoría no hizo nada.

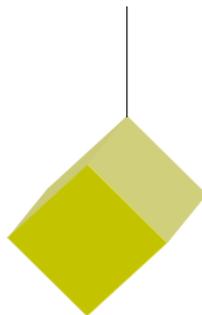
Esta situación del test era importante para la clasificación dentro del nivel 4, puesto que si lograba construir el rompecabezas y a la vez armarlo, era porque tenía claros los conceptos que aparecían en las instrucciones. Aún así, consideramos pertinente que si alguien sólo lo armaba o sólo lo construía, también podría pertenecer a este nivel, ya que para realizar alguna de estas dos acciones debe tener una claridad conceptual muy puntual.

PREGUNTA 31 CORRESPONDIENTE AL NIVEL 3



Pregunta 31

Imagina (u observa) un cubo suspendido por uno de sus vértices por un hilo, al cual se le ha hecho un corte horizontal por los vértices que lo divide en sub-figuras. ¿Qué clase de figuras puedes imaginar (observar) que se forman?

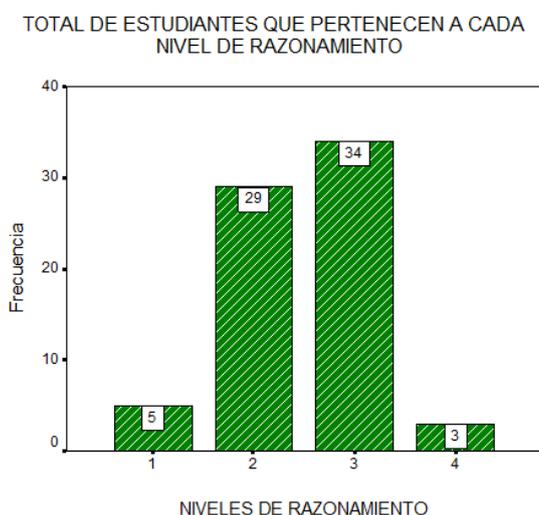


En esta pregunta tampoco se presentan opciones de respuesta pues se necesita que el estudiante represente lo que imagina; así que se desarrollaron otras opciones para valorar sus acciones:

- a. No se imagina nada. (0)
- b. Se imagina y representa algo correcto. (1)
- c. Se imagina y representa algo incorrecto. (0.5)

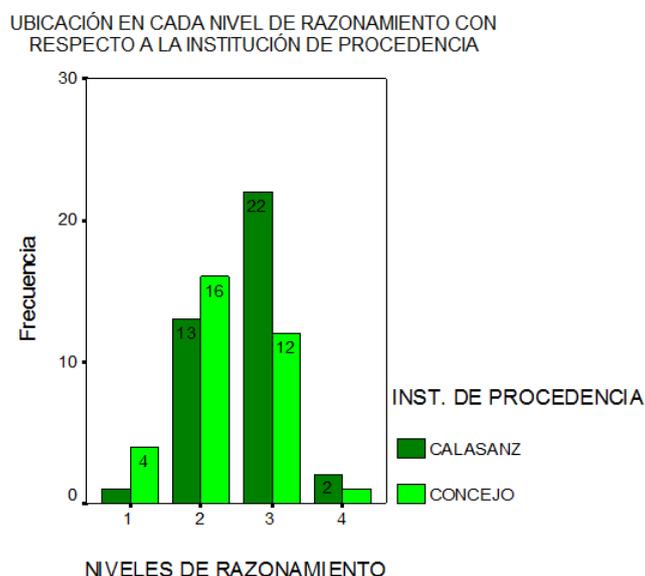
Podemos ver que en las dos instituciones en la opción (a), en su gran mayoría no se imaginan nada, pues hay ausencia de sus representaciones mentales en las hojas de respuesta. Solo un 8% del colegio Calasanz se imagina y representa algo correcto y un 26% hace lo contrario, mientras que un 6% del Concejo de Medellín se imagina algo incorrecto. (Ver anexo No. 4)

ANÁLISIS DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN LOS DIFERENTES NIVELES DE RAZONAMIENTO SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE.



Según el gráfico anterior se puede decir que 33 de los 71 estudiantes que desarrollaron el test, se encuentran en el nivel tres de razonamiento; 29 se encuentran en el nivel dos, 5 se encuentran en el nivel uno y 4 se encuentran en el nivel cuatro.

A pesar de ser una muestra de un mismo grado de escolaridad y de edades no muy lejanas, no toda la población está en un mismo nivel. Aquí se justifica más la tesis de van Hiele donde sostiene que no hay ningún factor que intervenga en la clasificación de las personas, esta clasificación se hace según el nivel de razonamiento que tengan frente a determinado tema o concepto.



En el siguiente gráfico se ilustra la organización de los estudiantes por niveles según la institución a la que corresponden. Dicha interpretación se realiza con porcentajes.

El 3% de los estudiantes del Calasanz pertenecen al nivel 1 de razonamiento, el 34 % pertenecen al nivel 2, el 48% pertenecen al nivel 3 y el 5% pertenecen al nivel 4. Ahora, respecto al concejo, el 12% de los estudiantes se hallan ubicados en el nivel 1 de razonamiento, el 48% se hallan ubicados en el nivel 2, el 33% están en el nivel 3 y el 6% se hallan ubicados en el nivel 4 de razonamiento.

De lo anterior y como lo representa la gráfica podemos decir que:

Más de la mitad de los estudiantes del grado octavo del colegio Calasanz pertenecen al nivel de razonamiento tres y solo el 5% de los estudiantes de esta institución pertenecen al nivel 4 de razonamiento. En cambio, el porcentaje más significativo de los estudiantes del concejo es 48% y se hallan ubicados en el nivel 2 de razonamiento, mientras que el 6% de los estudiantes pertenecen al nivel 4 de razonamiento.

En el grado octavo del concejo de Medellín existe mucha población en el nivel 2, mientras que en el Calasanz la mayoría está ubicada en el nivel 3.

Clasificación de cada uno de los estudiantes en el nivel de razonamiento que le corresponde

En los dos siguientes cuadros se ve claramente la cantidad de estudiantes por nivel y el nivel al que corresponde cada estudiante en su respectiva institución.

Es necesario recordar que en esta investigación los conglomerados son los niveles de razonamiento de van Hiele, y es importante porque quien realice el test puede saber con exactitud en qué nivel está cada uno de los individuos.

El número de caso que aparece en la tabla, indica el número de la hoja de respuestas del estudiante, la cual contiene su nombre, institución y tiempo empleado. El lector verá algunos casos significativos que serán presentados en el desarrollo de este ítem. Otros serán presentados como anexos junto con la hoja de cálculo donde están todos los datos en SPSS.

Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	5,000
	2	29,000
	3	34,000
	4	3,000
Válidos		71,000
Perdidos		.000

Pertenencia a los conglomerados

Número de caso	INSTITUCIÓN DE PROCEDENCIA	Conglomerado	Distancia
1	CALASANZ	3	2,482
2	CALASANZ	2	3,088
3	CALASANZ	3	2,300
4	CALASANZ	3	3,068
5	CALASANZ	3	3,005
6	CALASANZ	2	3,178
7	CALASANZ	3	2,241
8	CALASANZ	1	3,370
9	CALASANZ	2	2,913
10	CALASANZ	2	2,964
11	CALASANZ	2	2,844
12	CALASANZ	3	3,173
13	CALASANZ	3	2,632
14	CALASANZ	2	3,066
15	CALASANZ	2	3,192
16	CALASANZ	3	2,168
17	CALASANZ	3	1,954
18	CALASANZ	3	3,048
19	CALASANZ	3	2,884
20	CALASANZ	2	3,023
21	CALASANZ	3	2,973
22	CALASANZ	3	3,119
23	CALASANZ	2	3,070
24	CALASANZ	3	2,895
25	CALASANZ	3	2,674
26	CALASANZ	3	2,037
27	CALASANZ	3	2,216
28	CALASANZ	3	2,778
29	CALASANZ	3	3,348
30	CALASANZ	3	2,944
31	CALASANZ	2	2,622
32	CALASANZ	4	2,280
33	CALASANZ	2	2,807
34	CALASANZ	2	2,828
35	CALASANZ	3	2,961
36	CALASANZ	2	2,898
37	CALASANZ	4	3,015
38	CALASANZ	3	2,691
39	CONCEJO	1	2,702
40	CONCEJO	2	2,993
41	CONCEJO	3	3,100
42	CONCEJO	2	2,765
43	CONCEJO	2	3,229
44	CONCEJO	2	2,924
45	CONCEJO	3	2,805
46	CONCEJO	2	2,939
47	CONCEJO	3	3,324
48	CONCEJO	2	2,846
49	CONCEJO	4	3,008
50	CONCEJO	1	3,434
51	CONCEJO	2	3,392
52	CONCEJO	3	2,383
53	CONCEJO	3	3,007
54	CONCEJO	3	3,007
55	CONCEJO	2	3,257
56	CONCEJO	2	2,823
57	CONCEJO	3	3,477
58	CONCEJO	2	3,146
59	CONCEJO	1	3,113
60	CONCEJO	2	2,964
61	CONCEJO	3	3,294
62	CONCEJO	2	3,006
63	CONCEJO	2	3,031
64	CONCEJO	3	2,867
65	CONCEJO	2	2,443
66	CONCEJO	2	2,293
67	CONCEJO	3	3,403
68	CONCEJO	1	3,233
69	CONCEJO	2	3,474
70	CONCEJO	3	3,081
71	CONCEJO	3	3,087

Análisis de la clasificación de niveles para algunos estudiantes

Estudiantes del nivel 4

Colegio Calasanz de Medellín

Nombre: No. 32 en la tabla de datos

Edad: 13 años

Analizando la hoja de respuestas de este estudiante, podemos observar que verdaderamente pertenece al nivel 4 de razonamiento según el modelo de van Hiele, pues la gran mayoría de sus respuestas tienen valores de las medias entre 0.8 y 1, y solo cinco respuestas tienen valor de 0.

Al organizar las preguntas por los niveles, encontramos que sus opciones de respuestas corresponden a los valores de las medias más altas, incluyendo las obligatorias de cada nivel, razón por la cual el software SPSS clasificó a este estudiante en el nivel 4.

Dentro de las preguntas obligatorias solo encontramos errores en la respuesta a la pregunta 22 del nivel 2, la respuesta a la pregunta 24 del nivel 3 y a la respuesta de la pregunta 30 del nivel 4. Constatando las preguntas con sus respuestas podemos suponer que en la pregunta 22 el error fue de cálculos numéricos, en la pregunta 24 confundió los elementos de un poliedro con otro, ya que confundió las aristas del icosaedro con los lados del dodecaedro y en la pregunta 30 a pesar de que avanzó mucho en la construcción, no siguió las instrucciones correctamente. (Ver anexo No. 5)

Nombre: No. 37 en la tabla de datos

Edad: 13 años

Con este estudiante se realizó el mismo proceso de análisis de sus respuestas y en ellas encontramos que a pesar de que sus medias más altas son 0.8 y 1, no tiene tanta cantidad de respuestas acertadas como el estudiante anterior, sin embargo, las opciones que eligió tienen unas medias que se acercan a 1 y por esto el software lo clasifica dentro del nivel 4; lo que quiere decir que las distancias de las respuestas están mas cerca del conglomerado 4 o lo que es lo mismo, del nivel 4.

Así, para el nivel 1 responde acertadamente las dos preguntas obligatorias, para el nivel 2 responde 3 de las cinco preguntas obligatorias, para el nivel 3 responde 1 obligatoria y para el nivel 4 responde una obligatoria. (Ver anexo No. 6)

Institución Educativa Concejo de Medellín

Nombre: No. 49 en la tabla de datos

Edad: 14 años

Con este estudiante pasa algo especial. En su hoja de respuestas es posible evidenciar que tiene 9 respuestas sin ningún acierto que corresponde a una media o valor de 0, tiene 4 respuestas con medias entre 0.4 y 0.6, y tiene 18 respuestas con la media entre 0.8 y 1. La mitad mas uno del total de preguntas del test están de alguna manera bien contestadas, y dentro las que tienen medias de valor 0.6 se encuentra la número 30 porque, aunque no logro obtener una media de valor 1 -ya que no pudo hacer la construcción pertinente para conseguir el rompecabezas tetraédrico- este estudiante fue capaz de armar el tetraedro con un rompecabezas que fue puesto a disposición como recurso didáctico, que era parte de lo que se le pedía. Si este estudiante pudo armar el tetraedro es porque tenía claras las características de este cuerpo y porque en su mente hizo todas las conexiones posibles entre sus conocimientos para llegar a armar el tetraedro. Por tal motivo puede ser clasificado dentro del nivel 4. (Ver anexo No. 7)

Estudiantes del nivel 3

Colegio Calasanz

Nombre: No. 1 en tabla de datos

Edad: 13

En esta estudiante es claro ver porqué no está ubicada en el nivel 4. Al observar su hoja de respuestas, no aparece ninguna opción acertada para las preguntas del nivel 4 – que sólo son 2-, ni sus opciones de respuesta para estas dos preguntas de este nivel son aproximadas a 1, ya que sus valores son de 0. Pero respecto a las preguntas del nivel 1, 2 y 3, acierta a la gran mayoría de las obligatorias y no obligatorias, lo que la hace estar en el nivel 3 de razonamiento. (Ver anexo No. 8)

Institución Educativa Concejo de Medellín.

Nombre: No. 47 en la tabla de datos

Edad: 13 años

Este estudiante pertenece a este nivel por la misma razón que la estudiante anterior.

Así, para las preguntas obligatorias y no obligatorias: en el nivel 1, eligió las opciones que están entre 0.5 y 1. Para el nivel 2 sus respuestas tienen una media de 1, para el nivel 3 también una media general de 1, para el nivel 4 no responde ninguna de las preguntas propuestas con la opción acertada, razón por la cual está clasificado dentro del nivel 3. (Ver anexo No. 9)

Estudiantes del nivel 2

Los estudiantes que se encuentran en este nivel, en las respuestas al test no lograron acertar a la mayoría de las respuestas de las preguntas asignadas para el nivel 3, y mucho menos las del nivel 4, lo que hace que sean ubicados en el nivel 2. Esto es porque en el modelo de van Hiele, nadie puede estar en un nivel superior, sin haber superado el anterior.

Colegio Calasanz de Medellín

Nombre: No.2 en la tabla de datos

Edad: 13 años

Esta estudiante está clasificada en este nivel, porque responde en forma adecuada la mayoría de las preguntas propuestas para el nivel 1 y 2 o elige algunas de las opciones que tienen la media más alta de estas. Con respecto al nivel 3, solo contesta 4 preguntas acertadamente de las 9 que son propuestas para este nivel, además, no contesta ninguna de las propuestas para el nivel 4. Por tal razón no puede estar ubicada en el nivel 3 sino en el nivel 2. (Ver anexo No. 10)

Institución Educativa Concejo de Medellín

Nombre: No. 43 en la tabla de datos

Edad: 14 años

Este estudiante está clasificado en este nivel por razones similares a la estudiante anterior, con la diferencia que este no logra responder de manera acertada ninguna de las preguntas obligatorias del nivel 3 y solo unas pocas de las no obligatorias del mismo nivel. Respecto al nivel 2, logra contestar acertadamente o con medias altas las preguntas obligatorias para este nivel. Esta característica hace que por medio del análisis de conglomerados sea ubicado en el nivel 2. Es importante aclarar que no contesto ninguna de las preguntas propuestas para el nivel 4. (Ver anexo No. 11)

Estudiantes del nivel 1

Los estudiantes que se encuentran en este nivel, no lograron acertar a la mayoría de las respuestas de las preguntas asignadas para el nivel 2,3 y mucho menos las del nivel 4, lo que hace que sean ubicados en el nivel 1. Esto es porque en el modelo de van Hiele, nadie puede estar en un nivel superior, sin haber superado el anterior.

Colegio Calasanz de Medellín

Nombre: No. 15 en la tabla de datos

Edad: 13 años

Este estudiante al contestar el test, sólo logró acertar a menos de la mitad de la cantidad de preguntas del nivel 2 y a una mínima parte del nivel 3. Además, no logro ninguna respuesta acertada en el nivel 4. Como no logra la totalidad o la mayoría en el nivel 2, no puede estar clasificado en este y mucho menos en el 3 o 4. (Ver anexo No. 12)

El lector puede verificar lo anterior con la hoja de respuestas de estos estudiantes y las preguntas del test que están asignadas para cada nivel que ya han sido presentadas en este trabajo como anexos.

También puede observar la hoja donde están todos los datos (Ver anexo No. 13).

CONCLUSIONES

- Este trabajo nos permitió valorar la importancia de crear herramientas didácticas -como un test- que nos ayuden a vislumbrar el razonamiento de los estudiantes; y considerar que antes de su diseño es sumamente primordial tener un buen manejo de los temas a emplear dentro de éste y estar dispuestos a diseñar varias propuestas antes del que sería el instrumento final (en nuestro caso el test), las cuales permitan evidenciar que cada uno de los elementos que en él vayan a aparecer tengan que ver con el objetivo de su diseño y el objetivo de estudio.
- El test diseñado para este trabajo es un instrumento importante para la clasificación de los estudiantes en cada nivel, ya que su elaboración fue a partir de una revisión rigurosa de textos y al estudio profundo de la teoría de van Hiele, para determinar los descriptores pertinentes en cada nivel y por ende, clasificar las preguntas pertenecientes a cada uno de ellos. Este instrumento sirvió para clasificar adecuadamente a cada estudiante según las respuestas que ofrecía en cada una de las preguntas.
- Como se puede observar con los datos de algunos estudiantes ubicados en cada nivel y las evidencias presentadas (hojas de respuesta), el software SPSS es un instrumento que permite realizar la clasificación de un grupo de personas en el nivel que le corresponda frente al concepto de los sólidos tomando como referencia el Modelo de van Hiele y el test realizado, por medio del análisis de conglomerados. Dicho análisis de conglomerados permite acercarse a cada estudiante de acuerdo a los valores asignados, a las opciones de respuesta en el nivel correspondiente según la distancia que tenga respecto a los otros niveles. Los cálculos matemáticos que se hacen para esta clasificación son exactos y acertados, ya que al comparar algunos de los estudiantes ubicados en los diferentes niveles, se puede constatar que efectivamente el nivel en que ha sido asignado, concuerda con su trabajo realizado al contestar el test.

- El tiempo que utilizó cada estudiante en el desarrollo del test fue importante para ser clasificado en un nivel determinado según el modelo de van Hiele, y aunque el objetivo del trabajo no era comparar las dos instituciones colaboradoras, se puede concluir que en la de carácter oficial existe un poco menos de compromiso académico por parte de los estudiantes que en la de carácter privado. Esto se evidencia al observar los resultados obtenidos y ver que en la I.E. Concejo de Medellín sólo un estudiante pertenece al nivel 4 y en el Calasanz existen dos en este nivel. En el Concejo la mayoría (48%) de la muestra está en el nivel 2 y en el Calasanz la mayoría (58%) está en el nivel 3. Otra prueba de esta conclusión es que al realizar el estudio del tiempo empleado en contestar el test, se constató que mientras que en la I.E. Concejo de Medellín se demoraron entre 20 minutos y 40 minutos para resolver la prueba, siendo el tiempo más empleado el de 30 minutos, en el Calasanz de Medellín se tomaron entre 30 minutos y 55 minutos. Realmente se tomaron un buen tiempo para razonar en el Calasanz, según las exigencias del test.
- Algunos de los estudiantes que colaboraron con esta investigación tienen muy buena imaginación. En algunos casos (que fueron mostrados en el análisis de la pregunta 31) varios estudiantes lograron hacer mentalmente la reproducción correcta de lo que se les pedía en la pregunta. Esto es realmente importante porque indica que tienen un pensamiento espacial que va en muy buen desarrollo, ya que les permite imaginar acertadamente cosas que no están viendo en la realidad.
- Así como lo sustenta van Hiele en su tesis *Structure and Insight*, ni el grado de escolaridad ni la edad de una persona, ni el sexo determinan el nivel en el que se encuentre. Ejemplo de esta afirmación en este trabajo investigativo es que todos los que contestaron el test pertenecen al grado octavo, tienen edades diferentes y habían mujeres como hombres, y en toda esta muestra se lograron clasificaciones desde el nivel 1 hasta el nivel 4.
- Se concluye; al igual que van Hiele, que no es posible estar en un nivel superior sin haber pasado por los niveles anteriores. En los estudiantes encuestados se

pudo observar que si no contestaban el número adecuado de las preguntas asignadas a cada nivel, no podía pertenecer a este nivel sino al nivel inmediatamente anterior.

- Desde la experiencia de realización del test y el análisis de sus respuestas, se puede constatar que los estudiantes que hicieron uso de los recursos didácticos disponibles para su solución obtuvieron mejores resultados en sus razonamientos, que aquellos que hicieron caso omiso al material. Y de aquí mismo se reconoce la importancia de la utilización de los recursos didácticos en el aula de clase; donde los estudiantes interactúen con éstos, observen sus propiedades y puedan razonar y sacar conclusiones para resolver diversas situaciones en contextos escolares y de la vida cotidiana.
- Esta investigación nos permite concientizarnos como maestros del trabajo realizado en el aula de clase, ya que es importante conocer como están los estudiantes frente a determinado concepto para no tener una “mortalidad” académica cuando se esté evaluando dicho tema. Por ejemplo, en la muestra estudiada, la mayoría de los estudiantes no tienen claros los conceptos geométricos para hacer construcciones o comprender los pasos para realizarlas (ver análisis de pregunta 30). Por lo tanto, el maestro a cargo debe hacer un refuerzo y mediar esa transición de ese “no saber y no poder” a ese “sí poder y sí saber”, que en palabras técnicas o del Modelo de van Hiele, significa pasar de un nivel a otro.
- Con este trabajo investigativo un maestro puede saber en qué nivel de razonamiento se encuentran sus estudiantes frente al concepto de los sólidos para así abordarlo de la manera más adecuada y lograr obtener mejores resultados en el proceso de aprendizaje de los mismos, ya que si sabe en qué nivel están los integrantes de su grupo, podrá tener un punto de partida para una enseñanza pertinente y no excluyente de aquellos que se consideren “no entienden lo que se está enseñando”.

BIBLIOGRAFÍA

Crowley, ML. (1987): The van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M. (1987), p. 1-16

Díaz, L. (1996). *Recreo matemático* 1, 2, 3, 4, 5. Editorial Voluntad.

Echavarría, C. (2000). *Construcción del tetraedro, icosaedro y octaedro*. Guías aula taller. Medellín.

Hernández, R., Fernández, C. & otros. (2004). *Metodología de la investigación*. 3^o Edición. (p. 21). Chile: McGraw –Hill.

Jaime, A., Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Llinares, MV Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar: Sevilla, España, p. 306-308.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares y áreas obligatorias*. (p. 130). Santa Fe de Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1994). *Ley General de Educación*. (p. 45). Santa Fe de Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares Básicos de competencias en Matemáticas*. (p. 31). Santa Fe de Bogotá: Magisterio.

Microsoft Corporation. (2005). *Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta*.

Montoya, E. (2004). *Cuerpos Geométricos. Guías aula taller*. Medellín.

Monsalve, M., Beltrán, Y., Echavarría, C. (2001). *Cuadernos pedagógicos n. 16*. (p. 97). Medellín: Universidad de Antioquia.

Pérez, María C. (2005). *Matemática activa Pitágoras 8°*. Editorial PEI Ltda. (p. 253)

Resnick, L. & Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Sánchez, A. (2005). *Símbolos 4*. (p. 312). Bogotá: Editorial Voluntad.

Van Hiele, P. (1985) *Structure and Insight: A Theory mathematics Education*. Nueva York: Academic Press.

Fuentes electrónicas

Sectormatematica.com. *Geometría*. Recuperado el 17 marzo de 2007. Disponible en: <http://www.sectormatematica.cl/geometria.htm>

wikipedia.com. *El cono*. Recuperado el 19 de junio de 2008. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Cono_%28geometría%29

clopotel.ro. 2007. *Evaluación (imagen)*. Recuperado el 13 de julio. Disponible en: <http://www.clopotel.ro/>

Cafferata, S., Mamani, G. *Mosaicos o teselados*. Recuperado el 23 de noviembre de 2006. Disponible en: <http://www.geocities.com/teselados/>.

Liceopaula.com. *Cuerpos geométricos*. Recuperado el 19 de Mayo de 2008. Disponible en: http://www.liceopaula.com.ar/Areas/Exactas_y_natur/naturales/Matematica/Cuerpos_geometricos.htm

Monografías.com. *La Pirámide*. Recuperado el 20 de Abril de 2008 Disponible en: <http://www.monografias.com/trabajos10/geom/geom.shtml#pira>

Wikipedia.com *La Esfera*. Recuperado el 20 de Abril de 2008. Disponible en <http://es.wikipedia.org/wiki/Esfera>

Wikipedia.com. *La geometría*. Recuperado el 20 de Abril de 2008. Disponible en: http://es.wikipedia.org/wiki/Cono_%28geometr%C3%ADa%29

Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa. *Poliedros regulares*. Recuperado el 20 de Abril de 2008. Disponible en: <http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/polied4.htm>

ANEXOS

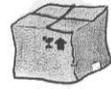
Anexo No. 1



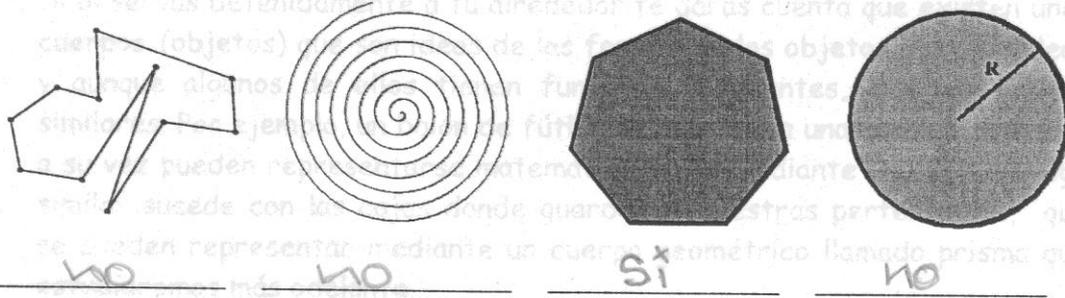
Anexo No. 2: PRUEBAS PILOTO

KRISTIAN SUAREZ

Cuerpo	Se parece a:	Borde curvo	Borde recto	Borde con limite	Borde sin limite	
	VASO	X			X	RUEDA
	CUBRADO		X	X		DESUSA
	ROMBO		X	X		SE DESUSA
	Hexagono.		X	X		DESUSA
	Forma de Pentagono		X	X		DESUSA
	Pentagono	X		X		RUEDA y DESUSA
	PELOTA CIRCULO	X			X	RUEDA

	VASO	X			X	RUEDA
	Circulo	X			X	RUEDA
	X		X	X		DESUSA
	BALON "Circulo"	X			X	RUEDA
	caja cuadro		X	X		DESUSA
	HELADO Triangulo	X		X		RUEDA
	Triangulo		X	X		DESUSA
	cuadrado dados		X	X		DESUSA

8. Observa las siguientes imágenes y escribe debajo de cada una de ellas, cuál es un polígono y cuál no.

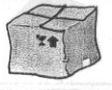


9. ¿Es posible tener un polígono con menos de tres lados? NO = POLÍGONO
APENAS HAY 2 LADOS.

10. Representa con los palillos tu respuesta y explícalo.

11. ¿Qué crees que sea un poliedro? FIGURA GEOMÉTRICA
DE MÁS DE 5 LADOS MATEMÁTICOS.

Cuerpo	Se parece a:	Borde curvo	Borde recto	Borde con límite	Borde sin límite	
	a un vaso	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Rueda
	a un cubo	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	destiza
	una caja de balineta	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	destiza
	a un Rubi	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Rueda
	se parece a un bote de Basura. (Prisma)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	destiza
	se parece a una figura de 72 lados	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	destiza
	a un balón de water polo	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Rueda

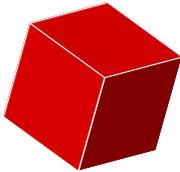
	un cilindro					Rueda
	un círculo esferal					Rueda
	a un triángulo					desliza
	un balón					Rueda
	a una caja					desliza
	un helado					Rueda
	una pirámide					desliza
	unos dados					desliza



Anexo No. 3: TEST REALIZADO

A PARTIR DE LA MANIPULACIÓN DE DIVERSOS MEDIADORES, ¿EN QUÉ NIVEL DE RAZONAMIENTO SE ENCUENTRAN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO 8° FRENTE AL CONCEPTO DE LOS SÓLIDOS? (TEST)

¿A qué se te parecen estos objetos? ¿Hay en tu casa o en tu entorno algo que se les parezca?



1. a. Cuadrado
- b. Dado
- c. Cubo
- d. Hexaedro regular
- e. b, c y d



6. a. Dodecaedro
- b. Hexágono
- c. Casi círculo
- d. Balón cuadrado
- e. b y c



2. a. Globo
- b. Rombo
- c. Rubí
- d. Rombo 3D
- e. Octaedro



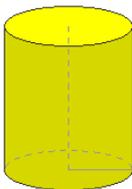
7. a. Decágono
- b. Diamante
- c. Hexágono
- d. Icosaedro
- e. Prisma



3. a. Pirámide
- b. Carpa
- c. Triángulo
- d. Prisma Triangular
- e. Choza



8. a. Esfera
- b. Pelota
- c. Balón
- d. Círculo
- e. a, b y c



4. a. Vaso
- b. Cilindro
- c. Tubo
- d. Prisma
- e. Cono

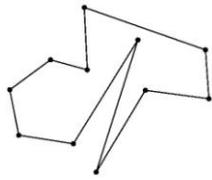


9. a. Helado
- b. Cono
- c. Triángulo
- d. Helado y cono
- e. Cilindro

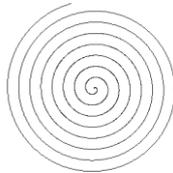


5. a. Triángulo
- b. Pirámide de Egipto
- c. 4 triangulados
- d. Pirámide regular
- e. Ninguna de las anteriores

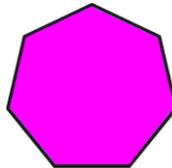
10. Observa las siguientes imágenes que se clasifican en polígonos y no polígonos:



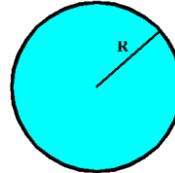
Polígono



No polígono



Polígono

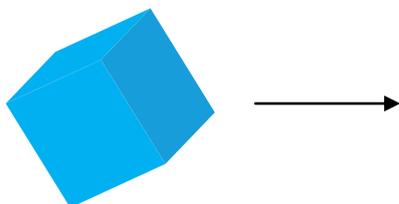
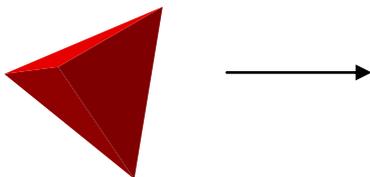


No polígono

Elige la opción que se acerca a lo que es un polígono:

- Figura que tiene muchos lados.
- Instrumento que utilizan para practicar tiro al blanco.
- Figura geométrica cerrada formada por líneas rectas.
- Figura geométrica de lados curvos y rectos.
- Ninguna de las anteriores.

11. ¿Puedes imaginar la plantilla que se genera al desdoblar un cuerpo? Construye la plantilla que se obtiene con el sólido de la izquierda, que se presenta a continuación y elige la opción que los nombra correctamente.

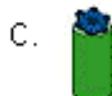


- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a. triángulo y cubo | d. Ninguna de las anteriores |
| b. tetraedro y hexaedro | e. b y c |
| c. pirámide regular y cubo | |

12. Los niños del curso celebraron el día del amor y la amistad. Luego de tener distintas actividades para conocerse mejor, intercambiaron obsequios hechos por ellos. Para retirarlos, había que seguir una pista.

Andrés también tiene regalo y su pista dice: estoy envuelto en un poliedro de caras verdes, tengo solo una base que me afirma y en una de mis caras laterales en forma de triángulo, llevo una hermosa flor azul en la parte de arriba.

Responde. ¿Cuál de estos paquetes es el regalo de Andrés?



13. ¿Es suficiente con tener el número de caras, vértices y aristas de un poliedro para definirlo como tal?

- a. Si
- b. No
- c. Le faltan elementos
- d. Le sobran elementos
- e. Ninguna de las anteriores

14. Un poliedro tiene por caras triángulos equiláteros. Cuando se apoya sobre una de sus caras la disposición de éstas es la siguiente: una cara, seis caras, una cara. ¿De qué poliedro se trata?

- a. Pirámide
- b. Bipirámide de base cuadrada
- c. Octaedro
- d. b y c
- e. a y d

15. ¿Será posible partir un cubo en sólo pirámides?

- a. Si
- b. No
- c. Le faltan elementos
- d. Le sobran elementos
- e. Ninguna de las anteriores

En caso afirmativo, explica como lo harías, pero en caso negativo responde porque no es posible.

16. ¿Cómo hallarías la longitud de la diagonal de un cubo?

- a. Midiendo con regla.
- b. Utilizando el teorema de Pitágoras.
- c. Determinando la diagonal de una cara para utilizarla como el cateto de un triángulo rectángulo, y con este dato utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa que sería la medida que se necesita.
- d. Ninguna de las anteriores.
- e. Todas las anteriores.

17. Los poliedros que tienen todas sus caras regulares e iguales ¿a qué familia de poliedros pertenecen?

- a. A los Arquimedianos
- b. A las pirámides
- c. Son cubos
- d. Los regulares
- e. Ninguna de las anteriores.

Señala el nombre de la figura que cada adivinanza describe:

18. Soy un cuerpo geométrico con una sola cara plana redonda ¿Qué soy?

- a. El cilindro
- b. El prisma
- c. El cono
- d. La esfera
- e. Todas las anteriores

19. Soy un cuerpo geométrico sin vértices ni aristas ¿Qué soy?

- a. No existe tal cuerpo (0)
- b. La esfera (0.8)
- c. Un balón (0.6)
- d. b y c
- e. Ninguna de las anteriores

20. Si me utilizas seis veces, dibujarás un cubo ¿Qué soy?

- a. Una pirámide
- b. Un cuadrado
- c. Un triángulo
- d. Un polígono cualquiera
- e. Ninguno de los anteriores

21. Simón pegó dos pirámides de base cuadrada idénticas por la cara de los cuadrados y haciendo coincidir sus vértices. ¿Cuántas caras tiene el nuevo cuerpo geométrico que se formó? ¿Cuántas aristas? ¿Cuántos vértices?

- a. 6 caras, 12 aristas, 8 vértices
- b. 8 caras, 12 aristas, 6 vértices
- c. 9 caras, 10 aristas, 20 vértices
- d. 12 caras, 6 aristas, 8 vértices
- e. Ninguna de las anteriores

Resolución de los siguientes problemas:

22. ¿Cuántas caras y aristas tienen 3 pirámides cuadradas?

- a. 25 caras y 24 aristas
- b. 28 caras y 29 aristas
- c. 5 caras y 8 aristas
- d. 24 caras y 25 aristas
- e. Ninguna de las anteriores

23. ¿Cuántas caras planas suman en total 3 cilindros, 2 esferas, 2 prismas rectangulares y 1 cono?

- a. 20 caras en total
- b. 17 caras en total
- c. 15 caras en total
- d. 19 caras en total
- e. 25 caras en total

24. En un poliedro regular cinco aristas convergen en cada uno de sus vértices. ¿Qué poliedro es éste?

- a. Pentágono
- b. Dodecaedro
- c. Hexágono
- d. Tetraedro
- e. Icosaedro

25. ¿Cómo determinar el volumen de una naranja?

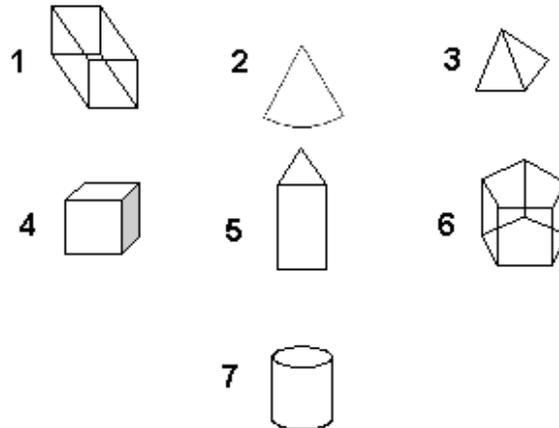
- a. Exprimiéndole el jugo a la naranja
- b. Pesando la naranja
- c. Utilizando un recipiente con agua que tenga medidas e introduciendo la naranja en el mismo.
- d. Hallar la longitud de la circunferencia (de la naranja) y el radio para obtener el volumen.

e. c y d son correctas

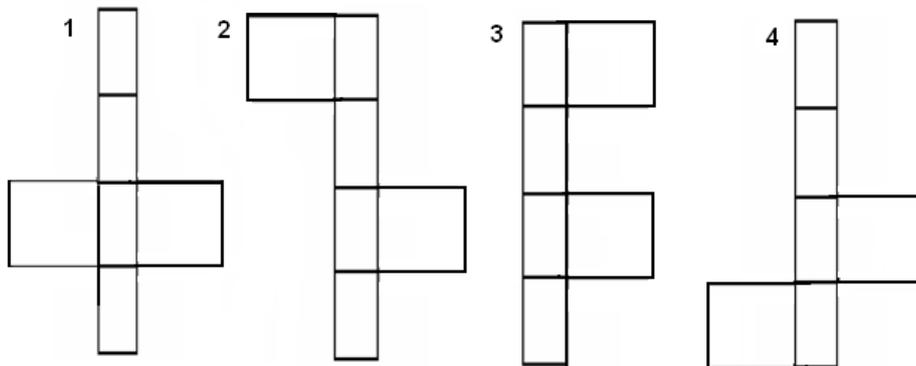
26. De acuerdo a los cuerpos que observas a continuación y basados en las afirmaciones, elige la opción verdadera de acuerdo con las condiciones dadas:

- a. 1, 4, 2, 7 Son prismas
- b. El 5 tiene tres vértices
- c. 2, 3 Son pirámides

- d. 4, 1 Tiene seis caras
- e. El 6 tiene siete caras y diez vértices.



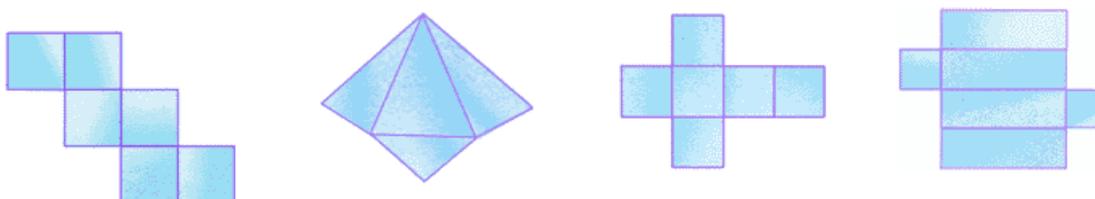
27. Una caja de fósforos es un objeto que tiene determinada forma geométrica. Teniendo en cuenta esta forma, reconoce su plantilla. Identifica cual de las opciones es verdadera.



- a. La figura (1) no es la plantilla.
- b. La figura (3) es la plantilla.
- c. Las figuras (2) y (3) son correctas.
- d. Las figuras (1), (2) y (4) son correctas.
- e. Ninguna de las anteriores respuestas.

28. Señala la opción que enuncie el nombre del cuerpo que arman las siguientes plantillas.

NOTA: Los nombres deben ir en el orden que aparecen las gráficas



- | | |
|--------------------------------------|---|
| | c. Hexaedro, pirámide recta, hexaedro, prisma rectangular |
| a. Pirámide, Hexaedro, cubo, prisma. | |
| b. Hexaedro, diamante, prisma, cubo. | d. Cubo, pirámide, cubo, anti prisma. |

29. Los puntos medios de las aristas del tetraedro regular equidistan del centro, por tanto, este punto es también el centro de una esfera que toca todas las aristas del poliedro en sus puntos medios. A esta esfera se le llama esfera media. ¿Cómo hallar el radio de esta esfera?

- Construir un triángulo formado por las alturas de dos caras del poliedro, la paralela media de la cara que se encuentra entre estos dos segmentos construidos y la paralela media del triángulo isósceles; establecer una relación de semejanza entre estos dos triángulos en la que un lado de uno de ellos es el radio de la esfera.
- La única forma de hallar dicho radio, es por un método de análisis matemático avanzado.
- Sólo se puede hallar teniendo una experiencia concreta (interacción física) con el objeto a estudiar y utilizando instrumentos de medida.
- No está toda la información suficiente para resolver el problema.
- Ninguna de las anteriores.

30. Vamos a construir el siguiente cuerpo geométrico

- Traza una circunferencia de radio O cualquiera.
- Inscribe el polígono de lados iguales A, B, C, D, E, F
- Sobre uno de los lados del hexágono generado en el paso anterior, construye otro polígono hacia el exterior de lados B, C, G, H .
- Sobre los dos lados AB y CD , construye los polígonos ABI y CDJ de lados iguales.
- Traza un segmento de recta que pase por el centro del polígono inscrito, por los puntos A y D y que sea paralelo al segmento BC .
- Hazle pestañas alternadas a la figura que obtuviste en su parte exterior.
- Arma con la plantilla que acabas de construir un poliedro de 5 caras.
- Repite el ejercicio hasta obtener otro poliedro igual.
- Con los dos poliedros arma un tetraedro regular.
- Describe la estrategia que empleaste para hallar la solución.

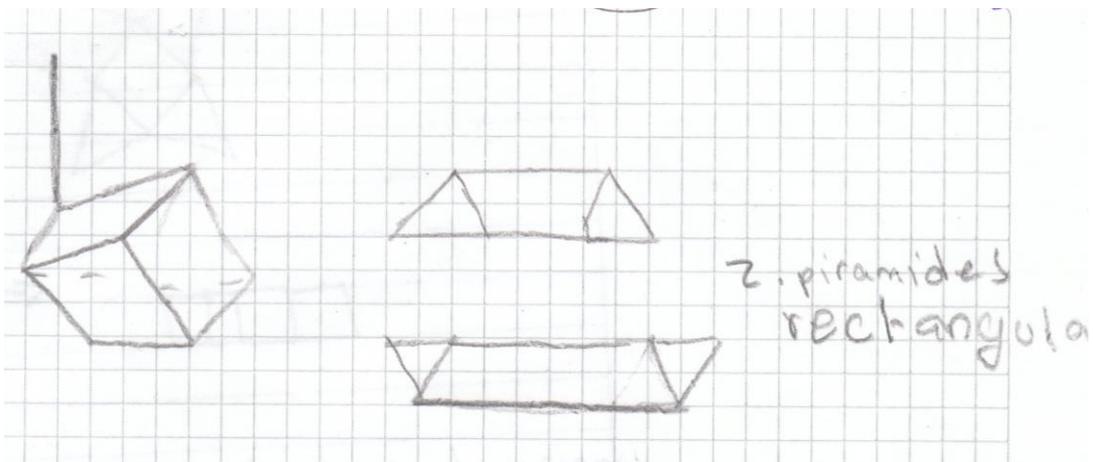
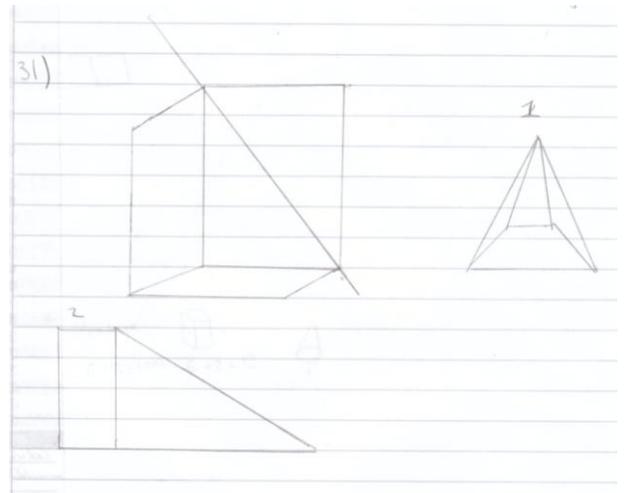
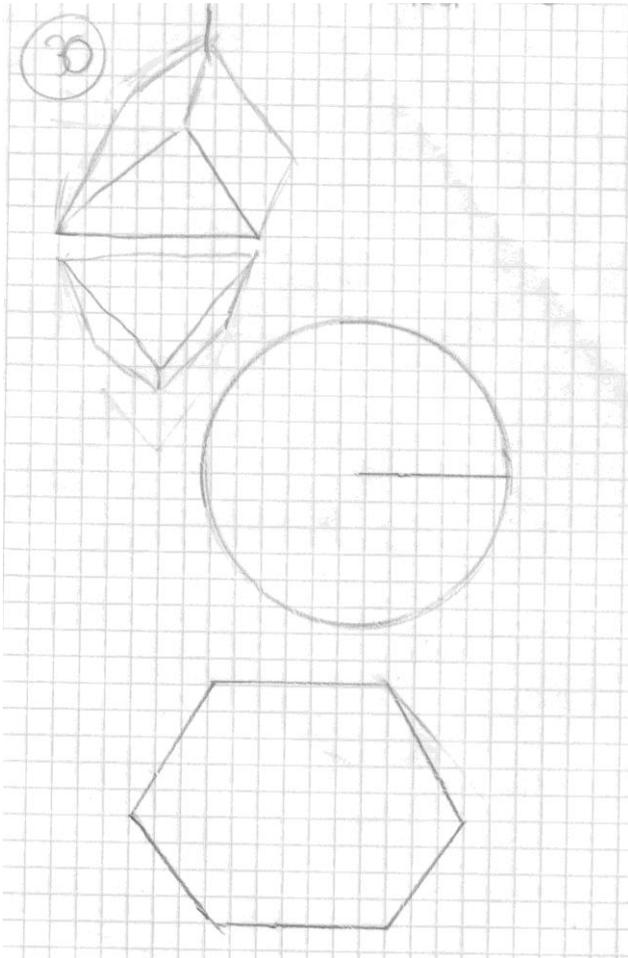
Nota: a esta actividad se anexará una hoja para hacer dicha construcción.

31. Imagina (u observa) un cubo suspendido por uno de sus vértices por un hilo, al cual se le ha hecho un corte horizontal por sus vértices que lo divide en sub-figuras. ¿Qué clase de figuras puedes imaginar (observar) que se forman?



Nota: a esta pregunta se anexará una hoja para graficar lo que crees que se forma.

Anexo No.4 PREGUNTA 31



Anexo No. 5

RESPUESTAS					
1	A	B	C	D	0.8
2	A	B	C	D	1
3	A	B	C	E	1
4	A	B	C	D	1
5	A	B	C	E	1
6	B	C	D	E	1
7	A	B	C	D	1
8	A	B	C	D	0.8
9	B	C	D	E	0.8
10	A	B	C	D	1
11	A	B	C	D	0.8
12	A	B	C	D	1
13	B	C	D	E	1
14	A	B	C	D	1
15	B	C	D	E	1
16	A	B	C	D	1
17	A	B	C	D	1
18	A	B	C	D	1
19	A	B	C	D	1
20	A	B	C	D	1
21	A	B	C	D	1
22	B	C	D	E	0
23	A	B	C	D	1
24	A	B	C	D	0
25	A	B	C	D	1
26	A	B	C	D	0
27	A	B	C	D	1
28	B	C	D	E	1
29	B	C	D	E	1
30	A	B	C	D	0
31	A	B	C	D	0
32	A	B	C	D	1
33	A	B	C	D	1
34	A	B	C	D	1
35	A	B	C	D	1
IDENTIFICACION					

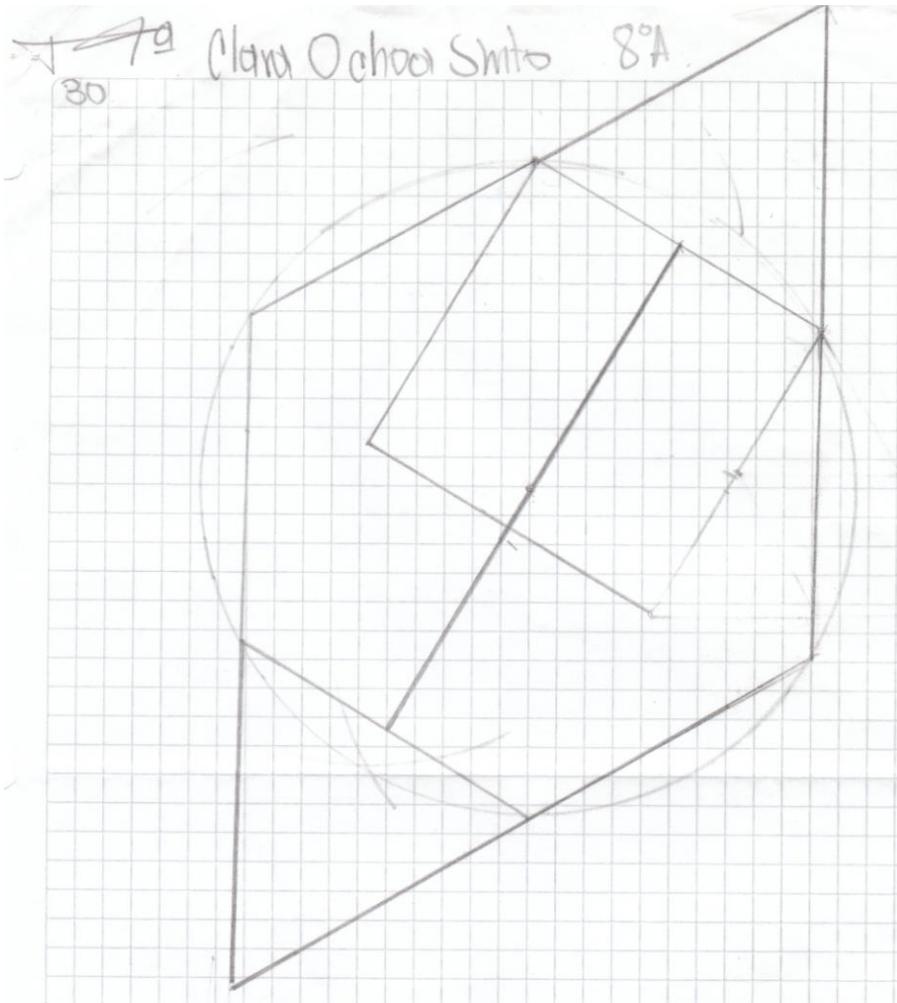
Anexo No. 6

RESPUESTAS					
1	A	B	C	D	0.8
2	A	B	C	D	1
3	A	B	C	D	0
4	A	B	C	D	1
5	A	B	C	D	1
6	B	C	D	E	1
7	B	C	D	E	0
8	A	B	C	D	0.8
9	A	B	C	D	1
10	A	B	C	D	1
11	A	B	C	D	No se
12	A	B	C	D	1
13	B	C	D	E	1
14	A	B	C	D	0.8
15	A	B	C	D	0
16	A	B	C	D	1
17	A	B	C	D	0.2
18	A	B	C	D	1
19	A	B	C	D	1
20	A	B	C	D	1
21	A	B	C	D	1
22	B	C	D	E	0
23	A	B	C	D	0
24	A	B	C	D	0
25	A	B	C	D	0.8
26	A	B	C	D	0
27	A	B	C	D	1
28	A	B	C	D	1
29	B	C	D	E	1
30	A	B	C	D	0
31	A	B	C	D	0.8
32	A	B	C	D	1
33	A	B	C	D	1
34	A	B	C	D	1
35	A	B	C	D	1
IDENTIFICACION					

Anexo No. 7

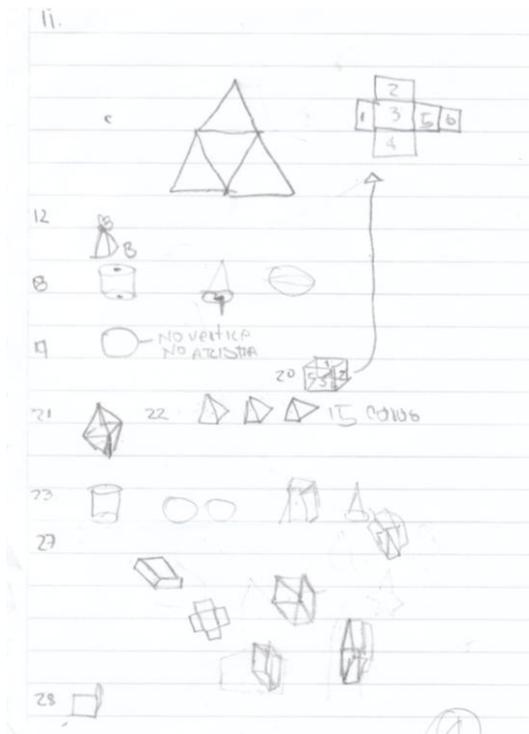
RESPUESTAS					
1	A	B	C	E	1
2	A	B	C	D	0
3	A	B	C	D	1
4	A	B	C	D	1
5	A	B	C	D	1
6	A	B	C	D	0
7	A	B	C	D	1
8	A	B	C	D	0.8
9	A	B	C	D	1
10	B	C	D	E	0.8
11	A	B	C	D	0.8
12	A	B	C	D	1
13	B	C	D	E	1
14	A	B	C	D	1
15	B	C	D	E	1
16	B	C	D	E	0.4
17	A	B	C	D	0
18	A	B	C	D	0
19	A	B	C	D	1
20	A	B	C	D	0
21	B	C	D	E	0.5
22	A	B	C	D	0
23	A	B	C	D	1
24	A	B	C	D	0
25	A	B	C	D	1
26	A	B	C	D	1
27	A	B	C	D	1
28	A	B	C	D	1
29	A	B	C	D	0.5
30	A	B	C	D	1
31	A	B	C	D	1
32	A	B	C	D	1
33	A	B	C	D	1
34	A	B	C	D	1
35	A	B	C	D	1
IDENTIFICACION					

Anexo No. 8



RESPUESTA					
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E
21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E
33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E

DEDICACION

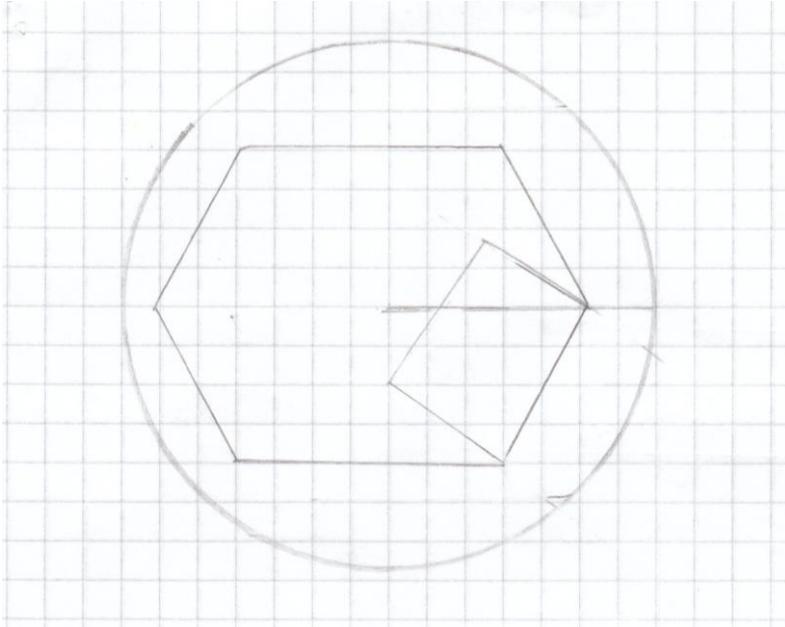


Anexo No. 9

RESPUESTAS						
1	A	B	C	D	E	1
2	A	B	C	D	E	0
3	A	B	C	D	E	0.5
4	A	B	C	D	E	0.3
5	A	B	C	D	E	0.6
6	A	B	C	D	E	0
7	A	B	C	D	E	0.3
8	A	B	C	D	E	0.8
9	A	B	C	D	E	1
10	A	B	C	D	E	1
11	A	B	C	D	E	1
12	A	B	C	D	E	1
13	A	B	C	D	E	1
14	A	B	C	D	E	1
15	A	B	C	D	E	1
16	A	B	C	D	E	1
17	A	B	C	D	E	1
18	A	B	C	D	E	1
19	A	B	C	D	E	1
20	A	B	C	D	E	1
21	A	B	C	D	E	1
22	A	B	C	D	E	0
23	A	B	C	D	E	1
24	A	B	C	D	E	0
25	A	B	C	D	E	0.3
26	A	B	C	D	E	1
27	A	B	C	D	E	1
28	A	B	C	D	E	1
29	A	B	C	D	E	0.5
30	A	B	C	D	E	1
31	A	B	C	D	E	1
32	A	B	C	D	E	1
33	A	B	C	D	E	1
34	A	B	C	D	E	1
35	A	B	C	D	E	1

IDENTIFICACION

Anexo No. 10



RESPUESTAS	
1	A B C D E 1
2	A B C D E 0
3	A B C D E 0,5
4	A B C D E 1
5	A B C D E 0,6
6	B C D E 1
7	A B C D E 0,5
8	A B C D E 0,8
9	B C D E 0,8
10	A B C D E 1
11	A B C D E 0,9
12	A B C D E 0,6
13	A B C D E 0
14	A B C D E 1
15	A B C D E 0
16	A B C D E 0
17	A B C D E - No sé 2
18	A B C D E 0
19	A B C D E 0,6
20	A B C D E 0,9
21	A B C D E 0,5
22	A B C D E 0,5
23	A B C D E 0,9
24	B C D E 0
25	A B C D E 0,9
26	A B C D E 0,9
27	B C D E 0
28	A B C D E 0,9
29	A B C D E - No sé 0
30	A B C D E 0
31	A B C D E 0
32	A B C D E
33	A B C D E
34	A B C D E
35	A B C D E
IDENTIFICACIÓN	

Anexo No. 11

RESPUESTAS					
1	A	B	C	D	0,8
2	A	B	C	E	0
3	B	C	D	E	0,6
4	A	B	C	E	0
5	B	C	D	E	0
6	B	C	D	E	1
7	A	B	C	D	0
8	B	C	D	E	1
9	B	C	D	E	0,8
10	A	B	C	E	0,3
11	B	C	D	E	0
12	A	B	C	E	1
13	B	C	D	E	1
14	B	C	D	E	0
15	A	B	C	E	0
16	A	B	D	E	1
17	A	B	C	D	0,2
18	A	B	D	E	1
19	A	B	C	E	0,1
20	A	B	C	E	0,9
21	B	C	D	E	0,5
22	A	B	D	E	0
23	A	B	C	E	0
24	B	C	D	E	0
25	A	B	C	D	1
26	B	C	D	E	0
27	A	B	C	D	0
28	A	B	C	D	0
29	B	C	D	E	1
30	A	B	C	E	0
31	A	B	C	E	0
32	A	B	C	E	0
33	B	C	D	E	0
34	A	B	C	E	0
35	A	B	C	D	0

IDENTIFICACION

Anexo 12

RESPUESTAS					
1	A	B	C	D	0,8
2	A	B	C	D	1
3	A	B	C	E	0,6
4	A	B	C	E	1
5	A	B	C	E	0,5
6	B	C	D	E	1
7	A	B	C	D	0
8	A	B	C	D	0,8
9	A	B	C	E	1
10	A	B	C	D	0
11	A	B	C	E	0
12	A	B	C	E	0,6
13	A	B	C	E	0
14	A	B	C	D	0
15	B	C	D	E	1
16	A	B	C	E	0
17	A	B	D	E	0,2
18	B	C	D	E	0,5
19	A	B	C	E	0,9
20	A	B	C	E	0,9
21	A	B	C	E	0,9
22	A	B	C	D	0,9
23	A	B	C	E	0,9
24	A	B	C	D	NO SE
25	A	B	C	D	1
26	A	B	C	D	0
27	A	B	C	D	0
28	A	B	C	D	0
29	A	B	C	D	NO SE
30	A	B	C	D	0
31	A	B	C	D	0
32	A	B	C	D	0
33	A	B	C	D	0
34	A	B	C	D	0
35	A	B	C	D	0

IDENTIFICACION

