UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

Facultad de Educación

USO Y ANÁLISIS DE MODELOS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESIONALES EN ALIMENTOS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

EDWIN DARÍO SEPÚLVEDA PADILLA

Asesor

Dr. JHONY ALEXANDER VILLA-OCHOA

2016

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

USO Y ANÁLISIS DE MODELOS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESIONALES EN ALIMENTOS

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

EDWIN DARÍO SEPÚLVEDA PADILLA
Estudiante de Maestría II cohorte

Dr. JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA
Asesor

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
CARMEN DE VIVORAL
2016

Agradecimientos

Es importante agradecer a las personar que de alguna manera contribuyeron de manera desinteresada para que yo pudiera alcanzar esta meta tan importante de mi vida académica. Al escribir estas líneas pasan por mi cabeza muchas personas y por eso quisiera aclarar que el orden en que los menciono aquí, no necesariamente es una medida de su aporte.

Quiero agradecer a mi familia por su apoyo permanente, mi mamá, mi hermana, mi sobrina y a mi mamita que no pudo estar para verme culminar esta empresa.

También quiero agradecer a Jhony Alexander Villa Ochoa, mi asesor, por sus orientaciones, su paciencia y sus aportes, ya que finalmente sin su apoyo, este proyecto no hubiese sido una realidad, hago extensivos estos agradecimientos a la Profesora Patricia Camarena por escucharme y por sus comentarios y sugerencias, a los colegas del grupo MATHEMA-FIEM, quienes me escucharon y me hicieron importantes recomendaciones para mi trabajo; en particular a Mónica Marcela Parra y Carlos Rojas Suárez por la lectura de mi trabajo y las observaciones que me ayudaron a mejorar el documento.

Por último quiero hacer un agradecimiento especial a todos mis amigos, que de alguna manera facilitaron mi vida durante este periodo de trabajo arduo, al Vitornillo, Yonny Upegui que fue uno de los que más me motivó para iniciar, al Juanelo, Daniela mi novia, Andressa Carvalho, Flanders, Pipe, Harvey Villa, mis dos compañeras de línea, a Tutu y su familia, y a todos los que ahorita no recuerdo.

Contenido

Índice de tablas

Índice de ilustraciones

Resumen

Esta investigación se desarrolla en el marco del programa de Maestría en Educación en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. La investigación tuvo su génesis en la delimitación del problema de investigación a través de la conjunción entre la revisión de la literatura internacional y la experiencia del autor como profesor de matemáticas de futuros profesionales en alimentos.

La literatura señala la matemática como una herramienta para la comprensión, para el desarrollo de habilidades y capacidades para desempeñarse profesionalmente. En la revisión realizada se valora el uso de *los contextos del área de formación* como componentes importantes en los procesos de enseñanza y surge el *uso y análisis de modelo matemáticos* a través de la Matemática en el contexto de las Ciencias como una manera de articular las matemáticas en los procesos de enseñanza de los profesionales en alimentos.

Al reconocer la problemática existente en la formación de futuros profesionales en alimentos (ingenieros y Tecnólogos), se propuso dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo los estudiantes de una asignatura de Matemáticas ofrecida en un programa de formación en Alimentos usan y analizan modelos matemáticos relacionados con su futuro desempeño profesional? En convergencia entre los referentes teóricos y la pregunta de investigación, se justifica el estudio de casos como método para evidenciar el proceso de análisis de modelos matemáticos llevado a cabo por parte de un grupo de estudiantes y la articulación de las matemáticas y las profesiones mencionadas. De manera convergente se diseñaron experimentos de enseñanza y durante su desarrollo se generaron diferentes registros que permitieron acercarse

a la comprensión del uso y análisis de los modelos y además durante estos procesos de uso y análisis, emergieron diferentes conceptos tanto matemáticos como no matemáticos de una manera articulada.

Los resultados del estudio muestran que el trabajo en el aula con el uso y análisis de modelos surge como una alternativa al interior de los procesos de modelación matemática, mediante los cuales se genera articulación entre los componentes matemáticos y de las profesiones en alimentos. Además se sugiere que el uso de tecnologías puede facilitar diferentes actividades propuestas como un mediador para las interpretaciones de los estudiantes.

1. El problema de Investigación

En este capítulo se presenta el problema de investigación el cual se consolidó en la conjunción entre la revisión de la literatura internacional y la experiencia del autor como profesor de matemáticas de futuros profesionales en alimentos. Se inicia con una visión general acerca de las características que requiere desarrollar un ingeniero para su desempeño profesional, tales como: capacidad para identificar, plantear y resolver problemas, capacidad de aplicar conocimientos en la práctica, de pensamiento crítico y analítico, y cómo las matemáticas, vistas como una herramienta conceptual, se convierten en un medio a través del cual se puede incentivar el desarrollo de dichas características. Se resalta en particular la necesidad de que en su proceso de formación los profesionales en Alimentos tengan experiencias en las cuales las matemáticas estén articuladas a fenómenos y situaciones propias de este campo de formación.

Es conveniente aclarar que la visión de ingeniero no se limitó a la del profesional titulado tras concluir y aprobar 10 semestres académicos (cinco años), sino la de un profesional que tiene conocimientos en torno a diferentes procesos y que además puede proponer maneras de mejorarlos; en ese sentido se señala una estrecha relación con los programas tecnológicos (3 años), pues un tecnólogo también requiere del desarrollo de habilidades y de conocimientos de las ciencias, las matemáticas y de la ingeniería que deben ser articulados para el ejercicio de su labor.

Nulvalue (1997) encontró que según Ramírez, presidente de la Asociación Colombiana de Ingenieros de Alimentos, "la diferencia principal está en que el ingeniero debe descubrir y aplicar nuevos procesos y métodos en la preservación de alimentos. Y el tecnólogo debe implementar esos procesos y métodos desarrollados por el ingeniero". Ambos profesionales requieren de conocimientos sólidos en las ciencias que les permitan interpretar, mejorar y optimizar procesos de alimentos.

Esta investigación centra su interés en el uso y análisis de modelos matemáticos en una formación matemática articulada al conocimiento propio de los profesionales en Alimentos. A través del estudio se mostrará que tanto ingenieros como los tecnólogos tienen espacios de formación comunes, principalmente en las áreas de ciencias básicas en los primeros semestres. Además el perfil ocupacional de ambos profesionales requiere del desarrollo de habilidades y conocimientos similares en lo referente a sus habilidades comunicativas, de trabajo en grupos interdisciplinarios y de solución de problemas de la industria. Con base en lo anterior, es posible asumir que muchos de los desarrollos en el área de la Educación Matemática y de la Educación en Ingeniería pueden ser de utilidad para mejorar los procesos de formación tanto de los ingenieros como de los tecnólogos. En ese sentido, el término "ingenieros" en algunos apartes de este documento se usará como una manera de referirse a profesionales del área de Alimentos sin discriminar el tiempo de duración de sus programas de estudio.

1.1 Antecedentes

1.1.1 Las Matemáticas y la formación de ingenieros

En relación con los programas de ingeniería ofrecidos por las universidades en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), a través del portal Colombia Aprende, ha reportado los fundamentos sobre los cuales se cimientan las diferentes ingenierías. Estos hacen referencia a las materias de las áreas básicas de formación, como química, física, biología, matemáticas; para posteriormente señalar la finalidad del profesional, en el caso de la ingeniería de alimentos, a la luz de dichos fundamentos, se destaca la presencia de las matemáticas y las ciencias naturales. En el mismo portal (MEN, 2014) el Ministerio de Educación hace hincapié sobre las finalidades de la formación en Ingeniería de Alimentos, en particular, se resalta, la solución de problemas, optimización de recursos para el desarrollo sostenible y el bienestar de la humanidad y funciones relacionadas con producción, administración y salud pública.

En la literatura internacional se ha señalado que cuando los futuros profesionales inician sus estudios presentan inquietudes frente al papel que juegan las matemáticas tanto en su formación como en su futuro desempeño profesional (Camarena, 2009; Craig, 2013). En particular, Craig (2013) reportó que tales inquietudes se deben, en parte, a que los estudiantes desconocen la utilidad concreta de las matemáticas y, sumado a esto, piensan que tienen mayor relevancia en sus estudios o en su vida académica que en la profesional. En muchos casos, el enfoque “ultra cuantitativo” y sus pocos efectos sociales hacen que los programas de ingeniería no sean la primera elección de los estudiantes (King 2012). En su estudio, Craig (2013) puntualizó que es posible encontrar otros estudiantes que ven las matemáticas como una herramienta que les permitirá, a futuro, generar soluciones a problemas de diversas índoles, incluso, a problemas que inicialmente no tienen relación directa con las matemáticas.

Entre los principales argumentos que los estudiantes utilizan para defender la presencia de las matemáticas en su formación, Craig (2013) encontró que, generalmente, coinciden en aspectos como: la posibilidad de generar un potencial y habilidades en ellos, para la solución de problemas, además de la destreza conceptual y la capacidad de pensar de manera lógica y estructurada.

De acuerdo a lo anterior se puede hacer referencia a la necesidad de formar ingenieros que además de entender las matemáticas, estén en capacidad usarlas en sus propios contextos, tanto a la vida cotidiana como en aspectos relacionados con su quehacer profesional. Según *The Royal Academy of Engineering (*citada por Sunthonkanokpong, 2011), los graduados de ingeniería, matemáticas y ciencias son sujetos clave para proporcionar mecanismos que permitan recuperar la economía, mejorar el desempeño de la industria, y en general el mejoramiento de la calidad de vida, así mismo al contemplar lo semejantes que resultan los programas de ingeniería y tecnología de alimentos, de acuerdo con Nulvalue (1997) es pertinente reconocer que los tecnólogos juegan un importante papel en la generación de dichos mecanismos. Estas consideraciones sugieren que la formación de los futuros profesionales puede ofrecer mejores resultados, si se orienta hacia la preparación del estudiante para enfrentar problemas relacionados con situaciones con el campo de formación.

En coherencia con lo anterior, las matemáticas se consideran no solo como un sistema conceptual sino, principalmente, como una herramienta que puede generar y despertar capacidades y habilidades en lo relacionado con la resolución de problemas, estudiar y comprender los fenómenos en los cuales se usan. Este tipo de consideraciones, ponen de relieve el papel de los contextos en la formación matemática de los ingenieros; en el siguiente apartado se profundiza más al respecto.

1.1.2 Contextualización de las matemáticas

Las matemáticas aún son reconocidas por gran parte de la sociedad como una disciplina difícil y frecuentemente apartada de las personas por estar desconectada de la vida cotidiana (Angulo, 2013; Kistemann Jr, 2012). Un aspecto importante a tener en cuenta para abordar las matemáticas como una base fundamental de la estructura de un programa de ingeniería y del pensamiento estructurado, es el relacionado con la metodología empleada para su enseñanza, que debe hacer tangible su uso y limitar su percepción como una ciencia que se aparta de lo cotidiano. Según Brown (2013) la visualización de un fenómeno, vista como una herramienta metodológica, puede facilitar la comprensión de diversos conceptos. Lo que resulta útil como una manera para realizar una inmersión en un contexto particular.

De acuerdo con Muro (2000) algunos de los problemas de la vida real requieren de profesionales con conocimientos de diversos temas de las matemáticas tales como: el límite, el infinito, las funciones etc., y que estos conocimientos son impartidos o presentados en las asignaturas de matemáticas generalmente de manera desvinculada de aquellas asignaturas donde el tema cobra vida. La autora sostiene que uno de los aspectos que parece influir en dicha desvinculación, es el hecho de que estos cursos son ofrecidos por profesores que no se preocupan por ver la matemática de manera contextualizada en otras especialidades de la tecnología e ingeniería. Todo esto le dificulta al estudiante conceptualizar las matemáticas y verlas como una herramienta de apoyo. Contrario a ello, generalmente los futuros profesionales se ven involucrados en ambientes donde se le exige problemas referentes a un área sin que ello implique el establecimiento de vínculos con las matemáticas. Evidentemente esta desarticulación genera dificultades en la preparación del futuro profesional y, por tanto, es un fenómeno abierto de investigación (Rendón-Mesa y Esteban, 2013).

Algunas de las dificultades descritas anteriormente pueden comprenderse a través de lo que Freudenthal (1983, citado por Angulo, 2013) ha señalado como “inversión anti didáctica”, es decir, centrar la actividad matemática escolar en el tratamiento de los conceptos (cursos de matemáticas) y no en la actividad misma (experiencias donde se recrea la producción matemática a partir de la “realidad”). Con lo expuesto se señala que pueden resultar metodologías de enseñanza que ayuden al estudiante a desarrollar habilidades en el uso de las matemáticas, para lo cual existen ahora variedad de herramientas, entre las cuales cabe mencionar las ofrecidas por la tecnología, trabajo en laboratorio y análisis de situaciones de la vida diaria, lo que puede posibilitar que el estudiante utilice un modelo matemático, pero poniendo de prerrequisito la comprensión del fenómeno.

Los elementos presentados hasta aquí ofrecen una perspectiva en la cual la enseñanza universitaria debe realizar cambios metodológicos y debe darle al estudiante un papel más activo en su formación, enfatizar en la importancia de generar buenas bases científicas y estimular el pensamiento crítico, analítico y reflexivo, para contribuir a la formación de profesionales que satisfagan los requerimientos de la comunidad. Cuestión que converge con la investigación de Sunthonkanokpong (2010), quien encontró que los programas de formación en ingeniería deben enfocar sus esfuerzos relacionados con las prácticas de ingeniería e instrucción, en aspectos como los que se presentan a continuación: generar buena comunicación, gran capacidad de análisis y de exhibir ingenio práctico, ademas poseer la creatividad y ética profesional.

Parte de los aspectos mencionados pueden alcanzarse si los profesores, en este caso los de matemáticas, buscan metodologías que permitan que el futuro ingeniero reciba en su formación académica todo lo que requiere para tener éxito a nivel profesional (Camarena, Trejo, y Trejo, 2013).

Según Camarena et al. (2013), las matemáticas contextualizadas proveen al estudiante herramientas necesarias para solucionar problemas donde se requiera capacidad analítica e innovadora, y se puede generar en el estudiante mayor interés en la investigación aplicada y la resolución de fenómenos relacionados con el campo de acción de la ingeniería. Al contextualizar situaciones, interactuar y manipular problemas, se llevará al sujeto a un proceso de atribución de significados, pues es posible pasar de la mera observación a algoritmos y a generar interacción con problemas sin respuestas definidas inmersos en contextos relevantes (Kistemann Jr, 2012). De acuerdo con Cruz y Medina (2013) cuando se proponen aplicaciones que parten de contextos “reales”, el estudiante trabaja de manera simultánea procesos analíticos, sociales y conceptuales; lo que favorece el desarrollo de estructuras cognitivas y facilita que el estudiante emplee los conceptos aprendidos en otras situaciones.

Según Villa-Ochoa y Ruiz (2009) se debe destacar la importancia del contexto de las situaciones abordadas y los propósitos de la clase para la selección de los problemas, y que generalmente estas situaciones parten de la vida real; lo que sugiere, que para comprender los conceptos matemáticos es fundamental la comprensión del fenómeno abordado, y que de esta forma la presentación de los conceptos matemáticos se puede hacer de una manera más atractiva para el estudiante.

Camarena et al. (2013) contempla que para diseñar actividades enmarcadas en contextos de interés que apoyen el aprendizaje de conocimientos estructurados sobre matemáticas, es importante conocer los conocimientos previos del estudiante, los cuales podrá emplear en otras ciencias y así se favorezca sus competencias profesionales y laborales.

Al hacer una reflexión de lo anterior resulta positivo en los procesos de formación, usar ejemplos, proponer problemas y proyectos enmarcados en contextos de interés para el estudiante y relacionados de manera directa con su profesión, ya que es posible según los autores citados que se favorezca el aprendizaje, la apropiación de conceptos y la capacidad de llevar éstos conocimientos a otras situaciones.

1.1.3 Las matemáticas en el contexto de formación

Sunthonkanokpong (2011) plantea que la enseñanza en ingenierías debe adaptarse en términos de sus prácticas de aula para cumplir con los requisitos formativos de los ingenieros de la nueva era, ingeniería de calidad, que requiere profesionales emprendedores, innovadores, con visión de gestión, con capacidad de mejorar procesos e incrementar su productividad y así, al mejorar aspectos en la industria, estos tendrán repercusiones en el ámbito social y económico.

Consecuentemente Camarena (2009) menciona que dicha adaptación estará fundamentada en el hecho de que con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y las herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas de matemáticas no son una meta por sí mismas. Sin embargo, hacen parte de las necesidades formativas del estudiante. Esto va acorde con los planteamientos de King (2012) quien destaca la importancia de ofrecer cursos enfocados a la ilustración de lo que hará un futuro ingeniero y de cómo usar los conocimientos adquiridos en la universidad. Así se puede interpretar esto como la necesidad de llevar los conocimientos de diferentes cursos a situaciones reales y más puntualmente al uso de las matemáticas en situaciones u otras ciencias como una herramienta que ayudará a dar soluciones.

Uno de los pasos de la "adaptación" y modernización de los programas de ingeniería enfocados a satisfacer las necesidades de la industria y la sociedad, es en consecuencia la generación de algunos cambios en la enseñanza de las matemáticas en los programas de ingeniería. Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra, Para-García y Arias-de Tapia (2011) afirman que al pasar parte de la responsabilidad del aprendizaje al estudiante, mediante la elección de un tema de su interés, y trabajar al respecto con la orientación del docente, en el uso y creación de modelos matemáticos contextualizados en otras áreas del conocimiento, se puede enriquecer el aprendizaje y despertar el sentido crítico y creativo del estudiante.

En su investigación, Biembengut y Hein (2004) sostienen que uno de los objetivos de la enseñanza de la matemática, es el desarrollo de habilidades en los estudiantes para favorecer su interacción con la sociedad. Para estos investigadores el uso de los modelos matemáticos en las prácticas escolares representa un avance en la enseñanza de las matemáticas, puesto que estas dejan de verse como simples técnicas de solución y pasan a ser una herramienta para estudiar otras áreas del conocimiento.

Un argumento semejante es considerado por King (2012) quien señala que el ingeniero debe tener habilidades para trabajar en sinergia y comunicarse con profesionales de otras disciplinas. Esto puede lograrse si se usa de manera sistemática el lenguaje y las expresiones matemáticas empleadas en diversas ciencias, ya que las matemáticas sirven como eje que articula y mejora la comunicación entre estas. Así cabe mencionar la importancia que tienen para muchas ingenierías expresiones matemáticas como: la ley de Fourier, para la conducción de calor, Fick para la transferencia de masa y Arrhenius para la dependencia térmica de las reacciones químicas, las cuales han gobernado y gobiernan la modelación matemática y la interpretación física de algunos fenómenos sin tener en cuenta el efecto producido por diversos cambios de carácter físico y químico (Martínez, 2003).

De acuerdo con todo lo mencionado, podemos afirmar que existe una necesidad de profundizar en el entendimiento de los fenómenos relacionados con el perfil ocupacional de los tecnólogos e ingenieros, así como en el desarrollo de nuevos modelos que puedan explicar y facilitar la comprensión de diversas situaciones (Martínez, 2003). Bajo esta óptica, la educación universitaria debe buscar alternativas que den un papel activo al estudiante, para generar pensamiento crítico y de esta manera se podrá formar profesionales que puedan generar un impacto social (Camarena et al. 2013).

En el caso de los ingenieros, cuando el estudiante tiene un papel activo en los procesos formativos puede desarrollar diversidad de competencias. De acuerdo con Parra (2003) dichas competencias hacen referencia al uso creativo de los conocimientos en distintas circunstancias o también se definen como un saber hacer en contexto, y como se ha podido observar a través de la revisión de la literatura, las matemáticas son útiles para desarrollar diversas cualidades y más cuando se usan como herramienta para estudiar fenómenos asociados a su campo de formación.

La importancia del desarrollo de habilidades y competencias radica en la amplitud del quehacer de los profesionales, ya que los ayudan a enfrentarse adecuadamente actividades propias de su oficio, estas actividades son clasificadas por Recuero (2002) de la siguiente manera:

1. Investigación Básica

2. Investigación y Desarrollo

3. Proyectos: Ingeniería de Proyectos, Diseño, Estudios

4. Gestión y Administración: Dirección de Proyectos, Gestión de operaciones, Sistemas de información.

5. Producción: Control de procesos, Control de calidad. Marketing y Comercialización: Dirección comercial, Comunicación, Servicio post-venta

Las consideraciones acerca de las matemáticas como herramienta útil en la formación de un ingeniero, en el desarrollo de habilidades para estudiar y resolver problemas propios de las ciencias han estado en las raíces de diversas aproximaciones teóricas. Así, por ejemplo, Camarena et al. (2013) destaca un conjunto de fases y posicionamientos que sugieren aspectos teóricos y metodológicos a través de los cuales la formación de un ingeniero no se agota en la reproducción de los saberes matemáticos, sino que también se articulan al quehacer de este tipo de profesionales.

La apuesta teórica que presenta Camarena et al. (2013); Camarena (2009) se denomina *Matemáticas en el Contexto de las Ciencias* (MCC). La teoría considera el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas y consta de cinco momentos (si bien las autora habla de fases esta investigación hace referencia a estas mediante el término momentos con el fin de mantener una semántica menos disyunta y mostrar las fases con una mayor interrelación), a saber: curricular, didáctico, epistemológico, de formación docente y cognitivo (Camarena, 2009). Según la autora actualmente la teoría es aplicada en diversos niveles educativos, incluso en áreas de conocimiento que no forman matemáticos.

La teoría analiza la vinculación necesaria entre las matemáticas y las ciencias que la requieren, es decir tratan de ofrecer al estudiante unas matemáticas para su desempeño profesional, además acoge una de las llamadas terna dorada de la educación: el estudiante, el contenido y el profesor, a la cual se vincula dos elementos de interacción, y esto da origen a los cinco momentos mencionados anteriormente.

A lo largo de sus trabajos, Camarena ha hecho énfasis en la importancia de hacer una observación referente al uso y construcción del modelo matemático como la etapa central de la teoría, lo que hace necesario definir: ¿Qué es un modelo matemático?, ¿Qué es modelación matemática?, para establecer una posible relación y el momento de convergencia. Para la investigadora, un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería y modelación matemática se define como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.

De acuerdo a las ideas presentadas se infiere una importante relación entre las matemáticas en el contexto de las ciencias y la modelación matemática, donde podría pensarse en primera instancia que las MCC toman como herramienta algunos elementos de la modelación matemática, por lo que puede ser pertinente desarrollar un apartado dedicado a la modelación matemática en educación matemática.

1.1.4 Modelación matemática en Educación Matemática

La modelación matemática en Educación Matemática inicia como un movimiento al final de la década de los años setenta y es vista como una alternativa para la enseñanza de matemáticas en el aula y en otros espacios (Kistemann Jr, 2012). En el contexto de la educación matemática, hay quienes la conciben como una metodología que se centra en la observación de la “realidad” para comprender los fenómenos de diversas ciencias, discusiones e investigaciones, a fin de modificar las actividades del aula y a su vez la forma de ver el mundo de los participantes, (Kistermann Jr, 2012).

El estudio de los problemas del mundo real ha sido fuente de inspiración para la construcción de teorías y modelos que expliquen y solucionen problemas que parten de la realidad (Quarteroni, 2009; Villa-Ochoa y Ruiz, 2009).

Es importante comprender los fenómenos, para explicarlos, más aún para predecir y comprender el comportamiento de una situación que pueda presentarse, según Villa-Ochoa, (2007) la modelación matemática como recurso educativo tiene sus raíces en la actividad científica del matemático aplicado. Es decir, en la actividad de estudiar fenómenos de otras ciencias, construir modelos matemáticos para explicarlo y resolver problemas que en ellas se involucre. Sin embargo, actualmente en el ámbito de la Educación Matemática, la modelación ha cobrado otros sentidos y no se agota solo en la producción de modelos y en el tratamiento de procesos y ciclos (Barbosa, 2001).

De acuerdo con Berges (2009), la modelación matemática encuentra un lugar en las esferas más importantes de la actividad, la técnica, el experimento científico y el conocimiento teóricoy en su aplicación tiene un carácter científico. Esta autora reconoce que la importancia de la modelación matemática radica en las funciones que cumple, entre las cuales cabe mencionar: la función ilustrativa, que permite presentar de una manera sensorial propiedades desconocidas, la función traslativa, que permite llevar la información obtenida a la realidad, y otras funciones de carácter aproximativo y pronosticador que le brindan mayor amplitud al método de enseñanza.

Estas características incrementan la posibilidad de comprender el fenómeno, y según Bassanezi y Biembengut (1997) mientras más se profundiza en dicha comprensión, es más posible alcanzar el nivel de conocimiento deseado.

Lo expuesto en este apartado permite visualizar la modelación matemática como un recurso para la formación matemática de los profesionales relacionados con la ingeniería, ya que permite que estos futuros profesionales comprendan de manera aplicada la importancia de las matemáticas y el porqué de la presencia de éstas en los currículos, además de la necesidad y uso frecuente de esta ciencia para la solución de problemas particulares de las otras ciencias.

Se observa pues que la modelación matemática cumple con funciones que buscan el desarrollo de diferentes actitudes, entre ellas, Ortega, Torres, Santos, y López, (2004) resaltan:

- La vinculación de la matemática en el ejercicio de la profesión
- Desarrollar habilidades en la interpretación y solución de problemas
- Conocer fenómenos químicos, físicos y biológicos que encontrarán en diferentes asignaturas en el transcurso de la carrera.
- Desarrollar habilidades investigativas mediante la búsqueda por parte de los estudiantes de situaciones que puedan servir como contexto.

Tanto Biembengut y Hein (2004) como Brito (2011) han afirmado que mediante la aplicación de la modelación matemática se pretende propiciar en el estudiante:

- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento
- Interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos

- Capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema
- Estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas
- Habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica y computadoras)
- Capacidad para actuar en grupo
- Orientación para la realización de la investigación
- Capacidad para la redacción de esa investigación

Algunas de las conclusiones de Ortega et al, (2004) frente a las funciones que cumple la modelación matemática son:

- La Modelación Matemática como elemento directriz contribuye a integrar los diferentes saberes.
- La solución de problemas profesionales en los primeros años incrementa el interés por la carrera.
- La utilización de modelos matemáticos contribuye en la formación de profesionales de la ingeniería con capacidad de intervenir en procesos productivos, investigativos y administrativos.

La modelación[1] resulta atractiva como método de enseñanza cuando se aprecia su carácter integrador de saberes y su capacidad para generar cualidades, aún más por la cercana relación con la vida real y la experiencia del estudiante. De acuerdo con Kaiser y Sriraman

[1] En adelante se usará el término modelación como sinónimo de modelación matemática

(2006) no es homogénea la comprensión sobre modelación en el ámbito de la Educación Matemática. Para los autores, existen diferentes perspectivas, entre ellas: la realista, la contextual, la educacional, la sociocrítica y la epistemológica. Cada una genera aportes a nivel educativo. Sin embargo, algunas guardan similitudes y diferencias en sus interpretaciones y en la manera de actuar en el aula de clase. Sin enmarcar esta investigación solo en una perspectiva se rescata del trabajo de Kaiser y Sriraman (2006) algunas características que la modelación en general contempla a nivel educativo:

- Desarrollar la capacidad para solucionar problemas.
- Hay diversas formas de comunicación, por ejemplo a través de dibujos, diagramas, gráficos, modelos, etc.
- La importancia del contexto y la aplicación
- Los conocimientos se dan mediante la experiencia y pueden generar un aporte para la toma de decisiones.

La revisión de la literatura realizada hasta aquí resalta el papel de los modelos y la modelación en el estudio de fenómenos en diferentes contextos. También muestra la necesidad que el estudio de modelos y la modelación sea un aspecto fundamental en la formación matemática de los profesionales relacionados con la ingeniería. Frente a estos profesionales se ha destacado el rol de ellos como partícipes de los desarrollo de la humanidad y agentes solucionadores de problemas. También se ha señalado la importancia de las matemáticas tanto a nivel social como para la formación académica y profesional de los ingenieros, y se visualiza como generadora de diversas cualidades en los estudiantes. Lo que permite pensar que es necesario seleccionar adecuados recursos para la enseñanza acorde con las necesidades de formación. Conforme se ha mencionado anteriormente, es aquí donde se pone de manifiesto la importancia de los contextos y la modelación para lograr los resultados formativos que según la literatura se buscan en los futuros profesionales afines a la ingeniería.

El estudio de modelos, la modelación y el uso de contextos relacionados con el campo de formación están relacionados con una adecuada planeación de los cursos. En la síntesis del foro ***La enseñanza de las matemáticas para ingenieros*** realizado en México del 29 de noviembre al 1 de diciembre de 2001, (http://www.dcb.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias/foro.htm) se señaló la importancia de la planeación de los contenidos, métodos, recursos y procesos de evaluación para dar control a las variables que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje. Además se puntualizó que el profesor de matemáticas debe hacer uso de la didáctica para facilitarle al estudiante la apropiación del conocimiento y su aplicación a la resolución de problemas mediante la construcción de modelos matemáticos y afirman que esta es la razón de ser de las matemáticas en las ingenierías.

En las anteriores líneas es posible reconocer que la elaboración de modelos matemáticos es una tarea compleja, de acuerdo con Javaroni y Soares (2012) en el estudio de una situación específica no solo en necesario producir modelos, sino también conocer, usar y analizar modelos ya conocidos frente a esa situación; esto sugiere que *analizar modelos* resulta interesante por su estrecho vínculo con la modelación.

1.1.5 La experiencia con los futuros profesionales en ingeniería

A partir de la experiencia que el autor de este documento ha tenido como profesor de matemáticas de futuros tecnólogos e ingenieros alimentos es posible observar diversidad preocupaciones e interrogantes en lo relacionado con la utilidad concreta de las asignaturas, debido a que en estas se aborda diversidad de temas, muchas veces de manera general y en contextos poco atractivos para el estudiante. Las matemáticas no son una excepción cuando se habla de cursos que se ofrecen sin dar relevancia al uso de los contextos y con poca o nula relación con el programa académico en el cual se imparten.

Algunos de estos aspectos son mencionados por los estudiantes cuando afirman que a pesar de que de alguna manera saben de la importancia de las matemáticas, difícilmente pueden observarse en sus cursos en relación con su profesión en estudio.

Conforme se argumentó en los apartados anteriores, en la literatura autores como Camarena (2009), Craig (2013), King (2012), Angulo (2013), Brown (2013), Parra (2003), Muro (2000) han reconocido la necesidad de emplear contextos relacionados con el programa de formación, que esta necesidad está presente en la formación de muchos ingenieros y se empieza a observar un interés generalizado por realizar cambios que permitan una formación integral de los futuros profesionales.

En la interacción con estudiantes de ingeniería y tecnología de Alimentos de la Universidad de Antioquia se ha observado algunas dificultades similares a las planteadas en los apartados anteriores, tanto en lo relacionado con el desconocimiento acerca del aporte que las matemáticas pueden hacer en su vida académica y profesional, como en la necesidad de emplear contextos que favorezcan un estudio y comprensión de la matemática con significados asociados a su uso en el campo profesional. Estas observaciones dejan entrever que existen dificultades a nivel formativo, ya que se ha constatado que los estudiantes muchas veces no logran emplear diversos conceptos matemáticos en la solución de eventos en contextos particulares.

De Guzmán y Gil (1993) manifiesta una preocupación por hacer patentes en el ambiente de aprendizaje, los impactos mutuos entre las matemáticas y la sociedad. Este autor sostiene que muchos de los fracasos de los estudiantes en matemáticas, encuentran su origen en su concepción inicial de las matemáticas como algo negativo, concepción provocada, en muchos casos, cuando se enfatiza principalmente en aspectos de tipo disciplinar, analítico y procedimental se descuida aspectos como el uso de las matemáticas en diferentes dimensiones de su formación, y que por esta razón se debe intentar que los estudiantes perciban el placer lúdico que las matemáticas son capaces de proporcionar.

De acuerdo con lo dicho anteriormente y a conversaciones con docentes de los primeros semestres de los programas de tecnología e ingeniería de alimentos, se ha observado un interés por ofrecer los conceptos matemáticos al interior de sus clases enmarcados en contextos representativos para el estudiante, en busca de mejorar los resultados formativos. Debido a esto algunos de los profesores intentan diseñar actividades, ejemplos y ejercicios que tengan una relación directa con el quehacer de los profesionales en alimentos, para ello, toman situaciones de diferentes áreas como procesos de alimentos, operaciones unitarias, análisis de alimentos e incluso química y física.

Las acciones mencionadas permiten reconocer la necesidad de indagar sobre una manera más articulada para hacerlo, es decir, la aplicación de una o más teorías que han sido desarrolladas y evidencian tener buenos resultados.

1.2 El problema de investigación

Al momento de revisar los programas de Ingeniería y Tecnología de Alimentos de varias universidades en Colombia, entre las cuales cabe mencionar, Universidad del Valle, la

Salle, la Universidad de Antioquia, la UNAD[2], se observa que los objetivos están enfocados en generar un impacto social a través del mejoramiento de procesos productivos, generar nuevos desarrollos de productos, equipos y procesos, mediante el uso de los conocimientos ingenieriles apoyados en las ciencias básicas.

En las competencias básicas del programa de Ingeniería de Alimentos de la UNAD se destaca la importancia de aprender autónomamente, trabajar en equipo de forma colaborativa, elaborar escritos, argumentar, debatir y desarrollar pensamiento lógico. En busca de formar al estudiante como autogestor del conocimiento, con capacidad para tomar decisiones para lo cual debe analizar e identificar problemas, las causas y las diferentes alternativas de solución, para seleccionar la más adecuada. De manera similar, el programa de Ingeniería de Alimentos de la Universidad del Valle destaca la importancia del pensamiento crítico en sus profesionales y su capacidad para innovar.

Al revisar el perfil del egresado de ingeniería de Alimentos de la Universidad de Antioquia se encontró que se busca una formación integral, fundamentada en una estructura científica y humanística. Se piensa el ingeniero de alimentos como alguien, crítico, creativo, racional, con capacidad de interactuar en grupos interdisciplinarios, investigar, diseñar, optimizar y solucionar problemas relacionados con procesos alimentarios, calidad y administración. El programa de Tecnología de Alimentos de la Universidad de Antioquia busca generar capacidades de trabajo en equipo, tiene un importante énfasis en las ciencias básicas y al igual que con los ingenieros de Alimentos se pretende que estén en capacidad de trabajar de

[2] Universidad Nacional Abierta y a Distancia

manera crítica, en grupos interdisciplinarios y participar en la solución de los problemas de la industria agroalimentaria.

Los propósitos de formación de los futuros profesionales en Alimentos en las universidades mencionadas anteriormente coinciden en la generación de cualidades y desarrollo de diversas capacidades para que los futuros profesionales se enfrenten y resuelvan los problemas que se presentan en la industria, lo académico y la sociedad.

En cuanto a la resolución de problemas se devela la necesidad de reflexionar sobre la toma de decisiones, ya que este aspecto es una tarea frecuente en los distintos roles profesionales. Sin embargo, Narro (1996) señala que, generalmente, las decisiones parecen tomarse basados en la intuición, y debe hacerse basándose en las alternativas que la situación provee, lo que hace necesario el uso de un instrumento que facilite una elección informada. Esta autora considera que las matemáticas proporcionan diversos instrumentos que apoyan dicha tarea, entre estos, el *uso de los modelos matemáticos*.

Así cuando se trabaja procesos productivos o investigativos, se hace importante conocer las posibles variables implicadas en dichos procesos, ya que esto permite que se puedan generar posibles soluciones, haciendo uso de argumentos aprendidos y herramientas que permitan controlar y manipular la situación, a fin de obtener los resultados más productivos o de mayor interés. Tal capacidad permitirá que los futuros profesionales, al enfrentar dificultades propias de su oficio, lo puedan hacer eficazmente, con la capacidad de percibir los cambios del medio y ajustarse a ellos constantemente.

De acuerdo con la revisión de la literatura presentada en la sección anterior, las matemáticas son una ciencia que posibilita la generación de diversas cualidades que identifican a un profesional en áreas relacionadas con la ingeniería, además permiten la comprensión, la predicción e interpretación de los fenómenos a través de los modelos matemáticos. Biembengut y Hein (2004) destacan la importancia de la modelación matemática como método de enseñanza e investigación, en los dos casos la premisa es que con su uso se promueve el conocimiento matemático y la habilidad para aplicarlo en las otras áreas del conocimiento, con lo que se genera que el alumno fortalezca sus cualidades y alcance el pensamiento crítico. Sin embargo, con excepción del trabajo de Soares (2012) y de Javaroni y Soares (2012), el uso y análisis de los modelos matemáticos en la formación en ciencias e ingeniería, para la comprensión de los fenómenos, la relación entre las variables y la importancia de los parámetros, no es muy abundante en la literatura internacional. Bissell y Dillon (2000) manifiestan la importancia del uso de los modelos matemáticos existentes, ya que normalmente los profesores enfatizan en la construcción del modelo, pero que en la práctica ingenieros y tecnólogos emplean modelos conocidos, los cuales adaptan ligeramente para ser usados, también afirman que el proceso de modelación se da gradualmente, y que este puede ser un inicio. Estos autores afirman que aquí resultan importantes características como la intuición para elegir el modelo, las circunstancias en las que se empleará, también reconocen que mientras más preciso es el modelo más compleja será su manipulación y finalmente la importancia de las conclusiones que el uso del modelo permita alcanzar.

También la experiencia documentada con los futuros tecnólogos e ingenieros, presentada anteriormente, y los requerimientos formativos de las universidades en Colombia, sugieren que existe una necesidad de integrar otros aspectos propios de las matemáticas, como el uso y análisis de modelos matemáticos de interés.

Develar el uso de los modelos matemáticos en los diferentes campos del saber, es una actividad necesaria en la formación de un ingeniero. Los modelos matemáticos permiten hacer predicciones mediante ecuaciones, algunas de estas ayudan a determinar la vida útil de un producto (Cárdenas, Giannuzzi, Noia y Zaritzky, 2001) . Otro modelo de gran interés que ayuda a controlar, predecir y mejorar procesos alimentarios es la ley de Fick para la transferencia de masa (Ochoa-Martínez, 2005).

Según Brito (2011) existe una brecha entre las habilidades requeridas por un ingeniero, vinculadas fundamentalmente a las actividades de modelar, interpretar, comunicarse en un lenguaje preciso, etc., y las habilidades que se forman en los cursos de Matemática. Esto se refleja de manera más fuerte en los cursos básicos de los programas de Ingeniería y Tecnología de Alimentos de la Universidad de Antioquia, donde se abordan problemas y contextos pero por lo general sin relación directa con el programa académico, además se hace poco énfasis en el análisis y producción de modelos y su importancia. Es decir, solo se abordan los temas y los conceptos, pero los contextos no generan el impacto necesario en los estudiantes para despertar su interés y hacer efectiva la resolución de las situaciones presentadas mediante un adecuado análisis.

Resolver un problema real generalmente es complicado y no se sabe por dónde empezar. Esto se debe, entre otros asuntos, a que los elementos que en él intervienen son numerosos. También influye que las relaciones entre estos elementos no son evidentes. Por consiguiente, es difícil expresar el problema en forma clara (Narro, 1996).

Observada la ansiedad en general del estudiante al enfrentar situaciones donde se requiere el uso coherente de conceptos matemáticos, frecuentemente manifestada mediante la pregunta: ¿Por dónde empiezo?, puede ser superada con la implementación de nuevas estrategias de enseñanza, el fortalecimiento del aprendizaje de conceptos y el desarrollo de habilidades en los estudiantes. Se destaca el trabajo de Craig (2013) en el cual se señala la importancia de las matemáticas en la formación de los futuros ingenieros, tanto a nivel académico como a nivel profesional, por posibilitar destrezas para solución de problemas.

Basado en los elementos anteriores, se pone de relieve la necesidad de articular los cursos de matemáticas con las necesidades de formación de los profesionales en alimentos (ingenieros y tecnólogos); asimismo, considerar las matemáticas como una herramienta para la comprensión, de igual manera, surge la idea *de analizar y comprender modelos matemáticos* inscritos en situaciones de interés, para conocer la influencia de los parámetros en las posibles soluciones que pueden ofrecer dichos modelos, aprender conceptos matemáticos y de alguna forma contribuir en el alcance de los requerimientos formativos planteados por las universidades que imparten los programas de ingeniería o tecnología de alimentos y, en particular, los requerimientos formativos de estos programas en la Universidad de Antioquia. Tales requerimientos buscan la formación de un profesional con la capacidad de enfrentar y resolver diversas situaciones de una manera crítica.

1.2.1 Pregunta de investigación

En concordancia con lo expuesto en el apartado anterior surge el siguiente cuestionamiento:

¿Cómo los estudiantes de una asignatura de Matemáticas ofrecida en un programa de formación en Alimentos usan y analizan modelos matemáticos relacionados con su futuro desempeño profesional?

Responder a esta pregunta implica el reconocimiento de los modos en que los estudiantes de un programa de formación en Alimentos (tecnología o ingeniería) usan los modelos matemáticos anteriormente mencionados, a través de lo cual se espera generar orientaciones frente a la manera como se puede implementar esta estrategia en la formación de ingenieros, de tal forma que los estudiantes reconozcan los roles de los modelos y los contextos en su campo de formación. Adicionalmente, se ofrece la posibilidad de participar en el desarrollo de habilidades de modelación en su futuro desempeño profesional. De otro modo, debe permitir identificar las ideas que los estudiantes se van haciendo sobre el rol de las matemáticas en su proceso de formación.

1.2.2 Objetivos

- Analizar la manera en qué los estudiantes de un curso de matemáticas ofrecido en un programa de formación en Alimentos usan y analizan diversos modelos matemáticos que están relacionados con su futuro desempeño profesional.
- Reconocer las posibilidades y los desafíos que el *análisis de modelos matemáticos* presenta en la articulación a las necesidades de formación de profesionales en alimentos.

2. Referentes teóricos

En este capítulo se retoman algunas ideas frente a la necesidad de que las matemáticas de los programas de formación en alimentos se orienten a que los estudiantes durante su formación atiendan a los significados, problemas y contextos propios de estos programas para que, de alguna manera, se favorezca su proceso formativo. Para ello, la teoría “Matemática en el contexto de las ciencias” se constituye en un referente que permite observar algunos de los aspectos didácticos inscritos en el trabajo de aula, en cursos de matemáticas. En el marco de esta teoría, se asumieron los planteamientos de Javaroni y Soares y (2012) y de Bissell y Dillon (2000) para integrar al aula de clase el uso y análisis de modelos matemáticos.

2.1 Algunas consideraciones acerca de la formación de los ingenieros

Una vez reconocido que, un ingeniero es aquel que mediante los recursos disponibles y sus conocimientos puede participar de manera activa en el desarrollo de la sociedad, y que existen algunas necesidades de carácter didáctico para lograr sus objetivos de formación; se hace necesario mencionar algunos aspectos importantes que fueron tratados en la reunión “El ingeniero Colombiano del año 2020. Foros Preparatorios - XXVI Reunión Nacional, 2006”, mostrar las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias como una teoría que apoya los aspectos metodológicos que promuevan una articulación de las matemáticas a las necesidades formativas de los futuros ingenieros, en particular y el papel de la estrategia de *análisis de modelos matemáticos* en dicha articulación.

Entre los aspectos tratados en la reunión se considera pertinente mencionar aquellos relacionados con el rol del profesor en la formación de los ingenieros, las características que debe poseer un ingeniero, algunas competencias básicas definidas para pruebas Saber PRO[3], algunas destrezas o habilidades mentales que debe poseer un ingeniero y las estrategias que a largo plazo serán tenidas en cuenta con el fin de alcanzar el desarrollo de dichas competencias y habilidades desde los ámbitos curricular y docente.

En la reunión se consideró que el profesor deberá estar en capacidad de proporcionar contextos que faciliten el aprendizaje, esto mediante el uso de estrategias que permitan y faciliten la construcción del conocimiento.

A continuación se mencionan diferentes características o fortalezas de los profesionales en áreas afines a la ingeniería, algunas competencias profesionales de acuerdo a las pruebas Saber Pro y diferentes habilidades mentales que deben poseer los estudiantes de estos programas, que fueron consideradas de gran importancia en la reunión en cuestión:

Algunas de las características en las cuales un profesional en áreas afines a la ingeniería debe ser fuerte son:

---

[3] Saber Pro es una evaluación externa de la calidad del sistema educativo en el nivel de la educación superior.

- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Capacidad de aplicar conocimientos en la práctica.
- Capacidad de aprender y actualizarse.
- Capacidad para tomar decisiones.
- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis

En los lineamientos para las pruebas aplicadas en 2005 (SABER PRO), se plantearon las siguientes competencias profesionales esenciales para los profesionales en áreas afines a la ingeniería:

- Capacidad para modelar fenómenos.
- Capacidad para resolver problemas mediante la aplicación de las ciencias naturales (física, química, biología) y las matemáticas, utilizando un lenguaje lógico y simbólico.
- Capacidad para comunicarse efectiva y oportunamente en forma escrita, gráfica y simbólica.

De las destrezas o habilidades mentales que deben poseer los estudiantes para enfrentar el futuro, se mencionan algunas como se presenta a continuación:

- Destrezas de aprendizaje independiente e interdependiente para toda la vida.
- Habilidades de pensamiento crítico y creativo para la solución de problemas.
- Habilidades o competencias para el trabajo interpersonal y el trabajo en equipo.
- Competencias comunicativas.
- Integración del conocimiento disciplinar.

Después de reconocer estos aspectos se planteó en "El ingeniero Colombiano del año 2020. Foros Preparatorios - XXVI Reunión Nacional, 2006", algunas estrategias que a largo plazo podrán permitir que las instituciones puedan ofrecer ingenierías de calidad. Entre las estrategias planteadas se considera necesario mencionar las del ámbito curricular y el ámbito de los docentes, las cuales se presenta a continuación en la tabla 1:

Tabla 1.

Estrategias para ofrecer Ingenierías de Calidad

Curricular	Docente
• El estudiante es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje. • Revisión de los currículos. • Formación sólida en matemáticas y ciencias naturales. • Capacidad de comunicación oral y escrita. • Conocimientos y habilidades en las nuevas tecnologías. • Flexibilización del currículo. • Interdisciplinariedad y efectividad. • Nuevos contextos de aprendizaje.	• Reconocimiento de la profesión de profesor de ingeniería • El profesor de ingeniería debe ser un gestor del conocimiento, trabajar en equipo, tener habilidades comunicativas, ejercer un gran liderazgo, tener sentido de la profesión y manifestar siempre un comportamiento ético. • Conocimientos actualizados en el área propia. • Capacidades pedagógicas. • Experiencia práctica. • Espíritu de búsqueda e innovación.

Camarena et al. (2013), apoyada en otros autores, ha señalado que algunos de los objetivos de la formación de ingenieros son: generar profesionales que posean conocimientos basados en la física, química y matemáticas; capacidad para manejar información técnica y estadística; capacidad para resolver problemas técnicos; desarrollar y emplear modelos que simulen el comportamiento del mundo físico; también capacidad para comunicarse y emprender proyectos.

Conforme se ha mencionado hasta aquí en la educación de ingenieros en Colombia (esta incluye la formación de tecnólogos) se resaltan aspectos de interés como las matemáticas y las ciencias básicas, la necesidad de generar una articulación entre estas para colaborar con el desarrollo de algunas capacidades, las características del profesor para mediar en dicha articulación, la importancias de producir y utilizar modelos, las acciones a nivel curricular para el logro de los objetivos y la necesidad del uso de contextos como una manera didáctica de acercarse a diferentes dimensiones cognitivas. Estas y otras características son contempladas por Camarena en su teoría, la cual se presenta a continuación.

2.2 Matemática en el contexto de las ciencias (MCC)

En consecuencia a lo expuesto se plantea las MCC como una estrategia que integra muchos de los aspectos mencionados, debido a la amplitud de la teoría. De acuerdo con Camarena et al (2013) mediante la aplicación de la teoría se provee a los estudiantes con las herramientas necesarias para enfrentar de manera exitosa diversos problemas donde se requiera capacidad analítica. La autora sostiene que también se mejoran muchas habilidades de las requeridas para generar el aprendizaje de las matemáticas, tales como el tránsito entre diferentes registros de representación, las estrategias en la resolución de problemas, los proceso argumentativos, el desarrollo de habilidades para identificar puntos de control y regularidades, además que es posible generar hábitos de trabajo individual y en equipo, en general que los futuros profesionales se acerquen a la solución de problemas reales y que todo esto garantiza una formación sólida de los estudiantes.

Según la autora en el trabajo con la MCC se genera que el estudiante asuma un papel activo y protagónico y el profesor se convierte en un facilitador de la apropiación de los conocimientos.

Camarena (2009) reconoce un problema relacionado con el aprendizaje de las matemáticas, ya que generalmente no es del agrado de los estudiantes, o simplemente aún son reconocidas como una disciplina difícil y apartada de las personas por estar desconectadas de la vida cotidiana (Angulo, 2013; Kistemann Jr, 2012; Camarena 2013).

Camarena (2009) afirma que el desconocimiento de la utilidad de las matemáticas en los programas de formación, le resta motivación al estudiante hacia estas, y sumado a esta situación los objetivos formativos de los programas académicos mencionan que los egresados deberán poseer una serie de habilidades. Sin embargo, no se especifica cómo puede esto lograrse. La autora sostiene que dicha problemática puede estar determinada por factores de tipo social, económico, curricular (que se asocian con la didáctica) y también los referidos a las habilidades de los estudiantes.

Por otro lado la investigadora reconoce que puede existir un conflicto desde el punto de vista cognitivo, debido a que los estudiantes reciben de manera desarticulada sus cursos de matemáticas y de ingeniería, lo que genera dificultades en la matematización de los fenómenos y otros eventos.

Como una manera de atender a esa realidad, emergen en los años 80's el constructo teórico "*La matemática en el contexto de las ciencias*". Este constructo reflexiona sobre la relación entre las matemáticas y las ciencias que la requieren entre las matemáticas y los problemas de la actividad laboral, las matemáticas y la vida profesional y cotidiana, (Camarena 2009; Camarena y Urista, 2007).

De acuerdo con Camarena et al, (2013) y Camarena (2009) el constructo se basa en tres principios:

- La matemática es una herramienta de apoyo y materia formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel superior (en particular puede verse como un soporte para el desarrollo científico y tecnológico)
- Los conocimientos nacen integrados.

De acuerdo con Camarena esta teoría se propone que el estudiante pueda llevar los "conocimientos adquiridos" en matemáticas a las otras ciencias o contextos para favorecer, de esta manera, las competencias laborales y profesionales (Camarena, 2005, Camarena y Urista, 2007; Camarena, 2009). Sin embargo, es posible pensar que los conocimientos puedan adquirirse de manera articulada a los contextos propios del ingeniero en formación. Cabe aclarar que cuando en esta investigación se use el término competencias será sinónimo de términos como habilidades, destrezas, capacidades. Como se ha mencionado a través del texto las matemáticas median el desarrollo de tales capacidades.

La Matemática en el contexto de las ciencias contempla cinco momentos:

- Curricular, desarrollado desde el año 1984.
- Didáctica, iniciado desde el año 1987.
- Epistemológica, abordado en 1988.
- Formación docente, definido en 1990.
- Cognitivo, estudiado desde 1992

Para Camarena (2009) es claro que en el aula se presentan de alguna manera los cinco momentos y que además estos interactúan entre sí. Sin embargo para exposición formal de la teoría, esta debe ser fragmentada en los cinco momentos mencionados.

A continuación se hace una breve descripción de cada momento de acuerdo a lo explicado por Camarena (2009):

Momento curricular

> […] posee una metodología denominada dipcing —diseño de programas de estudio de matemáticas en carreras de ingeniería, […] fundamentada en el paradigma educativo que considera que con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera (Camarena, 2009, p 17).

Con el fin de dar cumplimiento a las pretensiones de este momento de la teoría, se contempla aspectos de interés como: el análisis de los contenidos matemáticos de los cursos y el reconocimiento de las competencias requeridas por el profesional.

La autora sostiene que la metodología de este momento de la teoría puede propiciar la vinculación entre las matemáticas y las demás asignaturas, tanto las básicas como las específicas de la ingeniería, y estas a su vez con los diferentes niveles profesionales como: el nivel de posgrado y la industria.

Momento de formación de profesores

De acuerdo con la autora este momento busca vincular las asignaturas de las matemáticas con otras disciplinas propias del programa de formación. Se contemplan algunas categorías cognitivas de interés a considerarse en los docentes de matemáticas para nivel universitario: conocimiento del programa de formación para el cual sirve sus cursos, conocimientos en el uso de la tecnología para apoyar el aprendizaje y conocimientos sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Momento epistemológico

De acuerdo con Camarena se ha encontrado que la mayoría de las matemáticas que se estudian en las asignaturas surge en el contexto de problemas de otras áreas del conocimiento, que al final estos pierden el contexto y conllevan al ofrecimiento de una matemática más abstracta.

Camarena sostiene que la matemática en el contexto de las ciencias permiten que:

> Con la matemática en el contexto de las ciencias se muestra que así como los contextos de otras ciencias le dan sentido y significado a la matemática, ésta a su vez le da sentido y significado a los temas y conceptos de las ciencias del contexto [...]. (2009, p. 17).

Este momento además contempla el diseño de actividades enmarcadas en contextos de interés para ser llevadas al aula de clase.

Momento cognitivo

De acuerdo con Camarena (2009) "se ha verificado a través de la matemática en contexto que el estudiante puede lograr conocimientos estructurados y no fraccionados, y con ello estructuras mentales articuladas" (p. 23). Este momento, la teoría considera la importancia de que el estudiante transite entre los diferentes registros de representación como el aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir conocimiento. También la autora considera que la teoría refuerza el desarrollo de habilidades del pensamiento al estudiar situaciones vinculadas a los intereses formativos del futuro profesional, adicionalmente las investigaciones rescatan que la teoría favorece el desempeño académico y profesional, debido a la estimulación del factor motivacional del estudiante.

Momento didáctico

Aquí se muestra el proceso metodológico para lograr el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas que permitirá posteriormente la posibilidad de que el estudiante emplee los conocimientos adquiridos en otras áreas.

Camarena et al. (2013) citando a Niss (2003) afirman que las MCC,

> […] contribuye en la adquisición de las siguientes habilidades: a) pensar matemáticamente; b) plantear y resolver problemas matemáticos; c) modelar

matemáticamente; d) argumentar matemáticamente; e) representar entidades matemáticas (situaciones y objetos); f) utilizar los símbolos matemáticos; g) comunicarse con las matemáticas y comunicar sobre matemáticas y h) utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías). (p. 401).

La investigación que se reporta en este documento se enfocó principalmente en el momento didáctico, dado que su objetivo era analizar como los estudiantes daban sentido a los modelos mediante su análisis, por tanto, se profundizará un poco más en este momento.

En relación con el momento didáctico, Camarena (2011) señala que en esta fase se incluye una propuesta didáctica llamada la *Matemática en Contexto*, la cual propicia el aprendizaje de las matemáticas, en los contextos de otras asignaturas que cursa el estudiante y además contribuye con el desarrollo de habilidades en modelación. Según la autora los resultados derivados del uso de la fase didáctica pueden variar en función del diseño de la actividad didáctica. Sin embargo, se reporta un mejor desempeño para aplicar el conocimiento matemático a otras áreas de la profesión.

La *Matemática en Contexto* contempla nueve etapas, que se desarrollan en el ambiente de aprendizaje. Estas etapas son:

1. Determinación de los eventos o problemas matemáticos contextualizados.
2. Planteamiento del evento o fenómeno contextualizado.

En estas etapas se presenta una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de la profesión en estudio, en actividades de la vida cotidiana, profesional y laboral y puede ser a través de proyectos o problemas (Camarena 2009). Camarena et al. (2013) afirma que en esta etapa debe considerarse el análisis de los temas de las asignaturas que cursa el estudiante para determinar los eventos contextualizados, además determinar su vinculación con la industria para contextualizarlos en la actividad laboral y profesional.

3. Determinación de las variables (dependientes, independientes y controladas) y las constantes del problema. En esta resulta importante la determinación de las variables implicadas en el desarrollo de fenómeno que es objeto de estudio, lo que puede hacerse si se analiza el fenómeno, apoyándose en la teoría existente acerca del tema o bien puede hacerse a partir de un modelo matemático existente.

4. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos para abordar el desarrollo de la modelación y su solución, así como los temas indispensables de las disciplinas del contexto.

Es importante que los temas y los conceptos matemáticos puedan ser trabajados en concordancia con el nivel que cursan los estudiantes que participan del desarrollo de las actividades y además se considera que algunos conceptos nuevos pueden resultar durante el trabajo.

5. Determinación de un modelo matemático.

De acuerdo con la autora esta es la etapa central de la teoría. Sin embargo en esta etapa se pone en consideración la importancia de reconocer, usar y analizar modelos ya existentes.

6. Solución matemática del problema.

7. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.

8. Interpretación de la solución en términos del problema y áreas de las disciplinas del contexto.

9. Descontextualización de los conceptos y temas a tratarse en el curso. (Camarena 2009)

Camarena (2013) reconoce que el desarrollo de estas etapas requiere una planeación didáctica por parte del profesor y el diseño de algunas actividades, y que esta planeación requiere considerar elementos como: tránsito entre los diferentes registros de representación, tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa, desarrollo de habilidades heurísticas, metacognitivas, del pensamiento, argumentativas, para conjeturar y partir de supuestos, y bloqueo de creencias negativas, búsqueda de analogías; identificación de nociones previas, desarrollo de habilidades operativas de los conceptos matemáticos; uso de la tecnología como mediadora en el aprendizaje. Estos elementos serán considerados durante el diseño de las actividades propias del trabajo de investigación.

Según Camarena et al. (2013), la contextualización se da en las etapas 2, 3, 5, 6, 8 y así se posibilita que se vinculen las matemáticas a las otras ciencias y materias específicas de las carreras. Camarena destaca la importancia de las preguntas que realizan los estudiantes durante el desarrollo de las actividades y el acompañamiento del profesor para que los estudiantes encuentren soluciones.

Con respecto a la modelación matemática Camarena (2009) identifica algunas de las habilidades mentales que el estudiante manifiesta durante el desarrollo de las actividades, las cuales pueden fungir como elementos a tener en cuenta a la hora del diseño de actividades:

- Identificar los puntos de control de error como elemento metacognitivo; lo que implica que el estudiante busque informaciones, incongruencias y demás elementos que le permitan determinar si sus respuestas o procedimientos satisfacen el problema planteado.
- Transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático: esto de acuerdo a las formas de presentar la situación problema, que puede ser con enunciado literal, con enunciado evocador y con enunciado complejo.
- Aplicar heurísticas como estrategias para abordar un problema, que hace referencia a la manera de resolver los problemas al ir avanzando; por ejemplo cuando se hacen preguntas que facilitan el desarrollo de la resolución como las siguientes: ¿con qué se cuenta?, ¿qué se pregunta?, ¿qué tipo de datos se tiene?, ¿hay condicionantes?, ¿cuáles son variables en el problema y cuáles son constantes?, ¿se podrá ver para casos particulares y después resolverlo para cualquier caso?, ¿qué problema ya resuelto se parece a éste?, ¿cuál es la generalización del problema para determinar si es más fácil de abordar?, ¿qué analogías o semejanzas pueden encontrarse con otros problemas?, ¿se puede plantear de diferente forma para poder abordarlo?
- Identificar regularidades, esto cuando se analizan tablas o gráficos.
- Transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático, tales como: aritmética, algebraica, analítica y visual.

- Hacer consideraciones o idealizar el problema (cuando proceda). Esto se considera debido a que hay problemas que son muy complejos y se debe hacer idealizaciones para resolverlos, como por ejemplo controlar variables.

Con respecto al seguimiento del desempeño del estudiante Camarena et al. (2013), presenta la siguiente Tabla:

Tabla 2.

Evaluación del desempeño al establecer una propuesta didáctica basada en la fase didáctica de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias

Competencia matemática específica	**Capacidad evaluable**
Pensar matemáticamente	Descubrir regularidades
	Utilizar la inducción como estrategia de resolución de un problema.
Plantear y resolver problemas matemáticos	Traducir al lenguaje algebraico los enunciados verbales de problemas.
	Interpretar el resultado de un problema en el contexto en que se enunció.
	Perseverar en la búsqueda de soluciones.
	Comprobar la validez del resultado del problema.
Utilizar los símbolos matemáticos	Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad, relación o regularidad.
	Tránsito entre diferentes representaciones matemáticas.
	Aplicar las técnicas de manipulación de expresiones algebraicas.
Comunicarse con las matemáticas y comunicarse sobre matemáticas	Precisión del lenguaje utilizado para expresar las estrategias y razonamientos utilizados en la resolución del problema.

La autora comenta que apoyándose de otros marcos teóricos es posible explicar los fenómenos que ocurran en el aula, durante el desarrollo del trabajo (v.g. aprendizaje significativo de Ausbel). Estos marcos teóricos deben guardar relación con la modelación, las habilidades matemáticas y las acciones llevadas a cabo por los estudiantes para explicar, conceptualizar o resolver situaciones particulares. Camarena et al. (2013) sostiene que el objetivo del trabajo de aula basado en la teoría de las MCC es colaborar para que los estudiantes adquieran competencias matemáticas. En otras palabras logren la capacidad de resolver problemas de su ámbito de formación como profesionales.

En resumen el propósito de la teoría está centrado en el mejoramiento del desempeño matemático del estudiante y la adquisición de la competencia matemática. Lo que puede verificarse mediante el tránsito entre los diferentes registros de representación el análisis de procesos argumentativos y la capacidad para identificar puntos de control y regularidades (Camarena et al., 2013). Aunque como ya se mencionó anteriormente esta investigación pretende, que el aprendizaje se encuentre articulado a los contextos del programa de formación, y como se explicó antes, la autora sostiene que la elaboración del modelo matemático es la etapa central de la teoría. Sin embargo, algunos de los análisis, reflexiones e interpretaciones de los estudiantes se dan después de construir el modelo matemático, y como se ha encontrado en la literatura, uno de los inicios para aprender modelación es estudiar modelos matemáticos ya existentes.

El siguiente apartado tratará de señalar la importancia del análisis de los modelos matemáticos.

2.2 Uso y análisis de modelos matemáticos en Educación: una estrategia en el estudio de las matemáticas.

Muchos de los principios o leyes que describen el comportamiento del mundo físico son proporciones o relaciones que determinan la variación de un fenómeno descrito, y por lo general, la modelación de esos fenómenos tiene como resultado ecuaciones, en las cuales se puede encontrar que a través de variaciones en las cantidades (variables), se puede manipular teóricamente el fenómeno (Javaroni y Soares, 2012; Biembengut y Hein, 2004). De aquí que se destaca la importancia de diferenciar cuáles son los términos constantes y variables en un modelo matemático, además: se puede establecer sus intervalos de variación.

Según Machado (1988) (citado por Javaroni y Soares 2012), las ecuaciones encontradas cuando se solucionan problemas, buscan responder diversas preguntas, que pueden estar planteadas implícitamente en un fenómeno abordado, y según Javaroni y Soares (2012) responder a estas preguntas involucra no solo la solución de las ecuaciones encontradas, sino también el análisis de la manera en que se comportan dichas soluciones.

Javaroni y Soares (2012) basándose en el trabajo de Kallaher (1999) señalan que cuando la matemática se limita a los aspectos algebraicos de la resolución de ecuaciones, los estudiantes manifiestan dificultad en el entendimiento de las soluciones halladas en contextos particulares, de allí que las autoras sugieran que los problemas sean abordados inicialmente de modo cualitativo, es decir, que más allá de las soluciones analíticas, se promueve las interpretaciones de los estudiantes. Con base en estas consideraciones, los estudiantes deben pasar por experiencias en sus aulas de clase en donde puedan generar miradas, análisis e interpretaciones de los contextos a través de las matemáticas. Es por esta razón, que el análisis de modelos se puede convertir en una actividad que al interior del aula de clase se articula a las experiencias anteriormente mencionadas.

Considerar la posibilidad de que el análisis de modelos matemáticos se constituya en una actividad en las clases de matemática de un programa de formación en ingeniería, puede argumentarse a partir de los resultados de investigaciones realizadas en otros campos. Según Soares (2015) los estudiantes logran apropiarse del modelo matemático, es decir logran emplear el modelo para comprender y explicar diferentes situaciones, para encontrar inconsistencias y regularidades, comprender fenómenos e interpretarlos y en algunos casos es posible generar predicciones. La autora considera que también puede lograrse la discusión de nuevos conceptos matemáticos al relacionarse con una situación real, se logra la comprensión del fenómeno, los estudiantes enfrentan modelos realistas durante su vida académica sin saber toda la matemática que su construcción exige. Según la autora la relevancia de este hecho es que se comprende la utilidad de las matemáticas en su área de formación y los estudiantes pueden desarrollar algunas competencias de modelación como para la interpretación de resultados en término del fenómeno y de las otras áreas, también la capacidad de matematizar mejora debido a que se comienza por examinar las limitaciones y hacer modificaciones al modelo para crear uno mejor o mejorar su funcionamiento.

Soares y Javaroni (2012) y Soares (2012) señalan que el principal objetivo del análisis de modelos es proponer el estudio de modelos matemáticos mediante sus ecuaciones y soluciones, para posteriormente discutirse los conceptos matemáticos que se vinculan a dicho modelo. Por su parte, Narro (1996) señala que un modelo es el resultado de la elección de objetos y símbolos que representan una situación y su naturaleza depende de los elementos que se elija para conformarlo. La autora considera que "el modelo puede ser un dibujo, una fotografía, un mapa, una gráfica, una red, etc., o expresiones matemáticas" (p. 185).

Al pensar en la solución de un modelo o ecuación, que está vinculado a un fenómeno, la visualización del fenómeno juega un papel importante para la comprensión de todo lo que envuelve su solución, ya que puede hacerse deducciones acerca del comportamiento de la solución, sin que necesariamente se haga una determinación algebraica, hecho que se facilita con el uso de diferentes herramientas tecnológicas. Soares y Javaroni (2012) destaca la visualización como aspecto relevante para el desarrollo de las actividades propuestas para la intervención en el aula de clase, para lo cual la tecnología puede resultar de gran utilidad de acuerdo con lo encontrado por Soares (2015), y también señala que, la visualización de un fenómeno en un gráfico, aporta informaciones no percibidas por los estudiantes cuando se presentan soluciones meramente matemáticas. Entonces es posible que al observar un gráfico se generen interpretaciones más coherentes a los resultados que cuando el resultado es meramente numérico por ejemplo.

En coherencia con lo anterior, el análisis de modelos exige una transición entre soluciones visuales y analíticas, ya que las representaciones ayudan a encontrar lo que no se percibe en las ecuaciones o modelos (Javaroni y Soares 2012, Soares 2012). Como consecuencia de este hecho, el análisis de los modelos puede generar un ambiente de discusión, en el cual la orientación del profesor juega un papel fundamental en las conclusiones generadas después de las interpretaciones de los estudiantes. El tránsito entre las representaciones matemáticas y no matemáticas también es considerado por Camarena (2012) en algunas de las etapas de su teoría y es visto como un elemento de importancia a la hora del diseño de las actividades enfocadas en el desarrollo de capacidades argumentativas y del pensamiento que permitan hacer conjeturas y partir de supuestos.

Javaroni y Soares y (2012) sostienen que a pesar de que la elaboración del modelo matemático es relevante, en algunas de las perspectivas de modelación, esto no es lo más importante, sino que puede ser más importante el camino recorrido por el estudiante para representar matemáticamente un fenómeno y esto puede verse de manera invertida, es decir, cómo el estudiante puede comprender un fenómeno mediante el análisis de su modelo matemático. Esta investigación reporta cómo el análisis de modelos promovió la comprensión de los fenómenos.

Convergentemente, Bissell y Dillon (2000) considera que es posible que muchas de las prácticas educativas precisen de generar vínculos más fuertes entre los procedimientos matemáticos y las matemáticas que emplean los ingenieros, debido a que al parecer se centra la atención en los detalles matemáticos y no, en los del sistema estudiado con un modelo. Además estos autores consideran que los ingenieros usan los modelos para entender sistemas y que esto se puede hacer, ya sea a través de ecuaciones, gráficos, diagramas etc., es decir: el modelo no es autónomo, sino que se convierte en un punto de partida para referirse a los fenómenos que se representan.

En el uso y análisis de modelos hay varios tipos de comprensión, se comprende el fenómeno estudiado y también se comprende las representaciones matemáticas y los objetos matemáticos. Para lograr que el estudiante alcance el objetivo de comprender es necesario el desarrollo de diversas habilidades del pensamiento. Según Camarena (2005) el desarrollo de estas habilidades permite la comprensión de las ciencias y estas a su vez permiten desarrollar las habilidades del pensamiento del estudiante. De acuerdo con Romo-Vázquez (2014) y Romo-Vázquez y Castela (2010) durante el uso de los modelos matemáticos es posible reconocer las necesidades matemáticas que surgen durante dicho uso, Romo-Vázquez (2014) sostiene que un ingeniero rara vez crea un modelo, que es más común que seleccione uno estándar, con soluciones conocidas y lo adapte o modifique ligeramente antes de emplearlo. Sin embargo: este proceso no es sencillo, pues implica conocer el modelo y el proceso o fenómeno al cual va adaptarse.

Se suscita la posibilidad de que usar y analizar modelos, pueda emerger como uno de los primeros pasos antes de llevar a cabo proceso de modelación y creación de modelos matemáticos. De acuerdo con Romo-Vázquez (2014) "el proceso de modelización es comúnmente incremental, es decir, consiste en una afinación de modelos existentes hecha sobre la base de la experiencia y de la práctica, incluyendo lo que resulta de los fracasos de la modelización". (p. 322).

En la elaboración de modelos puede ser útil analizar modelos ya creados como punto de partida (Bissell y Dillon 2000), puesto que puede permitir que una vez identificadas las variables y otros parámetros se pueda comprender su influencia en el comportamiento o la solución del fenómeno y esto es una de las acciones de modelar (Javaroni y Soares y 2012), según Dolores y Cuevas (2007) citadas por Villa-Ochoa (2011) una manera interesante para analizar el comportamiento de un modelo es detectar tendencias y hacer comparaciones mediante las gráficas que los representan.

Javaroni y Soares (2012) han resaltado que el análisis de modelos ofrece otras posibilidades para la actividad en la que el estudiante esté involucrado, entre ellas, las autoras señalan: el estudio del fenómeno en cuestión, estudio de hipótesis para la elaboración del modelo, estudio del comportamiento de las soluciones del modelo (relacionando este comportamiento con el fenómeno y las hipótesis generadas para su construcción), comprensión de cada término en el modelo, estudio de la influencia de los parámetros del modelo, generalizar, detectar tendencias y analizar cómo influiría alguna intervención en el fenómeno además de las limitaciones del modelo.

Romo-Vázquez y Castela (2010) consideran la importancia de la simulación en los procesos de uso de modelos, puesto que permite analizar respuestas del modelo ante diferentes entradas de valores, lo que facilita hacer estimaciones y evaluar intervalos de valores que puedan emplearse; lo que hace probable que se atienda a diferentes necesidades desde el punto de vista matemático y del contexto. Además es factible que mediante estas actividades se facilite que los estudiantes respondan ante diferentes interrogantesen términos del contexto del problema.

Si bien el análisis no implica modelar (como construcción o producción de modelos), sí considera muchas de las actividades que se llevan a cabo al modelar, como por ejemplo: determinación de variables, construcción e interpretación de gráficos, análisis de datos, reconocimiento de conceptos tanto matemáticos como de los contextos de formación stc, e implica la integración de las matemáticas como herramienta para la comprensión de diversos fenómenos Así por ejemplo, Ochoa Martínez (2005) retomando el trabajo de Barat (1998), reconoce la importancia de conocer fundamentos relacionados con otras ciencias mientras analizan modelos matemáticos para entender un fenómeno particular.

Las actividades señaladas por Bissell y Dillon (2000), Javaroni y Soares y (2012), Romo-Vázquez y Castela (2010) y Romo-Vázquez (2014) contribuyen para que los estudiantes comprendan diversos conceptos matemáticos y, a su vez, desarrollen habilidades que les permitan enfrentarse a su futuro desempeño académico y profesional.

Según Javaroni y Soares (2012) algunos conceptos como la derivada pueden ser mencionados en el inicio de un curso y tomados a profundidad a lo largo del análisis de un modelo matemático inscrito en una situación particular, bajo esta perspectiva el análisis de modelos pueden facilitar la introducción de diversos conceptos matemáticos de una manera natural.

En relación al uso de los modelos matemáticos es importante presentar algunas consideraciones aportadas por Bissell y Dillon (2000) que a manera de resumen logran vincular el análisis de modelos con las habilidades requeridas para su uso. Dicho resumen se presenta en la tabla 3:

Tabla 3.

Habilidades implicadas en el uso de Modelos matemáticos. Tomada de Bissell y Dillon (2000)

Aplicación	Habilidad para hacer interpretación y hacer recomendaciones apropiadas, se considera proactivo
Interpretación	Habilidad para interpretar una modificación de manera relevante para la situación , se considera reactivo
Manipulación	Habilidad para modificar la forma básica de modelo utilizando habilidades algebraicas entre otras, se considera básicamente mecánico

Los autores explican que la habilidad de aplicación puede observarse a través de la capacidad para sustituir números en una expresión, cambiar números o fórmulas en una celda. Sin embargo, debe existir la capacidad para interpretar lo que se hizo, es decir las dos primeras habilidades mostradas en la tabla se interrelacionan.

En el último nivel se considera la importancia de la capacidad para interpretar los resultados obtenidos, y al igual que antes, es posible que sea necesario interrelacionar con los niveles anteriores para reafirmar las conclusiones.

Todo lo mencionado respecto a la Educación Matemática y Educación en Ingeniería, la modelación y el uso y análisis de modelos, hace necesario reconocer un vínculo entre los referentes teóricos para responder a la pregunta: ¿Por qué usar y analizar modelos fundamentados en las matemáticas en el contexto de las ciencias?

2.3 ¿Porque usar y analizar modelos fundamentados en las matemáticas en el contexto de la ciencias?

Puede resultar útil para los estudiantes de programas de formación en Alimentos analizar modelos desarrollados para el estudio de fenómenos particulares y que están vinculados a las demás ciencias y a su carrera, puesto que como se expuso en la revisión hecha de la literatura, las matemáticas ofrecen la posibilidad de desarrollar en el estudiante las habilidades requeridas, tanto a nivel académico, profesional y de pensamiento. De acuerdo con el referente teórico: *las matemáticas en contexto* es un mediador para la integración de las matemáticas como herramienta generadora de habilidades, con las otras ciencias y la vida profesional. Este constructo teórico contempla como elemento central la elaboración del modelo matemático. Sin embargo, para construir un modelo matemático debe disponerse de un tiempo considerable, además la literatura reporta que posiblemente los ingenieros usen con mayor frecuencia modelos existentes, debido a estas razones el análisis de modelos matemáticos puede ser visto como actividad previa a la modelación, ya que comparte algunas etapas de esta como fue descrito anteriormente. Mediante el análisis de modelos el estudiante podrá reconocer diversos conceptos matemáticos y apropiarse de ellos para usarlos posteriormente, estudiando sus diferentes representaciones, la identificación de variables y su influencia, identificar regularidades, analizar gráficos, analizar situaciones y determinar su solución con la ayuda del modelo matemático. De acuerdo con el referente teórico dichas manifestaciones pueden ser interpretadas como un desarrollo en las habilidades del pensamiento cuando sean expresadas.

En esta investigación se contempló diferentes momentos para la implementación del constructo teórico, empleando como estrategia principal el *uso y análisis de modelos*.

En la Tabla 4 se presenta este trabajo de investigación en dos momentos que integran las fases de la teoría y diferentes momentos para el estudio, uso y análisis de modelos matemáticos de manera articulada, para señalar algunas de las características que se han tenido en cuenta para el posterior diseño metodológico.

Se puede observar que el constructo teórico *las matemáticas en el contexto de las ciencias* contempla diferentes aspectos de la formación de los futuros profesionales, su principal objetivo es la construcción de un modelo matemático. Sin embargo, se entiende que esta es una tarea compleja y que requiere de tiempo y diversas habilidades, de aquí resulta la posibilidad de trabajar con modelos existentes, lo que ha conducido esta investigación a reconocer la importancia del uso y análisis de modelos como una estrategia integra a las actividades del aula y a la teoría de las MCC.

Tabla 4.

Momentos del estudio que integran las fases de la teoría con el uso y análisis de modelos.

Matemáticas en el contexto de las ciencias				
Momentos	Aspectos curriculares	Aspectos epistemológicos	Aspectos del profesor	Aspectos del estudiante
1. diseño	El estudiante es el centro del proceso Revisión de los currículos y programas de los cursos Importancia de las matemáticas y las ciencias. La comunicación. Tecnologías Digitales Flexibilización del currículo Interdisciplinariedad Contextos de aprendizaje	El quehacer de un ingeniero. Las matemáticas en las aulas de clase para re-crear el estudio de la matemática aplicada. La articulación de las matemáticas y sus ramas, con las demás ciencias en la producción de conocimiento.	Gestor del conocimiento Incentivar discusión Habilidades comunicativas Conocimientos actualizados en el área propia Capacidades pedagógicas Experiencia práctica Espíritu de búsqueda, innovación y liderazgo	El nivel formativo (académico) El contexto de formación Nociones previas
Estrategia principal: uso y análisis de modelos				
Cognitivo		Metodológico		
2. Implementación (didáctica)	Identificación de patrones y regularidades Promover razonamiento Generalización e Interpretación Construcción de representaciones Abstracción y simplificación Uso de analogías Habilidades del pensamientos		Presentación del fenómeno y el contexto Actividades Secuencia de actividades Usos	

3. Metodología

Conforme se ha mencionado en los capítulos precedentes, esta investigación se centró en describir, reflexionar y examinar la manera en que los estudiantes de un curso de matemáticas usan y analizan modelos matemáticos relacionados con su programa académico. En particular se respondió la pregunta: *¿Cómo los estudiantes de una asignatura de Matemáticas ofrecida en un programa de formación en Alimentos usan y analizan modelos matemáticos relacionados con su futuro desempeño profesional?*

Estudiar este fenómeno educativo tuvo en consideración que los estudiantes deben estar involucrados en experiencias en las cuales las matemáticas sean estudiadas articuladas a los fenómenos propios del campo de formación de los tecnólogos e ingenieros de alimentos. Por tanto, el investigador debió poner especial atención a las diferentes actuaciones y manifestaciones verbales, gestuales, gráficas y escritas que hacen los estudiantes cuando se enfrentan a diversas situaciones relacionadas con fenómenos particulares durante el estudio de dos modelos matemáticos. En este estudio, tales manifestaciones se observaron cuando los estudiantes expresaban sus comprensiones acerca de los usos de los modelos matemáticos, de las gráficas y de los resultados, esto permitió determinar las conceptualizaciones que emergían de manera articulada en relación a las matemáticas y el área de los Alimentos.

Aspectos como la verbalización o la manifestación gráfica de sus comprensiones, tanto de los fenómenos estudiados, como de los conceptos matemáticos que emergieron en el desarrollo de las actividades y la articulación entre estos, articulación que es determinada por las necesidades de formación de los profesionales en alimentos, que han sido mencionadas en capítulos anteriores; fueron considerados de gran importancia y se buscó estimular la generación de episodios que propiciaran dichas manifestaciones de la comprensión durante la investigación. En coherencia con los planteamientos de Camarena et al. (2013) el diseño del ambiente de aprendizaje exigió que el investigador (profesor de la asignatura) además de tener los conocimientos matemáticos necesarios para el desarrollo del curso, también estuviera en capacidad para facilitar y mediar la articulación de los componentes matemáticos con los de la profesión en alimentos y los de las ciencias básicas. Dichos componentes serán presentados en el capítulo 4.

Las anteriores consideraciones se convirtieron en argumentos de porqué la investigación debió ser de tipo cualitativo, pues según Bogdan y Biklen (2007) este tipo de investigación se muestra pertinente cuando: los datos provienen de un ambiente natural, cuando el componente descriptivo es relevante, el investigador considera de mayor importancia el proceso que el resultado mismo, se tiende al análisis inductivo de los datos y el significado es un elemento de suma importancia dentro del proceso. En el caso de esta investigación el trabajo se desarrolló en el aula de clase, como se ha mencionado se valoró las diferentes manifestaciones interpretativas y se generaron diálogos que propiciaron la comprensión de los conceptos emergentes.

3.1 El método

Buscar una respuesta a cómo los estudiantes usan y analizan los modelos, implicó que se profundizara detalladamente en la manera en que se desarrollaban los procesos de análisis particular y grupal de los estudiantes del curso. Esto llevo a seleccionar el *estudio de caso*s como método de la investigación, puesto que en palabras de Hernádez Sampieri, Fernandez y Batista (2010) los estudios de caso son “estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta, analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar alguna teoría” (p. 163). Sin embargo Hernádez et al. (2010) apoyados en otros autores afirman que también se consideran una clase de diseño, una clase de muestreo, Yin (2009) concibe los estudios de caso como un método y sugiere que es posible emplear los estudios de caso, cuando la investigación se orienta por preguntas que indagan el “cómo” y “por qué”, lo que concuerda con la pregunta de esta investigación.

Galeano (2004) considera que el estudio de caso permite que el investigador alcance mayor comprensión sobre un tema particular o indagar sobre diversos fenómenos que ocurren en un individuo o grupo de estos. En ese sentido el estudio de casos puede permitir que se dé respuesta a la pregunta que orientó la investigación.

Debido a lo anterior, a la pregunta de investigación y a que se trabajó con un grupo con características definidas e inmerso en el contexto de esta investigación, se convirtió en unidad de análisis los datos relacionados con las preguntas “cómo” y “por qué” los estudiantes usan y analizan modelos matemáticos. Se clasificaron las participaciones y respuestas de los estudiantes de acuerdo al contenido, se enfatizó en el contenido matemático y lo relacionado con la tecnología, ingeniería y ciencias básicas.

Dichos datos fueron obtenidos de los diferentes medios como video grabaciones, textos escritos por los estudiantes donde pudiera reconocerse sus concepciones sobre el uso y análisis de los modelos matemáticos y los fenómenos estudiados.

Se trabajó con un grupo de estudiantes, que se constituyó en el caso a estudiar, en lo referente al grupo más adelante en este documento se detallará los aspectos inherentes a este. De manera convergente con el marco teórico y la pregunta de investigación fue necesario emplear diferentes técnicas de recolección de datos consideradas por Villa-ochoa (2011) y Yin (2009) como registros escritos, documentos, observación directa, entrevistas (en el caso de esta investigación: diálogos que surgieron durante el desarrollo de las actividades propuestas), para obtener y registrar los datos provenientes del estudio.

La información recogida se clasificó de acuerdo a las categorías que emergieron durante el análisis de los datos: a) componentes matemáticos del análisis de modelos, b) componentes básicos de la ingeniería y de los profesionales en alimentos (los cuales se agruparon en la misma categoría debido a su relación). Sin embargo, a pesar de que emergieron dos categorías estas fueron analizadas de forma simultánea debido a que la mayoría de las veces resultaron vinculadas durante el trabajo de uso y análisis de los modelos. Se buscó evidencia en las explicaciones de los estudiantes y después la manera de confirmar o refutar lo encontrado, mediante la generación de diálogos y buscando convergencia o divergencia entre los aportes realizados por los estudiantes.

De acuerdo con estas consideraciones, con el marco teórico y debido a que la intencionalidad es reflexionar acerca de los procesos de análisis particular y grupal de los estudiantes, se diseñaron experimentos de enseñanza, pues autores como Borba (2004) y Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) consideran que este tipo de aproximación metodológica permite mejorar los resultados educativos y pueden ser mejoradas continuamente de acuerdo con lo observado, para dar respuesta a los interrogantes planteados.

3.2 El contexto en el que se realizó el estudio

3.2.1 La asignatura

El trabajo empírico se desarrolló en la asignatura de Geometría, en el semestre comprendido entre enero y junio de 2015. Regularmente esta asignatura se ofrece en el primer semestre en los programas de Ingeniería y Tecnología de Alimentos de la Universidad de Antioquia. En particular, este estudio se desarrolló en un programa ofrecido en la Sede de Amalfi de la misma Universidad. Por ser un programa de regionalización, las asignaturas se ofrecen en presencialidad concentrada los fines de semana. De ese modo, los estudiantes durante la semana deben dedicar tiempo al desarrollo de actividades complementarias de los cursos, las cuales son orientadas por el docente. Posteriormente, los fines de semana se desarrollan las sesiones de clases. El profesor de esta asignatura contaba con experiencia en la docencia universitaria y cursos de matemáticas (Cálculo, Introducción al Cálculo, Geometría) y además es ingeniero de Alimentos de profesión titulado en la misma Universidad. Esta característica resultó especialmente útil puesto que promovió la generación de vínculos entre los conceptos matemáticos y de las ciencias de los Alimentos.

Tanto en el programa de Ingeniería como en el de Tecnología, la Geometría es vista como una asignatura fundamental. A través de su estudio se debe posibilitar y proporcionar herramientas que faciliten el desarrollo de diversas habilidades en los estudiantes. De acuerdo con el programa de Geometría Euclidiana vigente (aprobado por el Consejo de la Facultad de Ciencias Farmacéuticas y Alimentarias en 2009) se resalta que el propósito de la Geometría es proporcionar las herramientas necesarias para desarrollar la capacidad de razonamiento en la solución de problemas de la ingeniería. Sin embargo, es posible que no se muestre de manera directa el vínculo del curso con el campo del profesional en alimentos, debido a que sus contenidos están orientados al estudio de la Geometría misma y no se hace explícito en ninguna parte del documento las maneras en que se deben promover las habilidades que requiere el futuro profesional (Departamento de Alimentos, 2009).

El programa del curso contiene un capítulo de "construcciones" el cual está orientado al trazado de figuras, lo cual puede aportar elementos para la asignatura de "dibujo técnico" que cursan los estudiantes del programa de Ingeniería de Alimentos. En el primer capítulo del curso de Geometría se contemplan consultas que ayuden a los estudiantes a comprender la importancia y la pertinencia del curso para los profesionales en alimentos. También se presentan otros subtemas como el manejo de espacios para el diseño de plantas. Así pues se observa que en el programa de Geometría Euclidiana se busca la vinculación entre las matemáticas, la geometría como una rama de estas y la ingeniería de alimentos, pero no se genera una mayor profundización acerca de esa vinculación o la forma de hacerla visible, debido a esto es difícil evaluar el cumplimiento del propósito del curso.

En la justificación que se encuentra en el documento del programa de la asignatura (Departamento de Alimentos, 2009) se afirma que:

> El estudiante debe desarrollar habilidades de análisis empleadas para el planteamiento y solución de problemas. Los procesos alimentarios involucran equipos que tienen diferentes formas geométricas y se hace necesario estimar

sus áreas, superficies y volúmenes como parámetros de diseño y distribución. (p. 1)

A partir de esta premisa, es claro que se busca generar asociación entre la geometría y la Ingeniería y Tecnología de Alimentos. Sin embargo, no presentan sugerencias de estrategias, contenidos, materiales que aporten hacia ese ideal. Estos factores se contemplaron durante el desarrollo de esta investigación y posteriormente serán tratados con el fin de señalar la relevancia del componente geométrico en los procesos y en los modelos que rigen a estos.

La bibliografía recomendada para la asignatura Geometría se constituye de una lista de libros de texto en la geometría genéricos que se han diseñado siguiendo procesos axiomáticos del área y no para atender a los propósitos de articulación con el campo profesional de los profesionales en Alimentos. Los textos que se recomiendan se orientan al estudio de la geometría euclidiana, geometría plana y geometría analítica que se usan en programas de matemáticas en general.

Según Departamento de Alimentos (2009) a través del estudio de la Geometría se esperan lograr los siguientes objetivos:

Objetivo general: adquirir habilidades y destrezas que permitan visualizar y manejar los principales modelos de cálculo de áreas y volúmenes de diferentes sistemas que se involucran en el campo de la ingeniería[4].

Objetivos específicos:

[4] Una vez más se señala que la asignatura Geometría se ofrece tanto en el programa de Tecnología como en el de Ingeniería de Alimentos.

- Reconocer las relaciones entre las diferentes figuras geométricas y sus principales propiedades.
- Establecer relaciones entre ángulos y segmentos de las figuras geométricas semejantes.
- Encontrar áreas de figuras planas, superficies y volúmenes de cuerpos en el espacio.
- Analizar diferentes lugares geométricos de interés y su aplicación en alimentos.

Una lectura de estos objetivos permite inferir un interés en el desarrollo de las temáticas de los objetivos específicos orientados principalmente hacia los contenidos. No se alude a las "habilidades" y saberes que los ingenieros debería tener en relación a su campo de formación. En el objetivo general se observa que se busca generar una asociación entre la geometría y los procesos. Sin embargo, solo mencionan modelos de cálculo de área y volumen, y no la relación de estos conceptos geométricos con otros modelos matemáticos que participan o que se usan para la comprensión de dichos sistemas o procesos.

3.2.2 Los participantes

La asignatura de Geometría, en la cual se implementó la investigación, contó con la participación de ocho estudiantes, ellos tenían características diversas en tanto que solo tres de ellos pertenecen al municipio de Amalfi, los demás eran provenientes de municipios aledaños, algunos de ellos ya contaban con estudios previos a nivel universitario o tecnológico, sin embargo, estos no habían sido concluidos.

La asignatura se desarrolló en cuatro encuentros de fin de semana (96 horas de clase en la región y 64 en ciudad universitaria). Al inicio se contó con los ocho estudiantes; pero, después de la segunda sesión y por condiciones personales, uno de ellos tuvo que dejar de asistir a la asignatura, por tanto, solo pudo participar de la mitad del trabajo en esta investigación. Por esa razón, sus aportes fueron tenidos en cuenta, debido a que en los análisis de los datos recolectados en esas sesiones se observó aportes significativos por parte del estudiante.

En el presente documento, los estudiantes se denominarán con los seudónimos de Maruja, Berta, Eder, Rómulo, Robín, Davy, Radamel y Albert.

3.3 Fases de la investigación

El trabajo de investigación se desarrolló en cinco fases. En la primera se delimitó el problema de investigación. Con base en las necesidades observadas en la experiencia del investigador como profesor de matemáticas para futuros tecnólogos e ingenieros de Alimentos y, en conjunción con la literatura internacional consultada, se logró identificar y argumentar la necesidad de *usar y analizar modelos* como una estrategia para la enseñanza de las matemáticas. En la segunda fase se diseñaron dos experimentos de enseñanza (Ver anexos 1 y 2) los cuales fueron resultado de una interpretación de los referentes teóricos. En esta fase también se implementaron estos experimentos en el aula de clase. En la fase cuatro se consideraron los instrumentos con los que se hizo la recolección de los datos, entre estos, se encuentran diversos instrumentos, diálogos, cuestionarios, documentos, observación participante y presentaciones orales; también se contempló el análisis de los datos construidos; y en la quinta y última fase se consolidaron los resultados y se hizo validación de estudio. A continuación se detallarán cada una de estas fases.

3.3.1 Fase 1. Concepción y diseño del estudio:

Consideró la revisión permanente de bibliografía y se confrontó con la experiencia docente en el área de matemáticas para estudiantes de tecnología e ingeniería de alimentos. Con ello, se logró consolidar otras actividades como:

- Delimitación del problema.
- Pregunta de investigación.
- Identificación de tendencias en la enseñanza de las matemáticas a partir de la literatura.
- Consideración la metodología a emplear.
- Consideración de método, actividades, herramientas e instrumentos de recolección de datos.
- Consideración y diseño de la ruta para obtener y analizar los datos.

El desarrollo de estas actividades estuvo mediado por la revisión permanente de la literatura, el problema que concierne a esta investigación y la discusión permanente del trabajo en diferentes espacios académicos.

3.3.2 Fase 2. Construcción del diseño e implementación a la luz de los referentes teóricos.

Los experimentos de enseñanza como herramienta en el estudio fueron diseñados acorde a los planteamientos de Camarena (2013), Soares y Javaroni (2012) y Bissell y Dillon (2000), Romo-Vázquez y Castela (2014), en otras palabras, se tuvo en cuenta que las matemáticas para los futuros ingenieros (y otros profesionales afines al área de Alimentos) requieren articularse a las necesidades de los profesionales, debido a que esto puede favorecer diversos aspectos de su formación, lo que puede ser especialmente útil cuando se trabaja con futuros profesionales de los alimentos.

Los experimentos de enseñanza surgieron entonces, como una estrategia que a través de un conjunto articulado de situaciones permite poner en “actividad” a los estudiantes, es decir, pone a los estudiantes en el centro de los aprendizajes.

Los experimentos de enseñanza, según Godino et al. (2013) consisten en aproximaciones metodológicas usadas en contextos donde se trabaja mediante el diseño y el análisis de diversas actividades. De acuerdo con el autor, esta metodología busca superar una brecha que parece existir entre las investigaciones científicas y la práctica educativa y afirma que cuando estas actúan por separado no se puede reconocer la influencia de los contextos sobre los resultados.

De acuerdo con Godino et al. (2013) la investigación basada en el diseño de experimentos de enseñanza puede ayudar con el desarrollo de entornos innovadores en el aprendizaje. Los experimentos de enseñanza también han sido valorados por Borba (2004) quien afirma que permiten explicar y comprender como un alumno o un grupo de estos piensan acerca de un asunto; para ello, se proponen actividades pedagógicas que al ser analizadas permitan entender detalladamente la matemática desarrollada por los estudiantes, a través de la valoración de las comprensiones manifestadas por estos. Una de las características de interés, es que el desarrollo de los experimentos de enseñanza y la investigación, se dan mediante etapas que contemplan ciclos continuos de diseño, implementación y análisis, a fin de identificar patrones del pensamiento del estudiante y relacionarlos con los medios usados para apoyar el desarrollo de sus habilidades.

En coherencia con Godino et al. (2013) en esta investigación se consideraron tres etapas para el diseño y la implementación de los experimentos de enseñanza: 1) Preparación del experimento; 2) Experimentación para apoyar el aprendizaje; 3) Análisis retrospectivos de los datos generados durante la realización del experimento. En un marco metodológico más amplio, estos últimos análisis se convirtieron en argumentos para ajustar o refinar los diseños de los experimentos siguientes, de este modo, a medida que los experimentos de enseñanza se iban implementando, se realizó un *análisis paralelo* de los datos recolectados hasta el momento.

Para iniciar con el diseño de los experimentos de enseñanza se tuvo en cuenta la pregunta: ¿Cuáles y de qué tipo son los modelos matemáticos que usan los tecnólogos o ingenieros de Alimentos? Para atender a esta pregunta se hizo una revisión de la literatura en la base de datos *ScienceDirect*. Para la búsqueda en esta base de datos se usaron los operadores boléanos “Food y Mathematical modelling” y “Food y mathematical models”. También se utilizaron libros y otras revistas donde la búsqueda se condujo con los mismos operadores.

La búsqueda arrojó más de 5000 títulos, se refinó buscando relación de los modelos y la modelación con la industria y los procesos de alimentos, si el título sugería dicha relación también se hacia la lectura del resumen, las palabras clave y el modelo matemático tratado. Durante la lectura se buscó que allí se relacionara el uso de los modelos matemáticos para predecir, controlar, describir procesos de producción o conservación de productos, se tuvo en cuenta aquellos cuyo foco de trabajo eran los fenómenos de transporte de masa y energía, después de observar que existe un aporte de carácter geométrico en la conformación del modelo, es decir el modelo incluye parámetros de carácter geométrico que al ser modificados generan modificaciones al modelo o a los resultados.

Es así como la presencia de palabras clave como: modelos matemáticos o modelación matemática y otras relacionadas con procesos y alimentos, permitieron conducir la revisión de la literatura, determinar que hay modelos que atienden a diferentes áreas del trabajo de los profesionales en alimentos y que en algunos de estos el componente geométrico tiene un importante papel en los resultados que otorga el modelo.

Los modelos seleccionados para la investigación comprenden: procesos de transferencia de masa (deshidratación) y procesos de transferencia de energía (procesos de enfriamiento y calentamiento).

Con base a estos modelos y a estos fenómenos se seleccionó un modelo desarrollado en otra investigación (ver anexo 2. Experimento de enseñanza 1), y un modelo clásico empleado para el estudio de la transferencia de calor y el estudio de algunas propiedades térmicas (ver anexo 3. Experimento de enseñanza 2).

Los experimentos de enseñanza fueron diseñados atendiendo a las etapas señaladas por Godino et al. (2013), como se describe en la tabla 5:

Tabla 5.

Etapas para el diseño e implementación de los experimentos de enseñanza

Etapa	Descripción
1) Preparación del experimento.	Aquí se tuvo muy en cuenta los hallazgos hechos al momento de la revisión de la literatura, para la elección del fenómeno y el modelo a estudiar. Además se tuvo en cuenta la complejidad y el nivel de las matemáticas de los modelos seleccionados y se consideró un

	factor fundamental el componente geométrico antes que el analítico.
2) Experimentación para apoyar el aprendizaje y para la validación de los experimentos	De manera previa a la implementación, los experimentos fueron ampliamente discutidos con el asesor y otros investigadores, con el fin de mejorarlos y hacerlos aceptables en términos de las pretensiones de la investigación y el nivel académico de los participantes de las actividades de la investigación.
3) Análisis retrospectivos de los datos generados durante la realización del experimento	Los experimentos de enseñanza fueron mejorados de acuerdo con lo observado en sesiones anteriores, con el fin de enriquecer las actividades y enfocarlas a los objetivos dela investigación.

Estos experimentos se implementaron en el aula de clase como un sistema de tareas, es decir, estaban conformados por varios enunciados, problemas y situaciones cuyo propósito fue promover el estudio de temas matemáticos a través del análisis de los modelos matemáticos que intervienen en dicho sistema. En los experimentos se buscó que los estudiantes hicieran uso de sus conocimientos generales y previos sobre el tratamiento de los fenómenos.

En los experimentos se integró la elaboración e interpretación de gráficos que permitieran establecer y comprender las relaciones entre las variables involucradas en el fenómeno. En general se fomentó el análisis y el cuestionamiento de algunas creencias que existen en el ámbito popular, como por ejemplo cuando se tiende a confundir la viscosidad con la densidad, contrastándolas con los resultados otorgados por el modelo matemático.

Las guías de trabajo que describen los experimentos de enseñanza se encuentran en los anexos 2 y 3.

Conforme se mencionó anteriormente, en la fase 2 se incluyó la implementación de los experimentos de enseñanza en el aula de clase, dicho en palabras de Godino et al. (2013) se hizo la experimentación.

Es importante señalar que previo a la primera sesión de trabajo se les envió a los estudiantes una parte del documento que contenía la actividad para que realizaran algunas actividades. Sin embargo, al iniciar la primera sesión los estudiantes solicitaron profundizar en aspectos relacionados con el fenómeno y el manejo de GeoGebra. Debido a esto la primera sesión contempló una fase introductoria en el fenómeno de deshidratación y una fase de inmersión en el tema de manera que permitiera reconocer las percepciones iniciales que tenían los estudiantes acerca de la deshidratación de alimentos. En la misma sesión se presentó el modelo matemático, se identificaron variables y se realizó un primer análisis de las gráficas obtenidas con GeoGebra, en la segunda sesión de trabajo el experimento de enseñanza proponía situaciones que podían ser analizadas con ayuda de las gráficas, el modelo y el “sentido común”.

De manera análoga se desarrolló el segundo experimento de enseñanza en las dos sesiones posteriores, esta vez se trató de la transferencia de calor, proceso que está asociado a la deshidratación misma. La primera sesión de segundo experimento, buscaba reconocer el conocimiento y las creencias que los estudiantes tenían frente a los procesos de transferencia de calor y posiblemente acerca de las propiedades térmicas involucradas en este fenómeno. Se presentó un experimento realizado en la

Universidade de São Paulo-USP con datos reales para la determinación de la conductividad térmica en dos muestras de crema de leche, los datos empleados se analizaron y se determinaron con los estudiantes algunas tasas de variación, algunas regularidades en las tablas de datos y posteriormente se mostró el modelo matemático para estudiar fenómenos de transferencia de calor, se presentó este análisis para diversas geometrías y se indujo a los estudiantes a determinar cómo quedaba el modelo matemático para el montaje de la práctica de laboratorio contenido en el segundo experimento de enseñanza..

Conforme se mencionó, los experimentos de enseñanza se implementaron en cuatro sesiones de trabajo. El primer experimento se desarrolló en dos sesiones, la primera se desarrolló el día 24 de mayo de 2015 y tuvo una duración de cuatro horas. En ella, los estudiantes se dispusieron a trabajar en equipos, con un computador. Inicialmente se introdujo a los estudiantes al tema de deshidratación y posteriormente se hizo la inmersión al trabajo de GeoGebra mediante la creación de gráficas y deslizadores que podrían hacer más interactivo el trabajo. Se presentó el modelo matemático y se condujo la identificación de las variables y sus relaciones de acuerdo a las diferentes gráficas propuestas y a medida que se analizaba el modelo los estudiantes hicieron analogías entre los procesos trabajados en los experimentos de enseñanza y otros procesos conocidos por ellos, que facilitaron su comprensión del fenómeno y la identificación de conceptos. Adicionalmente, los estudiantes empezaron a identificar limitaciones del modelo dados los resultados y las condiciones que permiten que el modelo ofrezca resultados coherentes.

La segunda sesión del primer experimento se ocupó de la realización del análisis de los componentes geométricos en el modelo matemático y su incidencia en el resultado. Esa sesión se realizó el día 31 de mayo de 2015 y tuvo una duración de cuatro horas. Durante el trabajo en esta sesión, los estudiantes pusieron de manifiesto diversos conceptos al explicar con la ayuda de las gráficas y el modelo matemático algunas situaciones propuestas en el contexto de la deshidratación de alimentos.

Las sesiones tercera y cuarta se desarrollaron el 7 y el 14 de junio de 2015 y tuvieron duración de 4 horas y 3.5 horas respectivamente. El trabajo se condujo de forma semejante a las sesiones precedentes, con una inmersión en el fenómeno de calentamiento, el reconocimiento de algunas propiedades térmicas y físicas; y su influencia en la transferencia de calor. Se estimuló la realización de gráficas y el análisis de tablas, el establecimiento de relaciones de variación, por último se analizó el componente geométrico del modelo matemático para la transferencia de calor.

3.3.3 Fase 3. Instrumentos para la recolección de datos

Los instrumentos para recolectar los datos estuvieron acorde con el tipo de datos cualitativos. De acuerdo con Hernández et al. (2010) lo que se busca es obtener datos que posteriormente mediante el análisis se convertirán en información de interés.

Villa-Ochoa (2011), apoyándose en otros autores, manifiesta la importancia de contar con el apoyo de diversos instrumentos para darle solidez a los resultados obtenidos, puesto que en el desarrollo del trabajo de campo pueden surgir diferentes detalles que pueden ofrecer información y deben ser identificados lo que señala al investigador como uno de los instrumentos para la recolección de datos (Hernández et al. 2010).

A continuación se describen algunas fuentes empleadas en la recolección de datos.

Observación participante: conforme se mencionó anteriormente, resulta interesante pensar que para reconocer de una manera más próxima diversos elementos como percepciones y actitudes, el investigador debe ser un sujeto más activo, según Hernádez et al. (2010) este concepto implica la existencia del observador, su subjetividad y un acto recíproco en la observación.

Para Yin (2009) la observación participante permite ver el investigador como un sujeto activo en el proceso. Esto implica que la actividad del investigador en el proceso de investigación no se limitó a la del investigador o del profesor, si no de ambos.

Según Villa-Ochoa (2011) tener el rol de profesor además de investigador, facilita conocer de una manera más cercana las debilidades y fortalezas del grupo de trabajo, lo que permite una mejor selección de las actividades. El autor agrega que se debe tener cuidado con este método de recolección de datos ya que a pesar de sus ventajas puede presentar sesgos debido a la interacción del investigador, por consiguiente es importante realizar un acercamiento al rol del profesor como investigador participante y determinar algunos de estos sesgos y las maneras de disminuirlos.

El rol del profesor como investigador participante

La participación del investigador no fue exclusivamente como observador externo, también fue profesor e investigador en la asignatura. En ese sentido, tuvo una participación activa, como orientador y mediador, es decir como observador participante; todo esto con el fin de facilitar los procesos interpretativos de los estudiantes. Este tipo de participación permitió un acercamiento más estrecho con los estudiantes, pues de acuerdo con Woods (1987) (citado por Galeano 2004) la observación participante es una estrategia que permite comprender y explicar la realidad del fenómeno que se quiere observar, ya que permite penetrar en la experiencia de los otros, aspecto que se aprovechó para comprender la manera en la que los participantes (estudiantes) manifestaban sus ideas de comprensión de un modelo matemático inscrito en un contexto propio de los profesionales en alimentos, y aquí es donde se manifestó el uso y análisis de los modelos.

Todo lo anterior implicaba la importancia de estar atento a las reacciones de los estudiantes cuando se realizaba actividades en clase o compartiendo conocimientos que ayudaran a orientar la investigación, atendiendo a esto se delimitó los momentos en los cuales se iba a orientar el trabajo, sin embargo, se incentivó a los estudiantes a cuestionar, participar, debatir y se determinó que puede resultar más conveniente orientar las actividades que conducirlas.

Como se mencionó es importante reconocer que esta técnica puede ocasionar algunos sesgos en algún momento debido a la posibilidad de que el investigador conduzca las situaciones de acuerdo a las necesidades de la investigación. De acuerdo con Galeano (2004) el observador participante modifica con su presencia el curso de la acción y las motivaciones de los actores de la realidad que trata de comprender, además de que existe la posibilidad de dejar pasar desapercibidas cuestiones de interés dada la cercanía con los participantes, debido a que puede llegarse a asumir un papel de “nativo” dentro del grupo, es decir asumirse como uno de los participantes, este aspecto se consideró a cada momento y se buscó controlarlo mediante constantes reuniones con el asesor, mediante el análisis paralelo de los datos construidos, el cual también medió para determinar el desarrollo y el diseño de los experimentos de enseñanza, experimentos que además fueron presentados y valorados en diferentes espacios durante el desarrollo de los seminarios de la Maestría. Para la recolección de datos se consideró apropiado el uso del diario de campo, además se consideró necesario el uso de audio y video. Mediante este rol y el análisis paralelo del cual se hablará más adelante, se logró refinar aspectos que facilitaron el desarrollo del trabajo, de acuerdo con Galeano (2004) cada hallazgo puede verse como un punto de partida para otros momentos dentro de la investigación.

Entrevista: para King y Horrocks (citado por Hernández et al., 2010) la entrevista en investigación cualitativa es íntima, flexible y abierta, donde se reúnen el entrevistador y el o los entrevistados

Según Villa-Ochoa (2011) las entrevistas son instrumentos esenciales en la investigación cualitativa. De acuerdo con Yin (2009) la entrevista debe desarrollarse como una especie de conversación, que será guiada por el investigador y las preguntas empleadas, si bien obedecen a un propósito determinado deben surgir de manera fluida. En ese sentido, durante las actividades resultaron preguntas emergentes que fungían como una entrevista grupal semiestructurada debido a que ayudaban a precisar cuestiones relacionadas con la comprensión y siempre estaban en relación con los temas del experimento de enseñanza, de acuerdo con Hernández et al. (2010) las entrevistas semiestructuradas están orientadas por una guía de asuntos o preguntas (el experimento de enseñanza en esta investigación) y el investigador está en libertad de introducir preguntas adicionales que permitan hacer precisión acerca de conceptos o simplemente generar mayor información de un tema en particular.

Documentos: según Hernández et al. (2010) ésta es una rica fuente para la recolección de datos cualitativos, puesto que ayudan a comprender cómo se desarrolla el fenómeno central del estudio. Además permite que el investigador comprenda cómo se desarrollan y funcionan diversas experiencias.

Los documentos considerados para esta investigación fueron las elaboraciones escritas por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades y un informe final de las mismas. Los documentos elaborados por los estudiantes fueron escritos y digitales.

Presentaciones orales: este instrumento resultó útil para que los estudiantes expresaran las reflexiones generadas en los trabajos realizados, además de las dudas y sus conclusiones. Esta fuente se analizó mediante videos y audios producidos por los estudiantes acerca de un tema particular de las actividades, el cual fue seleccionado por ellos. Según Hernández et al. (2010) las narraciones orales proveen datos que pueden ser analizados y mencionados durante el reporte de la investigación.

Las presentaciones orales consistieron en la realización de un video por parte de los estudiantes, en parejas, donde tuvieron libertad para elegir un tema de su interés en relación a los fenómenos estudiados en clase y explicarlo mediante el uso de las representaciones del modelo que fueron elaboradas. Estas tuvieron como fin examinar las percepciones de los estudiantes y analizar sus comprensiones, además de generar datos que posteriormente sirvieran para un proceso de triangulación.

A manera de síntesis, se presentan los instrumentos para la recolección de datos en la Tabla 6:

Tabla 6.

Instrumentos para la recolección de los datos

Experimento 1		Experimento 2		Propósito
Se trabajó el análisis de un modelo empleado para explicar, comprender y predecir un proceso de deshidratación de yuca. El trabajo de aula contempló dos sesiones.		Se analizó un modelo clásico para estudiar fenómenos de transferencia de calor. Además se estudiaron algunas propiedades térmicas y sus modelos de cálculo, para esta actividad también se emplearon dos sesiones.		Proponer el estudio de modelos matemáticos relacionados con el quehacer profesional de los estudiantes.
Instrumento	**Registro**	**Instrumento**	**Registro**	
Documentos que buscaban dar respuesta a las preguntas planteadas en los experimentos.	1 documento	Documentos que buscaban dar respuesta a las preguntas planteadas en los experimentos.	2 documentos 1 documento digital	Obtener información que puede relacionarse con lo observado en las sesiones de trabajo.
Presentaciones orales	1 video realizado por los estudiantes Videos y audios de las sesiones de trabajo	Presentaciones orales	Videos y audios de las sesiones de trabajo	Reconocer las reflexiones de los estudiantes frente a un tema seleccionado por ellos en relación a las actividades. desarrolladas
2 sesiones de trabajo	Videos Audios	2 sesiones	Videos Audios	Detallar algunos momentos que

Observación participante	Notas de campo		Notas de campo	llamaran la atención y que fueran generadores de debate para someterlos a análisis.
Diálogos	Videos Audios Notas de campo	Diálogos	Videos Audios Notas de campo	Precisar diferentes situaciones acerca de la comprensión de los estudiantes.

3.3.4 Fase 4. Organización y análisis de los datos.

El análisis de los datos se constituye en un elemento clave dentro de la investigación cualitativa, según Hernández et al. (2010) el análisis cualitativo consiste en la organización de los datos recolectados, su transcripción y codificación. De acuerdo con Lincoln y Guba (citado por Javaroni y Soares, 2012 y Villa-Ochoa 2011) esta etapa es fundamental para cualquier investigación ya que permite sintetizar y dar sentido a las construcciones resultantes en las actividades, es decir, relacionar los datos y así poder generar vínculos entre la información recogida y los objetivos, con el fin de dar respuesta a la pregunta directriz de la investigación.

De acuerdo con Hernandez et al. (2014) el análisis tiene los siguientes propósitos:

> 1) explorar los datos, 2) imponerles una estructura (organizándolos en unidades y categorías), 3) describir las experiencias de los participantes según su óptica, lenguaje y expresiones; 4) descubrir los conceptos, categorías, temas y patrones

presentes en los datos, así como sus vínculos, a fin de otorgarles sentido, interpretarlos y explicarlos en función del planteamiento del problema; 5) comprender en profundidad el contexto que rodea a los datos, 6) reconstruir hechos e historias, 7) vincular los resultados con el conocimiento disponible y 8) generar una teoría fundamentada en los datos. (p. 451)

Este autor sostiene que lograr estos propósitos puede darse paulatinamente y considera diversas características inmersas en el análisis: el análisis no es un proceso rígido y puede poner en diálogo diferentes perspectivas; las percepciones, experiencias y sentimientos del investigador son una fuente importante de datos, varios investigadores pueden dar diferentes interpretaciones frente a los mismo datos, de tal forma que la cercanía con el contexto de recolección y los intereses de la investigación pueden determinar un factor importante durante la interpretación.

De acuerdo con lo anterior, el análisis de los datos en esta investigación contempló los siguientes momentos:

- **Análisis paralelo**: Hernández et al. (2010) considera que la recolección y el análisis ocurren prácticamente en paralelo. Este tipo de análisis presenta una interesante ventaja, permite la toma de decisiones acerca de la orientación de las sesiones de trabajo posteriores durante la investigación.

-**Organización del material**: el material proveniente de la recolección de datos se duplicó y digitalizó para garantizar que la información permaneciera segura.

En este "momento" se realizó una codificación de los datos obtenidos de los diferentes instrumentos. Esta codificación obedeció en primera instancia a los temas principales del trabajo, es decir, a los conceptos matemáticos, los de la geometría, aquellos de las ciencias básicas de la ingeniería en general y a los de la tecnología e ingeniería de alimentos y sus procesos. Para organizar la información resultante se empleó tablas donde se consignó información referente al tipo de actuación de los estudiantes, interpretaciones, conceptualizaciones, uso de analogías etc. y allí se observó que los elementos encontrados contenían semejanzas y no emergieron de manera desarticulada, por tanto era posible agruparlos.

-**Establecimiento de categorías**: la revisión del material organizado conllevó a la localización de las manifestaciones propias de los estudiantes durante el uso y análisis de los modelos matemáticos, identificándolos según la fuente donde se encontraban (documento, video, audio) como fragmento de un escrito o mediante una manera de identificarlo en el material donde se observó dicha manifestación.

Los datos se agruparon en dos categorías principales que se refieren a los componentes matemáticos y de la ingeniería de alimentos que emergieron durante el trabajo con el uso y análisis de modelos. Posteriormente se continuó con el análisis para obtener un panorama amplio que permitió determinar las unidades de análisis y trabajar con estas. Las unidades de análisis son todos aquellos datos que hablan del "cómo" y "porqué" los estudiantes usan y analizan modelos.

El análisis en esta etapa contempló además del *análisis paralelo* ya mencionado, un *análisis final* en el cual los datos recogidos a través de diferentes instrumentos se estudiaron y se clasificaron con el fin de i) Analizar la manera en que los estudiantes de un curso de matemáticas ofrecido en un programa de formación en Alimentos usan y analizan diversos modelos matemáticos que están relacionados con su futuro desempeño profesional y ii) Reconocer las posibilidades y las limitaciones que el análisis de modelos matemáticos presenta en la articulación a las necesidades de formación de los ingenieros de alimentos. Para lograr el primer propósito, el análisis se enfocó en datos correspondientes al uso de los modelos y sus representaciones para explicar, solucionar, interpretar diferentes situaciones planteadas en el contexto de los fenómenos estudiados, es decir, datos relacionados con explicaciones de los estudiantes. Para atender al segundo propósito, el foco de atención, se puso en primer lugar en los conceptos emergentes durante el desarrollo de las actividades y en segundo lugar, sobre sus relaciones con las matemáticas y los fenómenos que eran objeto de estudio.

Posteriormente y de acuerdo con la literatura se empezó a realizar la interpretación de los hallazgos, de acuerdo con Camarena et al. (2013) estos pueden ser explicados mediante aspectos de las matemáticas en contexto y de otros marcos teóricos.

Hernández et al. (2014) sugiere que después de seleccionar las categorías y establecer sus relaciones, se empieza a realizar interpretación de los resultados y de esta manera a responder las preguntas de la investigación. El autor afirma que:

> Con la finalidad de identificar relaciones entre temas, debemos desarrollar interpretaciones de éstos, las cuales emergen de manera consistente con respecto a los esquemas iniciales de categorización y las unidades. Es una labor de encontrar sentido y significado a las relaciones entre temas y podemos apoyarnos en diversas herramientas para visualizar tales relaciones (p.445).

En la siguiente ilustración, (ilustración 1), se da cuenta de manera resumida del proceso desarrollado para ofrecer una mirada general que ayude a comprender la manera en la que se vinculan los diferentes aspectos involucrados en la metodología desarrollada.

3.3.5 *Fase 5. Validación del estudio*

La información que se construyó durante el trabajo de campo, se validó mediante el uso de la triangulación entre las diferentes fuentes de datos. Esto permitió la generación de diferentes explicaciones acerca del uso de los modelos y la generación de vínculos entre las categorías, que ofrecen una visión de la articulación de las matemáticas con los programas de formación en alimentos, y así, generar respuesta a la pregunta de investigación.

Consecuentemente tratándose de un estudio de caso, esta investigación no pretende realizar generalizaciones para dar explicaciones a otros casos, que se desarrollen en contextos con condiciones diferentes a las de esta investigación. Sin embargo, sí se pretende poner en consideración las diferentes necesidades de carácter formativo que existen en los futuros profesionales, y en particular en los profesionales en Alimentos. Además generar un aporte a nivel metodológico en la enseñanza de las matemáticas para estos profesionales y que esto posibilite generar reflexiones en torno al desarrollo de nuevas actividades para el aula de clase o para dar un apoyo a nuevas investigaciones.

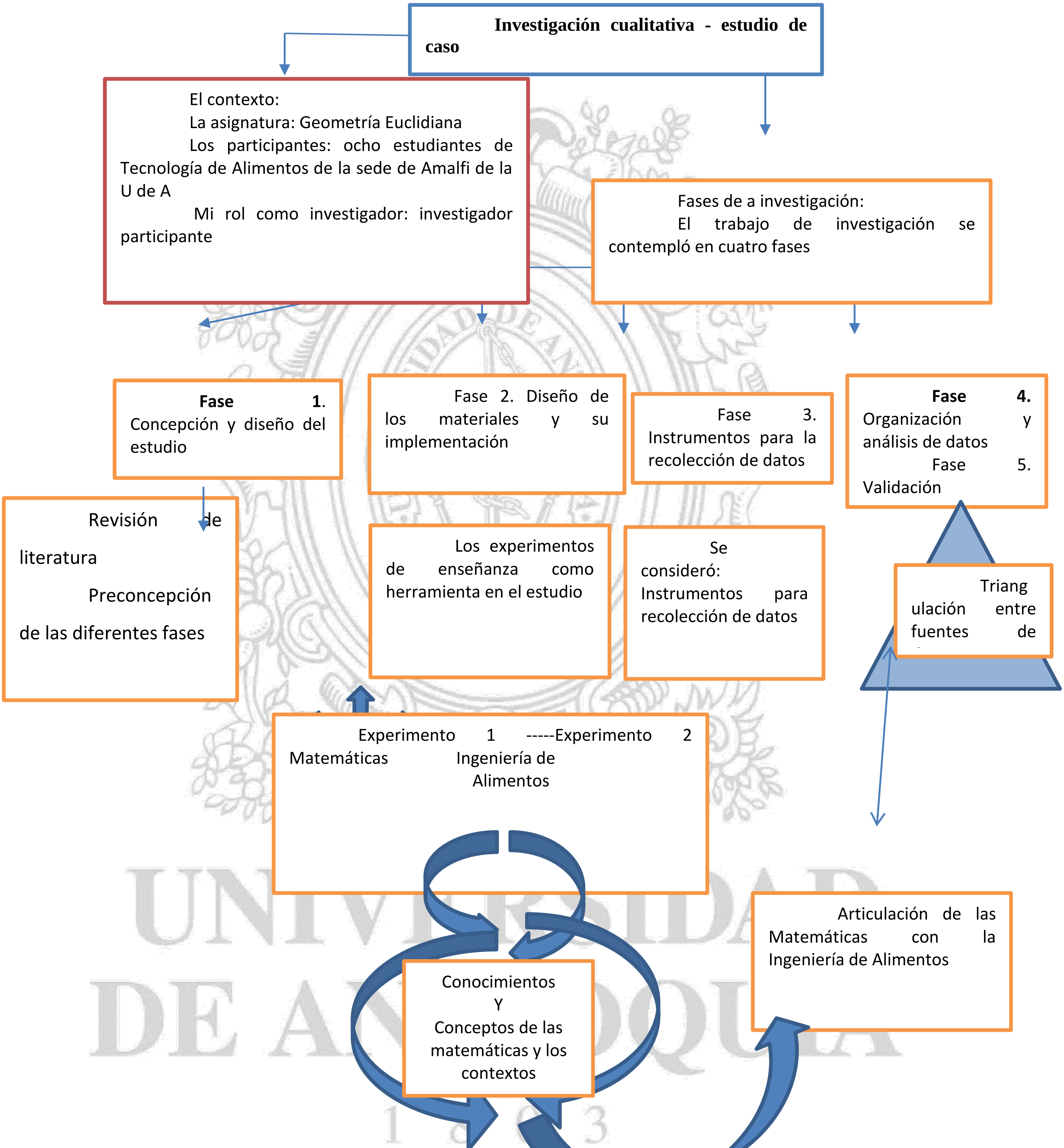


Ilustración 1. *Aspectos vinculados a la metodología de la investigación*

4. Uso y análisis de modelos matemáticos en la formación de profesionales en Alimentos. Resultados de un estudio

Conforme se mencionó en el capítulo anterior, a lo largo de este estudio emergieron dos categorías, a saber: (a) componentes matemáticos del análisis de modelos y b) componentes básicos de la ingeniería y de los profesionales en alimentos. Estas dos categorías surgieron vinculadas entre sí, por tal razón en este capítulo se presentarán en conjunto a lo largo de cuatro temáticas que fueron relevantes en el estudio. Ellas son: (1) El uso de gráficas en el análisis de modelos. Una primera aproximación al estudio de modelos, (2) razonamiento covariacional en el análisis de modelos matemáticos, (3) Analogías entre procesos alimenticios y (4) componentes geométricos en los modelos matemáticos para el área de Alimentos, y en algunas ocasiones dieron origen a la necesidad de emplear analogías para facilitar la comprensión de diferentes conceptos (lo que constituyó una de las maneras en que los estudiantes usan los modelos). Estas categorías tuvieron sentido en las producciones de los estudiantes cuando se enfrentaron a los experimentos de enseñanza. Estas producciones permitieron observar los aportes del *uso y análisis de modelos* como una estrategia en el aula de clase de matemáticas y, por tanto, ofrecer una respuesta a la pregunta de investigación.

Este capítulo está estructurado de manera que se observan elementos matemáticos emergentes durante el trabajo, los cuales se muestran de manera articulada a los conceptos del campo de la Tecnología y la Ingeniería de Alimentos.

4.1 El uso de gráficas en el análisis de modelos. Una primera aproximación al estudio de modelos

En la implementación de los experimentos de enseñanza, los estudiantes se enfrentaron al uso y análisis de modelos matemáticos usados por los especialistas en alimentos. En ese estudio y análisis se manifestaron de manera directa e indirecta diversos conceptos de la temática y las matemáticas, entre los cuales se encuentran temas básicos desarrollados en la asignatura previa de Álgebra como por ejemplo: el plano y las coordenadas cartesianas, polinomios y funciones con la determinación indirecta del dominio de una función, es decir, determinar cuáles valores puede tomar las variables del modelo, tanto a la luz de las funciones como a la luz del fenómeno estudiado. También se manifestaron temáticas de la Geometría, a saber: área, volumen y la influencia que estos valores tienen sobre el resultado obtenido al usar el modelo o cómo estos pueden modificar un modelo general que existe para un fenómeno.

Las temáticas no emergieron de manera desligada de los fenómenos estudiados, es decir, estuvieron vinculadas con los modelos y los significados atribuidos en los fenómenos. Así pues los fenómenos estudiados y los modelos matemáticos asociados a ellos propiciaron la necesidad de abordar conceptos de las ciencias básicas tales como: densidad, temperatura, calor, masa, etc., ya fuera para comprender las variables implicadas o para dar claridad acerca de los resultados de los procesos o los modelos y sus representaciones de los fenómenos estudiados.

Como se mencionó en el capítulo anterior, inicialmente las actividades buscaron que los estudiantes hicieran una inmersión en los fenómenos relacionados con los modelos matemáticos que iban a ser objeto de estudio, que reconocieran algunas de las variables que intervienen en dichos fenómenos y también que reconocieran sobre su incidencia en los resultados en los modelos matemáticos y los procesos asociados. El conocimiento que los estudiantes tenían acerca de los temas tratados se consideró importante como punto de partida del desarrollo de las actividades.

Cuando se les preguntó a los estudiantes por las variables que ellos consideraban que se deben tener en cuenta en procesos de deshidratación y acerca de los métodos, se observó que los estudiantes lanzaban diferentes apreciaciones. El siguiente fragmento es un ejemplo de ello:

Maruja	:	*Depende del lugar y del producto*
Robin	:	*La temperatura ambiente es importante*
Berta:	:	*Yo leí que hay varios métodos, ¿no depende de eso?*
Investigador	:	*¿Por qué crees que depende de eso?*
Berta	:	*Porque el documento* [parte informativa de cada experimento] *decía que había métodos que eran mejores que otros.*

Durante el diálogo con los estudiantes se determinó que era importante retomar la lectura de la parte introductoria del experimento de enseñanza 1 (anexo 1, página 187), con el fin de orientar la actividad. También se alentó el interés por el trabajo de elaboración de gráficas con GeoGebra. La segunda actividad también se inició con la lectura del aporte teórico ofrecido al inicio de la actividad.

Acto seguido en cada experimento de enseñanza se presentaron los modelos matemáticos, para que los estudiantes reconocieran su estructura en cuanto a parámetros, variables, ecuaciones y unidades. En los anexos 1 y 2 se puede observar las variables implicadas en los modelos de los fenómenos estudiados.

Durante el desarrollo del primer experimento de enseñanza, con el fin de facilitar que los estudiantes lograran hacer la identificación de las variables y empezaran a reconocer su influencia, se trabajó en la elaboración de representaciones gráficas del modelo en GeoGebra, para lo cual con antelación se había enviado a los estudiantes un video con algunas instrucciones al respecto como se mencionó en el capítulo anterior, aun así, se ofrecieron algunas indicaciones para trabajar con el software (GeoGebra), por ejemplo la introducción de la ecuación, la creación de deslizadores para los parámetros del modelo, el establecimiento de intervalos para variables y los deslizadores. También se presentaron algunas gráficas previamente construidas y se inició con una serie de preguntas, como por ejemplo: ¿Qué observa en la gráfica?, ¿Cómo es la relación entre las variables de acuerdo a cada gráfica?, Explique lo que observa.

A continuación se presenta la Tabla 7, en ella, se muestran las respuestas de los estudiantes a los cuestionamientos que el investigador propuso en relación con el conjunto de gráficas elaboradas en GeoGebra. Estas gráficas representaban algunas relaciones existentes entre las variables del proceso de deshidratación. Las gráficas se presentan al interior del texto cuando se realiza el análisis de cada situación en particular. En negrita se observan las preguntas u observaciones del investigador.

Tabla 7.

Interpretaciones de las gráficas por parte de los estudiantes

	Ilustración 2	Ilustración 6	Ilustración 7 **¿Qué pasa si en la gráfica se usa más de 7000g de yuca?**	Ilustración 5 **¿Qué pasa si se aumenta la velocidad?**	Ilustraciones 3 y 4 Análisis comparativo
Maruja	Es una relación parecida **[¿Cómo así que una relación parecida?]** sí, porque se ve que los puntos van subiendo.	[La estudiante realizó interpretaciones relacionadas con la forma de la gráfica]	No se extrae humedad porque es mucha cantidad en el equipo. No sigue extrayendo, Si el resultado es negativo entonces pasa lo contrario; le aporta humedad. **[¿Sí sería lógico?]** No	Todos: se ve que si aumenta la velocidad, aumenta el porcentaje de humedad extraído.	Con más yuca se saca menos humedad **[señalando la altura de las rectas]**
Albert	[El estudiante describió la presencia de “unos controles” refiriéndose a los deslizadores]	En la gráfica se ve que según la cantidad se extrae más o menos, por eso sí llena el equipo es menos.	Entonces la relación entre cantidad y humedad es inversa.		En la de 1 kg se saca más porque sale el 50% y en la otra una menor cantidad para el mismo valor de temperatura.

Rómulo	La relación es dependiente porque se ve que cuando x (relación A/V) aumenta, el %H también lo hace.	Se observa que a mayor cantidad de yuca, menos humedad **[¿Menos humedad qué?]** Menos humedad se retira	Yo creo que el modelo sucumbe con cantidades tan grandes de yuca. Con una temperatura más grande el modelo vuelve a funcionar; también con espesores pequeños pero casi en polvo. **[lo determinó moviendo los deslizadores]**		Que hay una relación de dependencia, como en la gráfica de la velocidad **[refiriéndose a la Ilustración 5]**
Eder	Hay variación de la humedad extraída.	[El estudiante describió de manera semejante en sus participaciones]	Si es mucha cantidad es más difícil sacar el agua.		Que varían
Berta	[Hacia relación con funciones lineales]	Parece una función lineal	Sí, es mucha cantidad, como cuando fritamos muchas papas **[¿Puedes explicar?]** Si cuando metemos muchas no salen tostadas		Varía la temperatura, a más temperatura más humedad retirada y también parece una función lineal.

Robín	Depende del número que toma la x.	[El estudiante mencionó el plano cartesiano]	[Intentó valorar lo que pasaba en los ejes, sin relacionar los nombres de las variables representadas]		[el estudiante manifestó su acuerdo con la afirmación de Rómulo]
Davy	[El estudiante se refirió a la existencia de ejes]	[Valoró la presencia de los deslizadores]	[Asintió estar de acuerdo con la afirmación de Maruja respecto a que un equipo lleno es menos eficiente]		Si es relación de dependencia, porque si aumenta la temperatura aumenta el porcentaje de humedad retirado.

Al presentar la Ilustración 2, Rómulo y Maruja respondieron en una manera que sugería que los estudiantes hacían un reconocimiento de las variables y de las relaciones de dependencia. Robin ya empezaba a mencionar a *X* y a sugerir que podía tomar diferentes valores. Por lo que se procedió a trabajar una nueva gráfica.

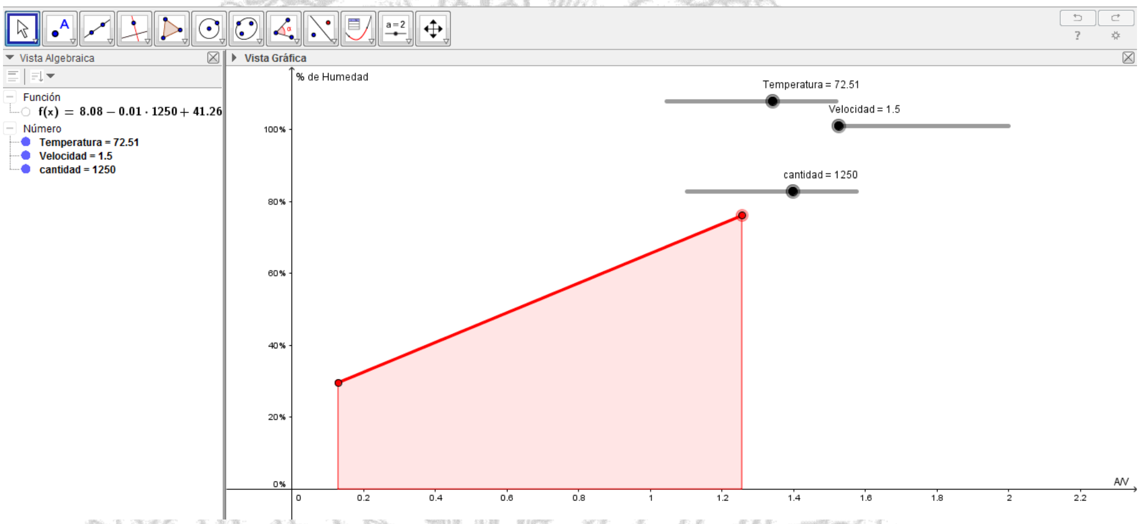


Ilustración 2. A/V vs %H

Como parte de la actividad se les pidió a los estudiantes hacer una comparación de dos gráficas (Ilustraciones 3 y 4) las cuales fueron elaboradas para comparar el comportamiento del proceso con dos cantidades de yuca combinadas con diferentes niveles de velocidad del aire, diferentes niveles de temperatura y de relación superficie a volumen, se observó que aunque la gráfica contenía más información, los estudiantes la relacionaron con la Ilustración 5, al considerar que podría analizarse de manera similar, e hicieron descripciones apoyándose en lo que observaban, como se explica a continuación:

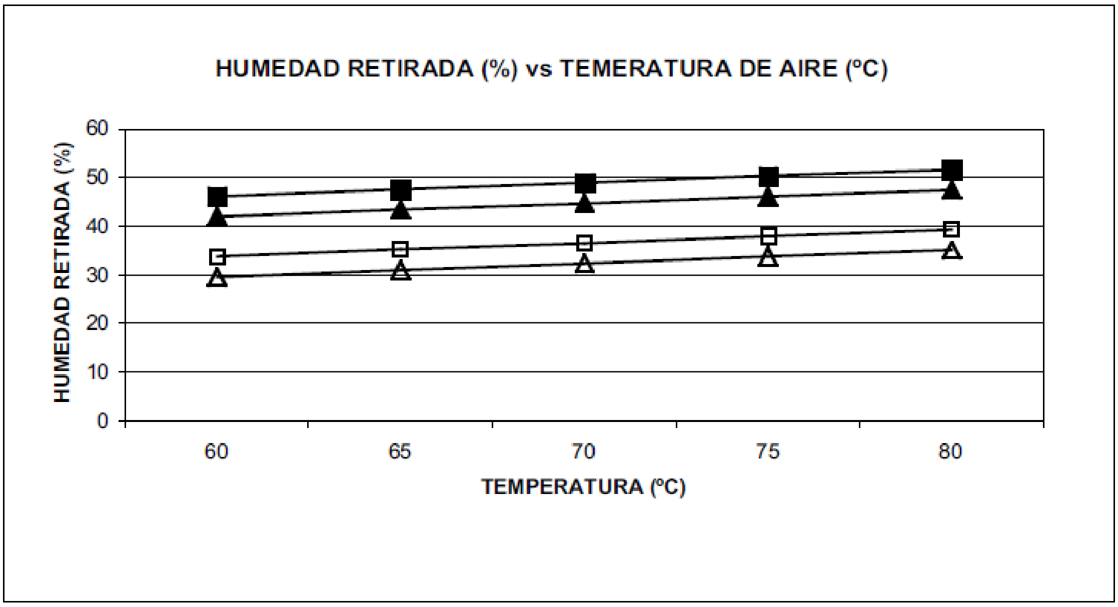


Ilustración 3. Relación entre humedad retirada y temperatura de control del aire de recirculación para un kilogramo de yuca, dos niveles de velocidad y de relación superficie a volumen

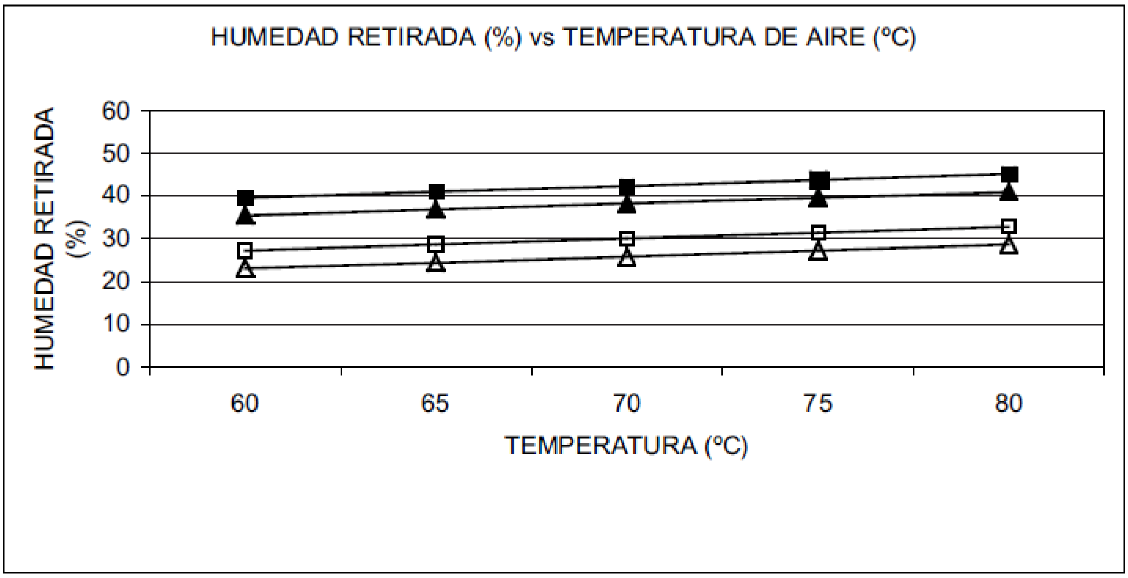


Ilustración 4. Relación entre humedad retirada y temperatura de control del aire de recirculación para dos kilogramos de yuca, dos niveles de velocidad y de relación superficie a volumen.

Se identificó una capacidad para comparar las coordenadas por parte de Albert, debido a que al observar la temperatura de 60°C identificó que, en la Ilustración 3, el valor para la Humedad retirada era mayor que en la Ilustración 4, para los mismos valores de temperatura como puede verse en la tabla 7 cuando afirmó lo siguiente:

Albert : *En la de 1 kg se saca más porque sale el 50% y en la otra una menor cantidad para el mismo valor de temperatura.*

Por otro lado, Davy, Berta, Rómulo y Maruja hicieron descripciones del fenómeno de cambio con la ayuda de las gráficas y esta vez tuvieron en cuenta no solo los ejes como medio para describir, sino el enunciado de la gráfica con la incidencia de los demás parámetros, además, Berta mencionó por primera vez el concepto de función lineal.

Maruja : *con más yuca se saca menos humedad*

Aunque los ejes se encontraban rotulados, la estudiante atendió al título de la gráfica para realizar la comparación entre las ilustraciones, sabiendo que en la Ilustración 3, se empleó una menor cantidad de yuca, que en el proceso representado en la Ilustración 4.

Mientras tanto los demás estudiantes interpretaban cada Ilustración por separado como puede observarse en sus respuestas:

Berta : *Varía la temperatura, a más temperatura más humedad retirada …*

Rómulo : *Que hay una relación de dependencia, como en la gráfica de la velocidad [refiriéndose a la Ilustración 5]*

Davy : *Si es relación de dependencia, porque si aumenta la temperatura aumenta el porcentaje de humedad retirado.*

Aunque después de escuchar las respuestas de Albert y Maruja, los demás estudiantes manifestaron estar de acuerdo con las respuestas de sus compañeros.

Durante el análisis del modelo presentado en la Ilustración 5, los estudiantes en general reconocieron la relación de dependencia existente entre las variables del eje *X* y el eje *Y*, las discusiones y aclaraciones que se propiciaron durante el proceso facilitaron la interpretación de la gráfica de una manera más homogénea, los estudiantes pasaron de hablar de la presencia de ejes a asignarles rótulo y a mencionar relación entre ellos, esto puede observarse mediante la siguiente afirmación que en general hicieron todos: *se ve que si aumenta la velocidad, aumenta el porcentaje de humedad extraído.*

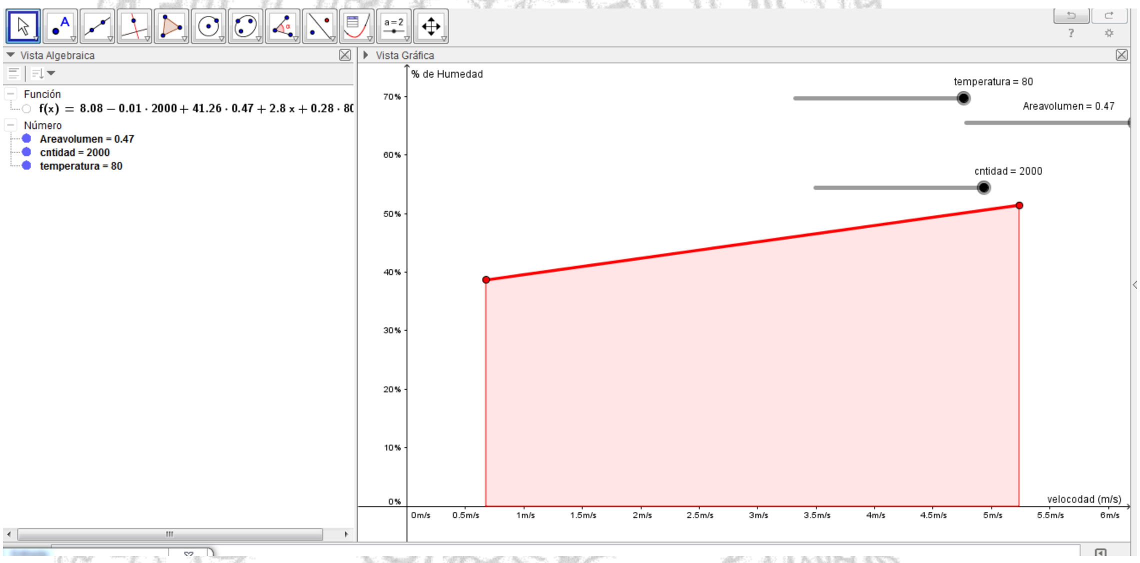


Ilustración 5. Velocidad del aire vs %H

Ilustración 6. Cantidad de yuca vs %H

Cuando se estudiaba la relación entre la cantidad de Yuca y el porcentaje de humedad (ver Ilustración 6) Rómulo afirmó que cuando se aumentaba la cantidad de yuca disminuía el porcentaje de humedad extraída, y los demás estudiantes asintieron estar de acuerdo con la apreciación de Rómulo. Posteriormente se solicitó que se aumentara la cantidad de yuca en la gráfica, para ver que ocurría con cantidades superiores a los 7000g, lo que generó un diálogo donde se observó que los estudiantes, además de hacer relación de la gráfica con procesos de deshidratación, también generaban descripciones más coherentes acerca las gráficas:

Maruja : *No se extrae humedad porque es mucha cantidad en el equipo de deshidratación.*

Albert : *Entonces la relación entre cantidad y % de humedad es inversa.*

Maruja : *No sigue extrayendo, si el resultado es negativo entonces pasa lo contrario; le aporta humedad.*

Investigador : *¿Sí sería lógico que le aportara humedad?*

Maruja : *No, pero en funciones se ve mucho los resultados negativos.*

Berta : *Sí, es mucha cantidad, como cuando fritamos muchas papas.*

Investigador : *¿Puedes explicar?*

Berta : *Sí, cuando metemos muchas [papas a la freidora] no salen tostadas.*

Maruja en este episodio dio respuestas en términos del contexto y en términos matemáticos. De alguna manera, se pudo observar que si bien los estudiantes hacían análisis del modelo en su representación gráfica, intentaban hacer relación con el proceso de deshidratación mismo, es decir el trabajo no estuvo desligado de los fenómenos estudiados, esto se observa en las afirmaciones de Maruja y Berta. Maruja trató de responder a nivel matemático y en el contexto del fenómeno estudiado y Berta por su lado empezaba a realizar analogías (comparaciones con procesos conocidos por ellos) para explicar los resultados observados; de acuerdo con Camarena et al. (2013) y Javaroni y Soares (2012) parece existir una capacidad para interpretar el resultado del modelo en el contexto en el que se enunció un problema. En el caso de los participantes de esta investigación, esa capacidad se hizo evidente en el reconocimiento de la correlación existente entre las variables y, principalmente, en la atención centrada en el crecimiento y decrecimiento de la covariación. En este primer acercamiento, no se alcanzó a hacer un reconocimiento de la tasa de variación (velocidad de deshidratación).

La representación gráfica del modelo, permitió a los estudiantes *visualizar* no solo la relación de dependencia entre las diferentes variables, sino también la *dirección de la variación;* pues el hecho de observar gráficas (rectas) con inclinación positiva o negativa, les permitió identificar correlación directa o inversa entre las variables. En Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003), estas observaciones corresponden a *acciones mentales* del nivel de dirección que caracterizan el razonamiento covariacional; en el siguiente apartado, se detallaran otros aspectos relativos a este tipo de razonamiento.

A través de la representación gráfica de los modelos, Berta logró reconocer un comportamiento entre dos variables que intervienen en la deshidratación de la yuca y logró transferirlo y reconocerlo en otro proceso con un comportamiento análogo, cuando se fríen papas. Camarena (2009) afirma que cuando el estudiante procede a emplear analogías con otros problemas o situaciones para dar explicaciones, este manifiesta el uso de habilidades mentales (v. g: la identificación de puntos de control, pasar del lenguaje natural al matemático y viceversa, hacer idealizaciones del problema, aplicar heurísticas etc.), lo cual sugiere que ya los estudiantes daban cuenta de este hecho. En particular se puede señalar las afirmaciones que Berta realizó durante el diálogo anterior de manera analógica con un proceso de fritura de papas, para conseguir explicar los resultados de la gráfica observada (ilustración 6); dichos elementos se convierten en evidencia de que la estudiante pudo reconocer una característica del fenómeno estudiado y verla presente de alguna manera en otro contexto similar.

En los datos presentados anteriormente, es posible observar que los estudiantes usaron variables (H: porcentaje de Humedad, T: temperatura, A/V: relación superficie a volumen etc.) en sus representaciones simbólicas y gráficas que estaban articuladas al significado en el fenómeno de estudio. Camarena (2015) (citando a Gómez 2003) señala que la noción de variable se construye cuando los estudiantes establecen relaciones entre objetos o procesos que pueden cambiar. A lo largo del desarrollo de las actividades pudo observarse tal hecho, por ejemplo, en las gráficas de las Ilustraciones

2, 3 y 4, los estudiantes Rómulo y Maruja afirmaban que existía una relación de dependencia entre las variables, ya que cuando la variable del eje *X* aumentaba, ocurría algo con la variable del eje *Y*, también en el momento en que Davy y Berta reconocieron que al aumentar la temperatura aumentaba el % de humedad retirado.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a la gráfica de la relación entre la cantidad de yuca y el porcentaje de humedad retirado, (ver Ilustración 6 y 7) surgieron extrapolaciones entre el fenómeno y la actividad matemática, que resultaron al manipular la gráfica en GeoGebra, al momento de aplicar valores cada vez más grandes en el eje *X*.

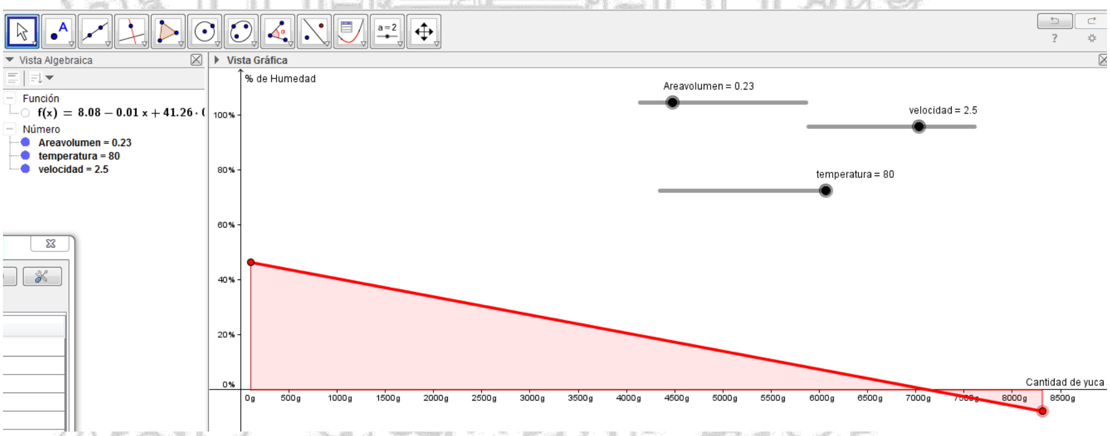


Ilustración 7. *Cantidad de yuca vs %H y más de 7000 g de yuca*

Como producto de sus análisis al modelo en su representación gráfica, Rómulo señaló que el proceso de deshidratación presentaba un problema cuando se empleaban cantidades superiores a los 7000 g de yuca. Él expresó "*yo creo que el modelo sucumbe con cantidades tan grandes de yuca*. Para el estudiante, los resultados negativos no eran coherentes a la luz del fenómeno estudiado, paralelamente Maruja mencionó su comprensión de la gráfica con una explicación a partir su comprensión de las funciones, al afirmar que cuando se trata de funciones se puede obtener resultados negativos para *Y*.; es posible que implícitamente los estudiantes estuvieran estableciendo intervalos para los valores que podría emplearse en el modelo de acuerdo a los resultados que otorgaban los mismos, y según Romo-Vázquez y Castela (2010) actividades como analizar respuestas del modelo ante diferentes entradas de valores, hacer estimaciones y evaluar intervalos de valores que puedan emplearse, pueden generar aportes que den respuesta a las necesidades formativas del estudiante, a nivel matemático y del contexto, en tanto que estas acciones facilitan la articulación entre las matemáticas y las actividades propias de los profesionales.

Mediante estas actividades se facilita que los estudiantes respondan ante diferentes interrogantes, en términos del contexto del problema.

Finalmente Maruja, al observar la disminución del porcentaje de humedad retirada con el aumento de la cantidad de yuca, afirmó que un equipo empleado para la deshidratación, se saturaba con grandes cantidades de yuca y, por ende, el resultado sería los bajos porcentajes de humedad extraídos, hecho que fue explicado por Berta de manera analógica con un proceso de fritura de papas, el cual es otro tipo de proceso de deshidratación.

Los estudiantes relacionaban el modelo matemático y el fenómeno, además Rómulo encontró lo que parecía ser una limitación en el modelo y posiblemente empezaban a entender de qué dependía la evolución de los resultados. Según Javaroni y Soares (2012) acciones como las observadas pueden favorecer la preparación del estudiante para emplear modelos más fieles al fenómeno, posiblemente también para las matemáticas de los niveles superiores e incluso, porque no, favorecer la preparación del estudiante para los cursos propios de su programa de estudio.

Mediante la manipulación de los deslizadores en la gráfica de GeoGebra (Ilustración 7), Rómulo determinó que si incrementa la temperatura el modelo se hace funcional nuevamente al afirmar:

Rómulo: *Con una temperatura más grande el modelo vuelve a funcionar; también con espesores pequeños pero casi en polvo.*

Y cuando Maruja afirmó*:*

Maruja : *Si cambiamos lo que dice en la tabla de los niveles* (tabla 8) *hay que modificar variables para que funcione el modelo.*

Se observó en esta situación que los estudiantes, además de encontrar una limitación en el modelo, encontraban la manera de superarla matemáticamente mediante la manipulación de la representación en GeoGebra y esto señala que los estudiantes empezaban a reconocer la influencia que los diferentes parámetros pueden tener en los resultados.

Tabla 8.

Niveles escogidos para las variables durante la creación del modelo matemático para la deshidratación de yuca

Niveles escogidos para cada variable del proceso

Nivel	Cantidad de yuca (gr) A	Relación Superficie a volumen B	Velocidad del flujo de aire que recircula (m/s) C	Temperatura del aire que recircula (ºC) D
Alto	2000	(0.4731 – 0.4743)mm^{-1} (Espesor: 0.5cm)	3	80
Bajo	1000	(0.1734 – 0.1743)mm^{-1} (Espesor: 2 cm)	1.5	60

De manera similar en el desarrollo del segundo experimento de enseñanza, se realizó el análisis de algunas gráficas que ponen en contraste lo observado en el primero de los experimentos, en relación con el análisis de coordenadas. Además este análisis generó la necesidad de vincular uno de los modelos matemáticos estudiados para generar respuesta al interrogante planteado.

Durante el análisis de las gráficas presentadas en las ilustraciones 8 y 9 que corresponden al segundo experimento de enseñanza, surgió una necesidad de hacer una relación de comparación entre los resultados del modelo matemático para el cálculo de la conductividad térmica y los resultados que se observaban en las gráficas, como a continuación se presenta:

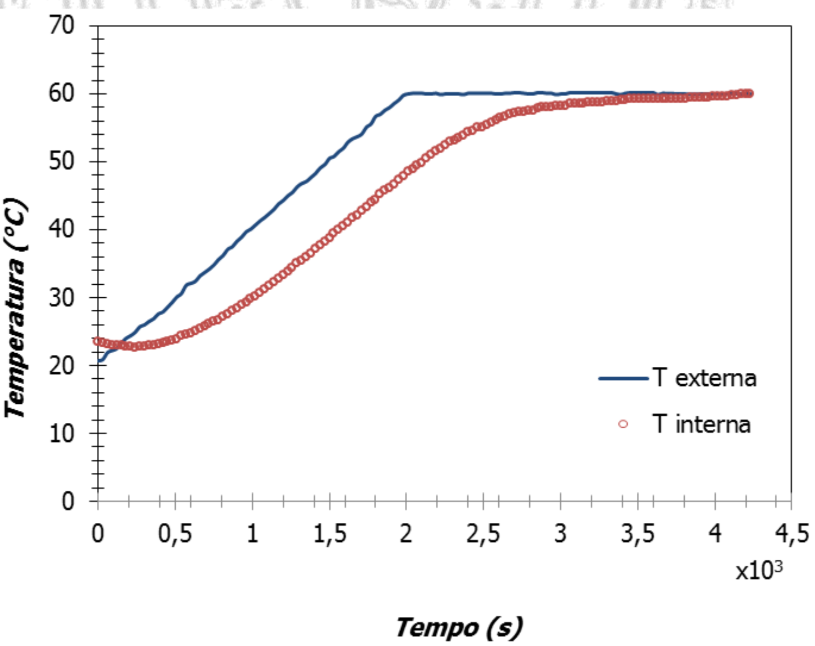


Ilustración 8. *Curva de calentamiento para crema de leche con25 % de grasa.*

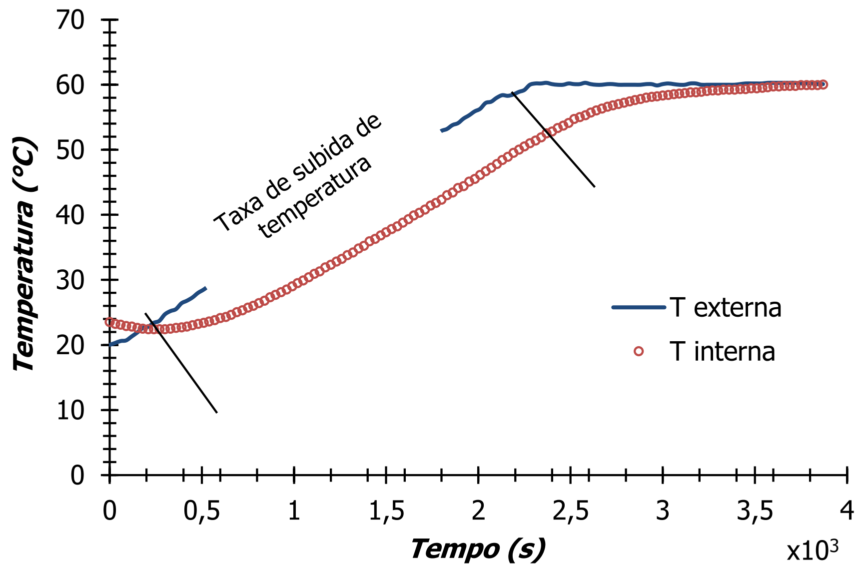


Ilustración 9. *Curva de calentamiento para crema de leche con 17 % de grasa*

Investigador : *¿Cuál llega primero a los 60°C?*

Eder : *En la primera llega más rápido a los 60º*

Investigador : *¿Qué esperamos al calcular la conductividad térmica (K)? ¿Si una llega más rápido, cual tiene mayor K? , miren la ecuación* $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$

Todos : *la primera llega más rápido*

Investigador : *La del 25 o la del 17?*

Berta/ Albert : *la que tiene más grasa*

Albert : *¿Pero la gráfica no debe relacionarse con lo que dice la ecuación?*

En la primera aproximación, los estudiantes se confundieron y encontraron resultados en la gráfica que no esperaban de acuerdo a los modelos matemáticos, esto se debió, en parte, a que el tamaño de las gráficas (Ilustraciones 8 y 9) era diferente, y al parecer, la primera forma de comparación que emplearon fue una especie de "superposición" de las gráficas que generó respuestas que los estudiantes no esperaban y de esta manera, que determinaran resultados inesperados, dado el análisis de la situación. Sin embargo, ese resultado inesperado motivó un análisis profundo y la necesidad de encontrar el posible "error" mediante un nuevo análisis de las gráficas y determinar la importancia de observar las coordenadas y no dejarse guiar por el tamaño aparente de las gráficas, y para tratar de que los estudiantes percibieran el error, se les hizo preguntas que los condujeron a corregir sus conclusiones aprovechando la siguiente afirmación de *Maruja:*

Maruja	:	*Además, si una es más densa que la otra…*
Investigador	:	*¿Cuál es la más densa?*
Maruja	:	*La que tiene menos grasa es más densa, entonces la conductividad es más grande*
Berta	:	*A mayor densidad mayor conductividad*
Investigador	:	*¿Entonces cual es mejor conductor?*
Berta	:	*¡La de más grasa, en la gráfica se ve!*
Todos	:	*La de menos grasa es mejor conductor por tener mayor densidad*

Albert : Pero eso no es lo que dice la gráfica

Refiriéndose a que habían concluido de las gráficas, que la muestra con mayor porcentaje de grasa alcanzaba primero los 60°C. Debido a esto se les propuso realizar el análisis de las gráficas mediante una observación en más detalle.

Maruja Pero la fórmula si está relacionada con la gráfica

Aquí se observó que los estudiantes trataron de relacionar lo que observan en la gráfica y los resultados del modelo matemático. De acuerdo con Javaroni y Soares (2012) en el desarrollo de las actividades los estudiantes comparan las soluciones analíticas con las de las representaciones y esta actividad facilita la introducción de conceptos.

Investigador : Entonces, ¿qué pasó que estamos obteniendo o concluyendo un resultado diferente al esperado?

Maruja : Las temperaturas se igualan más rápido en la segunda gráfica, es que hay que mirar el tiempo, miren que arriba llega hasta el 4 y la de abajo no.

Eder : Yo miré el tamaño de las gráficas.

Todos : Entonces la de 17 llega primero, entonces tiene mayor conductividad

Investigador : ¿Qué conclusiones se puede sacar respecto a las gráficas?

Berta : Que la que tiene menos grasa es mejor conductora

Los estudiantes observaron la importancia de analizar las gráficas de acuerdo a sus pares ordenados, es decir asociando los valores de X con los valores de Y. Adicionalmente, en este episodio Maruja hizo una conclusión donde relacionó la densidad con el modelo matemático de la conductividad térmica y el resultado de la gráfica como confirmador de su conclusión, cuando afirmó: *a menos cantidad de grasa mayor densidad y a mayor densidad mayor k, entonces en la gráfica se ve que la de menos grasa se igualó más rápido con la temperatura externa* y eso permitía que esta muestra tuviera mejor conductividad térmica, y para realizar esta conclusión preguntó si podía imaginar que los valores del denominador fueran iguales para las dos muestras de crema de leche y después despejar K de la expresión: $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$.

Las anteriores consideraciones informan acerca de la capacidad de abstracción e idealización por parte de Maruja, al considerar que para dar respuesta a la situación de manera sencilla, podía suponer que otros factores del modelo fueran iguales, y así determinar la incidencia de uno que dejaría variar. Camarena (2012) considera que esta "actuación" puede verse como una manifestación de una habilidad del pensamiento que interviene en la construcción de modelos y se refiere a dicha habilidad de la siguiente manera: "habilidad para hacer 'consideraciones' o 'idealizar' el problema (cuando proceda). Hay problemas tan complejos que deben ser idealizados para poderse matematizar, en otras ocasiones es necesario hacer consideraciones, como controlar variables para poder lograr la matematización". (p. 192). Además esta habilidad del pensamiento se considera importante dentro de las capacidades de los futuros profesionales para hacer controles efectivos en procesos o para explicarlos y comprenderlos.

Berta también afirmó que a mayor densidad mayor conductividad mientras observaba la ecuación para calcular conductividad térmica.

La expresión mencionada se presenta a continuación:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$$

Dónde:

K: es la conductividad térmica (Wm-1); ρ : densidad del material de estudio (kgm-3); cp: calor específico del material de estudio (kj kg-1 ºC-1)

Nuevamente se observó que existió una capacidad de interpretar las gráficas y relacionar el resultado observado con el fenómeno mismo. También se observó que implícitamente algunos estudiantes comprendían que hay un fenómeno de variación, mediante la observación y análisis de las gráficas que el modelo matemático permite construir, de acuerdo con Suárez y Cordero, (2010) la graficación aporta elementos de importancia para la construcción del concepto de variación y puede ser empleada de forma paralela o independiente al desarrollo de algunos conceptos en clase. De este modo puede resultar positivo que los estudiantes se familiaricen con gráficas que faciliten la interpretación durante el uso y análisis de modelos matemáticos, también empezar a trabajar con datos relacionados con su área de formación, y puedan generar interpretaciones acerca de fenómenos particulares.

La siguiente tabla (Tabla 9) tiene como propósito presentar a modo de resumen algunos usos que los estudiantes dieron a los modelos gráficos, para dar una visión general de los recursos empleados para manifestar sus explicaciones. Además, se presenta también como el primer atisbo de articulación entre las matemáticas y la ingeniería o tecnología de alimentos a través del contexto empleado.

Tabla 9.

Usos de los modelos matemáticos que posibilitaron articulación entre las matemáticas y la ingeniería

Usos	**Contexto**
Explicar cambios	Los estudiantes explicaron cambios observados cuando las gráficas crecían o decrecían. Sin embargo, esto estuvo inicialmente fundamentado en la dirección del cambio y no en la razón de cambio (tasa de variación).
Explicar resultados en términos matemáticos	Los resultados anormales para el fenómeno fueron calculados a través de las gráficas y nuevamente interpretados en el fenómeno usando para ello sus comprensiones acerca de las funciones,
Comparar con los modelos y determinar conclusiones	Al encontrar resultados extraños en las gráficas, los estudiantes acudieron al uso de los modelos matemáticos para determinar conclusiones finales.
Explicar resultados en términos del contexto	Al observar los resultados en las gráficas, los estudiantes respondieron en términos del proceso estudiado ,
Comparar procesos	Ante la necesidad de explicar un resultado, los estudiantes compararon los resultados de las gráficas con resultados de procesos conocidos por ellos. Usaron analogías.
Determinar limitaciones del modelo	Al encontrar resultados anormales a la luz del fenómeno, se determinó los intervalos en que el modelo puede facilitar explicaciones lógicas sobre un proceso. Por el contrario el modelo tendría una limitación para algunos valores del dominio
Manipular	Al encontrar que se obtenían resultados negativos y

parámetros y superar las limitaciones encontradas	concluir limitaciones del modelo, se buscó la manera de hacerlo funcionar de nuevo manipulando otros parámetros.

4.2 Razonamiento covariacional en el análisis de modelos matemáticos

Conforme se mencionó en el apartado anterior, a través de los experimentos de enseñanza los estudiantes se enfrentaron al estudio de fenómenos de transferencia de calor en Alimentos. Durante ese estudio los estudiantes pusieron de manifiesto un conjunto de imágenes mentales (manifestadas a través de sus construcciones graficas) a través de las cuales pudo caracterizarse su razonamiento covariacional. De acuerdo con Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2003) citando el trabajo de Confrey y Smith (1995) este tipo de razonamiento está asociado a la generación de vínculos entre los valores del dominio de una función y los de su recorrido, esto cuando se trata de crear o conceptualizar una función. Hecho que pudo observarse a lo largo de los datos presentados anteriormente, en el momento en que los estudiantes realizaron el análisis de las gráficas, estos vincularon lo que pasaba en el eje Y a los cambios generados en el eje X y además generaron vínculos entre los resultados de las gráficas y de los modelos matemáticos de cada fenómeno; y generaron explicaciones en términos de procesos asociados al fenómeno.

Carlson et al. (2003), también afirman que cuando se recorren tablas de datos de arriba abajo se puede determinar si existe coordinación y comprensión de la variación al comparar dos o más columnas, como puede observarse en el siguiente apartado.

El siguiente es un fragmento de una tabla de datos, presentada a los estudiantes durante el desarrollo del segundo experimento de enseñanza para ser analizada. Se trataba del incremento de temperatura en una muestra de crema de leche que se sometía a calentamiento:

Tabla 10.

Datos experimentales del proceso de calentamiento de crema de leche con 25% de grasa

	Crema leche 25% grasa	
t (s)	Externa (°C)	T interna(°C)
360	26,9	23,0
390	27,6	23,1
420	27,9	23,3
450	28,6	23,5
480	29,3	23,7
510	30,1	23,9
540	30,6	24,3
570	31,8	24,5

Inicialmente se le pidió a los estudiantes que identificaran las variables que se presentaban en la tabla y después se les preguntó ¿Qué observan en la tabla?

Maruja : *A medida que aumenta el tiempo la temperatura externa aumenta.*

Berta : *Sí, pero muy despacio.*

Albert : *Pero también la del interior va en aumento.*

Radamel : *Sí, pero la del medio exterior aumenta más rápido que la del interior.*

Cuando Radamel habló del medio exterior estaba refiriéndose al montaje de la Ilustración 10 que corresponde al segundo experimento de enseñanza

Eder : *Claro, es porque en el experimento decía que en el exterior había una resistencia*

De acuerdo con Camarena et al. (2013) se hacen explícitas algunas competencias matemáticas como la determinación de regularidades y la capacidad para dar respuestas en términos del contexto del enunciado. A diferencia de la fase anterior, en esta parte del trabajo empezó a emerger algunas percepciones del cambio asociadas a la razón de cambio, por ejemplo cuando reconocen que una temperatura aumenta *más rápido* con respecto al tiempo que la otra temperatura, y nuevamente se genera la posibilidad de introducir conceptos desconocidos para los estudiantes, que además de ofrecer contenido matemático emerge de manera articulada al fenómeno mismo.

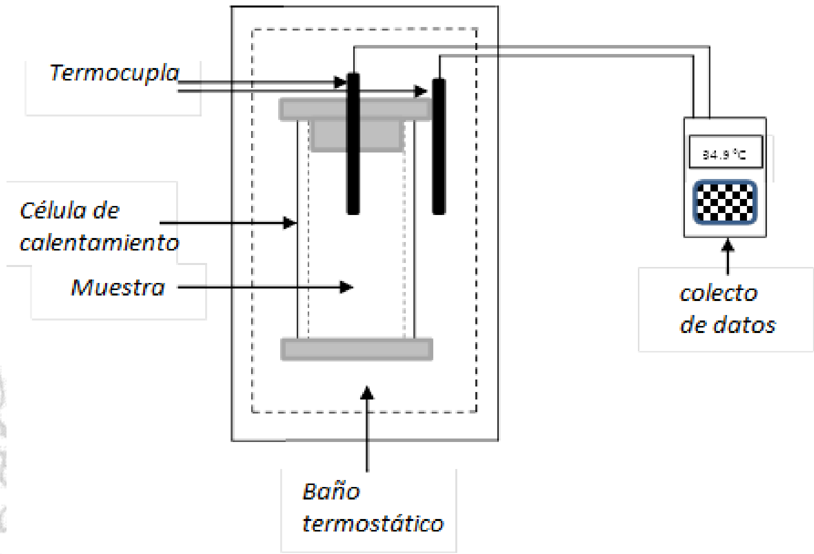


Ilustración 10.*Montaje para el experimento de determinación de difusividad y conductividad térmicas.*

Se puede observar que los estudiantes realizaban comparaciones entre la variación en la temperatura del medio exterior y el interior y además, analizan como es la variación entre cada medición de una variable particular, lo que puede implicar que existe coordinación y comprensión de la variación en la tabla.

Según Carlson et al. (2003) el razonamiento covariacional puede permitir interpretar y representar la información gráfica de una función. Es posible que la comprensión de un fenómeno donde exista variación pueda ser manifestada mediante la construcción de una gráfica de dicho fenómeno. A continuación se presenta algunas de las gráficas construídas por los estudiantes durante el desarrollo del segundo experimento de enseñanza, cuando se les pidió representar cómo consideraban que se daba el proceso de refrigeración de una manzana en un periodo de tiempo de 24 horas, donde la temperatura inicial era de 20ºC y la final de 4ºC; además se les solicitó escribir una explicación de su gráfica. Cabe anotar que debido a que los estudiantes trabajaron en grupos las gráficas pueden contener algunas similitudes.

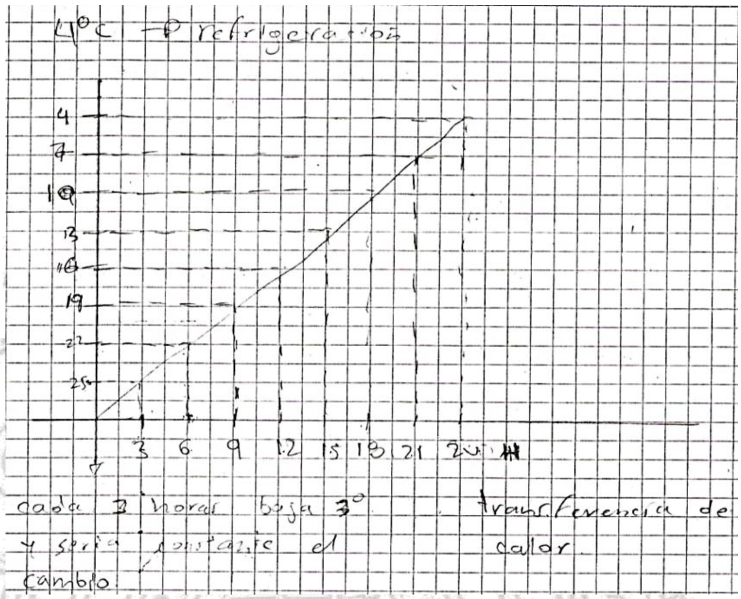


Ilustración 11. *Elaboración de Albert*

La anterior gráfica fue elaborada por Albert, se observa que no hay identificación de los ejes, los valores del eje vertical parecen incrementar de arriba hacia abajo, lo que sugiere que la gráfica es creciente, se observa que estableció algunos pares ordenados mediante líneas punteadas, en su explicación menciona la tasa de variación de la temperatura y la asume constante, lo que indica que el estudiante reconoce una tasa de variación constante como requisito para construir una recta.

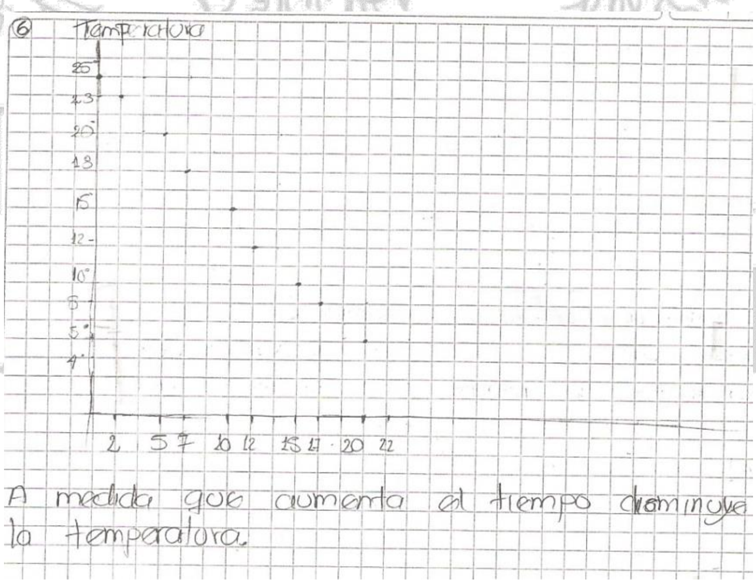


Ilustración 12. *Elaboración de Berta*

La gráfica elaborada por Berta (Ilustración 12), cuenta con una explicación que manifiesta la comprensión del fenómeno de enfriamiento y decreciente. Sin embargo, los ejes no están rotulados y la construcción de la gráfica se limitó a la representación de los puntos o coordenadas.

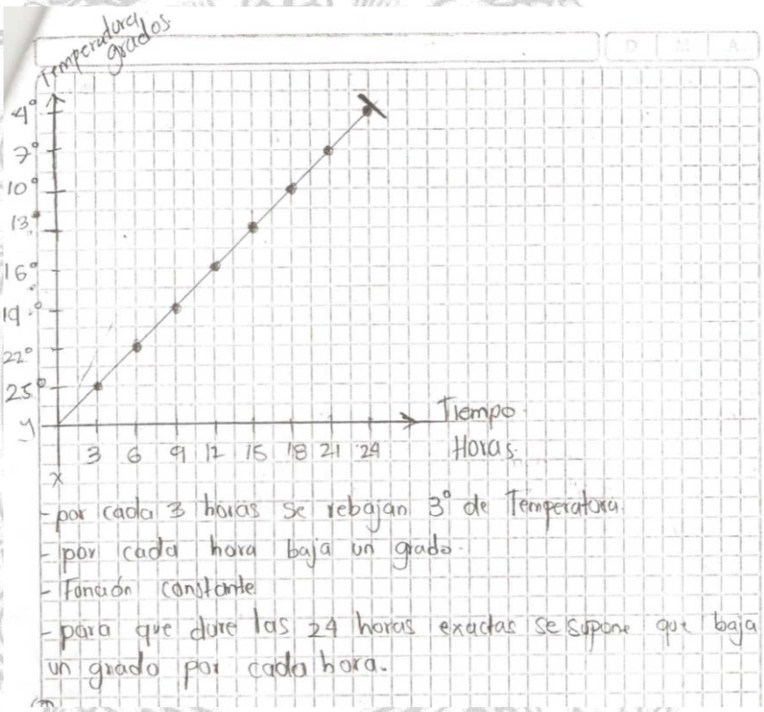


Ilustración 13. *Elaboración de Maruja*

La gráfica elaborada por Maruja (Ilustración 13) cuenta con una designación de los ejes y la determinación de la tasa de variación de la temperatura con relación al tiempo En cuanto a su forma parece ser creciente al igual que en el caso de Albert, sin embargo en la explicación de la estudiante se observa que parece comprender, que es decreciente, lo que será analizado con más detalle más adelante.

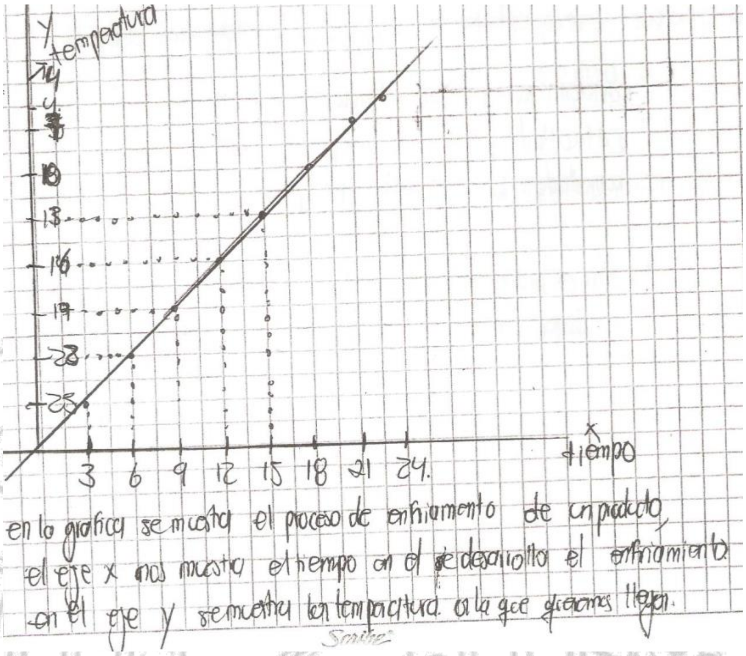


Ilustración 14. *Elaboración de Radamel*

La gráfica elaborada por Radamel cuenta con características similares a la de Maruja y Albert en cuanto a la forma (parece ser creciente). También se observa la designación de los ejes, la determinación de algunos pares ordenados dispuestos de tal manera que parece establecer una tasa de variación constante.

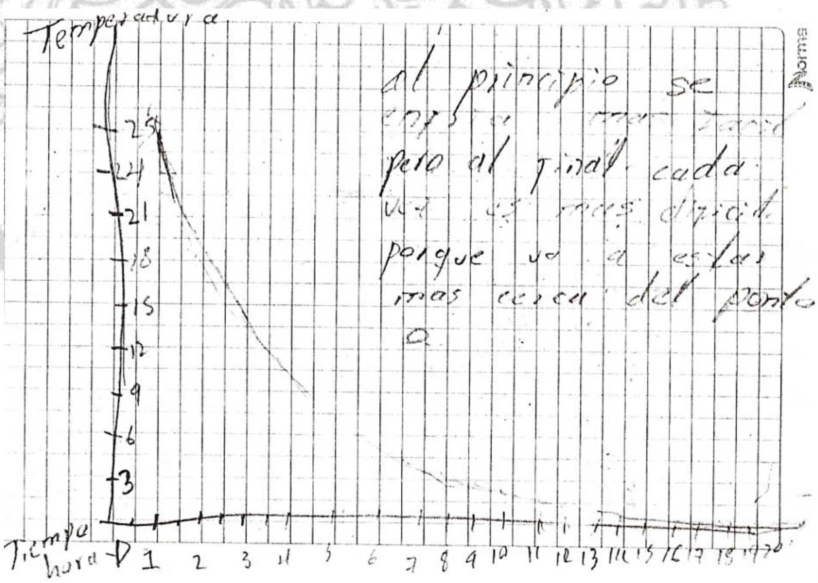


Ilustración 15. *Elaboración de Eder*

La ilustración 15, representa la gráfica elaborada por Eder, se observa con forma de curva decreciente y una descripción (al principio se enfría mas fácil, pero al final cada vez es más difícil porque va a estar más cerca del punto cero) que apoya la forma con la que construyó su gráfica. Además se observa la designación de los ejes con sus respectivos rótulos.

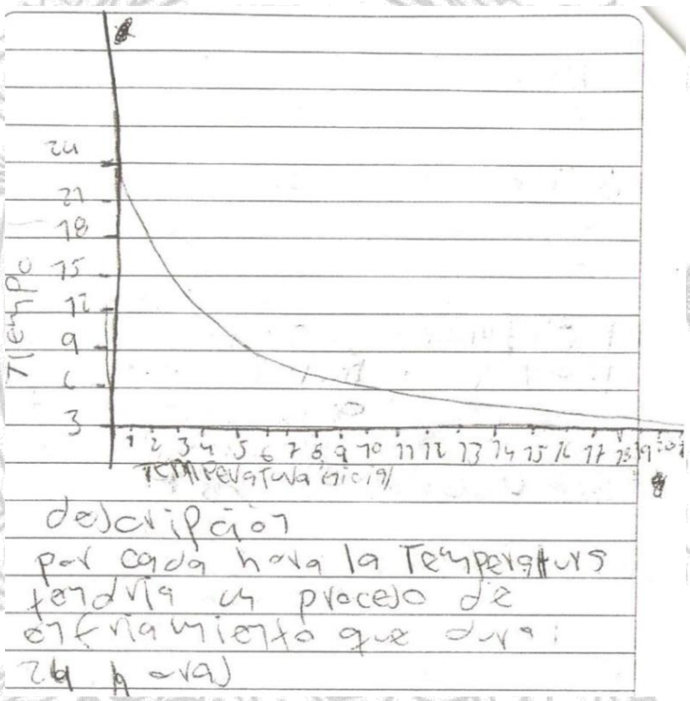


Ilustración 16. *Elaboración de Robin*

La gráfica elaborada por Robin (Ilustración 16) se observa con una forma semejante a la de la gráfica elaborada por Eder, también se observa la designación de los ejes, sin embargo la explicación no se observó muy clara.

Como ya se mencionó Camarena considera la posibilidad de apoyarse en otros marcos teóricos para explicar “actuaciones” de los estudiantes. La siguiente tabla (Tabla 11) tomada de Carlson et al. (2003) presenta algunas de las acciones mentales y los comportamientos que las representan y permiten comprender cuan profundo es el razonamiento covariacional presentado por los estudiantes durante la construcción de sus gráficas y sus explicaciones de las mismas. También permite determinar el nivel de razonamiento covariacional al que atienden los estudiantes de acuerdo con Carlson et al.

(2003) y con esto señalar cuan refinada es la imagen mental que los estudiantes manifiestan tener del fenómeno variacional que representaron.

Tabla 11.

Acciones mentales presentes en el razonamiento covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la

	del cambio en la variable de entrada.	razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Para hacer explícitas las acciones mentales empleadas por los estudiantes en el desarrollo de sus gráficas, se presenta la Tabla 12, donde se muestra algunos de los comportamientos que sitúan a los estudiantes en la manifestación de una determinada acción mental en términos de Carlson et al. (2003). Además con ayuda de la misma, se busca situar a los estudiantes en un nivel de razonamiento covariacional de acuerdo con el mismo autor, quien considera en el marco conceptual para la covariación, la presencia de cinco niveles del desarrollo de la imagen mental de la covariación. Estos cinco niveles ascienden del uno al cinco, y para ubicar un estudiante en un nivel determinado se debe tener en cuenta las acciones mentales que realiza, así por ejemplo, un estudiante que se sitúe en el nivel tres, debe manifestar acciones mentales (AM1, AM2 y AM3). En correspondencia con el análisis de modelos matemáticos, la determinación de las acciones mentales de los estudiantes daba cuenta en cierta medida acerca del uso que los estudiantes dieron a los modelos y de la manera en que analizaron las situaciones para generar representaciones.

Tabla 12.

Acciones mentales / comportamientos llevados a cabo por los estudiantes durante la elaboración de gráficas.

	Acciones mentales o comportamientos		
	AM 1	AM2	AM 3
Eder	Designación de los ejes. Afirmaciones de coordinación de las variables.	Construcción de una curva decreciente. Consciencia de la cantidad de cambio en el valor de salida al considerar el valor de entrada.	Describió la forma de su gráfico, y explicó que inicialmente el proceso se puede dar de una manera más fácil. Considera y explica los cambios de en el valor de salida con respecto a incrementos uniformes en el valor de entrada y lo emplea para justificar la curva construida.
Robin	Designación no muy clara de los ejes.	Construcción de una curva decreciente	
Maruja	Designación de los ejes Afirmaciones de coordinación de las variables.	Construcción de una línea recta (al parecer ascendente) Consciencia de la cantidad de cambio en el valor de salida al considerar el valor de entrada (consideró cambios constantes)	Verbalizó la comprensión de la dirección de cambio de la gráfica.

Berta	No se observa designación de los ejes. Afirmó reconocer una relación de cambio	No hubo construcción de rectas, sin embargo se observa la ubicación de algunos puntos que parecen generar una línea recta. Existió manifestación de la comprensión de lo que pasa con un valor al existir cambios en el otro.	
Radamel	Designación de los ejes Menciona a *X* y a *Y*	Construyó una línea recta que parece creciente, sin embargo el eje y parece estar al revés. Señala en la gráfica cambios constantes en x con respuestas de igual frecuencia en y.	Determinación de algunos puntos para apoyar la contracción de la recta.
Albert	No hay designación de ejes. Existió manifestación del reconocimiento de un proceso de cambio	Construyó una línea recta que parece creciente, sin embargo el eje y parece estar al revés. Señala en la gráfica cambios constantes en x con respuestas de igual frecuencia en y.	Localizó diferentes puntos que apoyaron el trazado de la recta.

Como puede observarse en la Tabla 12, las distintas construcciones y sus respectivas explicaciones generaron que se hiciera un acercamiento a las acciones mentales manifestadas por los estudiantes, lo que sitúa a Eder y a Maruja, como quienes manifestaron un mayor número de acciones mentales en la actividad, y por ende se ubican en un nivel de razonamiento covariacional superior al de sus compañeros.

Cabe anotar que durante el experimento de enseñanza 1, también se presentó manifestación de diferentes acciones mentales cuando los estudiantes empezaron a reconocer la forma en que se manifestaban los cambios de una variable con respecto a la otra y dieron importancia al crecimiento y decrecimiento, lo que sugiere que los estudiantes manifestaban acciones mentales AM1 y AM2, y eso empezaba a dar cuenta de las imágenes mentales que los estudiantes tenían.

La forma de las gráficas generó que se organizaran los estudiantes en dos grupos, así pues se observa dos estudiantes que dibujaron curvas y los demás que aparentemente dibujaron líneas rectas. La intención de generar estos dos grupos fue reconocer una explicación del por qué se construyó curvas y por qué rectas, y de esta manera reafirmar mediante diálogos lo hallado en el análisis de las gráficas. El siguiente diálogo resultó del momento en cuestión:

Eder : *A mí me da curva, porque dijimos que mientras más diferencia de temperaturas es más rápido la transferencia, y al final que las temperaturas son iguales entonces se vuelve más lento. Eso se puede ver en la fórmula de transferencia de calor $\Delta Q= K A (\Delta T/\Delta X)$, (AM3).*

Maruja	:	*yo la pongo recta porque ya sé dónde va llegar, y en cambio ellos la ponen que se está acercando (AM3).*
Investigador	:	*¿Cuál se parece más a la realidad?*
Maruja	:	*La curva, porque eso se da lento, la gráfica de ellos es más detallada, muestran lo que se estaría dando y nosotros lo que se dio.*
Investigador	:	*¿La gráfica de Mariana es creciente?*
Albert	:	*Se ve un aumento.*
Maruja	:	*Aumento y descenso.*
Albert	:	*Con respecto a la gráfica es aumento, pero con respecto a los datos es descenso.*
Maruja	:	*Con respecto a t es aumento y con respecto a la temperatura es descenso, si miro solo la gráfica es creciente, pero es que si estuviera de 4° a 20° es aumento, pero yo la puse de 20°C a 4°C (AM1).*

En el caso de Eder, intentó graficar sus consideraciones acerca de que “ocurre un fenómeno” y afirmó que debe ser lo más parecido a la realidad, en cambio Maruja afirmó que solo pretendía mostrar de alguna manera lo que pasaba en la situación planteada. El análisis de esta situación puede permitir hacer acercamientos con las acciones mentales de razonamiento covariacional empleadas por los estudiantes de acuerdo a sus gráficas, a sus explicaciones y a las respuestas en los diálogos generados durante el desarrollo de las actividades. También se observó que al parecer Maruja manejó el plano cartesiano al revés, ya que normalmente si se grafica en el cuadrante 1 del plano los números aumentan hacia arriba y hacia la derecha.

Carlson et al. (2003) consideran que las habilidades de razonamiento covariacional son importantes cuando los estudiantes pretenden interpretar información gráfica, y por qué no, interpretar información a través de estas. Las acciones mentales de razonamiento covariacional expresadas por los estudiantes durante este episodio de alguna manera muestran su capacidad de representación gráfica de la información, pues identificaron diferentes puntos de referencia, determinaron la manera de representar la información prevista y explicaron de qué manera determinaron la forma de su gráfica. Las explicaciones escritas y los diálogos presentados anteriormente, sugieren que Eder y Maruja alcanzan el uso de las acciones mentales más complejas en relación a sus compañeros. Esto sugiere que sus imágenes de covariación son más refinadas que las de sus compañeros, ya que además de realizar sus representaciones, generaron mejores explicaciones y manifestaron acciones mentales más complejas. Lo que no es una sorpresa ya que al momento de realizar la actividad en cuestión los estudiantes estaban trabajando en grupos y estos estudiantes lideraban la actividad en sus grupos y se les escuchaba explicaciones semejantes a las observadas en los diálogos, .Además sus compañeros manifestaban aceptación de los argumentos de Eder y Maruja, tanto al momento de realizar las gráficas, como cuando fueron socializadas y discutidas.

De acuerdo con lo observado en las gráficas y la descripción que cada estudiante hizo de la misma, parece que reconocían que el valor de la temperatura (ubicada por algunos de ellos en Y) cambia con los cambios que hay en X (donde ubicaron el tiempo), lo que sugiere que la mayoría de ellos manifiestan AM1, y al parecer consideraron que habitualmente la *X* es la variable independiente. Además estos estudiantes demostraron comprensión de que cuando una variable cambia, la otra también lo hace, lo que al parecer era signo de la comprensión de las relaciones de dependencia entre las variables y de la manifestación de AM2, en la mayoría de los estudiantes.

Seguidamente se prestó atención a la dirección del cambio en la gráfica, ya que el fenómeno donde encuentra contexto la gráfica es de refrigeración y corresponde claramente a una gráfica decreciente. Al parecer Eder tiene una idea de que cuando los valores de *X* son recorridos de izquierda a derecha los valores en *Y* bajan, en cambio aunque Maruja en la descripción de la gráfica manifiesta que comprende que hay una disminución en la temperatura (ubicada en el eje Y), la gráfica que creó, parece ser creciente. Sin embargo, al analizar la disposición de los números del eje y consultar con Maruja, afirmó, que ella solo pretendía partir de la mayor temperatura para llegar a la menor y sin pensar mucho en la orientación en el plano cartesiano. Estas consideraciones parecen señalar que estos dos estudiantes manifiestan acciones contempladas en la tabla como AM1 y AM2.

También es conveniente referirse a la forma de la gráfica debido a que la de Maruja parecía ser una recta y la de Eder una curva. A continuación se presenta un fragmento de un diálogo resultante al indagar por la forma de la gráfica:

Investigador : *Maruja, ¿Por qué crees que el gráfico debe ser una línea recta?*

Maruja : *Porque para que la temperatura pase de 20ºC a 4ºC en 24 horas es necesario que baje casi un grado por hora.*

Aquí parecía que la estudiante identificaba una tasa de variación constante como requisito para tener una línea recta, y nuevamente hubo referencia al concepto de función de primer grado. Además la estudiante establece la tasa de variación de la temperatura que considera necesaria, para cumplir con la temperatura objetivo, en el tiempo destinado para el proceso. Estas afirmaciones sugieren que nuevamente la estudiante manifiesta AM2 y AM3.

Investigador : *¿Y qué opina Eder?*

Eder: : *Yo creo que es una curva porque al principio debe ser más rápido el enfriamiento, porque si miro el modelo matemático ∆Q= K A (∆T/∆X), Q es mayor mientras la diferencia de las temperaturas sea mayor y después va ser más lento porque ya se está enfriando.*

Se observó una clara manifestación de AM3 y un acercamiento a AM4 cuando explica que el proceso inicialmente es más rápido (considera una tasa de variación no constante) y después se hace más lento al empezar a igualarse las temperaturas y al considerar la dirección del cambio al tener en cuenta la diferencia de las temperaturas en su afirmación. Eder consideró que el proceso inicialmente era más rápido y los representó mediante una pendiente más inclinada.

Maruja trabajó construyendo una función lineal y consideró iguales descensos de temperaturas en iguales intervalos de tiempo. Sin embargo, Eder afirmó en ese momento, que inicialmente el descenso de la temperatura era más veloz debido a que la diferencia de temperatura entre el producto y el medio era grande, después sería más lento y por esta razón la gráfica era curva, y que había sacado estas conclusiones mediante la observación del modelo matemático que se presentó para la transferencia de calor durante el segundo experimento de enseñanza, las explicaciones del estudiante donde evalúa el cambio de la temperatura con respecto al tiempo relacionaban un modelo y una representación del fenómeno de enfriamiento. Implícitamente las afirmaciones del estudiante lo llevaron a encontrar que una razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo, con un valor alto, le generaban mayores pendientes (de ahí su representación), lo que parece indicar que el estudiante hace uso del modelo matemático para la comprensión de la representación gráfica de un fenómeno de variación y de esta manera se sitúa en el nivel 3 de razonamiento covariacional.

Los datos presentados y analizados señalan a Berta, Radamel y Robin con capacidad de representar una imagen de variación al considerar el cambio de alguna cantidad, la coordinación entre dos cantidades y así la construcción de una imagen de covariación. Y por otro lado las imágenes de covariación representadas por Eder y Maruja sugieren el uso de acciones mentales en niveles superiores, y de acuerdo con Carlson et al. (2003) “a medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado”. (p. 130).

El uso y análisis de los modelos y sus representaciones, permitió ver que los modelos matemáticos corresponden a funciones y explorar las comprensiones e interpretaciones que los estudiantes tienen de las funciones y del fenómeno. Emerge entonces el razonamiento covariacional como una forma para determinar cómo los estudiantes comprenden y explican, como una manera para interpretar sus comprensiones, reconocer las acciones mentales que emplean para comunicarlas y hacer referencia a las imágenes mentales que tienen acerca de la covariación de las variables en el fenómeno. Y así comprender como es la dependencia que los resultados tienen de las variables y cómo pueden ser observadas y representadas.

4.3 Analogías entre procesos de transformación de alimentos

Para la comprensión de diversos términos y conceptos que emergieron durante el análisis de los modelos matemáticos, fue necesario recurrir al uso de analogías, tanto por parte del profesor investigador como de los estudiantes, para explicar diversas cuestiones o para asociar una estructura matemática a un comportamiento en un fenómeno del campo de los alimentos.

Por ejemplo, cuando se presentaron los modelos empleados en el estudio de la transferencia de calor, surgió la necesidad de referirse a la densidad, ya que esta propiedad estaba implicada en uno de los modelos. Se les presentó un modelo empleado para el cálculo de la densidad: $\rho = m/v$ *(densidad= masa / volumen)* y se procedió a generar comparaciones entre el agua y el aceite y sus densidades. Luego se idealizó la situación mediante la simplificación de la composición de la crema de leche, agua + grasa, y en este instante se comparó las densidades entre las cremas de leche, donde los estudiantes concluyeron que la de menos grasa era más densa.

La densidad es un concepto básico que cualquier ingeniero puede emplear en determinado momento, Welti-Chanes, Gómez -Palomares, Vergara-Balderas y Marís-Alzamora (2005) reconocen la importancia de la densidad en procesos de calentamiento. Para los ingenieros y tecnólogos de alimentos resulta útil la determinación y el manejo de esta variable para realizar controles de recepción de materias primas (por ejemplo las pruebas de plataforma en la recepción de leche cruda), control de procesos, entre otras;

Moreno, Rodrigues y Sepúlveda (2012) consideran la densidad en relación a la calidad de las migas en buñuelos[5], es decir, la densidad tiene fuerte repercusión en la calidad de este tipo de productos debido a que grandes volúmenes con bajos pesos (masas), pueden indicar esponjosidad en las migas.

En general, las propiedades físicas de los alimentos, tienen un papel importante cuando se habla del control de calidad, del conocimiento estructural y fisicoquímico de los productos. Además, el estudio de las propiedades físicas puede permitir comprender los cambios que sufren las materias primas durante su transformación y almacenamiento.

La necesidad de estas explicaciones se dio durante el análisis del modelo para la determinación de la conductividad térmica en el desarrollo del segundo experimento de enseñanza debido a que la densidad se encuentra implicada en los modelos matemáticos para el cálculo de conductividad y difusividad térmica, las cuales son importantes variables cuando se estudia la transferencia de calor. El diálogo que condujo a la necesidad de mencionar el concepto de densidad se presenta a continuación:

Investigador : *Por ejemplo ¿Cuál sería la diferencia entre calentar agua y jalea?*

Maruja : *La jalea es más espesa*

Investigador : *¿Cómo se llama esa propiedad?*

[5] El buñuelo es un producto elaborado con masa de harina de maíz que se fríe en abundante aceite.

Robin : *Densidad*

Robin mencionó la densidad, este concepto es presentado a los estudiantes en cursos del bachillerato y también en los cursos de Química general y Física I, que los estudiantes de Ingeniería y Tecnología de Alimentos cursan en el primer semestre, cursos que para el momento de realizar el trabajo de campo, los estudiantes ya habían culminado.

Las afirmaciones de estos dos estudiantes señalan que existía una confusión entre dos propiedades diferentes, lo que motivó que el investigador propiciara un diálogo al respecto:

Investigador : *¿Qué es la densidad?*

Maruja : *Es como espesor, pues, de espeso, partículas muy unidas.*

Investigador : *Interesante Maruja, un modelo matemático para el cálculo de la densidad es este* $\rho = m/v$. *Entonces tiene que ver con lo que acabas de decir, ¿Cuál es más denso, el agua o el aceite?*

Maruja : *El agua.*

Davy : *Sí, porque si llenamos un recipiente con agua y aceite, el agua queda abajo porque es más pesada.*

Eder : *Claro, y si es más pesada tiene una mayor densidad*[el estudiante hacía referencia a la masa, sin embargo se hizo la aclaración]

Investigador : *¿Y cuál es más espeso?*

Todos : *El aceite.*

Investigador : *¿Cómo se llama esa propiedad?*

Rómulo : *Pero la densidad también puede encontrase buscando el volumen desplazado en un beacker con agua, luego se pesa y se hace la división.*

Rómulo mencionó otras actividades para determinar la densidad. Además finalizaba con el uso del modelo de cálculo presentado, así asoció acciones de un contexto con el modelo de cálculo. Eder por su parte intentó relacionar el comportamiento de un fenómeno conocido, con la ecuación que se había presentado para calcular la densidad, sugiriendo que el producto con mayor peso (masa) tendría una mayor densidad.

Al hablar de densidad surgió la necesidad de realizar aclaraciones con respecto a otro concepto que los estudiantes asociaban con densidad, este fue: *la viscosidad*, sobre ella, Maruja definió con las siguientes palabras: "*es como espesor, pues de espeso, partículas muy unidas",* al mencionar que la jalea era más espesa que el agua y se procedió a explicar, que la viscosidad es una propiedad que tiene que ver con la resistencia al movimiento y era más apropiada para ser relacionada con una sustancia espesa. De acuerdo con Welti-Chanes et al. (2005) los procesos de transferencia de calor consideran la importancia de la viscosidad elevada como un factor que incrementa los tiempos en los procesos de calentamiento.

Otra de las situaciones que permite inferir que los estudiantes se encontraban haciendo uso de las analogías, incluso por su propia cuenta, se presentó durante el análisis del modelo matemático de *cantidad de yuca* vs *% de humedad* (Ilustración 6), cuando se estaba hablando sobre un producto que después de un proceso de deshidratación sale con más humedad de la esperada (situación presentada en el desarrollo del primer experimento de enseñanza):

Investigador : *¿Qué pasa con más de 6000 g de yuca?*

Rómulo : *Baja porcentaje de humedad., por que dijimos que depende de la cantidad, y sí hay mucho se extrae menos humedad.*

Los estudiantes realizaron comentarios de los fenómenos a través de analogías con procesos que eran conocidos por ellos, como puede observarse a continuación:

Albert : *¡Entonces eso es malo! Mucha cantidad, no se alcanza a que a una parte se le salga la humedad.*

Berta : *O sea que el secado no sea parejo.*

Investigador : *¿Se refiere a homogéneo?*

Berta : *Sí*

De lo que resulta una analogía, cuando Rómulo compara con otra situación.

Rómulo : *Es como decíamos cuando fritamos papas, si le da el tiempo de cocción necesario se le extrae más humedad, pero si echa muchas no se cocinan bien.*

Puede observarse entonces que los estudiantes asociaron un comportamiento del proceso de trasformación que estaban estudiando, con otro proceso que ya conocían o que eran cotidiano para ellos y el proceso que era objeto de análisis mediante el modelo matemático y sus representaciones. En este sentido, el análisis de modelos matemáticos ofreció un punto de referencia para identificar el comportamiento entre dos variables, dicho comportamiento pudo reconocerse tanto en el proceso de deshidratación de yuca, como en otros procesos de trasformación de alimentos. Todo esto, a su vez, ayudaba a darle sentido a lo que estaban evidenciando en los modelos que analizaban, debido a que se logró comprender las razones que generaban el comportamiento en las gráficas elaboradas. En esa lógica el uso de las analogías no se limitó a la comprensión de diferentes resultados, sino que permitió darle significado a los resultados en términos de los fenómenos, los procesos estudiados y los que eran conocidos o cotidianos para los estudiantes.

Para apoyar la anterior idea se presenta un episodio que se generó durante el desarrollo del segundo experimento de enseñanza, cuando el estudiante Albert, quien al analizar el modelo matemático para la transferencia de calor y las representaciones del modelo para algunas figuras geométricas, cuestionó acerca de la manera en que el calor se desplaza en un cuerpo debido a que la forma simple de los modelos considera desplazamiento en una sola dirección (de la mayor a la menor temperatura):

Albert : Pero si el calor entra por un lado tiene que repartirse para los otros, porque si no, no se calienta todo el producto

Aquí el estudiante señala que el calor no viaja en línea recta únicamente, y se le explicó que los fenómenos se analizan de una manera que no se vuelva muy complejo, y por esta razón se analiza en una sola dirección. Sin embargo Geankoplis (1998) contempla que el calor puede transferirse en varias direcciones en problemas prácticos.

Albert : Cuando llega y entra va de mayor a menor temperatura, ¿entonces cuando le está entrando ese calor al producto, *se reparte igual a los lados antes de llegar al otro lado?*

En ese instante la estudiante Maruja trató de responderle a Albert apoyándose en lo que comprendió durante el desarrollo de otro punto del mismo experimento, que consistió en graficar el proceso de refrigeración de una manzana, pero esta vez, en términos del descenso de la temperatura vs la distancia, es decir dependiendo del punto de medición de la temperatura en el producto:

Maruja : *En el ejemplo de la manzana la mitad es el centro térmico porque por los lados esta frío y en la mitad tiene temperatura alta, el producto se enfría por todos los lados.*

Albert : *¡O sea que con ese punto yo sé si el producto está listo!*

Maruja : *Por eso si cocina algo puede que se queme por fuera, hay que esperar a que esté listo por dentro, sino queda crudo por dentro y quemado por fuera*

Investigador : *¿Qué podemos hacer para que un producto no se queme?*

Maruja : *Hay que controlar T, si Ud. mete carne a toda T, pues se va quemar…*

Maruja posteriormente en un documento entregado, se refiere nuevamente a la necesidad de controlar la temperatura, lo que sugiere que la estudiante reconoce la importancia de controlar las variables para obtener diferentes resultados:

> A mayor diferencia entre las temperaturas mayores va a ser la transferencia de calor, y mayor van a ser los grados que alcanza el producto, y esto es peligroso para el producto.

Ilustración 17. *Fragmento del documento de Maruja*

Albert determinó que la temperatura en el centro térmico de un producto, puede ser un indicador para dar por terminado un proceso de cocción. Sin embargo, fue necesario aclarar que esa temperatura depende del tipo de producto que se esté cocinando y que además de eso, la temperatura en ese punto también sirve para controlar otros procesos y la calidad del producto, de acuerdo con Codex Alimentarius (2008) se considera que el centro térmico reportara la temperatura más elevada en procesos de refrigeración o congelación y por esta razón se considera un parámetro del control microbiano del producto. Maruja supone que un producto puede quemarse cuando se emplean temperaturas demasiado altas durante un proceso, aunque sus afirmaciones son correctas, esto también depende del tiempo durante el cual se trabaje con dichas temperaturas, generalmente.

Durante las actividades además de emerger conceptos, el trabajo desarrollado hasta el momento, facilitó que los estudiantes relacionaran el concepto de centro térmico con la determinación del punto final de un proceso de cocción y además de cómo controlar el acercamiento a esa temperatura, controlando las variables del proceso. Lo que frecuentemente aplica en diversos procesos de la industria alimentaria, como por ejemplo en procesos de cocción, pasteurización, secado, esterilización o los de enfriamiento etc. Por ejemplo, los modelos matemáticos para la transferencia de calor ayudan a determinar condiciones del diseño de una cava de refrigeración o congelación, mediante la estimación de la carga de calor a extraer para seleccionar la capacidad de las máquinas que serán empleadas.

Las consideraciones de los estudiantes fueron más allá de los modelos matemáticos y realizaron consideraciones acerca de los resultados que pretendían obtener en un proceso y por lo tanto las variables que debían controlar. De acuerdo con Romo (2014) para controlar un sistema resulta importante reconocer la relación entre la salida (lo que desea obtenerse) y la entrada (lo que se usa para afectar al sistema).

Cuando se presentó el modelo matemático para la transferencia de calor por el mecanismo de conducción $dQ = kA\left(-\frac{dt}{dx}\right)$ se discretizó las razones de cambio de variables para facilitar la comprensión por parte de los estudiantes, es decir, se presentó el modelo en términos de incrementos. También se generó explicaciones acerca de las maneras de analizar los mecanismos de transferencia de calor, es decir se explicó cuándo se trabaja en estado transitorio y cuándo en estado estacionario, y la complejidad de trabajar en estado transitorio, o sea cuando el proceso es dependiente del tiempo y de la distancia que recorre el calor. Además se hizo referencia a la forma del cuerpo que sufre la transferencia de calor y su incidencia en el modelo.

Algunos estudiantes lanzaron apreciaciones acerca del modelo matemático y sus variables:

Investigador : *¿Qué se puede afirmar al observar el modelo matemático?*

Maruja : *Con k, A, y ΔT grandes, Q es grande y por eso altas temperaturas pueden quemar productos.*

Robin: : *¿Quién es la X?*

Davy: *Es la distancia entre las temperaturas.*

Se observó que los estudiantes relacionaron las variables del modelo de transferencia de calor con las representaciones gráficas que se les presentaron (ver anexo 3) y esto facilitó que Davy reconociera que la variable que involucraba a X, estaba relacionada con la distancia entre las fuentes de calor o frio (temperaturas), es decir, la distancia entre la fuente emisora de calor y la receptora. Maruja por su parte logró relacionar las afirmaciones que realizó anteriormente, cuando hablaba de procesos de cocción, con el modelo matemático, y señaló que altas temperaturas, darían como resultado calores muy grandes, y que debido a esto, los productos podrían quemarse. De acuerdo con Soares (2012) al considerar los efectos de una variable sobre los resultados, los estudiantes atienden a una especie de "experimentación", lo cual señala que se generaban hipótesis y maneras de probarlas.

Mientras se trataba procesos de calentamiento durante el desarrollo del segundo experimento de enseñanza, se les preguntó a los estudiantes cómo sería si cocináramos un cubo de carne, de donde surgieron cuestionamientos y analogías a otros fenómenos estudiados y procesos de transformación de alimentos:

Maruja — *¿En agua o aceite? ¿O lo pone solo?*

Albert — *Si lo pone solo le da el calor solo a la parte que toca la olla.*

Maruja — *Si lo mete solo no transfiere, se quema, no pasa el calor por eso debe haber agua o aceite.*

Investigador — *¿No pasa el calor?*

Maruja : *Sí pasa, pero no a todo, se forma una capa, no sale la humedad y se quema*

Se observó que Maruja trataba de relacionar los temas tratados en los dos experimentos de enseñanza, y explicaba que se formaba una capa, debido a que en un momento determinado fue necesario recurrir a analogías para generar la comprensión del efecto de las altas velocidades del viento en procesos de deshidratación, y en algunos productos, por su parte Albert continuaba refiriéndose a las direcciones del flujo de calor. En ese momento se introdujo la idea de “costra”, y era el término que la estudiante trataba de emplear, pero esta vez sería producido por el excesivo calentamiento de un producto. Sin embargo, comprendió que en un momento dado, eso evitaría que la humedad del producto fuera retirada. Según Della (2010) la formación de costras es un factor que interviene en la difusión de la humedad, durante procesos de secado. Las afirmaciones de Maruja destacan su intención de relacionar los fenómenos estudiados y emplear en este análisis consideraciones alcanzadas durante el primer experimento de enseñanza. Lo que demuestra que la estudiante trató de emplear los conceptos aprendidos durante el primer experimento de enseñanza, en el desarrollo del segundo y sugiere que la estudiante comprendió los efectos de las variables en la evolución del fenómeno.

También es importante reconocer el uso de una analogía presentada cuando se estudió la relación *A/V*, situación que se presenta con detalle a continuación. Los estudiantes concluyeron que era importante tener relaciones A/V altas, lo que requería tener espesores pequeños.

Berta : *Por eso cuando fritamos papas es más fácil sin son delgadas*

La estudiante hace uso de la analogía para ejemplificar cómo esta variable participa en el contexto de un proceso que ella reconoce.

De acuerdo con lo presentado hasta aquí en esta sección, se considera útil presentar las diferentes analogías realizadas por los estudiantes, ya que estas facilitaron la comprensión del fenómeno, su vinculación a algún proceso y la necesidad de explicar diferentes conceptos. Dichas analogías se presentan en la tabla 13:

Tabla 13.

Uso de analogías y las ideas relacionadas

Analogía	Uso dado por los estudiantes	Ideas relacionadas
Referirse a procesos conocidos por ellos	Resultó debido a la necesidad de explicar por qué con grandes cantidades de yuca se generaba menores cantidades de humedad extraída. Cuando Rómulo se refirió a la importancia de emplear productos finamente cortados para obtener mejores resultados en cocción.	Esto hace referencia de manera indirecta de la necesidad de considerar la carga para la cual se diseña un equipo. En términos matemáticos se definía la posibilidad de obtener resultados negativos en una gráfica. Se hacía las primeras aproximaciones a los conceptos de área y volumen, y se definía indirectamente su mejor relación.
Comparar los fenómenos	Cuando la estudiante Maruja trató	Esta situación genero la posibilidad

estudiados	de explicar cuestiones del proceso de calentamiento mediante conceptos del proceso de deshidratación.	de reconocer el concepto de costra y sus incidencias
Comparar dos productos alimenticios (el agua y aceite)	Cuando los estudiantes requerían definir propiedades en los productos empleados, como fue el caso de la densidad del agua y el aceite.	Se definió propiedades físicas y matemáticamente se señaló que la conclusión era lógica mediante el modelo de cálculo de la densidad
Comparar procesos con representaciones	Esta situación se presentó cuando los estudiantes buscaban comprender por qué los resultados de una gráfica no atendían a lo que ellos esperaban. Otra de estas situaciones se dio cuando Eder buscaba explicar la forma de la gráfica que elaboró y afirmaba que lo lógico era que el proceso se diera de manera rápida inicialmente y por eso la forma de su gráfica.	En esta situación se generó la necesidad de que los estudiantes observaran las coordenadas en la gráficas y realizaran comparaciones con las tablas y los modelos estudiados. Esta situación señala el concepto de tasa de variación y se pudo reconocer que cuanto mayor sea esta, más veloz será el proceso de enfriamiento.

elacionar conceptos con procesos	Al mencionar el centro térmico, Albert concluyó que este punto podría implicarse en la determinación de la finalización de un proceso.	Se determinó la importancia de reconocer un lugar del producto mediante el cual se puede hacer algunos controles de calidad.
Relacionar lenguaje común para definir propiedades	Cuando Maruja afirmó que la densidad estaba relacionada con sustancias espesas, lo que originó la definición de la propiedad de viscosidad.	Esta situación permitió realizar la definición de la propiedad de viscosidad.
Extrapolar la comprensión de una variable a otro proceso	Cuando Berta define una relación entre la variable A/V y un proceso de fritura de papas, sugiriendo que es mejor tener papas delgadas para un mejor proceso.	Aporta en la comprensión de la variable en cuestión, y se reconoce su importancia en procesos de transformación.

4.4. Componentes geométricos en los modelos matemáticos para el área de Alimentos

A lo largo de este estudio se han resaltado aspectos relacionados con la variación, la coordinación de variables, la interpretación y la creación de modelos gráficos, la importancia de conceptos asociados a los modelos y a los fenómenos. En este apartado se reconoce algunos episodios donde los estudiantes identificaron propiedades de carácter geométrico durante el trabajo de uso y análisis de modelos matemáticos y también que esas propiedades se encontraban vinculadas a los fenómenos mismos. De esta manera se generan aportes en relación con la articulación del curso de Geometría con los programas de formación en alimentos, con lo cual, se media en el cumplimiento de los objetivos y el propósito del curso en los programas en cuestión.

Cuando los estudiantes analizaron los modelos presentados en las ilustraciones 2 y 6 y se les cuestionó por la influencia que tendría la variable A/V sobre la extracción de la humedad. Seguidamente se movió el deslizador de A/V en la gráfica y se inició con una discusión:

Albert : *Si lo mueve (el deslizador) a la derecha, aumenta el porcentaje de humedad extraído, porque la gráfica se sube.*

Maruja : *Sí aumenta A/V, entonces aumenta la cantidad de* *humedad extraída.*

Maruja	:	*Pero si mueve la cantidad de yuca la humedad es la misma.*
Albert	:	*No, en la gráfica se ve que según la cantidad de yuca se extrae más o menos por eso sí llena el equipo es menos.*
Investigador	:	*¿Cuándo extraigo más humedad? ¿Cuándo A/V es alto o bajo?*
Rómulo	:	*Según la gráfica A/V pequeño saco menos humedad, porque es más yuca y menos espacio.*
Investigador	:	*¿Puedes explicar eso?*
Rómulo	:	*Yo entiendo la relación A/V como la cantidad de yuca que cabe en cierto espacio cuadrado, por ejemplo que 500 gr quepan en 20cm^2.*
Investigador	:	*Rómulo, la propiedad A/V, se refiere al área y volumen de la yuca que estoy secando.*
Rómulo	:	*¡Ah! O sea que es de como esté partida la yuca o de qué tamaño.*
Albert	:	*El volumen no cambia así tenga el producto cortado en muchos trozos.*

Puede identificarse que Albert comprendió que cuando el deslizador A/V construido en el GeoGebra incrementaba su valor (moviéndolo a la derecha) y “la gráfica se subía”, existía un incremento en la humedad extraída. Rómulo ya en otro momento de análisis había mencionado la importancia de tener relaciones A/V altas para tener altos porcentajes de humedad extraídos. Otro aspecto de interés fue que Albert parecía comprender que el volumen de un producto será el mismo sin importar como esté cortado.

Para facilitar que los estudiantes comprendieran cuando podría contarse con relaciones A/V altas o bajas, se procedió a mostrarles una aplicación en Geogebra (Ilustración 18), en la cual se contaba con dos deslizadores radio y altura, que correspondían al radio y altura de un cilindro que fue la forma ideal seleccionada para los trozos de yuca. Este trabajo puede considerarse como una experimentación a través de software de acuerdo con Soares (2012).

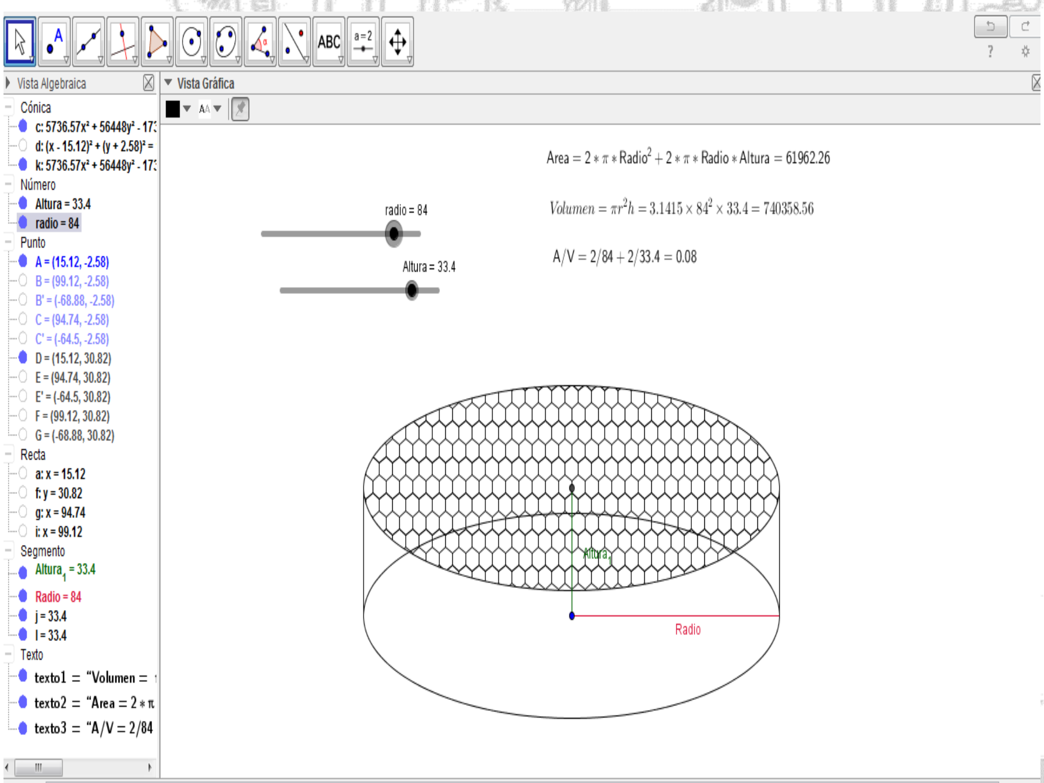


Ilustración 18. *A/V y su dependencia del valor de radio y altura*

Se les mencionó nuevamente a modo de síntesis que se había concluido que interesaba tener relaciones de *A/V* altas y se promovió el análisis del modelo presentado, en la ilustración

17, moviendo los deslizadores de radio y altura con las siguientes combinaciones: *r* pequeño +*h* pequeño, *h* grande +*r* peq, *h* peq *r* grande y *r*+*h* grande, donde todos concluyeron los siguientes resultados: *A/V* bajas, *A/V* varia de 0.05 a 0.53 y *A/V* altas alrededor de 1 y más. Y después de este análisis surgió el siguiente debate:

Investigador	:	*¿Qué se observa?*
Eder	:	*Con radio grande y h pequeño es más la extracción, porque la relación da alta.*
Albert	:	*Es mejor que sea más delgada la yuca.*
Berta	:	*Por eso cuando fritamos papas es más fácil sin son delgadas.*
Todos	:	*O sea que las alturas deben ser muy pequeñas.*

Mediante la observación de esta representación del modelo de cálculo de *A/V*, los estudiantes pudieron identificar la manera para lograr relaciones altas (valores por encima de 1) en el resultado de esta variable, además Berta relacionó la conclusión obtenida con un proceso conocido por ellos, como es el caso de la fritura de papas.

Después de que los estudiantes comprendieron la importancia de emplear relaciones de A/V altas para obtener mejor extracción de humedad, se procedió a preguntarles como consideraban que se realizaba el cálculo de A/V. Sin embargo, a pesar de darles un tiempo prudente se mostraron confundidos y no lograron realizar el manejo analítico de las expresiones para determinar que finalmente en el caso de la yuca la expresión final era: $A/V = 2/r+2/h$, sin embargo se observó un aporte de Eder para dar respuesta al interrogante, el cual se presenta a continuación:

Tabla 14.

Elaboración del estudiante Eder para determinar cómo se dan las mejores relaciones de A/V

radio	altura	area	volumen	a/v
50	0,5	15865,08	3927	4,04
55	1	19352,256	9503,34	2,03636364
60	1,5	23185,008	16964,64	1,36666667
65	2	27363,336	26546,52	1,03076923
50	3	16650,48	23562	0,70666667
55	4	20388,984	38013,36	0,53636364
60	5	24504,48	56548,8	0,43333333
65	6	28996,968	79639,56	0,36410256

Investigador : ¿Puedes explicar lo que hiciste?

Eder : Elegí algunos radios como de yuca grande e imaginé algunas alturas, entonces usé las fórmulas de área y volumen, para calcularlas en cada caso, y al final hice la división.

Este episodio demuestra que si bien el estudiante desconocía la manera aritmética para llegar a la generalización, pudo utilizar las fórmulas que ya conocía para el cálculo de área y de volumen, para verificar que con alturas pequeñas la relación *A/V* era más grande.

Para determinar si se había comprendido y observar el "uso y análisis" del modelo por parte de los estudiantes, se presentó el siguiente caso:

- En un proceso de deshidratación llevado a cabo en un laboratorio, se empleó 1300 g de yuca, la cual se cortó en trozos con espesores superiores a los tres centímetros, también se empleó velocidades entre 1,5 y 2 m/s, y temperatura entre 70 y 80ºC, al momento de verificar el porcentaje de humedad retirado, éste no superó el 15% transcurrido el periodo de tiempo adecuado ¿Cuál o cuáles son los factores que usted considera responsables?

Después de la lectura grupal de la tarea resultó el diálogo que a continuación se presenta:

Rómulo : *Hablan de un espesor de 3 cm, yo creo que es mucho.*

En ese momento se procedió a mostrar la ilustración 17, se procedió a mover los deslizadores de radio y de altura y mientras hacía esto pregunté: ¿Recuerdan cuál era la relación A/V más óptimo?

Rómulo : *Necesitamos relaciones A/V altas y con esos 3 cm de espesor es baja y esta relación no ayuda. Se necesita que sean de 1.5 mm o menos para que suba la relación.*

investigador : *¿Es muy gruesa, o hay otros factores más importantes?*

Maruja : *Se supone que todos los factores (variables) deben estar en un nivel, y si uno falla el proceso falla.*

Rómulo : *Yo sigo pensando que el responsable es el A/V, porque no hablaron de valores raros. Según el modelo matemático tenemos tal rango de valores, eso se ve en la tabla* [refiriéndose a la Tabla 15 de los rangos empleados para los valores de las variables en el modelo matemático].

Eder : *Si, el único valor extraño es esos 3 cm, son 30 mm*

Tabla 15.

Niveles escogidos para las variables durante la creación del modelo matemático para la deshidratación de yuca

Niveles escogidos para cada variable del proceso

Nivel	Cantidad de yuca (gr) A	Relación Superficie a volumen B	Velocidad del flujo de aire que recircula (m/s) C	Temperatura del aire que recircula (°C) D
Alto	2000	$(0.4731 - 0.4743)mm^{-1}$ (Espesor:0,5cm)	3	80
Bajo	1000	$(0.1734 - 0.1743)mm^{-1}$ (Espesor: 2 cm)	1.5	60

En un documento presentado posteriormente por Albert y Radamel (ilustración 19) se observa que responden, de una manera similar a la de Rómulo y Eder.

En un proceso de deshidratación llevado a cabo en un laboratorio, se empleó 1300g de yuca la cual se cortó en trozos con espesores superiores a 3cm, también se empleó velocidades entre 1,5 y 2m/s, y temperatura entre 70 y 80°C al momento de verificar el porcentaje de humedad retirado, este no supero el 15% transcurrido el periodo de tiempo adecuado ¿Cuál o cuáles son los factores que usted considera responsable?

Uno de los factores que afecta este proceso es que los trozos de yuca son muy gruesos entonces esto evita que sea más efectiva la extracción de la humedad.

Ilustración 19. *Fragmento del documento de Albert y Radamel*

En la información presentada puede observarse que Rómulo relacionó diversos elementos que hasta ese momento se habían estudiado, de ahí que tomara en consideración los intervalos con los cuales se construyó el modelo para determinar que no habían valores raros además de los tres centímetros de espesor del producto que podía generar valores muy bajos para la relación *A/V*.

El trabajo permitió la discusión de este componente geométrico en varias oportunidades, como puede apreciarse en el siguiente apartado donde Rómulo realizó una pregunta:

Rómulo	*¿Qué pasa si la yuca se parte en cubos? yo creo que se podría sacar más material que con cilindros.*
Maruja	*Pero es más fácil sacar cilindros, con los cubos pierde material.*

En este episodio se observa que la estudiante buscó relacionar la yuca con la figura geométrica que más puede aproximarse con su forma, como el cilindro y representó la pérdida de material que ella mencionó, al dibujar cuadrados en interior de una circunferencia como se puede observar en la siguiente representación:

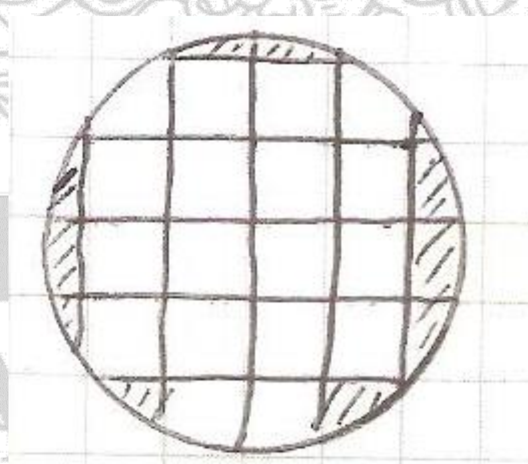


Ilustración 20. *Representación del gráfico elaborado por Maruja*

En la ilustración 20, Maruja elaboró la vista superior del producto y su corte, señaló que se pierde el material que corresponde a los sectores circulares sombreados.

La estudiante empleó el uso de una representación gráfica para explicar por qué no era conveniente hacer ese tipo de corte en el producto debido a que puede existir pérdida de material, puesto que todos los trozos cortados no quedarían con la misma forma, lo que hace referencia a la calidad misma y los rendimientos del producto.

El segundo experimento de enseñanza también presentó la oportunidad para que los estudiantes reconocieran que los elementos de carácter geométrico intervienen de manera importante en la construcción de los modelos matemáticos. En esta actividad se presentó el modelo matemático para la determinación del calor transferido a un cuerpo cuya ecuación general puede escribirse así: *Q = KA (T2 – T1)/(X2 – X1)* y posteriormente se les solicitó a los estudiantes adecuar el modelo si se iba emplear para un objeto de forma cúbica, al cual le entraba calor por una de las caras. Los estudiantes presentaron algunos gráficos y comentarios:

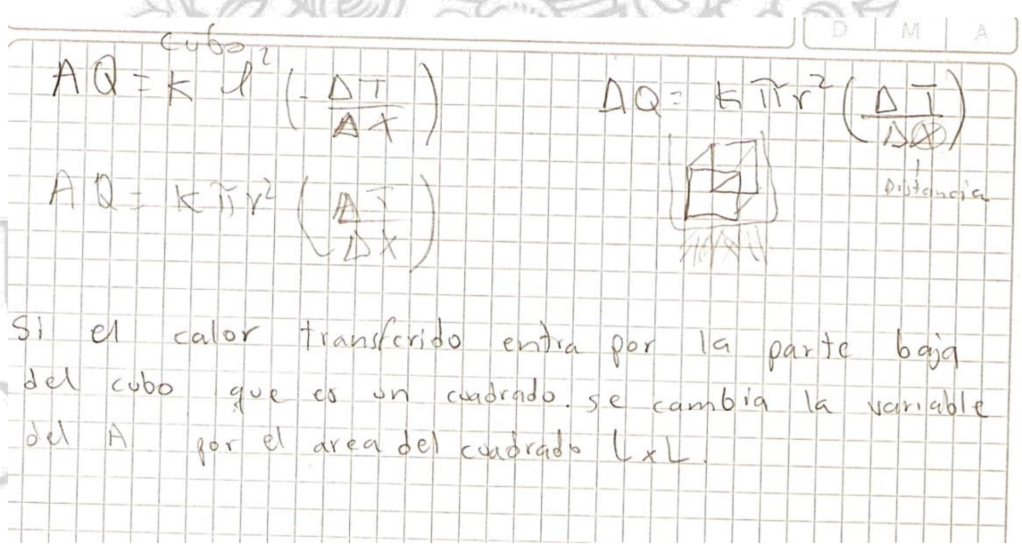


Ilustración 21. *Elaboración de Eder*

Se observó en el gráfico, que Eder reconoció que el área por donde entra el calor corresponde a la de un cuadrado, como lo explica en su elaboración, además hizo uso del concepto de área del cuadrado que al parecer ya conocía.

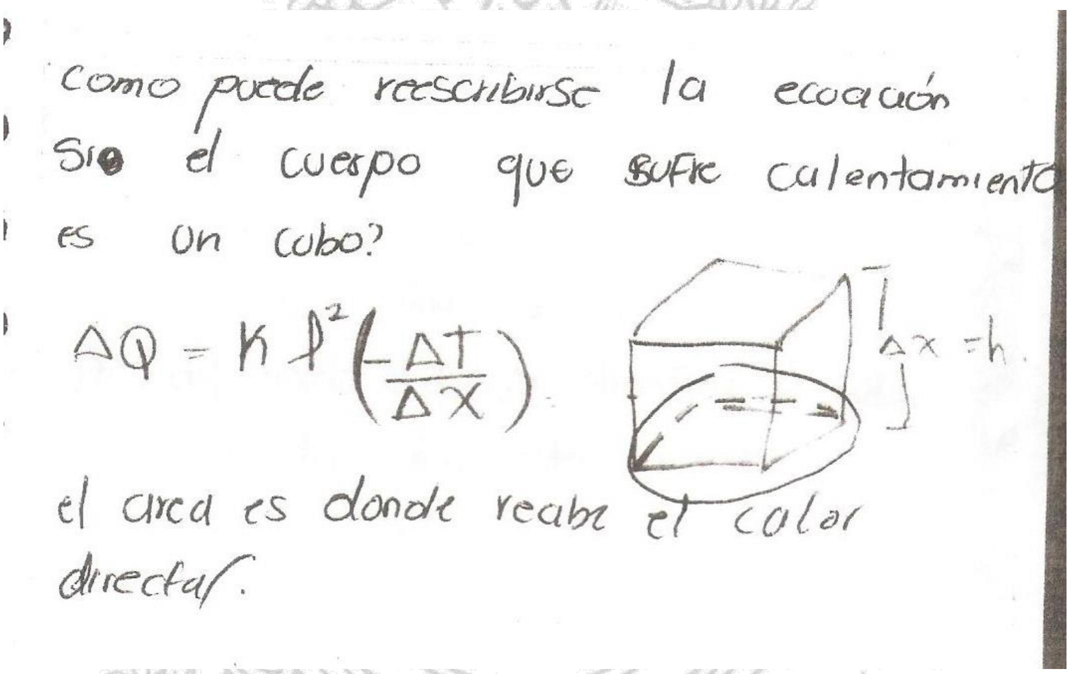


Ilustración 22. *Elaboración de Maruja*

Aunque no se observa de manera explícita que Maruja comprendió que debía sustituir a *A* por el lado al cuadrado, sí se observa que la estudiante señala en su gráfica la base del cubo e identifica que por esta cara se recibe el calor.

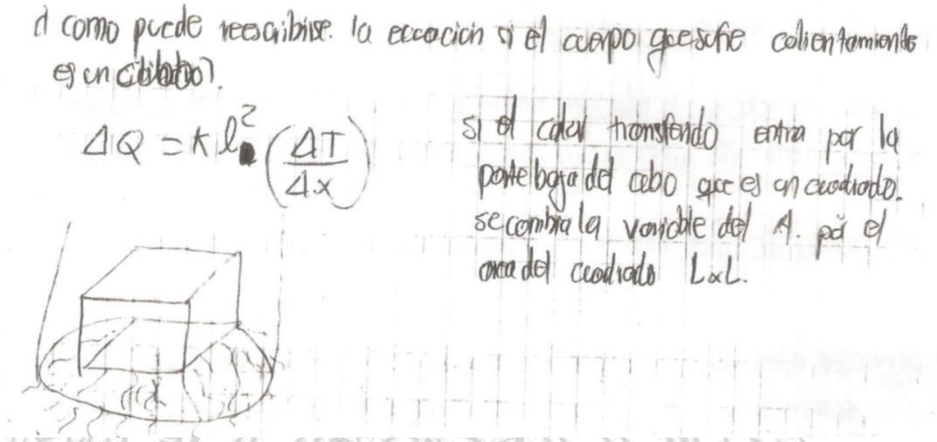


Ilustración 23. *Elaboración de Radamel*

El estudiante manifiesta gráficamente por donde entra el calor y describe que al ser un cuadrado entonces cambia la letra *A* e introduce en la ecuación a *LxL* para sustituirla.

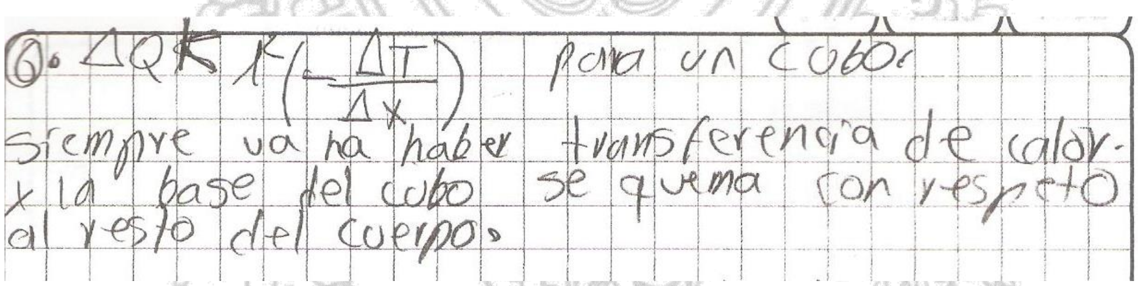


Ilustración 24. *Elaboración de Robin*

La elaboración del estudiante no presentó ningún gráfico, y su explicación presentó poca relación con lo que estaba realizando.

Las producciones gráficas de Eder, Maruja y Radamel permiten comprender que los estudiantes reconocen la manera de utilizar la ecuación cuando se trata de un producto con una forma cúbica y además que reconocen que cada una de las caras del cubo es un cuadrado y por tal razón deben sustituir a *A*, por la fórmula para calcular el área de un cuadrado. Por su parte

Robin a pesar de reescribir adecuadamente la ecuación, no explicó de manera coherente su trabajo, posiblemente debido a que este estudiante trabajó la elaboración del modelo con ayuda de sus compañeros. Sin embargo para realizar la explicación confundió algunas cuestiones que habían sido mencionadas anteriormente.

Posteriormente para determinar si los estudiantes eran conscientes del cambio que se genera en el modelo matemático a la vez que se cambia la forma del cuerpo que sufre transferencia de calor, en las actividades se solicitaba reescribir el modelo matemático si la sustancia que se calentaba tenía forma cilíndrica y de los trabajos escritos aportados por los estudiantes, se obtuvo las siguientes respuestas:

¿Cómo puede reescribirse la ecuación si el cuerpo que sufre el calentamiento es un cilindro?

Ecuación: $\Delta Q = KA\left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Si el calor transferido entra por la base del cilindro la cual es un circulo se reemplaza la variable A en la ecuación de transferencia de calor por el área del circulo (πr^2)

Ecuación reescrita: $\Delta Q = K\pi r^2 \left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Ilustración 25. *Elaboración de Radamel*

Radamel nuevamente explicó qué consideración tuvo en cuenta para reescribir la ecuación. Reconoció que la base del cilindro era un círculo, y debido a esto reemplazo la *A* por la fórmula para calcular el área de un círculo.

¿Cómo puede reescribirse la ecuación si el cuerpo que sufre el calentamiento es un cilindro?

Ecuación: $\Delta Q = KA\left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Si el calor transferido entra por la base del cilindro la cual es un circulo se reemplaza la variable A en la ecuación de transferencia de calor por el área del circulo (πr^2)

Ecuación reescrita: $\Delta Q = K\pi r^2 \left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Ilustración 26. *Elaboración de Maruja*

¿Cómo puede reescribirse la ecuación si el cuerpo que sufre el calentamiento es un cilindro?

Ecuación: $\Delta Q = KA\left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Se reemplaza la variable A por πr^2, porque la parte de abajo es un círculo

$\Delta Q = K\pi r^2 \left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)$

Ilustración 27. *Elaboración de Eder*

Con respecto a las elaboraciones de Eder y Maruja se observó que aunque no hicieron un dibujo que representara el cilindro, también supusieron que el calor entraría por la base circular y por lo tanto reemplazaron la variable A por la fórmula para calcular el área de un círculo.

Puede observarse que estos estudiantes evidenciaron cierta capacidad para ajustar el modelo matemático de acuerdo a la forma geométrica del producto que sufre el proceso de calentamiento, ya que reconocían qué tipo de cambio requería el modelo original.

Los datos expuestos a lo largo de este capítulo, presentan las diferentes maneras en que la propuesta metodológica de “uso y análisis de modelos” enmarcada en la teoría de las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias (MCC) facilita la articulación de las matemáticas con los contextos propios de un programa de formación de los profesionales en alimentos.

Además en los datos presentados se trató de dar cuenta de las preguntas que tenían un contenido diferente, pero un sentido semejante, para verificar la reacción de los estudiantes y comparar sus respuestas en los diferentes episodios o simplemente para confirmar la solidez de sus afirmaciones.

A través de los apartados de este capítulo pudo observarse que los estudiantes comprendieron el modelo como una función, como un modelo de variación o dependencia, como un medio para explicar, entender y determinar que para llevar a cabo algún proceso de una manera determinada, es necesario considerar diferentes factores que inciden en él.

5. Conclusiones

En la primera parte de este capítulo se establecen las principales conclusiones generadas mediante esta investigación, para lo cual es necesario señalar cómo la vinculación de los referentes teóricos facilitó que los estudiantes tuvieran cierta apropiación del modelo, diferentes manifestaciones durante el análisis, atención a las necesidades formativas de los profesionales en alimentos y la articulación entre las matemáticas y la ingeniería/tecnología, además se observaron diferentes desafíos inherentes a la implementación de la estrategia didáctica. Para posteriormente definir el alcance de los objetivos, de manera orientada a dar respuesta a la pregunta de investigación y generar algunas observaciones referentes al uso y análisis de modelos matemáticos como estrategia en el aula.

Sobre la apropiación de los referentes teóricos en esta investigación

En la Ilustración 28 se muestra la manera como en esta investigación se vinculó la estrategia de uso y análisis de modelos al momento didáctico de la teoría de las MCC, para dibujar la articulación entre las matemáticas y la ingeniería de alimentos; y así sugerirla como una manera de atender a algunas necesidades formativas de los estudiantes de acuerdo a los referentes teóricos, como por ejemplo trabajar matemáticas que estén directamente relacionados con el campo de acción de estos profesionales. Así pues, en el capítulo anterior se mostró que los estudiantes realizaron diversas actividades de análisis y emplearon diferentes herramientas para enfrentarlas, construyeron representaciones e hicieron explicaciones de sus construcciones, interpretaron resultados y los validaron a través del modelo o sus representaciones. Muchas veces las explicaciones de los estudiantes trascendieron de sus apreciaciones de la matemática o del contexto para generar explicaciones de manera articulada a su futuro campo ocupacional, a partir de ello, es posible valorar como las actividades diseñadas condujeron a diferentes actuaciones por parte de los estudiantes.

Con el uso y análisis de modelos matemáticos se incentivó la generación de relaciones entre los modelos, sus representaciones y los fenómenos estudiados, con lo cual se puso en evidencia que cuando los estudiantes requerían generar claridades buscaban soporte en otros procesos que ya conocían y se enmarcaban en el fenómeno que se estudiaba con el modelo.

También se señala que durante dichas interpretaciones surgieron diversos conceptos de manera articulada que señalan un vínculo entre las matemáticas y la ingeniería/tecnología de alimentos.

Las MCC permiten la introducción de elementos didácticos considerados en procesos de modelación, los cuales ya fueron reconocidos a través de la literatura como una de las necesidades formativas de los futuros profesionales. Además facilita que exista articulación entre las matemáticas, otros cursos y sus fenómenos particulares; el uso y análisis de modelos medió en dicha articulación, articulación que pudo verse de una manera más ostensible.

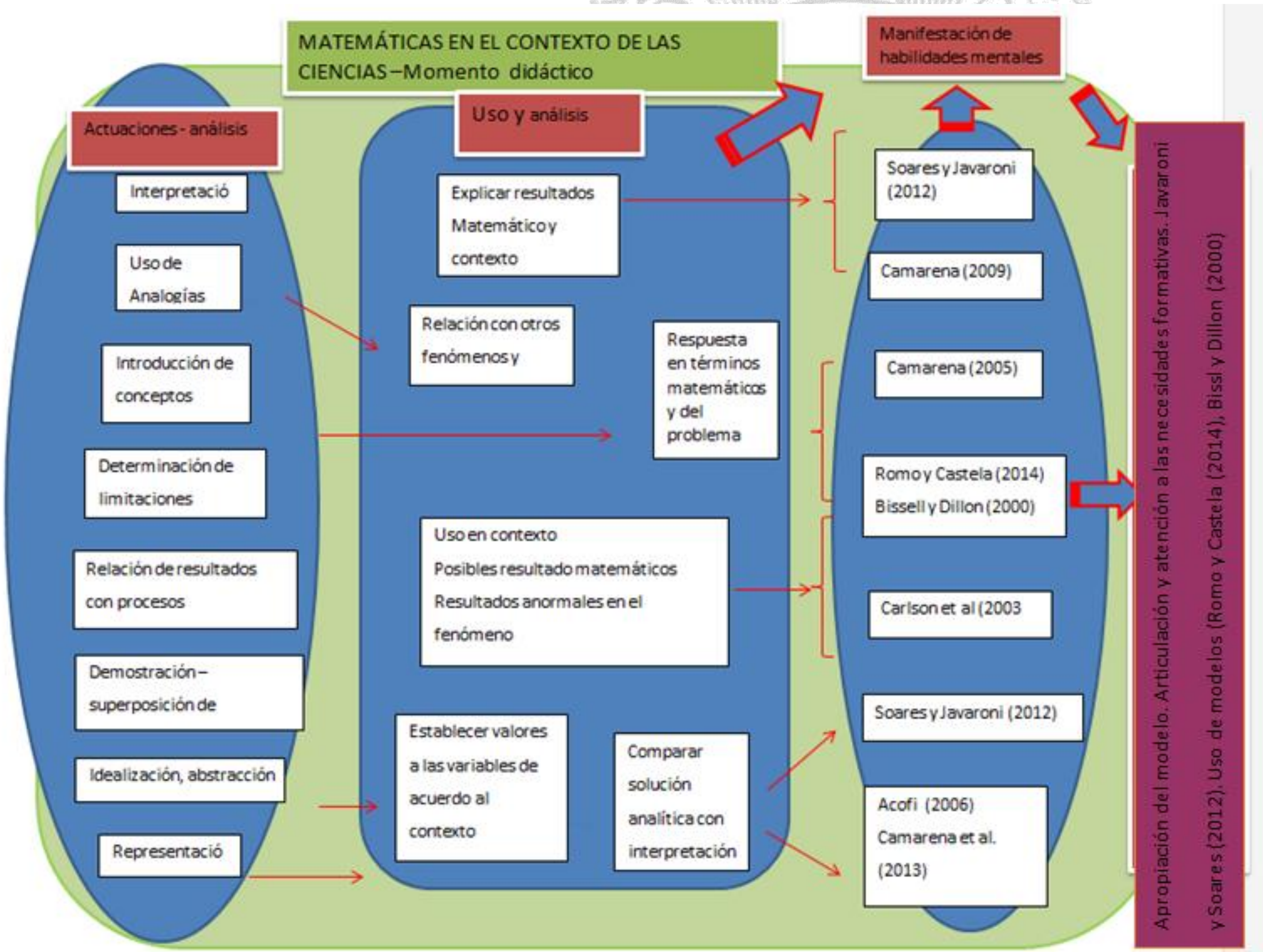


Ilustración 28. *Los referentes y la articulación a las necesidades de formación*

Camarena et al. (2013) mencionan que la teoría de las MCC tiene como una de las etapas más importantes la construcción de un modelo matemático, sin embargo esta investigación se apoyó en los trabajos de Bissell y Dillon (2000), Soares y Javarony (2012), Romo-Vázquez (2014), Romo-Vázquez y Castela (2010), Soares (2015) y Soares (2012) para argumentar que el uso y análisis de modelos se constituyó como una herramienta importante en varios sentidos: en primer lugar, diferentes autores como los mencionados en capítulos precedentes, consideran que para aprender modelación puede resultar útil el análisis de modelos clásicos, en segundo lugar las actividades que se movilizan durante el trabajo de uso y análisis propiciaron diferentes actuaciones por parte de los estudiantes (estas actuaciones tuvieron diferentes intenciones como por ejemplo; explicar, comparar, describir, cuestionar, interpretar) y todas estas actuaciones mediaron en la discusión de conceptos y facilitaron su articulación al fenómeno; y por último las actuaciones de los estudiantes pueden ser interpretadas para valorar la profundidad es su comprensión y la manera en que se manifiesta.

Las actividades realizadas permitieron la manifestación de diferentes habilidades como la identificación de regularidades, puntos de control y la idealización de los problemas.Esto se interpretó de acuerdo a los vínculos que hay entre la teoría y las aproximaciones metodológicas empleadas.

También es importante reconocer que durante esta investigación y el trabajo con las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, fue necesario referirse o tocar de alguna manera los diferentes momentos de la teoría y de esta manera atender a lo que sugiere Camarena et al. (2013) cuando consideran que en el trabajo de aula están inmersos todos los momentos de la teoría.

El uso y análisis de modelos como medio para alcanzar los objetivos de esta investigación

Se observó que la estrategia de *uso y análisis de modelos* permitió que se atiendan ciertas necesidades formativas de los estudiantes, en relación a las matemáticas que deben aprender y las que deben comunicar, también en relación a la comprensión de los fenómenos, a la comprensión de las variables y su manipulación para generar diferentes resultados.

La importancia de estudiar matemáticas de manera articulada se manifestó en la medida en que los estudiantes emplean diferentes características y capacidades para generar explicaciones e interpretaciones que permiten que se apropien de los modelos usados y analizados. De acuerdo con Romo-Vázquez y Castela (2014) y Bissell y Dillon (2000) es posible que esta apropiación permita que los estudiantes empleen los modelos para interpretar o explicar otros procesos solo realizándole ligeras adaptaciones. En esta investigación dicha apropiación de los modelos se evidenció cada que los estudiantes relacionaban los resultados del modelo o sus representaciones con procesos que ellos ya conocían, con el fin de generar explicaciones. Lo que permitió que comprendieran cuáles variables controlaban en los procesos que emplearon de manera análoga para realizar sus explicaciones, todo esto señala una especie de adaptación o apropiación del modelo para atender a otros procesos; y de manera paralela, de esas explicaciones surgieron aclaraciones respecto a conceptos que emergían y eran necesarios para la comprensión.

Cabe recalcar la importancia de los contextos propios del programa de formación, como uno de los protagonistas del desarrollo de las actividades, debido a que permitieron y mediaron para que los estudiantes usaran el modelo en términos de los fenómenos estudiados y en términos matemáticos, además los contextos estaban vinculados a algunos propósitos de la clase, también permitieron que los estudiantes observaran conceptos de interés para su profesión tanto desde una óptica de lo matemático como de otras ciencias, y permitió determinar significados matemáticos asociados al programa de formación. Además resulta importante el hecho de que durante el proceso de "uso y análisis" emergieron conceptos a nivel matemático, a nivel de la ingeniería/tecnología de alimentos y sus procesos, que estos conceptos pueden ser comprendidos o explicados por los estudiantes en términos de sus niveles académicos, y estas explicaciones serán tan profundas como la actividad o sus capacidades lo permitan.

Los estudiantes usaron los modelos para comprender los fenómenos, las representaciones para entender el modelo y con ayuda de sus comprensiones de los fenómenos a través de sus experiencias, pudieron generar representaciones, lo que indica que existió tránsito entre las representaciones del modelo y articulación con sus necesidades formativas. En otras palabras los estudiantes usaron los modelos para entender los procesos y los conceptos matemáticos vinculados, explicar los fenómenos, predecir posibles resultados y argumentar conclusiones. Sus representaciones se convirtieron en una fuente rica en conceptos e interrelaciones con el quehacer profesional.

Se señala el uso y análisis de modelos como una alternativa que se puede enmarcar en la fase didáctica de los procesos formativos; sin embargo, estos aspectos didácticos deben relacionarse con otros que atiendan las diferentes dimensiones del proceso formativo.

En relación con las posibilidades que la estrategia de *uso y análisis de modelos* puede proporcionar cabe mencionar algunas:

- El trabajo facilitó que los estudiantes fortalecieran sus comprensiones de otros procesos de transformación de alimentos enmarcados en los fenómenos estudiados, por ejemplo cada que los estudiantes emplearon las analogías.

- La integración de nuevos conceptos puede facilitar la comprensión y la interpretación de los estudiantes frente a una situación o proceso en particular. Como pudo observarse en los datos presentados, por ejemplo cuando se aclaró el concepto de densidad, para poder determinar entre dos sustancias cual podría ser mejor conductora del calor.

- La necesidad de generar explicaciones movilizó a los estudiantes a realizar diferentes acciones que se contemplan como expresión de habilidades o manifestación de competencias, por ejemplo, el uso de analogías, la idealización de problemas, la identificación de regularidades, el reconocimiento de la influencia de las variables en los resultados del fenómeno, etc.

- Los significados de algunos conceptos emergieron de manera articulada al modelo matemático y al fenómeno o proceso al cual están vinculados, por ejemplo cuando se trabajó el concepto de densidad, razón y de viscosidad. Soares (2015) sostiene que durante el análisis de modelos es posible discutir nuevos conceptos matemáticos que están relacionados con el fenómeno y además considera que el análisis no necesariamente sugiera la aplicación de conceptos ya aprendidos, en el caso de esta investigación se trató de conceptos matemáticos y no matemáticos.

- Las representaciones que los estudiantes construyeron durante el trabajo de *uso y análisis* mediaron en la introducción y la comprensión de diversos conceptos, también en la expresión de sus comprensiones y así generar un aporte en el desarrollo de las habilidades comunicativas del estudiante. Esta mediación puede observarse en la medida que los estudiantes se apoyaron en sus construcciones para explicar los fenómenos, también cuando emergieron conceptos que fueron explicados a lo largo del trabajo. Autores como Suárez y Cordero (2010) consideran el empleo de las gráficas para facilitar la comprensión del concepto de variación y Camarena et al. (2013) considera la importancia de los diferentes sistemas de representación para la aprehensión. Estos sistemas contemplan la representación gráfica, tabular y analítica, además sugiere la importancia de generar el tránsito entre estas. Situación que también estuvo presente cuando los estudiantes construyeron gráficas, las interpretaron y corroboraron sus conjeturas con la mediación de las ecuaciones.

Así mismo es importante señalar algunos de los desafíos encontrados en esta investigación para lograr la articulación entre las matemáticas y la Ingeniería/Tecnología de Alimentos mediante la implementación de la estrategia de *uso y análisis de modelos*:

- Reconocer los conocimientos previos de los estudiantes se mostró importante en el diseño de las actividades y la selección de los modelos, pero este factor se vio limitado por el tiempo disponible para llevar a cabo el trabajo de campo. Sin embargo, como se mencionó antes, esto puede ser importante, más no determinante para que las actividades se puedan realizar.

- La implementación de apoyos tecnológicos por parte de los estudiantes puede estar restringida por su conocimiento acerca de estas. Aunque esto no sugiere que los estudiantes no estén en posición de dominarlas con algo de práctica. Soares (2012) reconoce que la complejidad del software y las dificultades para su manejo, pueden generar diferentes confusiones, pero por otro lado sostiene que el software puede generar oportunidades para que los estudiantes hagan conjeturas y además este puede sugerir problemas para la reflexión. Por ejemplo el software facilitó la construcción de diferentes representaciones del modelo, las cuales permitieron que los estudiantes determinaran intervalos, variables a controlar y limitaciones en los procesos.

- Algunos modelos matemáticos pueden ser muy complejos para determinados niveles formativos, lo que dificulta su aplicación e interpretación, y de acuerdo con esto, su uso y análisis. Soares (2012) afirma que cuantos más factores sean considerados en un modelo, este podrá tener mayor fidelidad. Sin embargo así mismo su complejidad también será mayor. De este modo dicha complejidad debe tenerse en cuenta para generar posibles adaptaciones al modelo, de acuerdo con el nivel de los estudiantes. Esta situación que se observó al ser necesario discretizar las variables del modelo matemático empleado para los fenómenos de transferencia de calor con el fin presentarlas como razón de cambio y no como diferenciales. Así mismo Romo-Vázquez (2014) considera que "un modelo matemático es útil si y solamente si éste puede ser utilizado con éxito. Por lo tanto, es preferible un modelo menos preciso pero que pueda ser utilizado más fácilmente, a un modelo más sofisticado pero menos práctico" (p. 322). En el contexto de esta investigación se trabajó con modelos relativamente simples (en relación a los temas necesarios para su comprensión, es decir expresiones algebraicas, derivadas, integrales, etc.), en el caso de la deshidratación se observó algunas variables, pero es posible emplear el modelo solamente sustituyendo valores que se encuentren en los intervalos considerados durante el desarrollo del modelo e incluso otros valores, pero considerando que eso podría implicar la manipulación de otros parámetros; en el caso de la transferencia de calor, se trabajó en estado estacionario (procesos donde no se considera la dependencia del tiempo) y considerando el desplazamiento del calor en una sola dirección.

- El diseño curricular también se mostró como un desafío debido a que las asignaturas cuentan con unos contenidos específicos, lo que hace necesario adaptar las actividades de análisis de tal manera que se articulen con los contenidos mencionados y los ritmos de la clase, sin embargo como se mencionó antes, las actividades también permiten la discusión de conceptos nuevos sin que ello interfiera con el desarrollo de la misma.
- Los modelos observados en la revisión de la literatura muestran que al parecer existe un predominio de los modelos de carácter analítico; sin embargo, se rescató la influencia de los componentes geométricos asociados al modelo y su influencia en los resultados de los procesos y la posibilidad de llevar este tipo de actividades a la clase de geometría. .

Otras consideraciones

A modo de sugerencia se señala que durante el diseño de las actividades es recomendable contar con una planeación especial, en relación al tiempo disponible, el grado de dificultad del modelo y se reconoce la necesidad de evitar que los estudiantes lleguen a la fatiga por extensas horas de trabajos repetitivos.

Es posible que queden pendientes asuntos relacionados con una mayor comprensión de diferentes conceptos, tal vez, debido a que son de niveles superiores; también la necesidad de apropiación de las diferentes herramientas por parte de los estudiantes para generar sus representaciones y además queda abierta la posibilidad de implementar la estrategia de uso y análisis en el currículo de otras ingenierías y tecnologías.

Este trabajo puede constituirse como un apoyo que pueden emplear otros profesores durante el diseño y desarrollo de diversas actividades para el aula. Así, los experimentos de enseñanza diseñados en esta investigación constituyen un ejemplo de una manera de implementar diversas actividades en torno a temas particulares.

Es importante reconocer que esta investigación deja abiertas algunas preguntas que pueden dar paso a nuevas investigaciones, por ejemplo:

- ¿Cuál es el papel de los contextos durante el análisis de los modelos?
- ¿Cuál es el papel del software en el estudio de modelos matemáticos empleados por los profesionales en alimentos?

6. Bibliografía

Angulo, O. (2013). Sobre la modelización de la función lineal desde proyectos productivos agroinductriales. En *Septimo congreso Iberoamericano de edicación Matemática* (pp. 7838–7849). Montevideo, Uruguay.

Barbosa, J. (2001). *Modelagem na educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In Reunião anual da Anped (pp. 1–30). Caxmbu, Rio de Janeiro.

Bassanezi, R., & Biembengut, M. S. (1997). Modelación Matemática: una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 32, 13 – 25.

Berges, M. (2009). La modelación como método de la investigación educativa. *Revista Varela, 24*. Recuperado de http://www.revistavarela.rimed.cu/index.php/numeros-de-la-revista/50-revista-24-actividad-cientifica-y-resultados

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), 105–125.

Bissell, C; Dillon, C. (2000). Telling Tales : Models , Meanings. *For the Learning of Mathematics*, *20* (3), 3–11.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education: An introducition to Theories and Metods*. (B. Arnis, E. Reilly, & A. Joseph, Eds.) (5th ed.). Boston.

Borba, M. C. (2004). A pesquisa qualitativa em educação matemática. Publicado em CD nos Anais da 27a reunião anual da Anped. Caxambu,MG, Brasil.

Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I. A., Fraga-Guerra, E., Para-García, J., & Arias-de Tapia, R, . (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingenieria Mecánica*, *14* (2), 129–139.

Camarena, G. P. (2005). La matemática en el contexto de las ciencias y las competencias profesionales para la globalización. In *Pubicación electrónica "textos en línea."* México. Recuperado de www.cese.edu.mx/textosenlinea.html

Camarena, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovacion Educativa*, *9*(46), 15–25.

Camarena, G. P. (2012). La matemática en el contexto de las ciencias. *Cuadernos de Investigación Y Formación En Educación Matemática*, *10* (7), 183–193.

Camarena, G. P. (2013). A treinta años de la teoría educativa "La matemática en el Contexto de las Ciencias." *Innovación Educativa*, *13(62)*, 17–44.

Camarena, G. P., & Urista, C. M. (2007). Las representaciones en el proceso de modelación de la matemática en contexto Caso: serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. *Innovacion Educativa, 7 (41)*, 1 – 13.

Camarena, G. P., Trejo, E., & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero : la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11(Número especial)*, 397–424.

Cárdenas, C., Giannuzzi, L., Noia, M., & Zaritzky, N. (2001). El modelado matemático: una herramienta útil para la industria alimenticia. *Ciencia Veterinaria. Facultad de Ciencias Veterinarias. UNPLPam*, 22–28.

Carlson, M. A. C., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. Revista *EMA*, *8* (2), 121–156.

Codex Alimentarius. *Código de prácticas para la elaboración u manipulación de los alimentos congelados rapidamenten* (2008). OMS. Recuperado de www.codexalimentarius.org/input/download/standards/.../CXP_008s.pdf

Craig, T. S. (2013). Conceptions of mathematics and student identity: implications for engineering education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44 (7), 1020–1029. http://doi.org/10.1080/0020739X.2013.823521

Cruz, H. J., & Medina, C. Y. (2013). Funciones en contexto . Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. *Revista S&T*, 11(26), 59–80.

De Guzmán, M., & Gil, Pérez, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias yla Matemática. Tendencias e innovaciones*. (E. Popular, Ed.) (joaquín Asenjo y öscar Macías).

Della Rocca, P. (2010). Dr . Rodolfo H . Mascheroni Secado de alimentos por métodos combinados : Deshidratación osmótica y secado por microondas y aire caliente. (Tesis de

Maestria). Universidad tecnológica Nacional. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Departamento de Alimentos, (2009). Programa del curso de Geometria Euclidiana. Facultad de Química Farmacética. Universidad de antioquia.

Galeano, (2004). *Estrategias de investigacion social cualitativa, el giro de la mirada*. Medellin: La Carreta editores E.U.

Geankoplis, C. J. (1998). *Procesos de transporte y operaciones unitarias*. México: (CECSA, Ed.)..

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. En *CERME 8* (Vol. 8, pp. 1–15). Turquía.

Hernádez Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Batista Lucio, M. del P. (2010). *Metodologia de la investigación*. (Quinta Ed). México D. F. Mc Graw Hill Education

Hernandez, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. del P. (2014). *Metodología De La Investigación*. (Sexta Ed.)Master CEU . Mc Graw Hill Education

Javaroni, S., & Soares, da S. D. (2012). Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, 14(2), 260–275.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, *38(3),* 302–310. http://doi.org/10.1007/BF02652813

King, C. J. (2012). Restructuring Engineering Education: Why, How And When? *Journal of Engineering Education*, *101(1)*, 1–5. http://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00038.x

Kistemann Jr, M. (2012). Reseña de “Modelagem em Educação Matemática” de Meyer, J. F. C. A.; Caldeira, A. D.; MalheirosS A. P. S. *Bolema, 26(42),* 743– 746.

Martínez, G. G. (2003). Útimas tendencias en el estudio de la ingenieria de laimentos en el mundo: Un acercamiento a la tercera generación. En *Primer Congreso regional de desarrollo agroidustrial* (pp. 1–7). Barrancabermeja, Colombia.

MEN. (2014.). Colombia aprende. La red del conocimiento-areas y nucleos del conocimeintos. Ingeniería agroindustrial, alimentos y afines. Recuperado 4 de abril de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/estudiantesuperior/1608/article-189730.html.

Moreno, M., María, M., Rodríguez, S. E., & Sepúlveda, V. J. (2012). Evaluación de las propiedades físicas y texturales del buñuelo. *Lasallista de Investigación, 9(2),* 112– 121.

Muro, C. (2000). *Significacion de la serie de Fourier ene el contexto del proceso de transferencia de masa*. (Tesis de Maestria). Universidad Autónoma del estado de Hidalgo. Pachuca, Hidalgo, México.

Narro, E. (1996). Aplicación de algunos modelos matemáticos a la toma de decisiones. *Política Y Cultura, (6),* 183–198.

Nullvalue, (1997). Diferencias entre los tecnólogos e ingenieros. En concepto de la Asociación Colombiana de Ingenieros de Alimentos, los tecnólogos en alimentos constituyen la principal competencia de estos profesionales. El Tiempo. Recuperado el 15 de septiembre de 2015 de http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-540232

Ochoa-Martínez. (2005). Modelos Matemáticos de transferencia de masa en deshidratación osmótica, 4, 330–342. *Ciencia Y Tecnología Alimentaria, 4(005),* 330–342.

Ortega, A., Torres, A., Santos, N., & López, R. (2004). La modelación Matemática: Su importancia en la formación del ingeniero agrónomo. MASEDUCATIVA, 5. Recuperado el 20 de agosto de 2014 de http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=7

Parra, J. E. (2003). Competencias profesionales del ingeniero agronomo. *Agronomia Colombiana, 21(1 - 2)*, 7–16.

Quarteroni, A. (2009). Mathematical Models in Science and Engineering. *Notice of the AMS, 56(1)*, 10–19.

Recuero López, M; (2002). Formación de ingenieros en España. Revista Facultad de Ingeniería, (10) 45-57. Recuperado el 20 de octubre de 2014 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=11401005

Rendón-mesa, P. A., & Edsteba, Duarte, P. V. (2013). La modelación matemática en ingeniería de diseño. En *I Congreso de Educación Matemática de América central y El Caribe* (pp. 942–949). Republica Dominicana.

Romo-Vázquez, A., & Castela, C. (2010). Mathematics in the training of engineers: an approach from two different perspectives. A. Araujo, F. Antonio, A. Assis, & J. F. Rodrigues (Eds.), *EIMI 2010 Conference, Educational Interfaces between Mathematics and Industry* (pp. 533–540). Portugal. Recuperado de http://www.cim.pt/files/proceedings_eimi_2010.pdf

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Eucación Matemática*, 314–338.

Soares, da Silva, D. (2012). *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia : qual o papel do software ?* (Tesis de Doctorado). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Soares, da Silva, D. (2015). International Perpectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural , Social and Cognitive Influences.* Switzerland: (G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut, Eds.) (Springer I)..

Suárez, T. L., & Cordero, osorio F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Relime*, *13(4-II)*, 319, 333.

Sunthonkanokpong, W. (2011, January). Future Global Visions of Engineering Education. *Procedia Engineering*, 8, 160–164. http://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.03.

Villa-ochoa, J. A., & Ruiz, V. H. (2009). Modelación en educación matemática : una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, (27)*, 1–21.

Villa-ochoa, J. A. (2011*). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teória de Pirie y Kieren*. (Tesis de Doctorado). Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Welti-Chanes, J., Gómez -Palomares, O., Vergara-Balderas, F., & Marís-Alzamora, S. (2005). Aplicaciones de ingeniería y fenómenos de transporte al estudio de la transferencia convectiva de calor en alimentos. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 4(1), 89 – 106. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=62040108

Yin, R. (2009). *Investigación sobre Estudios de Casos. Diseño y Métodos. Applied Social Research Methods Series* (Sage Publi, Vol. 5). Thounsand Oaks, California. Recuperado de http://www.polipub.org/documentos/YIN ROBERT .pdf

Anexo 1. Experimento de enseñanza No 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE CIENCIAS FARMACÉUTICAS Y ALIMENTARIAS

TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS

Este experimento tiene como propósito la realización de algunas tareas por parte de los estudiantes antes del primer encuentro y durante el curso de Geometría Euclidiana, con el fin de aportar un ejemplo de modelo matemático que se usa en procesos alimentarios, y que manifiesta la importancia de la geometría y su convergencia con las matemáticas operativas y otras ciencias. Se desarrollará en tres momentos, el primero de ellos se desarrollará por cada estudiante previo a la sesión presencial. El segundo momento, se desarrollará el día 23 de mayo de 2015, que corresponde a la primera sesión presencial del curso, y el tercero el 6 de mayo de 2015. Para el día 23 de mayo cada estudiante debe realizar la primera parte del trabajo. Para el tercer momento se dará instrucciones oportunamente. A continuación se presenta la guía de trabajo para el primer momento.

Experimento de enseñanza No 1

Actividades previas.

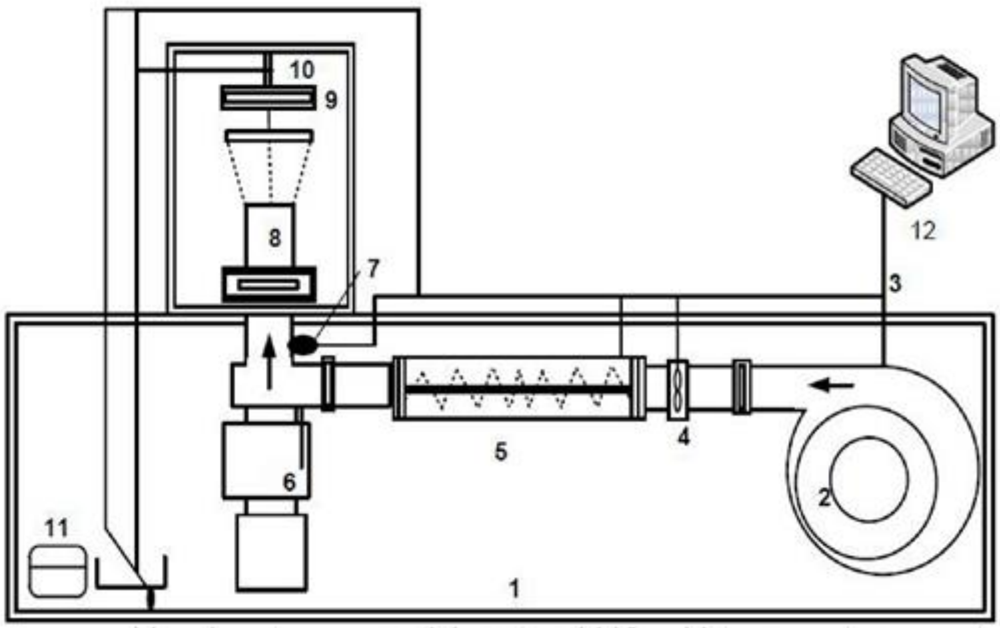
En la primera parte de esta guía se presentará información acerca del proceso de secado de alimentos y posiblemente encontrarás algunas preguntas. Posteriormente se plantearán otras preguntas que deberás responder, para esto podrás emplear algunas bibliografías sugeridas, los gráficos, y demás información que encuentres en internet.

Secado de alimentos

El fenómeno de deshidratación de un producto alimenticio es uno de los procesos que ocupan a los ingenieros de alimentos. Existen diferentes modos de hacer deshidratación, entre ellos: deshidratación mediante túnel de aire caliente, secado spry dryer, liofilización, deshidratación osmótica. En cada uno de estos métodos de deshidratación se puede usar expresiones matemáticas que describen relaciones entre las variables que intervienen.

La técnica de secado es un antiguo método usado para conservar alimentos, es común el consumo de productos deshidratados como el café, uvas pasas, cereales, frutas deshidratadas; se trata de la extracción de la humedad del alimento con el fin de prevenir el crecimiento de microorganismos, además de cumplir con otras ventajas como la disminución de la masa y el volumen, que indirectamente apuntan a la disminución en costos de almacenamiento y distribución.

Secado mediante flujo radial



Gráfica tomada de: Da Rocha et al (2012)

Figura 1: Esquema del secador. 1. Soporte; 2. Ventilador; 3. Control del flujo de aire; 4: Anemómetros; 5. Resistencias; 6. Válvula neumática; 7. Sensor de temperatura; 8. Cámara de secado; 9. Balanza; 10. Elevador; 11. Compresor; 12. Computador para controlar proceso y almacenar datos

Secado por medio de flujo radial

El proceso consiste básicamente en retirar el agua contenida en un producto mediante aire caliente, presentándose simultáneamente dos fenómenos:

1. Transferencia de calor del medio gaseoso circundante (del aire), hacia el interior poroso del producto.
2. Transferencia de humedad del interior del producto hacia el aire que circula.

Los profesionales del área de los alimentos se ocupan del estudio de estos fenómenos, mediante el uso de datos y modelos matemáticos. Estos fenómenos son estudiados en los cursos de Operaciones Unitarias del programa de ingeniería de alimentos.

El proceso se lleva a cabo cuando la humedad se trasfiere desde el interior del producto hacia la superficie y después como vapor desde la superficie al aire que circula.

Algunas consideraciones sobre el proceso de secado

A medida que aumenta la temperatura, el contenido de humedad disminuye, y el porcentaje de sólidos en el producto incrementa, sin embargo, en general, el contenido de humedad no depende de la temperatura (en temperaturas que están entre 12 y 35 ºC), inicialmente la perdida de humedad se da a velocidad constante y después disminuye, aunque la rapidez de perdida de humedad depende también de las características del producto (composición, contenido de humedad, tamaño de partícula), de la superficie del producto expuesta, la diferencia entre las temperaturas del aire la superficie del producto que se seca, la velocidad del aire que circula y que tan seco se encuentre este.

Algunos factores que tienen un importante papel en el proceso

La superficie

El producto se debe cortar en trozos pequeños que se esparcen en bandejas, mientras mayor sea el área más efectivo es el proceso de extracción de humedad y el de transferencia de calor.

La temperatura

Mientras mayor sea la diferencia de temperatura entre el producto y el aire, más rápido será el proceso de trasferencia de humedad.

Velocidad del aire

Además de usarse aire caliente en busca de mayor extracción de humedad, también se considera que al estar en movimiento el proceso es más efectivo.

- De acuerdo a la literatura, ¿Cuál es el valor máximo de humedad que puede ser extraído mediante este tipo de secado?

Para responder a esta pregunta, se puede remitir a la literatura existente, a continuación se relaciona alguno textos.

Da Rocha et al (2012). Cinética del secado de tomillo. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. v.16, n.6, p.675–683.

Durango, Néstor (2004). Modelo matemático para secador de alimentos de flujo radial. Ingeniería Y Desarrollo, 15, 1–8.

Cárdenas, C. (2001). Modelado matemático: una herramienta útil para la industria alimenticia, 22–28.

http://www.sormac.es/es/producto/T%C3%BAnel-de-secado-por-aire-LDT-40

Por ejemplo el trabajo de Durango, Bula y Donado (2004) menciona que en Alimentos se ha indagado por este fenómeno y ha proporcionado una serie de relaciones que pueden expresarse matemáticamente. En este texto se presenta una de estas relaciones.

El papel de las matemáticas en la comprensión del fenómeno

Grafique cuando considere necesario apoyar sus respuestas en un gráfico.

El siguiente modelo se usa para encontrar el porcentaje de humedad en yuca que se somete a un proceso de deshidratación por medio de flujo de aire.

$$\%H = 8.0826 - 0.006603\,(C) + 41.2561\,(A/V) + 2.8028\,(V) + 0.2792\,(T)$$

En el modelo, los símbolos obedecen a las siguientes variables:

C: Cantidad de yuca (gramos)

A/V: Relación superficie a volumen (mm-1)

V: Velocidad del ventilador (rpm)

T: Temperatura de control del aire de recirculación (ºC)

Una manera de graficar en el plano cartesiano una expresión como esta, se puede observar en un video al cual pueden acceder a través de este link

Primeros acercamientos al modelo:

- Describa cómo piensa que se lleva a cabo un proceso de secado, teniendo en cuenta los diversos factores que inciden para que el proceso pueda darse satisfactoriamente.

- Al observar el modelo, ¿Cómo piensa que es la relación entre las variables y los parámetros del modelo?

- Analice la relación A/V y describa en qué manera influye en el porcentaje de humedad (H%). (Observe el video)

El modelo presentado fue creado teniendo en cuenta diversos factores, los cuales son presentados en la siguiente tabla:

Niveles escogidos para cada variable del proceso

Nivel	Cantidad de yuca (gr) A	Relación Superficie a volumen B	Velocidad del flujo de aire que recircula (m/s) C	Temperatura del aire que recircula (ºC) D
Alto	2000	$(0.4731 - 0.4743)mm^{-1}$ (Espesor: 0,5 cm)	3	80
Bajo	1000	$(0.1734 - 0.1743)mm^{-1}$ (Espesor: 2 cm)	1.5	60

Tabla tomada de Durango (2004)

- ¿Qué pasaría si el modelo se empleara para controlar el proceso de secado para una cantidad de yuca de 5000 gramos?

Las siguientes gráficas representan el procedimiento de secado de yuca.

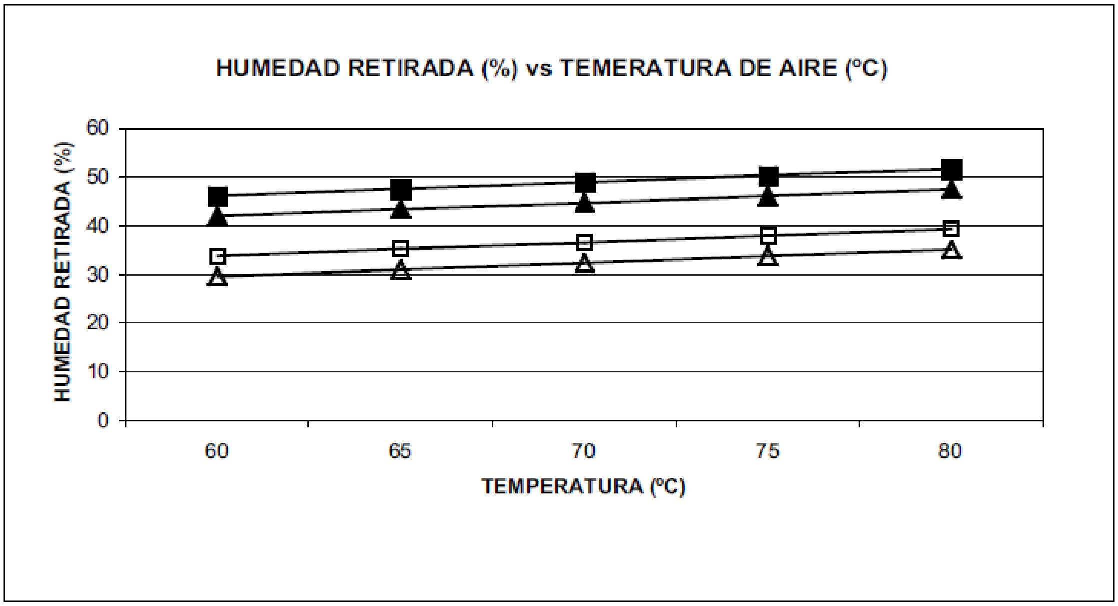


Figura 2. Relación entre humedad retirada y temperatura de control del aire de recirculación para un kilogramo de yuca, dos niveles de velocidad y de relación superficie a volumen.

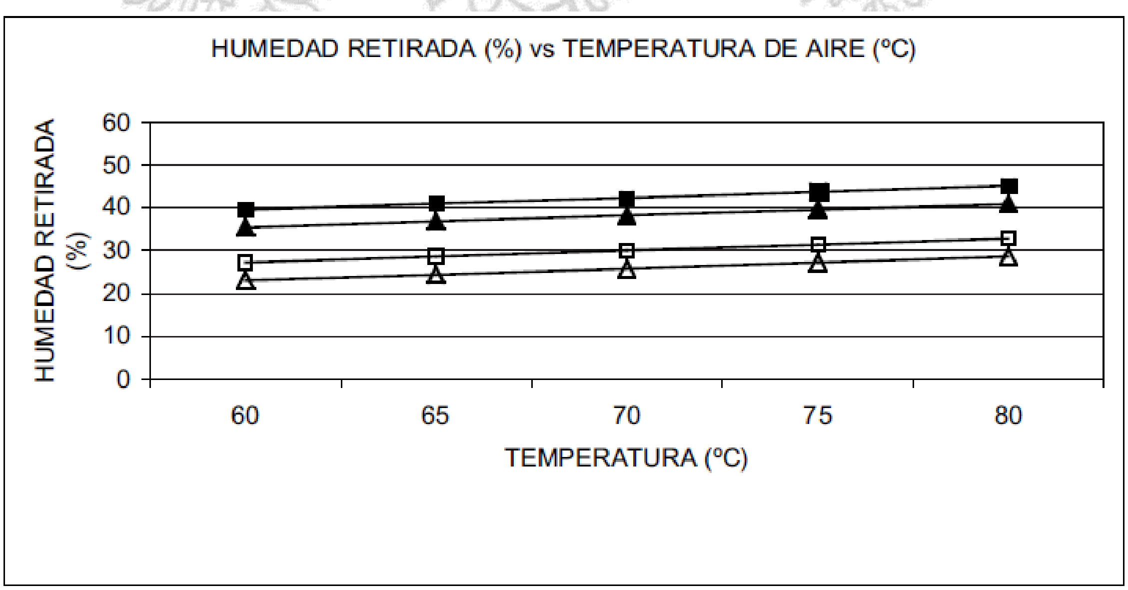


Figura 3. Relación entre humedad retirada y temperatura de control del aire de recirculación para dos kilogramos de yuca, dos niveles de velocidad y de relación superficie a volumen.

Graficas tomadas de: Durango (2004)

Observe y compare las siguientes graficas

- ¿Qué conclusiones puede sacar de acuerdo a las gráficas?
- Describa el tipo de relación (Directa o inversa) que se presenta entre las variables observadas en la gráfica correspondiente al proceso.
- Analice el modelo anterior y mencione si se puede aplicar para otro tipo de producto ¿Qué cambios requeriría el modelo si se desea conocer el porcentaje de humedad para productos como manzanas?

En la sesión presencial

Para resolver cree gráficos, realice cálculos o argumente, según considere necesario.

- En cierto proceso de secado de un producto vegetal se emplearon temperaturas alrededor de los 70ºC en un corto periodo de tiempo, con velocidad del aire de 5 m/s, y al final del proceso se esperaba una pérdida de humedad alrededor del 50%, sin embargo el resultado obtenido apenas alcanzaba el 20%, ¿considera que existió alguna irregularidad en el proceso?

- De acuerdo al modelo matemático ¿cuál es la mínima cantidad de humedad a la que se puede llegar?

- En un proceso de deshidratación llevado a cabo en un laboratorio, se empleó 1300 g de yuca, la cual se cortó en trozos con espesores superiores a los tres centímetros, también se empleó velocidades entre 1,5 y 2 m/s, y temperatura entre 70 y 80ºC, al momento de verificar el porcentaje de humedad retirado, éste no superó el 15% transcurrido el periodo de tiempo adecuado ¿Cuál o cuáles son los factores que usted considera responsables?

- ¿Es posible que el resultado del experimento anterior esté relacionado con el espesor de la yuca?, ¿Cómo piensa que debe ser en valor de superficie a volumen?

- Elabore el gráfico de la función, considere la cantidad de yuca como x en la función y las demás como parámetros que se pueden elaborar con el deslizador.

- ¿Qué pasa con los resultados?, si

  a. Si se emplea una cantidad de yuca superior a 6000 gramos

  b. Si se tiene espesores del producto inferiores a 4 mm

  c. Si mueve el deslizador de T hacia la izquierda

d. Si mueve el deslizador de A/V hacia la derecha e izquierda

- ¿Cómo cree que se calculó A/V?
- ¿Es posible utilizar este modelo matemático en condiciones diferentes a las presentadas en la tabla?
- ¿Son coherentes los resultados cuando se emplean otras condiciones diferentes a las establecidas en los rangos de la tabla?
- Mediante el modelo matemático grafique en GeoGebra la variación de la humedad retirada vs la temperatura, la cantidad de yuca y la relación superficie volumen.

Sesión de cierre – reflexiones

- ¿Cuáles son las ideas matemáticas que usted cree que están presentes en el modelos estudiado?
- ¿Cuál o cuáles usos considera que tiene el modelo matemático estudiado?
- ¿En qué situaciones no puede ser empleado el modelo matemático?
- Como estudiante del área de los alimentos, ¿Qué cree que puede hacer con el modelo matemático?
- Con base en lo experimentado en esta sesión, presente algunas consideraciones sobre los siguientes fenómenos.

- En algunos casos el producto secado pierde calidad dado que se pueden generar costras. Si ese fuera el caso, comente qué pudo haber ocurrido para que se llegara a este efecto.

- Si al finalizar el tiempo determinado para el proceso de secado, la yuca se observa con aspecto de cocinada, ¿Cuáles factores considera responsables del resultado?

- Si se tiene una producción de yuca muy delgada, cómo hacer para que el proceso de secado sea llevado a cabo de manera satisfactoria.

- Si al hacer un corte por la mitad de un trozo de yuca después del proceso de secado en el tiempo determinado, se observa húmeda en el centro, qué pudo haber ocurrido y cuales factores considera responsables de esta situación.

- ¿Si en lote de yuca se midió las relaciones A/V, y su resultado fue 124, como piensa que será el resultado del proceso? Argumente

Anexo 2. Experimentos de enseñanza No 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE CIENCIAS FARMACÉUTICAS Y ALIMENTARIAS

TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS

Fenómeno de transferencia de calor

Los procesos de calentamiento y enfriamiento son comunes en la industria alimentaria, se reconoce que existen tres mecanismos de transferencia de calor, conducción, convección, radiación; cada uno con unas características de interés, por ejemplo la conducción se presenta en sólidos y la convección se presenta fluidos. Si bien es posible realizar un análisis de estos mecanismos por separado, es importante comprender que en los procesos coexisten dos o tres mecanismos. Además estos mecanismos de transferencia pueden presentarse de manera diferente, debido a las propiedades de los productos que pasan por un proceso de calentamiento o enfriamiento. Para efectos didácticos se trabajará con el modelos de transferencia por conducción y se obviará algunas consideraciones referentes al productos que sufre el calentamiento..

Primer momento

¿Cuáles son variables que usted considera intervienen en un proceso de transferencia de calor?, ¿Cómo cree que se relacionan esas variables?, mencione algunos procesos donde se presenta transferencia de calor, ¿Cuál o cuáles condiciones considera que deben existir para que se presente transferencia de calor?, ¿Cuál o cuáles características o propiedades de producto cree que son responsables de la facilidad o dificultad para que un producto se enfríe o caliente?, grafique el comportamiento que supone tendría la temperatura en un proceso de enfriamiento (refrigeración) que dura 24 horas.

Segundo momento. Un experimento

El siguiente experimento fue llevado a cabo en un laboratorio y su objetivo fue la determinación de la difusividad y la conductividad térmica en dos muestras de crema de leche.

Materiales y métodos

Para la experimentación fueron empleadas dos muestras de crema de leche de una marca conocida, una con el 17% de grasa y otra con el 25%. Para la determinación de la conductividad y la difusividad térmica fue realizado un montaje (fig. 1) en un laboratorio del departamento de ingeniería y tecnología de alimentos de la universidad Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto.

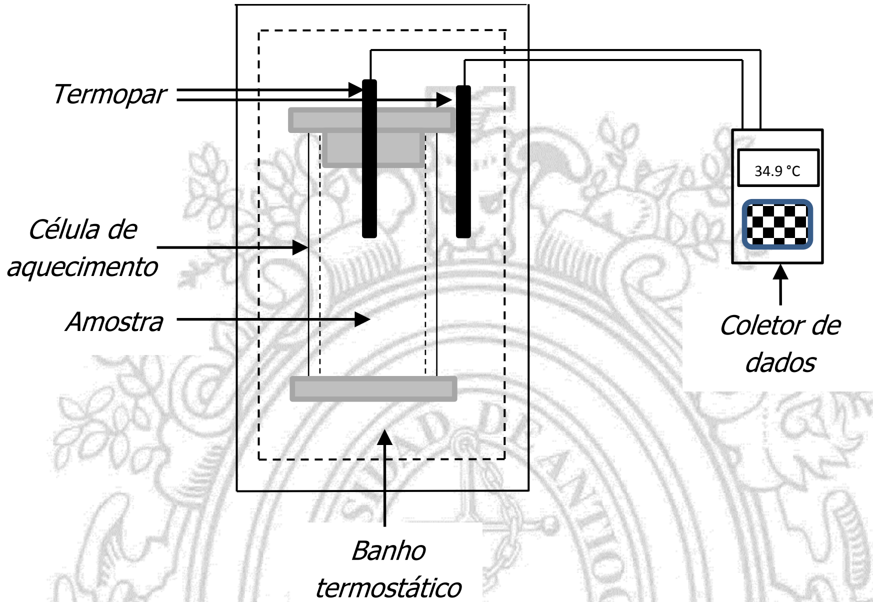


Figura 1. Montaje experimental de la célula de conductividad térmica

El montaje consiste en una célula cilíndrica de cobre, cubierta de cromo en el exterior, de dimensiones: Φ externo = 3,8 cm, Φ interno = 3.68 cm y una altura h = 17 cm; en uno de sus extremos tiene una tapa fija de plástico y en el otro tiene una desmontable que posiciona en el centro un termopar en posición radial al cilindro. Esta célula es puesta en un baño termostático, donde será puesto un segundo termopar para medir la temperatura externa del sistema. Todos los datos son observados a través de un equipo computarizado.

Determinación de la conductividad y la difusividad térmica: para la determinación de la conductividad y la difusividad térmica se empleó el esquema de la figura 1. Para esto se llevó cada muestra al interior de la célula y refrigerada hasta 20ºC. Una vez estabilizada la temperatura la célula se sumergió en un baño termostático (previamente regulado a una temperatura inicial de 20ºC y se puso allí una resistencia a 60ºC. Después fueron tomados datos de temperatura cada 30 segundos en el interior y en el exterior. El experimento se dio por terminado cuando la temperatura de la célula igualo la del baño.

A continuación se presentan los datos obtenido en el experimento:

Tabla 1: datos experimentales obtenidos con crema de leche con 25% de grasa

Crema leche 25% grasa		
t (s)	***T**externa (°C)*	***T** interna (°C)*
0	20,7	23,5
30	20,9	23,3
60	21,9	23,2
90	22,2	23,0
120	22,5	22,9
150	23,3	22,9
180	24,0	22,8
210	24,4	22,8
240	24,9	22,7
270	25,7	22,8

300	26,0	22,8
330	26,5	22,9
360	26,9	23,0
390	27,6	23,1
420	27,9	23,3
450	28,6	23,5
480	29,3	23,7
510	30,1	23,9
540	30,6	24,3
570	31,8	24,5
600	32,1	24,8
630	32,4	25,1
660	33,2	25,4
690	33,7	25,8
720	34,2	26,1
750	34,8	26,5
780	35,6	26,7

810	36,2	27,2
840	37,1	27,6
870	37,5	28,0
900	38,3	28,4
930	38,9	28,9
960	39,7	29,3
990	40,1	29,8
1020	40,7	30,2
1050	41,3	30,7
1080	41,8	31,2
1110	42,4	31,7
1140	43,0	32,2
1170	43,8	32,8
1200	44,3	33,3
1230	45,0	33,9
1260	45,5	34,4
1290	46,3	35,0

1320	46,8	35,5
1350	47,1	36,0
1380	47,7	36,5
1410	48,3	37,1
1440	49,1	37,7
1470	49,6	38,3
1500	50,5	38,7
1530	50,8	39,5
1560	51,5	40,0
1590	52,0	40,6
1620	52,9	41,1
1650	53,4	41,7
1680	53,7	42,1
1710	54,1	42,8
1740	55,1	43,3
1770	55,6	44,0
1800	56,7	44,4

1830	57,0	45,2
1860	57,6	45,7
1890	58,0	46,2
1920	58,6	46,7
1950	59,1	47,3
1980	59,8	47,8
2010	60,0	48,5
2040	60,1	49,0
2070	60,1	49,5
2100	60,1	49,9
2130	60,0	50,5
2160	60,0	51,1
2190	60,1	51,5
2220	59,9	52,0
2250	60,0	52,5
2280	60,0	52,9
2310	60,0	53,2

2340	60,0	53,5
2370	59,9	53,9
2400	60,1	54,3
2430	60,1	54,6
2460	60,1	55,0
2490	60,1	55,1
2520	60,1	55,5
2550	60,1	55,7
2580	60,0	56,2
2610	60,0	56,5
2640	60,1	56,6
2670	60,1	57,0
2700	60,2	57,1
2730	60,2	57,3
2760	60,1	57,4
2790	60,0	57,5
2820	60,0	57,6

2850	60,2	57,8
2880	60,2	58,8
2910	60,1	58,0
2940	60,1	58,1
2970	59,9	58,2
3000	60,0	58,2
3030	60,0	58,3
3060	60,2	58,5
3090	60,2	58,5
3120	60,2	58,6
3150	60,2	58,6
3180	60,2	58,7
3210	60,2	58,7
3240	60,2	58,8
3270	60,2	58,8
3300	60,2	58,9
3330	60,2	59,0

3360	60,0	59,0
3390	59,9	59,1
3420	60,1	59,1
3450	60,2	59,2
3480	60,2	59,2
3510	60,2	59,2
3540	60,2	59,2
3570	60,2	59,2
3600	60,2	59,2
3630	59,9	59,3
3660	60,1	59,3
3690	60,1	59,3
3720	60,0	59,3
3750	60,0	59,3
3780	60,0	59,3
3810	60,0	59,4
3840	60,0	59,4

3870	60,0	59,4
3900	60,0	59,5
3930	60,0	59,5
3960	60,0	59,5
3990	60,0	59,6
4020	60,0	59,6
4050	60,0	59,7
4080	60,0	59,7
4110	60,0	59,8
4140	60,0	59,8
4170	60,0	59,9
4200	60,0	59,9
4230	60,0	60,0

Tabla 2: datos experimentarles obtenido con crema d leche con 17% de grasa

Creme leite 17% grasa

t (s)	***$T_{externa}$ (°C)***	***$T_{interna}$ (°C)***
0	20,0	23,5
30	20,3	23,2
60	20,6	23,1
90	20,7	22,9
120	21,3	22,8
150	21,9	22,6
180	22,6	22,5
210	22,8	22,4
240	23,4	22,4
270	23,7	22,4
300	24,7	22,4
330	25,2	22,5
360	25,5	22,6
390	26,4	22,7
420	26,8	22,8

450	27,3	23,0
480	28,0	23,2
510	28,5	23,4
540	29,1	23,6
570	29,5	23,8
600	30,5	24,1
630	31,2	24,3
660	31,6	24,6
690	31,8	25,0
720	32,4	25,3
750	32,9	25,7
780	33,5	26,0
810	34,1	26,4
840	34,8	26,8
870	35,6	27,3
900	36,5	27,7
930	36,8	28,1

960	37,4	28,5
990	38,0	29,0
1020	38,7	29,5
1050	39,3	29,9
1080	40,0	30,4
1110	40,2	30,9
1140	40,9	31,3
1170	41,3	31,9
1200	41,9	32,3
1230	42,4	32,8
1260	43,0	33,2
1290	43,5	33,8
1320	44,2	34,2
1350	44,7	34,8
1380	45,2	35,2
1410	46,0	35,9
1440	46,6	36,3

1470	47,1	36,8
1500	47,8	37,3
1530	48,1	37,8
1560	48,7	38,2
1590	49,2	38,8
1620	49,8	39,3
1650	50,3	39,9
1680	50,6	40,3
1710	51,2	40,8
1740	52,0	41,4
1770	52,2	41,8
1800	52,9	42,3
1830	53,2	43,0
1860	53,8	43,4
1890	54,1	44,1
1920	54,8	44,4
1950	55,3	45,1

1980	55,9	45,5
2010	56,3	46,1
2040	57,2	46,7
2070	57,4	47,2
2100	58,0	47,8
2130	58,4	48,4
2160	58,3	48,9
2190	58,5	49,5
2220	58,9	50,0
2250	59,2	50,5
2280	60,0	51,0
2310	60,2	51,4
2340	60,2	51,9
2370	60,3	52,5
2400	60,1	52,8
2430	60,0	53,3
2460	60,0	53,7

2490	60,2	54,1
2520	60,1	54,7
2550	60,1	55,0
2580	60,3	55,3
2610	60,1	55,7
2640	60,0	56,0
2670	60,0	56,3
2700	60,1	56,6
2730	60,1	56,8
2760	60,0	57,8
2790	60,0	57,2
2820	60,0	57,4
2850	60,0	57,6
2880	60,0	57,8
2910	60,1	58,8
2940	60,1	58,1
2970	59,9	58,2

3000	60,1	58,3
3030	60,2	58,4
3060	60,1	58,5
3090	60,8	58,6
3120	60,9	58,7
3150	60,2	58,8
3180	60,2	58,8
3210	60,0	58,9
3240	60,0	59,0
3270	60,0	59,1
3300	60,0	59,1
3330	60,0	59,2
3360	60,0	59,2
3390	60,0	59,2
3420	60,1	59,3
3450	60,2	59,3
3480	60,2	59,4

3510	60,2	59,4
3540	60,2	59,5
3570	60,3	59,6
3600	60,3	59,7
3630	60,3	59,7
3660	60,3	59,8
3690	60,3	59,8
3720	60,3	59,8
3750	60,2	59,9
3780	60,2	59,9
3810	60,2	59,9
3840	60,1	59,9
3870	60,1	60,0

- De acuerdo a los datos describa lo que como cree que ocurre el fenómeno
- ¿Cómo cree que es la relación entre las variables que intervienen?

Algunas de las variables que interviene en el proceso de transferencia de calor son la difusividad y la conductividad térmica. La difusividad puede ser calculada con la siguiente ecuación

$$\alpha = \frac{A \cdot R^2}{4 \cdot \left(T_{ext} - T_{\text{int}}\right)}$$

Dónde:

α : es la difusividad térmica (m2 s-1); A: tasa de subida de temperatura del baño (ºC S-1); R: radio de baño (m); Text-Tint: diferencia entre la temperatura externa y la temperatura interna de la célula (ºC).

El valor de A fue asumido como constante durante la experimentación fue de 0.02 ºC s-1.

La conductividad puede calcularse mediante la siguiente ecuación:

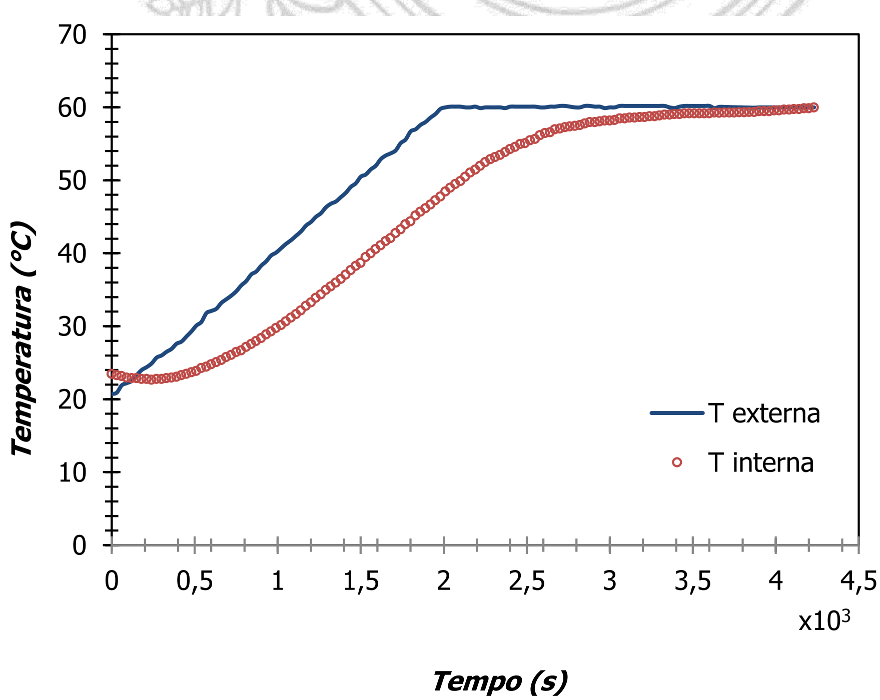
Donde:

K: es la conductividad térmica (Wm-1); ρ : densidad del material de estudio (kgm-3); cp: calor especifico del material de estudio (kj kg-1 ºC-1)

- De acuerdo con la información proporcionada, ¿cuáles son las otras propiedades que intervienen en el proceso de transferencia de calor?

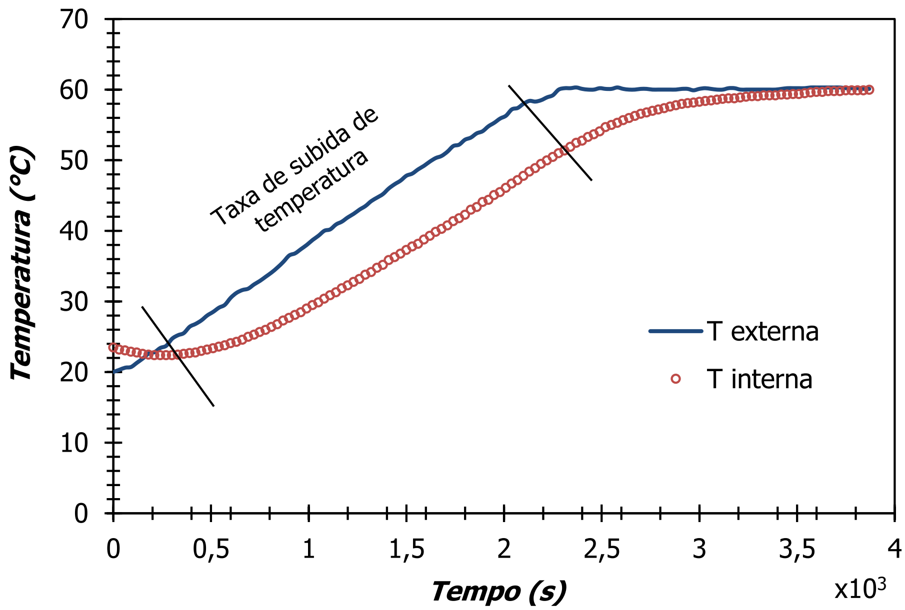
De acuerdo a la expresión de qué depende la conductividad térmica, ¿qué le pasa a la conductividad térmica si se incrementa la densidad del producto?, si se pudiera asumir que el cp y α son iguales en dos productos ¿Cuál tendría mayor conductividad térmica?, elabore una gráfica donde represente como cree que varía la difusividad térmica con respecto a la densidad.

- De acuerdo a los datos obtenidos calcule el valor para la difusividad y la conductividad.
- ¿Observa algún cambio cada vez que calcula las propiedades?, ¿a qué cree que puede deberse?
- Observe las siguientes gráficas, estas fueron construidas a partir de datos reales obtenidos en laboratorio



-

-
-
- Curva de calcetamento para crema de leche com 25 % de grasa



Curva de calentamiento para crema de leche con 17 % de grasa

- ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a la gráfica?, de acuerdo a la literatura como puede interpretarse el Cp, K y α?, ¿para qué sirven?,¿Cuál de los productos cree usted que tiene mayor densidad?, de acuerdo a las gráficas, ¿Cuál de los productos parece ser mejor conductor del calor?, ¿a qué cree usted que se debe que la temperatura sea mayor en el exterior que en el interior del producto?, ¿en cuál producto considera que la tasa de aumento de la temperatura es mayor? ¿qué relación tiene la tasa de aumento de la temperatura con la pendiente de una recta?

Análisis de la transferencia de calor

Los procesos de transferencia de calor son de gran interés en la ingeniería de alimentos, tanto como para controlar, predecir, optimizar y evaluar diversas cuestiones relacionadas con la energía de un sistema. En el caso del proceso de transferencia de energía en forma de calor es muy común en muchos procesos. Según Geankopolis (1998) la transferencia de calor está presente en diversas operaciones como secado de alimentos, destilación, la evaporación y cocción.

Kern (1999) y Geankipolis (1998) señalan que la fuerza que impulsa el calor se debe a una diferencia de temperatura donde el calor fluye de la más alta a la más baja. El modelo de Fourier $dQ = kA\left(-\frac{dt}{dx}\right)$ Btu/hr , que escrita en una manera más simple puede observarse así: $\Delta Q = K\ A\ (\Delta T/\Delta X)$, puede ofrecer una alternativa para el estudio de propiedades térmicas para comprender cómo se llevan a cabo los procesos de transformación, cómo se relacionan las variables y como puede sacarse mejor provecho de lo hallado.

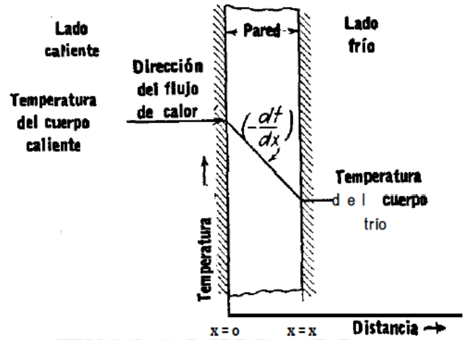
En el modelo ΔQ es el calor transferido, $-\Delta T/\Delta X$ se llama gradiente de temperatura través de una superficie de espesor Δx, A es el área expuesta al tratamiento y K es la conductividad térmica del material en cuestión. Se puede observar que la constante K es propia del material y es independiente de las demás. El modelo ofrece soluciones para productos con diferentes formas lo que podría intuirse debido a la presencia del área en la ecuación, así por ejemplo el modelo puede ser empleada para figuras como placa plana, forma cúbica, esférica y cilíndrica.

Este modelo puede ser empleado en dos tipos de sistemas, en estado estacionario (donde el factor tiempo se omite) y en estado no estacionario (donde los cambios en la temperatura se presentan dependientes del tiempo y la posición donde se mida esta).

- ¿Cuál cree usted que es la relación entre las variables del modelo matemático?
- ¿de qué cree usted que depende el valor de k?, ¿a qué se refiere la d que acompaña a x y a T en el modelo presentado originalmente?, ¿Cómo podría presentarse el modelo interpretando estas variables?

- Elabore una gráfica donde ilustre como supone que es el comportamiento de la temperatura vs la distancia en un proceso de enfriamiento de una manzana cumplida media hora de haber sido puesta en refrigeración. ¿Qué conclusiones puede sacar respecto de la gráfica?, ¿Cómo puede reescribirse la ecuación sin el cuerpo que sufre calentamiento es un cubo? ¿Cómo puede reescribirse la ecuación sin el cuerpo que sufre calentamiento es un cilindro?

Explicación del fenómeno



Tomada de Kern (1999),

Se observa que (-dt/dx) tiene un signo negativo si se supuso una temperatura mayor en la cara de la pared en donde x = 0 y menor en la cara donde x = X (esto teniendo en cuenta que según Kern (1999), Geankopilis (1998) el calor fluye de mayor a menor temperatura). Del modelo también puede concluirse que la cantidad instantánea de calor transferido es proporcional al área y a la diferencia de temperatura dt que permite el movimiento de calor a través de la pared con espesor x.

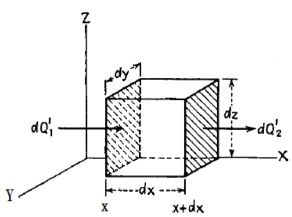
Al observar el termino A en la ecuación surgen consideraciones relacionadas con la forma del cuerpo que sufre el calentamiento o que se encuentra intercambiando calor.

A continuación se presentan algunos posibles ejemplos

Forma cubica

La siguiente figura, un cubo de volumen dv = dx dy dz, (donde dv es el cambio en el volumen y dx, dy, dz son relativas a las medidas de los lados del cubo) recibe una cantidad diferencial de calor dQ'1 a través de su cara izquierda yz en un intervalo de tiempo dθ. Para simplificar ejemplo se supone inicialmente que todas las caras están aisladas excepto la izquierda y la derecha, además se supone una mayor temperatura en el lado derecho, lo que implica movimiento de calor hacia el lado izquierdo. En el fenómeno pueden ocurrir tres posibles situaciones:

dQ’1 puede ser mayor que *dQ’2* de manera que el cubo pierda calor (procesos de enfriamiento); y por último, *dQ’1* y *dQ’2* pueden ser iguales.



Tomada de Kern (1999),

De acuerdo con la Ecuación general el calor que entra en la cara izquierda puede estar dado por

$$\frac{dQ'_1}{\mathrm{de}} = k\ dy\ dz \left(- \frac{\partial t}{\partial x} \right)$$

Forma cilíndrica

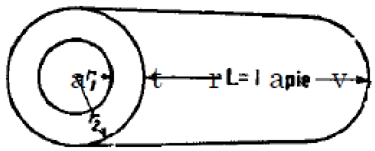
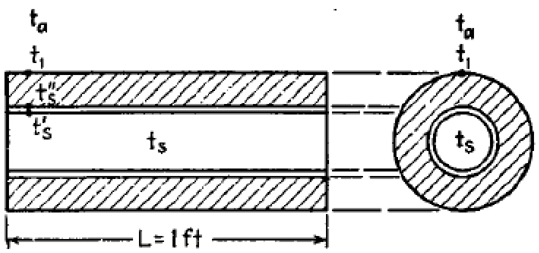


FIG. 2.6. Flujo de calor é s : la pared d e tubo



Tomada de Kern (1999),

Área de la trayectoria del flujo de calor a través de la pared del tubo aumenta con la distancia de la trayectoria desde *r1* a r2. El área a cualquier radio r es dada por 2πrL, si el calor fluye hacia afuera del cilindro (procesos relacionados con calentamiento como podría ser un pasteurizador de leche) el gradiente de temperatura para el incremento de longitud dr es dt/dr. La ecuación entonces se transforma en:

$$q = 2\pi r k \left(-\frac{dt}{dr}\right)$$

- ¿Cómo cree que se utilizaría la ecuación para el caso de la crema de leche?