

**CLASIFICACIÓN Y CATEGORIZACIÓN DE PRUEBAS EN LA ENSEÑANZA
BASICA, A PARTIR DE ALGUNAS SITUACIONES MATEMÁTICAS.**

**MERY ESTER FLÓREZ PÉREZ
EDWAR JAMES MACIAS
MARIA ELENA VIANA RESTREPO**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE LICENCIADOS EN
EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLIN**

2008

**CLASIFICACIÓN Y CATEGORIZACIÓN DE PRUEBAS EN LA ENSEÑANZA
BASICA, A PARTIR DE ALGUNAS SITUACIONES MATEMÁTICAS**

**MERY ESTER FLÓREZ PÉREZ
EDWAR JAMES MACIAS
MARIA ELENA VIANA RESTREPO**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**ASESOR
JHON HENRY DURANGO ORREGO**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MEDELLIN**

2008

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a Dios, pues es quien dirige nuestro andar; a nuestros compañeros de práctica quienes con sus valiosos aportes nos permitieron mejorar en muchas cosas este trabajo; a los colegios y estudiantes que nos permitieron realizar la intervención y a nuestro asesor Jhon Henry Durango quien con su constante orientación nos llevó a la culminación de este proyecto. Y por ultimo al docente Jhonny A. Villa quien con sus correcciones nos brindo una directriz para la presentación final de este trabajo.

DEDICATORIA

A mis padres y maestros quienes con sus constantes recomendaciones me enseñaron el camino mas bello de la vida, este

MERY ESTER FLOREZ PEREZ

A Yenis Hoyos ,Sandry Medina,Dora Isasa quien con su ayuda y palabras de aliento me animaron para que éste proceso pudiera culminar con éxito

MARIA ELENA VIANA RESTREPO

A mi madre y todas aquellas personas que de una u otra forma han aportado una grano de arena para lograr que este proyecto pudiese llevarse a cabo. EDWAR

JAMES MACIAS

INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos que conviene resaltar cuando se habla de argumentación en la clase de matemáticas, es aquella donde el estudiante debe convencerse y convencer al profesor de la verdad necesaria de las proposiciones que afirma, éste procedimiento advierte un nivel en cada uno de éstos, en la medida en que da cuenta del uso de conocimientos previos y formulaciones repentinas a partir de las relaciones entre los objetos de estudio. Teniendo en cuenta lo anteriormente descrito proponemos un sistema de evaluación que si bien está dado teniendo en cuenta el tipo de pregunta selección múltiple, nos restringiremos dentro del contexto de nuestra experimentación a un problema: la clasificación y categorización de las pruebas que llevan a cabo un grupo de estudiantes para validar o refutar el establecimiento de una conjetura; a partir de la implementación de un taller y posteriormente de una entrevista con cada uno de los estudiantes evaluados. Inicialmente describimos la teoría de Nicolás Balacheff quien mediante la implementación de algunas situaciones matemáticas, realizó una clasificación de las pruebas presentadas por sus estudiantes, y a partir de allí relacionarlo con el tipo de prueba que llevan a cabo los nuestros, posteriormente se hace énfasis en la metodología que ha sido elegida y en la cuál se expondrán las experiencias en cada una de las instituciones y su análisis cualitativo respectivo. En este punto de nuestra intervención, se recopiló información sobre el tipo de pruebas que realizan los estudiantes del grado séptimo mediante la aplicación de un taller y se seleccionó información a través de una entrevista con cada uno de los estudiantes que llevaron a cabo el taller planteado, posterior a esto se analizaron cada una de las preguntas propuestas en el taller, de tal modo que pudiera realizarse la clasificación propuesta por medio de los tipos de prueba construidos.

Finalmente se realiza una comprobación acerca del logro del objetivo general, explícita en la elaboración de las conclusiones.

JUSTIFICACIÓN

Los procesos de validación que llevan a cabo los estudiantes son un reflejo de aquello que constituye su comprensión frente a determinado concepto; establecer la veracidad o falsedad de una proposición dada, dependen de las relaciones que se construyan entre los componentes de la situación dada y la forma en cómo los estudiantes garantizan la certeza empleando algoritmos matemáticos. Dicha situación es la que se pretende inquirir a continuación, evidenciando que las actuaciones que se erigen dependen del proceso en conjunto que llevan a concluir con una respuesta certera o falsa en algunos casos, suponiendo en este último que las proposiciones construidas en principio sean verdaderas y la conclusión falsa; de esto depende la clasificación y categorización de que se ocupa esta investigación, apuntando a aquellos procedimientos que son puestos a prueba a partir del uso de algoritmos matemáticos y que terminan por validar aquello que en un principio se supuso verdadero.

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|--|-----------|
| 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 9 |
| 2. MARCO TEÓRICO | 11 |
| 2.1 Clasificación de las pruebas según Nicolás Balacheff (2000) | 12 |
| 2.1.1 Pruebas pragmáticas | 12 |
| 2.1.1.1 Empiricismo ingenuo | 12 |
| 2.1.1.2 La experiencia crucial | 12 |
| 2.1.2 Pruebas intelectuales | 12 |
| 2.1.2.1 El ejemplo genérico | 13 |
| 2.1.2.2 La experiencia mental | 13 |
| 3. METODOLOGÍA | 15 |
| 3.1 METODOLOGÍA CUALITATIVA | 15 |
| 3.2 OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN | 15 |
| 3.3 OBJETIVO ESPECÍFICO DE LA INVESTIGACIÓN | 16 |
| 3.4 TALLER | 16 |
| 4. DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA | 21 |
| 4.1 Población | 21 |
| 4.2. Clasificación y categorización de pruebas a partir de los análisis sobre los resultados obtenidos | 22 |
| 4.2.1. Prueba por azar | 22 |
| 4.2.2 Eliminación de absurdos | 23 |
| 4.2.3 Prueba débil | 23 |
| 4.2.4 Prueba media | 23 |
| 4.2.5 Prueba fuerte | 24 |
| 4.3 Descripción de la población | 24 |
| 4.4 Datos globales de las observaciones realizadas | 25 |
| 4.4.1 La población de los alumnos observados: | 25 |
| 4.4.1.1 GRUPO #1 | 25 |
| 4.4.1.2 GRUPO #2 | 25 |
| 4.5 Análisis de los resultados obtenidos | 26 |
| 4.5.1 Datos sobre la solución del taller | 27 |

| | |
|---|-------------------------------------|
| 4.5.2 Los tipos de prueba | 27 |
| 4.5.2.1 Estudiante A | 28 |
| 4.5.2.2 Estudiante B | 35 |
| 4.5.2.3 Estudiante C | 40 |
| 4.5.2.4 Estudiante D | 45 |
| 4.5.2.5 Estudiante E | 48 |
| 4.5.2.6 Estudiante F | 51 |
| 4.5.2.7 Estudiante L | 53 |
| 4.5.2.8 Estudiante K | 54 |
| 4.5.2.9 Estudiante J | 54 |
| 4.5.2.10 Estudiante I | 56 |
| 4.5.2.11 Estudiante G | 58 |
| 4.5.2.12 Estudiante H | 59 |
| 4.5.3 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS OBTENIDOS | 62 |
| 5. CONCLUSIONES | 71 |
| 5.1 CONCLUSIONES RELATIVAS AL CUMPLIMIENTO DEL OBJETIVO GENERAL | 71 |
| 5.2 CONCLUSIONES RELATIVAS LA CUMPLIMIENTO DEL OBJETIVO ESPECÍFICO | 73 |
| 5.3 RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES | 74 |
| ESTUDIANTE J | Error! Bookmark not defined. |

Capítulo 1

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El trabajo de investigación, se ha diseñado con el propósito de indagar cuál es el procedimiento que llevan a cabo los estudiantes al resolver una situación planteada, pues bien como lo enuncia Fischbein (1982) la enseñanza tradicional despoja a los estudiantes de toda responsabilidad para argumentar y justificar sus procesos de prueba y delega al maestro la tarea de validar la veracidad de las proposiciones por ellos realizados; con respecto a ello Balacheff (1999, p3) afirma que “la superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos pueden ser investigada en situaciones que permitan la devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema a favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los alumnos”, a su vez, atendiendo al llamado de Isaza (2003, p.48), el cual nos dice que en matemáticas “es más importante formular un buen problema que obtener solución”, y más aún, estando completamente de acuerdo con:

En la vida diaria los seres humanos realizamos predicciones sobre sucesos que escapan de nuestro control basándonos en nuestra experiencia personal o el conocimiento casuístico de dichos sucesos y de otros similares. Realizamos suposiciones que nos permiten proyectar hechos hacia el futuro o nos proporcionan una explicación de lo que ocurre. Es decir, en el proceso diario de la vida del individuo se llevan a cabo conjeturas que le permiten mantener una continuidad de su vida futura con la actual, y sostener una relación coherente con lo que le rodea, tanto en el ámbito social como en el natural. Osorio (2000, p.3).

Se establecieron unas leyes que permitieran clasificar y categorizar la validación de posibles conjeturas.

No se puede olvidar a demás que las pruebas argumentativas que utilizan los matemáticos para validar una conjetura no necesariamente tienen que gozar de un carácter lógico formal estricto, si no que por el contrario pueden ser empíricas y ricas en relaciones. Como lo enuncia Polya en el libro (como se cita en Godino, 1977) "Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva" pues ellas son causa de un proceso que es continuo, donde la evaluación procura hacer evidentes los procesos que llevan a cabo los estudiantes, más que el uso adecuado de contenidos; contrario a lo que afirma Corredor (2001, p.7) cuando señala que todo proceso de validación debe elaborar una explicación, la cual puede ser una prueba o demostración; es decir no es suficiente con realizar una prueba empírica para dar por verdadera una afirmación. Con base en lo descrito anteriormente se realizó la formulación del problema el cual consiste en: clasificar y categorizar las pruebas que llevan a cabo un grupo de estudiantes para validar o refutar, el establecimiento de una conjetura, pues consideramos que ello es el detonante principal para lograr una buena conceptualización matemática, actuando a favor de Sáenz (2001, p.47), quien afirma que "el sistema prueba-refutaciones constituye la lógica del descubrimiento matemático escolar".

Olvidándonos del papel de la demostración, pues este es un proceso al que la mayoría de nuestros estudiantes no llega en la escuela secundaria, consideramos que es posible orientar los sistemas de prueba y justificación que llevan a cabo éstos en la medida en que se propongan situaciones problema que permitan que ellos ideen conjeturas y a si mismo puedan validarlas. Pues este proceso implica que el estudiante sienta necesario establecer y aplicar leyes matemáticas con las cuales pueda fundamentar las afirmaciones por él dadas, situación cuya posterior paso es la demostración, dicho de otro modo validar una conjetura es un paso a priori de aquello que constituye la lógica formal deductiva

Capítulo 2

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentarán las bases teóricas en las cuales se sustentó el trabajo de investigación, tales autores se tomaron como referentes teóricos, pues a partir de la teoría por ellos construida, orientamos nuestro que hacer dentro de este trabajo, apuntando hacia el marco conceptual expuesto posteriormente.

Como lo afirma Godino (1997, p 314):

Para el currículo, textos y profesores de matemáticas de los niveles de enseñanza primaria, secundaria y universitaria, en general, los teoremas matemáticos son necesariamente verdaderos, pero las argumentaciones que establecen esa verdad son, en el mejor de los casos, argumentaciones deductivas informales y con frecuencia argumentaciones no deductivas o incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad

Esto es, la demostración como un tipo de prueba intelectual, goza dentro de su estructura de un carácter formal deductivo, sin embargo construir una demostración implica concebir una situación o proposición que debe ser argumentada y esto solo se logra a partir de la elaboración de conjeturas, las cuales se construyen cuando el estudiante encuentra relaciones entre los objetos matemáticos, y que válida mediante la aplicación de teoremas y definiciones en algunos casos. Ello entonces nos lleva a formularnos la inquietud de clasificar el tipo de prueba que emplean los estudiantes para argumentar y validar una proposición y para tener un punto de partida que vehicule nuestro horizonte hemos tomado como punto de partida a Nicolás Balacheff, quien propone una de las

teorías que efectúa un rastreo exhaustivo y presenta una línea categórica para la clasificación de pruebas en matemáticas, en su texto procesos de prueba en los alumnos de matemáticas

2.1 Clasificación de las pruebas según Nicolás Balacheff (2000)

2.1.1 Pruebas pragmáticas

Son aquellas pruebas que recurren a la acción o a la ostensión.

2.1.1.1 Empiricismo ingenuo

Esta prueba consiste en garantizar la veracidad de una proposición, verificando que se cumple en un caso particular, es decir el estudiante se convence de que la conjetura por él realizada es válida comprobando que se cumple en un solo caso; ello es una evidencia que éste todavía no se hace la pregunta por la generalidad.

2.1.1.2 La experiencia crucial

A diferencia del empiricismo ingenuo, la experiencia crucial es una prueba en la que se utilizan casos particulares para corroborar la veracidad de la proposición dada por el estudiante, sin embargo dicha prueba lleva implícitamente la generalidad en la medida en que éste intenta tomar casos lo menos particulares posibles.

2.1.2 Pruebas intelectuales

Son aquellas pruebas que separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones.

2.1.2.1 El ejemplo genérico

Este tipo de prueba consiste en validar una proposición por medio de un objeto cuyas características son comunes a todas las demás, en este sentido el ejemplo genérico admite utilizar un representante cuya exhibición permite reconocer las cualidades de los demás objetos presentes en la situación planteada.

2.1.2.2 La experiencia mental

A diferencia de los de tipos de prueba anteriores, éste requiere por parte del estudiante un análisis que provenga de la acción separándola de cualquier caso en particular; es decir, como la afirma Balacheff:

La experiencia mental se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica, pero las operaciones y las relaciones que inician la prueba nunca están designadas por su puesta en práctica. Las operaciones y las relaciones que sirven de preludio a la prueba nunca son acogidas por el resultado de su puesta en práctica; este es el caso genérico. Balacheff (2000, p. 27)

Por otro lado dentro de nuestro trabajo de investigación se reconoce el papel de la heurística, en la medida en que puede considerarse como el arte de inventar, y como el estudio de los métodos y reglas de descubrimiento; con base en esta afirmación consideramos que las conjeturas dadas por los estudiantes obedecen a su capacidad creadora de concebir una situación, que prueba a partir de teoremas o definiciones matemáticas; pero todo esto depende de su función frente a la necesidad de pensar a partir de los datos que se desprenden de un problema

matemático, con respecto a ello Polya enuncia “la heurística, para llamarla por su nombre, es en resumen, una doctrina especial para el uso de aquellos que, tras haber estudiado los elementos ordinarios desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos”. Así los métodos heurísticos son entonces estrategias que se emplean para llevar a cabo la solución de un problema, esto consiste en transformar a través del análisis dicho problema, en palabras de Polya “Provocan las operaciones intelectuales particularmente útiles para la solución de problemas”, él, en su clásico tratado, empleó la palabra “heurística” en analogía al razonamiento inductivo y en oposición a la prueba deductiva y procesos rigurosos. Dentro de nuestro trabajo de investigación es necesario tomar la heurística, pues a partir de la actividad creadora del estudiante es cuando éste podrá validar una conjetura, proceso que será posteriormente clasificado y categorizado.

Capítulo 3

3. METODOLOGÍA

3.1 METODOLOGÍA CUALITATIVA

La metodología de la investigación está enmarcada dentro de los paradigmas cualitativos y de categorizaciones; exactamente dentro de la observación participante, un modelo propuesto por McCall y Simmons (1969), en la cual el investigador recoge datos de naturaleza especialmente descriptiva, participando en la vida cotidiana del grupo, de la organización, de la persona que desea estudiar. Más que las otras técnicas de investigación cualitativa, la observación participante hace énfasis sobre el terreno y el carácter inductivo de la investigación, a su vez dicha investigación apela a otros procedimientos y no solo a la observación, en este caso el investigador entrevista personas, analiza documentos, reconstituye la historia del fenómeno estudiado.

La observación participante es evidentemente más una aproximación que un método propiamente dicho: en el marco de la observación participante, varios métodos o técnicas pueden ser empleadas. De esta manera el investigador podrá sacar provecho de su presencia sobre el terreno, bien para hacer investigaciones de naturaleza histórica y estadística sobre la comunidad gracias a un trabajo de archivos por ejemplo, como para hacer entrevistas a profundidad, y asistir a diferentes reuniones sociales y políticas para distribuir cuestionarios sobre ciertos puntos precisos. Fortín (1982, p.104)

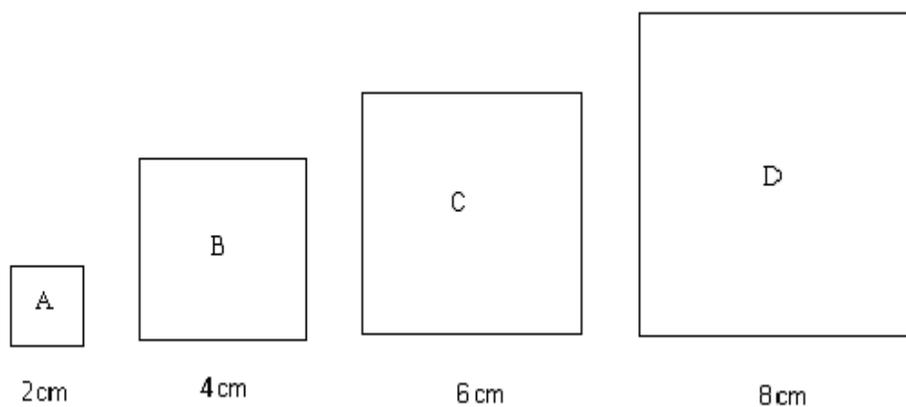
3.2 OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Clasificar y categorizar las conjeturas que construyen los estudiantes cuando se enfrentan a una situación matemática dada

3.3 OBJETIVO ESPECÍFICO DE LA INVESTIGACIÓN

Interpretar las justificaciones dadas por los estudiantes cuando verifican o niegan una conjetura

3.4 TALLER



Con base en los cuadrados anteriores responde las siguientes preguntas

1. Dadas las siguientes afirmaciones cuál de ellas enuncia una relación entre el área del cuadrado A y el área del cuadrado B
 - a. El área del cuadrado A es la mitad del área del cuadrado B.
 - b. El área del cuadrado A es la raíz del cuadrado del área del cuadrado B.
 - c. El área del cuadrado B es la cuarta parte del área del cuadrado A.
 - d. El área del cuadrado A es la cuarta parte del área del cuadrado B.
- 2.Cuál de los siguientes enunciados afirma con mayor precisión, la relación que hay entre el perímetro del cuadrado A y el perímetro del cuadrado B.
 - a. El perímetro del cuadrado B es la mitad del perímetro del cuadrado A.

- b. La raíz cuadrada del perímetro del cuadrado B es igual al perímetro del cuadrado A.
 - c. 2 veces la raíz cúbica del perímetro del cuadrado A es igual al perímetro del cuadrado B.
 - d. El perímetro del cuadrado B es el doble del perímetro del cuadrado A.
3. El perímetro de la figura que se encuentra en la posición 5 es:
- a. 40cm
 - b. 100cm
 - c. 36cm
 - d. 20 cm
4. De los enunciados descritos numéricamente a continuación cuál de ellos relaciona el perímetro del cuadrado con la posición que ocupa
- a. n^3
 - b. $8n$
 - c. n^2
 - d. $n + 7$
5. De las siguientes afirmaciones solo una es falsa
- a. El perímetro y el área en cada cuadrado depende de la posición que ocupe.
 - b. El área está dado por la relación lado por lado.
 - c. El área representa numéricamente una potencia y el perímetro una suma cuyos sumandos son iguales.
 - d. El área del cuadrado es inversamente proporcional a la medida del lado.
- 6.Cuál de las siguientes afirmaciones enuncia la relación que existe entre el perímetro de los cuadrados dados.
- a. El perímetro de cada cuadrado se puede comparar como una razón entre el primero y el segundo, el segundo y el tercero...
 - b. El perímetro de un cuadrado es el doble de la anterior.

- c. El cuadrado del valor de cada lado es igual al perímetro en cada caso.
 - d. Aumenta cada 8 cm según la posición que ocupan.
7. El área de la figura que se encuentra en la posición 5 es:
- a. 81 cm^2
 - b. 100 cm^2
 - c. 10 cm^2
 - d. 40 cm^2
8. Dadas las siguientes afirmaciones solo una de ellas es verdadera, para determinar el área del n-ésimo término
- a. $(2n)^2$
 - b. $(4n - 8)^2$
 - c. $2n^2$
 - d. $4n$
- 9.Cuál de las siguientes afirmaciones determina con mayor precisión, una relación entre el área de las figuras A, B, C y D
- a. Áreas proporcionales
 - b. El área y el perímetro aumenta teniendo en cuenta la posición que ocupa cada figura
 - c. El área de cada cuadrado depende la de la longitud del lado
 - d. el área de cada polígono es igual a la base por la altura
10. De las siguientes afirmaciones solo una es falsa
- a. El área equivale a la base por la altura y el perímetro a la suma de los lados
 - b. El valor del perímetro es múltiplo del valor del área en cada caso
 - c. El área representa numéricamente una potencia y el perímetro una suma de sumandos iguales.

d. La relación entre el perímetro y el área consiste en que el perímetro es la mitad del área en cada una de las anteriores figuras.

11. De los cuadrados anteriores qué segmento determina una división de las figuras en figuras simétricas

- a. Una diagonal.
- b. Un segmento que una el centro con cualquiera de los cuatro vértices.
- c. Un segmento que una un vértice con el punto medio de uno de los lados del cuadrado.

12. Cuántas diagonales pueden trazarse en un cuadrado

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. Ninguna de las anteriores.

13. Al trazar las dos diagonales cuántas figuras simétricas resultan.

- a. 2
- b. 3
- c. 4
- d. 1

14. Al dividir de nuevo cualquiera de los cuadrados anteriores en la mitad cuántas figuras simétricas resultan

- a. 4
- b. 5
- c. 6
- d. 3

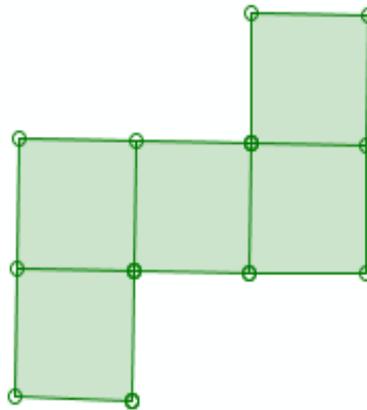
15. Al dividir de nuevo la figura que resulta después del corte anterior en la mitad cuántas figuras simétricas quedan

- a. 8
- b. 6
- c. 3
- d. 4

16.Cuál de los siguientes enunciados afirma con mejor propiedad la relación entre el número de cortes de un cuadrado por la mitad y la cantidad de figuras simétricas que resultan

- a. El número de cortes es igual al número de figuras simétricas que resultan.
- b. El número de cortes es la tercera parte del número de figuras simétricas que resultan.
- c. El número de cortes es la mitad del número de figuras simétricas que resultan.
- d. No se puede establecer ninguna relación.

17. La siguiente figura representa la superficie de una piscina de 405m^2 de área. Esta piscina está distribuida en 5 zonas cuadradas de igual tamaño: una zona para los niños, tres zonas para los adultos y una zona para la práctica de clavados. Las zonas están demarcadas con cuerdas plásticas. Solo una de las siguientes afirmaciones es falsa.



- a. Si se duplica el área de la piscina se duplica su volumen
 - b. Si se duplica su profundidad se duplica su volumen.
 - c. El área y el volumen son inversamente proporcionales.
 - d. Si la piscina cambia de forma conservando su área y profundidad el volumen se conserva.
18. Los encargados del mantenimiento necesitan saber cuántos metros cúbicos son necesarios para llenar la piscina, para encontrar este dato:
- a. Es suficiente conocer el área de cada zona
 - b. Es necesario conocer el área y el perímetro de cada zona
 - c. Es necesario conocer la profundidad y el área de cada zona.
 - d. Es suficiente conocer la profundidad de la piscina

4. DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA

4.1 Población

Inicialmente doce estudiantes del grado séptimo, de las siguientes instituciones educativas de la ciudad de Medellín: Colegio Santa María Mazzarello desarrollaron un taller, en el cual se emplea el tipo de pregunta selección múltiple, éste se elaboró con base a algunos problemas

formulados en las pruebas saber, pretendiendo según el problema planteado inicialmente, que en los estudiantes pudiera evaluarse un proceso, más que un logro o contenido.

En el proceso de investigación se partió de dos factores a saber: como son la resolución del taller y una entrevista a los jóvenes que participaron en dicho proceso, y a partir de allí indagar a cerca de los procesos cognitivos que desarrollaron e implementaron en la solución.

4.2. Clasificación y categorización de pruebas a partir de los análisis sobre los resultados obtenidos

Inicialmente las conjeturas y pruebas producto de la solución del taller se clasificarían de acuerdo con la clasificación que realizó Balacheff, sin embargo en el momento de analizar los resultados obtenidos, se encontró que esta clasificación no era pertinente debido a que el tipo de pregunta y el procedimiento empleado no coincidía con el nuestro, por lo tanto se construyó el siguiente modelo de clasificación, el cual tiene que ver con el procedimiento empleado por los estudiantes, teniendo en cuenta que el taller propuesto es un caso típico en la que la prueba que se use depende de la capacidad que éstos tengan para observar la situación. Así los siguientes tipos de prueba tienen como finalidad organizar la justificación que presente cada estudiante a sus conjeturas ideadas, dependiendo de la metodología que haya seguido para la aplicación de algoritmos matemáticos y como éstos permiten o no verificar las proposiciones por ellos dadas.

4.2.1. Prueba por azar

Esta prueba consiste en garantizar la validez de una aserción (proposición) por medio del azar, en este sentido se considera que el estudiante no elabora ninguna conjetura si no que por el contrario asume una postura

poco conciliadora con la pregunta planteada debido a su negativa frente a dicho tema.

4.2.2 Eliminación de absurdos

La eliminación de absurdos consiste en validar una conjetura evitando las respuestas que en principio y aparentemente no tienen nada que ver con la pregunta planteada, en este caso se trata de buscar **contraejemplos** con los cuales se pueda reducir el número de respuestas, es decir, falsear lo que se está asumiendo como verdadero.

4.2.3 Prueba débil

Esta prueba consiste en probar una conjetura por medio de operaciones matemáticas las cuales no gozan de una buena aplicación, es decir, pese al intento por validar la aserción dada los cálculos no son apropiados y ello impide que ésta pueda afirmarse o negarse.

4.2.4 Prueba media

Esta prueba consiste en validar una aserción por medio de operaciones matemáticas, dichas operaciones son resueltas en forma correcta, sin embargo no es evidencia para concluir y en esta medida determinar si se trata de una conjetura válida o no.

4.2.5 Prueba fuerte

Esta prueba consiste en afirmar la validez de una aseveración por medio de operaciones matemáticas, cuyo uso es lógico y certero; ello entonces es el indicio que le permite al estudiante verificar o falsear su conjetura.

4.3 Descripción de la población

Las estudiantes pertenecientes al colegio Santa María Mazzarello, son niñas cuyas edades se encuentran entre los 11 y 12 años; pertenecen a dicha institución desde el grado sexto. Sus viviendas son aledañas a la institución, la cual se encuentra ubicada al oriente de la ciudad de Medellín en el barrio Buenos Aires, por lo que su estrato socio económico no supera el número tres. En general, académicamente son estudiantes que han tenido buenos resultados en el área.

Los estudiantes pertenecientes a la institución educativa Luis Carlos Galán Sarmiento son niños cuyas edades se encuentran entre los 11 y 13 años de edad; dicha institución se encuentra ubicada en el barrio Enciso, al nororiente de la ciudad de Medellín; éstos viven aledaños a ella, por lo que su estrato socioeconómico oscila entre dos y tres. Académicamente son catalogados por sus maestros como los mejores en la mayoría de las áreas, principalmente en el área de matemáticas.

4.4 Datos globales de las observaciones realizadas

4.4.1 La población de los alumnos observados:

Se observaron doce estudiantes del colegio Santa María Mazzarello y de la institución Luis Carlos Galán Sarmiento; dichas observaciones fueron realizadas en el interior de la institución pero fuera de clase, la duración de la primera intervención fue de una hora y cuarenta minutos (la prueba); las entrevistas realizadas tuvieron una duración aproximada de 50 minutos con cada estudiante.

A continuación se presenta la lista de los nombres de los estudiantes participantes:

4.4.1.1 GRUPO #1

Estudiante A
Estudiante B
Estudiante C
Estudiante D
Estudiante E
Estudiante F

4.4.1.2 GRUPO #2

Estudiante G
Estudiante H
Estudiante I
Estudiante J
Estudiante K
Estudiante L

4.5 Análisis de los resultados obtenidos

Semadeni, (citado por Balacheff, 2000) recomienda el uso de pruebas cuyas situaciones conlleven a que el estudiante elabore conjeturas a partir de la observación y de los posibles indicios que ello le genere, en la educación elemental y al respecto expone lo siguiente

Una prueba de una afirmación S debe seguir el siguiente procedimiento:

- 1. Escoger un caso especial de S. El caso debe ser genérico (es decir sin características especiales), no muy complicado, pero tampoco muy simple (un ejemplo trivial puede ser posteriormente difícil de generalizar). Escoger una presentación activa y/o icónica de este caso, o un ejemplo paradigmático (en el sentido de Freudenthal, 1980). Ejecutar ciertas acciones físicas concretas (manipular objetos, hacer dibujos, mover el cuerpo, etc.) para verificar la afirmación en un caso dado.*
- 2. Escoger otros ejemplos conservando el esquema general, pero variando las restricciones involucradas. Verificar la afirmación para cada caso tratado de usar el mismo método expuesto en el numeral 1.*
- 3. Cuando las acciones físicas ya no sean necesarias, continuar ejecutándolas mentalmente hasta estar convencido de que sabe cómo aplicar el mismo procedimiento a otros ejemplos.*

4. Tratar de determinar la clase o las clases para las cuales este método función

4.5.1 Datos sobre la solución del taller

| Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Nombre del estudiante | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Estudiante A | d | d | a | b | a | d | b | A | d | b,d | a | b | c | c | a | c | c | c |
| Estudiante B | b | d | a | b | a | b | b | B | d | d | a | b | c | c | a | c | c | c |
| Estudiante C | a | d | a | b | b | b | b | C | b | b | a | b | a | c | a | c | d | c |
| Estudiante D | a | d | b | b | b | b | b | A | c | b | a | b | c | c | a | c | c | c |
| Estudiante E | c | a | a | b | c | d | b | D | b | c | a | b | c | c | a | c | c | c |
| Estudiante F | d | d | a | b | a | d | b | A | d | b,d | a | b | c | c | a | c | c | c |
| Estudiante L | d | a | d | d | c | a | d | B | b | b | a | b | c | a | x | x | a | c |
| Estudiante K | d | d | a | d | c | c | d | D | d | b | a | b | c | a | a | c | c | c |
| Estudiante J | a | d | a | c | a | b | c | D | d | d | a | b | c | a | a | c | c | c |
| Estudiante I | a | d | a | c | a | b | c | B | d | b | a | b | c | a | a | c | a | c |
| Estudiante H | a | d | a | c | a | d | c | C | b | b | a | d | c | x | d | c | a | c |
| Estudiante G | a | d | a | d | c | c | d | D | d | b | a | b | c | a | a | c | d | d |

Cuadro Nº 1: Resultados obtenidos por los estudiantes, la x significa que el estudiante no dio respuesta.

4.5.2 Los tipos de prueba

Las siguientes cuadros muestran cuál fue el procedimiento que utilizaron las estudiantes para resolver cada pregunta planteada, dicha prueba se explicita por cada una de ellos en el segundo momento de la intervención que obedece a la entrevista.

4.5.2.1 Estudiante A

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | | X | | | | | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | | | | | X | | | X | | | | | | | | | X | X |
| Media | X | X | | X | | | | X | | | | | | | | | | |
| Fuerte | | | X | | | | X | | | X | X | X | X | X | X | X | | |

Cuadro N° 2 tipo de prueba utilizados por la estudiante A

Aunque la respuesta dada por la estudiante A a la pregunta cuatro (4) es acertada, en este caso es evidente que el hecho de ocurrir para un caso le sugiere la idea de que ocurre para todos los demás; en esta medida aunque es una pregunta por la generalidad de un objeto matemático, el proceso de validación es muy simple, y puede clasificarse entonces dentro del tipo de prueba medio, pues aunque acude a realizar cálculos que la llevan a obtener la respuesta adecuada, en esta forma y dada la circunstancia en la que ella debiera construir la respuesta no es posible que llegue a procesos de validación lo suficientemente válidos pues no prueba que evidentemente es un suceso que ocurre infinitamente.

4.
B, por que B lo multiplique por 2 y eso me da el perímetro del cuadrado de posición 2x16

La justificación dada por la estudiante a la pregunta cinco (5) es: **“porque puede estar en cualquier posición y siempre su perímetro y su área será el mismo”** su justificación evidencia que no hay un nivel alto de generalidad, es decir pese a que en la pregunta anterior no hubo problema con el lenguaje, en este sentido

la n tuvo el valor que se esperaba, el de la posición de cada cuadrado, según la respuesta y su posterior justificación dicha situación no corresponde a un fenómeno que cambia pero conservando en cada caso una relación con respecto al anterior objeto, lo que muestra que no hay procesos vía hacia la generalización pues los objetos permanecen iguales a pesar de que incluso por medio de la observación unos son más grandes que otros.

Se incluye entonces dentro del tipo de prueba débil, pues no hay ningún vestigio de validación del resultado.

La pregunta número seis (6) fue respondida al azar en palabras de la estudiante A; *“no la entendí y lo hice al tin marin”*, dicha respuesta resulta contradictoria pues se trataba de un pregunta que ponía en palabras la pregunta número 4, es decir, se preguntaba acerca de la generalidad que tiene el perímetro en dicha situación. La anterior respuesta resultó ser un motivo para entablar el siguiente diálogo la con la estudiante acerca de los problemas de generalización:

Observador: En la respuesta dada se anota que la pregunta no es entendible. ¿Explícitamente que es lo que no se entiende?

Estudiante: Nada

Observador: ¿Considera que puede haber algo que relacione el perímetro de cada cuadrado con todos los demás?

Estudiante: claro, que todos son perímetros y que unos son más grandes que otros ya que la medida del lado es diferente.

Observador: Explique la diferencia del lado del cuadrado en cada caso, ¿qué quiere decir?

Estudiante: que los lados van aumentando

Observador: el aumento es el mismo en cada caso o varía

Estudiante: es el mismo, siempre va aumentando de dos en dos

Observador: bueno, y si el lado varía que más puede variar

Estudiante: varía también el perímetro y el área que es lo que se está estudiado

Observador: entonces ello significa que el perímetro y el área dependen de qué

Estudiante: pues del lado

Observador: y luego entonces el lado depende de algo

Estudiante: sí, de la posición, por ejemplo si está en la posición 1 el lado es 2, si está en la posición 2 el lado es de 4, si está en la posición 3 el lado es 6.

Observador: y cuál es entonces el perímetro del cuadrado que se encuentra en la posición 1, 2, 3, 4, 5...

Estudiante: pues el de la posición 1 es $2+2+2+2=8$; el de la posición 2 sería $4+4+4+4=16$; el de la posición 3 es $6+6+6+6=24$ y así sucesivamente.

Observador: ¿qué quiere decir la palabra sucesivamente?

Estudiante: que así sigue, o sea que se suma 4 veces el lado del cuadrado

Observador: como pueden entonces relacionarse los resultados que obtuvo anteriormente

Estudiante: el primero es 8, el segundo es 16, el tercero es 24; son como la tabla del 8.

Observador: ¿y cómo funciona esa tabla?

Estudiante: pues $8*1$, $8*2$, $8*3$, $8*4$ y así sucesivamente.

Observador: finalmente que significa multiplicar 8 veces por el 1, 2, 3

Estudiante: pues que es 8 veces un número

Observador: y si no me sé la tabla del ocho, que otro procedimiento utilizo

Estudiante: sumo, por ejemplo $8*1=8$; pero $8*2$ sería $8+8$, es decir el 8 del 1 más 8, porque va aumentando de 8 en 8

Observador: ¿será que tiene que ver el 1, el 2, el 3, números por los que ha multiplicado el 8, con la posición que ocupa cada cuadrado?

Estudiante: sí, con la posición 1, 2, 3, 4 y así sucesivamente

Observador: ¿inicialmente como se nombró la posición?

Estudiante: con la letra: n

Observador: entonces como puede relacionarse lo que se afirmó, con respecto a la tabla del 8 y el perímetro de los cuadrados dados

Estudiante: que el perímetro es multiplicar el ocho por la posición, o sea $8*1$, $8*2$, $8*3$ y así sucesivamente

Observador: sucesivamente es...

Estudiante: lo que ya había dicho, que se repite, o sea multiplico 8 por la posición y la posición es n o sea la respuesta de una pregunta $8n$

Observador: ¿lo que ha descrito como se lee?

Estudiante: pues que el perímetro de los cuadrados es 8 multiplicado por la posición

Observador: y si no me sé la tabla

Estudiante: le sumo a la anterior 8

Observador: y eso equivale a decir

Estudiante: que el perímetro como la tabla del 8 aumenta de 8 en 8. Lo anterior es una evidencia que describe un cambio en el razonamiento de la estudiante A, a pesar de que inicialmente hubo una confusión que le impidió responder la pregunta, hay aquí vestigios de generalidad, pues a través de las preguntas iba relacionando los objetos matemáticos de modo que unos dependieran de otros, a su vez las reiteradas veces en las que aparece la palabra “sucesivamente” da cuenta de que la estudiante tiene implícitamente la noción de que existe un crecimiento en un situación que no termina y que cada objeto puesto allí se relaciona con el anterior. Por lo tanto y pese, a que inicialmente la estudiante A, no empleó algoritmos matemáticos, pudo mediante el diálogo

descrito anteriormente, resolver la suda que presentaba frente a esta pregunta, y al utilizar lógicamente algoritmos matemáticos, pudo establecer un procedimiento mediante el cual pudo probar la generalidad que se presentaba con respecto al perímetro y que era objeto de la conjetura puesta en palabras, el perímetro aumenta cada ocho.

Para responder la pregunta número siete (7), la estudiante dibujo al lado del cuadrado de la posición 4, uno nuevo pero con la condición de que el lado de éste fuera 2 más que el anterior, en este caso 10, luego su respuesta fue: **porqué multipliqué $10 * 10 = 100$** . La estudiante defiende en este caso que en la situación se genera una secuencia cuyo aumento es de 2 en 2 la cuál va hasta el infinito, lo que corrobora que aunque la respuesta obedece a la observación, la estudiante pone de manifiesto que hay una constante que se repite indefinidamente, situación que revela la noción de generalidad y que prueba a través de operaciones matemáticas.

En la pregunta número ocho (8) al igual que en la pregunta número cuatro (4) la estudiante emplea una fórmula dada en las respuestas y al cambiar la n por la posición que ocupa uno de los cuadrados y al obtener el área correspondiente a dicho cuadrado inmediatamente anota que es esa la respuesta correcta

B.
* por que multiplique $8 \times 2 = 16 \text{ cm}$ que es el área de la posición 2

La estudiante A, realiza adecuadamente operaciones, sin embargo el uso no es lógico, de tal modo que ello no la lleva a la respuesta

correcta, además es muy pronto para asegurar que en la misma medida ocurrirá para los demás casos. ¹

Para responder la pregunta número diez (10) había dos respuestas, para obtenerlas la estudiante empleo un contraejemplo: *“es la respuesta c, pues 24 no es múltiplo de 36 y también puede ser la respuesta d, ya que en algunas posiciones el perímetro no es la mitad del área”*. Es evidente que la estudiante recurrió a mostrar que las afirmaciones dadas no siempre eran ciertas pues había a si fuera un solo caso que lo refutaba, en esta medida se recurre a la prueba y se valida a través del contraejemplo. Este procedimiento se enmarca dentro del tipo de prueba reducción de absurdos, dado que la estudiante A, procura mediante un caso que es particular mostrar que la proposición no describe una situación válida para todos los casos, esto es una forma de garantizar que una conjetura no es válida y en este sentido el uso de los algoritmos matemáticos es un medio que permite probarlo.

Para elaborar la pregunta 16 se tuvo la intención de que ésta preguntará acerca de lo que ocurriría en caso de realizar la misma operación infinitamente. Las estudiantes intervenidas debían acudir a las anteriores respuestas pues ellas informaban en caso de que las estudiantes estuvieran pensando en forma general. La estudiante Lina respondió: *“porque se hicieron 2 cortes y 4 figuras simétricas, 3 cortes y 6 figuras simétricas, 4 cortes 8 figuras simétricas, luego si se hacen 5 cortes habrá, 10 figuras simétricas y así sucesivamente. Y esto puede probarse ya que cuando se traza una línea que pase por la mitad en una figura siempre las dividirá en dos partes, es como si corto una torta por la mitad hice un corte y me quedaron dos pedazos*

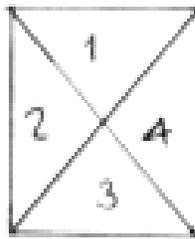
¹ Pese a esto es posible asegurar que la necesidad de pensar en un proceso general en este nivel de la enseñanza básica va más allá de producir un enunciado y se trata más bien de la capacidad del sujeto aprendiz de validarlo.

y si divido de nuevo me quedan cuatro pedazos, ahora tocaría probar si se trata de figuras simétricas". En este momento de la evaluación la estudiante prueba que la afirmación dada se cumple en cada caso y partir de allí genera una conjetura con la que pretende generalizar, si bien este caso podría enmarcarse dentro del tipo de prueba ejemplo genérico citado por Balacheff (2000, p. 27) en nuestro estudio esta respuesta pone en marcha la capacidad de la estudiante al realizar operaciones y a su vez pone de manifiesto su capacidad consiente para realizar pruebas de validación y utilizar determinados procesos, en esta medida asegurarse de que ocurre para determinados casos.

13.

C, por que

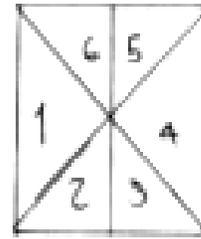
4 figuras simétricas



14.

C, porque

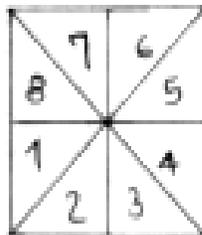
6 figuras simétricas



15.

C, porque

8 figuras simétricas



16.

C, porque se hicieron 2 cortes y 4 figuras simétricas
3 cortes 6 figuras simétricas
y 4 cortes 8 figuras simétricas

4.5.2.2 Estudiante B

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | | | | | | | X | X | | | | | | | | | X | X |
| Media | X | X | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Fuerte | | | X | X | | | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | | |

Cuadro N° 3: tipos de pruebas empleados por la estudiante B

La respuesta a la pregunta numero tres (3) dada por la estudiante:
porque

3. a) porque la figura numero 4 es 8, y como el conteo va avanzando de en dos la figura numero 5 vendria siendo 10 y como $10+10+10+10=40$

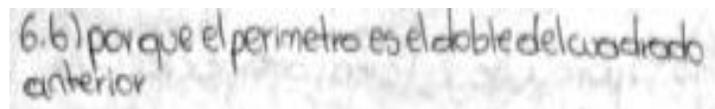
Dicha respuesta evidencia que la estudiante generaliza, en la medida en que a partir de lo que observa supone que es una situación en la que a pesar de que no todos los objetos matemáticos estén ilustrados puede repetirse indefinidamente conservando una relación con el anterior.

La respuesta dada a la pregunta cuatro (4) por la estudiante: *“la respuesta correcta es la b, pues se puede ver de varias formas, la primera: no es la respuesta pues me hablan de un perímetro y eso es la suma de los lados, es como si midiera con la regla tantos centímetros, n^3 el 3 significa un volumen de un cubo por eso es que se dice al cubo, igual con n^2 el dos significa área de un cuadrado por eso se lee al cuadrado, y no es $n+7$ porque al probar con el primer caso no me da por lo tanto es la respuesta b: $8n$. Segundo: si no elijo por descartes si no que pruebo con cada respuesta teniendo en cuenta que n es la posición me doy cuenta que n^3 no cumple, que*

$n+7$ tampoco y que n^2 tampoco, por tanto me quedaría que solo se cumple con $8n$ ".

Dada la respuesta de la estudiante es posible afirmar que tiene nociones sobre un cuadrado y un cubo, lo cual prueba mediante la exposición de ejemplos, esto le permite descartar algunas opciones. Hace uso del contraejemplo en la medida en que éste le permite averiguar que si se trata de una secuencia al no cumplirse para uno solo no se cumple para los demás; a su vez verifica su respuesta teniendo en cuenta que se trata de una situación en la que los objetos allí presentes se relacionan entre sí, por lo que supone la idea de que la n significa la posición que ocupa cada cuadrado y al reemplazar dicho valor en la respuesta correcta se da cuenta que solo esta podría ser ya que es la única en la cual al reemplazar dicho valor siempre da el valor del perímetro.

Pese a los intentos por generalizar, para responder la pregunta número seis (6) la estudiante se confió de que al cumplirse la afirmación para los dos primeros casos se cumpliría para los siguientes: *"la respuesta es la b porque se cumple que el perímetro del cuadrado de la posición 1 es 4, del cuadrado de la posición 2 es 8 y el cuadrado de la posición 3 es 16, por lo tanto el perímetro de un cuadrado es el doble del anterior",*



6.b) porque el perímetro es el doble del cuadrado anterior

Por ello a pesar de que empleó correctamente operaciones aritméticas, dicha respuesta se puede enmarcar dentro del tipo de pruebas que Balacheff (2000, p. 27) ha denominado experiencia crucial y que en nuestro caso hemos denominado prueba débil. Este tipo de razonamiento es a menudo utilizado por los estudiantes en el momento de validar una conjetura, sin embargo es muy probable que puedan hallarse con facilidad contraejemplos que falseen la

afirmación dada, ello dependerá de la intención del estudiante en la medida en que genere o no en él incertidumbre. Sin embargo la respuesta a la pregunta posterior, es decir la pregunta siete (7), da cuenta del carácter genérico que la estudiante la ha dado a la situación pues para ello utiliza la conjetura que planteó inicialmente en la cual anotaba que se trataba de una secuencia en la que el lado el cuadrado aumentaba de dos en dos, luego ello le sirvió para saber que el cuadrado de la posición 5 debía tener de lado 10 centímetros, dato que era necesario para obtener la respuesta de la pregunta planteada. *“Porque en la posición 5 el cuadrado tiene lado 10 y como $10*10=100$ ”*. Dicha respuesta es entonces validada teniendo en cuenta que hay una constante en los cuadrados dados y ello permite corroborar que aunque no haya una gráfica que represente dicho cuadrado, la estudiante encuentra posible que el próximo dato tenga que ver con el anterior y ello es pues un indicio de que la situación permite evocar otros objetos que aunque no estén ahí son producto de los anteriores y en esta medida tener garantías de que las cualidades en los cuadrados u objetos matemáticos puestos en escena se repiten infinitamente.

Aunque la estudiante realice pruebas en las que se presenten vestigios de generalidad, la respuesta a la pregunta ocho (8), pone en evidencia que cuando las situaciones son puestas en lenguaje algebraico resultan ser ajenas a lo que se pensó con anterioridad.

Para esta estudiante es claro que n es la posición del cuadrado, que hay una secuencia en valor del lado del cuadrado y que de ello depende el valor del perímetro y el valor del área. Sin embargo el enunciado algebraico termina por confundirla, y esto es evidente cuando no puede validar la proposición que plantea. A pesar de que ella conoce el lugar de la n en la situación la confunde con el

cuadrado y olvida totalmente que en el paréntesis hay una resta. Con el ánimo de profundizar en el sistema de prueba que empleó la estudiante B, se diseñó la siguiente entrevista

Observador: explica lo que significa un número elevado a la dos

Estudiante: como lo dije anteriormente estar elevado a la dos significa que es un cuadrado, pues geoméricamente.

Observador: luego tiene que todo el paréntesis está elevado a la dos. ¿Es posible que acá no se cumpla lo mismo que ha descrito anteriormente? ¿En este caso no se trata también de un cuadrado?

Estudiante: si es lo mismo, solo que en la prueba veo que me confundí.

Observador: ahora, si usted señala que el 2 es la posición entonces que hacemos con lo que usted misma afirmó ahora acerca de lo que significa la n en esta situación.

Estudiante: simplemente me confundí, pero si me permite puedo corregirlo y en mis palabras la respuesta debe ser entendida así: 4 multiplicado por la posición y le resto 8, a ese resultado lo elevo al cuadrado y si esa es la respuesta me debe dar el área de cada una de los cuadrados.

Observador: bien, entonces intente responder de nuevo la pregunta

Estudiante: *“veamos si sirve la respuesta 1, pues debo mirar una por una ya que todas están elevadas al cuadrado, por tanto dan cuenta de que geoméricamente se trata de un área: $2*1=2$ y $2^2=4$ bien obtuve el primero, $2*2=4^2=16$ bien la segunda, $2*3=6^2=36$ la tercera; esa es la respuesta, lo he comprobado con las operaciones; a demás he notado que cuando multiplico el 2 por la posición me da el lado del cuadrado y eso es obvio ya que el lado va aumentando de dos en dos, podría entonces decir que el lado de cualquier cuadrado así como el perímetro y el área tiene una fórmula y es $2n$ y simplemente este elevado a la dos me da el área”.*

Luego de este diálogo con la estudiante, ella pudo elaborar adecuadamente un proceso de validación que le permitió en un solo paso refutar la respuesta que ella misma había planteado, se trataba entonces de una alternativa; como puede observarse al iniciar de nuevo la búsqueda de la respuesta ella no olvida el valor de la n y lo reemplaza en cada caso, observando que dado el caso en que se encontrara el valor del área utilizando dicha proposición esa sería la respuesta. Se le pide entonces que verifique que las demás respuestas no son adecuadas, para esto emplea el mismo procedimiento anterior y al ver que con estas otras proposiciones no se hallaba el área simplemente afirmaba que no se podía. Este caso es una representación de que el contraejemplo, es un tipo de prueba que determina la validez o no de una conjetura; en tanto permite enunciar que existe por lo menos un caso en el cual la proposición no es válida; de esta manera la estudiante B prueba a partir del uso lógico de algoritmos matemáticos y convenciéndose que al ocurrir para algunos casos ocurre, para todos cuál es la respuesta válida, por lo tanto empleando el mismo método intenta corroborar que las otras opciones no serían las indicadas para responder la pregunta planteada. Este procedimiento en donde se tiene la certeza de que la conjetura es válida y además se prueba usando lógicamente algoritmos matemáticos se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte. Para responder la pregunta número diez y seis utiliza el mismo procedimiento que empleó la estudiante anterior, es decir utiliza las preguntas anteriores y con base en ellas genera la conjetura con la cual responde dicha pregunta.

4.5.2.3 Estudiante C

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | X | | | | X | | | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | | | X | X | | | | | X | | | | | | | X | X |
| Media | | | | | | | | | | | X | X | X | X | X | | | |
| Fuerte | | X | X | | | | X | X | X | | | | | | | X | | |

Cuadro N° 4 Tipos de pruebas realizadas por al estudiante C

La estudiante presentó dificultades para resolver la pregunta número uno (1), pues utilizó de manera incorrecta procedimientos matemáticos:

1. Coloque la a porque 2 por 2 es igual a 4 y 4 por 2 es igual a 8 y 8 es la mitad de 4.

Inicialmente la estudiante C recurre a multiplicar $2 \cdot 2$, pues el área de un cuadrado se halla multiplicando $L \cdot L$, sin embargo ella realizó dicha operación convencida de que se multiplica el valor del lado por 2, por lo que era fácil determinar que al multiplicar el valor del lado del segundo cuadrado por 2, el resultado era el doble del área anterior. Sin embargo observemos lo que ocurrió más adelante; para determinar en la siguiente pregunta el valor del perímetro del cuadrado A y B, realizó correctamente la operación que determina el valor del perímetro: *“coloque la d porque en el perímetro se suman los lados entonces la B da 16 y la de A da 8 y el doble de 8 es 16”*. Dicha respuesta da cuenta de que el perímetro cualidad de un objeto geométrico, y ser el doble de es claro para ella. Ahora nos centraremos en las preguntas acerca del área y observaremos cuál es su justificación para la respuesta dada.

Al igual que las anteriores estudiantes, María Camila justifica la respuesta enunciada a la pregunta número tres (3) suponiendo que se trata de una secuencia:

3. Coloque la a. porque en la figura se suma de 2 en 2 entonces la 5 daría 10 y se suma los lados y da 40.

Ello da cuenta que la estudiante a partir de la observación que hace de los cuadrados dados, genera conjeturas que le permiten conciliar la idea de que existe una relación entre éstos y que dicha relación se repite indefinidamente.

Pese a que la estudiante afirmó que entendía la n como la posición que ocupa cada cuadrado, *yo entendi que la n era como una posición* no pudo justificar adecuadamente la respuesta dada: “coloque la b porque era el que más se acercaba”.

Observador: ¿en su justificación anotado que la respuesta dada coincidía con la que más se acercaba a qué?

Estudiante: a lo que me estaban preguntado, o sea al perímetro

Observador: ¿y por qué esa respuesta es la que se acerca y las otras no?

Estudiante: porque antes de responder la pregunta realice lo siguiente: como sé que los cuadrados van creciendo cada dos, o sea de dos en dos pensé que así como el lado aumenta el perímetro también debe aumentar, entonces sume $2+2+2+2=8$, $4+4+4+4=16$, $6+6+6+6=24$, $8+8+8+8=36$ y si veo por separado cada respuesta 8, 16, 24, 36 esto está aumentando cada 8 y $8n$ era la respuesta más cercana a 8.

Observador: pero sabe cuál es la diferencia entre 8 y $8n$.

Estudiante: sí, la n

Observador: y eso que significa

Estudiante: la posición de cada figura, lo que no entiendo es que tiene que ver eso ahí.

Observador: recuerde las sumas que realizó. ¿Qué era eso que sumaba?

Estudiante: sumaba el lado del cuadrado

Observador: y ese valor del lado de qué depende

Estudiante: pues del lugar donde esté el cuadrado, o sea que si esta de primero el lado mide 2, si esta de segundas el lado mide 4, si esta de tercero el lado mide 6 y así sigue.

Observador: y estar de primero, o de segundas o de tercero que tiene que ver con la posición

Estudiante: todo porque viene a ser lo mismo

Observador: recuerde de donde salió el numero 8

Estudiante: que entre uno y otro había de diferencia 8

Observador: y cada uno de esos valores salió de realizar una suma dependiendo del valor del lado

Estudiante: si

Observador: y ese valor depende de

Estudiante: de la posición, que es n

Observador: luego que podemos concluir

Estudiante: que 8^n me sirve porque ahí está la diferencia entre cada resultado y esta la posición que es donde sacó el número.

Observador: y porque las otras respuestas son incorrectas

Estudiante: porque no tiene el 8.

Pese a la justificación que inicialmente dio la estudiante, a través de la charla se pudo corroborar que ella se idea conjeturas que le permiten llegar a la respuesta indicada, esto entonces afirma que no se ha quedado tan solo en lo que puede verse en el gráfico, sino que además analiza con detalle lo que allí está ocurriendo, razón para predecir que camina hacia la generalización, y como bien lo afirma Balacheff

No obstante, la estudiante fracasa en su conjetura al responder la pregunta número seis (6) pues ella anota: “coloque la b porque en cada cuadrado se multiplica 2 veces (el doble)”. Ello muestra que aunque entiende que el valor del lado del cuadrado es 2 más que el anterior, confunde esta afirmación con ser el doble de y por ello

realiza la anterior operación. Durante la entrevista ella insiste que esa es la respuesta correcta, pues si se observa el valor del perímetro del cuadrado A y el valor del perímetro del cuadrado B, uno es el doble del otro, es decir 16 es el doble de 8; por lo tanto si ello ocurre aquí y si es verdad que se trata de una secuencia entonces ocurrirá siempre. Puede notarse que aunque piensa de manera general reduce su análisis a los dos primeros casos y ello reduce su justificación, poniéndola en términos de Balacheff dentro del tipo de prueba empiricismo ingenuo y dentro de lo aquí se ha denominado tipo de prueba débil.

Acudiendo a las respuestas anteriores, puede afirmarse que la estudiante realiza con poca comprensión operaciones que le permiten concluir con la respuesta correcta, pues pese a su dificultad para justificar, al responder la pregunta número siete (7) anota: *“coloque la b porque el 5 es el 10 y $10*10= 100$ ”* luego ello nos da indicios para pensar que genera conjeturas que le son creadas a partir de lo que observa, determinado que lo que realmente es fallido en su justificación es la falta de apropiación del objeto matemático puesto en escena, en este caso el perímetro y el área del cuadrado, y de una cantidad aritmética “ser el doble de”.

Para justificar la respuesta que la estudiante dio para la pregunta número 8 insistió que lo había hecho por azar, sin embargo en una posterior entrevista se evidenció que había creado conjeturas que no pudo probar y finalmente concluyó que lo había hecho por azar.

Observador: para responder esa pregunta que debe saber

Estudiante: debo saber que me están preguntando por el área

Observador: y sabe lo que significa el n-esimo término

Estudiante: si el ultimo termino, el que queda por allá en el infinito

Observador: y que estrategia seguiría para saber el valor del área de es cuadrada

Estudiante: pues yo lo que hice fue ver que era una secuencia que iba de dos en dos o sea 2, 4, 6, 8, 10

Observador: y ello para que es útil

Estudiante: pues yo lo que hice fue ver que en las respuestas había un 2 eso debía ser algo. Pero me enredé entonces luego puse al azar $(2n)^2$.

Observador: bien, recuerda lo que significa la n

Estudiante: si la posición

Observador: sabe lo que significa estar elevado al cuadrado.

Estudiante: eso lo que representa es un área.

Observador: de las respuestas dadas cuál de ellas está elevado al cuadrado

Estudiante: todas, por eso es que cualquiera puede ser

Observador: ¿cómo puede determinar cuál de todas es?

Prueba que garantiza que aunque existen errores conceptuales, la estudiante es consciente que la situación se trata de una secuencia, donde la n es la posición

Estudiante: pues como sé que el 2 es importante descarto $(4n - 8)^2$ y veo si con las otras me sirve

Observador: y cómo sería eso

Estudiante: pues yo creería que debo reemplazar la n o sea cambiar la n y la que me de esa es.

Para responder las posteriores preguntas la estudiante emplea gráficos y realiza conteos, para justificar entonces la pregunta número diez y seis (16) utiliza dichos gráficos y anota: “coloque la c porque si uno coloca 4 cortes da 8 figuras simétricas, si uno coloca dos cortes da 4 figuras simétricas, si uno coloca 3 cortes da 6 figuras simétricas, etc.”. Dicha aserción evidencia que a pesar de que después de tan solo tres casos se supone una conjetura general, la estudiante lo asume así y compara los resultados obtenidos con las respuestas dadas en dicha pregunta y con base en esto da una

conclusión; esto es entonces un indicio de que la estudiante puede pensar a partir de un caso particular en un caso general y procura probarlo mediante gráficos y teoría. Comprobar la falsedad de las respuestas dadas, es una forma de probar la validez de una proposición, esta estudiante también comprueba, a partir del empleo de algoritmos matemáticos que las anotadas afirmaciones no son válidas, por lo tanto esto le implica que la opción que queda es la que le permite resolver la pregunta. Este procedimiento se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte, pues emplea algoritmos matemáticos de forma lógica y de esta manera concluye, sin embargo el uso de contraejemplos es una evidencia con la que se supone que también puede enmarcarse dentro del tipo de prueba eliminación de absurdos.

4.5.2.4 Estudiante D

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | | | | | | | | | | | | X | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | X | X | X | X | X | X | X | | X | | X | X | | | | X | X |
| Media | | | | | | | | | X | | X | | | X | X | | | |
| Fuerte | | | X | | | X | X | | | | | | | | | | | |

Cuadro N° 5 Tipos de prueba realizadas por la estudiante D

Al igual que las anteriores estudiantes, esta estudiante responde la pregunta número tres (3) teniendo en cuenta que el lado de los cuadrados es dos más que el anterior. A ello entonces responde:

3) Coloque la (8) porque el cuadrado es igual a 10 y multiplique 2 veces 10 y me dio 100

En una posterior entrevista con la estudiante ella comentó que en principio no sabía qué hacer para responder la pregunta, pues no había figura en la posición 5, sin embargo anota que después de observar los cuadrados se dio cuenta que el lado iba aumentando 2 más que el anterior por lo que supuso que el próximo cuadrado debía ser $8+2$ lo que da como resultado 10, de esta manera pudo hallar una respuesta que a pesar de que es incorrecta, es un indicio de que la estudiante a conjeturado y prueba a través de la observación de los objetos estudiados que dicha conjetura es válida y se cumple para cualquier término de la situación.

No obstante en la siguiente pregunta, aquella que da cuenta del n -ésimo término no se obtuvo una buena respuesta *“coloque la b porque el perímetro del cuadrado #1 es 4 es decir (n) y luego le reste ocho y me dio 4 que es el perímetro”*, esta estudiante confunde la posición con el valor del lado del cuadrado, es decir ella inicialmente considera que la n indica el lado no la posición, dicha respuesta nos da indicios de que la estudiante confunde el perímetro con el área y es evidente pues cabe a notar que la justificación que inicialmente dio acerca de la respuesta dada a las primeras preguntas fue: *“respondí la a en la primera pregunta porque en el momento no sabía cuál era el área entonces yo pensé que el área se sumaba y coloque esa respuesta porque 2 es la mitad de 4. Coloque la b en la pregunta 2 porque el área lo estaba sumando y por eso pensé que el cuadrado #1 es 2 y es el doble de 4”*. A lo anterior cabe sumarle que pese a que la justificación dada a la respuesta de la tercera pregunta fue lo correcta, se continuo presentando faltas teóricas concernientes al área y al perímetro, de ahí que responda en la pregunta número cinco (5): *2coloque la b porque pensé que al relación lado por lado era el perímetro*”. Prueba de ello es también la respuesta dada a la pregunta número seis (6): *“coloque la b porque el perímetro es la suma de todos los lados”*. Dado que se presentaron hasta este

momento de la entrevista fallas a nivel teórico, se buscó la manera para que ella misma cayera en cuenta de su falta de concentración.

Observador: ¿qué operación realizó para responder la pregunta número 3?

Estudiante: multipliqué

Observador: ¿y porque realizó dicha operación?

Estudiante: porque en esa pregunta había que responder cual era el perímetro

Observador: ¿qué operación realizó para resolver la pregunta número 4?

Estudiante: una resta

Observador: ¿y porque realizó dicha operación?

Estudiante: se me ocurrió, fue tal vez por coincidencia

Observador: ¿porque le estaban preguntando?

Estudiante: por el perímetro del n-esimo término

Observador: y sabe usted que significa la palabra n-esimo

Estudiante: si, el ultimo, uno que no se cual es, puede ser cualquiera.

Observador: anteriormente usted dijo que había multiplicado para hallar el perímetro. ¿Si acá le piden que halle la misma cualidad qué operación debe realizar?

Estudiante: así una multiplicación

Observador: una multiplicación entre quienes

Estudiante: entre dos lados del cuadrado

Como puede observarse la estudiante hasta este momento presenta entonces dudas teóricas como bien se anotó con anterioridad, sin embargo ella ha realizado conjeturas que justifica erróneamente por los motivos expuestos, pero que son una muestra de que intenta preguntarse por lo que no ve, a través de los datos que puede extraer de los demás objetos puestos en escena.

Posteriormente encontramos que la estudiante respondió en la pregunta número siete (7) “coloque la c porque el cuadrado #5 equivale a 10 y luego lo multiplico 2 veces y me da 100”. Ello entonces continúa afirmando los errores conceptuales de la estudiante, y a su vez corrobora que realiza predicciones y se aventura a dar respuestas que son generadas a partir de su observación consiente. Prueba de ello es la respuesta dada a la pregunta número ocho (8): “coloque la a porque es la única que respuesta que al cambiar la n por el 1, 2, 3, 4 da el resultado del área”. La anterior respuesta es una posición que ocupa el cuadrado y para este caso coincidió con realizar multiplicaciones entre los lados para determinar el área y así poder concluir.

4.5.2.5 Estudiante E

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Azar | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | X | | | X | | | | | X | | | | | | | | X | X |
| Media | | | | | | | | | | | | X | X | X | X | | | | |
| Fuerte | | | X | X | | X | X | X | X | | X | | | | | X | | | |

Cuadro N° 6 Tipos de prueba utilizados por la estudiante E

La estudiante justificó la respuesta dada a la pregunta número tres (3) de la siguiente manera

• 3 A Porque la posición 5 es 10 cm y $10+10+10+10$
40 y cada lado mide 10.

Puede observarse que la estudiante asume implícitamente que existe una relación entre el lado de los cuadrados dados, de modo que éste aumenta dos más que el anterior, dicha conjetura es entonces

validada a través de la observación de estos objetos matemáticos. Relación que le ayuda a afirmar la respuesta que describe.

Puede corroborarse que la estudiante imagina que en dicha situación hay una secuencia, pues justifica la respuesta dada a la pregunta número cuatro (4) de la siguiente forma:

· 4 B
Porque n significa una posición y 8 multiplicado por una posición da el área de esta misma.

Esta respuesta es una evidencia que permite concebir la idea de que la estudiante realiza conjeturas que prueba por medio de la utilización de operaciones aritméticas, en este caso de multiplicaciones, las cuales responden al producto equivalente al perímetro de cada una de los cuadrados que se encuentran en la situación y dar por hecho que dado este fenómeno entonces se puede concluir que se cumple para cualquier otro cuadrado que no esté dado.

Cuando responde la pregunta número 6 encuentra que la respuesta correcta es la misma que la respuesta a la número 4 solo que difieren en el lenguaje que se utiliza: *“la respuesta es la misma que la de la 4 solo que aquí está escrita con palabras ya”*.

· 6 d
El perímetro de el cuadro de la posición 1 mas 8 es el perímetro de la posición 2 mas 8 es el perímetro de la posición 3...

Como puede notarse los puntos suspensivos dan cuenta que ello se repite indefinidamente; lo que nos sugiere pensar que la estudiante emplea conjeturas prácticas que le permiten responder adecuadamente y a su vez no pierde de vista que se trata de una prueba en la que es posible considerar que hay una secuencia que

admite construir cuadrados no dados con relación a lo que ya se conoce y se asume como verdadero.

Al igual que las anteriores afirmaciones dadas por la estudiante la pregunta número siete (7) no es una excepción a la relación que ella misma ha encontrado allí.

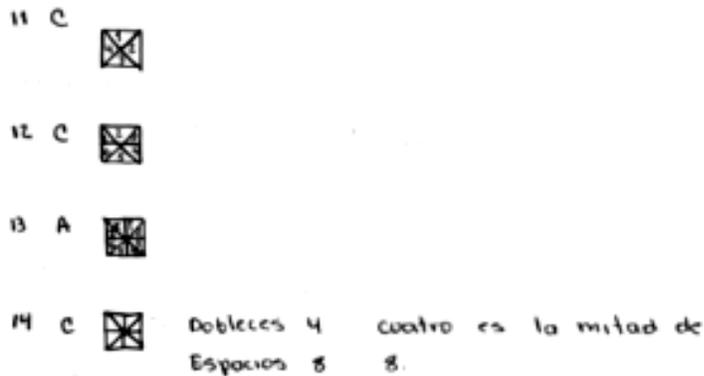
7 A
Porque dependiendo la posición de la 2 figura aumenta según la posición de la 1

Para justificar la respuesta a la pregunta número ocho (8) realiza operaciones con cada respuesta, teniendo en cuenta que la n es la posición que ocupa cada cuadrado, sin embargo el resultado que obtiene no es el correcto. Pese a ello, es decir a que comete errores operativos no puede negarse que la estudiante comprende que el enunciado va más allá de los 4 cuadrados puestos en escena y ello le permite tomar conciencia de que existen otros cuadrados de los cuales se puede conocer el área y el perímetro dependiendo del valor del lado y ello de la posición que ocupe.

Posteriormente para justificar la respuesta que describe a la pregunta número diez y seis (16), emplea los casos anteriores y plantea la siguiente conjetura: *“la respuesta es la c porque si hago 4 dobleces y 4 es la mitad de 8, si hago 3 dobleces 3 es la mitad de 6, si hago 2 dobleces 2 es la mitad de 4...”* dicha conjetura es validada por la estudiante en forma concreta, es decir ella traza otros segmentos por la mitad del cuadrado y cuenta las figuras simétricas resultantes y encuentra que éste número es el doble del número de veces en que ha dividido el cuadrado. La estudiante construye la siguiente conjetura: *“supongamos que n es el número de veces que trazo rectas entonces para saber cuántas figuras simétricas quedan simplemente lo multiplico por 2, o sea $2n$.”*

*Y esto es verdad porque si trazo una recta sería $2*1=2$ si trazo 2 rectas sería $2*2=4$, si trazo 3 rectas sería $3*2=6$ y eso es verdad*

porque ya lo hice con dibujos y me dio". Esta prueba es una muestra de que esta estudiante a partir de la observación de un caso, elabora una conjetura que válida por medio de algoritmos matemáticos válidos, por lo que tal procedimiento se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte.



4.5.2.6 Estudiante F

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | | | | X | | | | | | | | | | | | | X | X |
| Media | X | X | | | | | | X | | X | X | X | X | X | | | | |
| Fuerte | | | X | X | X | X | X | | X | | | | | | | X | | |

Cuadro N° 7 Tipos de prueba utilizados por la estudiante F

La respuesta que la estudiante dio a la pregunta número tres (3), surgió a partir de considerar al igual que sus anteriores compañeras, que dicha situación se refiere a una secuencia en la cual el lado del cuadrado aumenta 2 más que al anterior, por esto ella realiza la siguiente conjetura

3 El perímetro de la figura 5 es 40 ya que los centímetros de base y altura va de 2 en 2 por lo tanto la figura 5 mide 10 cm entonces $10+10+10+10=40$ cm que es el perímetro. (R/a)

Para responder la pregunta número cuatro (4) la estudiante utilizó cálculos aritméticos en los que tuvo en cuenta que la n es la posición que ocupa cada cuadrado

4 (R/b) Yo respondí B ya que fue la fórmula en la cual cogió la posición y la multiplicaba por 8 y me daba el perímetro
Ej. $8 \times 2 = 16$ el cuadro #2 tiene como perímetro 16

Es claro que ella aunque no genere ninguna conjetura, toma las respuestas y las trata de igual forma, es decir prueba con cada una de ellas y supone que al cambiar una letra cuyo significado obedece a la posición, por determinados valores numéricos de cómo resultado el perímetro, el cual ella haya por otros métodos, de las figuras que observa entonces dará para cualquier otra posición. Este procedimiento lo realiza ejecutando algunas operaciones, de tal modo que el análisis numérico le permite establecer la validez de su proposición, este procedimiento se enmarca entonces dentro del tipo de prueba fuerte.

La respuesta a la pregunta número seis (6) al igual que las anteriores, es dada a partir de elaborar conjeturas las cuales son validadas a partir de la observación y de los datos que se obtienen de los cuadrados dados, en este caso la estudiante respondió

6 (R/d) Yo respondí (d) ya que el perímetro va aumentando 8 cada vez que el cuadro es más grande.
Ej. Cuadro #1: perímetro 8, Cuadro #2: perímetro 16, Cuadro #3: perímetro 24, Cuadro #4: perímetro 32

La estudiante es consciente de que la situación inicial es una secuencia en la que un objeto dado depende del anterior, conjetura que afirma inicialmente pero que va validando a partir de la

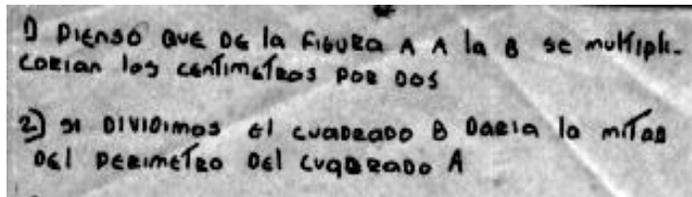
interacción con las demás preguntas propuestas. La segunda situación al igual que la primera genera en la estudiante cierta incertidumbre, pues las posteriores preguntas le permiten suponer que se trata de un suceso que se repite continuamente, con respecto a ello la estudiante anota: *“la respuesta a la pregunta trece, catorce y quince me han puesto a pensar que esto como pasa en le cuadrado se repite, ello lo pude saber con mayor seguridad al responder la pregunta 16 ya que esa pregunta decía que puede decirse siempre que... y eso es parecido a la primera parte de la evaluación”*.

4.5.2.7 Estudiante L

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Media | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Fuerte | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cuadro N° 8 Tipos de prueba utilizados por el estudiante L

El estudiante se negó a responder durante la entrevista, dado que según él no llevo a cabo ningún proceso, si no que cada una de las preguntas fue respondida al azar. Sin embargo conocer el proceso con el cuál manifestó responder la pregunta uno (1) y dos (2), únicas preguntas donde no utilizó el tipo de prueba por Azar, suscitó en nosotros la idea de que generó en un primer momento conjeturas que si bien no le permitieron concluir con la respuesta acertada son objeto de que el estudiante piensa en forma general y procura evidenciar que dicha situación es un fenómeno de cambio donde se presenta un secuencia.



4.5.2.8 Estudiante K

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Media | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Fuerte | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cuadro N° 9 Tipos de prueba utilizados por Estudiante K

Al igual que el estudiante anterior, este estudiante se negó a responder la entrevista, justificando que había empleado el tipo de prueba por Azar, pues no entendía lo que allí se estaba preguntando

4.5.2.9 Estudiante J

| Pregunta Tipo de pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | | | X | X | X | X | | | | | | | | |
| Eliminación De absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | | | X | X | X | | | | | | | | X | | | X | X |
| Media | | X | | | | | | | | | X | X | X | | X | | | |
| Fuerte | | | X | | | | | | | | | | | | | X | | |

Cuadro N° 10 Tipos de prueba utilizados por el estudiante J

El estudiante para responder la pregunta número tres (3) empleó un gráfico con el cual representó el cuadrado cuya posición es la 5,

expresando  ello da cuenta entonces que éste

supone que existen otros cuadrados donde el lado tendrá como valor 2 más que el anterior, lo que refleja que el estudiante acoge los datos dados en la situación y los utiliza para replantear una hipótesis que prueba a través del gráfico que construye.

El planteamiento con el cual el estudiante responde la pregunta Cuatro (4), nos sugiere la idea de que para él la fórmula se designa a partir del gráfico, es decir, el responde: *“porque cualquier número elevado al cuadrado da el doble”*, esto es un vestigio a demás de qué ocurre lo siguiente: el gráfico representa un cuadrado, la fórmula designa una cantidad elevada al cuadrado, por tanto es esta la respuesta válida; por otro lado encontramos que hay un error conceptual con el cual justifica lo que ocurre con el área y el lado del cuadrado de la primera posición, es decir, que el área es el doble del lado. Ello entonces nos permite conciliar la idea de que pese a que el estudiante utiliza incorrectamente conceptos matemáticos, construye una conjetura con la que asegura que siempre ocurrirá que el valor del lado es la mitad del valor del área y ello lo justifica por medio de la noción que tiene con respecto a un número elevado al cuadrado.

Igual que en el caso anterior, el estudiante responde la pregunta número seis (6) a partir de lo que conjetura según lo que observa, en este sentido el supone que ocurre para todos los casos que el perímetro de un cuadrado sea siempre el doble del anterior, pues esto se evidencia entre los cuadrados de la posición 1 y 2, luego esta observación es la prueba que da para validar la conjetura planteada por él.

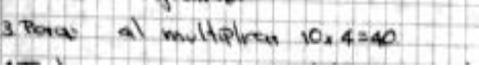
La justificación que el estudiante da con respecto a la respuesta de la pregunta 16, nos señala que éste a partir de la noción que tiene de diagonal considera que ésta siempre dividirá una figura en la mitad, por ello responde: *“si porque cortemos una figura con una diagonal es la mitad”*. Dicha respuesta es una conjetura la cual el estudiante válida a partir de la noción que tiene de diagonal, a su vez ésta es

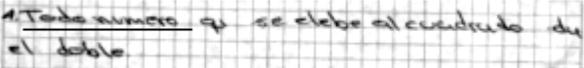
también validada por medio de las preguntas anteriores con las cuales observó que dado un segmento que pase por la mitad del cuadrado divide en dos partes dicha figura.

4.5.2.10 Estudiante I

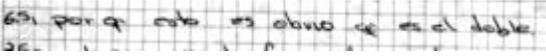
| Pregunta Tipo de Prueba | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | | X | | X | X | X | X | | | | | | | | |
| Eliminación de Absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | X | | X | | X | | | | | | | | | | | X | X |
| Media | | | | | | | | | | | X | X | X | X | X | | | |
| Fuerte | | | X | | | | | | | | | | | | | X | | |

Cuadro N° 10 Tipos de prueba utilizados por el estudiante I

El estudiante para responder la pregunta número 3 realiza la siguiente operación  , dichos factores son tomados a partir de la relación que el estudiante establece a partir de las figuras dadas, éste al igual que los demás estudiantes supone la idea de que el valor del lado del cuadrado va aumentado 2 más que el anterior por ello el primer factor , el 10 obedece a que el valor del lado del cuadrado cuya posición es la número 4 es 8, por ello el valor del lado del cuadrado de la posición 5 será 10; y el segundo factor , el número 4, resulta de la cantidad de lados del cuadrado.

La misma situación que se presentó con el anterior estudiante en la pregunta número 4, se presentó con éste. Ambos consideran que todo número que se eleve al cuadrado da el doble  , situación que se presenta en relación con el valor del lado y el área del cuadrado cuya posición es la número 1.

Para responder la pregunta número seis (6) el estudiante argumenta que dicha pregunta es lo suficientemente lógica, por tanto es obvio

como bien el lo anota,  , que el

perímetro en cada caso sea el doble del anterior, y ello lo prueba a partir de un caso particular, cuadrado de la posición 1 y 2, donde ocurrela anterior situación. Por tanto esta prueba la enmarcamos dentro del tipo de prueba débil pues utiliza de manera inadecuada conceptos matemáticos y su conjetura es muy poco general.

Durante la entrevista el estudiante afirma que lo que ha respondido ha sido producto casi del azar. Sin embargo se construyó un dialogo, dado que las anteriores respuestas no han sido muy satisfactorias.

Observador: escribió casi al azar que la respuesta correcta era 10cm^2 . ¿Qué significado tiene la palabra casi?

Estudiante: casi porque pensé que podría ser otra, pero me enredé y a lo último puse esa respuesta

Observador: ¿y qué otra respuesta podría ser?

Estudiante: la verdad es que yo creía que era 100cm^2 , pero no creí porque ese número es muy grande y no se me enredé

Observador: leamos de nuevo la pregunta: el área que se encuentra en la posición número 5 es

Observador: ¿porque están preguntado?

Estudiante: están preguntando por el área del cuadrado de la posición 5

Observador: ¿y sabe cómo se calcula el área de un cuadrado?

Estudiante: creo que multiplicando lado * lado.

Observador: y sabe que significa la posición

Estudiante: si, que el cuadrado 1, el cuadrado 2, el cuadrado 3 y así

Observador: en los cuadrados dados usted nota alguna relación

Estudiante: si que van aumentando su tamaño, y que el lado va aumentando también de 2 en 2

Observador: luego cual sería el valor del lado del cuadrado ubicado en la posición número 5

Estudiante: según eso sería 10 por que al último que es 8 se le suman 2 y eso da 4.

Observador: y dado que ya sabe cuál es el valor del lado del cuadrado, ¿cuál sería el área?

Estudiante: sería multiplicar $10 \cdot 10 = 100$. O sea que el área es 100m^2 .

Luego observamos que la pregunta número ocho (8) no podía ser respondida más que por el azar ya que el estudiante, pese a que sabe que se le está preguntando por algo general, no entiende que la n es sinónimo de la posición que ocupa cada cuadrado en la situación.

A pesar que el estudiante realiza intentos por predecir la respuesta correcta, su falta de análisis, observación y sus errores conceptuales no le permiten realizar conjeturas que pueda probar mediante algún método, por tanto la conclusión acerca de dicha actividad señala que aunque en él se generen incertidumbres con base en las situaciones planteadas, la poca claridad en los conceptos le impide que pueda desarrollar una hipótesis y a su vez sustentarla.

4.5.2.11 Estudiante G

| Pregunta Tipo de Prueba | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | X | X | | | | X | | | | | | X | | X | X | |
| Eliminación de Absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | X | | | X | X | X | | | X | | | X | | X | | | X |
| Media | | | | | | | | | X | | X | X | | | | | | |
| Fuerte | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cuadro N° 12 Tipo de prueba utilizados por el estudiante G

Como puede observarse en el cuadro el estudiante pese a que dibujó al lado del cuadrado de la posición 4, otro cuyo lado era igual a 10 cm, no respondió con acierto la mayoría de las preguntas; al iniciar la entrevista afirmó que se trataba de una prueba muy difícil y que muchas de los conceptos por lo que allí se preguntaba él no los sabía. Sin embargo se generó en nosotros una pequeña duda la cual resultó a partir de suponer que si el estudiante construyó otro cuadrado el cual tenía el valor del lado, podría decirse que no realizó correctamente la actividad por la falta de conceptos claros, luego ello no fue un obstáculo para generar una conjetura que hubiera podido responderle muchas de las preguntas, planteadas por lo que supusimos que de saber con mayor exactitud cada concepto hubiese podido generar varias conjeturas y a su vez ser puestas en prueba y concluir con un buen resultado. La mayoría de pruebas están entonces enmarcadas dentro del tipo de prueba Débil, ya que sus argumentaciones no son producto del conocimiento frente a los temas allí tratados y por tanto hacen parte de ninguna conjetura que haya sido objeto de validación.

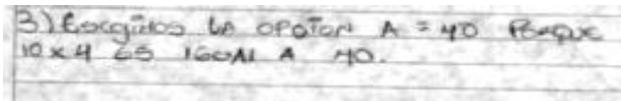
4.5.2.12 Estudiante H

| Pregunta Tipo de prueba | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Azar | | | | X | | | | X | | | | | | X | | | | |
| Eliminación de absurdos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Débil | X | | | | X | | X | | | X | | X | | | X | | X | X |
| Media | | X | | | | | | | | | X | | X | | | | | |
| fuerte | | | X | | | X | | | X | | | | | | | X | | |

Cuadro N° 13 Tipos de prueba utilizado por la estudiante H

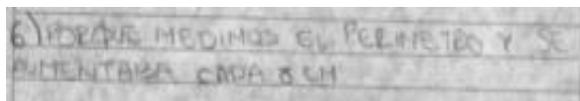
La estudiante para responder la pregunta número tres (3), utiliza un gráfico con el cual relaciona el lado de los demás cuadrados, en este

sentido supone que el lado del cuadrado de la posición número cinco (5) es 10, dicha conjetura la valida tras observar que el valor del lado del cuadrado va aumentando teniendo en cuenta el anterior. De esta manera la respuesta que obtiene la valida tras realizar una operación teniendo en cuenta lo dicho anteriormente:



Durante la entrevista la estudiante afirma que la respuesta dada a la pregunta número cuatro (4) fue objeto del azar, pues no comprendía lo que allí se estaba preguntando, situación que se corrobora en la siguiente pregunta donde afirma que el valor del perímetro y del área dependen de su medida y no de la posición que ocupa. Ella aunque inicialmente observa que hay una posición infiere que ello no es importante pues ésta no implica conocer el valor del perímetro y del área. Por lo que en ningún momento relacionó la cantidad n con la posición que ocupa cada cuadrado.

Para responder la pregunta número seis (6), se utilizó como método el conteo y la comparación en esta sentido la estudiante respondió:



Ella durante la entrevista afirmó que para saber cuál era la respuesta verdadera halló el perímetro de cada cuadrado y al compararlas entre sí noto que cada uno de éstos aumenta 8 más que el anterior, luego respondió que como se trataba de una situación en la que posiblemente habría más cuadrados ello ocurriría siempre.

Dado que la respuesta a la pregunta número siete (7) es equivocada, como un ejercicio a priori se creyó que la estudiante tenía errores conceptuales, sin embargo la entrevista fue de gran ayuda para constatar que se trataba de un error que tenía que ver más con el tiempo que con algo conceptual.

Observador: leamos que dice la pregunta número siete (7)

Estudiante: el área que se encuentra en la posición 5 es

Observador: ¿porque están preguntando allí?

Estudiante: están preguntando por el área del cuadrado de la posición 5

Observador: y usted sabe cómo se calcula el área de un cuadrado

Estudiante: si, se multiplica el lado por el lado

Observador: y usted sabe cuál es el valor del lado del cuadrado que se encuentra en la posición 5.

Estudiante: según el dibujo que hice 10cm, por el de antes es 8 y se le suman 2

Observador: y como justifica la afirmación anterior.

Estudiante: pues con lo que veo el cuadrado 1 es 2, el cuadrado 2 es 4, el cuadrado 3 es 6, el cuadrado 4 es 8, el cuadrado 5 debe ser 10.

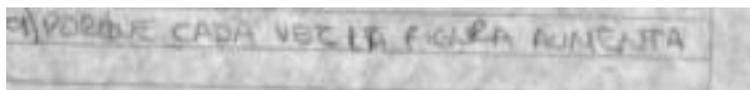
Observador: bueno, y sabiendo el valor del lado del cuadrado como puede hallar el área

Estudiante: pues multiplico $10 \cdot 10 = 100$

Observador: y en su respuesta por que anotó que el área era 10

Estudiante: porque no leí bien, y no entendía en ese momento que me estaban preguntado por el área.

Como lo indica la tabla la estudiante realiza conjeturas que si bien no utiliza para responder adecuadamente las preguntas, son producto de lo que ella a partir de la observación supone como verdadero y cree que se repite infinitamente, en esa medida tiene presente que hay un n-esimo termino el cual como bien lo enuncia en su justificación dada a la respuesta de la pregunta número nueve (9)



Depende de la posición que ocupa, a pesar de que es contradictorio con lo que ya había afirmado anteriormente, ella supone que la posición indica el valor del lado ya que éste va aumentando según la posición que ocupa.

4.5.3 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS OBTENIDOS

4.5.3.1 PREGUNTA NUMERO UNO (1)

GRUPO #1 DE ESTUDIANTES

Esta primera pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil, pues las estudiantes en su mayoría realizaron una lectura errónea de las respuestas descritas, pese a que inicialmente hubo una interpretación clara de la pregunta, esto pudo darse debido a que algunas no tenían claro los conceptos que se estaban evaluando, o simplemente porque la pregunta era sinónimo de ambigüedad.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil, pues las justificaciones que dieron los últimos estudiantes evaluados obedecen a una mala ejecución de operaciones matemáticas y a su vez de una mala interpretación de la misma.

4.5.3.2 PREGUNTA NUMERO DOS (2)

GRUPO #1 DE ESTUDIANTES

A diferencia de la pregunta anterior, la mayoría de las estudiantes respondió acertadamente dicha pregunta, ello debido a que emplearon correctamente procedimientos matemáticos; sin

embargo no se observaron conjeturas que pudiesen ser validadas a través de ellos, por lo tanto esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba media

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Pese a que hubo estudiantes que justificaron su respuesta adecuadamente, hubo situaciones en las cuales las respuestas incorrectas al igual que la anterior equivalían a la inadecuada ejecución de las operaciones planteadas, por ello esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil.

4.5.3.3 PREGUNTA NUMERO TRES (3)

GRUPO #1 DE ESTUDIANTES

La pregunta número tres se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte, ya que las estudiantes ejecutaron conjeturas en las que suponían la existencia de otros cuadrados, los cuales conservaban una relación con el anterior respecto al valor del lado, dicha conjetura fue corroborada por medio de la observación y de operaciones matemática.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Esta respuesta se ubica dentro del tipo de prueba fuerte ya que en su mayoría los estudiantes utilizaron una conjetura la cual probaron por medio de la observación y de una grafica, es decir emplearon los datos que percibieron a partir de los cuadrados dados.

4.5.3.4 PREGUNTA NUMERO CUATRO (4)

GRUPO #1 DE ESTUDIANTES

Las respuestas dadas a esta pregunta se enmarcan dentro del tipo de prueba débil, pues pese a que la opción dada fue la correcta la mayoría no prueba adecuadamente dicha opción, en esta medida los métodos empleados para verificar su conjetura son muy superficiales. Cabe anotar aquí que es posible asegurar que la necesidad de pensar en un proceso general en este nivel de la enseñanza básica va más allá de producir un enunciado y se trata más bien de la capacidad del sujeto aprendiz de validarlo.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Enmarcamos esta pregunta dentro de tipo de prueba débil, porque la mayoría de los estudiantes realizaron conjeturas que no pudieron validar ya que tenían errores conceptuales y ello no les permitió abordar la pregunta correctamente, a su vez muchos desconocieron que la n representaba la posición que ocupaba cada cuadrado.

4.5.3.5 PREGUNTA NUMERO CINCO (5)

GRUPO #1 DE ESTUDIANTES

Dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil, ya que las estudiantes aplicaron mal conceptos y definiciones, a su vez pareciese que olvidaron las anteriores respuestas y modos de actuar pues en la elaboración de la prueba en las preguntas anteriores, algunas incluso parafrasearon los enunciados dados para responder la pregunta dada.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Esta pregunta al igual que la anterior se enmarca dentro del tipo de prueba débil, pues los estudiantes no validaron su conjetura, pues hubo confusiones frente al valor de la posición y a su vez el hecho de no darle un valor a la n significó que esta no hubiese sido tomada en cuenta.

4.5.3.6 PREGUNTA NUMERO SEIS (6)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

La respuesta dada a esta pregunta se enmarcan del tipo de prueba débil, ya que la mitad de las estudiantes se confiaron dado que una de las respuestas correspondía a un solo caso, y de allí simplemente respondieron que como se trataba de una secuencia entonces dicha respuesta era una prueba más de ello. No tuvieron precaución y no probaron con ningún otro caso.

Pese a que la mitad de las estudiantes respondió de manera errónea la pregunta número 6, la otra mitad con base a sus anteriores planteamientos respondió acertadamente, es decir al igual que la pregunta número 4 observaron que el perímetro aumentaba 8 más que el anterior, ello lo probaron a través del conteo y de la anterior fórmula, la cual según ellas daba cuenta del perímetro de cualquier cuadrado que cumpliera la condición de que su lado fuera dos más que el anterior, según se planteaba en la situación; por lo que dicha pregunta se enmarca también dentro del tipo de prueba fuerte.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

La mayoría de los estudiantes para responder a esta pregunta utilizó un caso particular, y a partir de allí concluyeron que se cumpliría para todos los casos, pese a ello dicha afirmación equivale

a una conjetura que si bien no les permitió concluir con la respuesta correcta, la validaron y justificaron a partir de su observación, por lo tanto dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte.

4.5.3.7 PREGUNTA NUMERO SIETE (7)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Pese a que en algunos momentos se olvide el carácter general de la situación, las estudiantes han respondido la pregunta número siete (7) acudiendo a lo que han conjeturado, es decir dando cuenta que se trata de una situación en la que gráficamente se muestra que el valor del lado del cuadrado aumenta 2 más que el anterior, por lo que se supone entonces que el que se encuentra en la posición 5 a pesar de que allí no este, gozara de la misma propiedad, por tanto al saber el valor del lado se tendrá con facilidad el valor de su área. Debido a dicha situación esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

No tuvieron en cuenta la formula con la cual se calcula el área, por esto dicha pregunta puede enmarcarse dentro del tipo de prueba débil.

Sin embargo esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte, ya que los estudiantes emplearon la conjeturan que inicialmente habían planteado, es decir tuvieron en cuenta para designar el valor del cuadrado cuya posición es la número 5, que éste valor aumenta teniendo en cuenta el valor del cuadrado anterior mas 2, pese a ello muchos de ellos no llegaron a la respuesta correcta por falta de atención o simplemente porque se confundieron.

4.5.3.8 PREGUNTA NUMERO OCHO (8)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Pese a los esfuerzos realizados por las estudiantes, esta pregunta no es respondida en forma adecuada, pues algunas olvidan el papel de la n en la fórmula y otras resuelven equivocadamente las operaciones. Sin embargo ellas no pierden de vista que preguntan por algo que es general, es decir, por el área de cualquiera de los cuadrados dados o no, pues siempre han tenido claro que dicha situación revela una secuencia en la que un término depende totalmente del anterior. Dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

A pesar de haber construido una conjetura en relación al valor del lado del cuadrado, los estudiantes en su mayoría respondieron esta pregunta por azar pues afirmaron que no la entendieron, por lo que dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba por azar.

4.5.3.9 PREGUNTA NUMERO NUEVE (9)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Dado que se trata de una relación entre los cuadrados y que se ha estado preguntando por el área y el perímetro, las estudiantes presentaron dificultades para responder dicha pregunta pues hicieron uso de la forma en que se calcula el área y olvidaron el perímetro. Es decir no hubo realmente una buena comprensión de la

pregunta planteada; por lo tanto dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Esta pregunta si bien no obtuvo la respuesta válida, evidencia que los estudiantes olvidan algunos conceptos aprendidos en su época escolar, pues si bien dicha pregunta no fue objeto de ninguna conjetura por parte de los estudiantes, estos consideraron la respuesta cuyo enunciado obedecía a la fórmula para obtener el área de un cuadrado, por lo que se puede afirmar que si conocían la relación lado por lado; por lo tanto esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba débil.

4.5.3.10 PREGUNTA NUMERO DIEZ (10)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Algunas estudiantes respondieron con base a un ejemplo en particular, es decir tuvieron en cuenta un solo caso en el que el valor del perímetro era múltiplo del área, ello equivale a que verificaron su conjetura a través de un contraejemplo, a su vez otras tuvieron en cuenta, actuando de la misma forma, que no en todos los casos ocurría que el perímetro era la mitad del área. Ello entonces da cuenta que utilizan mecanismos de validación apropiados saliéndose de los métodos directos. Por lo tanto esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

La mayoría de los estudiantes para responder a esta pregunta utilizó un caso particular, y a partir de allí concluyeron que se

cumpliría para todos los casos, pese a ello dicha afirmación equivale a una conjetura que si bien no les permitió concluir con la respuesta correcta, la validaron y justificaron a partir de su observación; por esto dicha pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte,

4.5.3.11 PREGUNTA DE LA ONCE (11) A LA QUINCE (15)

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Esta pregunta fue respondida correctamente y no hubo ninguna dificultad ya que las estudiantes tenían una noción acerca de la definición de diagonal, por ello ésta es enmarcada dentro del tipo de prueba media.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

Tuvieron en cuenta el concepto de diagonal y lo aplicaron para responder la pregunta planteada, las proposiciones que les suscitó la pregunta fueron validadas a través del uso de algoritmos matemáticos de forma lógica, por ello estas preguntas se enmarcan dentro del tipo de prueba media.

4.5.3.12 PREGUNTA NÚMERO DIEZ Y SEIS

GRUPO # 1 DE ESTUDIANTES

Esta pregunta fue respondida con base en las anteriores, las estudiantes conjeturaron que siempre el número de segmentos trazados por la mitad del cuadrado iba ser la mitad del número de triángulos resultantes y ello lo probaron verificándolo en algunos casos, es decir, realizando el corte y contando dichos triángulos. Por lo tanto esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte.

GRUPO #2 DE ESTUDIANTES

A partir de las preguntas anteriores generaron una conjetura la cual validaron por medio de lo que iban observando en las respuestas anteriores, su prueba fue entonces objeto de la observación de unos casos, por ello esta pregunta se enmarca dentro del tipo de prueba fuerte.

4.5.3.13 PREGUNTA DE LA DIECISIETE (17) A LA DIECIOCHO (18)

GRUPO # 1 Y # 2 DE ESTUDIANTES

Ambos grupos respondieron dichas preguntas a partir de las condiciones dadas y de sus conocimientos previos, sin embargo las respuestas dadas por ellos no se produjeron por medio del empleo lógico de algoritmos matemáticos, por lo que no pudieron responder con certeza; por lo tanto éstas se enmarcan dentro del tipo de prueba débil.

Capítulo 4

5. CONCLUSIONES

5.1 CONCLUSIONES RELATIVAS AL CUMPLIMIENTO DEL OBJETIVO GENERAL

Los resultados de nuestro trabajo, de lo cual hemos presentado una síntesis, trata sobre las pruebas que emplean los estudiantes para validar una conjetura, a partir de aquello que construyen con base en una situación matemática planteada. Dichos procesos de corta duración no necesariamente caracterizan la racionalidad de los estudiantes entrevistados, los cuales se encuentran entre los 11 y 13 años de edad, pues en general se encontraron diferentes estrategias para justificar sus sistemas de prueba. Los tipos de prueba, suscitados por la investigación, (prueba por azar, eliminación de absurdos, prueba débil, prueba media y prueba fuerte) dan cuenta de un proceso dado por los estudiantes cuando evidencian la pertinencia o no de las conjeturas que utilizan para la resolución y solución de las situaciones matemáticas presentadas, es decir, estos tipos de prueba son producto de las justificaciones que dieron los estudiantes, empleando en las mayoría de los casos algoritmos matemáticos, que si bien no siempre fueron válidos, en todo momento, se convirtieron en una herramienta con la cuál podían dar cuenta de la validez o no de sus proposiciones.

Estos tipo de prueba nos llevaron a diferenciar y analizar los procesos mencionados; y en esta medida éste proceso de clasificación es un medio que le garantiza al profesor aprehenderse de la forma en cómo sus estudiantes explican sus aseveraciones y en este sentido apuntar hacia aquellas dificultades que llevan a éstos a la no comprensión de algunos

conceptos matemáticos; sin embargo es importante anotar que estos tipos de prueba no permiten precisar el nivel, pues bien puede presentarse que, pese a que emplee algoritmos matemáticos no válidos, estaríamos hablando de una prueba débil, puede suceder que finalmente elija la respuesta por azar, es decir, en un proceso de justificación que se enmarque dentro de un tipo de prueba pueden haber síntomas de un nivel de prueba inferior.

Presentar situaciones donde el estudiante asista a su responsabilidad de crear estrategias de solución, es permitirle resolver el problema de la devolución y en esta medida que se de cuenta que su enseñanza aprendizaje depende en gran medida de él mismo. Dentro de nuestro trabajo consideramos que la situación planteada debía otorgarle autonomía al estudiante, de tal modo que en un principio ellos resolvieran el taller sin acudir al observador, con el fin de que las estrategias que utilizaran fueran producto de su observación y análisis; por otro lado cuando se llevó a cabo la entrevista el observador estuvo pendiente de las justificaciones dadas por los estudiantes, actividad fundamental para el proceso de clasificación, sin embargo en el momento en que nos vimos obligados a realizar una intervención lo hicimos, pero sin perder de vista que la validación de las conjeturas eran exclusivas de los estudiantes.

Hemos encontrado en nuestra investigación vestigios de demostración, en la medida en que se produce una prueba matemática; sin embargo es claro que ello depende de la situación que se plantee y por ende de la incertidumbre que genere o no en el estudiante, como lo plantea Fischbein (1982), cuando enuncia lo que entiende a cerca de la creencia cognitiva, “el tipo de convicción intrínseca en intuitiva directamente impuesta por la estructura de la propia”.

5.2 CONCLUSIONES RELATIVAS LA CUMPLIMIENTO DEL OBJETIVO ESPECÍFICO

Dado que fue a partir de la entrevista que se pudo establecer la clasificación, ésta generó un cambio radical en el empleo de la teoría propuesta por Nicolás Balacheff(2000), pues en un principio se tuvo previsto utilizar la clasificación por él presentada para realizar la clasificación de las justificaciones de nuestros estudiantes, sin embargo, dicho proceso no se llevó a cabo, pues las afirmaciones dadas por éstos últimos y la situación presentada no coincidía con la planteada por Balacheff, pues si bien esta apunta también a los mecanismos de prueba, en esta situación los estudiantes acuden a verificaciones parciales o totales de una conjetura a partir de definiciones acerca del tema a tratar, esto lo podemos afirmar teniendo en cuenta que durante esta intervención se presentaron dos momentos: en el primero se derogaba autonomía al estudiantes, los cuales hicieron uso sobre la génesis del concepto a estudiar y partir de allí construir las posible conjeturas y un segundo momento en el cuál se le dada una información de referencia. Por lo tanto se planteó una propuesta en la que los tipos de prueba daban cuenta precisamente de lo que cada uno de los estudiantes planteaba y justificaba, por lo que después de interpretar dichas justificaciones, a partir de este marco conceptual se clasificaron y categorizaron las pruebas.

Es importante no ceñirse entonces a la clasificación, como un resultado a priori pues es relevante el contexto en el que se da el proceso de enseñanza y aprendizaje, concluyendo en diversas formas de justificar y determinar un procedimiento en situaciones matemáticas dadas.

5.3 RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Uno de los aspectos que nos generó una interrogación en medio de la intervención puesta en escena, es la importancia de la comunicación verbal sobre los procedimientos utilizados por los estudiantes, pues en medio de la interacción pueden generarse estrategias diferentes de validación, en la medida en que se presenten discusiones en torno a un tema, que si bien no necesariamente se llegue a una conclusión certera, se pueden dilucidar entre varios estudiantes, los mecanismos que justifican una proposición dada. Llevar a cabo las entrevistas con cada uno de los estudiantes que fueron evaluados por medio de la implementación taller, nos convocó a formularnos un nuevo problema el cual tiene que ver con el papel que juega la interacción social en la demostración y argumentación de los enunciados, siendo la comunicación el principal motor de la validación.

¿Cómo la interacción social permite desarrollar, validar, refutar y dar significado a la demostración como un medio de prueba en la enseñanza básica?

BIBLIOGRAFIA

Balacheff, Nicolás (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate.* Recuperado el 29 de abril de 2008 de <http://atenia.mat.ufegs.br/~portosil/resut2.html>

Balacheff, Nicolás. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Santa fe de Bogotá: una empresa docente.

Corredor, Olga. (2001). *Validación y argumentación de lo matemático en el aula.* Recuperado el 10 de junio de 2008 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2147157> - 18k –

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of matemtics.* Vol 3, nº2. p 9-19

Fortin, A. (1982). *La investigación cualitativa en la prueba del acompañamiento.* Recuperado el 11 de junio de 2008 de <http://www.utp.edu.co> c humana revistas rev 19 gomez.htm

Godino, Juan. (1997). *Significado de la demostración en educación matemática.* Recuperado el 31 de mayo de 2008 de <http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/Godino/Godino97ES.html>.

Isaza, José. (2003). Formulación de problemas y conjeturas. *Revista Aleph*, 24, 48.

Osorio, Victor (2000). *Las conjeturas en los procesos de validación matemática.* Recuperado el 27 de mayo de 2008 de <http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm0p.html>.

Polya, George (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial trillas.

Sáenz, Cesar (2002). Investigación en educación matemática. Quinto simposio de la sociedad española de investigación de Investigación en Educación Matemática, Almería, 18-21 septiembre 2001. En Universidad de Almería, Servicio de Publicaciones. *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas (p. 47)*