



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**

**Facultad de Educación**



**SEGUNDA EDICIÓN**

# **HACIA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO CON CALCULADORA**

**PROPUESTAS Y EXPERIENCIAS**



# Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora

---

## Propuestas y experiencias

---

Segunda edición

### Compiladores

Mónica Marcela Parra-Zapata, César Lau Mego,  
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo y María Leonor Vélez Aramburo

### Autoras y autores

Mónica Marcela Parra-Zapata, César Lau Mego,  
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, María Leonor Vélez Aramburo,  
John Alexander Alba Vásquez, Alexander Castrillón-Yepes,  
Jhony Alexander Villa-Ochoa, Edwin Enrique Correa Carmona,  
Lorena Mena Mena, Paula Andrea Barrientos Tascón,  
Jeyson Emilio Palacio Vásquez, Jorge León Echeverri Echeverri,  
Johan Andrey Salazar Piedrahita, Javier Orlando Marín Sánchez,  
Luisa Fernanda Marín Ramírez y Edgar Daniel Sánchez Londoño

Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora. Propuestas y experiencias.

Segunda edición.

ISBN: 978-628-7762-12-1 (versión impresa)

ISBN: 978-628-7762-13-8 (versión pdf-digital)

Este libro es un producto colectivo entre el grupo de *investigación MATHEMA-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y el Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de CASIO Calculadoras* durante los años 2021 y 2022. La segunda edición se llevó a cabo durante el año 2024.

**Compiladores:** Mónica Marcela Parra-Zapata, César Lau Mego, Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo y María Leonor Vélez Aramburo.

**Autoras y Autores:** © Mónica Marcela Parra-Zapata, © César Lau Mego, © Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, © John Alexander Alba Vásquez, © Alexánder Castrillón-Yepes, © Jhony Alexánder Villa-Ochoa, © Edwin Enrique Correa Carmona, © Lorena Mena Mena, © Paula Andrea Barrientos Tascón, © Jeyson Emilio Palacio Vásquez, © Jorge León Echeverri Echeverri, © Johan Andrey Salazar Piedrahita, © Javier Orlando Marín Sánchez, © Luisa Fernanda Marín Ramírez y © Edgar Daniel Sánchez Londoño

**Editor:** Wilson Antonio Buriticá.

**Dirección General Segunda Edición:** Mónica Marcela Parra-Zapata, Universidad de Antioquia.

**Coordinación:** María Leonor Vélez Aramburo, Grupo Statur.

**Diseño y diagramación:** Ana Milena Gómez Correa (amigoco17@hotmail.com).

**Corrección de estilo y normas técnicas:** Sebastian Aguirre Duque (sadw621@gmail.com).

**Contribución para la organización y la estructuración de la forma:** Alexander Álvarez Colorado, Karen Melisa Ospina Berrío, Ángela María Quiceno Restrepo y María Camila Patiño Henao

**Facultad de Educación Universidad de Antioquia.**

Fondo de publicaciones.

Teléfono: 2195708.

Correo electrónico: [edicioneducacion@udea.edu.co](mailto:edicioneducacion@udea.edu.co)

Calle 67 No. 53-108. Bloque 9, Oficina 120.

En el marco del Proyecto CODI 2020-34799 titulado "La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: un camino para la transformación educativa de la básica primaria en la ciudad de Medellín".

Grupo de investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática.

Universidad de Antioquia.

Medellín, Colombia.

El contenido de la obra corresponde al derecho de expresión de las autoras y los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni del grupo Statur.

Se permite la reproducción parcial de este libro citando la obra bajo la Licencia Creative Commons.





# Contenido

Presentación ..... 9

La calculadora como herramienta didáctica en el aula.  
 Una experiencia de formación de maestros y maestras ..... 15  
*Mónica Marcela Parra-Zapata, César Lau Mego  
 y Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo*

Reflexiones sobre el uso de la tecnología en una práctica  
 de enseñanza orientada hacia el desarrollo del pensamiento matemático ..... 53  
*John Alexander Alba Vásquez*

Integración de tecnologías en clase de matemáticas.  
 Experiencias con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW ..... 71  
*Alexánder Castrillón-Yepes, Jhony Alexander Villa-Ochoa  
 y Mónica Marcela Parra-Zapata*

Guía **docente**  
 Medidas de dispersión “Edad de nuestros padres” ..... 99

Guía **estudiante**  
 Medidas de dispersión “Edad de nuestros padres” ..... 111  
*Edwin Enrique Correa Carmona*

Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW ..... 115  
*Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes*

**Guía docente**

Una carrera de caballos.

Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado .....121

**Guía estudiante**

Una carrera de caballos.

Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado .....139

*Mónica Marcela Parra-Zapata*

Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....153

*Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata*

**Guía docente**

Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW

para abordar el concepto de función .....157

**Guía estudiante**

Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW

para abordar el concepto de función .....165

*Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo*

Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....174

*Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes*

**Guía docente**

Apuestas en dos movimientos.

Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico .....187

**Guía estudiante**

Apuestas en dos movimientos.

Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico ..... 207

*Lorena Mena Mena*

Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....212

*Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata*

**Guía docente**

¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo? .....217

**Guía estudiante**

¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo? .....227

*Paula Andrea Barrientos Tascón*

Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW ..... 237

*Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes*

<b>Guía docente</b>	
Análisis del crecimiento de una planta .....	243
<b>Guía estudiante</b>	
Análisis del crecimiento de una planta .....	263
<i>Jeyson Emilio Palacio Vásquez</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	268
<i>Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes</i>	
<b>Guía docente</b>	
Creemos con Pixeles. Conversión entre sistemas de numeración.....	271
<b>Guía estudiante</b>	
Creemos con Pixeles. Conversión entre sistemas de numeración.....	277
<i>Jorge León Echeverry Echeverry, Mónica Marcela Parra-Zapata</i> <i>y César Lau Mego</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	289
<i>Alexander Castrillón-Yepes, César Lau Mego y Mónica Marcela Parra-Zapata</i>	
<b>Guía docente</b>	
Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos .....	297
<b>Guía estudiante</b>	
Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos .....	313
<i>Johan Andrey Salazar Piedrahíta</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	323
<i>Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata</i>	
<b>Guía docente</b>	
La calculadora, ¿mayor que o menor que tu conocimiento?	
Uso en las inecuaciones.....	327
<b>Guía estudiante</b>	
La calculadora, ¿mayor que o menor que tu conocimiento?	
Uso en las inecuaciones.....	337
<i>Javier Orlando Marín Sánchez</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	340
<i>Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes</i>	

<b>Guía docente</b>	
Solución a la vuelta de la esquina .....	347
<b>Guía estudiante</b>	
Solución a la vuelta de la esquina .....	361
<i>Luisa Fernanda Marín Ramírez</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	368
<i>Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata</i>	
<b>Guía docente</b>	
Una aplicación de Probabilidad y Estadística mediada por la tecnología de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW .....	377
<b>Guía estudiante</b>	
Una aplicación de Probabilidad y Estadística mediada por la tecnología de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW .....	397
<i>Edgar Daniel Sánchez Londoño</i>	
Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW .....	411
<i>Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Castrillón-Yepes</i>	
<b>Sobre autoras y autores .....</b>	<b>417</b>





## Presentación

Este libro presenta las reflexiones de maestras y maestros de la Secretaría de Educación de Medellín, en relación con su experiencia y en situaciones didácticas con calculadora, donde la modelación matemática escolar, la integración curricular y STEM+H fueron los ejes para el desarrollo curricular. Estas reflexiones se han presentado como un producto colectivo entre el grupo MATHEMA-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y el Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de CASIO Calculadoras en diferentes instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

El Proyecto Gakuhan es una iniciativa de CASIO Japón, liderada en Colombia por el Grupo Statur que, en convenio con MOVA y el grupo de investigación MATHEMA-FIEM en el Proyecto CODI 2020-34799, propusieron una estrategia de formación de maestros y maestras con el objetivo de invitar a la reflexión, principalmente sobre la relevancia que cobra el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de las y los estudiantes y las múltiples maneras en las que se pueden diseñar y potenciar varias situaciones didácticas en el aula y que están mediadas con esta tecnología. La estrategia se materializó en algunos momentos en el espacio físico del Centro de Innovación del Maestro-MOVA de la Secretaría de Educación de Medellín.

Para el diseño de las situaciones se consultaron previamente las diferentes propuestas del Ministerio de Educación Nacional-MEN

de Colombia, así como posturas investigativas en Educación Matemática en los ámbitos nacional e internacional. Posteriormente, se rescataron algunos aprendizajes esperados en matemáticas, de tal suerte que se proporciona una muestra amplia de actividades y aprendizajes en las que, en el marco de la integración disciplinar desde la modelación matemática y el STEM+H, se puede usar la tecnología, en este caso la calculadora científica.

Es pertinente manifestar que la propuesta de usar la calculadora en las clases de matemáticas no tiene la intención de sustituir al aprendizaje de los algoritmos y procesos que son necesarios para el aprendizaje de las y los estudiantes, sino que en ciertas situaciones o problemas se requieren cálculos algorítmicos que posiblemente desvíen la atención de los y las estudiantes de la situación que pretende resolver. Por ello, la calculadora se concibe como una herramienta que permite direccionar la atención hacia la interpretación, el análisis, el diseño de estrategias y la toma de decisión ante distintas situaciones.

La segunda edición del libro presenta varias mejoras y actualizaciones significativas. Se adaptaron las situaciones propuestas inicialmente con la calculadora científica CASIO de la Serie Classwiz fx-991LA X (la cual ya fue discontinuada en su producción) para utilizar la Serie CASIO Classwiz fx-991LA CW, lo que implicó ajustes en la redacción, clarificación de conceptos y ampliaciones con el uso de estas calculadoras. También se actualizaron las capturas de pantalla, se presentaron nuevas tareas que aprovechan las nuevas funciones de la herramienta y se incluyeron discusiones adicionales sobre el papel del pensamiento matemático, la calculadora y las inteligencias artificiales regenerativas. Estas actualizaciones fueron realizadas por un equipo de la Universidad de Antioquia que incluye a Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata, quienes revisaron las propuestas de las autoras y los autores originales, cualificaron académica y disciplinariamente cada capítulo y crearon una serie de tareas matemáticas de ampliación de posibilidades con la calculadora científica CASIO de la Serie Classwiz fx-991LA CW en línea con cada situación; Alexander Álvarez Colorado quien realizó la actualización de capturas de pantalla y secuencias de teclas al nuevo modelo de calculadora; Karen Melisa Ospina Berrío, Ángela María Quiceno y María Camila Patiño Henao quienes se encargaron de otros aspectos académicos y de forma del contenido. En resumen, la segunda edición ofrece un enfoque más actualizado y enriquecido sobre el uso de la calculadora científica en la enseñanza de las matemáticas.


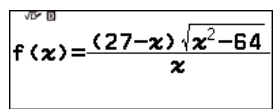
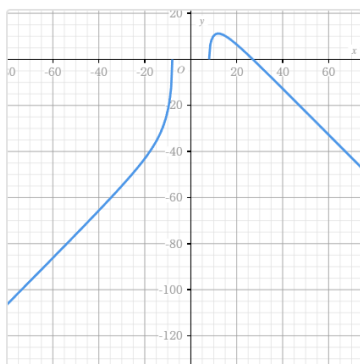
El libro se estructura de la siguiente manera:

- a. **Capítulo introductorio.** Escrito en conjunto por el formador César Lau Mego y dos de las profesoras asistentes, Mónica Marcela Parra-Zapata y Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo. En él se presenta la experiencia de formación de maestros y maestras y se hace una discusión acerca de las situaciones experimentadas dentro de la formación.

- b. **Dos capítulos teóricos.** Escritos por dos profesores formadores, John Alexander Alba Vásquez y Jhony Alexander Villa-Ochoa, y acompañado de los colegas Alexander Castrillón-Yepes y Mónica Marcela Parra-Zapata de su grupo de investigación. En ellos se discuten algunos componentes teóricos del pensamiento matemático y de la inclusión de la calculadora en el aula.
- c. **Capítulos de maestras y maestros.** Escritos por 11 maestras y maestros que participaron del programa de formación. En ellos se presentan las experiencias en sus instituciones educativas con el uso de la calculadora y se ponen en escena el pensamiento matemático y el aprendizaje de las y los estudiantes. Estos capítulos presentan guía docente, guía de estudiantes y posibilidades de ampliación con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

Las fotografías publicadas en esta segunda edición como parte del reporte de la experiencia implementada en aula, corresponden a la primera edición del libro, las autoras y los autores son responsables de los permisos legales para autorización de divulgación de la imagen de las personas que allí aparecen.

Todas las capturas de pantalla de la calculadora, las secuencias de teclas y sus distintas funcionalidades se realizaron con el emulador online de la calculadora Classwiz fx-991LA CW en ClassPad Math en el entorno virtual de [ClassPad.net](http://ClassPad.net), con Licencias proporcionadas por el proyecto Gakuhan Colombia de CASIO Calculadoras, según la siguiente ejemplificación:

Ejemplo de secuencia de teclas	Ejemplo de captura de pantalla de la calculadora	Ejemplo de gráfico en ClassPad.net
		

Por su parte, en las tablas de caracterización de los capítulos de maestras y maestros, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje-DBA son producciones del Ministerio de Educación Nacional del 2006 y 2016 respectivamente, tal como muestra la siguiente ejemplificación:

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Séptimo	Pensamiento aleatorio Pensamiento variacional	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
DBA 3. De grado Décimo	Asigna probabilidades a eventos compuestos y los interpreta a partir de propiedades básicas de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferencia experimentos aleatorios realizados con remplazo, de experimentos aleatorios realizados sin remplazo.</li> <li>• Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.).</li> <li>• Justifica la elección de un método particular de acuerdo con el tipo de situación.</li> <li>• Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> concepto de probabilidad		
<b>Objetivo:</b>	Asignar la probabilidad a un evento, con el apoyo de la calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.	
<b>Conocimientos previos:</b>		
<b>De la herramienta:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encender la calculadora</li> <li>• Configurar la calculadora</li> <li>• Cambiar el idioma</li> <li>• Conocer el manejo del modo Estadística de la calculadora</li> </ul>		
<b>De matemáticas:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio muestra)</li> <li>• Sucesos</li> <li>• Casos favorables</li> </ul>		

El proyecto contó con la participación de 42 maestras y maestros de la ciudad de Medellín, 3 formadores y un equipo académico de edición. En el proceso se sistematizaron 11 experiencias para hacer realidad este libro. A Edwin, Javier, Jeyson, Johan, Jorge, Lorena, Luisa, Mónica, Paula, Mónica, Edgar, Alex, Melisa, Camila, Ángela y Alex, les agradecemos profundamente su entrega y dedicación en este proyecto y la posibilidad de reflexionar, construir,

deconstruir y reconstruir sus prácticas a través de la crítica, la reflexión y el ejercicio constante de la escritura, la puesta en escena, la actividad matemática y la investigación.

Además, queremos agradecer a MOVA por la posibilidad de desarrollar el proyecto en su escenario físico. A Jorge Iván Ríos Rivera por su acompañamiento académico y su gestión desde la administración en la Secretaría de Educación del Distrito de Medellín. A la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en cabeza del decano Wilson Antonio Buriticá y al grupo de investigación MATHEMA-FIEM en cabeza de los profesores Gilberto de Jesús Obando Zapata y Jhony Alexander Villa-Ochoa, por permitir que este programa de formación se materializara y por unir recursos para la publicación de las experiencias de los maestros y maestras. A las rectoras y los rectores de las instituciones educativas participantes por facilitar el espacio y el tiempo para la puesta en marcha de las experiencias. A las y los estudiantes, quienes aportaron todo su conocimiento y disposición para implementar las propuestas y contribuir con sus cuestionamientos al mejoramiento de nuestras prácticas educativas.

Agradecemos, también, al Grupo Statur y a María Leonor Vélez A., directora del proyecto Gakuhan de CASIO Calculadoras en Colombia, por su constante apoyo con el proceso de formación y los diferentes recursos que se necesitaron para el desarrollo de este proyecto. A los profesores formadores César Lau Mego, John Alexánder Alba Vásquez y Jhony Alexánder Villa-Ochoa, por compartir sus valiosas experiencias y desarrollos teóricos e investigativos. A las profesoras de la Secretaría de Educación de Medellín: Mónica Marcela Parra-Zapata y Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo, por su disposición para dialogar con quienes participaron y materializar la propuesta. A las y los integrantes del grupo de investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA-FIEM), de la Universidad de Antioquia, por la evaluación y las lecturas realizadas a versiones iniciales de este libro y sus significativos aportes. A las profesoras y profesores (Dra. Paola Alejandra Balda Álvarez, Dr. César Lau Mego, Mg. Juan Manuel Zuluaga Arango, Mg. Yadira Marcela Mesa, Mg. María Denis Vanegas Vasco, Mg. María Camila Ocampo-Arenas, Mg. Ana Carolina González Grisales, Mg. Valeria Lebrun Llano, Mg. Luz Cristina Agudelo Palacio y Mg. Luis Fernando Plaza Gálvez) que realizaron la evaluación externa de los capítulos para cualificar esta segunda edición.

Esperamos que las situaciones propuestas en este libro sean de utilidad para docentes en el diseño y planeación de sus clases de matemáticas y que se constituyan en un punto de partida para crear otras actividades con el uso de la calculadora para proveer con sus estudiantes de diversos escenarios de discusión y argumentaciones de las matemáticas centradas en la resolución de problemas.

**Compiladoras y Compilador**



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

Arc sen

8

6

3

FORMAT

$\frac{\square}{\square}$

sen

9

4

+

EXE

Arc cos

cos

0

+

o' "

$\sqrt{\square}$

tan

$\times$

$\div$

-

$f(x)$

Arc tan

INS

$\times$

(-)

$\approx$

$\square^{-1}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

log

(

$\div$

|

$\approx$

CATALOG

$\square^{\square}$

$\square^2$

)

AC

$\div$

$\approx$

TOOLS

ooo


In

log  $\square$

OFF

$\div$

$\approx$



# La calculadora como herramienta didáctica en el aula. Una experiencia de formación de maestros y maestras

Mónica Marcela Parra-Zapata<sup>1</sup>  
César Lau Mego<sup>2</sup>  
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo<sup>3</sup>

---

## Introducción

En este capítulo, y como introducción a lo que encontraremos en el presente libro, presentamos los alcances y las limitaciones de algunas situaciones didácticas con calculadora dentro de un proceso conjunto entre el Grupo de Investigación *MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia* y el *Programa Gakuhan de CASIO Calculadoras*. Con el desarrollo de las situaciones se promovió la integración y el uso de la calculadora en clase de matemáticas hacia el análisis y la reflexión como centro de la actividad matemática en el aula.

- 1 Doctora (C) en Educación-Educación Matemática. Profesora de matemáticas Institución Educativa Mariscal Robledo-Secretaría de Educación de Medellín. Profesora Universidad de Antioquia. [monikampz@gmail.com](mailto:monikampz@gmail.com)
- 2 Director de la división académica de CASIO para América Latina. [cesar.slmg@gmail.com](mailto:cesar.slmg@gmail.com)
- 3 Magíster en Educación. Profesora Institución Educativa Barrio Olaya Herrera-Secretaría de Educación de Medellín. [monizapata25@gmail.com](mailto:monizapata25@gmail.com)

El Proyecto es una iniciativa de la división académica de CASIO Latinoamérica y el grupo Statur que, en convenio con el grupo de investigación MATHEMA-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propuso una estrategia de formación de maestros y maestras, el cual tuvo como objetivo el mejoramiento de la práctica docente con el objeto de diseñar y crear espacios reflexivos para el planteamiento de nuevas alternativas y la integración de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático con el apoyo de la calculadora. El proyecto contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín y se llevó a cabo durante los años 2021 y 2022.

Desde la invención de la calculadora, esta ha evolucionado hasta la producción de nuevas calculadoras con multiplicidad de funciones, las cuales posibilitan, entre otros asuntos, el cálculo, la verificación y la graficación. Esta transformación ha sido de tipo funcional y ha incluido la pregunta por su uso en la escuela y las oportunidades que deben proporcionar los profesores para usarlas en la clase.

La inclusión de las calculadoras en el currículo escolar ha producido un debate amplio en la comunidad académica en tanto se reportan opiniones encontradas en aspectos negativos y positivos de su inclusión. Algunas de las personas que se resisten a la incorporación de la calculadora en la edad escolar, sostienen algunas creencias que indican que: *i.* la calculadora no desarrolla el razonamiento matemático puesto que, para utilizarla, basta con seguir exactamente las instrucciones de funcionamiento; y *ii.* la calculadora limita la adquisición de las habilidades de cálculo numérico de los estudiantes (Conti et al., 2017).

Sin embargo, otros autores sostienen que la interacción con la calculadora en la clase de matemáticas, con un uso intencionado, puede ser ventajosa y posibilitaría el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008). Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional, MEN, (1998) destaca la importancia de usar las tecnologías, entre ellas, la calculadora, en la enseñanza y el aprendizaje. El MEN considera que su uso potencia el desarrollo del pensamiento matemático. Selva y Borba (2010) insisten en el uso de este instrumento en el aula porque prepararía a los estudiantes para su uso futuro en diferentes esferas de la sociedad y su amplio uso en diversas situaciones fuera del aula.

## Las calculadoras como herramientas didácticas en el aula

La inclusión de la calculadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha permitido un amplio debate acerca de las posibles consecuencias, negativas y positivas que su uso puede tener y de cuál es la edad más adecuada para su uso. Aunque existen diversos



documentos relacionados a los beneficios de usar la calculadora, se encuentran también opiniones que indican no usarlas, pues consideran que podría perjudicar las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Por su parte, algunas investigaciones reportan el papel que debe jugar la calculadora y de su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008; Selva y Borba, 2010; MEN, 1998, 2006; Carmona-Mesa et al., 2018). En este sentido, el informe Cockcroft (1985) afirma que la investigación ha demostrado que los estudiantes que se habitúan al uso de la calculadora mejoran su actitud hacia las matemáticas, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas.

En este capítulo, y a lo largo del despliegue de la formación, asumimos que la calculadora es una herramienta didáctica en el aula, que permite ejercitar determinados cálculos que favorecen una selección de estrategias apropiadas. A partir de ello, intentamos una reflexión acerca de la importancia que adquiere el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y la manera de diseñar y potenciar algunas situaciones didácticas en el aula, mediadas con esta tecnología.

En una perspectiva del aprendizaje, la calculadora funge como una tecnología que puede mejorar la actitud y disposición de los estudiantes hacia las matemáticas, al adquirir destrezas en los cálculos mentales y en la comprensión de conceptos y en la adquisición de estrategias adecuadas para la resolución de problemas. Usar calculadoras en clase permite el trabajo individual, las investigaciones reportan que promueven la interacción entre estudiantes y maestros, y entre los estudiantes.

En términos de la enseñanza, la calculadora es una herramienta valiosa que enriquece las comprensiones matemáticas. Además, su uso permite que se ocupe más tiempo y esfuerzos en la comprensión de los conceptos, el análisis de situaciones y el pensamiento crítico. Resaltamos aquí que la calculadora por sí misma no es un elemento que garantice un manejo más estructural de los conceptos, sino que contribuye a que haya cambios en las instrucciones, en el diseño curricular y en las visiones que el profesor tiene de su actividad y de las matemáticas.

Por último, se concibe que la tecnología, en este caso las calculadoras, complementan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero no son la base del mismo. En esta medida, los cambios se deben producir a través de la incorporación de la calculadora en el aprendizaje y se deben integrar sin sacrificar la profundidad de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, cuando se trata de leer y comprender una situación problemática, escribir una apropiada ecuación a un problema, elegir las operaciones que hay que usar, interpretar correctamente la solución que aparece en el visor de la calculadora y deter-

minar si la respuesta es coherente o no con la situación. Las calculadoras, junto con las destrezas mentales, el lápiz y papel, y la estimación, cuando son apropiadas, componen las herramientas que ayudan a los estudiantes a resolver problemas (Ortiz, 2006).

## Una experiencia de formación de maestros y maestras

Con miras a determinar posibilidades de transformaciones prácticas para la formulación y desarrollo de currículos pertinentes e interdisciplinarios, que acojan la perspectiva STEM+H, esta experiencia de formación de maestros y maestras de matemáticas de la ciudad de Medellín, se consolidó en el marco del proyecto CODI 2020-34799: "La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: un camino para la transformación educativa de la básica primaria en la ciudad de Medellín" en vínculo con la división académica de CASIO Latinoamérica y su Proyecto Gakuhan.

En la formación propendimos por un mejor desempeño en estudiantes y maestros, con el ánimo de apoyar y fortalecer las habilidades matemáticas mediante la discusión y apropiación de nuevas maneras de competencias matemáticas con el uso de tecnología, en especial, con la calculadora. Así, la formación motivó el uso de la calculadora como herramienta que concibe una nueva cultura de enseñanza y aprendizaje y, como consecuencia, el abandono de la concepción de saberse una fórmula de memoria para entender y aplicar, de manera coherente, la fórmula; es decir, una enseñanza y un aprendizaje que se centran en el desarrollo del pensamiento matemático.

En este sentido, con la experiencia de formación fomentamos la discusión en torno a algunos elementos conceptuales que fundamentan la propuesta de los documentos de referencia del país en matemáticas (MEN, 1998; 2006; 2016). De igual modo, promovimos la reflexión de los maestros y maestras de matemáticas sobre su práctica y su relación entre ella y la propuesta del MEN, además del fomento de situaciones didácticas mediadas con calculadora. Por estas razones, inferimos que existen reflexiones acerca de cómo pueden evaluar los docentes el uso de la herramienta en la generación de conocimiento en las aulas.

La experiencia de formación reconoció que, como profesionales de la educación colombiana, los maestros y maestras deben mantenerse en la búsqueda y perfeccionamiento de diferentes estrategias educativas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Así mismo, es muy importante reflexionar acerca del impacto de las múltiples herramientas tecnológicas diseñadas o adaptadas para apoyar la Educación Matemática y, por esta razón, no es recomendable que el profesor se aleje de dichos recursos por causa del desconocimiento de la herramienta o del potencial

pedagógico que puede tener. De esta manera, esperamos crear espacios de reflexión sobre la práctica educativa en los que se amplíe el saber del maestro en diversos aspectos.

La experiencia de formación se consolidó en dos cohortes y contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín. Para lograr los objetivos propuestos, orientamos la experiencia de formación, metodológicamente, en siete momentos que se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Orientación metodológica de la experiencia de formación.

MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
1	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento numérico.
2	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento variacional.
3	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento métrico.
4	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento espacial.
5	Asesoría.
6	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento aleatorio.
7	Presentación experiencia de maestros y maestras.

Fuente: los autores.

## Algunas situaciones de aula propuestas

En esta formación los maestros y maestras fueron partícipes de situaciones de aprendizaje en las que pudieron hacer uso de sus conocimientos matemáticos y reflexionar acerca de su sentido en diferentes contextos. Las situaciones fueron propuestas en el marco de la formación descrita en el apartado anterior y en ellas se empleó en todo momento la calculadora científica como herramienta.

En las situaciones, la calculadora se empleó como una herramienta que facilita la exploración de ideas y modelos, y que valida resultados obtenidos previamente con lápiz y papel. En este sentido, la calculadora apoyó la realización rápida de cálculos que son muy tediosos y repetitivos para la mente humana. Sin embargo, su uso en la escuela debe enfatizar en la comprensión de los procesos matemáticos más que en la verificación de la mecánica de rutinas operativas.

De acuerdo con lo anterior, presentamos a continuación cuatro situaciones desarrolladas por los maestros en la experiencia de formación y en las cuales se discutieron aspectos matemáticos, su desarrollo y algunas de las apreciaciones de los maestros y las maestras.

## Situación 1: El mayor número primo

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico. En ella propusimos formar parejas y usar lápiz, papel y calculadora. El objetivo de la situación consistía en dar un número primo mayor que el del compañero.

Así pues, el estudiante que inicia debe escribir un número primo y leerlo al compañero, quien deberá, primero, verificar que el número es primo y, si lo es, escribir uno mayor con los recursos brindados (lápiz, papel y calculadora). La actividad continúa y puede terminar de acuerdo con alguna de las siguientes circunstancias:

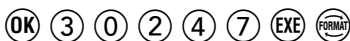
- ▶ Cumplido un tiempo previamente acordado.
- ▶ Cuando uno de los jugadores devuelve un número que no es primo.
- ▶ Cuando uno de los jugadores ya no pueda hallar un número primo mayor.

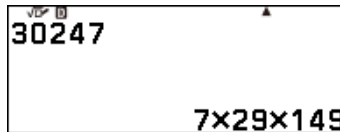
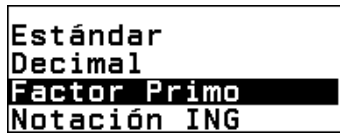
Durante las sesiones, los maestros y maestras reconocieron que no tenían disponible un algoritmo preestablecido para “ganar” el juego, esto los llevó a pensar en los números primos, criterios de divisibilidad, operaciones elementales de multiplicación y división, descomposición de números en factores con el uso de la calculadora para la exploración.

Una función que los profesores descubren al manipular la calculadora para buscar números primos es *FACT.*, con la que pueden no solamente verificar si un número es primo o no, sino que es una manera de obtener números primos en los factores del número ingresado.

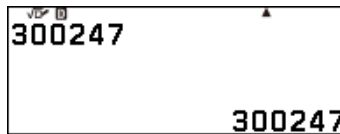
### Desarrollo de la situación:

En las siguientes imágenes se puede observar cómo factorizar un número cualquiera, por ejemplo 30247. Para lograrlo se ingresa al *Modo Calcular* en el menú principal.

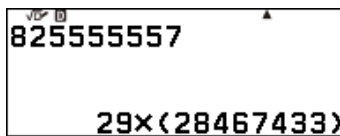




Ahora, veamos qué sucede al ingresar el número primo: 300247



En los casos en los cuales la calculadora no puede determinar si un factor es primo o no, lo presenta entre paréntesis, como en el siguiente ejemplo:



Veamos un ejemplo de cómo se desarrolla una partida:

- ▶ Jugador 1: 103
- ▶ Jugador 2: como 103 no es par, tampoco es divisible por 3, 5, 7 entonces es primo y te doy el número 127.
- ▶ Jugador 2: 127 es primo. Te doy el número 1003
- ▶ Jugador 1: 1003 no es primo.
- ▶ Gana Jugador 1

## Situación 2: Racional o Irracional

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico, en ella sugerimos indicar cuántos de los siguientes números son irracionales y justificar la respuesta.

$$A = \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Esta situación tiene como objetivo reflexionar en torno a la manera como los docentes reconocen los números irracionales y qué aprenden los estudiantes acerca de ellos. Algunas preguntas son:



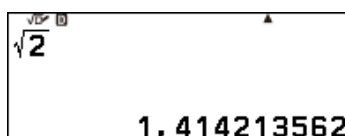
- ▶ ¿Qué es un número irracional?
- ▶ ¿Cómo reconocer un número irracional?
- ▶ ¿Cómo usar la calculadora para identificar números irracionales?
- ▶ ¿Es posible reconocer si un número es irracional con el apoyo de la calculadora?

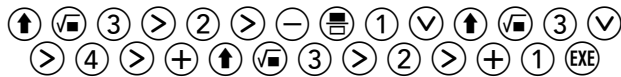
Es curioso que, a pesar de tener una calculadora a mano, algunos estudiantes clasifican los números como irracionales por su representación, sin efectuar operación alguna. Al preguntar por qué son irracionales, las respuestas son:

- ▶ "... son irracionales porque hay raíces que no se pueden simplificar" (Comentarios de los maestros).
- ▶ "... cuando se tienen raíces, los números son irracionales" (Comentarios de los maestros).

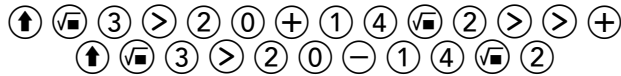
### Desarrollo de la situación:

Cuando se usa la calculadora, los profesores encuentran los siguientes resultados:





$$\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$



$$\leftarrow 14\sqrt{2} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Con estos resultados advertimos tres reacciones de los profesores:

- ▶ Aceptar los resultados y clasificar los números se acuerdo con ellos.
- ▶ Aceptar los resultados, pero reflexionar acerca de las concepciones que se tienen de los números irracionales y qué información se brinda a los estudiantes.
- ▶ Negar la veracidad de resultados en la calculadora con razones como redondeo o truncamiento de cifras.

Posteriormente, propusimos rutas de verificación con lápiz y papel para comprobar el resultado obtenido en la calculadora, porque algunos participantes no estaban seguros de que el resultado mostrado por la calculadora era correcto.



*Hallemos el valor de B*

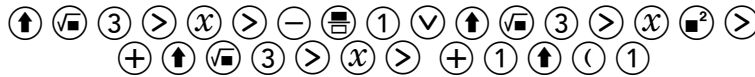
$$B = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

Sea  $a = \sqrt[3]{2}$

Entonces:  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{1}{a^2 + a + 1}$

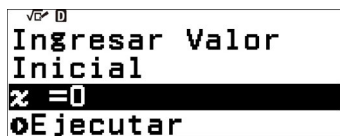
Efectuando:  $a \cdot \frac{1}{a^2 + a + 1} = a \cdot \frac{a-1}{(a^2 + a + 1)(a-1)} = a \cdot \frac{a-1}{a^3-1} = a \cdot \frac{a-1}{1} = a \cdot (a-1) = 1$

Otra manera para verificar el valor es resolver la siguiente ecuación en la calculadora en el *Modo Ecuación*:



$$\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x+1}}} = 1$$

Seleccionar la tecla *B* y elegir el valor para *x*, por ejemplo  $x = 0$



Luego, seleccionar *Ejecutar* y se mostrará a continuación el resultado



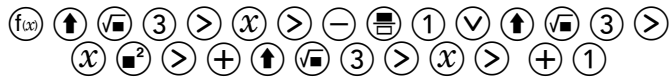
$$\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x+1}}} = 1$$

x= 0  
L-R= 0

También, con el uso de las funciones en el *Modo Tabla*, se le puede pedir a la calculadora que resuelva la ecuación:







```
f(x)
g(x)
Definir f(x)
Definir g(x)
```

OK

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x+1}}}$$

OK

Luego, elegir el rango de la tabla

ooo

```
Rango tabla
Def f(x)/g(x)
Tipo de Tabla
Editar
```

1 OK 3 OK 0 , 1 OK

```
Rango tabla
Final:3
Paso :0,1
Ejecutar
```

Al seleccionar la tecla **OK** se presenta la tabulación de los datos

x	f(x)
1,9	0,9734
2,0	1
2,1	1,0255
2,2	1,05

Aquí observamos que cuando  $x$  es 2 el valor de la función es 1.

Haciendo una tabla con un paso de 0.01 desde 1.9 hasta 2.1

$x$	$f(x)$
1.90	0.9734
1.91	0.9761
1.92	0.9788
1.93	0.9815

**1,9**

$x$	$f(x)$
1.94	0.9842
1.95	0.9868
1.96	0.9895
1.97	0.9921

**1,97**

$x$	$f(x)$
1.98	0.9947
1.99	0.9973
2.00	1.0000
2.01	1.0025

**2,01**



Hallemos el valor de  $C$ :

$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(a + b)^3} + \sqrt[3]{(a - b)^3}$$

Entonces:

$$20 + 14\sqrt{2} = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

Si hacemos  $b = \sqrt{2}$

$$20 + 14\sqrt{2} = (a + \sqrt{2})^3 = a^3 + \sqrt{2}^3 + 3a^2\sqrt{2} + 3a\sqrt{2}^2$$

$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 2\sqrt{2} + 3a^2\sqrt{2} + 6a$$

$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 6a + (2 + 3a^2)\sqrt{2}$$

$$a^3 + 6a = 20 \wedge 2 + 3a^2 = 14 \Rightarrow a = 2$$

$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

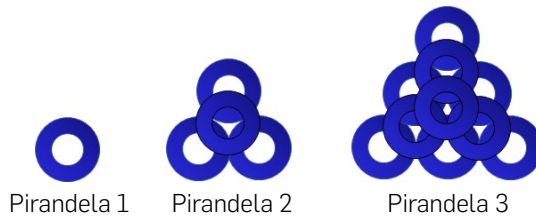


Preguntas:

- ▶ ¿Qué es un número irracional?
- ▶ ¿Podemos identificar un número irracional por su representación?
- ▶ ¿Cuáles son las "reglas" prácticas que suelen usarse para identificar un número que puede producir una concepción errada sobre ellos?

### Situación 3: Pirandelas

Esta es una situación que tiene como objetivo poner en juego el pensamiento variacional de los estudiantes. Consiste en formar pirámides con arandelas, las cuales llamaremos pirandelas. La situación propone formar grupos de cuatro personas y construir los arreglos, según los siguientes gráficos.



**Actividad 1.** Construye la pirandela 4.



**Actividad 2.** Construye la pirandela 5.



**Actividad 3.** Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué cambia en la secuencia de las pirandelas?
- ¿Cómo cambia esta característica de una pirandela a la siguiente en la secuencia?
- Completa el siguiente cuadro con la cantidad de arandelas en cada caso.

**Tabla 2.** Registro de arandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base						
Borde de la base						
Total en la base						
Total en la pirandela						

Fuente: los autores.

- d. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de pirandelas desde la primera hasta la sexta?



**Actividad 4.** Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?



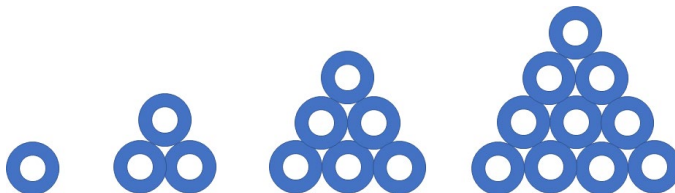
**Actividad 5.** Determina cuántas pirandelas, como mínimo, se pueden formar con el uso de 1130 arandelas.

### Posibles resoluciones para las actividades



**Actividad 1.** Construir la pirandela 4. A continuación, se presenta una imagen en la que se pueden observar los cuatro primeros arreglos.

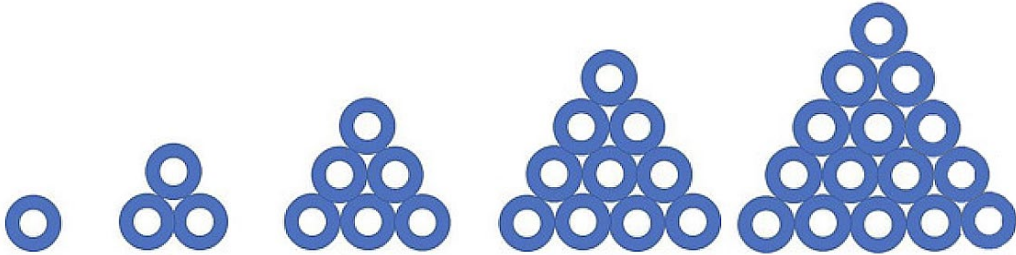
La base de la pirandela 4 se visualizaría así:





**Actividad 2.** Construir la pirandela 5. A continuación, se presenta una imagen en la que se pueden observar los cinco primeros arreglos.

La base de la pirandela 5 se visualizaría así:



**Actividad 3.**

- a. ¿Qué cambia? El propósito de esta pregunta es que los estudiantes logren identificar varias características que cambian en la secuencia cuando se pasa de una pirandela a la siguiente. Algunas de las características que podrían ser identificadas, son:
- ▶ El volumen de la pirandela.
  - ▶ La altura de la pirandela.
  - ▶ El peso de la pirandela.
  - ▶ La cantidad total de arandelas.
  - ▶ La cantidad de arandelas en la base.
  - ▶ La cantidad de arandelas en el borde de la base.
  - ▶ La altura de la pirandela.

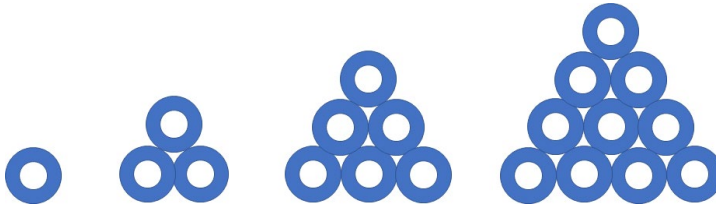
Es importante orientar al estudiante mediante preguntas. Por ejemplo, si el estudiante dice: *“el lado”*, usted puede decir: *“ayúdame a entender, ¿a qué lado te refieres? ¿El lado de qué figura?”* y luego se puede agregar: *“¿qué es lo que cambia de ese lado?”*. Lo que deseamos es que la descripción sea precisa, por ejemplo, se puede afirmar: *“cambia la cantidad de arandelas en el lado de la base”*.

Los atributos que identifique el estudiante no necesariamente deben ser cuantitativos, también podría identificar cambios cualitativos de acuerdo con la situación planteada. En todos los casos, el propósito es ayudar al estudiante a identificar el cambio y no obtener una respuesta *correcta* porque lo que se busca lograr es que el estudiante piense en el cambio.

- b. ¿Cómo cambia? Respecto a la cantidad de arandelas en el lado de la base de la pirandela, esta aumenta en una arandela.



En cuanto a la cantidad de arandelas totales en la base:



La cantidad de arandelas en la base de la siguiente pirandela, se obtiene agregando, a la cantidad actual, una cantidad de arandelas igual al lugar que ocupa la siguiente pirandela. Estudiantes más avanzados podrán decir que la cantidad es igual a la suma de los  $n$  primeros números naturales, donde  $n$  es el lugar de la pirandela.

En cualquier caso, el propósito es identificar el patrón de cambio, por lo que se debe guiar al estudiante para que identifique cómo es que cambian las cantidades o atributos definidos anteriormente.

c. Completa la siguiente tabla:

**Tabla 3.** Tabla de registro pirandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base	1	2	3	4	5	6
Borde de la base	0	3	6	9	12	15
Total en la base	1	3	6	10	15	21
Total en la pirandela	1	4	10	20	35	56

Fuente: los autores.

d. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de pirandelas desde la primera hasta la sexta?

Podemos hallar el valor directamente de nuestra tabla:

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$$



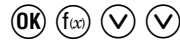
**Actividad 4.** Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas, ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?

La pirandela de mayor volumen es la que tiene más arandelas. Es preciso explorar cuántas arandelas se usan en cada pirandela.

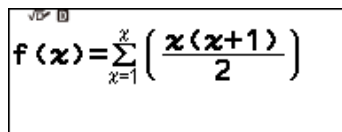
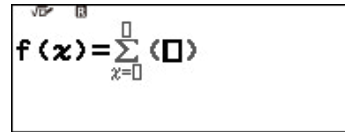
Como el número de arandelas en la pirandela  $n$  es igual a la suma de los números desde 1 hasta  $n$ , se sugiere hacer una tabla de valores en la que se evalúe la suma de los  $n$  primeros números enteros positivos que representan la cantidad total de arandelas en cada caso.



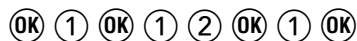
Presione la tecla *Función* para definir la función.



Selecciona la tecla  $\text{OK}$  e introduce la función. En el catálogo se visualizan opciones para el ingreso de la función.



Una vez ingresada la función en Tools se definirán componentes de la función.







OK

x	f(x)
1	1
2	4
3	10
4	20

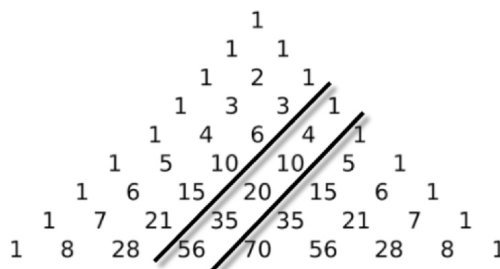
x	f(x)
5	35
6	56
7	84
8	120

x	f(x)
9	165
10	220
11	286
12	364

La pirandela de mayor volumen que se puede formar es la pirandela 8.

Otra ruta disponible para hallar la pirandela de mayor volumen, es con una inecuación, considerando que la cantidad de arandelas debe ser menor o igual que 126. Es preciso determinar la expresión para la cantidad de arandelas en una pirandela definida. Aquí mostramos cómo hacerlo con números combinatorios y el triángulo de Pascal:

Observe que la cantidad de arandelas totales son los elementos resaltados:



Donde cada uno de los números seleccionados es un número combinatorio.

$$C_3^3 = 1; C_3^4 = 4; C_3^5 = 10; C_3^6 = 20; C_3^7 = 35; C_3^8 = 56$$

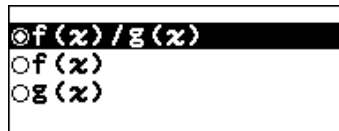
Pirandela	1	2	3	4	5	6
Cantidad de arandelas total	$C_3^3$	$C_3^4$	$C_3^5$	$C_3^6$	$C_3^7$	$C_3^8$



Entonces, podemos preguntarnos: ¿Cuál es la expresión correspondiente para la pirandela de lugar  $x$ , según la tabla?

Para realizar este proceso, elige en el *Modo Tabla* la opción de tabular dos funciones así:

Pirandela	$x$
Cantidad de arandelas total	$C_3^{x+2}$



Luego de definir las dos funciones, se presentan los siguientes resultados:

$$f(x) = \sum_{x=1}^x \left( \frac{x(x+1)}{2} \right)$$

$$g(x) = (x+2) C_3$$

$x$	$f(x)$	$g(x)$
5	35	35
6	56	56
7	84	84
8	120	120

$x$	$f(x)$	$g(x)$
9	165	165
10	220	220
11	286	286
12	364	364

x	f(x)	g(x)
13	455	455
14	560	560
15	680	680
16	816	816

**16**

Antes de resolver la inecuación se comprueba que los valores coinciden si se ponen en una tabla de valores y se comparan con los obtenidos mediante la suma de consecutivos usada anteriormente:

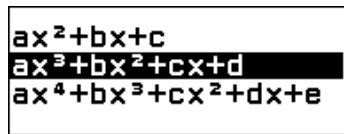
Entonces, la inecuación que se debe resolver es:

$$\begin{aligned}
 C_3^{x+2} &\leq 126 \\
 \Rightarrow \frac{(x+2)!}{3!(x+2-3)!} &\leq 126 \\
 \Rightarrow \frac{(x+2)(x+2-1)(x+2-2)(x+2-3)!}{3!(x+2-3)!} &\leq 126 \\
 \Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)(x)}{3!} &\leq 126 \\
 \Rightarrow \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x &\leq 126 \\
 x(x+1)(x+2)\frac{1}{6} &< 126 \\
 (x^2+x)(x+2)\frac{1}{6} &< 126 \\
 (x^3+x^2+2x^2+2x)\frac{1}{6} &< 126 \\
 (x^3+3x^2+2x)\frac{1}{6} &< 126 \\
 \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x &< 126 \\
 \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 126 &< 0
 \end{aligned}$$

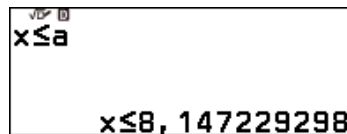
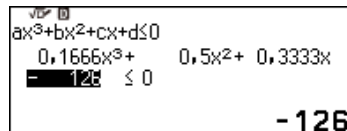
En la calculadora esto se resuelve en el modo *Desigualdad*:



Selecciona el grado del polinomio



Introduce los valores de la inecuación

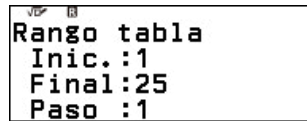


Podemos observar que la pirandela de mayor volumen que se puede construir es la pirandela 8.



**Actividad 5.** Determina cuántas pirandelas, como mínimo, se pueden formar con 1130 arandelas.

Se retoma la tabla construida en la actividad 4 y se analizan los valores en la función. Debemos buscar el valor en que  $f(x)$  que sea igual a 1130 o que más se aproxime a este número. Para ello en la función ya ingresada, cambiamos el paso inicial y el paso final.



Observamos los valores arrojados

x	f(x)
12	364
13	455
14	560
15	680

**15**

x	f(x)
16	816
17	969
18	1140
19	1330

**19**

Observando la tabla, indicamos que para 17 pirandelas se requieren 969 arandelas y para 18 pirandelas se requieren 1140 arandelas. De allí concluimos que con 1130 arandelas se pueden formar como mínimo 17 pirandelas.

### Situación 4: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? (Alba y Angulo, 2018)

Ver el video: [https://youtu.be/3nbjhcZ9\\_g](https://youtu.be/3nbjhcZ9_g), solamente 15 primeros segundos

Figura 1. Captura de pantalla video de YouTube.



Fuente: captura de pantalla de los autores.

Durante el desarrollo de la sesión se utilizó la rutina de pensamiento *veo-pienso-me pregunto*.



Después de ver el video se pregunta a los profesores-estudiantes *¿Qué ven?*

Algunas respuestas fueron (Intervenciones de participantes):

velocidad    esfuerzo    alegría    un cronómetro  
tiempo    atletas    números    camisetas    líneas sobre la pista

No todas las palabras listadas anteriormente son respuestas *correctas*, en el sentido de que no todas representan algo que se pueda “ver” en el video. En esta etapa de la sesión, permitimos que los participantes expresasen sus ideas con relación a lo que otros ven, y se crea una oportunidad para discutir si lo que unos dicen que ven realmente se ve o es su percepción solamente. Por ejemplo, fue común tener profesores que afirmaban que podían ver la velocidad. Después de discutirlo en grupo, llegaban a la conclusión de que la velocidad no se puede ver, pero sí se puede ver cómo cambian de posición los atletas.

Otra discusión interesante fue respecto a “el cronómetro” que algunos vieron, de la cual llegaron a la conclusión de que lo que se puede ver es un espacio en la pantalla en el que hay números que cambian de valor y que algunos profesores interpretaron como un cronómetro.

En esta primera parte se puede generar discusión en torno a lo que los profesores ven o creen ver y lo que no es posible ver, la idea central es brindar una oportunidad para reflexionar cómo llevar esta experiencia y enriquecer el aprendizaje en el aula.



Una segunda pregunta, que está relacionada con la primera es:  
*¿En qué piensa?*

Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- ▶ Un docente que vio en la pantalla “números que cambian de valor”, dijo que piensa en el tiempo...
- ▶ El docente que vio “atletas corriendo”, dijo que eso le hace pensar en la velocidad.
- ▶ El docente que vio “líneas en la pista”, dijo que pensó en paralelismo.



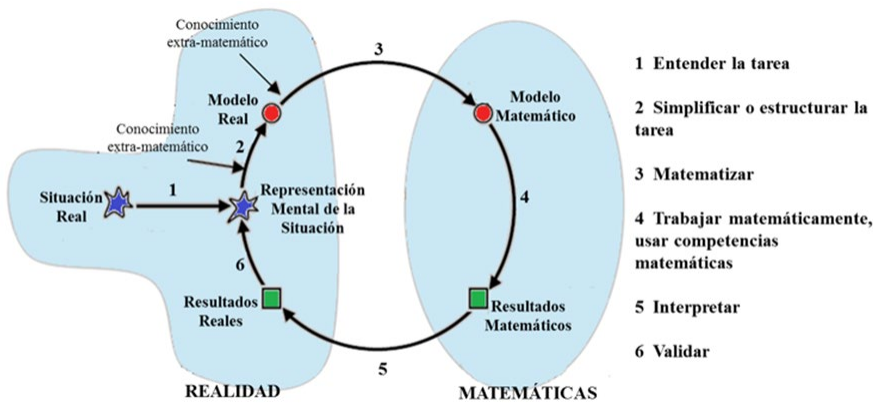
La tercera pregunta en la rutina es: *¿Qué se pregunta?*, en relación con lo que vio y pensó.

Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- ▶ Veo: atletas corriendo; pienso: en velocidad; me pregunto: ¿Cuál es la máxima velocidad lograda en la carrera?
- ▶ Veo: números que cambian; pienso: en tiempo; me pregunto: ¿Qué tiempo duró la carrera?

El ciclo de la modelación lo utilizamos para solicitar a los profesores ubicar las tareas que realizaban durante la sesión.

Figura 2. Ciclo de modelación matemática para el aula.



Fuente: Blum y Borromeo-Ferri (2009).

Después de observar esta figura, hicimos la siguiente pregunta: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? Luego, presentamos una función que describe la rapidez de Usain Bolt.

$$u(t) = \frac{1331(1 - e^{-0,8t})}{110 + 12,1e^{-0,8t}}$$

Y solicitamos a los profesores que respondan a las siguientes situaciones problemáticas:

- ▶ ¿En qué unidades está expresada la rapidez  $u(t)$ ?
- ▶ Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.
- ▶ Construya una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$ .
- ▶ Construya una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt en cada intervalo de un segundo durante la carrera, comenzando desde  $t = 0$ .
- ▶ Construya una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$  durante la carrera.
- ▶ ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de  $9 \text{ m/s}$ ?
- ▶ ¿En qué instante la aceleración instantánea es de  $0,5 \text{ m/s}^2$ ?

Resolución de las preguntas:

- a. La rapidez está expresada en  $\text{m/s}$ . La pregunta no es trivial y durante las sesiones algunos profesores justificaron su elección de la siguiente manera:
- ▶ La rapidez está en metros por segundo porque la carrera es de 100 metros.
  - ▶ Kilómetros por hora, la velocidad generalmente se expresa en kilómetros por hora.
  - ▶ Metros por segundo, porque la carrera dura casi 10 segundos, entonces el tiempo debe estar en segundos.

Encontramos importante resaltar que en las anteriores justificaciones el modelo funcional no fue utilizado y, tampoco, la información que brinda el video.

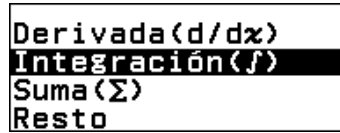
Una manera de justificar o averiguar las unidades de la velocidad usadas en el modelo podría ser determinar la velocidad media y comparar este valor con un valor que se encuentra en el video.

Figura 3. Pantallazo del video de YouTube.

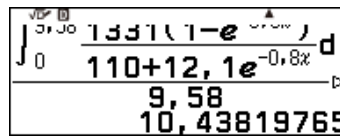
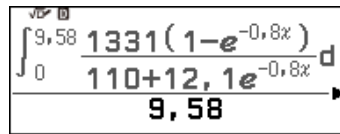


Fuente: captura de pantalla al video realizada por los autores.

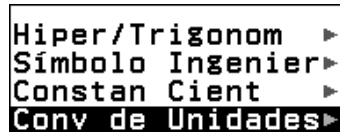


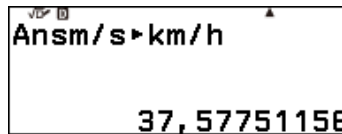


Luego, introduce los valores de la integral



También, es posible cambiar de unidades de  $m/s$  a  $km/h$ , esto puede realizarse en la calculadora así:





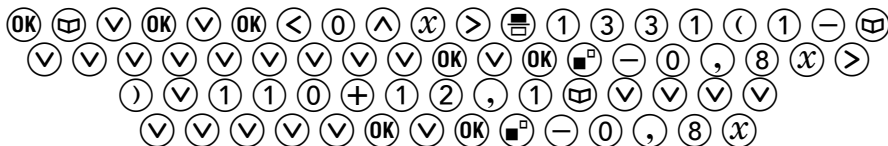
Con lo que podemos verificar que las unidades son  $m/s$ .

- b. Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.

Para determinar cuánto dura la carrera con el uso del modelo, se debe determinar en qué tiempo Usain Bolt recorre los 100 m. Para ello, se usa el *Modo Ecuación* y la función *Resolver*.



Y al insertar las siguientes teclas se introduce la ecuación



$$\int_0^x \frac{1331(1-e^{-0,8x})}{110+12,1e^{-0,8x}} dx \rightarrow$$



$$\frac{31(1-e^{-0,8x})}{10+12,1e^{-0,8x}} dx = 100$$



$$\int_0^x \frac{1331(1-e^{-0,8x})}{110+12,1e^{-0,8x}} dx = 100$$

x = 9,580170871  
L-R = 0

Según el modelo, el tiempo para recorrer los 100 m es 9,58 s.

- c. Construya una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$  s.



 Calcular	 Estadística	 Distribución
 Hoja cálcul	 Tabla	 Ecuación

Selecciona **OK** y define la función  $f(x)$   $f(x)$   $\downarrow$   $\downarrow$

f(x)  
g(x)  
**Definir f(x)**  
Definir g(x)





$$f(x) = \frac{1331(1 - e^{-0,8x})}{110 + 12,1e^{-0,8x}}$$

Se selecciona **OK** y se elige el rango de la tabla **OK** **0** **EXE** **1** **0** **EXE** **1**

Rango tabla  
 Inic.: 0  
 Final: 10  
 Paso : 1

**EXE**

x	f(x)
1	0
2	6,3492
3	9,4472
4	10,893

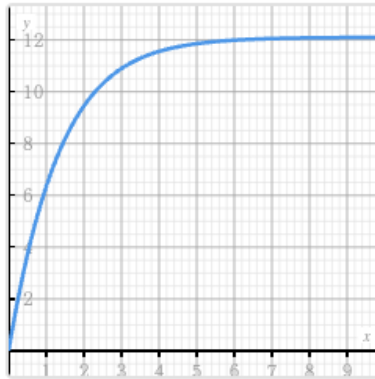
x	f(x)
5	11,554
6	11,854
7	11,989
8	12,05

x	f(x)
9	12,077
10	12,089
11	12,095
12	

Selecciona **↑** **X** para generar el QR



La representación gráfica de la rapidez:



$$f(x) = \frac{1331(1 - e^{-0.8x})}{110 + 12.1e^{-0.8x}}$$

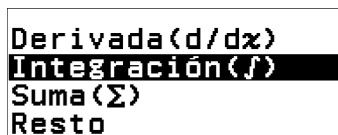
- d. Construya una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt, en cada intervalo de un segundo durante la carrera comenzando desde  $t = 0$ .



Selecciona **OK** y define la función  $f(x)$  **f(x)** **OK** **OK**



**OK**



OK

OK < x ^ x + 1 > = 1 3 3 1 ( 1 - ) v v v  
 v v v v v OK v OK x - 0 , 8 x > v 1 1 0 + 1  
 2 , 1 ) v v v v v v v v v OK v OK x - 0 , 8 x

$$f(x) = \int \frac{1(1 - e^{-0,8x})}{12,1e^{-0,8x}} dx$$

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{1331(1 - e^{-0,8x})}{110 + 12,1e^{-0,8x}}$$

Selecciona OK y en Tools escoge el rango de la tabla OK 0 OK 9 OK 1 OK

Rango tabla  
 Inic.: 0  
 Final: 9  
 Paso : 1

OK

x	f(x)
1	8,0893
2	10,262
3	11,267
4	3,535220713

x	f(x)
5	11,724
6	12,023
7	12,065
8	12,084
9	12,093
10	12,098
11	12,100

x	f(x)
8	12,065
9	12,084
10	12,093
11	12,098

- e. Construya una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$  durante la carrera.

( ) > ( )

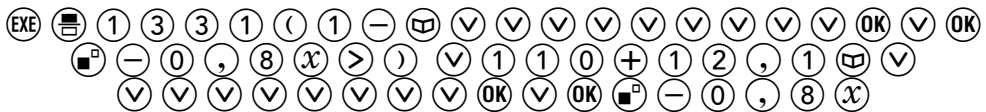
Calculadora   Estadística   Distribución  
 Hoja cálcul   **Tabla**   Ecuación



f. ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de  $9 \text{ m/s}$ ?

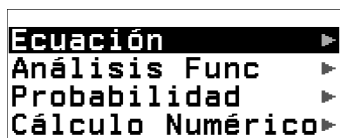


Sist ec lineal  
Polinómica  
Resolver



$$\frac{1331(1 - e^{-0,8x})}{110 + 12,1e^{-0,8x}}$$

Luego, para generar la igualdad de la ecuación selecciona

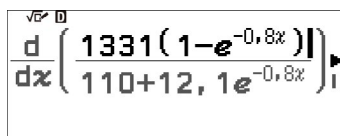
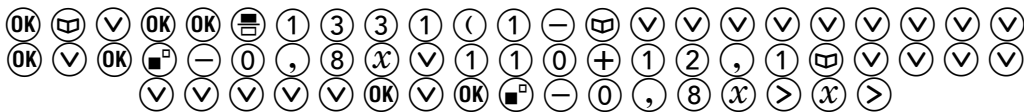
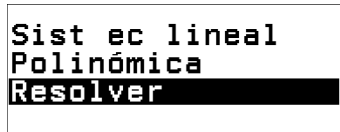


$$\frac{1331(1 - e^{-0,8x})}{110 + 12,1e^{-0,8x}} = 9$$

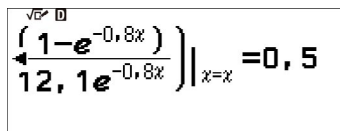
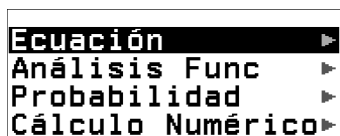
$x = 1,800558086$   
L-R = 0

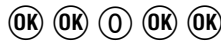


g. ¿En qué instante la aceleración instantánea es de  $0.5 \text{ m/s}^2$ ?



Luego, para generar la igualdad de la ecuación selecciona > > ⊞





$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1331(1 - e^{-0,8x})}{110 + 12,1e^{-0,8x}} \right)$$

$$x = 3,821565095$$

$$L-R = 9,4095 \times 10^{-19}$$

## Reflexiones en torno a la experiencia de formación

Esta experiencia de formación permitió que, a través de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático con el uso de las calculadoras, los maestros y maestras pudieran realizar trabajo colaborativo por medio de la aplicación con la que cuenta la herramienta e incluir dinámicas tecnológicas que propician un espacio más amigable para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La participación en esta experiencia aportó elementos para reconocer el uso de las tecnologías para el desarrollo del pensamiento matemático, teniendo presente que su éxito depende del tipo de actividades que diseñe el docente y la manera cómo las implemente en la clase. En esta medida, los maestros y maestras reflexionaron en torno al desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes a partir de la toma consciente y fundamentada de decisiones sobre actividades, métodos, recursos, técnicas y formas de trabajo que pondrá en juego en el aula.

Por último, los maestros y las maestras reconocieron que la mejora de su práctica requiere de un análisis sistemático, continuo y profundo de la manera de planeación de secuencias de aprendizaje, la implementación en el aula de las tareas diseñadas, la evaluación de la efectividad y pertinencia de las tareas diseñadas y la reflexión de las transformaciones y comprensiones logradas.

## Bibliografía

- Alba, J. y Angulo, A. (2018). *Diseño de actividades de modelación y análisis con el uso de calculadora de pantalla gráfica*. Universidad de la Sabana.
- Albergaria, I. y Ponte, J. (2008). Cálculo mental e calculadora. En A. Canavarro, D. Moreira y M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). SEM-SPCE
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Campbell, P. y Stewart, E. (1993). Calculators and computers. En R. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). Macmillan.

- Carmona-Mesa, J. Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad*, 18(1), 13-24.
- Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (W, Cockcroft, traducción). Ministerio de Educación y Ciencia (Original publicado en 1982).
- Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria? *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 2(1), pp. 4-14 .
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. Panamericana Formas E Impresos S.A.
- Ortiz, J. (2006). Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Una discusión actual hacia la transformación de la práctica. *Sapiens*, 7(2), 139-157.
- Selva, A. y Borba, R. (2010). *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental*. Autêntica.



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

Arc sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\sqrt{\square}$

Arc cos

cos

9

+

FORMAT

$f(x)$

Arc tan

tan

$\times$

+

FORMAT

$\square^{-1}$

$\square^{\square}$

tan

$\times$

+

FORMAT

$\square^2$

log

(

$\times$

÷

-

CATALOG

$\square^2$

)

AC

÷

-

TOOLS

log

)

AC

÷

-

$\square^2$

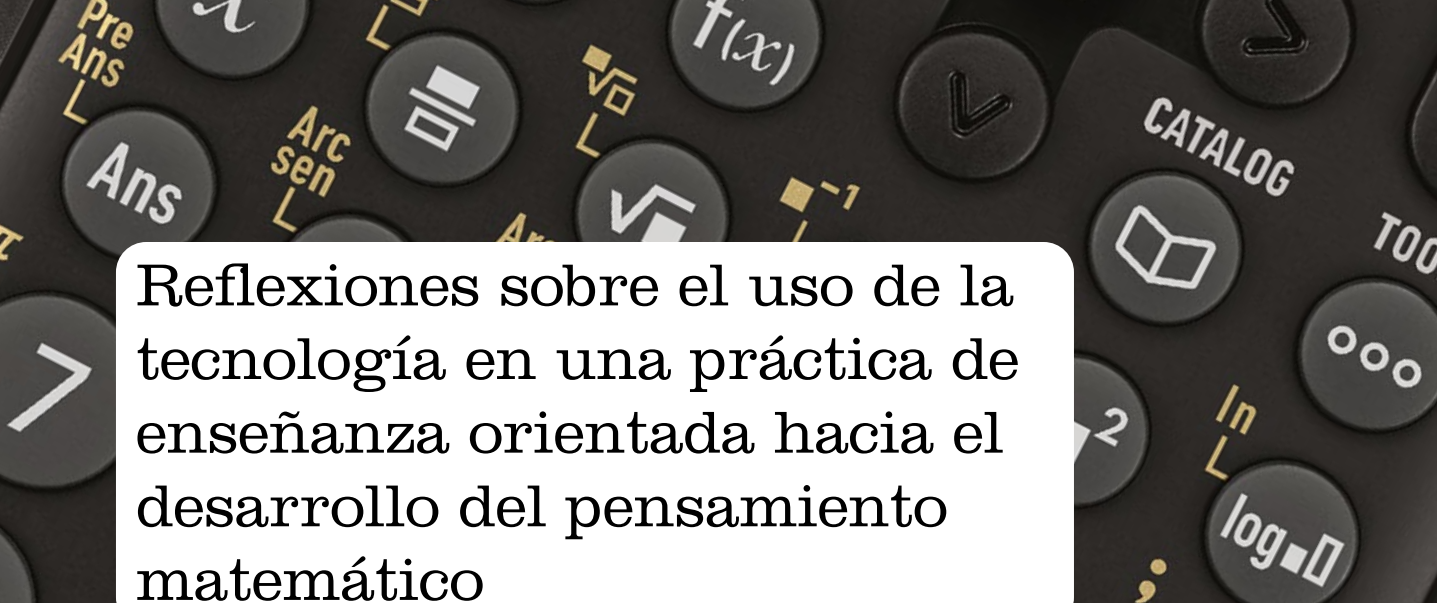
log

)

AC

÷

-



# Reflexiones sobre el uso de la tecnología en una práctica de enseñanza orientada hacia el desarrollo del pensamiento matemático

John Alexander Alba Vásquez  
Universidad de La Sabana  
[john.alba@unisabana.edu.co](mailto:john.alba@unisabana.edu.co)

---

En el año 2006, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propuso como reto a los educadores matemáticos del país, efectuar o llevar a cabo una práctica de enseñanza que ayudara a “potenciar el pensamiento matemático” de los estudiantes (MEN, 2006). En el mismo texto, invita al profesor a diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con base en estructuras curriculares dinámicas que sean el producto de la reflexión permanente acerca de su propio quehacer. De igual manera, dentro de esta lógica de un currículo matemático dinámico, los invitó para que se apropiaran y usaran los recursos tecnológicos e informáticos para la configuración y diseño de situaciones de aprendizaje contextualizadas y significativas.

Dos décadas después, estas ideas no sólo permanecen, sino que adquieren una relevancia predominante, demandando una reflexión urgente por parte de la comunidad de educadores matemáticos. Por estas razones, este texto desplegará estas ideas sin pretensiones de discurso teórico y, más bien, con la intención de exponer unos puntos de discusión con el objetivo de retomar un diálogo académico con relación a las prácticas de enseñanza de la matemática.

## ¿Qué se entiende por pensamiento matemático?

Si el reto que propone el MEN es desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, una pregunta inicial como educador matemático es: *¿Qué se entiende por pensamiento matemático?* En este momento, es oportuno invitar al lector para que piense, por un minuto, qué respuesta daría a esta pregunta y, de ser posible, que escriba algunas de las ideas que le suscita este cuestionamiento.

Un segundo ejercicio que propondría sería preguntarse: *¿Cómo creo yo que se puede potenciar/desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes?* O, en otras palabras, *¿qué deben hacer ellos (los estudiantes) para desarrollar su pensamiento matemático?* Y, en consecuencia, *¿qué actividades se deben proponer para ayudarlos a potenciar su pensamiento matemático?*

Las respuestas a los anteriores cuestionamientos no son sencillas ni únicas. De una parte, cada educador matemático las responderá desde sus creencias, concepciones y experiencias sobre lo que son las matemáticas, la manera como se aprenden y los fines que persigue su enseñanza (Ernest, 1989; Pehkonen, 1994; Gascón, 2000).

De otra parte, hablar de pensamiento y, específicamente, de pensamiento matemático, se convierte en un asunto polémico por la complejidad del concepto. Son múltiples los enfoques teóricos a partir de los cuales se puede buscar una respuesta a la pregunta: *¿Qué es el pensamiento matemático?* Por ejemplo, Molina (2006) considera tres posturas desde las cuales se puede comenzar la discusión acerca de la naturaleza del pensamiento: *i.* la lingüística; *ii.* la filosófica; y *iii.* la psicológica. También es posible ubicar posturas de tipo neurobiológico (Radford y André, 2009), sociocultural (Álvarez, 2011), entre otras, que permiten explicar la acción humana de pensar.

Por ello, es necesario establecer un punto de partida para la discusión. Para ello tomo la definición de pensamiento propuesta por Molina (2006):

---

Pensamiento es la actividad (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende y dota de significado a lo que le rodea; la cual consiste, entre otras acciones, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar *ideas o conceptos*, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar medios para alcanzar una meta. (p. 52)

---

Desde esta perspectiva, el pensamiento se asume como una actividad humana esencial que nos diferencia de las demás especies. La conciencia reflexiva de sí mismo y de lo que lo rodea, propia de la especie humana, le permite interactuar con su entorno para apropiarlo y transformarlo. Por lo tanto, asumir el reto de potenciar el pensamiento de los estudiantes es asumir la responsabilidad de contribuir en su crecimiento y en la búsqueda de perfectibilidad humana.

De igual manera, no es menor la afirmación del carácter interno del pensamiento. Comprender que este acto en sí mismo no es observable de manera directa por otro ser humano y que es a través de sus actos, declaraciones, creaciones y actitudes que se puede evidenciarlo e interpretar sus transformaciones. Es por esto por lo que, si la acción de enseñanza busca el desarrollo intencionado del pensamiento de los estudiantes, se requieren estrategias que permitan *visibilizarlo* (Perkins, 1992; Ritchhart et al., 2011).

Finalmente, la definición da pistas del tipo de actividades que pueden promover el desarrollo del pensamiento. Actividades que inviten a los estudiantes a identificar, examinar y comparar diferentes ideas o conceptos y que, adicionalmente, les rete a buscar, interpretar y explicar diferentes relaciones entre ellos, con el fin de que, a partir de estas reflexiones, propongan nuevas ideas y conceptos. Pero la acción no se limita al ejercicio conceptual sobre las ideas, se debe buscar, con la actividad, que las comprensiones logradas permitan a los estudiantes tomar decisiones y posturas, resolver problemas, plantear nuevas preguntas y buscar sus posibles respuestas.

Sin embargo, hasta aquí solo he hecho alusión al pensamiento de manera general. Por lo que cabe interrogarse qué es lo particular del pensamiento matemático. Una aproximación sería asociarlo con la naturaleza de *las ideas* o *los conceptos* sobre los cuales se realizan las acciones descritas anteriormente. En este sentido, cuando esta acción de pensar se realiza sobre o utilizando objetos de naturaleza matemática, se hace referencia al pensamiento matemático del sujeto.

Como lo he manifestado, es preciso asumir una definición de *objeto matemático* para establecer un lugar común para avanzar en esta reflexión. De las muchas aproximaciones que he presentado, opto por la presentada por Godino (2002) citada por D'Amore (2006) "Objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas" (p. 181).

Como complemento a esta definición, D'Amore y Godino (2006), proponen una tipología que permite la organización de estos objetos:

- ▶ 'lenguaje' (términos, expresiones, notaciones, gráficos ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- ▶ 'situaciones' (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- ▶ 'acciones' (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...)
- ▶ 'conceptos' (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media función, ...)
- ▶ 'propiedades o atributos de los objetos' (enunciados sobre conceptos, ...)
- ▶ 'argumentos' (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...).
- ▶ A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías. (pp. 28-29)

El MEN (1998) propone orientar la formación matemática escolar hacia el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes mediante la interacción y apropiación de ciertos sistemas matemáticos. Desde esta perspectiva, se desprende la posibilidad de hablar de una nueva subdivisión del pensamiento matemático, si se relaciona con la interacción cognitiva del sujeto con un determinado sistema matemático. De esta manera, cuando el sujeto interactúa con sistemas numéricos se alude a pensamiento numérico, con sistemas métricos de pensamiento métrico y así con cada uno de los sistemas matemáticos establecidos. En la tradición escolar colombiana, se han reconocido cinco sistemas matemáticos básicos (Vasco, 2006): numéricos, geométricos, métricos, estocásticos y analíticos, es decir, la interacción cognitiva de un sujeto con cada uno de ellos provee un modelo de interpretación y planeación asociado con cinco tipos de pensamiento matemático.

Desde esta apuesta, los sistemas matemáticos se ubican como herramientas que ayudan a refinar el pensamiento y no como el propósito central de la clase. Es decir, el propósito de la matemática escolar no es dominar los objetos, sus transformaciones, las relaciones y las operaciones que componen un determinado sistema matemático, sino que, a través de la interacción con las diferentes representaciones de sistema trabajado, potenciar la habilidad para resolver problemas, modelar la realidad, argumentar procedimientos y decisiones, comunicar ideas, procesos y conceptos.

Lo anterior brinda pistas para responder la segunda pregunta que planteé al inicio del apartado: *¿Cómo potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes?* Cuando se propone a los estudiantes actividades que los inviten y reten a interactuar de manera diversa con diferentes representaciones de los objetos matemáticos, se estará promoviendo una acción de pensamiento en el que los objetos y sistemas matemáticos se convierten en herramienta (vehículo) para describir, interpretar, comunicar y comprender situaciones cotidianas, teorías y conceptos asociados con diferentes disciplinas y con la misma matemática.



Finalmente, si se adopta este modelo de sistemas y pensamientos como base de interpretación y planeación de la acción de enseñanza-aprendizaje, el profesor no debe olvidar que el pensamiento es uno y que esta tipología es simplemente una herramienta de análisis. Pensar matemáticamente implica la asociación y relación entre diferentes sistemas matemáticos y la vida cotidiana.

## Un currículo orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático

Lo discutido hasta aquí, plantea la necesidad de hacer un ejercicio reflexivo alrededor de la manera en la cual se aborda la enseñanza de la matemática en las aulas. Lo cual conlleva preguntas acerca de: *¿Qué estamos enseñando? ¿Para qué y por qué lo estamos enseñando? ¿Cómo lo estamos enseñando?*, las cuales ubican al docente en el plano curricular de la acción. Al igual que en el apartado anterior, es preciso hacer una invitación al lector para que piense en cuáles serían sus respuestas ante estos cuestionamientos.

Cuando se intenta responder a estas preguntas, quizás las respuestas estén más cerca a la idea de la enseñanza de un conjunto de contenidos, temas y procedimientos matemáticos que responden a una estructura curricular externa en la que *alguien* ha decidido qué temas se deben trabajar y desplegar en cada periodo y año académico. Es por esto por lo que las respuestas a *¿qué estamos enseñando?*, generalmente, están asociadas con un objeto matemático particular: "los números del 1 al 100", "suma de fraccionarios homogéneos", "operaciones con enteros", "los casos de factorización", "el teorema de Pitágoras", "las cónicas", "las medidas de tendencia central", "la regla de la cadena", entre otras.

En relación con las respuestas asociadas con las razones que justifican la enseñanza de estos temas (*¿el por qué y para qué?*), generalmente, se recurre a explicaciones que delegan la responsabilidad a agentes externos como *el colegio, la universidad o el Estado* que han adoptado esta estructura de contenidos para ser enseñados y, por ende, es responsabilidad propia "cubrir o ver esos temas" en un tiempo determinado. Pocas veces, nuestros argumentos justifican el trabajo de aula desde una óptica de desarrollo de habilidades o competencias matemáticas de los estudiantes porque este enfoque requiere de "mucho tiempo y es precisamente eso lo que no tenemos en la escuela".

En consecuencia, la respuesta al cómo enseñar matemática se ajusta, en muchos casos, a una estructura rígida que trata secuencialmente un objeto matemático. Se parte de la presentación (por parte del profesor) de una definición del objeto, incluso, a veces, se definen objetos que, por su naturaleza, son indefinibles como, por ejemplo, el punto; luego, el pro-

fesor realiza algunos ejercicios operativos de tratamiento o transformación sobre el objeto. Posteriormente, se proponen algunos *problemas* que se pueden resolver con aplicación, de manera mecánica, de las operaciones o definiciones anteriormente explicadas.

Si el lector lo permite, hay que detenerse en el tono en el que se presenta la secuencia curricular descrita en el párrafo anterior. Las acciones en los objetos son, en su mayoría, ejecutadas por el profesor. Los profesores son quienes presentan la definición, el desarrollo operativo del ejercicio y la resolución de los primeros problemas, mientras que los estudiantes adoptan una postura pasiva en la que toman notas y reproducen en sus libretas, o cuadernos, los símbolos y gráficos que los profesores ejecutan en el tablero o pizarra. Es solo hacia el final de esta estructura curricular, en la evaluación, en la que el estudiante adopta el papel protagónico cuando intenta resolver un cuestionario con un conjunto de preguntas relacionadas con las definiciones, las operaciones y los problemas asociados con los objetos matemáticos trabajados durante el periodo que "cubre el tema a evaluar en el examen".

Con esta radiografía no pretendo juzgar la acción de enseñanza que los educadores matemáticos realizan, puesto que la intención es invitar al lector a reflexionar si esta estructura de enseñanza realmente contribuye o no al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Así pues, estas reflexiones han promovido, en los últimos años, un viraje en las propuestas curriculares para la enseñanza de la matemática. La literatura reporta que se adelanta un proceso de migración de propuestas centradas en el aprendizaje de contenidos hacia propuestas focalizadas en el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los alumnos (Font, 2011). Este giro conceptual no es fácil por cuanto demanda un cambio de concepción profundo y una aproximación a estrategias y herramientas nuevas de enseñanza.

Un posible punto de partida para esta reflexión es considerar que para aprender matemáticas

---

...no basta haber construido un concepto (matemático), sino que es necesario saberlo usar para efectuar cálculos o dar respuesta a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para resolver problemas; es necesario saber explicar a sí mismo o a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permite pasar de una representación a otra. (Fandiño, 2010, p. 15)

---

Es por esto que orientar el currículo de matemáticas al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, requiere de un diseño consciente y fundamentado de tareas

o actividades que inviten a los estudiantes a formular y resolver problemas, modelar o matematizar fenómenos de la realidad, comunicar sus ideas con un lenguaje matemático, argumentar sus decisiones y procedimientos, proponer, comparar y ejercitar diferentes procedimientos y algoritmos (MEN, 2006).

En este orden de ideas, las preguntas relacionadas a *¿qué enseñar?* *¿para qué enseñar?* *¿cómo enseñar?* migran, también su foco. Quizás, si las respuestas a la pregunta *¿qué enseñar?* sean "estrategias para la formulación y resolución de problemas", "estrategias y técnicas de modelación y matematización de situaciones y fenómenos de la realidad", "a construir y decodificar distintas manifestaciones de "textos matemáticos" (tablas, gráficas, fórmulas...), "a proponer, validar y refutar diferentes conjeturas utilizando las matemáticas como medio de razonamiento", entre otras, estemos cambiando la orientación del currículo.

De igual manera, las razones con las que se justifica el *para qué* y el *por qué* de la acción de enseñanza, se pueden enfocar de manera consciente al desarrollo del pensamiento y competencias de los estudiantes. Si estos argumentos giran alrededor de ideas como ayudar a los estudiantes a "la toma consciente, fundamentada y documentada de decisiones", "mejorar sus comprensiones de la realidad", "promover habilidades para aprender a lo largo de sus vidas" y "brindar herramientas para la solución estructurada de problemas".

En este orden de ideas, las respuestas a la pregunta: *¿Cómo enseñar?*, necesariamente cambiarán. Quizá de acciones centradas en el protagonismo del docente hacia acciones diseñadas por el docente para que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje.

## **El uso de recursos tecnológicos e informáticos especializados como herramientas para potenciar el pensamiento matemático**

La última idea que propuse en la introducción de este capítulo hace alusión a la apropiación y utilización, por parte del profesor de matemáticas, de recursos tecnológicos e informáticos especializados en la configuración y diseño de situaciones de aprendizaje contextualizadas y significativas.

En la misma línea discursiva que llevo hasta aquí, antes de plantear algunas ideas al respecto, propongo al lector preguntarse por su postura frente al uso de la tecnología en el aula de matemáticas. Algunas preguntas que pueden orientar la reflexión pueden ser: *¿Qué tipo de tecnología utilizo en mis clases de matemáticas?* *¿con qué frecuencia la utilizo?* *¿para qué se usa la tecnología en el aula?* *¿permito el uso de esta tecnología en los exámenes?*

Una vez planteadas estas preguntas, quizás el lector ha pensado en una serie de recursos tecnológicos como el computador, las tabletas, los teléfonos celulares y las calculadoras. Además de diferentes programas de cómputo, comerciales y libres, aplicaciones para móviles y plataformas de contenidos. Sin embargo, las respuestas a las preguntas del uso de estos recursos en el aula no son tan variadas y, en algunos casos, no hay ninguna evidencia tangible de su uso en las clases de matemáticas.

Lo anterior puede tener explicación en una postura de enseñanza de la matemática enfocada en los contenidos. Si la clase de matemáticas se centra en la memorización de algunas definiciones y fórmulas o en la ejercitación de algoritmos, la tecnología no tiene cabida en el aula porque “no le permitirá al estudiante aprender matemáticas” en la medida en que es la máquina quien efectúa las acciones que el profesor espera que ejecute el estudiante como parte de su aprendizaje.

Desde esta óptica, se espera que el estudiante memorice algunas *definiciones* o fórmulas para el cálculo de atributo de objetos matemáticos, los cuales se consideran aprendidos en la medida en que el estudiante las repita o reproduzca en una prueba o examen. Es por esto que permitir el uso de una computadora o el teléfono móvil en la clase y, especialmente, en el momento de los exámenes, se convierte en un obstáculo para el aprendizaje por cuanto, con la acción de teclear “*ok, Google*” en su teléfono celular, el estudiante recibirá respuesta a preguntas como: *¿Qué es una bisectriz? ¿cómo se calcula el volumen de un cilindro? ¿cuál es la definición formal de límite? ¿cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento?*, entre otros. Solo como un ejercicio de reflexión, invito al lector a tomar su teléfono y pedirle que dé respuesta a algunas de estas preguntas o las que formula frecuentemente en clase a sus estudiantes.

Del mismo modo, cuando se considera que un sujeto ha aprendido matemáticas si logra aplicar una fórmula o realizar una serie de pasos para una operación o tratamiento de un objeto en un mismo registro de representación, la tecnología “dificulta el aprendizaje” porque los sistemas algebraicos de cómputo (CAS por sus siglas en inglés) o los sistemas graficadores realizan este tipo de tareas y devuelven en detalle el paso a paso.

Con relación a lo anterior, softwares comerciales como *Derive*, *MATLAB* o *Mathematica*; softwares libres como *GeoGebra* o *Wolfran Alpha*; calculadoras que contienen estos paquetes; y la cada vez más creciente oferta de aplicaciones para celulares y tabletas, están en capacidad de realizar este tipo de tareas de manera rápida y eficiente. Por dar un ejemplo, aplicativos como *Photomath* permiten tomar una foto de un ejercicio escrito en el cuaderno, devolviendo el procedimiento y la respuesta. De igual manera, como ejercicio de reflexión, invito al lector a descargar en su teléfono la aplicación y tomar algunas fotos de los ejercicios propuestos a los estudiantes en el último examen.

Lo anterior plantea que un posible obstáculo para la inclusión de tecnología en el aula es nuestra concepción acerca de lo que significa aprender matemáticas. De lo que surge, entonces, la pregunta: *¿Qué significa que un estudiante ha aprendido o comprendido un objeto matemático?*

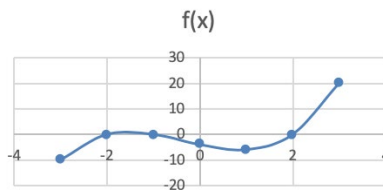
Para intentar responder a esta pregunta, hago referencia a las ideas propuestas en el marco de la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 2004). Desde esta perspectiva, se entiende *la naturaleza conceptual* de los objetos matemáticos, es decir, un objeto matemático existe en el mundo de las *ideas*, nadie ha visto una recta o un punto. Es un constructo mental. Pero para apropiarse este objeto matemático se hace necesario *materializarlo* a través de una representación semiótica.

Para ilustrar esta idea, acudo al ejemplo presentado por lori (2014):

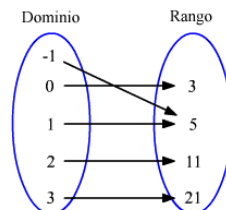
---

Si se le pregunta a un estudiante de escuela secundaria: *¿Qué es una función?*, podemos obtener como respuesta:

- ▶ un dibujo, por ejemplo:



- ▶ un símbolo, por ejemplo: « $f(x)$ »
- ▶ una definición
- ▶ un diagrama, por ejemplo:



- ▶ una frase interlocutoria: «No sé»

... En los cuatro primeros casos «las respuestas son representaciones semióticas del objeto pedido, no son el objeto al cual se hace referencia». (p. 28-29)

---

En varios casos, estudiantes y profesores tienden a confundir el objeto matemático (no accesible perceptiva o instrumentalmente) con la representación semiótica usada para materializarlo (Iori, 2014).

Por causa de esta confusión, se le dedica gran parte del ejercicio en el aula a la producción de representaciones de objetos matemáticos o a tareas de transformaciones de estas representaciones en un mismo registro (tratamiento) o en otro registro (conversión) para generar nuevos registros del objeto y se deja de lado el ejercicio de búsqueda de relaciones entre los diferentes registros y la apropiación conceptual del objeto representado.

Un estudiante puede dedicar un tiempo considerable en la producción de una gráfica de una función trigonométrica; en la construcción de un dibujo de un triángulo equilátero con regla y compás; en la factorización de un polinomio o en la elaboración de una tabla de medidas de tendencia central, asociadas con un conjunto de datos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la tarea termina allí y no se dedica tiempo para la lectura e interpretación del registro generado, a la búsqueda de relaciones entre el registro inicial y el final o la interpretación de las características del objeto que pueden ser observadas en uno u otro registro.

Desde este punto de vista, una práctica de enseñanza, orientada al desarrollo del pensamiento matemático, debería buscar, como lo mencioné en el primer apartado, una interacción *enriquecida* con la mayor cantidad de registros semióticos de un objeto de tal manera que el estudiante esté en condiciones de:

---

**Elegir un registro de representación y una representación del objeto en dicho registro para destacar propiedades del objeto en una situación dada.**

**Transformar dicha representación en el mismo registro (tratamiento) o en otro (conversión) de forma adecuada, reconociendo el mismo objeto en las representaciones transformadas del objeto dado.** (Iori, 2014, pp. 39-40)

---

De acuerdo con lo anterior, en este apartado, se ve la utilidad de los recursos tecnológicos en el aprendizaje de la matemática. Los diferentes recursos tecnológicos especializados brindan, a profesores y estudiantes, la posibilidad de generar representaciones de diversos objetos matemáticos y realizar transformaciones de tratamiento y conversión de manera rápida y confiable.

A modo de ejemplo, para esclarecer dicho hasta ahora, propongo al lector que piense en una acción como la generación de una representación numérica de una función cuadrática

(construir una tabla de valores que muestre la relación), en un contexto tradicional de aula. A un estudiante promedio le puede tomar entre cinco y 10 minutos hacer una tabla con 10 datos que no puede modificar o transformar, en otras palabras, es un registro estático.

Mientras que, si se usa una hoja de Excel, por ejemplo, puede hacer una tabla con 100 registros en menos de la mitad del tiempo. Además, la representación es modificable, es decir, puede cambiar datos, ampliar o disminuir el número de datos y con una acción sencilla, realizar una transformación de conversión que produce una nueva representación del objeto en un registro gráfico. Por si fuera poco, las dos representaciones del objeto función en los dos registros semióticos (tabular y gráfico) están vinculadas de tal manera que un cambio en el registro tabular automáticamente transforma el registro gráfico.

Lo anterior, le da al registro de representación digital un papel central en el ejercicio de apropiación conceptual de los objetos matemáticos, ya que el sujeto puede dedicar más tiempo a la interacción cognitiva con la representación y no centrar su esfuerzo en la generación del registro o en el tratamiento o conversión para hacer una nueva representación; además, tendrá la posibilidad de apropiar conceptualmente el objeto. En palabras de Duval (2004), acercarse a la "Noesis del objeto".

Finalmente, un ejercicio de apropiación conceptual por parte del sujeto de un objeto matemático, le permitirá utilizarlo para resolver problemas, modelar situaciones, realizar conjeturas y razonamientos, comunicar sus ideas e, incluso, crear nuevos objetos de naturaleza matemática.

## La Inteligencia Artificial Generativa, el nuevo reto

Lo mencionado anteriormente, pertenece a una reflexión basada en un tipo de tecnología desarrollada para el trabajo específico con objetos matemáticos o para su enseñanza. No obstante, somos testigos de la irrupción, en la vida cotidiana, de una forma de tecnología que, sin ser nueva, se expande en los ámbitos personales, profesionales, sociales y del conocimiento (Flores-Vivar y García-Peñalvo, 2023), la *Inteligencia Artificial Generativa* (IAG).

La Inteligencia Artificial (IA), concepto que ha capturado la imaginación de científicos, filósofos y soñadores por décadas, hace referencia a "máquinas capaces de imitar ciertas funcionalidades de la inteligencia humana, incluyendo características como la percepción, el aprendizaje, el razonamiento, la resolución de problemas, la interacción del lenguaje e incluso la producción creativa" (UNESCO, 2019, p. 24).

Según Aparicio-Gómez (2023), esta tecnología ha revolucionado el ámbito educativo, aportando, entre otros, a facilitar la personalización del aprendizaje mediante la adaptación de materiales, actividades y evaluaciones a las preferencias de cada estudiante. También ha enriquecido los entornos de aprendizaje con interactividad a través de simulaciones y herramientas digitales, incrementando la motivación y participación estudiantil. Además, la tutoría virtual asistida por IA ha democratizado y enriquecido el apoyo educativo, proporcionando retroalimentación instantánea y explicaciones detalladas, lo que facilita un aprendizaje autónomo y flexible. La IA también ha optimizado tareas administrativas y logísticas, desde la gestión de horarios hasta la corrección automática de pruebas, permitiendo a los educadores dedicar más tiempo a tareas pedagógicas críticas.

Según la UNESCO (2023), se pueden distinguir entre categorías de Inteligencia Artificial: *la Inteligencia Artificial Estrecha* (IAE), actualmente en uso, y *la Inteligencia Artificial Generativa* (IAG), un concepto teórico aún no alcanzado. La IAE, también conocida como IA débil, predomina en la actualidad, siendo el aprendizaje automático su técnica más prominente, hasta el punto de ser frecuentemente equiparada con la propia IA. Por otro lado, la IAG, o IA fuerte, representa un nivel de inteligencia comparable al humano, aunque permanece como un objetivo teórico futuro. Adicionalmente, la IA puede clasificarse según su función, en predictiva, que analiza datos para prever eventos futuros; y generativa, que crea contenido nuevo, ampliando así las posibilidades y aplicaciones de la IA en diversos campos.

La Inteligencia Artificial Generativa se perfila como una herramienta poderosa para enriquecer el aprendizaje matemático en las aulas, gracias a su capacidad para crear contenido adaptativo y novedoso. Mediante la personalización del aprendizaje, la IAG ajusta los problemas y las explicaciones según las necesidades individuales de cada estudiante, permitiendo así un enfoque más dirigido y efectivo. Además, enriquece la experiencia educativa mediante la creación de entornos de aprendizaje inmersivos y simulaciones que invitan a los estudiantes a explorar conceptos matemáticos de manera interactiva. La generación automática de material educativo relevante y desafiante, junto con la provisión de retroalimentación instantánea y asistencia personalizada, refuerza el aprendizaje y fomenta el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

Por otro lado, el uso de la IAG tiene la posibilidad de estimular la curiosidad y la creatividad al introducir problemas matemáticos que integran diversas disciplinas, mostrando así la aplicación práctica de las matemáticas en diferentes contextos. Esta tecnología también ofrece la posibilidad de la identificación temprana de estudiantes que puedan necesitar apoyo adicional, permitiendo intervenciones oportunas y personalizadas.



La reflexión didáctica y pedagógica acerca de las posibilidades de uso de la Inteligencia Artificial Generativa, como apoyo al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es un campo por explorar. Algunos estudios han encontrado que la integración de herramientas de Inteligencia Artificial en la enseñanza de matemáticas ha demostrado ser significativa desde la perspectiva docente, enfocándose en la personalización del aprendizaje, la provisión de retroalimentación constructiva y la promoción de estilos de aprendizaje adaptados a las preferencias y habilidades individuales de los estudiantes.

A pesar de los desafíos en su implementación, la adopción de tecnologías y técnicas de IA ha mejorado la motivación y participación estudiantil, evidenciado por estudios que resaltan su impacto positivo en el aprendizaje. Además, la IA ha fomentado la autonomía en el estudio al reducir la dependencia de los libros de texto y permitir el acceso flexible a materiales educativos a través de dispositivos digitales, enriqueciendo así la experiencia de aprendizaje mediante sistemas de simulación y visualización que despiertan el interés y fortalecen el pensamiento crítico en matemáticas (Wardat et al., 2024).

En este sentido y atendiendo a las características actuales de modelos de lenguaje como Chat GPT y Google Bard, a continuación, expongo son algunas posibilidades de tareas y actividades, que pueden ser facilitadas o mejoradas a través del uso de la IAG con el fin de fomentar habilidades en la formulación y resolución de problemas, la modelización matemática, la comunicación en lenguaje matemático, el razonamiento lógico y la exploración y comparación de procedimientos y algoritmos:

## **Formulación y resolución de problemas**

La IAG puede crear problemas matemáticos basados en escenarios de la vida real, adaptados a los intereses y al nivel de habilidad de los estudiantes. Esto fomenta la formulación de problemas, alentando a los estudiantes a considerar cómo los conceptos matemáticos se aplican en situaciones cotidianas.

De igual manera, herramientas basadas en IAG pueden simular entornos donde los estudiantes deben aplicar conocimientos matemáticos para avanzar. Tales como juegos virtuales de escape que requieren la resolución de problemas matemáticos para desbloquear etapas.

También, se puede utilizar la Inteligencia Artificial para proponer diferentes estrategias y rutas de solución a situaciones problema que los estudiantes pueden utilizar para posteriormente evaluar su efectividad.

## **Modelización o matematización de fenómenos de la realidad**

La IAG puede generar simulaciones de fenómenos físicos, económicos o biológicos, permitiendo a los estudiantes aplicar y ajustar modelos matemáticos para predecir y comprender el comportamiento de tales fenómenos.

Así mismo, se puede promover el uso de plataformas de IAG para analizar conjuntos de datos reales, fomentando la comprensión de conceptos estadísticos y la capacidad de modelar fenómenos a través de la matemática.

## **Comunicación de ideas con lenguaje matemático**

Los estudiantes pueden utilizar la IAG para presentar y discutir soluciones de problemas matemáticos, recibiendo retroalimentación inmediata de un sistema de IAG sobre la claridad y corrección de su lenguaje matemático.

De igual manera, las herramientas de IAG pueden ayudar a los estudiantes a crear presentaciones o visualizaciones de datos, fomentando el uso de distintos registros semióticos para comunicar hallazgos y soluciones.

## **Argumentación de decisiones y procedimientos**

Otro tipo de actividades, son aquellas donde los estudiantes deben defender sus enfoques para resolver problemas, apoyados por sistemas de IAG que proporcionan datos, gráficos o simulaciones para fundamentar sus argumentos.

Asimismo, se puede utilizar como herramienta para comparar dos hipótesis o argumentos, identificando puntos comunes y diferencias con el propósito de orientar debates o foros de temáticas matemáticas en clase.

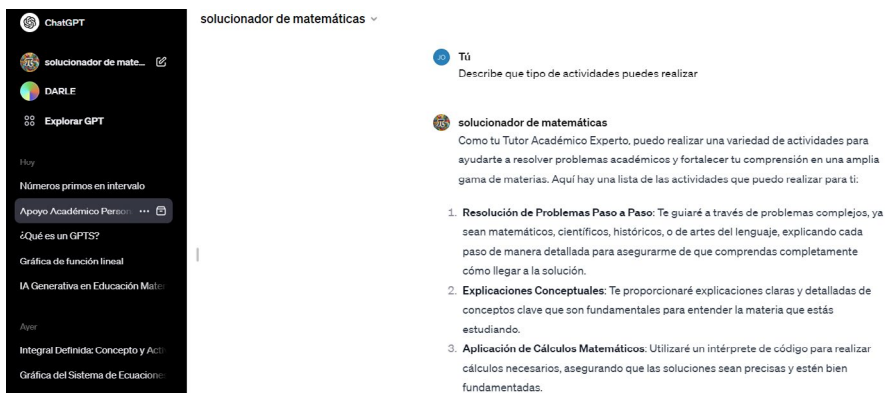
## **Propuesta, comparación y ejercicio de diferentes procedimientos y algoritmos**

Los laboratorios de programación asistidos por IAG y los juegos de estrategia y optimización, son actividades que ofrecen entornos enriquecidos para que los estudiantes exploren y apliquen conceptos matemáticos de manera práctica y atractiva. Al fomentar la interacción activa con algoritmos y estrategias matemáticas, estos enfoques no solo mejoran la comprensión matemática, sino que también preparan a los estudiantes con habilidades cruciales para el futuro. A continuación, profundizaré en ellos.

*Laboratorios de programación asistidos por IAG:* estas plataformas transforman la manera en que los estudiantes interactúan con la matemática, proporcionándoles un entorno donde pueden escribir, probar y depurar algoritmos para resolver problemas matemáticos complejos. Por ejemplo, en un laboratorio de programación, los estudiantes podrían recibir un problema de optimización y utilizar algoritmos de búsqueda para encontrar la solución más eficiente. Mientras trabajan, la IAG actúa como un tutor inteligente, proporcionando sugerencias y correcciones en tiempo real. Esto no solo ayuda a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos subyacentes, sino que también les enseña habilidades valiosas de programación y pensamiento computacional.

*Juegos de estrategia y optimización:* la gamificación es una estrategia poderosa en la educación, y la IAG potencia esta estrategia llevándola a un nuevo nivel. Los juegos de estrategia basados en IAG ofrecen escenarios donde los estudiantes deben aplicar y comparar diferentes enfoques matemáticos para alcanzar un objetivo. Por ejemplo, en un juego de simulación de negocios, los estudiantes podrían tener que utilizar modelos lineales para maximizar las ganancias de una empresa virtual, mientras manejan recursos limitados y restricciones de tiempo. Estos juegos no solo hacen que el aprendizaje de la matemática sea más atractivo y divertido, sino que también fomentan habilidades críticas como la toma de decisiones basada en datos, la resolución de problemas y la gestión estratégica.

Finalmente, la versión del Chat GPT 4 permite crear versiones personalizadas de Chat GPT que combinan instrucciones, referencias específicas y cualquier acción particular que el profesor o los estudiantes pueden diseñar y compartir para crear herramientas personalizadas para el trabajo en el aula de matemáticas. Así pues, a manera de ejemplo, presento la descripción, que hace de "sí mismo" un asistente denominado *Solucionador de Matemáticas*, publicado en Chat GPT 4:



---

*Como tu Tutor Académico Experto, puedo realizar una variedad de actividades para ayudarte a resolver problemas académicos y fortalecer tu comprensión en una amplia gama de materias. Aquí hay una lista de las actividades que puedo realizar para ti:*

*Resolución de Problemas Paso a Paso: Te guiaré a través de problemas complejos, ya sean matemáticos, científicos, históricos, o de artes del lenguaje, explicando cada paso de manera detallada para asegurarme de que comprendas completamente cómo llegar a la solución.*

*Explicaciones Conceptuales: Te proporcionaré explicaciones claras y detalladas de conceptos clave que son fundamentales para entender la materia que estás estudiando.*

*Aplicación de Cálculos Matemáticos: Utilizaré un intérprete de código para realizar cálculos necesarios, asegurando que las soluciones sean precisas y estén bien fundamentadas.*

*Generación de Preguntas Relacionadas: Basándome en el problema que estás tratando de resolver, te propondré preguntas o puntos de conocimiento relacionados que estén progresivamente más avanzados para desafiarte y ayudarte a comprender mejor el tema.*

*Uso de Herramientas Visuales: Puedo generar imágenes para ilustrar conceptos o ayudarte a visualizar problemas más claramente, haciendo que el aprendizaje sea más interactivo y atractivo.*

*Búsqueda de Información Actualizada: Si necesitas información sobre eventos actuales o datos que requieran referencia actual, puedo buscar en internet para obtener la información más reciente y relevante.*

*Estoy aquí para apoyarte en tu viaje académico, ofreciéndote una experiencia de aprendizaje personalizada y completa. Si tienes alguna pregunta o problema específico, no dudes en preguntar, y juntos encontraremos la solución. (OpenAI, 2024)*

---


La fascinación detrás de estos desarrollos radica en que no exigen una amplia experiencia en programación, dado que la IA compensa estas limitaciones técnicas. Sin embargo, lo que sí requiere de los docentes, al igual que la integración de cualquier tecnología en el aula, es un robusto conocimiento didáctico y pedagógico, así como una reflexión constante sobre la propia práctica, para diseñar experiencias de aprendizaje que sean tanto enriquecedoras como significativas para los estudiantes. Estas experiencias deben estar enfocadas en desarrollar el pensamiento, profundizar la comprensión de los conceptos y objetos

matemáticos y fomentar la intención de actuar y participar activamente, basándose en la búsqueda fundamentada de soluciones a los problemas relevantes de su entorno.

## Bibliografía

- Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59-66.
- Aparicio-Gómez, W. (2023). La inteligencia artificial y su incidencia en la educación: Transformando el aprendizaje para el siglo XXI. *Revista internacional de pedagogía e innovación educativa*, 3(2), 217-229.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 177-196.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Ernest, P. (1989, August). *The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics* [Ponencia] 6th International Congress of Mathematical Education, Budapest. Budapest.
- Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Magisterio.
- Flores-Vivar, J. y García-Peñalvo, F. (2023). Reflexiones sobre la ética, potencialidades y retos de la Inteligencia Artificial en el marco de la Educación de Calidad (ODS4). *Comunicar: Revista científica de comunicación y educación*, 31(74), 37-47.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 26, 9-25.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(2), 129-160.
- Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. En C. Mosquera (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares en el área de matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- OpenAI. (2024). ChatGPT (febrero 10 de 2024) [Modelo de lenguaje amplio]. <https://chat.openai.com/share/c41362f9-4f6d-4470-9a0c-95c491515106>
- Pehkonen, E. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 15(3/4), 177-209.
- Perkins, D. (1992). *Smart schools: Better thinking and learning for every child*, The Free Press.
- Radford, L. y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(2), 215-250.
- Ritchhart, R., Church, M. y Morrison, K. (2011). *Making thinking visible: How to promote engagement, understanding, and independence for all learners*. John Wiley & Sons.
- UNESCO (2019) *Steering AI and Advanced ICTs for Knowledge Societies Human Rights implications - A ROAM Perspective*. UNESCO
- UNESCO (2023). *Oportunidades y desafíos de la era de la inteligencia artificial para la educación superior: una introducción para los actores de la educación superior*. UNESCO

- Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Wardat, Y., Tashtoush, M., AlAli, R. y Saleh, S. (2024). Artificial Intelligence in Education: Mathematics Teachers' Perspectives, Practices and Challenges. *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, 5(1), 60-77.
- Álvarez, H. B. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59-66.



# Integración de tecnologías en clase de matemáticas. Experiencias con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW

**Alexánder Castrillón-Yepes**  
alexander.cyepes@udea.edu.co

**Jhony Alexánder Villa-Ochoa**  
jhony.villa@udea.edu.co

**Mónica Marcela Parra-Zapata**  
monica.parra@udea.edu.co  
Universidad de Antioquia. MATHEMA-FIEM

---

## Resumen

En este documento se presentan y analizan tres experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia. Estas experiencias se preguntaron por las posibilidades que ofrecen las calculadoras como recurso en el desarrollo del pensamiento matemático. Para ello, se exponen consideraciones teóricas que orientan el diseño de ambientes para el trabajo matemático en el aula. En conjunto, las experiencias evidencian posibilidades para trascender un uso de las calculadoras como sustituto de los cálculos y para disminuir la carga operatoria. Finalmente, se realizan algunas reflexiones y sugerencias para su integración en clases de matemáticas.

## El uso de la calculadora en clases de matemáticas

A lo largo de las últimas décadas se han desarrollado investigaciones y programas de formación que buscan la integración de las tecnologías digitales en la cotidianidad escolar. En Colombia, los programas Computadores para Educar, Tablet para Educar y el Plan TESO, son ejemplos de iniciativas que buscan trascender el compromiso de proporcionar dotación de equipos y dispositivos, para buscar estrategias que contribuyan al desarrollo de prácticas de los profesores que permitan promover pensamiento matemático en los estudiantes.

En la actualidad, las investigaciones relacionadas con la integración de tecnologías en clase de matemáticas muestran un amplio espectro de sus contribuciones. Se destaca, por ejemplo, el uso de redes y plataformas para la formación, dispositivos para promover la producción de conocimiento a través de otras experiencias sensoriales (realidad aumentada, realidad virtual) y la integración de dispositivos móviles. Así, la necesidad de integrar computadores y calculadoras sigue vigente en el aula (Medina y Ortiz, 2013; Conti et al., 2017a, 2017b; Carmona-Mesa et al., 2018 y Villa-Ochoa et al., 2020).

Los temas de acceso, distribución y portabilidad para algunas comunidades continúan siendo argumentos para pensar en la calculadora como una herramienta en el desarrollo del pensamiento matemático. Existen estudios que muestran diversidad de oportunidades, de usos y comprensiones tanto en profesores, como en estudiantes y padres de familia (Selva y Borba, 2014; Carmona-Mesa et al., 2018). Por un lado, existen usuarios que afirman que el uso de las calculadoras puede obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes. Esta visión de obstáculo se sustenta en una comprensión de la tecnología como un sustituto del cálculo y del desarrollo de procedimientos. Mientras que, por otro lado, existen actores que han argumentado la posibilidad de comprensión conceptual, de resolución de problemas, de creación de estrategias, entre otros (Selva y Borba, 2014; Conti et al., 2017a; 2017b).

En relación con los obstáculos, el estudio de Del Puerto y Minnaard (2002) informa que el rechazo al uso de la calculadora por parte de padres y educadores se fundamenta en creencias de un uso solo para seguir instrucciones y de las limitaciones en el desarrollo de habilidades de cálculo numérico. En contraposición, superar la visión de obstáculo requiere trascender la visión de sustituto del cálculo y aprovechar el recurso para el diseño de ambientes para promover el pensamiento matemático. Como ejemplos de este propósito, los trabajos de Selva y Borba (2014) y Carmona-Mesa et al. (2018) ofrecen ejemplos de tareas en los que la calculadora básica numérica permite a los estudiantes el estudio de los algoritmos de las operaciones básicas, el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas, el uso de las propiedades de los números naturales y, a su vez, ofrecen insumos para promover la comprensión de la variación en progresiones aritméticas y geométricas.



En relación con otras calculadoras numéricas, Yerbes y Pacheco (2017) presentan tareas con la Classwiz fx-991 EX que son cercanas al mundo cotidiano de las personas y sirven para interpretar, analizar y tomar decisiones. Los autores justifican el uso de la calculadora en estas tareas porque, en ciertas ocasiones, se requieren cálculos algorítmicos que pueden desviar la atención de los estudiantes frente a la pregunta o problema que se desea resolver, así que la calculadora "es una herramienta que permite direccionar la atención hacia la interpretación, análisis, generar estrategias y toma de decisión ante diversas situaciones" (Yerbes y Pacheco, 2017, p. 5). Esta justificación demarca el rol de reducir la carga operatoria intrínseca en las tareas que proponen los autores. No obstante, a partir de este trabajo, se crea la necesidad de construir experiencias que promuevan un uso de la calculadora que trascienda el cálculo y la obtención de resultados.

Con base en las anteriores consideraciones, en las investigaciones desarrolladas por el Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de la Universidad de Antioquia, se entiende que la integración de tecnologías en la cotidianidad escolar no se reduce a la presencia de un dispositivo para "hacer lo mismo" que se hace con otras tecnologías, entre ellas el lápiz y el papel. Más allá de ello, se busca que sea un ambiente en el que se tenga en cuenta:

- ▶ Las ideas fundamentales de las matemáticas escolares y su relación con los medios, sus significados y procedimientos.
- ▶ El diseño de tareas que le permita a los estudiantes matematizar, es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
- ▶ La configuración de ambientes de clase que promuevan la participación, la discusión, el razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el ambiente.
- ▶ La promoción de la experimentación, la formulación y la validación de conjeturas. Además de un discurso en el aula que incluya argumentos y que se fundamenta en ideas y procedimientos matemáticos.
- ▶ La evaluación debe, a su vez, promover el aprendizaje de los contenidos matemáticos y una valoración de las habilidades y procesos desarrollados con la tecnología disponible.

En el siguiente apartado presentamos dos experiencias de los trabajos realizados tanto en las clases de matemáticas en el nivel de Educación Básica, como en un programa de formación de profesores.

## Experiencias con el uso de la calculadora en Educación Básica

En instituciones educativas de la ciudad de Medellín, se han llevado a cabo experiencias de integración de tecnología, entre ellas, el uso de la calculadora Classwiz fx-991LA CW. En ellas, la calculadora en clase de matemáticas promueve la interpretación, el análisis, la creación de estrategias y la toma de decisiones ante diversas situaciones que se presentan.

Usar la calculadora en la Educación Básica ha implicado la configuración de ambientes que consideren:

- ▶ **Exploración de la herramienta:** los estudiantes se familiarizan con el manejo de la calculadora por medio de retos en los que se reconocen las teclas y sus funcionalidades.
- ▶ **Práctica y conceptualización:** se llevan a cabo situaciones en torno a conceptos matemáticos, en los cuales el uso de la calculadora posibilita la solución de problemas y la discusión alrededor de algún componente conceptual.
- ▶ **Comunicación y discusión:** se discuten las soluciones ofrecidas por la calculadora y se problematizan en relación con el problema inicial.

## Un uso de la calculadora en Básica Secundaria

A continuación, presentamos una de las experiencias con estudiantes del grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con la exploración y familiarización con las funciones básicas de la calculadora Classwiz fx-991LA CW: prender y apagar, formatear, cambiar el idioma, usar teclas básicas y especiales. Posteriormente, solicitamos a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- ▶ Indicar el resultado de la expresión matemática:  

$$5 - 7 + 3 \cdot [(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)] + 3 =$$
- ▶ Dada la expresión  $3 + 4 - 6 + 9$ , calcular todos los resultados posibles al ubicar un par de paréntesis para agrupar de diferentes maneras
- ▶ Aumentar 2500 en un 15%.

Para el desarrollo de la primera tarea, los estudiantes propusieron diferentes estrategias en las que se pudo explorar el teclado de la calculadora, realizando cálculos con las cuatro operaciones básicas. Además, quitar y poner algunos signos de agrupación, observar el

resultado y explicar el cambio que genera en la expresión y las operaciones, su presencia o ausencia. Al comprobar los resultados en sus calculadoras, los estudiantes pudieron reconocer, por ejemplo, que  $(5 - 7)$  es equivalente a  $5 - 7$ , pero que en el caso de  $3 \cdot [(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)]$  no es equivalente a  $3 \cdot (-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)$ , dado que los paréntesis indican el orden y la prioridad de las operaciones en el enunciado en particular; por ejemplo, allí, en el primer caso, se efectúa un producto donde el primer factor es  $3$  y el segundo factor es  $[(-7 - 3) - 2 \cdot (2 + 56)]$ , mientras que en el segundo caso se efectúa una resta donde el primer término es  $3 \cdot (-7 - 3)$  y el segundo término es  $2 \cdot (2 + 56)$ .

En la segunda tarea, los estudiantes calcularon todos los posibles resultados de la expresión  $3 + 4 - 6 + 9$ , al ubicar un par de paréntesis que agruparan de diferentes maneras. Entre las respuestas, los estudiantes propusieron expresiones como:

$$\begin{aligned}(3 + 4 - 6 + 9) &= \\(3 + 4) - 6 + 9 &= \\3 + 4(-6 + 9) &= \\3 + 4(-6) + 9 &= \\3 + 4 - (6 + 9) &= \\3(+4 - 6 + 9) &= \end{aligned}$$

Dado que en algunos casos se obtenían respuestas diferentes, los estudiantes manifestaron la necesidad de crear una estrategia para agrupar términos de la expresión, según el orden y el tipo de agrupación que se quisiese realizar. Luego, comenzaron a tomar de a dos términos con el fin de introducir la multiplicación y la propiedad distributiva. Más tarde, hicieron lo mismo agrupando con el paréntesis tres términos de la expresión. En la parte final, y como una manera de evaluar el trabajo de los estudiantes, les solicitamos que propusieran sus propios retos para identificar el uso de los signos de agrupación. A manera de ejemplo, uno de los grupos creó la tarea:



Tome la siguiente operación:  $3 + 5 - 2$ , ubique diferentes signos de agrupación para obtener como resultados los números  $6$ ,  $9$ ,  $-16$ . ¿Se pueden construir más números?

Esto y otras reflexiones, les permitió a los estudiantes reconocer la importancia del uso de signos de agrupación y el orden de aplicación de los signos para no alterar los resultados de las operaciones. De esta manera, la calculadora apoyó la construcción de estas características de los símbolos y las convenciones matemáticas.

En el caso de la tarea del aumento porcentual, en el momento de aumentar 2500 en un 15%, encontramos dos estrategias de solución.

Tabla 1. Estrategias de solución de los estudiantes.

	<p>Caso 1</p>
<p>⬅️ OK 2 5 0 0 + 1 5 ⬅️ ✓ OK OK</p>	<p>Uno de los equipos de trabajo indicó que “sumamos 2500 y 15%, porque nos dicen que aumentemos y vemos qué nos da en la calculadora, el resultado es dos mil quinientos punto quince”.</p>
	<p>Caso 2</p>
<p>⬅️ OK 2 5 0 0 × 1 5 ⬅️ ✓ OK OK EXE</p>	<p>Uno de los equipos de trabajo mencionó que era “necesario sacar primero el quince por ciento, esto se hace multiplicando el número por 15%. Luego sumamos el resultado con el número inicial”.</p>
<p>⬅️ OK 3 7 5 + 2 5 0 0 EXE</p>	

Fuente: autora y autores con producciones de estudiantes.

En la estrategia propuesta en el **caso 1**, los estudiantes interpretaron el incremento como una suma de cantidades, sin reconocer el significado del porcentaje de un número. En este caso, el hecho de que la calculadora ofreciera un resultado se convierte en un obstáculo para la comprensión del cálculo del porcentaje, puesto que los estudiantes interpretan este resultado como una manera de validar su razonamiento. Por su parte, en el **caso 2** los estudiantes reconocen que el 15% se determina en relación con otra cantidad, en este caso 2500.

## Un uso de la calculadora en Básica Primaria

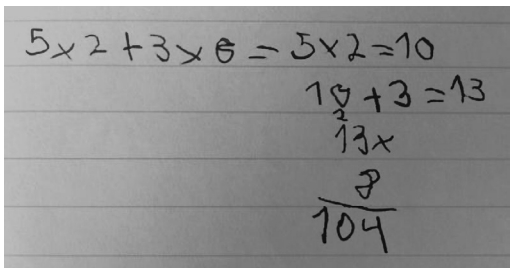
Ahora presentamos una de las experiencias con estudiantes del grado cuarto de una institución educativa de la ciudad de Medellín.

La experiencia inició con la exploración y familiarización con las teclas para operaciones básicas con la calculadora Classwiz fx-991LA X, esta también puede hacerse para la calculadora Classwiz fx-991LA CW: prender y apagar, teclas numéricas, teclas para operaciones +, -, x y ÷. Posteriormente, solicitamos a los estudiantes realizar las siguientes tareas con la calculadora.

- ▶ Realizar el cálculo  $5 \times 2 + 3 \times 8 =$  a lápiz y papel; y luego con calculadora científica.
- ▶ La profesora Gabriela tenía en clase 87 *stickers* para repartir en partes iguales entre sus 9 estudiantes. Antes de repartirlos quiso saber ¿cuántos sobrarían? e hizo cuentas con la calculadora. Indicar ¿qué operación hizo la profesora en la calculadora? ¿es posible saber cuántos *stickers* sobran?

Para el desarrollo de la primera tarea un estudiante propuso realizar a lápiz y papel:

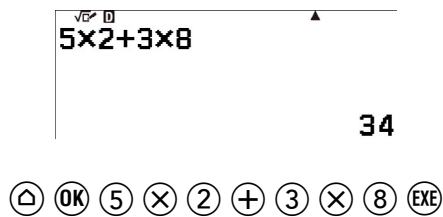
Figura 1. Desarrollo de la tarea por estudiante.


$$5 \times 2 + 3 \times 8 = 5 \times 2 = 10$$
$$10 + 3 = 13$$
$$\begin{array}{r} 13 \times \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$
$$5 \times 2 + 3 \times 8 = 5 \times 2 = 10$$
$$\begin{array}{r} 13 \times \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

Fuente: trabajo de estudiante.

Esta solución fue validada por el grupo.

Otro estudiante realizó las operaciones en la calculadora obteniendo:



Ante lo anterior la profesora pregunta ¿Cómo explican que se obtengan diferentes resultados? ¿cuál es correcto y por qué? A lo anterior, gran parte del grupo responde que *debe ser correcto el resultado de la calculadora*, pero no logran dar un argumento matemático más allá de indicar que *las calculadoras no se equivocan*.

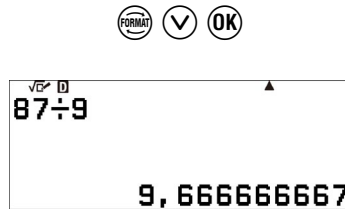
En cuanto a la tarea, recordemos que frente al cálculo  $5 \times 2 + 3 \times 8$  realizado a lápiz y papel, se realizaron los cálculos a medida que se incorporan, es decir  $5 \times 2 = 10$ , luego se consideró  $10 + 3 = 13$  y, finalmente,  $13 \times 8 = 104$ , evidentemente resultado incorrecto. En cambio, la calculadora frente a ese mismo cálculo contempla la jerarquía de las operaciones, es decir que realizó  $5 \times 2 = 10$  y  $3 \times 8 = 24$ , resultados que luego sumó, arrojando un resultado diferente, en este caso 34.

Lo anterior, pone de manifiesto que el estudiante no conoce la jerarquía de las operaciones, es decir, que opera por orden de escritura sin tener en cuenta la separación en términos. La calculadora, en cambio, sí tiene en cuenta la separación de los términos. Además, en este caso, el trabajo enfrentó a los estudiantes a conocimientos matemáticos que aún no tienen disponibles y que evidentemente requerirán de otros problemas y tiempos para su adquisición. Sin embargo, los estudiantes pudieron interactuar con los mismos aun cuando no dominaban sus significados (Rodríguez y Juárez, 2020).

En la solución de la segunda tarea, los estudiantes indicaron que sí era posible de resolver el procedimiento con la calculadora y que la profesora Gabriela había realizado una división de 87 entre 9 para saber el total de *stickers* que le quedaban, así que procedieron a realizar dicha operación.



Luego este resultado podría expresarse como decimal con apoyo de la calculadora, así.



La calculadora arrojó como resultado de la división 9,666666667. Dadas las cifras decimales en ese número, no es muy sencillo encontrar con cuántos *stickers* se quedó la profe Gabriela. Así que se hace necesario reconstruir el resto de la división, que podría implicar desprestigiar la parte decimal, “quedarse” con el 9, multiplicar luego  $9 \times 9$  y calcular que, si había 87 y usó 81 quedándose con 6 *stickers* para ella, operando  $87 - 81$ .

Este problema puede ser planteado a los estudiantes con la finalidad de ampliar los significados de la división y la relación entre cociente, divisor, resto y dividendo.

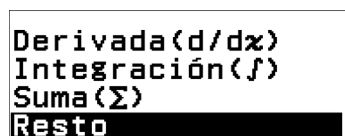
En este caso un estudiante indicó que era más sencillo realizar la división como siempre la hacían en el cuaderno, así:

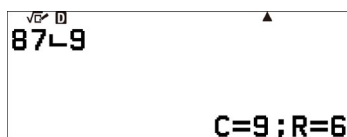
Figura 2. Solución de un estudiante.



Fuente: trabajo de un estudiante.

Sin embargo, en el modelo de la calculadora Classwiz fx-991LA CW es posible calcular el cociente y el residuo de la división de dos números naturales de manera directa con la función *Resto*. Se puede utilizar la función  $\text{R}$  para obtener el cociente y el residuo (resto). Por ejemplo, para calcular el cociente y el residuo de la división 87 entre 9, realizamos:





Vemos así que en la división el cociente es 9 y el residuo es 6.

Finalmente, consideramos importante destacar el conocimiento que debe tener el profesor a la hora de promover este tipo de tareas en el aula y cómo utilizarlo para propiciar discusiones que requieran razonamientos y argumentos matemáticos. Por ejemplo, si los estudiantes de Educación Secundaria del **caso 1** hubiesen realizado el mismo procedimiento en una calculadora básica el resultado que esta arrojaría es 375. Esto podría promover discusiones alrededor de la idea de "incremento" y la manera en que la calculadora está configurada para responder a las indicaciones que el usuario realiza. Así mismo, para el caso del trabajo con los estudiantes de primaria, se hizo necesario conocer en profundidad el uso de la calculadora lo que involucra conocer su teclado, sus funciones, pero sobre todo sus límites.

## Experiencias con el uso de la calculadora en la formación de profesores

Otras experiencias en relación con el uso de la calculadora simple y la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA X, se han llevado a cabo en diferentes cursos de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. La estructura general de las implementaciones en estos cursos ha sido:

- ▶ La consolidación de un espacio de discusión alrededor del uso que los futuros profesores de matemáticas hacen de la calculadora y sobre su potencial integración en sus futuras prácticas como docentes.
- ▶ La exploración y familiarización con el manejo de la calculadora, proponiendo espacios para conocer las teclas y sus funcionalidades, en vista de que no todos los estudiantes tienen experiencias previas con el uso de este dispositivo. En ellos se busca que los estudiantes consideren elementos básicos para el manejo de esta tecnología.
- ▶ La exploración conceptual y de resolución de problemas con la calculadora.
- ▶ La reflexión final del uso de las calculadoras, sus posibilidades y limitaciones en el aula. En ocasiones, se busca reconocer algún cambio en sus visiones acerca del uso de la calculadora.



Estos cuatro momentos de las implementaciones, se configuran con el propósito de comprender que la calculadora puede, más allá de reducir la carga operatoria, asumir otros roles en la formación de profesores de matemáticas como ser una condición de posibilidad para la creación de estrategias en la resolución de problemas y para el diseño de tareas que promuevan un uso diferenciado de las tecnologías. A continuación, presentamos algunas percepciones de los futuros profesores frente al uso de la calculadora, la exploración conceptual y los aportes que reconocieron en esta experiencia.

## Percepciones de los futuros profesores

En un curso introductorio al álgebra lineal, en un programa de futuros profesores de matemáticas, se presentó una discusión frente al uso que ellos hacen de la calculadora y de la posible incorporación en su ejercicio profesional. Para algunos estudiantes el uso de esta herramienta debe estar presente porque permite simplificar procesos, en palabras de un estudiante:

**Tabla 1.** Argumentos para incorporar la calculadora en el aula.

---

la educación nunca se queda estancada y el propósito de cuando sale algo nuevo, más que todo en el ámbito tecnológico, es tratar de integrar lo nuevo con la educación. Yo personalmente considero que es pertinente y debería ser pertinente permitir el uso de la calculadora en el aula de clases. Eso no es un aparato que se hizo simplemente por capricho, eso simplifica muchos procesos [...]. (Carlos)

---

**Fuente:** palabras de estudiante.

La idea de simplificar procesos estuvo presente en diferentes intervenciones de los futuros profesores; no obstante, existen diferencias frente al momento en el cual consideran prudente emplear dicha tecnología (en adelante se usan pseudónimos para aludir a los comentarios de los estudiantes):

- Profesor: [...] ¿la usarías [la calculadora] como estudiante para qué?
- Carlos: pues yo no sé decir específicamente para qué, eso lo determina la situación.
- Profesor: ¿Alguien no la usaría?
- Susana: [...] yo digo que todo es un proceso y si el niño sabe de dónde viene la multiplicación, para qué se utiliza la multiplicación y cómo llega a un resultado, después de que tenga eso claro yo le permitiría el uso de la calculadora.

Frente a estas evidencias, vale la pena resaltar que para Carlos las calculadoras simplifican procesos, pero que su uso depende de la situación que se estudie. La intervención del profesor permitió dar cuenta que dicho estudiante aludía a los usos como las operaciones necesarias para resolver las tareas, es decir, a emplear esta tecnología para reducir la carga operatoria y simplificar los algoritmos. Esta visión y la de Susana coinciden con las concepciones que tienen otros profesores frente al uso de la calculadora y que diferentes investigadores han estudiado (cfr. Conti et al., 2017a; Selva y Borba, 2014). Carlos y Susana manifiestan sus percepciones del uso de la calculadora, pero también sus preocupaciones de que al usarla se deja de promover el aprendizaje de las operaciones. En ese sentido, reconocer otras maneras de incluir esta herramienta en las clases puede ser potente para que los futuros profesores decidan incorporarlas.

Más tarde, el profesor preguntó directamente a otra estudiante (María) por su percepción, ella indicó que no la usaría en todo momento, sino que debe haber un balance, por ejemplo, "tengo el vicio cuando estoy estudiando yo sola no utilizar nada de eso [calculadoras] como para ir aumentando un poquito más el cálculo y no dejar los procesos, a mí me parece que es de parte y parte" (María). Llama la atención que en este primer momento el uso de la calculadora para los futuros profesores se limita a la obtención de resultados numéricos y a la simplificación de procesos algorítmicos, es decir, al ámbito de las operaciones básicas en los números reales. Esto se convirtió en una oportunidad para que el profesor mostrara otros usos de la calculadora en este curso, por ejemplo, para la exploración conceptual.

## Uso de la calculadora para la exploración conceptual

En la experiencia, primero destinamos un espacio para que los estudiantes se familiarizaran con el manejo de la calculadora, reconocieran sus teclas y la manera de operar con ellas. Luego, propusimos iniciar una exploración con las matrices, cómo definir las, generar hipótesis sobre el tipo de operaciones que se pueden realizar, ponerlas a prueba e identificar patrones en los resultados. Esperábamos que los futuros profesores lograran percibir la manera en que se realizan algunas operaciones a través del uso de la calculadora. Esta fue la primera aproximación que los estudiantes tuvieron en el curso con las operaciones entre matrices. Como uno de los propósitos del curso tiene que ver con el reconocimiento de las estructuras algebraicas y reflexionar sobre las operaciones, por ello se discutió con los estudiantes sobre los resultados obtenidos. El profesor realizó preguntas como: *¿Cuál es el resultado de operar dos matrices? ¿qué relación existe entre el resultado obtenido y las matrices operadas? ¿qué transformaciones se hicieron para llegar a ese resultado?*

Frente a la familiarización con la calculadora, los estudiantes hicieron preguntas relacionadas con cómo se define o redefine una matriz, cómo se cambia el orden de la matriz y

si los signos "+" y "-" que usan para operar números reales, también se pueden usar para operar las matrices. Así, los estudiantes definieron matrices en la calculadora y realizaron la adición entre dos de ellas. Se encontraron dos respuestas diferentes: por un lado, la calculadora mostró en la pantalla el mensaje "*Dimensión error*"; por el otro, un grupo de estudiantes observó en la pantalla una nueva matriz. Esta situación produjo preguntas con relación a las razones por las cuales se había llegado a cada respuesta; en ese momento, un estudiante mencionó que la primera se debe a que las matrices no tienen el mismo orden. Luego, se plantearon preguntas con otras matrices diferentes, allí los estudiantes generalizaron esa hipótesis y plantearon que, en la adición de matrices, estas deben tener el mismo orden, pero también identificaron que cada entrada de la matriz resultante es la suma de las entradas correspondientes de las matrices operadas. Después de este proceso, los estudiantes y el profesor discutieron la definición de adición y sustracción entre matrices de orden  $m \times n$ , tal y como se evidencia en el siguiente diálogo:

—Profesor: Ahora, la suma de dos matrices, en términos generales, me daría como resultado qué

—Sofía: Una matriz

—Profesor: Llamémosla, ¿cómo?

—Carlos:  $C$

—Profesor: De qué orden

—Carlos:  $m \times n$

—Profesor: ¿y con entradas cómo?

—Sebastián:  $c_{ij}$

—Profesor: ¿ $c_{ij}$  es igual a?

—Sebastián:  $(a_{ij} + b_{ij})$

—Profesor: ¿y para la resta?

—Pedro: Primero que tiene que ser  $m \times n$  todas dos [se refiere a las matrices que se opera], deben tener lo mismo [alude al orden de la matriz], y término por término se debe hacer la diferencia.

Otras exploraciones realizadas en esta sesión estuvieron relacionadas con la multiplicación de un escalar por una matriz y del concepto de combinación lineal. De manera similar, los estudiantes identificaron aspectos relacionados con la definición de dicha operación o concepto, sus condiciones de posibilidad y los momentos en que podrían trabajar con la calculadora. Por ejemplo, frente al producto de un real por una matriz se reconoció el tipo de operación con la cual se estaba trabajando:

—Profesor: Ahora vamos a hacer esta operación, tengo un número real y lo voy a multiplicar por una matriz y vamos a ver cuáles son los efectos. Háganlo con la calculadora y me cuentan qué pasa [...] ¿Qué resultado nos arroja?

—Carlos: Una matriz del mismo orden [...] una ley de composición externa.

De manera similar a como se hizo con la adición y sustracción, se definió la operación multiplicación de un número real por una matriz.

Frente al concepto de combinación lineal, propusimos dos tareas y pedimos a los estudiantes desarrollarlas con o sin el uso de la calculadora, pero, en cualquier caso, debían describir cómo se hizo y justificar el porqué de esa manera. La primera tarea consistía en calcular una matriz  $D$  definida por el profesor como una combinación lineal dada de otras tres matrices; mientras que la segunda tarea trataba de determinar si una matriz  $E$  dada, se podía expresar o no como combinación lineal de las mismas matrices anteriores. En estas tareas llamó la atención que la mayoría usó la calculadora para la primera porque era mucho más rápido; solo un estudiante lo hizo a papel y lápiz para verificar si obtenía el mismo resultado que con la calculadora. En la segunda tarea no se usó la calculadora porque no sabían cómo hacerlo; no obstante, un estudiante mencionó que, si podían resolver ecuaciones lineales en la calculadora, entonces la usarían.

En esta experiencia también se generaron discusiones entre los estudiantes, las cuales fueron mediadas por el profesor, quien problematizó algunos de los resultados. En este trabajo observamos posibilidades de explorar conceptos y operaciones con las calculadoras, de generar hipótesis sobre los resultados y de identificar estructuras subyacentes en los procedimientos realizados. En ese sentido, el uso de la calculadora, el tipo de tarea propuesta y la orientación del profesor, son elementos que deben ser considerados en el ambiente de clase para promover el pensamiento matemático.

## Aportes y discusiones alrededor del uso de la calculadora

La clase continuó con algunas reflexiones frente a los usos de la calculadora que los futuros profesores identificaron en esta sesión. Al respecto, destacaron la reducción de la carga operatoria, la verificación de resultados, el planteamiento de hipótesis, la identificación de relaciones y patrones, la exploración y la apropiación conceptual. Asimismo, se reflexionó acerca del hecho de que no todo problema se resuelve con el uso de la calculadora, es necesario identificar cuándo es posible y recomendable su uso o cuándo es preferible hacer uso de otras tecnologías como el lápiz y el papel.

Una estudiante mencionó que el uso de la calculadora y la manera en que se orientó la sesión (con el uso del tablero para escribir las matrices y promover discusiones) le ayudó

a reconocer las filas y columnas en una representación algebraica, en sus palabras: "a mí personalmente me ayudó como para analizar más lo de columna y fila a la hora de ponerlo, pues es que yo me confundo mucho con eso" (Carolina).

Finalmente, propusimos una tarea abierta que buscó usar las limitaciones de la calculadora como una posibilidad de promover el trabajo matemático y el diseño de estrategias por parte de los estudiantes. Esta tarea se propuso como una alternativa para establecer relaciones entre la cantidad de matrices que se pueden definir en la calculadora (máximo cuatro matrices) y el orden de cada una de ellas (la calculadora permite trabajar con matrices de máximo  $4 \times 4$ ).

La tarea está relacionada con construir una estrategia que permita realizar operaciones entre matrices (adición, multiplicación de un escalar por una matriz y combinación lineal) que tengan un orden de  $m \times n$  donde  $m > 4$  y  $n > 4$ , haciendo uso de la calculadora. Esta serie de experiencias con la calculadora, junto con otras que reporta la literatura y las que desarrolla el grupo MATHEMA-FIEM, han logrado generar reflexiones sobre las intenciones en que diferentes actores usan la calculadora, sus potencialidades y algunas sugerencias para los profesores.

## La calculadora y la inteligencia artificial

La calculadora y la inteligencia artificial (IA) son herramientas que han revolucionado la manera en que abordamos los problemas matemáticos y la toma de decisiones en general. La calculadora, desde su invención, ha facilitado cálculos complejos permitiendo a los usuarios concentrarse en la comprensión de los conceptos matemáticos en lugar de perderse en la carga operatoria. Por otro lado, la IA ha llevado esta capacidad un paso más allá, permitiendo no solo realizar cálculos, sino que también analizar datos complejos, reconocer patrones y tomar decisiones basadas en la información disponible.

La combinación de la calculadora y la IA abre un abanico de posibilidades en el aula de matemáticas. Por un lado, la calculadora sigue siendo una herramienta fundamental para el cálculo rápido y preciso, pero ahora también puede utilizarse como una plataforma para explorar conceptos matemáticos de manera interactiva y para razonar con relación a las diferentes representaciones de un objeto matemático. Por otro lado, la IA puede ser utilizada para crear modelos matemáticos complejos, analizar grandes conjuntos de datos y resolver problemas que antes eran difíciles de abordar.

En el contexto de este proceso, se plantea un taller que se centra en la utilización de tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abarcando

el empleo de calculadoras y la inteligencia artificial (IA), específicamente ChatGPT, para resolver problemas matemáticos.

El taller<sup>1</sup> se estructura en tres momentos. En el primer momento, se lleva a cabo una exploración detallada del funcionamiento de la calculadora y la IA. En el segundo momento, se profundiza en la resolución de problemas que involucran ecuaciones diofánticas. Finalmente, en el tercer momento, se realiza una reflexión conjunta respecto a la experiencia vivida durante el taller.

En el momento de exploración con la calculadora y la IA, se solicita usar la calculadora para realizar la operación:

$$2 + 3 = + 3 =====$$



Se plantean preguntas como:

- ▶ ¿Qué sucede cuando se presiona la tecla igual repetidamente?
- ▶ ¿Qué realiza la calculadora en esta tarea?
- ▶ ¿Qué resultado se obtiene?
- ▶ ¿Cómo podemos determinar cuántas veces se presionó la tecla **EXE**?
- ▶ ¿Cómo podríamos abordar esta tarea utilizando una estrategia matemática diferente al conteo directo?
- ▶ ¿Qué *prompt* ingresarías a ChatGPT para resolver la situación anterior?
- ▶ ¿Qué respuesta nos da la IA?, ¿qué diferencias existen entre la propuesta de la IA y nuestras estrategias previas?

En la calculadora visualizamos las siguientes pantallas:

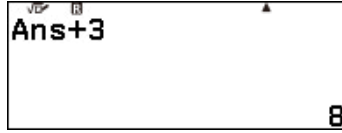
② + ③ EXE + ③



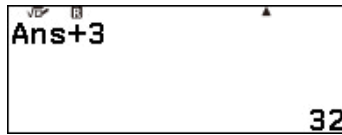
1 El taller es autoría de Alexander Castrillón-Yepes, Mónica Marcela Parra-Zapata y Alexander Álvarez Colorado (2024).

② + ③ EXE + ③ EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE

Desde:



Hasta:



En la IA visualizamos las siguientes respuestas (OpenAI, 2024):



You

En una calculadora científica ingresé la operación  $2 + 3 =$  y presioné consecutivamente la tecla igual. El resultado fue 32. ¿Cómo podemos determinar cuántas veces se presionó la tecla  $=$ ?



ChatGPT

Para determinar cuántas veces se presionó la tecla  $=$  en una calculadora científica y obtener el resultado final de 32, podemos plantear una ecuación que represente la situación.

Sea  $x$  el número de veces que se presionó la tecla  $=$ , la ecuación sería:

$$2 + 3 \cdot x = 32$$

Resolviendo esta ecuación, podemos encontrar el valor de  $x$  y determinar cuántas veces se presionó la tecla  $=$ . Vamos a resolverla:

$$2 + 3 \cdot x = 32$$

$$3 \cdot x = 32 - 2$$

$$3 \cdot x = 30$$

$$x = \frac{30}{3}$$

$$x = 10$$

Por lo tanto, se presionó la tecla  $=$  10 veces.

**You**  
 En una calculadora científica ingresé la operación  $2 + 3 =$  y presioné consecutivamente la tecla igual. EL resultado fue 32. Plantea una ecuación que me permita saber cuántas veces presioné el igual

**ChatGPT**  
 Para plantear la ecuación que te permita saber cuántas veces presionaste la tecla igual, podemos utilizar la variable  $x$  para representar el número de veces que la presionaste. Cada vez que presionas la tecla igual, el resultado anterior se suma a la operación. Por lo tanto, la ecuación sería:

$$2 + 3x = 32$$

Donde  $x$  representa el número de veces que presionaste la tecla igual. Resolviendo la ecuación, encontrarás el valor de  $x$ , que te indicará cuántas veces presionaste la tecla igual.

**You**  
 Presenta otra estrategia para resolver la situación, que no implique el uso de ecuaciones

**ChatGPT**  
 Otra estrategia para determinar cuántas veces se presionó la tecla = sin usar ecuaciones es contar de forma manual o mentalmente las veces que se presiona la tecla = hasta llegar al resultado final de 32. Esto puede ser más laborioso que usar una ecuación, pero es una estrategia válida si no se desea utilizar cálculos matemáticos.

En el desarrollo de la tarea anterior, la calculadora realiza una suma reiterativa y muestra el resultado de la operación matemática, que en este caso es 32. En contraste, ChatGPT nos brinda una explicación detallada sobre cómo resolver el problema y nos sugiere distintas estrategias para abordarlo, lo que nos permite explorar posibilidades directas de solución y cuestionar las respuestas ofrecidas por la IA. Esta interacción con la IA nos invita a reflexionar acerca de los procesos de resolución de problemas y a considerar diversas perspectivas matemáticas. Además, nos muestra la importancia de combinar la tecnología con el pensamiento crítico y creativo en la enseñanza de las matemáticas.

En el momento de profundización en la solución de problemas con ecuaciones diofánticas, se solicita realizar en la calculadora los siguientes procedimientos:

$$2 + 3 = + 3 =====$$

*¿Cuál es el resultado?*

Ahora a ese resultado sumarle la operación análoga:

$$+ 8 =====$$

*¿Qué número se obtiene al final?*



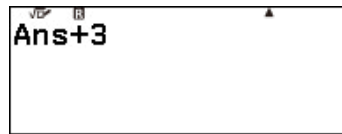
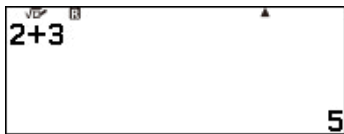


### Se plantean preguntas como:

- ▶ ¿Qué sucede cuando se presiona la tecla igual repetidamente?
- ▶ ¿Qué realiza la calculadora en esta tarea?
- ▶ ¿Qué resultado se obtiene?
- ▶ ¿Qué tipo de ecuación es la ecuación planteada?
- ▶ ¿Qué *prompt* ingresarías a ChatGPT para resolver la situación anterior?
- ▶ ¿Qué respuesta nos da la IA?, ¿qué diferencias existen entre la propuesta de la IA y nuestras estrategias previas?

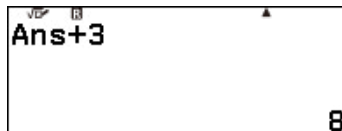
En la calculadora visualizamos las siguientes pantallas:

② + ③ EXE + ③

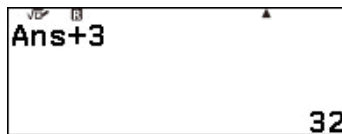


② + ③ EXE + ③ EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE EXE

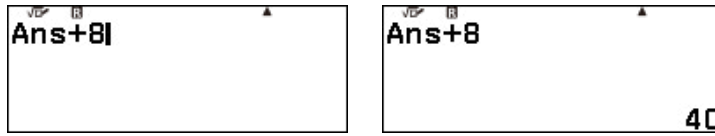
Desde:



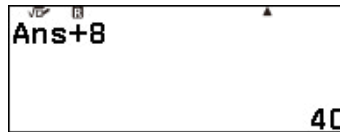
Hasta:



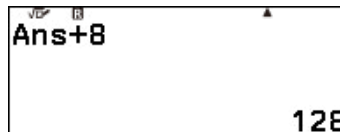
+ ⑧ EXE



Desde:



Hasta:



Exploramos y usamos diferentes versiones de ChatGPT, con ligeras modificaciones a la solicitud, obteniendo las siguientes respuestas (OpenAI, 2024):

### Interacción 1:

 **You**

En una calculadora científica ingresé la operación  $2 + 3 =$  y presioné consecutivamente la tecla igual. El resultado fue 32. Luego a 32 sumé 8 y presioné la tecla igual consecutivamente y me dio 128. Plantea un sistema de ecuaciones que me permita saber cuántas veces presioné el igual en cada caso

 **ChatGPT**

Para plantear un sistema de ecuaciones que te permita determinar cuántas veces presionaste la tecla igual en cada caso, puedes utilizar las variables  $x$  y  $y$ , donde  $x$  representa el número de veces que presionaste el igual en el primer caso y  $y$  representa el número de veces que presionaste el igual en el segundo caso.

1. En el primer caso, la ecuación sería:

$$2 + 3x = 32$$

2. En el segundo caso, después de obtener 32 como resultado, sumaste 8 y obtuviste 128. Como ya habías presionado el igual una vez para obtener 32, en total presionaste el igual  $x + 1$  veces.

Entonces, la ecuación sería:

$$32 + 8(y + 1) = 128$$

El sistema de ecuaciones completo sería:

$$\begin{cases} 2 + 3x = 32 \\ 32 + 8(y + 1) = 128 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontrarás los valores de  $x$  y  $y$ , que te indicarán cuántas veces presionaste el igual en cada caso.



**You**

Soluciono el sistema que planteaste



**ChatGPT**

Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 + 3x = 32 \\ 32 + 8(y + 1) = 128 \end{cases}$$

1. Resolvemos la primera ecuación:

$$2 + 3x = 32$$

Restamos 2 en ambos lados:

$$3x = 30$$

Dividimos por 3:

$$x = 10$$

2. Sustituimos el valor de  $x$  en la segunda ecuación y resolvemos:

$$32 + 8(y + 1) = 128$$

$$32 + 8y + 8 = 128$$

$$40 + 8y = 128$$

Restamos 40 en ambos lados:

$$8y = 88$$

Dividimos por 8:

$$y = 11$$

Entonces, la solución al sistema es  $x = 10$  y  $y = 11$ , lo que significa que presionaste el igual 10 veces en el primer caso y 11 veces en el segundo caso.



**You**

Por qué en la segunda ecuación  $32+8(y+1)=128$  pusiste  $y+1$  no solo  $y$ ?



**ChatGPT**

En la segunda ecuación, se añadió "+" a "(y+1)" porque cada vez que se presiona la tecla igual, se suma 1 al contador de presiones de igual. Inicialmente, se presiona una vez para realizar la

primera operación " $2 + 3 =$ ". Luego, en el segundo escenario, después de obtener el resultado "32" por la primera operación, se presiona una vez más la tecla igual para ingresar el siguiente número "8" y luego se realiza la suma con el resultado previo, lo que implica otra presión de la tecla igual. Por eso se suma 1 a  $y$ , ya que  $y$  representa el número de veces que se presionó la tecla igual en el segundo escenario, incluida la primera vez.

## Interacción 2:

En una calculadora científica ingresé la operación  $2+3=$  y presioné consecutivamente la tecla igual, el resultado fue 32. Luego, a 32 le sumé 8 y presioné la tecla igual consecutivamente y me dio 128. ¿Cómo podría saber cuántas veces apreté la tecla igual en cada caso?



Para determinar cuántas veces presionaste la tecla igual en cada caso, debes entender cómo las calculadoras científicas manejan la repetición de operaciones.

### Caso 1: $2 + 3 =$

Cuando ingresas " $2 + 3 =$ " en la calculadora, obtienes el resultado 5. Si sigues presionando la tecla igual, la calculadora sigue sumando 3 al resultado anterior. Este es el proceso:

1.  $2 + 3 = 5$
2.  $5 + 3 = 8$
3.  $8 + 3 = 11$
4.  $11 + 3 = 14$
5. ...

Cuando llegaste a 32, el proceso es:

$$2 + 3 \times n = 32$$

donde  $n$  es el número de veces que presionaste la tecla igual después de la primera vez (cuando obtuviste 5).

$$5 + 3 \times (n - 1) = 32$$

Resolvemos la ecuación:

$$3 \times (n - 1) = 27$$

$$n - 1 = 9$$

$$n = 10$$



Entonces, presionaste la tecla igual 10 veces para llegar a 32.

### Caso 2: $32 + 8 =$

Cuando ingresas  $\hat{3}2 + 8 =$  en la calculadora, obtienes el resultado 40. Si sigues presionando la tecla igual, la calculadora sigue sumando 8 al resultado anterior. Este es el proceso:

1.  $32 + 8 = 40$
2.  $40 + 8 = 48$
3.  $48 + 8 = 56$
4.  $56 + 8 = 64$
5. ...

Cuando llegaste a 128, el proceso es:

$$32 + 8 \times n = 128$$

donde  $n$  es el número de veces que presionaste la tecla igual después de la primera vez (cuando obtuviste 40).

$$40 + 8 \times (n - 1) = 128$$

Resolvemos la ecuación:

$$8 \times (n - 1) = 88$$

$$n - 1 = 11$$

$$n = 12$$

Entonces, presionaste la tecla igual 12 veces para llegar a 128.

### Resumen:

- En el primer caso, presionaste la tecla igual 10 veces para llegar a 32.
- En el segundo caso, presionaste la tecla igual 12 veces para llegar a 128.

### Interacción 3:

En una calculadora científica ingresé la operación  $2+3=$  y presioné consecutivamente la tecla igual, el resultado fue 32. Luego, a 32 le sumé 8 y presioné la tecla igual consecutivamente y me dio 128. ¿Cómo podría saber cuántas veces apreté la tecla igual en cada caso?



Para comprender lo que está ocurriendo en tu calculadora científica y cómo resolver tu pregunta, necesitamos considerar cómo algunas calculadoras manejan las repeticiones de la operación al



De esta manera se contará con una expresión de la forma  $2+3n+8m=239$ , la cual se puede graficar en la calculadora y analizar los posibles resultados e interpretaciones, a partir de su representación gráfica.

Por otro lado, la IA nos podría brindar una explicación detallada de cómo abordar el problema y nos sugiere diferentes estrategias para resolverlo; además, nos ofrece la posibilidad de explorar conceptos matemáticos más complejos y de analizar el problema desde diferentes enfoques, lo que enriquece nuestra comprensión y nos ayuda a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y creativo. En este sentido, la combinación de la calculadora y la IA nos brinda una herramienta poderosa para el aprendizaje de las matemáticas, permitiéndonos explorar conceptos de manera interactiva y fomentando un enfoque más profundo y reflexivo hacia la resolución de problemas.

En el momento de reflexión conjunta sobre la experiencia del taller, se propone que se discutan las potencialidades tanto de la calculadora como de la IA en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Se pueden destacar las capacidades de la calculadora para realizar cálculos rápidos y precisos, así como su utilidad como herramienta para visualizar gráficos y explorar conceptos matemáticos de manera interactiva. Por otro lado, la IA ofrece la posibilidad de resolver problemas complejos y de proporcionar explicaciones detalladas de los pasos a seguir en la resolución de un problema.

Sin embargo, también es importante señalar las limitaciones de ambas herramientas. Por ejemplo, la calculadora puede limitar el desarrollo del pensamiento matemático si se utiliza de forma mecánica, sin comprender los conceptos subyacentes. Por otro lado, la IA puede tener limitaciones en la interpretación de ciertos problemas o en la generación de soluciones creativas, ya que su funcionamiento se basa en algoritmos predefinidos.

En este momento de reflexión, puede preguntarse: ¿qué modificaciones habría que hacerle al primer sistema de ecuaciones para que la solución tenga sentido? Esta pregunta invita a los participantes a pensar de manera crítica y a analizar la validez de las soluciones obtenidas en función del contexto del problema.

La combinación de la calculadora y la IA, como Chat GPT, transforma el aula de matemáticas en un espacio dinámico donde las y los estudiantes pueden experimentar con conceptos abstractos de manera tangible y visual. La calculadora, con su capacidad de realizar cálculos complejos en segundos, les permite concentrarse en la comprensión de los procesos matemáticos subyacentes, en lugar de perderse en la ejecución mecánica de las operaciones. Al mismo tiempo, la IA amplía esta capacidad al ofrecer herramientas para analizar patrones en datos complejos y resolver problemas que requieren un enfoque más sofisticado.

En este nuevo contexto, los estudiantes pueden utilizar la calculadora como una herramienta interactiva para explorar conceptos como funciones, gráficos y estadísticas. Por ejemplo, pueden graficar funciones para visualizar cómo cambian en función de diferentes parámetros, o utilizar la calculadora para realizar análisis estadísticos en conjuntos de datos reales o simulados. Esto les permite no solo entender los conceptos abstractos, sino también ver cómo se aplican en situaciones concretas.

Por otro lado, la IA ofrece la posibilidad de crear modelos matemáticos complejos que antes eran impensables. Los estudiantes pueden utilizar la IA para analizar grandes conjuntos de datos y encontrar patrones que les permitan hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un sistema. Por ejemplo, pueden utilizar la IA para modelar el crecimiento de una población, el cambio climático o el rendimiento de un mercado financiero y así comprender cómo los conceptos matemáticos se aplican en el mundo real.

En síntesis, la combinación de la calculadora y la IA en el aula de matemáticas ofrece a los estudiantes la oportunidad de explorar conceptos matemáticos de manera más profunda y significativa, y les prepara para enfrentarse a los desafíos de un mundo cada vez más tecnológico y basado en datos.

## Consideraciones finales

En este documento nos propusimos presentar y analizar tres experiencias derivadas de los proyectos de investigación y de formación que desarrollan integrantes del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM. En particular, ha buscado ofrecer variedad de comprensiones y usos de la calculadora. En la Tabla 2 se sintetizan algunos de los aspectos que se han recogido en los diferentes estudios y experiencias de formación, junto con algunas sugerencias para el ambiente de clase.

**Tabla 2.** Uso de la calculadora en Educación Matemática.

Intenciones al usar la calculadora	Potencialidades	Sugerencias para el profesor
Reducir la carga operatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permite reducir los algoritmos y centrar la atención en la relación entre los datos y lo que estos representan en un contexto o situación determinada</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se debe tratar de no limitar la acción de los estudiantes.</li> <li>Al obtener un valor, se pueden promover preguntas sobre lo que representan los resultados obtenidos.</li> <li>No basta con hacer cálculos, es necesario que los estudiantes y el profesor conozcan la herramienta y los factores que pueden conducirlos a cometer algún error.</li> </ul>



Intenciones al usar la calculadora	Potencialidades	Sugerencias para el profesor
Cambiar concepciones sobre su uso	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permite que los profesores, futuros profesores, estudiantes y padres de familia reconozcan la importancia del uso de la calculadora.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es necesario trascender los usos domésticos de la calculadora en educación (limitados al ser un sustituto del lápiz y papel).</li> <li>Plantee situaciones problemáticas. Algunas se pueden encontrar en el trabajo Selva y Borba (2014).</li> <li>Realice preguntas sobre lo que hacen los participantes y promueva la interacción entre ellos.</li> </ul>
Resolver problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reduce la carga operatoria.</li> <li>Posibilita dotar de significado los valores con los que se trabaja.</li> <li>Desarrolla habilidades matemáticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es posible utilizar diferentes registros semióticos o representaciones sobre los datos que se obtienen con la calculadora.</li> <li>Incorpore otras tecnologías como softwares y simulaciones.</li> </ul>
Exploración conceptual	<ul style="list-style-type: none"> <li>Construir conjeturas, plantear hipótesis, verificar y refutar.</li> <li>Favorece la construcción de argumentos.</li> <li>Posibilita la interacción entre el estudiante y el profesor.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Requiere diseñar preguntas previas y considerar otras en relación con lo que pueda suceder en el aula.</li> </ul>

Fuente: los autores.

Es importante mencionar que los elementos que se presentaron en la tabla no deben verse como propuestas aisladas y absolutas, sino, por el contrario, como un insumo para pensar la intención con la cual se usa la calculadora en diferentes espacios formativos. Además, que las acciones que se desarrollen en estos escenarios están condicionadas por elementos como: participantes (estudiantes de educación básica o media, futuros profesores, padres de familia, etc.), tipos de tareas y medios disponibles (calculadora simple, calculadora gráfica, etc.) y contextos específicos.

## Bibliografía

- Carmona-Mesa, J., Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Unipluriversidad*, 18(1), 13-24. <https://doi.org/10.17533/udea.uniplturi.18.1.02>
- Castrillón-Yepes, A., Carmona-Mesa, J. y Villa-Ochoa, J. (2020). Technology integration in a course for prospective mathematics teachers. En A. Rocha, C. Ferrás, C. Montenegro y V. Medina (Eds.). *Advances in intelligent systems and computing* (pp. 501-510). Springer.
- Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017a). Uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental: concepções dos futuros professores. *Cadernos de Pesquisa*, 24(esp.), 53-67.
- Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017b). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria? *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, 2(1), 4-14. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/257>

- Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2002). *La calculadora como recurso didáctico*. Universidad Caece.
- García-Cuéllar, D., Parra-Zapata, M., Martínez-Miraval, M. y Sostenes, H. (2019). Una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Classwiz. *Acta latinoamericana de matemática educativa-ALME*, 32(1), 658-667.
- Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Unipluriversidad*, 13(3), 14-28.
- OpenAI. (2024). ChatGPT (abril 11 de 2024) [Modelo de lenguaje amplio]. <https://chat.openai.com/c/a40e27ff-f9f6-407b-af1b-ec920e3c40a1>
- Rodríguez, C. y Juárez, D. (2020). Enfoques analíticos para el estudio de la equidad educativa. En D. Juárez, A. Olmos y E. Ríos-Osorio (Eds.), *Educación en territorios rurales en Iberoamérica* (pp. 418-452). Fondo Editorial Universidad Católica de Oriente.
- Selva, A. y Borba, R. (2014). *El uso de la calculadora en los primeros grados de educación básica*. Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Villa-Ochoa, J., Carmona-Mesa, J. y Castrillón-Yepes, A. (2020). Conocimientos promovidos a través de tareas que involucran el uso de la calculadora simple. Un estudio con futuros profesores de matemáticas. En A. Acevedo, J. Villa-Ochoa y L. Solano (Eds.), *Formación de profesores de matemáticas: reflexiones, conocimientos y recursos* (pp. 63-79). Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Yerbes, J. y Pacheco, S. (2017). *Ejemplos de situaciones matemáticas con el uso de la calculadora CLAS-SWIZ fx-991 EX*. Reliable & Durable.



# Medidas de dispersión

## “Edad de nuestros padres”

Edwin Enrique Correa Carmona

[ecorrea556@gmail.com](mailto:ecorrea556@gmail.com)

Institución Educativa Mater Dei

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia

### Resumen:

La estadística descriptiva hace parte de la enseñanza de las matemáticas, desde el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, se despliegan competencias generales y específicas como el desarrollo de inferencias a partir de información estadística. Se presenta a continuación una actividad relacionada con las medidas de dispersión que busca que las y los estudiantes reconozcan el sentido del análisis de datos estadísticos, usando las medidas de dispersión (rango, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación de Pearson) y las medidas de tendencia central (media, mediana y moda). La actividad se realizó con estudiantes de grado décimo y permitió aplicar cálculos estadísticos para comparar conjuntos de datos y usar sus resultados para inferir conclusiones en situaciones cotidianas. Para calcular las medidas de dispersión se requiere realizar cálculos numéricos extensos que, con el uso de una calculadora se ejecutan utilizando menos tiempo y cantidad de procedimientos, de tal manera que las y los estudiantes pueden centrarse en la comprensión e interpretación de los valores obtenidos, puedan sacar conclusiones debido a que comparan estadísticos representativos de distintos grupos, ejemplo, sus edades con la de sus padres.

**Palabras clave:** Medidas de dispersión, Inferencia, Estadística.



## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.</li> <li>• Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas.</li> <li>• Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos.</li> <li>• Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos.</li> <li>• Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Medidas de dispersión		
<b>Objetivo:</b> Reconocer las medidas de dispersión aplicadas a una situación cotidiana.		
<b>Conocimientos previos:</b> Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.		

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

<b>Tiempo de duración:</b>	Tres horas de clase
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.</li> <li>• Cuaderno de clase</li> </ul>

## Medidas de dispersión

A continuación, Presento los conceptos en torno a las medidas de dispersión, los cuales fueron el centro de desarrollo de esta experiencia. El objetivo del estudio de los parámetros estadísticos es obtener información resumida del conjunto de datos en los que se está interesado. Para analizar los resultados se necesitan parámetros que midan la variabilidad, los cuales son llamados medidas de dispersión. Al hacer uso de las medidas de dispersión, se deben tener presentes conceptos previos sobre las medidas de tendencia central, además



**Observación:** cuánto más pequeña sea la desviación típica, mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

- **Coefficiente de Variación de Pearson (CV):** se expresa como decimal o como porcentaje. Este indica la desviación típica como porcentaje con relación a la media.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

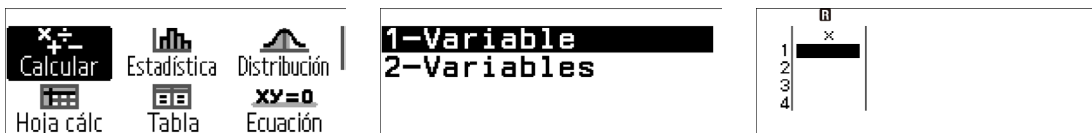
**Observación:** el coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos distribuciones distintas, siempre que sus medias sean positivas. Se calcula para cada una de las distribuciones y los valores que se obtienen se comparan entre sí. La mayor dispersión corresponde al valor del coeficiente de variación mayor.

## Uso de la calculadora Classwiz fx-991LA CW en Estadística

Para el cálculo de las medidas de dispersión en la calculadora Classwiz fx-991LA CW, en el MENÚ (HOME) se selecciona el modo *Estadística* y se elige una sola variable, para luego obtener todas las variables estadísticas, la secuencia de teclas se muestra a continuación:



Al seguir la secuencia de teclas anteriores se verá en la calculadora lo siguiente:



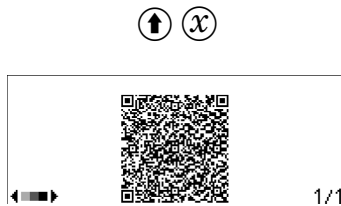
Para esta actividad se necesitan tablas estadísticas en las que cada dato tiene una frecuencia asociada. Para activar la frecuencia en la calculadora se emplea la siguiente combinación de teclas:



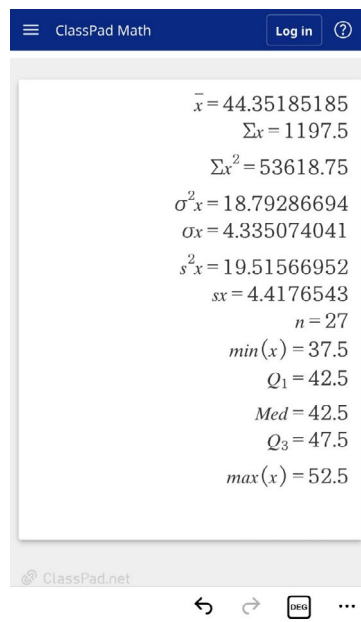




- ▶ Para crear un código QR en la calculadora, presione las teclas



- ▶ En la aplicación ClassPad Math, deberá escanear el código QR y podrá visualizar las medidas estadísticas.



- ▶ Para ver el histograma que representa estos datos, en la aplicación ClassPad Math, deberá escanear el código QR cuando la calculadora presenta la tabla en la pantalla. Vea la siguiente imagen.

	x	Freq
1	37.5	4
2	42.5	12
3	47.5	8
4	52.5	3

**37.5**





adecuado para la lectura grupal y discusión de los resultados. Por estas razones, se recomienda escuchar las intervenciones y permitir que otros estudiantes hagan preguntas y comentarios para promover el pensamiento aleatorio y la comunicación

## Experiencia de aula

La actividad la desarrollé con dos grupos de estudiantes del grado décimo (A y B) en las clases de estadística en la Institución Educativa Mater Dei. Inicialmente, realicé una explicación magistral de las medidas de dispersión puesto que en clases anteriores había desplegado el tema de las tablas de frecuencia, los gráficos estadísticos y las medidas de tendencia central. Después, planteé la pregunta problematizadora: *"Si ustedes se encuentran en el mismo rango de edad, entre 14 y 16 años, ¿estarán sus padres también en un mismo rango de edades?"*. Algunos estudiantes afirmaban que el rango de edades debe tener similar comportamiento, pero otros creían que no había relación alguna, se produjo el interés por despejar esta duda y quisieron hacer la encuesta entre ellos para llegar a una conclusión.

En la segunda clase, los estudiantes se organizaron en equipos y cada uno salió al tablero y escribió la edad de su madre y su padre, y si la edad ya estaba escrita marcaron con un palito para hacer la contabilidad total al final. Luego de que cada uno marcó la edad de sus padres, se realizó la tabulación.

Figura 1. Trabajo en clase.

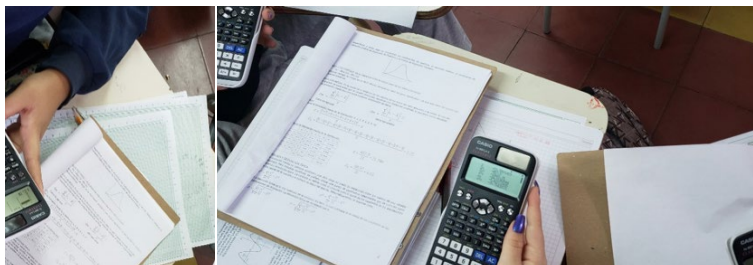


Fuente: Archivo personal del autor.

A continuación, agruparon los datos en intervalos adecuados y obtuvieron las marcas de clase con sus respectivas frecuencias. Estos datos fueron ingresados a la calculadora en la función *Estadística*, lo que arrojó las medidas de tendencia central y de dispersión.

Después, con el código QR, se obtuvieron las gráficas.

**Figura 2.** Trabajo con la calculadora en clase.



Fuente: Archivo personal del autor.

En la tercera clase se analizaron los datos y se sacaron algunas conclusiones:

- ▶ Los padres son mayores que las madres.
- ▶ Las edades son muy similares, poco dispersas sobre todo en el caso de las madres.
- ▶ Los padres presentan mayor dispersión.

## Reflexión pedagógica

Con esta actividad se evidenció en las y los estudiantes una actitud positiva, interés por aprender y responsabilidad para realizarla.

Por ser una encuesta relacionada con su familia, estuvieron interesados y, al usar la calculadora que les facilitó el cálculo de los parámetros, hicieron conclusiones que permitieron un espacio de discusión para promover la comprensión de los conocimientos desarrollados en clase.





Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.</li> <li>• Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Comprende y explica el carácter relativo de las medidas de tendencias central y de dispersión, junto con algunas de sus propiedades, y la necesidad de complementar una medida con otra para obtener mejores lecturas de los datos.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión, usando, cuando sea posible, herramientas tecnológicas.</li> <li>• Interpreta y compara lo que representan cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos.</li> <li>• Usa algunas de las propiedades de las medidas de tendencia central y de dispersión para caracterizar un conjunto de datos.</li> <li>• Formula conclusiones sobre la distribución de un conjunto de datos, empleando más de una medida.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Medidas de dispersión		
<b>Objetivo:</b> Reconocer las medidas de dispersión aplicadas a una situación cotidiana.		
<b>Conocimientos previos:</b> Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.		

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje Medidas de dispersión

A continuación, presento los conceptos en torno a las medidas de dispersión, los cuales fueron el centro de desarrollo de esta experiencia. El objetivo del estudio de los parámetros estadísticos es obtener información resumida del conjunto de datos en los que se está interesado. Para analizar los resultados, se necesitan parámetros que midan la variabilidad, los cuales son llamados medidas de dispersión. Al hacer uso de las medidas de dispersión se deben tener presentes conceptos previos sobre las medidas de tendencia central, además de la importancia de la lectura de los gráficos y las tablas que permitan inferir y obtener conclusiones. Las medidas de dispersión pueden definirse como los valores numéricos cuyo objeto es analizar el grado de separación de los valores de una serie estadística con relación a las medidas de tendencia central consideradas (Mendenhall et al., 2010)<sup>1</sup>.

A continuación, una definición de estos parámetros.

1 Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística*. CENGAGE Learning.



- ▶ **Rango o Recorrido (Re):** es la diferencia entre el mayor valor de los datos y el menor, y se expresa de la siguiente manera:

$$Re = \text{Max} \{x_i\} - \text{Min} \{x_i\}$$

- ▶ **Desviación Media (Dm):** es la media de la distancia de los valores de los datos (en valor absoluto) a la media y se representa como:

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad Dm = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{N} \quad \text{donde } \sum_{i=1}^n f_i = N$$

Datos sin agrupar                      datos agrupados

- ▶ **Varianza ( $\sigma^2$ ):** se define como el cociente entre la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable y el número de datos del estudio. Matemáticamente, se expresa como:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$$

- ▶ **Desviación Típica ( $\sigma$ ):** es la raíz cuadrada de la varianza y se representa como :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} \quad \text{donde } \sum_{i=1}^n f_i = N$$

**Observación:** cuánto más pequeña sea la desviación típica, mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

- ▶ **Coefficiente de Variación de Pearson (CV):** se expresa como decimal y como porcentaje. Este indica la desviación típica como porcentaje con respecto a la media.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

**Observación:** el coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos distribuciones distintas, siempre que sus medias sean positivas. Se calcula para cada una

de las distribuciones y los valores que se obtienen se comparan entre sí. La mayor dispersión corresponde al valor del coeficiente de variación mayor.

## Actividad 1

Los estudiantes se organizarán en equipos de tres personas.

- Se realiza la encuesta a los compañeros de clase y se pregunta a cada uno la edad de sus madres y padres.
- Con los datos obtenidos se realiza una tabla de frecuencia para la edad de las madres y otra los padres. Es preciso tener presente cómo organizar la información, es decir, como datos sin agrupar o agrupados, pero, en todos los casos, con un rango de clase adecuado para los datos obtenidos.

Edad	Marca de clase	Frecuencia absoluta $f_i$	Frecuencia relativa $h_i$	Frecuencia absoluta acumulada $F_i$	Frecuencia relativa acumulada $H_i$	Porcentaje (%)
------	----------------	------------------------------	------------------------------	--	--	----------------

- Realizar un gráfico estadístico de la anterior información.
- Hallar las medidas de tendencia central más importantes: media, mediana y moda, con la calculadora.
- Escribir al menos 3 conclusiones sobre las edades de padres y madres de los estudiantes del grado décimo.

## Actividad 2

Con los datos obtenidos en la anterior actividad, calcular y responder:

- Calcular las siguientes medidas de dispersión:
  - ▶ Rango
  - ▶ Desviación media
  - ▶ Varianza
  - ▶ Desviación típica
  - ▶ Coeficiente de variación
- Comparar las medidas anteriores y escribir 4 conclusiones.

# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Mónica Marcela Parra-Zapata  
[monica.parra@udea.edu.co](mailto:monica.parra@udea.edu.co)

Alexander Castrillón-Yepes  
[alexander.cyepes@udea.edu.co](mailto:alexander.cyepes@udea.edu.co)

En este trabajo se propuso una actividad para estudiantes de décimo grado que abarca la explicación de medidas de dispersión, tablas de frecuencia, gráficos estadísticos y medidas de tendencia central. La situación llevada a cabo buscó que el estudiantado indague por la relación entre las edades de sus madres y padres para compararla con el rango de edades de los estudiantes (14-16 años). Algunas actividades se centraron en encuestas, tabulación, agrupación de datos, cálculo de frecuencias y marcas de clase. La calculadora se utilizó para obtener medidas de tendencia central y dispersión, y generar gráficas mediante código QR.

A continuación, se planteamos otras posibilidades frente al uso de la calculadora Classwiz fx-991LA CW, los contenidos matemáticos y la dinamización del ambiente.

La explicación magistral de las medidas de dispersión podría ampliarse con un ejercicio interpretativo del significado de dichas medidas donde el profesor no necesariamente tiene que dictar las definiciones, sino que se aborden preguntas más abiertas que lleven a las y los estudiantes a tomar decisiones que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de tendencia central y dispersión. Por ejemplo:

- ▶ Leer en voz alta la definición de cada medida (presentada en la guía docente).
- ▶ Preguntar a las y los estudiantes por su comprensión y permitirles que discutan las diferentes interpretaciones a la definición.

- ▶ Este escenario podría orientarse con preguntas como: ¿qué medida estadística nos ayuda a conocer hacia qué valor tienden los datos de una muestra? (media), ¿qué medida estadística nos permite conocer la variabilidad de los datos? (desviación estándar), ¿cuál es el indicador que nos permite conocer que tan heterogéneo es un conjunto de datos? (coeficiente de variación).

Otra posibilidad para ampliar las discusiones y producciones de los y las estudiantes, tiene que ver con promover preguntas relacionadas con los datos mismos. Por ejemplo:



- ▶ ¿Existirá alguna relación entre nuestro rango de edad y el de nuestros abuelos y abuelas?
- ▶ ¿Con qué "población" creen que el rango de edad pueda ser más amplio y por qué?

Las preguntas anteriores requieren pensar en los datos, pero también en las relaciones que las y los estudiantes han tejido con otros grupos de personas.

Para el desarrollo de las tareas en cada una de las actividades, para promover contenidos matemáticos (centrados en la interpretación de las medidas más que en el número obtenido) y otros usos de las calculadoras, proponemos las siguientes tareas. Para su desarrollo, es necesario tener en cuenta que la calculadora Classwiz fx-991LA CW tiene la posibilidad de registrar una o dos variables. En el primer caso, se pueden incorporar 160 datos, mientras que, en el segundo caso, se admiten 80 datos por variable. Bajo este panorama sugerimos las siguientes tareas:




## Tarea 1

- ▶ Toma los mismos datos que se obtuvieron en las actividades 1 y 2, y utiliza en la calculadora Classwiz fx-991LA CW el modo de dos variables, designa a una de ellas para la edad de las madres y otra para la edad de los padres.

	x	y
1		
2		
3		
4		

Por ejemplo, puede designar  $y$  para la edad de los padres y  $x$  para la edad de las madres. Usa la calculadora para indicar el valor numérico de las medidas de tendencia central.

- ▶ Analiza las medidas de tendencia central y responde:

 ¿Cuál es la menor cantidad de datos que se tendrían que modificar para hacer que la media baje 3 años? (considera edades reales para padres y madres). Otras preguntas de este tipo que promueven la exploración y el razonamiento sobre los datos son: ¿podría cumplirse el requerimiento anterior si la moda y la mediana no cambian? ¿es posible cambiar la moda sin que cambie la media? Explica.

## Tarea 2

Explora con la calculadora cuáles son las transformaciones que tendrías que hacer a los datos si se desea que las medidas de dispersión disminuyan. Genera hipótesis y corrobóralas con la definición matemática. (Sugiere a las y los estudiantes emplear técnicas de razonamiento sobre los datos por medio de su gráfico empleando ClassPad Math).

Por ejemplo, si los datos que se presentaran fueran:

	x	y	Frec
1	30	40	1
2	32	40	1
3	50	57	1
4	45	43	1

**37**

Las medidas de dispersión serían:

$\sum x$	=41
$\sum x^2$	=164
$\sum y^2$	=6918
$\sigma^2 x$	=48,5
$\sigma^2 y$	=6,964194139
$s^2 x$	=64,66666667

$s_x$	=8,041558721
$n$	=4
$\bar{y}$	=45
$\sum y$	=180
$\sum y^2$	=8298
$\sigma^2 y$	=49,5

$\sigma y$	=7,03562364
$s^2 y$	=66
$s_y$	=8,124038405
$\sum xy$	=7545
$\sigma^2 xy$	=299546
$\sum x^2 y$	=325295

$\sum x^4$	=13273362
$\min(x)$	=32
$\max(x)$	=50
$\min(y)$	=40
$\max(y)$	=57

El estudiante podría, a través de la exploración, reconocer que al tener una distribución como la siguiente, las medidas de tendencia central disminuyen:

	x	y	Frec
1	42	47	1
2	42	47	1
3	39	43	1
4	39	43	1

**42**

Esta situación se puede aprovechar para discutir la manera en que se calculan las medidas de dispersión y, sobre todo, la relación que debe existir entre los datos para que las medidas cambien.

### Tarea 3

Suponga que usted quiere definir una tercera variable (la edad de padres y madres). Plantee, al menos, dos estrategias que pueda desarrollar con el uso de la calculadora para definir las medidas de tendencia central y de dispersión. Calcúlelas y responda:



- ▶ ¿Cuál es la interpretación de las medidas de tendencia central en esta tercera variable? ¿qué relación tiene con las primeras?
- ▶ ¿A qué se deben los cambios en las medidas? ¿por qué?

Dos posibles estrategias que sus estudiantes pueden emplear son:

- a. Utilizar la opción de una variable para registrar todos los datos y con ello obtener los cálculos con la calculadora de manera directa.

Esta estrategia se desarrollaría así con la calculadora:

Al considerar los mismos datos del ejemplo anterior, donde  $x$  corresponde a las edades de las madres (32, 37, 45, 50) y las edades de los padres (40, 40, 43, 57), se podría definir en la calculadora la variable  $x$  correspondiente a la edad de padres o madres (32, 37, 40, 40, 43, 45, 50, 57) y hallar las medidas:

x	Frec
1	1
2	1
3	2
4	1

32

$\bar{x}$	=43
$\sum x$	=344
$\sum x^2$	=15216
$\sigma^2 x$	=53
$\sigma x$	=7,280109889
$s^2 x$	=60,57142857

$s_x$	=7,782764841
n	=8
min(x)	=32
Q1	=38,5
Med	=41,5
Q3	=47,5

- b. Emplear las medidas de tendencia central y de dispersión para las variables individuales y razonar acerca de los cálculos que tendrían que hacer para la tercera variable. Esta opción implica considerar las maneras en que se calculan las medidas y la relación entre los datos.

Esta estrategia se desarrollaría así con la calculadora:

Se calculan las medidas de tendencia central para las variables individuales:

$\bar{x}$	=41
$\sum x$	=164
$\sum x^2$	=6918
$\sigma^2 x$	=48,5
$\sigma x$	=6,964194139
$s^2 x$	=64,66666667

$s_x$	=8,041558721
n	=4
$\bar{y}$	=45
$\sum y$	=180
$\sum y^2$	=8298
$\sigma^2 y$	=49,5

$\sigma y$	=7,03562364
$s^2 y$	=66
$s_y$	=8,124038405
$\sum xy$	=7545
$\sum x^3$	=7995
$\sum x^2 y$	=299546
$\sum x^2 y$	=325295

Los estudiantes podrían reconocer que la media sería:  $\frac{x+y}{2} = \frac{41+45}{2} = 43$ .

Sin embargo, también podrían generarse discusiones con relación a la eficiencia de este método para hallar algunas medidas como las de dispersión.



Para cerrar la actividad, sugerimos que se hagan preguntas que permitan valorar los aprendizajes en torno a los conceptos estadísticos que se abordaron. Por ejemplo: ¿qué aprendió respecto a la naturaleza y el uso de los datos? ¿qué herramientas ofrece la estadística para analizar datos? ¿qué complicaciones tuvieron en el análisis?



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

Arc sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\sqrt{\square}$

Arc cos

9

6

+

FORMAT

$f(x)$

$\sqrt{\square}$

9

6

+

FORMAT

$^{-1}$

Arc tan

tan

+

+

EXE

$\square^{\square}$

log

(

+

÷

-

CATALOG

$\square^2$

$\square^2$

)

AC

÷

-

TOOLS

...

log  $\square$

)

AC

÷

-





## Una carrera de caballos. Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado

Mónica Marcela Parra-Zapata

[monikampz@gmail.com](mailto:monikampz@gmail.com)

Institución Educativa Mariscal Robledo

Secretaría de Educación de Medellín y Universidad de Antioquia,  
Colombia, CO.

### Resumen:

Presento un ambiente de aprendizaje con el uso de la calculadora científica para trabajar el concepto de probabilidad. El trabajo lo llevé a cabo con 40 estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Villa Flora de la ciudad de Medellín. La experiencia surgió después de la formación con MOVA, el grupo MATHEMA-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y Gakuhan-CASIO. Entre los resultados obtenidos, destaco el reconocimiento de la calculadora como una herramienta que promueve la comprensión del concepto de la probabilidad y un uso con sentido de esta herramienta para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático.

**Palabras clave:** Probabilidad, calculadora, comprensión.



---

*De la herramienta:*

- Encender la calculadora
- Configurar la calculadora
- Cambiar el idioma
- Conocer el manejo del modo Estadística de la calculadora

**Conocimientos previos:** • Simular lanzamiento de dados

*De matemáticas:*

- Espacio muestral
  - Sucesos
  - Casos favorables
- 

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

---

**Tiempo de duración:** Cuatro semanas. Dos horas semanales

**Recursos:**

- Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW
- Computador
- Video beam
- Marcador
- Tabla carrera de caballos
- Fichas
- Lápiz, lapiceros

---

Esta experiencia tuvo como propósito asignar la probabilidad a un evento con apoyo en la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW. La probabilidad tiene que ver con las posibilidades de que ocurra un evento o suceda al azar. Para entender este concepto propuse la siguiente experiencia que consta de cuatro momentos:

- ▶ **Momento 1. Indagación y exploración:** manejo de la calculadora y repaso de experimentos aleatorios. En este momento, se recuerdan algunos componentes centrales del uso de la calculadora y se discute en torno a los tipos de sucesos estadísticos.
- ▶ **Momento 2<sup>2</sup>. Conceptualización I:** Carrera de caballos.
  - a. Los estudiantes se organizan en grupos y por equipo reciben una hoja en la que registran la carrera (ver en la guía del estudiante).
  - b. Para jugar, cada estudiante debe apostar a un número y poner allí su ficha.

---

<sup>2</sup> Esta situación es una adaptación de la propuesta de Hans, J., Muñoz, J. y Fernández-Aliseda, A. (2006). La carrera de caballos. *Suma*, 51, 61-63.



En este momento de conceptualización I, se identifica cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, se determina la probabilidad de ocurrencia del evento. En este caso, la probabilidad frecuencial o empírica es la que se fundamenta en los datos obtenidos por encuestas, preguntas o por una serie larga de realizaciones de un experimento. Para indicar la probabilidad frecuencial, se repite el experimento aleatorio un número determinado de veces, se registran los datos, se grafican y se observa la frecuencia con más repeticiones.

- ▶ **Momento 3: Conceptualización II:** se continua con el ambiente de aprendizaje. Se calcula la probabilidad frecuencial y presenta la fórmula de Laplace como otra posibilidad para el cálculo de las probabilidades. Para ello, se determinan los casos favorables para los números del 0 al 5 (que son los posibles resultados de la resta) y los casos posibles para el lanzamiento de dos dados en los que restamos el resultado.

En este momento se observa que coincide lo que se hace por medio de la tabla de frecuencias con la calculadora y si se aplica directamente la fórmula.

- ▶ **Momento 4: Aplicación:** Un juego de dados, otros contextos de aplicación.

En este momento se realiza un sorteo para aplicar lo aprendido, se simula el lanzamiento de dados en la calculadora. Los estudiantes eligen un número del 2 al 12. Así, para elegir los ganadores, se lanzan los dados en la calculadora y se suman los dos números que salgan, el resultado de la suma determinará el ganador. La situación se desarrolla completamente en la guía del estudiante, a continuación.

## Experiencia de aula

La experiencia se desarrolló durante un periodo académico (13 semanas), con 40 estudiantes de séptimo grado de Básica Secundaria (12 a 14 años) de la Institución Educativa Villa Flora (Medellín, Colombia). La experiencia permitió el estudio y la comprensión del concepto de la probabilidad y se desarrolló con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA X. Sin embargo, en esta edición hemos ajustado las pantallas para la Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

En el momento 1, los estudiantes se familiarizaron con los conceptos involucrados en la realización de experimentos aleatorios. Allí, el énfasis lo realizamos (estudiantes y profesora) en el reconocimiento de las funcionalidades centrales del modo estadístico de la calculadora y discutimos en torno a los tipos de sucesos estadísticos. Para esto, pedí al grupo obtener con calculadora los estadísticos para un grupo de datos.



llo al interior del aula. En la figura 2 se ven algunos estudiantes en diálogo con la profesora, reconociendo las funcionalidades de la calculadora.

En el momento 2, inicié con la conceptualización del término probabilidad. Para ello, los estudiantes efectuaron una carrera de caballos en la que analizaron cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, determinaron la probabilidad de ocurrencia de un evento.

**Figura 2.** Estudiantes explorando, con la profesora, las funcionalidades de la calculadora<sup>5</sup>.



Fuente: archivo personal de la autora.

Para jugar, cada estudiante eligió un número y ubicó su ficha en la hoja entregada. Para ello tuvieron que ponerse de acuerdo, en el caso que fueran menos de seis estudiantes, si dos estudiantes podrían elegir el mismo número, o si cada uno debía elegir un número diferente. Así, los estudiantes manifestaron asuntos como *"juguemos cada uno con su número para que ninguno se quede vacío y le podamos hacer el punto a todos los números"*, *"que cada quien decida, si repetimos no importa, pero de pronto pensamos lo mismo es mejor repetir"*. El llegar a acuerdos y el trabajo en equipo posibilitó que se optimizaran y agilizaran el desarrollo de las tareas, pues los estudiantes compartieron acciones y responsabilidades y cada uno aportó desde su conocimiento específico. Por otro lado, la interacción entre los estudiantes, en la toma de decisiones, mejoró las relaciones entre ellos ya que las acciones

<sup>5</sup> En la Institución Educativa al momento de la matrícula, los acudientes firmaron autorización para el uso de imágenes de sus acudidos, con fines académicos.





Sin embargo, como profesora problematizo y pregunto: “¿cómo podemos restar estos números de manera directa en la calculadora?”. Inicialmente a los y las estudiantes les costó comprender la indicación, pero pasado un tiempo uno de los estudiantes propuso: “Qué tal si para ponerlos en la calculadora hacemos  $Ranint\#$  del primer número menos  $RanInt\#$  del segundonúmero”. El grupo avaló la propuesta e iniciaron pruebas en la calculadora. En este ejercicio, un grupo de estudiantes reporta: “pero tenemos un problema si el primer número que sale es menor que el segundo número, porque entonces nos da un número negativo, y no se puede”, a lo que otro estudiante mencionó “claro es que la profe nos había dicho que siempre restáramos el menor del mayor y para restar nosotros acomodábamos el número, pero la calculadora no sabe hacer eso”. En la figura 3 presento algunos estudiantes explicando al grupo de compañeros el proceso realizado.

Figura 3. Estudiantes presentando sus ideas al grupo.



Fuente: archivo personal de la autora.

Ante esta situación, pregunto cómo podría resolverse esta problemática en la calculadora, varios de los estudiantes consideraron que no se puede hacer porque no había manera de que “la calculadora pensara y escogiera entre ambos números”. De acuerdo con ello, aprovecho la oportunidad para explicar el valor absoluto, como una función que permite realizar este procedimiento. El procedimiento con la calculadora se ilustra en la Tabla 3.

Tabla 3. Valor absoluto con la calculadora.

**Proceso valor absoluto con la calculadora**

Para repetir el proceso selecciona el botón B

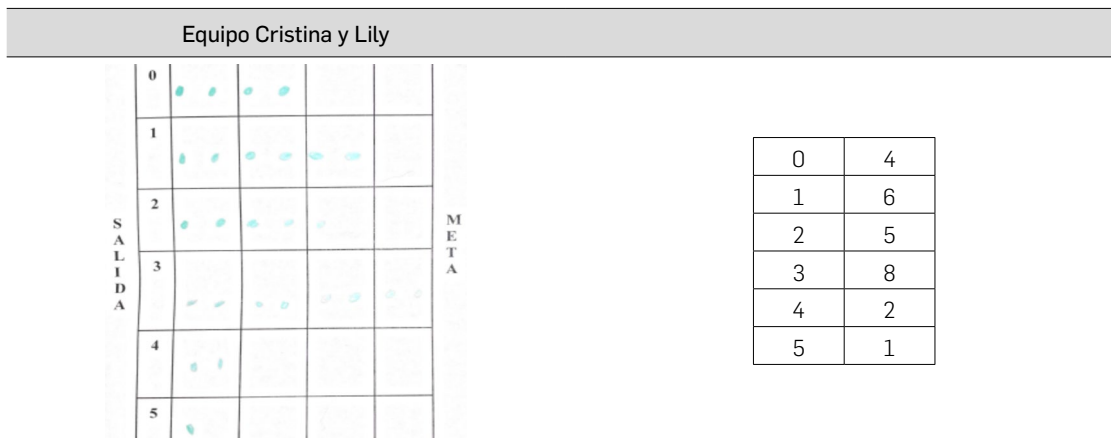
En el proceder anterior se observa cómo la discusión fortalece el desarrollo de conceptos matemáticos y cómo los obstáculos para el desarrollo de una tarea de clase, puede aprovecharse como una oportunidad para el aprendizaje.

Luego de posibilitar el juego por varios minutos, marcando en las casillas los puntos en los que se realiza el movimiento, se revisaron los puntos marcados en el tablero de juego y se escribieron numéricamente la cantidad de casillas que se desplazó cada jugador. En la figura 4 se visualizan los trabajos realizados por dos de los equipos de estudiantes con los puntos marcados.

Figura 4. Trabajo de los estudiantes con relación a las casillas.

**Equipo los poderosos**

0	4
1	8
2	6
3	5
4	5
5	1



En la figura 5 se presentan algunos estudiantes jugando y lanzando los dados con sus calculadoras.

**Figura 5.** Estudiantes realizando el juego en la calculadora.



Fuente: archivo personal de la autora.

Posteriormente, se escribieron los datos en el cuaderno y se presentaron en la calculadora en el modo estadístico de la misma. Una vez vinculados los datos, se aplicó el análisis estadístico con la tecla OK (opción 1/Resultados 1-Var) y se discutieron los resultados arrojados por la calculadora, comprendiendo su significado. En la tabla 4 presento los resultados de un grupo de estudiantes, quienes al exponer su trabajo al grupo, reconocieron asuntos propios del concepto de probabilidad. Los y las estudiantes recurrieron a la comparación de resultados obtenidos con los demás grupos y así pudieron diferenciar qué técnica se estaba utilizando y cuál era la respuesta apropiada según la tarea propuesta.



Luego, se obtuvo el código QR y con ClassPad.net en el celular (Tabla 5), se envió la información a la Clase (Tabla 6). En la Clase se determinó el consolidado de las frecuencias de los estudiantes y se analizó qué se encuentra allí. En este caso se analizó cuál es el número con mayor frecuencia y, a partir de ello, se determinó la probabilidad de ocurrencia del evento. En este caso, la probabilidad frecuencial se calculó a partir de los datos obtenidos por una serie larga de realizaciones de un experimento. Para determinarla, se repitió el experimento aleatorio un número determinado de veces, se registraron los datos, se graficaron los datos y se observó la frecuencia con más repeticiones. En la tabla 5 se visualiza el trabajo consolidado de los estudiantes.

**Tabla 5.** Trabajo en la aplicación ClassPad.net.







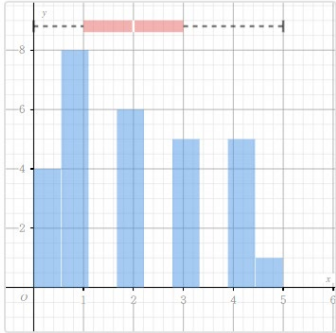
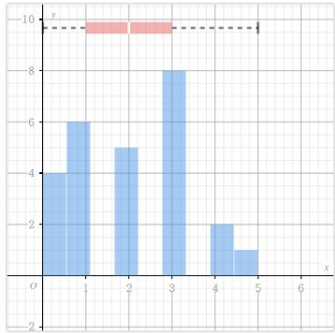
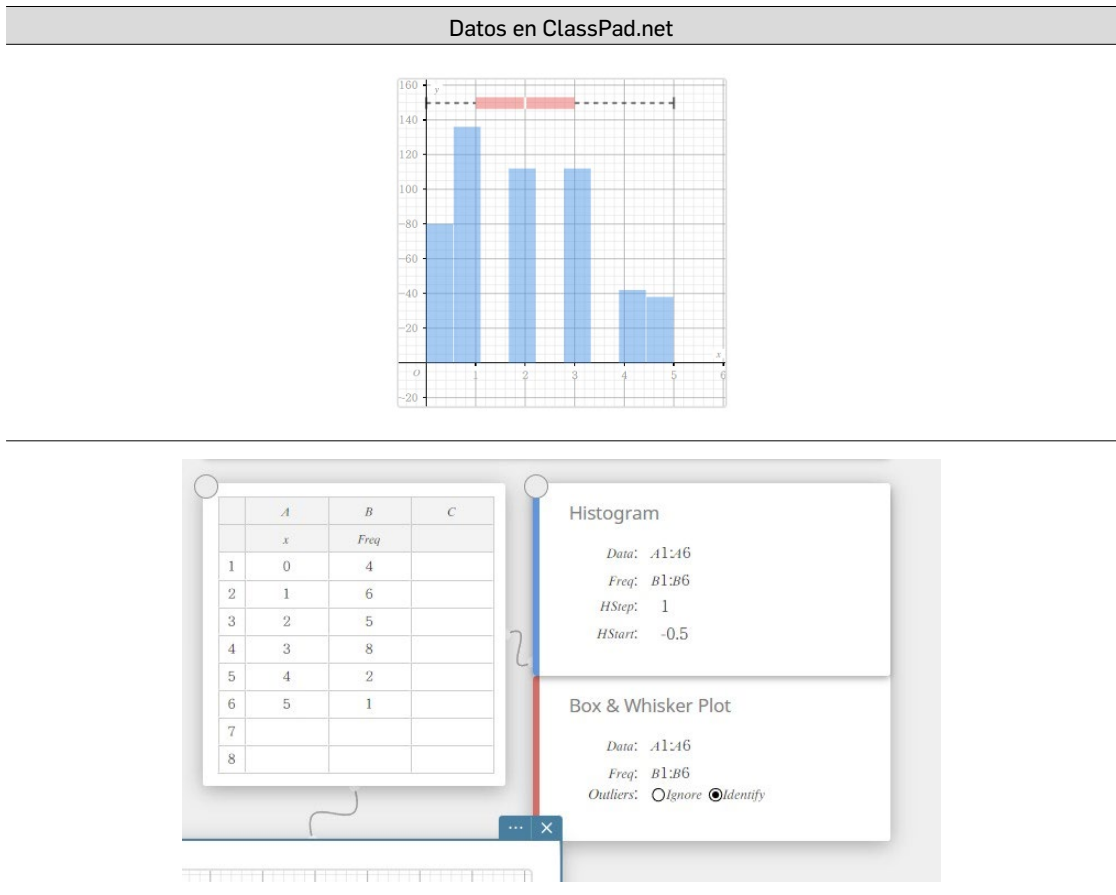
Trabajo realizado por equipo los poderosos	Trabajo realizado por equipo cristina y Lily
<div style="text-align: center;">   </div> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: right;">1/1</div>	<div style="text-align: center;">   </div> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: right;">1/1</div>
	

Tabla 6. Trabajo vinculado con la Clase.



Al ver el consolidado, los estudiantes mencionaron asuntos como: “ah es que el número que más se repite es 1”, “el número con la barra más alta es el 1”, “Si vemos la barra más alta sabemos el que más veces se repite y es el número 1”.

En la Figura 6 se presentan algunos estudiantes tomando el QR de la Clase.

Figura 6. Estudiantes analizando el QR.



Fuente: archivo personal de la autora.

En el momento 3, se calculó la probabilidad aplicando directamente la fórmula de Laplace. Para ello, se determinaron los casos favorables para los números del 0 al 5 (que son los posibles resultados de la resta) y los casos posibles para el lanzamiento de dos dados en los que restamos el resultado. En este momento, se observó que los resultados son los mismos, tanto los que se hicieron por medio de las tabla de frecuencias con la calculadora y si se aplica directamente la fórmula.

En el momento 4, se realizó un juego de dados para ver otros contextos de aplicación. En este momento se hace un sorteo para aplicar lo aprendido y se simuló el lanzamiento de dados en la calculadora. Los estudiantes eligieron un número del 2 al 12. Para elegir los ganadores, se lanzaron los dados en la calculadora y se sumaron los dos números que salieron, el resultado de la suma en mayor cantidad determina el ganador. En este momento fue posible incentivar a los estudiantes a cerca de la importancia que tiene la teoría básica de probabilidad en la solución de problemas de la vida cotidiana, utilizando las técnicas respectivas, a través de estas el estudiante reconoce la variedad de eventos que conforman un universo.

## Reflexión pedagógica

En el aula se deben propiciar espacios que estimulen el trabajo constante, involucrando la diversidad de conocimientos, contextos y relaciones con otras áreas (Villa-Ochoa, 2013), en este caso, experimentar con el uso de la calculadora. La experiencia permitió reconocer que cuando los estudiantes realizan experimentos aleatorios, llevando algún tipo de registro de datos, pueden generar cierto tipo de conclusión o inferencia probabilística. En





## Bibliografía

- Chamorro C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria. Parte 1, fundamentación. Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas*. Pearson.
- García-Cuéllar, D., Parra-Zapata, M., Martínez-Miraval, M. y Sostenes, H. (2019). Una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Classwiz. *Acta latinoamericana de matemática educativa-ALME*, 32(1), 658-667.
- Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. *Unipluriversidad*, 13(3), 14-28.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Editorial Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Editorial Magisterio.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizajes en Matemáticas*. Panamericana Formas E Impresos S.A..
- Villa-Ochoa, J. (5 al 7 de junio de 2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase [taller]. *VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática*, Santa Maria-RS, Brasil.

---

### Reconocimientos

Agradezco a la Institución Educativa Villa Flora-Medellín-Colombia, en especial a Carlos Alberto Mazo Loaiza (rector), por posibilitar que esta experiencia se llevara a cabo y a las y los estudiantes participantes (séptimo grado) por aceptar participar, por su compromiso, entrega y dedicación en cada una de las acciones que emprendimos en el desarrollo de esta experiencia de aula.

Al programa Gakuhan-CASIO y al proyecto CODI 2020-34799 de la Universidad de Antioquia por hacer posible esta formación y a MOVA por materializar el proceso en la entrega de calculadoras científicas CASIO Classwiz fx-991LA X para la institución educativa.

---



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

+

FORMAT

$\sqrt{\square}$

tan

0

+

$\frac{\square}{\square}$

EXE

$\square^{-1}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\times$

$\square^{\square}$

$\approx$

log

(

)

AC

$\div$

$\square^{\square}$

CATALOG

$\square^2$

$\square^{\square}$

OFF

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

TOOLS

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$



## **Una carrera de caballos.** Exploración del concepto de probabilidad con estudiantes de séptimo grado

Mónica Marcela Parra-Zapata

[monikampz@gmail.com](mailto:monikampz@gmail.com)

Institución Educativa Mariscal Robledo

Secretaría de Educación de Medellín y Universidad de Antioquia,  
Colombia, CO.

## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Séptimo	Pensamiento aleatorio. Pensamiento variacional	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
DBA 3. De grado Décimo	Asigna probabilidades a eventos compuestos y los interpreta a partir de propiedades básicas de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferencia experimentos aleatorios realizados con remplazo, de experimentos aleatorios realizados sin remplazo.</li> <li>• Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.).</li> <li>• Justifica la elección de un método particular de acuerdo al tipo de situación.</li> <li>• Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Concepto de probabilidad		
<b>Objetivo:</b> Asignar la probabilidad a un evento, con el apoyo de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.		
<i>De la herramienta:</i>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Encender la calculadora</li> <li>• Configurar la calculadora</li> <li>• Cambiar el idioma</li> <li>• Conocer el manejo del modo Estadística de la calculadora</li> </ul>		
<b>Conocimientos previos:</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Simular lanzamiento de dados</li> </ul>		
<i>De matemáticas:</i>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio muestral</li> <li>• Sucesos</li> <li>• Casos favorables</li> </ul>		

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

<b>Tiempo de duración:</b>	Cuatro semanas. Dos horas semanales
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW</li> <li>• Computador</li> <li>• Video beam</li> <li>• Marcador</li> <li>• Tabla carrera de caballos</li> <li>• Fichas</li> <li>• Lápiz, lapiceros</li> </ul>

En esta situación nos proponemos asignar la probabilidad a un evento, con apoyo en la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, para resolver situaciones de juego y de la vida desde la probabilidad.

Para alcanzar el objetivo anterior vamos a llevar a cabo 4 momentos.



## Momento 1. Indagación y exploración: manejo de la calculadora y repaso de experimentos aleatorios

En este momento recordaremos algunos componentes centrales del uso de la calculadora y discutiremos en torno a los tipos de sucesos estadísticos.

Frente al uso de la calculadora. Indiquemos en los cuadros a continuación, los pasos a seguir para realizar las siguientes funciones:

- ▶ Prender y apagar la calculadora

- ▶ Formatear la calculadora

- ▶ Cambiar el idioma









- ▶ Usando ClassPad.net en tu celular, vamos a enviar la información a la Clase creada previamente por tu docente (En el anexo podrás ver el procedimiento).
- ▶ Una vez en la Clase vamos a analizar aspectos de cada gráfica realizada.

Interpreta las gráficas que se visualizan

---

---

---

Describe los elementos comunes y los no comunes de las gráficas que se visualizan

---

---

---

- ▶ Observa en la Clase la gráfica que consolida el trabajo de todo el grupo. (En el anexo podrás ver el procedimiento).

Interpreta las gráficas que se visualizan

---

---

---

¿Cuál es el número con mayor frecuencia? ¿Qué significa?

---

---

---

En este caso, ¿cuál es el número con mayor probabilidad de salir?

---

---

---



### Momento 3. Conceptualización II: carrera de caballos

Esta probabilidad también podemos hacerla aplicando directamente la fórmula de Laplace, la cual nos dice que:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

- ▶ ¿Cuál es el número de casos posibles en este experimento?

---



---



---

- ▶ Determina los casos favorables para el lanzamiento de dos dados en los que restamos los resultados. Indica la estrategia utilizada.

---



---



---



---



---



---

- ▶ Una manera de determinar ordenadamente los casos favorables para el lanzamiento de dos dados es una tabla de doble entrada. Diligenciamosla según la información de este experimento aleatorio.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						





## Momento 4. Aplicación: Un juego de dados, otros contextos de aplicación

- ▶ Se rifará un dulce en un sorteo simple. Cada participante elegirá un número del 2 al 12.

¿Qué número recomiendas elegir? ¿Por qué?

---



---



---

- ▶ Ahora pensemos en qué situaciones del contexto podríamos hacer uso de la probabilidad, bien sea que la calculemos mediante frecuencias o mediante la fórmula de Laplace. Pensemos en nuestro contexto cercano (casa o colegio).

---



---



---

## Simular lanzamiento de dados. Función *RanInt#*

Ingresa al modo estadístico con frecuencias activas.



	x	Frec
1		
2		
3		
4		

Pon la calculadora en pantalla inicial de trabajo estadístico con la tecla .

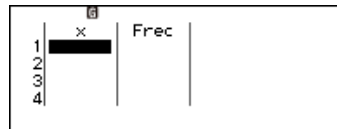


Activa la función *RanInt#* para simular el lanzamiento de dados. Una vez activada la función, presiona igual, la calculadora arrojará un número aleatoriamente entre 1 y 6.

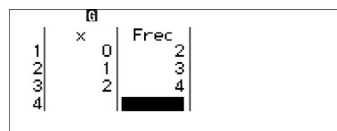
En el modo calcular selecciona



### Ingreso de datos en tablas estadísticas



Ingresa los datos y su respectiva frecuencia. Los datos se fijan con la tecla igual y con las flechas se desplaza su respectiva frecuencia.



### Código QR del trabajo realizado

Obtén el código QR del trabajo realizado.







## Anexo

### Pistas para cuatro carreras de caballos

Carrera 1

S A L I D A	0						M E T A
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Carrera 2

S A L I D A	0						M E T A
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						


Carrera 3

S A L I D A	0						M E T A
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						

Carrera 4

S A L I D A	0						M E T A
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						





## Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

En este trabajo se presentó un ambiente de aprendizaje con estudiantes de séptimo grado, en la cual se utilizó la calculadora Classwiz fx-991LA X. Las tareas que se presentaron permitieron conocer algunas maneras de promover la comprensión del concepto de probabilidad con el uso de esta herramienta. A continuación, planteamos otras posibilidades frente al ambiente de clase y el uso de la versión Classwiz fx-991LA CW, la cual cuenta con funciones adicionales que permiten dinamizar nuevas experiencias y contenidos matemáticos en las clases.

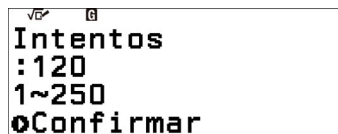
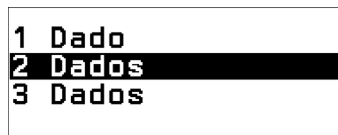
Si bien es usual usar dados de seis caras, existen dados con cuatro, ocho, diez, doce, incluso de ciento veinte caras. Esto puede aprovecharse para promover una discusión que ayude a ampliar los desarrollos y los resultados hallados con la experiencia anterior. Algunas preguntas de referencia que los profesores pueden utilizar son: ¿cómo cambiaría el juego si los dados tuviesen 4, 8 o 12 caras?, ¿la frecuencia que más se repite al restar los resultados de dos dados de 4 caras se comporta igual que los dados de 6 caras?, ¿qué pasaría si fuesen de 12 caras?, ¿podría generalizarse algún resultado? El profesor puede pedir a los estudiantes que se organicen en subgrupos para realizar el juego con diferentes tipos de dados.

A diferencia de la calculadora Classwiz fx-991LA X, la versión Classwiz fx-991LA CW tiene la opción de *Caja de Matemáticas*, la cual permite, entre otros aspectos, simular el lanzamiento de uno, dos o tres dados en repetidas ocasiones. Esta opción es limitada porque solo considera dados de seis caras, pero facilita otros procesos, ya que genera, de manera tabular, la resta y suma de resultados al lanzar dos dados y la suma cuando son tres. Además, permite simular un máximo de 250 lanzamientos. Con estas consideraciones, a continuación presentamos algunas tareas complementarias que pueden promoverse en clase:

## Tarea 1

Utiliza el modo *Caja de Matemáticas* para simular 120 lanzamientos de dos dados de seis caras, ve a la opción de frecuencia relativa, selecciona la opción de diferencia y genera el código QR. Discute los resultados obtenidos con los cálculos de probabilidad que realizaste en los ejercicios previos.

En el modo *Caja de Matemáticas* seleccionar dos dados y 120 intentos

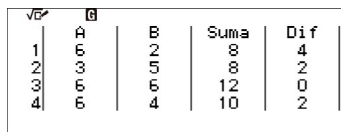
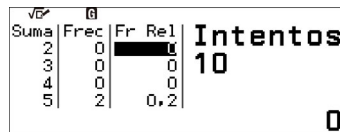
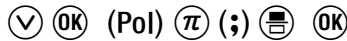
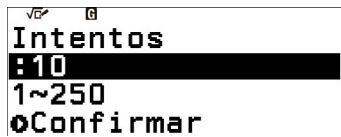


**Nota:** el profesor puede aprovechar esta oportunidad para discutir el concepto de frecuencia relativa y generar una discusión acerca del uso de la herramienta al preguntar por las posibilidades y limitaciones de ambas opciones: *Caja de Matemáticas* o *RanInt#* para el desarrollo del juego.

## Tarea 2

Selecciona la opción de *lanzamiento de dado*, realiza 10 simulaciones de dos dados. Selecciona la opción *Frecuencia Relativa/Suma*. En este espacio encontrarás las frecuencias de los resultados de la suma. Para cada suma que ocurrió, determina cuál era el resultado más probable de los dados. Después, regresa a las opciones del panel y selecciona la opción *lista* para ver el detalle de los resultados ¿coincidieron los resultados de los dados con los resultados más probables? Explica los resultados empleando conceptos de probabilidad.

En el modo Caja de Matemáticas seleccionar dos dados y 10 intentos



**Nota:** el profesor puede emplear otras posibilidades del modelo Classwiz fx-991LA CW, como el lanzamiento simultáneo de tres dados para promover otras discusiones en clase. Por ejemplo, en esta alternativa la opción *Frecuencia Relativa* sigue disponible en la calculadora, pero solo para la suma. Una opción está enmarcada en que el profesor pueda cuestionar y discutir con los estudiantes la ausencia de la resta y discutir tareas similares a las anteriores con tres dados.



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

sen

8

6

3

FORMAT

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

+

EXE

$\sqrt{\square}$

tan

0

+

-

$\approx$

$\sqrt[n]{\square}$

INS

$\times$

$\div$

$\square$

$\approx$

$\square^{-1}$

(

)

AC

$\square$

$\approx$

log

$\square^2$

$\square$

OFF

$\square$

$\approx$

CATALOG

In

log  $\square$

$\square$

$\square$

$\approx$

TOOLS

$\square$

$\square$

$\square$

$\square$

$\approx$



# Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW para abordar el concepto de función

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo

[monizapata25@gmail.com](mailto:monizapata25@gmail.com)

Institución Educativa Barrio Olaya Herrera

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Resumen:

En este documento se presenta una experiencia de aula en la que se usó la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW para desplegar teórica y prácticamente el concepto de función a partir de la rapidez y la velocidad media. La experiencia se llevó a cabo con 36 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera como parte del proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia - Gakuhán. Entre los resultados obtenidos, se destaca el uso de la calculadora como herramienta que posibilita que los estudiantes centren su atención en la comprensión del concepto, la generalización y la formulación de hipótesis y conjeturas.

**Palabras clave:** Magnitudes, variación, relación funcional, calculadora, aprendizaje.



Esta experiencia tuvo como propósitos reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada e interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones. Para cumplir los propósitos planteé una experiencia en la cual realicé una adaptación a la actividad de aprendizaje: "¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración?", diseñada por Contenidos para Aprender del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), proponiendo el uso de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW como herramienta para esta experiencia.

Para abordar el concepto de función propuse la siguiente experiencia, la cual consta de cuatro momentos.

## Exploración<sup>1</sup>

En este momento se exploraron las nociones de distancia y desplazamiento, a partir de la animación realizada por el MEN con base en un video de Nairo Quintana cuando ganó, en el año 2014, el Giro de Italia. En la animación también se muestra el mapa de la ruta de la carrera y una tabla de las 10 últimas etapas de la competencia con los respectivos tiempos y distancias de cada una.

En la tabla de la figura 2 presento los datos de la velocidad media (en la que se supone que Nairo Quintana recorrió las etapas con velocidad constante) y, luego, le entrego una serie de interrogantes a los estudiantes para que los resolvieran en pequeños grupos de discusión:



- ▶ ¿Cómo identificamos que un objeto está en movimiento?
- ▶ ¿Qué variables debemos tener en cuenta para describir el movimiento de un cuerpo?
  - ▶ ¿Cuántas etapas había en la competencia?
  - ▶ ¿Cuántos kilómetros recorrió Nairo en total?
  - ▶ ¿Cuánto tiempo utilizó Nairo en todo el recorrido?
  - ▶ ¿Cómo podemos calcular la velocidad con la que Nairo recorrió toda la carrera?

1 Los momentos propuestos son una adaptación de: MEN (2015). ¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme [video]. Colombia

## Estructuración y práctica

### Elaboración de tablas y gráficas sobre distancia - tiempo

Teniendo en cuenta el video y el mapa de la competencia del Giro de Italia, le pedí a los estudiantes tomar nota de la distancia de las últimas 10 etapas de esta carrera y usar la calculadora para completarla.

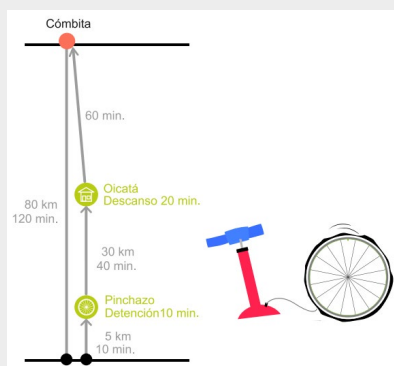


- ▶ ¿A qué hace referencia el tiempo acumulado en la que se muestra en el vídeo?
- ▶ ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 17?
- ▶ ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 16?
- ▶ Determina el tiempo que tardó Nairo en hacer el recorrido de la etapa 17.
- ▶ ¿Cuánto tardó Nairo en la Contrarreloj de subida de la etapa 19?
- ▶ ¿Qué parte de la distancia total del Giro de Italia recorrió Nairo en las últimas 10 etapas?
- ▶ Elabora una tabla en la que se relacione la distancia, el tiempo y la velocidad de Nairo en las últimas 10 etapas de esta carrera.

## Transferencia

### Situación de entrenamiento

**Figura 1.** Un entrenamiento de Nairo Quintana.



Fuente: MEN (2015).

A continuación, le solicité a los estudiantes realizar un gráfico que relacionara los desplazamientos y los tiempos dados en la siguiente situación:

En uno de los entrenamientos, Nairo Quintana hizo el siguiente recorrido: Salió en su bicicleta del municipio de Cómbita. Tardó 120 minutos en recorrer 80 km, inmediatamente se devolvió y a los 10 minutos después de haber recorrido 5 km se le pinchó una rueda. Luego de 10 minutos en la reparación, continuó su regreso. Recorrió 30 km en 40 minutos, descansó 20 minutos en el municipio de Oicatá, y luego de una hora regresó a Cómbita.



## Valoración

### Conclusiones y reflexiones frente a la experiencia.

Finalmente, pedí a los estudiantes que, en los grupos de trabajo, plantearan cinco conclusiones que giraran en torno a la construcción de conocimientos acerca del movimiento como un cambio de posición según un sistema de referencia; también acerca de las magnitudes relacionadas en una situación de movimiento rectilíneo uniforme, las similitudes y diferencias entre desplazamiento, distancia, rapidez y velocidad; así como del tipo de función que relaciona la distancia con el tiempo.

### Experiencia de aula

La experiencia se llevó a cabo durante cuatro sesiones de clase, con 36 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Barrio Olaya Herrera. Este trabajo fue producto de las reflexiones y aprendizajes logrados en el curso de formación "Diseño de situaciones didácticas mediadas por calculadora para el desarrollo del pensamiento matemático".

Como indiqué en el apartado anterior, la experiencia se efectuó en cuatro momentos, a saber: exploración, estructuración y práctica, transferencia y valoración.

En el momento de exploración, se motivó a los estudiantes hacia el nuevo aprendizaje para reconocer sus saberes previos frente a la temática que se abordó. Para esto le presenté el videoanimación "*Nairoman, el escarabajo tricolor*". Apoyados en la información proporcionada por la animación, los estudiantes identificaron los datos correspondientes a las distancias y los tiempos involucrados en cada etapa del Giro de Italia; se estableció una discusión en torno a los siguientes cuestionamientos: ¿cuáles cantidades aparecen en esta situación?, ¿cuántos kilómetros recorrió durante las 10 últimas etapas? ¿qué tipo de relación se establece entre la distancia y el tiempo?



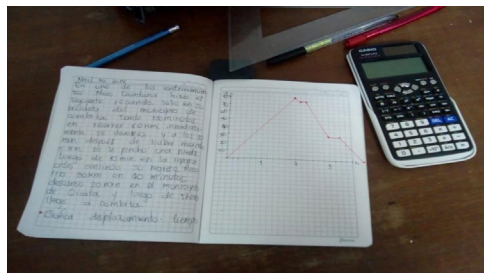
Figura 2. Tiempos y distancias de Nairo Quintana.

Fuente: MEN (2015).



En el momento de *transferencia*, los estudiantes elaboraron gráficas en las que se muestran las variaciones de los desplazamientos en relación con el tiempo, presentados en la situación en la que se describe uno de los entrenamientos realizados por Nairo Quintana. En la construcción, los estudiantes reconocieron las diferencias entre la rapidez y la velocidad y asumieron el tiempo máximo que se tardó en el recorrido. En sus argumentos tuvieron en cuenta el punto de referencia desde el cual debían iniciar la gráfica, así como los instantes en los que la velocidad fue igual a cero.

Figura 4. Gráfica realizada por un estudiante.



Fuente: archivo de la autora.

Para las conclusiones planteadas por los estudiantes en la valoración, ellos debieron salir al frente a compartirlas con sus compañeros. En este momento centraron sus argumentos en las discusiones y datos que tuvieron en la exploración. Los procedimientos realizados para encontrar los valores numéricos de la distancia, el desplazamiento, el tiempo y la velocidad, constituyeron una oportunidad para reflejar algunas concepciones de los estudiantes en las que ponen en juego su conocimiento. En este momento, los estudiantes reconocieron que las diferentes representaciones no se usan de manera arbitraria y que no se concentran simplemente en dar información sobre dos datos, sino que muestran la manera en la que varía una magnitud en relación con la otra.

## Reflexión pedagógica

El desarrollo de experiencias en las que se lleve a explorar los conocimientos previos y hacer la conexión con los nuevos, en los que se contextualice y se relacione con otras áreas, se debe realizar constantemente en el aula. En esta situación, el objetivo fue lograr la comprensión e identificación de variables y relaciones para modelar el cambio mediante funciones. Los estudiantes comprendieron que las funciones relacionan magnitudes que cambian, más allá de su tratamiento simbólico y analítico, y se logró potenciar en ellos procesos de pensamiento como la observación, la comparación y la indagación, entre otros. Las experiencias que involucren contextos reales y cercanos para los estudiantes con representaciones como gráficas, tablas, y expresiones algebraicas, promueven el fortalecimiento del pensamiento matemático y las competencias ciudadanas, el trabajo colaborativo y la reflexión acerca del uso de los procedimientos y de sus interpretaciones.





## Nairo Quintana: Giro de Italia. Calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW para abordar el concepto de función

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo  
[monizapata25@gmail.com](mailto:monizapata25@gmail.com)  
Institución Educativa Barrio Olaya Herrera  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Pensamiento variacional. Sistemas algebraicos y analíticos.	Análisis de las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
DBA 3. De grado Décimo		<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconoce la relación funcional entre variables asociadas con problemas.</li> <li>Interpreta y expresa magnitudes definidas como razones entre magnitudes (velocidad, aceleración, etc.), con las respectivas unidades y las relaciones entre ellas.</li> <li>Utiliza e interpreta la razón de cambio para resolver problemas relacionados con magnitudes como velocidad y aceleración.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Funciones		
<b>Objetivos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada.</li> <li>Interpretar y expresar la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones.</li> </ul>	
<b>Conocimientos previos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Magnitudes</li> <li>Conversión de unidades de medida</li> <li>Gráficas en Plano Cartesiano</li> <li>Uso de la calculadora</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje<sup>1</sup>



### Momento 1



Veamos el video: "Nairoman, el escarabajo tricolor", al que se puede acceder desde el enlace: <https://n9.cl/pvbl1> o desde nuestro celular con el siguiente código QR.

1 Los momentos propuestos son una adaptación de: MEN (2015). ¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme [video]. Colombia Aprende.





▶ ¿Cuánto tiempo se demoró Nairo en todo el recorrido?

---



---



---

▶ ¿Cómo podemos calcular la velocidad con la que recorrió Nairo toda la carrera?

---



---



---

▶ Exploraremos ahora las nociones de distancia y desplazamiento a partir del mapa de la ruta que se presenta en la imagen 1.

▶ Toma el mapa y calcula la distancia entre puntos de cada etapa y los respectivos desplazamientos realizados.

---



---



---

Figura 2. Ruta Giro de Italia 2014.

LAS 21 ETAPAS

Stage	Date	Start en finish	Length	Type
1	Fr 9 May	Belfast (N-Irl) – Belfast	21.7 km	team time trial
2	Sa 10 May	Belfast – Belfast	219.0 km	flat
3	Su 11 May	Armagh (N-Irl) – Dublin (Irl)	187.0 km	flat
	Mo 12 May	rest day / transport		
4	Tu 13 May	Giovinazzo – Bari	112.0 km	flat
5	We 14 May	Tarente – Viggiano	203.0 km	mountains
6	Th 15 May	Sassano – Montecassino	247.0 km	hilly
			257.0 km	
7	Fr 16 May	Frosinone – Foligno	211.0 km	flat
8	Sa 17 May	Foligno – Montecapiolo	179.0 km	mountains
9	Su 18 May	Lugo – Sestola	172.0 km	mountains
	Mo 19 May	rest day		
10	Tu 20 May	Modena – Salsomaggiore Terme	173.0 km	flat
11	We 21 May	Collecchio – Savona	249.0 km	hilly
12	Th 22 May	Barbaresco – Barolo	41.9 km	ITT
13	Fr 23 May	Fossano – Rivarolo Canavese	157.0 km	flat
14	Sa 24 May	Agliè – Oropa	164.0 km	mountains
15	Su 25 May	Valdengo – Plan di Montecampione	225.0 km	flat/summit finish
	Mo 26 May	rest day		
16	Tu 27 May	Ponte di Legno – Val Martello	139.0 km	mountains
17	We 28 May	Sarnonico – Vittorio Veneto	208.0 km	flat
18	Th 29 May	Belluno – Rifugio Panarotta	171.0 km	mountains
19	Fr 30 May	Bassano del Grappa – Cima Grappa	26.8 km	ITT (mountain)
20	Sa 31 May	Maniago – Monte Zoncolan	167.0 km	mountains
21	Su 1 June	Gemona del Friuli – Trieste	172.0 km	flat



Fuente: MEN (2015).



## Momento 2

En el video nos presentan una tabla con los tiempos acumulados de Nairo (Figura 2) en las últimas 10 etapas. Exploremos algunas relaciones que aparecen allí.



- ▶ ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 17?

---

---

---

- ▶ ¿Cuánto tiempo acumuló Nairo hasta culminar la etapa 16?

---

---

---

- ▶ Determina el tiempo que tardó Nairo en hacer el recorrido de la etapa 17.

---

---

---

- ▶ ¿Cuánto tardó Nairo en la Contrarreloj de subida de la etapa 19?

---

---

---

- ▶ ¿Qué parte de la distancia total del Giro de Italia recorrió Nairo en las últimas 10 etapas?

---

---

---

- ▶ Elaboremos una tabla en la que se relacione la distancia, el tiempo y la velocidad de Nairo en las últimas 10 etapas de esta carrera.









# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

Este capítulo reportó una propuesta en la que se reconoció la relación funcional existente entre dos magnitudes asociadas con una situación dada, se interpretó y expresó la relación entre las magnitudes a través de diferentes representaciones y se abordaron las ideas de rapidez y velocidad media, con apoyo de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

Así, presentamos como posibilidades de ampliación en el ambiente mismo, la vinculación en colectivos de trabajo que permita a los estudiantes poner en común sus ideas en torno al movimiento de los cuerpos y generar discusiones en cuanto a lo que se van encontrando. Además, ampliar un poco más la idea del movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración.

En el **momento 1**, y antes de dar inicio a la discusión matemática y física presente, sugerimos realizar una exploración del contexto mismo para situar a los estudiantes en el proceso a realizar. Esto puede hacerse con un conversatorio en clase que esté orientado por las siguientes preguntas: ¿quién es Nairo Quintana?, ¿en cuáles competencias ha participado Nairo y cuáles ha ganado?, ¿qué es el *Giro de Italia* y cada cuánto se corre?, ¿cómo se puede participar en el *Giro*?, ¿qué tipo de pruebas se corren en el *Giro*?, ¿cómo se construye la tabla de clasificación general del *Giro*?, ¿cuáles fueron los resultados generarles del *Giro 2014*?, ¿por qué es tan importante para Nairo Quintana y para Colombia el *Giro de Italia 2014*? u otras.

## Tarea 1

En el **momento 2**, como posibilidad para la ampliación sugerimos dos acciones. Una, realizar un proceso de interpretación de la información proporcionada en la tabla de la figura 2. Dos, usar los datos de la figura 2 (tiempo acumulado y distancia) para calcular la velocidad media de Nairo en cada una de las etapas del *Giro*. Para la interpretación de la información se puede realizar un conversatorio en torno a preguntas tales como: ¿qué información ofrece la tabla?, ¿cuál es la unidad de medida del tiempo acumulado dado en la tabla?, ¿cómo puede obtenerse el tiempo realizado por Nairo en cada prueba?, ¿qué diferencias hay entre una prueba contrarreloj y una que no lo es?

Para calcular el tiempo de cada etapa, puede realizarse el siguiente procedimiento:

- **Calcular el tiempo para cada etapa.** Recordamos que en la tabla se indica el tiempo en horas, minutos y segundos. Inicialmente se les pregunta a los estudiantes, ¿qué estrategia utilizarían para calcular el tiempo para cada etapa, tomando la información de la tabla?, estas estrategias se ponen en común y se discuten.

Dado que la tabla ofrece el tiempo acumulado, debemos restar la etapa anterior a la etapa en curso. Por ejemplo, el tiempo que tardó Nairo en la etapa 15 se calcula:

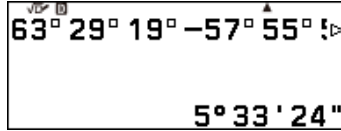
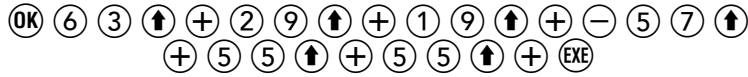
$$\text{Tiempo etapa 15} = \text{Tiempo acumulado etapa 15} - \text{Tiempo acumulado etapa 14}$$

$$63^{\circ}29'19'' - 57^{\circ}55'55'' = 5^{\circ}33'24''$$

Esto lo podemos hacer directamente en la calculadora. Así:

Ingresar al modo *Calcular*





Se marcan las horas, minutos y segundos con estas teclas (↑) (+)

De esta manera los tiempos por etapa de Nairo en las últimas 10 etapas, serían:

Etapa	Tiempo Por Etapa	Distancia
21	4°24'7"	169 Km
20	4°46'40"	167 Km
19	1°5'37"	26,8 Km contrarreloj subida
18	4°52'33"	171 Km
17	4°53'51"	204 Km
16	4°42'25"	139 Km
15	5°33'24"	217 Km
14	4°37'20"	162 Km
13	3°37'3"	158 Km
12	1°0'42"	46, 4 Km contrarreloj subida

**Nota:** Esta tabla es solo para conocimiento del profesor.

- Luego de calcular la velocidad media, pueden hacerse preguntas como: ¿qué significa la velocidad media en cada etapa?

Sugerimos, también, en este momento tener una discusión con relación a la escala del mapa dado y a qué estrategias pueden emplearse para calcular la distancia de cada etapa en este.

En el **momento 2**, sugerimos retomar los datos de interpretación de la tabla realizados antes y con ellos proceder a elaborar la tabla. Así se sugiere que antes de realizar la regresión lineal se puede construir una tabla de datos del recorrido, como la siguiente:

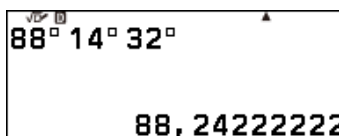
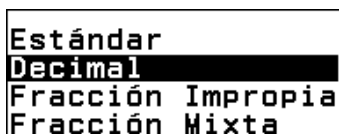
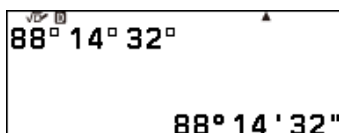


Tiempo	Distancia	Desplazamiento	Rapidez	Velocidad

- ▶ Antes de elaborar la tabla de valores y el gráfico propuesto en la estructuración, se debe precisar que los tiempos acumulados deben ser expresados en su notación decimal y que debe presentarse la distancia acumulada.

Los tiempos acumulados se pueden expresar en decimal con ayuda de la calculadora así:

$88^{\circ}14'32''$



De esta manera, los tiempos acumulados de Nairo en las últimas 10 etapas, serían:

Etapa	Tiempo acumulado (en horas)
21	88.24
20	83.84
19	79.06
18	77.96
17	73.09
16	69.19
15	63.48
14	57.93
13	53.3
12	49.69

**Nota:** Esta tabla es solo para conocimiento del profesor.

Por su parte las distancias acumuladas en las últimas 10 etapas serían:

Etapa	Distancia acumulada (en kilómetros)
21	1460.2
20	1291.2
19	1124.2
18	1097.4
17	926.4
16	722.4
15	586.4
14	306.4
13	204.4
12	46.4

**Nota:** Esta tabla es solo para conocimiento del profesor.

El profesor debe precisar que en la situación se hizo un supuesto de que el proceso inicia en la etapa 12, y desde allí se realizan los acumulados de las distancias.

En el **momento 3**, proponemos realizar, primero, preguntas de comprensión de la situación propuesta, tales como: ¿qué recorrido hizo Nairo en su entrenamiento?, ¿qué diferencias hay entre la distancia y los tiempos de este entrenamiento y de las etapas del *Giro*?, ¿cómo este entrenamiento puede ayudar a Nairo para correr el *Giro*? Puede construirse también una tabla de datos del recorrido del entrenamiento.

Por último, en el momento 4 sugerimos poner en común las conclusiones escritas por los estudiantes, estableciendo semejanzas y diferencias en ellas y realizar una cartel o presentación digital con dichas conclusiones y comparaciones.

## Tarea 2

Proponemos tomar los tiempos acumulados y las distancias de las últimas 10 etapas del *Giro* 2014, para Rigoberto Urán, “*Rigo*”, otro colombiano corredor del *Giro* y hacer comparaciones entre las velocidades medias de ambos.

Se presenta a los estudiantes la tabla con los tiempos y distancias de *Rigo*.

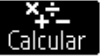
Etapa	Tiempo acumulado	Distancia
21	88°17'30"	169 Km
20	83°53'32"	167 Km
19	79°6'52"	26,8 Km contrarreloj subida
18	77°59'49"	171 Km
17	73°7'13"	204 Km
16	68°10'3"	139 Km
15	63°26'39"	217 Km
14	57°52'51"	162 Km
13	53°15'06"	158 Km
12	49°37'35"	46, 4 Km contrarreloj subida


Los estudiantes deberán indicar el tiempo acumulado de *Rigo* en decimal


Etapa	Tiempo acumulado (h, m, s)	Tiempo acumuladoa (decimal)
21	88°17'30"	
20	83°53'32"	
19	79°6'52"	
18	77°59'49"	
17	73°7'13"	
16	68°10'3"	
15	63°26'39"	
14	57°52'51"	
13	53°15'06"	
12	49°37'35"	

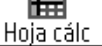
- ▶ Por ejemplo, para la etapa 18, el procedimiento anterior se realiza con ayuda de la calculadora así:


⬆


  
**Calculadora**

  
**Estadística**

  
**Distribución**

  
 Hoja cálcul

  
 Tabla

  
**XY=0**  
 Ecuación

(OK) (7) (7) (↑) (+) (5) (9) (↑) (+) (4) (9) (↑) (+) (EXE)

77° 59' 49"
▲

**77° 59' 49"**

Los estudiantes deberán indicar las distancias acumuladas de *Rigo*

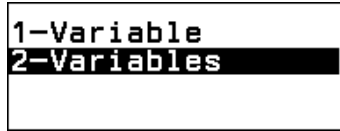
Etapa	Distancia (en km)	Distancia acumulada (en km)
21	169 Km	
20	167 Km	
19	26,8 Km contrarreloj subida	
18	171 Km	
17	204 Km	
16	139 Km	
15	217 Km	
14	162 Km	
13	158 Km	
12	46, 4 Km contrarreloj subida	

Los estudiantes generarán en la calculadora la tabla de valores y gráfica de la distancia y el tiempo acumulado para *Rigo*.

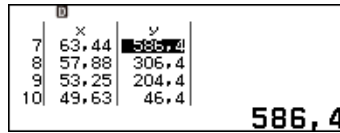
Etapa	Tiempo acumulado	Distancia acumulada
21	88.29	1460.2
20	83.89	1291.2
19	79.11	1124.2
18	77.99	1097.4
17	73.12	926.4
16	68.16	722.4
15	63.44	586.4
14	57.88	306.4
13	53.25	204.4
12	49.63	46.4

Para visualizar la tabla y graficarla en la calculadora sigue los siguientes pasos:





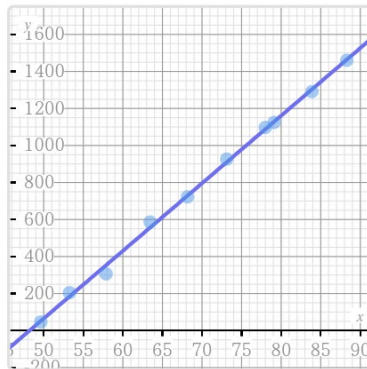
Selecciona **OK** e ingresa los datos



Genera el QR seleccionando **↑** **ⓧ**

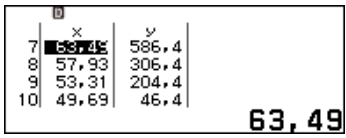
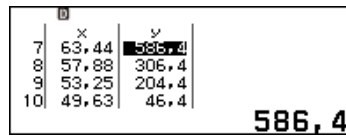






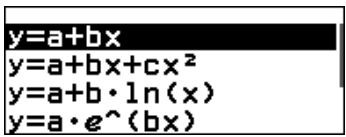
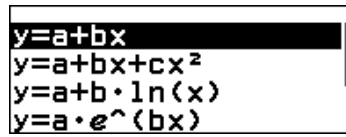


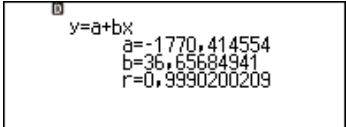
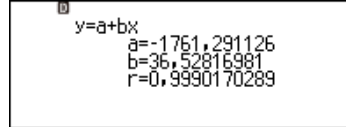


y al escanearlo se presenta la gráfica



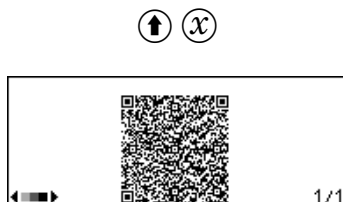
El profesor debe precisar que en la situación se hizo un supuesto de que el proceso inicia en la etapa 12, y desde allí se realizan los acumulados de las distancias.

- Posteriormente se realiza la regresión lineal para el tiempo y las distancias acumuladas en las 10 últimas etapas por Nairo y por Rigo. Esto se realiza con la calculadora así:

Para Nairo	Para Rigo
	
	
	
	
	
	
	

- A continuación, con ayuda del QR de la calculadora y Classpad.net podemos generar la gráfica de las dos funciones:

Gráfico para Nairo



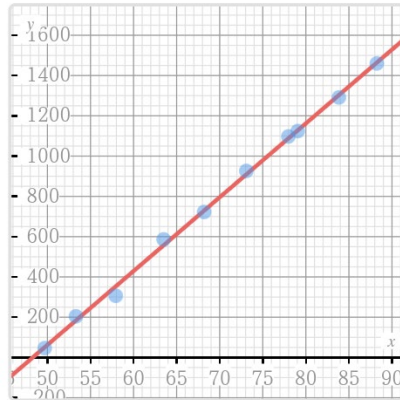
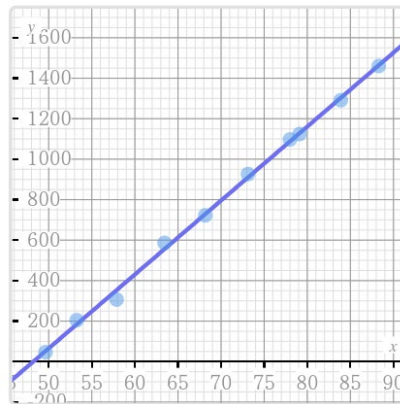


Gráfico para *Rigo*



Una vez tenemos las gráficas de Nairo y *Rigo* juntas, se ponen en paralelo las dos funciones y se comparan en ellas diferentes asuntos. Por ejemplo, ¿en cuál se presenta mayor velocidad y una menor?, ¿ganará el *Giro* quien tiene una velocidad media más alta?, ¿quién fue el ganador?, ¿corresponde que el que más rápido corrió fue el ganador?, suponga que *Rigo*, en la etapa 16 pierde 1 minuto con relación a Nairo; ¿cómo



podría afectar este hecho el comportamiento de la gráfica? ¿qué significado físico tiene?, ¿cuál fue la etapa que decidió el ganador del *Giro*?, ¿qué significado físico tiene el hecho de que las gráficas sean casi idénticas?

El profesor podría también hacer comparaciones entre los tiempos parciales y acumulados en cada etapa entre corredores Nairo y *Rigo*, así como las velocidades medias de ellos. Es posible también razonar respecto a la variación y lo que representan asuntos como los puntos de intersección entre esas dos funciones.



Pre Ans

Ans

Arc sen

sen

Arc cos

cos

Arc tan

tan

log

$\square^2$

ln

log  $\square$

7

8

9

INS

$\square \times$

OFF

AC

5

6

$\times$

$\div$

2

3

$+$

$-$

,

$\times 10^{\square}$

FORMAT

EXE



# Apuestas en dos movimientos. Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico

Lorena Mena Mena

[lmm1509@hotmail.com](mailto:lmm1509@hotmail.com)

Institución Educativa Villa Flora

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Resumen:

En este documento se plasma parte de la experiencia del trabajo realizado con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Villa Flora, en la cual se muestra una propuesta de trabajo bajo la temática del movimiento parabólico que se realizó en dos dimensiones, la verificación de lo enseñado en clase y la construcción de materiales haciendo uso de la calculadora. Esta experiencia fue trabajada por equipos de laboratorios (4 o 5 integrantes) y deja ver las habilidades en las competencias ciudadanas que tienen los y las estudiantes.

**Palabras clave:** Movimiento parabólico, enseñanza, calculadora, trabajo colaborativo.



## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

---

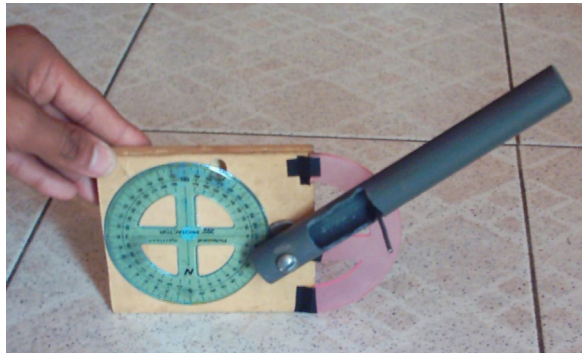
<b>Tiempo de duración:</b>	Dos horas
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW</li><li>• Tubo de plástico</li><li>• Trozo de cuerda elástica</li><li>• Un resorte</li><li>• Una puntilla Transportador</li><li>• Una esfera de plástico o madera de 2 cm de diámetro, aproximadamente</li><li>• Una tabla de 30 cm x 60 cm aproximadamente</li><li>• Marcador, lápiz, lapiceros, regla, cronómetro y smartphone.</li></ul>

---

### Actividad previa

Para comenzar, se solicita a los y las estudiantes que se conformen en grupos de a cuatro o cinco. Luego de las indicaciones, se pide que construyan un lanzapelotas como el de la figura 1. Este artefacto será utilizado en las siguientes actividades.

**Figura 1.** Diseño de lanzapelotas.



Fuente: Cabellos (2007).

## Movimiento parabólico<sup>1</sup>

En este momento, se exploran las fórmulas del movimiento parabólico:

Distancia horizontal

$$D = V_x \times T$$

Altura

$$h = V_y \times t \pm \frac{gt^2}{2}$$

Velocidad final

$$V_f = V_y \pm g \times t \quad v_f^2 = v_y^2 \pm 2gh$$

Velocidad resultante

$$V_r = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

Velocidad en y

$$V_y = V_0 \sin a$$

Velocidad en x

$$V_x = V_0 \cos a$$

Tiempo de vuelo

$$T_v = \frac{2V_0 \sin a}{g} = \frac{2V_y}{g}$$

Altura máxima

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g} = \frac{v_y^2}{2g}$$

Alcance horizontal

$$D = \frac{2v_0^2 \sin a \cos a}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2a}{g}$$

Relación entre H y D

$$\tan a = \frac{4H}{D}$$



### Actividad 1. Exploración

En clase los estudiantes ubican el lanza pelotas en el suelo y disparan el balón varias veces. Cada vez con distinto ángulo de inclinación respecto a la horizontal. Luego se registran las observaciones en la siguiente tabla.

1 Las fórmulas presentadas a continuación fueron extraídas de: Franco, Á. (s.f.). Alcance máximo en un plano inclinado. *Física con ordenador- Curso Interactivo de Física en Internet*. <http://www.sc.edu/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance1/alcance1.htm>

**Tabla 1.** Tabla de registro de observaciones.

Ángulo (°)	Alcance horizontal (m)	Tiempo (s)

Para cada caso en la tabla, calcula la velocidad inicial y la altura máxima.

**Tabla 2.** Tabla de registro de velocidad.

Ángulo (°)	Alcance horizontal(m)	Tiempo (s)	Velocidad inicial (m/s)	Altura máxima (m)

## ¿Cómo calcular la velocidad inicial y la altura máxima?

Cuando se realizan los lanzamientos se puede obtener, midiendo el ángulo de lanzamiento, el alcance horizontal y el tiempo; las expresiones que relacionan estas magnitudes con la velocidad inicial y la altura máxima son:

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2a}{g}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 (\sin a)^2}{2g}$$

Donde:

$D$  es el alcance horizontal.  
 $a$  es el ángulo de lanzamiento.  
 $g$  es la aceleración de la gravedad.

$V_0$  es el módulo de la velocidad inicial.  
 $H_{max}$  es la altura máxima.

## Calculemos la velocidad inicial

Como:  $D = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ ,

La velocidad inicial es:  $\sqrt{\frac{D \times g}{\sin 2\alpha}}$ ,

Considerando  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ,

la velocidad inicial quedaría expresada de la siguiente manera:  $V_0 = \sqrt{\frac{10D}{\sin 2\alpha}}$ ,

donde  $D$  es el alcance horizontal en metros.

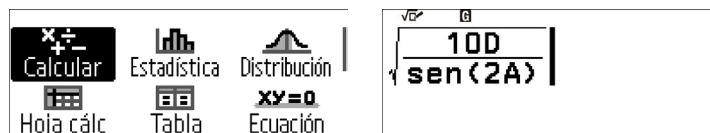
## Uso de la calculadora

Como ejemplo de las actividades a realizar, se determina el valor del módulo de la velocidad inicial para los siguientes valores de  $D$  y  $\alpha$

**Tabla 3.** Determinación del módulo de velocidad.

$D$	$\alpha$	$V_0$
3m	27°	
4m	35°	
5m	55°	

En la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, se utiliza el modo *Calcular* que permite evaluar expresiones que dependen de varios parámetros.



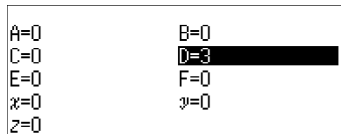


En las ilustraciones anteriores, se emplea la variable  $A$  para representar el ángulo de lanzamiento.

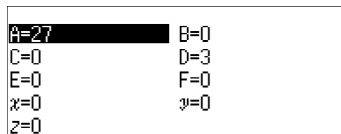
Cuando se usan las variables  $A$  y  $D$  en una fórmula, los valores que estas tienen en la memoria se pueden cambiar en la calculadora.

Estos valores deben cambiarse por:  $D = 3$  y  $A = 27$

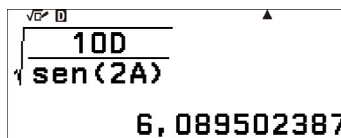
La calculadora considera por defecto los valores de las variables en  $0$ , para modificar su valor se ingresa al modo *Calcular*. Luego, para inicializar  $D$  se ejecuta la siguiente combinación de teclas (revisar que la calculadora esté en grados sexagesimales):



Análogamente, para inicializar  $A$  se ejecuta la siguiente combinación de teclas:



Ambos valores quedan almacenados en memoria. Ahora, se obtiene el valor del módulo de la velocidad inicial:

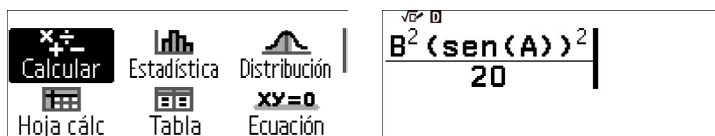


Presionamos  $(EXE)$  y realizamos la misma operación con los valores restantes de la Tabla 3.



Para el cálculo de la altura máxima se utiliza la siguiente fórmula:

$$H_{max} = \frac{V_0^2 (\sin a)^2}{2g}$$

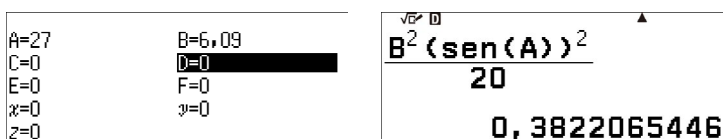


Donde:

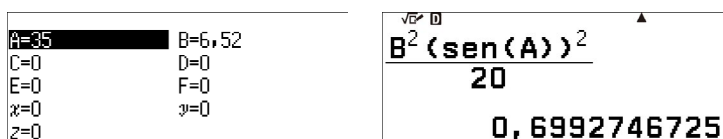
$B$  representa el módulo de la velocidad inicial y  $A$  el ángulo de lanzamiento

Se utiliza *Calcular* para determinar los valores de la altura máxima en la tabla 3.

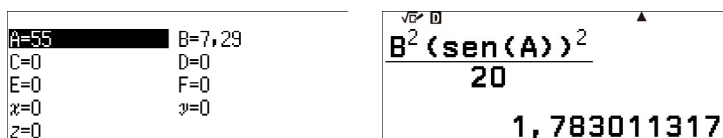
Para los valores  $A = 27$  y  $B = 6.09$



Para los valores  $A = 35$  y  $B = 6.52$



Para los valores  $A = 55$  y  $B = 7.29$





## Recomendaciones para el profesor

En esta actividad, los estudiantes realizan lanzamientos con distintos ángulos para medir el alcance horizontal en metros y el tiempo en segundos. Sabemos que el alcance horizontal es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es  $45^\circ$ , pero esto está condicionado a mantener el módulo de la velocidad de lanzamiento  $V_0$  constante. Por lo tanto, es necesario que los estudiantes planteen una estrategia para mantener esa rapidez inicial constante o mantener valores de rapidez lo más próximos posible al realizar la experiencia para completar la tabla 5.

Con la calculadora se puede explorar el comportamiento de la altura máxima y del alcance máximo utilizando el modo *Tabla*, que permite ingresar una función y devuelve los valores correspondientes de la misma para los valores de la variable ingresados.

## Altura máxima en función del ángulo de lanzamiento

Exploremos el comportamiento de la altura máxima, cuando el módulo de la velocidad  $V_0$  se mantiene constante y variamos el ángulo de lanzamiento.

$$H_{max} = \frac{V_0^2 (\sin \alpha)^2}{2g}$$

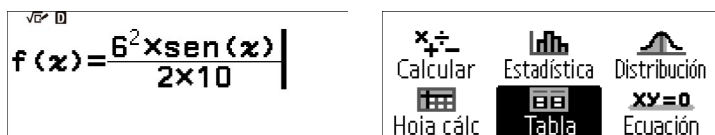
Utilizaremos  $V_0 = 6 \frac{m}{s}$ ;  $g = 10 \frac{m}{s^2}$

$$H_{max} = \frac{6^2 (\text{sen} \alpha)^2}{2 \times 10}$$

Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos  $\alpha$  como la variable independiente  $x$ , y  $H_{max}$  como  $f(x)$ .

Para ello, debemos definir la función  $f(x)$ :

$f(x)$   $\nabla$   $\nabla$  Definir  $f(x)$   $\text{EXE}$





Lo que podemos observar en la tabla y su gráfica es que a medida que el valor del ángulo aumenta, manteniendo constante la rapidez inicial, la altura máxima también aumenta. Es importante establecer el dominio de la función para el experimento que estamos realizando. Podemos orientar nuestros estudiantes con preguntas:



- ▶ ¿Cuáles son los valores de los ángulos de lanzamiento, en este experimento?
- ▶ ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 290°?
- ▶ ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 375°?
- ▶ ¿Podrían lanzar el proyectil con un ángulo de 230°?

### Alcance máximo en función del ángulo de lanzamiento:

Exploremos el comportamiento del alcance máximo, cuando el módulo de la velocidad  $V_0$  se mantiene constante y variamos el ángulo de lanzamiento. La fórmula para el alcance máximo es:

$$D = \frac{V_0^2 \sin 2a}{g}$$

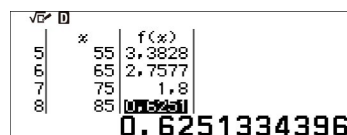
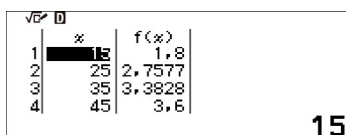
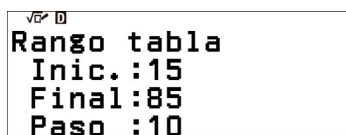
Utilizaremos  $V_0 = 6 \frac{m}{s}$ ;  $g = 10 \frac{m}{s^2}$

$$D = \frac{6^2 \sin 2a}{10}$$

Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos como la variable independiente  $x$ , y  $D$  como  $f(x)$ :



representamos los ángulos desde 15° hasta 85°, con un paso de 10°

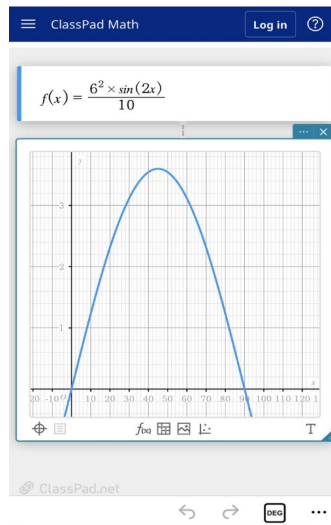


Explorando esta tabla, se puede observar que el mayor valor obtenido del alcance es 3.6 m y ocurre cuando el ángulo de lanzamiento es  $45^\circ$ . Otra característica que se puede explorar es que para ángulos complementarios el valor del alcance es el mismo.

Veamos la gráfica de esta función, utilizando la aplicación ClassPad Math:



Y al escanearlo con el dispositivo se obtiene:



El alcance aumenta a medida que el ángulo se aproxima a  $45^\circ$ , obtenemos el máximo valor del alcance para un ángulo de  $45^\circ$  y después vuelve a disminuir, esto se cumple siempre que la rapidez inicial se mantenga sin variación.

### Altura máxima y alcance en función de la rapidez

Es sencillo para los estudiantes mantener constante el ángulo de lanzamiento y lanzar la bala con distinta rapidez en cada intento, de este modo se pueden recolectar valores del alcance.

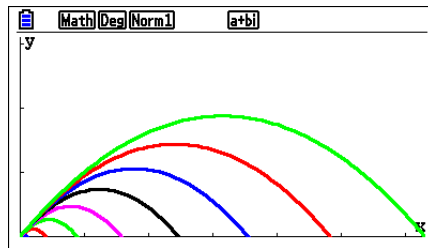


La altura máxima en cada lanzamiento varía con la velocidad, la altura será mayor si es mayor la rapidez inicial, cuando se mantiene un mismo ángulo de lanzamiento.

Las parábolas se generaron para un ángulo de lanzamiento constante igual a  $50^\circ$  y variando la velocidad en  $ms^{-1}$ , desde 1 hasta 7. Se puede observar que, a mayor alcance, mayor la altura máxima del tiro parabólico.

Observe la siguiente gráfica generada en una calculadora CASIO fx-CG50.

Figura 2. Gráfica en Calculadora Casio fx-CG50.



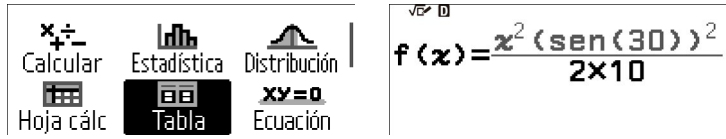
Podemos continuar la exploración del movimiento parabólico realizando modificaciones en el ángulo de lanzamiento y planteando las siguientes preguntas: ¿Cómo varía la altura máxima del tiro parabólico con relación a la rapidez inicial, cuando se mantiene el ángulo de lanzamiento constante?, ¿es esta relación una función lineal?, ¿es una función cuadrática? Elabore una tabla de valores y grafique.

$$H_{max} = \frac{V_0^2 (\text{sen}\alpha)^2}{2g}$$

Utilizaremos  $\alpha = 30^\circ$ ;  $g = 10 \frac{m}{s^2}$

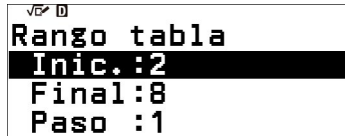
$$H_{max} = \frac{V_0^2 (\text{sen}30)^2}{2 \times 10}$$

Para ingresar la función en la calculadora, consideraremos  $H_{max}$  como  $f(x)$  y como la variable independiente  $x$ .



$$f(x) = \frac{x^2 (\text{sen}(30))^2}{2 \times 10}$$

Los valores de la velocidad ( $x$ ) que utilizaremos para elaborar la tabla son valores desde 2 hasta 8 con un paso de 1



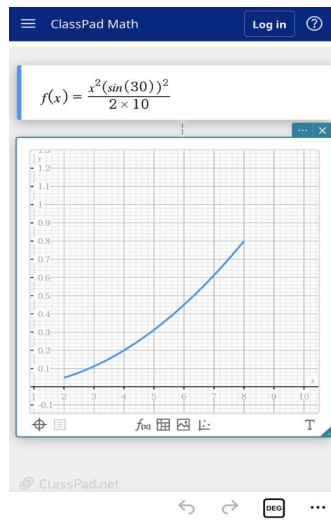
Los valores obtenidos son:

x	f(x)
2	0,05
3	0,1125
4	0,2
5	0,3125
6	0,45
7	0,6125
8	0,8

Con la aplicación ClassPad Math se podrá observar la gráfica que representa la variación cuadrática de la altura máxima en función de la rapidez inicial, para un ángulo de lanzamiento constante e igual a 30°, al generar el QR con la combinación de teclas  $\uparrow$   $\otimes$ .



Y al escanearlo en el celular se obtiene



Recordemos que cuando se modifica el ángulo de lanzamiento en un lanzamiento parabólico, cambia la trayectoria que describe el objeto lanzado. Si el ángulo se incrementa, la trayectoria será más vertical, lo que resulta en un alcance más corto pero una mayor altura máxima. Por otro lado, si el ángulo se reduce, la trayectoria será más horizontal, lo que aumenta el alcance, pero disminuye la altura máxima.

Si se modifica, como en este caso, el ángulo de lanzamiento de  $50^\circ$  a  $30^\circ$  en un lanzamiento parabólico, la trayectoria del objeto lanzado cambiará. Al reducir el ángulo, la trayectoria será más horizontal, lo que significa que el alcance aumentará, es decir, el objeto recorrerá una mayor distancia horizontal antes de tocar el suelo. Sin embargo, la altura máxima alcanzada será menor en comparación con un lanzamiento a  $50^\circ$ .

## Experiencia de aula

La experiencia se realizó con los grados décimos de la Institución Educativa Villa Flora, los estudiantes se organizaron en grupos de laboratorios (cuatro a cinco integrantes). Para la demostración y el cálculo de la altura máxima de un cuerpo con movimiento parabólico, se hicieron varios registros en una tabla con el valor de ángulos diferentes y los lanzamientos se realizaron en la cancha de la institución.



En términos de la mediación, se puede potenciar el desarrollo cognitivo a través del apoyo que un par más experimentado, como un docente o tutor, brinda al estudiante para que adquiera un nuevo conocimiento. Para Vygotsky (2000), la mediación se concibe como un proceso en el cual un individuo más experimentado guía al aprendiz en la realización de una tarea o la comprensión de un concepto, proporcionando el andamiaje necesario para que el aprendiz pueda alcanzar un nivel superior de comprensión o desempeño.

A partir de la mediación, Vygotsky (2000) desarrolla el concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP), que consiste en la distancia entre lo que un estudiante puede hacer por sí mismo y lo que puede hacer con ayuda. La ZDP se divide en dos partes: la zona de desarrollo real, que comprende las habilidades y conocimientos que el individuo ya ha desarrollado de forma independiente; y la zona de desarrollo potencial, que incluye las habilidades y conocimientos que el individuo puede desarrollar con la ayuda de un guía o tutor. La mediación, entonces, se convierte en un elemento clave para llevar al estudiante desde su zona de desarrollo real hacia su zona de desarrollo potencial, permitiéndole alcanzar un nivel de desarrollo más avanzado.

En concordancia con lo anterior, y de acuerdo con Viera (2003), David Ausubel propone la teoría del aprendizaje significativo, cuyo postulado central alude a la adquisición de aprendizajes a través de la relación entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos (conocimientos que se espera aprenda el estudiante). Desde este punto de vista, los conocimientos deben relacionarse sistemáticamente y no pueden ser aislados. Para que se produzcan los aprendizajes significativos debe existir una predisposición por aprender, que se crea cuando los conocimientos que se deben adquirir tienen utilidad práctica. Para el autor, la adquisición de aprendizajes significativos no se da de manera espontánea porque es el resultado de un proceso de enseñanza activo que atraviesa por tres fases.

La implementación de esta estrategia no solo promovió el trabajo colaborativo entre pares, sino que también facilitó la interacción entre la docente y los estudiantes, así como el uso de la calculadora como una herramienta para apoyar el trabajo de los estudiantes. El trabajo en equipos colaborativos permitió que los estudiantes se sintieran cómodos compartiendo sus ideas y conocimientos previos, lo que condujo a una mayor fluidez en la comunicación y en la expresión de sus puntos de vista.

El uso de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW resultó fundamental para verificar la información y para que los estudiantes pudieran observar la representación gráfica de ecuaciones cuadráticas, lo que les permitió comprender mejor la relación entre las matemáticas y la física. Además, se destacó un interés particular por explorar las funciones del celular en la calculadora de manera curiosa, lo que evidencia una disposición positiva hacia la tecnología como herramienta educativa.





## Apuestas en dos movimientos. Una experiencia pedagógica en torno al movimiento parabólico

Lorena Mena Mena  
[lmm1509@hotmail.com](mailto:lmm1509@hotmail.com)  
Institución Educativa Villa Flora  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	Numérico, métrico, espacial y variacional. Entorno físico: procesos físicos. Ciencia, tecnología y sociedad.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establezco relaciones entre las diferentes fuerzas que actúan sobre los cuerpos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme y establezco condiciones para conservar la energía mecánica.</li> <li>• Modelo matemáticamente el movimiento de objetos cotidianos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Ciencias naturales: Comprende que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describe el movimiento de un cuerpo (rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado, en dos dimensiones – circular uniforme y parabólico) en gráficos que relacionan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.</li> <li>• Predice el movimiento de un cuerpo a partir de las expresiones matemáticas con las que se relaciona, según el caso, la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.</li> <li>• Identifica las modificaciones necesarias en la descripción del movimiento de un cuerpo, representada en gráficos, cuando se cambia de marco de referencia.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Cinemática (Movimiento parabólico)		
<b>Objetivo:</b> Comprender que el movimiento de un cuerpo, en un marco de referencia inercial dado, se puede describir con gráficos y predecir por medio de expresiones matemáticas.		
<b>Conocimientos previos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razones trigonométricas de ángulos agudos</li> <li>• Ecuaciones</li> <li>• Funciones</li> <li>• Cinemática (Movimiento rectilíneo uniforme, Movimiento acelerado)</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

Para iniciar el trabajo es importante:

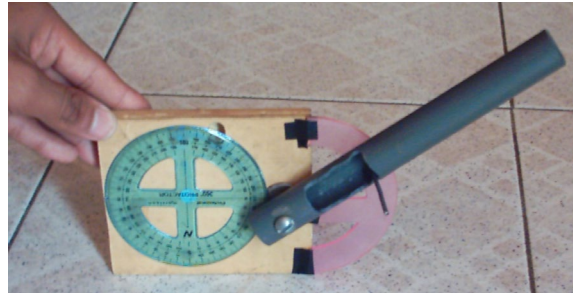
- ▶ Formar equipos de trabajo de cuatro o cinco estudiantes
- ▶ Registrar en la tabla los valores obtenidos después de los lanzamientos
- ▶ Registrar los resultados en la hoja milimétrica
- ▶ Entregar al docente la guía con las operaciones y los resultados

## Actividad previa

Con los integrantes de tu equipo diseñen y construyan un lanza pelotas, como el de la figura 1. Este artefacto será utilizado en la siguiente actividad.



Figura 1. Diseño de lanzapelotas.



Fuente: Cabellos (2007).

## Movimiento parabólico<sup>1</sup>

### Fórmulas de movimiento parabólico

Distancia horizontal

$$D = V_x \times T$$

Velocidad final

$$V_f = V_y \pm g \times t \quad v_f^2 = v_i^2 \pm 2gh$$

Velocidad en y

$$V_y = V_0 \sin \alpha$$

Tiempo de vuelo

$$T_v = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2V_y}{g}$$

Altura

$$h = V_y \times t \pm \frac{gt^2}{2}$$

Velocidad resultante

$$V_r = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

Velocidad en x

$$V_x = V_0 \cos \alpha$$

Altura máxima

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_y^2}{2g}$$

<sup>1</sup> Las fórmulas presentadas a continuación fueron extraídas de: Franco, Á. (s.f.). Alcance máximo en un plano inclinado. *Física con ordenador. Curso Interactivo de Física en Internet*. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/parabolico/alcance1/alcance1.htm>





# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

Este capítulo reportó una propuesta donde se aborda el movimiento en dos dimensiones. En ella se emplearon gráficos, posibilidades de la calculadora científica y se ofrecieron orientaciones para profesores. Algunas consideraciones adicionales que se pueden tener en cuenta, a partir del uso de la calculadora Classwiz fx-991LA CW son:

Para la gestión del ambiente proponemos contemplar asuntos respecto a la relación física-matemáticas y la elaboración del lanza pelotas. En primer lugar, sugerimos un ejercicio de indagación acerca de la historia de los lanza proyectiles, su relación con la física y las matemáticas. En segundo lugar, se pueden generar preguntas sobre la posibilidad de mejorar sus lanza pelotas, discutiendo la influencia de las mejoras en los lanzamientos.

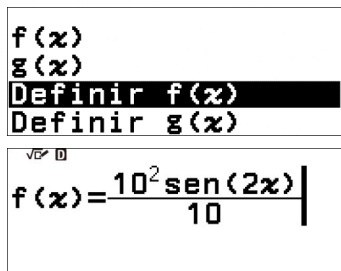
Otro asunto susceptible de ser abordado es considerar las relaciones entre las ecuaciones y la situación que se está modelando. Por ejemplo, generar preguntas como: ¿al considerar un lanzamiento con una velocidad inicial dada, este podrá alcanzar, de manera simultánea, su altura máxima y su desplazamiento horizontal máximo?, ¿en el mismo lanzamiento se puede obtener tiempo y altura máximos? Estas preguntas permiten no solo establecer condiciones para el estudio del lanzamiento, sino también considerar relaciones entre las ecuaciones del movimiento. Otras posibles tareas para el aula son:

## Tarea 1

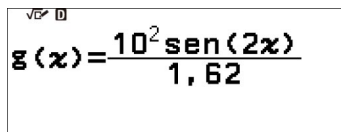
Los cálculos que se han realizado consideran una aproximación a la gravedad de la tierra; considera una situación hipotética donde puedes viajar a algún planeta del sistema solar o a la Luna, nuestro satélite natural. Considera la gravedad de ese cuerpo celeste, explora con la función de tabla de la calculadora las medidas de altura y desplazamiento para una velocidad inicial dada (por ejemplo, 10 m/s) y genera algunas conclusiones con relación al movimiento en otros planetas vs el movimiento en la tierra. A continuación, presentamos algunas capturas para el procedimiento:



Una vez en tabla se selecciona la opción función / definir  $f(x)$ . La función  $f(x)$  puede estar asociada al desplazamiento para el caso de la tierra. La función definida es:



Luego se puede definir  $g(x)$  con la gravedad del cuerpo celeste elegido, en este caso el ejemplo contempla la gravedad de la luna.

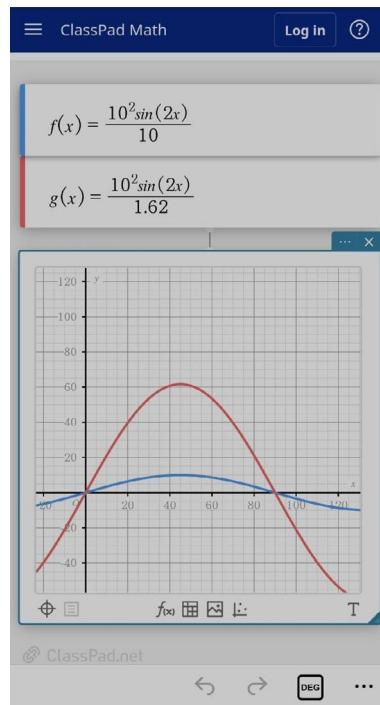


Después de definir las funciones, se puede analizar la tabla de valores:

$x$	$f(x)$	$g(x)$
1	0	0
2	1,7364	10,719
3	3,4202	21,112
4	5	30,864



El profesor puede aprovechar esta situación para hacer preguntas como: ¿en dónde se da un mayor desplazamiento?, ¿para un ángulo dado, siempre será mayor el desplazamiento en ese lugar? Posteriormente, se puede generar el código QR para ver, a través de ClassPad Math, las gráficas de las funciones:



Otras preguntas que el profesor puede utilizar para ampliar el estudio de la situación son: ¿qué representan los valores negativos de  $y$ ?, ¿el comportamiento de cuáles variables del movimiento se ve influenciado al considerar esta situación hipotética?, ¿cuáles no cambian?, ¿cómo influye la variación de los ángulos en el desplazamiento para los dos casos que se presentan?

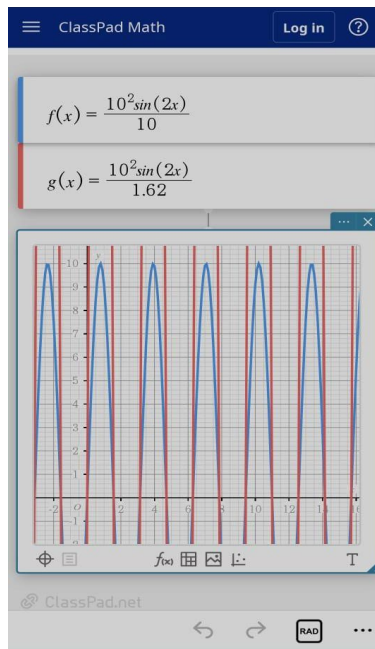
## Tarea 2

Un compañero de clase realizó el proceso descrito en la **tarea 1**; sin embargo, los resultados que obtuvo en la tabla de valores y en la gráfica difiere del de sus compañeros. Determina cuál es el sentido de los valores de la tabla y de la gráfica. Además, determina los valores de  $x$  para los cuales tiene sentido la situación propuesta.

Para definir la tabla para dos variables se realiza la siguiente combinación de teclas:

⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ Tipo de tabla ⊙  $f(x)/g(x)$  ⊙ ⊙ ⊙

$x$	$f(x)$	$g(x)$
1	0	0
2	-5,44	-33,58
3	9,1294	56,354
4	-9,88	-60,98



**Nota:** en este caso, el profesor puede promover una reflexión con relación al uso de la calculadora, las unidades de medida que se emplean en cada caso (grados y radianes para esta situación) y sus relaciones con la situación que se está estudiando.



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

8

6

sen

8

9

3

$\times$

FORMAT

9

tan

EXE

$\sqrt{\square}$

cos

6

$+$

$+$

INS

tan

$\sqrt{\square}$

tan

EXE

$\sqrt{\square}$

tan

$\times$

$+$

$\div$

$-$

EXE

$\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square}$

EXE

CATALOG

$\square^2$

$\square^2$

AC

$\div$

$-$

EXE

$\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square}$

EXE

TOOLS

$\log \square$

$\log \square$

AC

$\div$

$-$

EXE

$\sqrt{\square}$

$\sqrt{\square}$

EXE





## ¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo?

Paula Andrea Barrientos Tascón

[pbarrientos1028@yahoo.es](mailto:pbarrientos1028@yahoo.es)

Institución Educativa San Pablo

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

### Resumen:

En esta guía, el docente encontrará una manera contextualizada de aplicar las leyes del seno y del coseno, con la estimación, la modelación y la calculadora para representar recorridos con ayuda de objetos matemáticos como el triángulo y herramientas tecnológicas como el servidor Google Maps y la calculadora científica. Esta situación didáctica le permitirá al estudiante desarrollar habilidades matemáticas y potenciar el trabajo cooperativo entre pares. La propuesta de trabajo se plantea a partir de los saberes previos de los estudiantes, por medio de un documento taller asignado para cada equipo de trabajo para los avances de la clase, el cual tiene presente al mismo tiempo la participación individual del estudiante y su participación colectiva.

**Palabras clave:** Triángulos, Google Maps, ley del seno, ley del coseno, calculadora científica CASIO Classwiz fx-991LA CW.



---

**Eje central:** Aplicaciones de las funciones trigonométricas

---

**Objetivo:** Formular, comparar y ejercitar una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con el uso de la ley del seno y la del coseno con ayuda de la calculadora científica CASIO Classwiz fx-991LA CW.

---

**Conocimientos previos:** Razones, proporciones, medición y clasificación de ángulos, velocidad, conversión de unidades, ley del seno y ley de coseno.

---

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

---

**Tiempo de duración:** Cuatro horas

---

**Recursos:**

- Calculadoras CASIO Classwiz fx-991LA CW
- Fotocopia (taller-guía)
- Fotocopias (Google Maps)
- Regla, transportador, lápiz, borrador, hojas cuadriculadas.
- Cuaderno con notas de clase.
- Un computador con internet (docente)

---

Se inicia la clase indagando a los estudiantes por sus saberes previos (momento saber), en torno a la clasificación de triángulos. Luego, se dividen los estudiantes en grupo, se explica detalladamente la guía y se les recuerda asignar los roles para que cada uno evidencie la importancia del trabajo cooperativo. Con anterioridad a la clase, se solicita a los estudiantes los materiales necesarios para el desarrollo de la clase.

La actividad central de la guía propone que los estudiantes, en su grupo de trabajo, escojan el compañero que a menudo llega tarde al colegio, le pregunten la dirección de su casa y un punto estratégico por el que realiza el recorrido para llegar al colegio; y luego tracen un triángulo con vértices *ABC* en la aplicación de Google Maps, ubicando la Institución Educativa San Pablo, la dirección de la casa del estudiante elegido y, por último, un lugar estratégico por donde pasa el estudiante camino al colegio. Una vez identificadas estas ubicaciones, seleccionan el modo de desplazamiento en la aplicación de Google, para este caso particular fue caminando; luego se realiza la impresión con el tiempo de recorrido y la distancia en metros que brinda Google Maps.

Con la información de cada grupo, se imprime el mapa de cada situación a una escala de 1:100 metros y se incluye la escala de conversión establecida. Posteriormente, cada grupo recibe tres copias idénticas de la situación con los tres puntos estratégicos.

Después de resolver las situaciones con las tres formas planteadas que se describen en la guía del estudiante, se espera que los estudiantes redacten una situación problema que

















Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

sen

8

6

3

FORMAT

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

+

EXE

$\sqrt{\square}$

tan

0

+

-

$\approx$

$\sqrt[n]{\square}$

INS

$\times$

$\div$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\square^{-1}$

(

)

$\square^2$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

log

=

OFF

AC

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

CATALOG

In

log  $\square$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

TOOLS

$\circ \circ \circ$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$



¿Qué tan cerca estás  
de nuestro colegio?  
y ¿por qué llegas tarde  
al mismo?

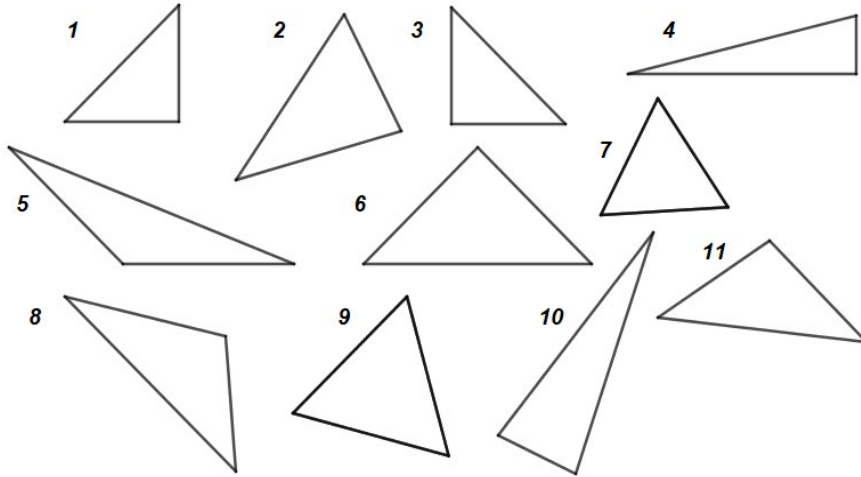
Paula Andrea Barrientos Tascón  
[pbarrientos1028@yahoo.es](mailto:pbarrientos1028@yahoo.es)  
Institución Educativa San Pablo  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Décimo	<p>Pensamiento espacial y sistemas geométricos.</p> <p>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos.</p> <p>Pensamiento métrico y sistemas de medidas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real con relaciones y funciones trigonométricas.</li> <li>• Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.</li> </ul> <p>Con otras áreas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Con Lengua Castellana: Produzco textos argumentativos que evidencian mi conocimiento de la lengua y el control sobre el uso que hago de ella en contextos comunicativos orales y escritos.</li> <li>• Con Tecnología: Propongo, analizo y comparo diferentes soluciones para un mismo problema y explico su origen, ventajas y dificultades.</li> <li>• Con Ciencias (componente Físico): Utilizo las matemáticas para modelar, analizar y presentar datos y modelos en forma de ecuaciones, funciones y conversiones.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Interpretar:</b> Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.</li> <li>• <b>Formular:</b> Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.</li> <li>• <b>Argumentar:</b> Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Aplicaciones de las funciones trigonométricas		
<b>Objetivo:</b> Es que el estudiante formule, compare y ejercite una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con el uso de la ley de seno y la del coseno con ayuda de la calculadora.		
<b>Conocimientos previos:</b>		Razones, proporciones, medición y clasificación de ángulos, velocidad, conversión de unidades, ley del seno y ley de coseno.



Figura 2. Clasificación de los triángulos.



Fuente: elaboración propia en Geogebra.

Completa la tabla con la anterior información:

Triángulo	Clasificación según sus lados	Clasificación según sus ángulos
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

## Actividad 2. Guía de aprendizaje

### ¿Qué tan cerca estás de nuestro colegio? y ¿por qué llegas tarde al mismo?

- ▶ **Objetivo:** Formular, comparar y ejercitar una situación problema con el servidor Google Maps, por medio de triángulos no rectángulos, con las leyes del seno y del coseno con ayuda de la calculadora.
- ▶ **Materiales:** fotocopia, regla, transportador, calculadora y lápiz.

---

#### Reconozcamos la herramienta Google Maps

Es una aplicación que ofrece imágenes de mapas que se pueden deslizar en la pantalla, Google Maps obtiene esas imágenes desde satélites al rededor del mundo. Asimismo, también se apoya en una herramienta integrada conocida como Street View para generar imágenes de calle.

Google Maps permite que se tracen rutas de viaje siguiendo un mapa real o cartográfico de forma online. En estos casos, los usuarios pueden visualizar los kilómetros recorridos, al mismo tiempo que se incluye el tiempo del viaje, rutas alternativas y el tipo de transporte a utilizar. Pero, también tiene otras funcionalidades como la facilidad de compartir una localización exacta. Google Maps ofrece la capacidad de hacer acercamientos o alejamientos para mostrar el mapa. El usuario puede controlar el mapa con el mouse o las teclas de dirección para moverse a la ubicación que desee. Los usuarios pueden ingresar una dirección, una intersección o un área en general para buscar en el mapa. Además de visualizar mapas callejeros, de satélite o de relieve de cualquier parte del mundo, se puede crear nuestros propios mapas personalizados y almacenarlos en nuestra cuenta, de manera que se consulten en diferentes tiempos o compartirlos con nuestros contactos. A los elementos que se incluyen en los mismos se pueden incorporar textos, imágenes, videos o cualquier componente multimedia. A esto se le llama Geolocalización de contenidos.

Tomado de: APPYWEB, Agencia de marketing online. (s.f.). *Google Maps*.  
<https://www.appyweb.es/diccionario/google-maps/>

---

#### Propongo desarrollar la guía en el siguiente orden:

- a. Distribución en equipos de cuatro estudiantes.
- b. Asignar rol a cada uno de los compañeros: (líder, secretario, facilitador y el cronometrador).

- c. Lectura y comprensión de la guía de aprendizaje.
- d. Desarrollo de las actividades planteadas en la guía.
- e. Redactar un contexto para la situación planteada
- f. Conclusiones de la guía de aprendizaje.
- g. Rúbrica de evaluación.
- h. Socialización de la guía.

## Desarrollo de la guía

### Actividades

- a. En tu grupo de trabajo escoge el compañero que más a menudo llega tarde al colegio, pregúntale la dirección de su casa y un punto estratégico por el que realiza el recorrido para llegar al colegio, luego, en la primera de las fotocopias de Google Maps proporcionadas por el docente, marca los puntos  $ABC$  y traza el triángulo. El punto  $A$  será la ubicación de la Institución Educativa, el punto  $B$  será la dirección de su casa y el punto  $C$  será un punto estratégico cualquiera del recorrido que realiza para llegar al colegio.
- b. Mide dos ángulos con el transportador y un lado del triángulo con la regla. Luego, calcula el tercer ángulo con el teorema del tercer ángulo y, para finalizar, calcula los dos lados restantes, con la ley de seno y con el uso de la calculadora.
- c. En la segunda fotocopia de Google Maps traza de nuevo el triángulo  $ABC$ , mide un ángulo con el transportador y los dos lados que forman el ángulo y calcula el lado faltante y los dos ángulos restantes aplicando la ley de coseno haciendo uso de la calculadora.
- d. En la tercera fotocopia de Google Maps, nuevamente, traza el triángulo  $ABC$ , realiza las medidas con el transportador para todos los ángulos y para todos los lados con la regla.

- ▶ ¿Qué diferencia encuentran entre aplicar cada una de las leyes en lo realizado?

---



---



---



---



---





- ▶ ¿Es la distancia un motivo para la llegada tarde al colegio?

---

---

---

---

---

- f. Proponer una ruta para optimizar el recorrido en tu trayecto

---

---

---

---

---

- g. Nombre algunas situaciones en las que se pueden solucionar usando este conocimiento o escriba una situación contextualizada para el triángulo anterior trabajado.

---

---

---

---

---

- h. Escribe dos conclusiones que den cuenta del objetivo del taller.

---

---

---

---

---

- i. Comparte la actividad con tus compañeros de clase

---

---

---

---

---

Para el uso de la calculadora, recordemos

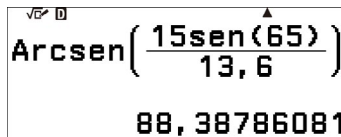
Modo *Calcular*:



Para calcular ángulos:

$$\frac{\text{sen } 65^\circ}{13,6} = \frac{\text{sen } B}{15} \text{ realizando el despeje } B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{15 \text{ sen } 65^\circ}{13,6}\right)$$

Pasos internos:



Entrada y salida en la pantalla

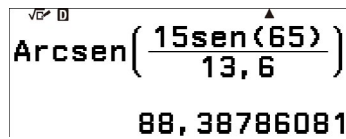
Para calcular distancias

$$\frac{\text{sen } 88,4^\circ}{15} = \frac{\text{sen } 26,6}{a} \text{ realizando el despeje para el lado } a = \frac{15 \text{ sen } 26,6}{\text{sen } 88,4}$$

Pasos internos:




Entrada y salida en la pantalla:



A screenshot of a calculator interface. At the top left, there is a small icon of a calculator and a 'D' button. The main display shows the mathematical expression  $\text{Arcsen}\left(\frac{15\text{sen}(65)}{13,6}\right)$ . Below the expression, the result is displayed as **88,38786081**.

Compromiso individual para la siguiente clase:

- a. Con apoyo de uno de tus familiares realiza la actividad propuesta en clase enfocada en crear un triángulo teniendo como base, su lugar de trabajo, la casa y un punto clave en su recorrido.
- b. Indaga por las rutas que realiza tu familiar y los medios que utiliza para llegar diariamente a cumplir sus labores y el tiempo en realizar este desplazamiento.
- c. Escucha la situación descrita por tu familiar y realiza el triángulo en Google Maps
- d. Encuentra los lados y los ángulos con la ley de seno y la del coseno.
- e. Después de realizados los cálculos, determina la velocidad de tu familiar y compara con la obtenida en Google Maps.
- f. Redacta un enunciado o contexto para la situación.
- g. Escribe dos conclusiones sobre la actividad realizada.



## Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

En este trabajo se propuso una actividad para estudiantes de décimo grado para aplicar en un contexto específico y cercano las leyes trigonométricas del seno y el coseno. Esta aplicación se vinculó a las herramientas tecnológicas Google Maps y la calculadora científica CASIO. La calculadora se utilizó como herramienta para agilizar procesos, la cual generó resultados que cobraron sentidos en el contexto específico de los desplazamientos de los estudiantes. A continuación, se plantean posibilidades frente al uso de la calculadora Classwiz fx-991LA CW, los contenidos matemáticos y la dinamización de lo propuesto en el aula de matemáticas.

En cuanto a la gestión del ambiente de clase, proponemos ampliar las discusiones que se generan con los estudiantes de tal manera que no se limite solo a responder las preguntas del taller, sino que se generen comparaciones y argumentos que permitan reconocer las diferencias de los desplazamientos de los estudiantes.

En la situación se propone iniciar el trabajo basados en los saberes previos de los estudiantes relacionados con la clasificación de triángulos y la aplicación de un taller. Sin embargo, este podría potenciarse realizando preguntas que le permitan a los estudiantes hacer inferencias de la clasificación y los tipos de triángulos. Algunas de estas preguntas pueden ser:

- ▶ ¿Puede ser un triángulo isósceles y rectángulo?, ¿por qué?
- ▶ ¿Puede ser un triángulo obtusángulo y equilátero?, ¿por qué?
- ▶ ¿Puede ser un triángulo equilátero y acutángulo?, ¿por qué?

Para el desarrollo de las tareas, sugerimos en algunas de las actividades, acciones adicionales para promover contenidos matemáticos. En la *actividad 1* de aprendizajes previos, que, en la imagen de clasificación de los triángulos, que se les entrega a los estudiantes, no se incluyan las medidas (en número) de los lados y los ángulos, ya que esto puede generar confusiones en las y los estudiantes. Y pensar que esos tipos de triángulos existen solo con esas medidas. Al respecto podrían ponerse las propiedades generales de tal clasificación e indicar que la imagen es solo un ejemplo particular.

En la *actividad 2*, antes de iniciar el desarrollo del taller y los cálculos en Google Maps y en la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, se puede analizar la ley de senos y cosenos, su significado, en qué tipo de triángulos se usa, en qué escenarios pueden ser utilizadas, cuándo pueden usarse y cómo podemos aplicarla. Específicamente, cuando los estudiantes eligen en el mapa un punto estratégico para hacer la triangulación, debe considerarse que este punto estratégico genera un tipo de triángulo. Discutir con los estudiantes qué triángulo es y qué tipos de leyes pueden usarse en él.

En esta misma actividad puede discutirse, también, la idea de escala del mapa como la relación de proporción entre las dimensiones reales de un objeto y las del dibujo que lo representa. Por ejemplo, si una escala indica una proporción 1:10000 significa que un centímetro del mapa representa 10000 en el mundo real. También se puede discutir cómo establecer escalas en imágenes impresas.

Pueden presentarse otras situaciones para que se alcance el objetivo de que el estudiante formule, compare y ejercite diferentes situaciones en triángulos no rectángulos. Así como posibilitar que los estudiantes construyan su propia ruta de recorrido, tal como lo hizo la profesora Paula para su caso. Así podrían tenerse varios casos de la aplicación de las leyes del seno y del coseno.



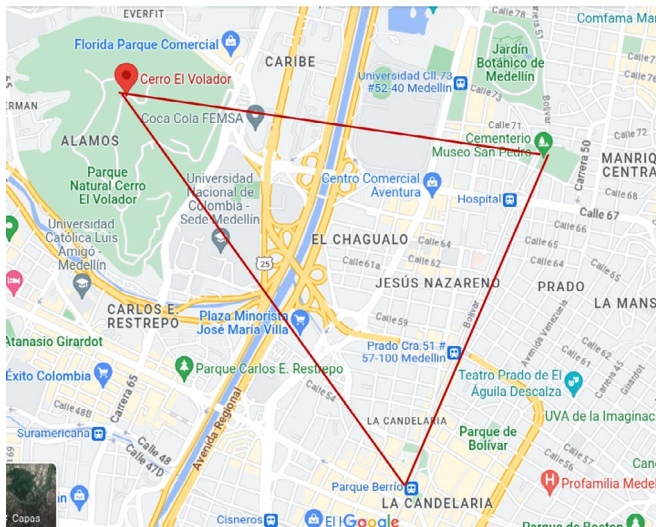
## Tarea 1

La profesora Paula trazó en la fotocopia de Google Maps diferentes triángulos  $ABC$  con las rutas proporcionadas por sus estudiantes, en los que pudo tomar algunas medidas. La tarea consiste en completar las medidas de los triángulos  $ABC$  con apoyo de las leyes del seno y del coseno. Estas pueden resolverse con apoyo de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

- Uno de los triángulos  $ABC$ , es de lados  $a = 15$ ,  $b = 34$  y  $c = 35$ . ¿Cuáles son los valores de los ángulos?

- ▶ Uno de los triángulos  $ABC$  tiene lados  $b = 4$ ,  $c = 3$  y un ángulo  $\hat{A} = 60$ . ¿Cuáles son los valores del lado y de los ángulos faltantes?
- ▶ Uno de los triángulos  $ABC$  tiene lados  $a = 3$ ,  $c = 4$  y un ángulo  $\hat{A} = 30$ . ¿Cuáles son los valores del lado y de los ángulos faltantes?

Se han elegido 3 lugares emblemáticos de la ciudad de Medellín: El Parque Berrío, El cerro El Volador y El Jardín Botánico. Aproximadamente, la distancia entre el cerro el Volador y El Parque Berrío es de 5 kilómetros, mientras que la distancia entre el jardín botánico y El Parque Berrío es de 3 kilómetros. El ángulo que los separa es de aproximadamente  $60^\circ$ .



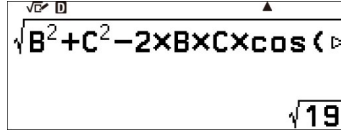
Con ayuda de la calculadora se desarrolla este triángulo. Empleando el modo *Calcular*, se inicializan las variables  $B = 5$ , que corresponde a la distancia entre el Parque Berrío y el Cerro El volador y  $C = 3$ , que corresponde a la distancia que hay entre el Jardín Botánico y el parque Berrío y, el ángulo  $x = 60$  que separa a ambos lugares.

Empleando la tecla  $\text{STO}$  se asignan valores para almacenar en memoria las variables de interés:

A=0	B=5
C=3	D=0
E=0	F=0
X=60	Y=0
Z=0	

Luego, se formula la expresión de la ley del coseno para la variable del lado restante:

√ □ ↑ 5 □² + ↑ 6 □² - 2 × 6 × 5 × cos ( X ) ) EXE

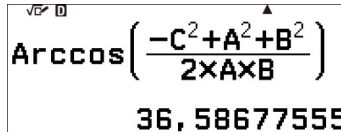


Este valor puede ser almacenado en la variable A, para disponer de la longitud del lado faltante del triángulo, cuando sea necesario realizar otros cálculos:

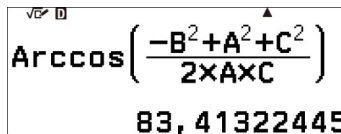


El procedimiento para obtener los ángulos es análogo al utilizado para determinar el valor del lado faltante del triángulo.

↑ cos □² - ↑ 6 □² + ↑ 4 □² + ↑ 5 □² √ 2 × ↑ 4



↑ cos □² - ↑ 5 □² + ↑ 6 □² + ↑ 4 □² √ 2



Una vez resueltos los triángulos discutir con los estudiantes, ¿qué diferencias hay en los tiempos de llegada para cada situación anterior?



## Tarea 2

Este momento puede aprovecharse para discutir la desigualdad triangular. Donde se precisa reconocer que la desigualdad triangular es un teorema que nos dice “*En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera siempre es mayor que la longitud del tercer lado*”. Allí pueden realizarse exploraciones numéricas con las herramientas *tabla* y *caja de matemáticas* de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

- ▶ ¿Es posible formar un triángulo con los segmentos que tienen longitudes de 8 unidades, 6 unidades y 5 unidades?
- ▶ ¿Es posible formar un triángulo con los segmentos que tienen longitudes de 12 unidades, 6 unidades y 5 unidades?

Luego de esto se puede ver gráficamente la desigualdad triangular y considerar algunos asuntos con relación a los posibles valores del tercer lado una vez se tiene la suma de los otros dos lados. Se pedirá que se indique gráficamente ¿cuáles valores puede tomar el tercer lado de un triángulo conocidos los otros dos lados? Para esto se usará en la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW la opción *caja de matemáticas* y la opción *recta numérica*. En un ejemplo particular esta situación se vería así:

- ▶ Dos lados de un triángulo tienen longitud de 7cm y 3cm, ¿qué valores puede tomar el tercer lado?

Primero se tiene que cumplir la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\text{Si: } a > b > c, \text{ entonces:} \\ b - c < a < b + c \\ a - c < b < a + c \\ a - b < c < a + b\end{aligned}$$

Ahora, podemos decir para el triángulo dado que  $a = 7$ ,  $b = 3$  y  $c = x$ .

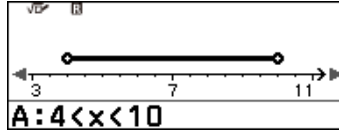
Tomamos  $a - b < c < a + b$ , de donde:

$$\begin{aligned}7 - 3 < x < 7 + 3 \\ 4 < x < 10\end{aligned}$$

Representamos esta situación en la opción de *caja de herramientas* y analizamos la recta numérica obtenida.

En el modo *caja de herramientas*, se realiza la siguiente combinación de teclas:

Ⓚ Ⓜ Ⓜ Ⓚ Ⓚ Ⓢ Ⓢ Ⓢ Ⓢ Ⓚ 4 Ⓚ 1 0 Ⓚ Ⓚ Ⓜ Ⓜ Ⓚ



Para el análisis pueden tomarse valores en el intervalo solución y verificar que se cumpla la desigualdad triangular. Puede utilizarse  $\leftarrow$  y  $\rightarrow$  para desplazarse en el gráfico de la recta numérica hacia la izquierda o hacia la derecha y ver las posibilidades de valores para el tercer lado del triángulo.

Por último, al finalizar la implementación de las dos actividades propuestas por la profesora Paula y las tareas adicionales propuestas en esta edición, se sugiere analizar en realidad por qué se llega tarde al colegio, estas preguntas podrían orientar tal discusión: ¿es suficiente solo el cálculo de distancias y ángulos para estimar la llegada oportuna al colegio?, ¿qué otros asuntos generan retraso en las llegadas al colegio?



# Análisis del crecimiento de una planta

Jeyson Emilio Palacio Vásquez

[jeysonemilio@gmail.com](mailto:jeysonemilio@gmail.com)

Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Resumen:

Para mejorar el aprendizaje en el aula, se propone a los estudiantes un trabajo teórico práctico en el que hay uso de tecnología. Los estudiantes siembran una planta y estudian, en este caso particular, su proceso de crecimiento para realizar un análisis variacional del número de hojas, altura y grosor del tallo durante su crecimiento. Se enseña el manejo de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW para realizar gráficos con el propósito de analizar y observar la variación del crecimiento de la planta con respecto al tiempo. Los participantes son del grado 11-4 y pertenecen a la técnica de Recursos Naturales de la Institución Educativa Antonio Derka.

**Palabras clave:** Crecimiento, análisis, datos, variables.







En la tabla 5 se presentan cuatro variables que se pueden relacionar: tiempo (fecha), altura, grosor y número de hojas. Se construyen gráficas para observar el comportamiento de cada una de ellas a medida que transcurre el tiempo. Se puede analizar altura de la planta con tiempo, grosor de la planta con tiempo y número de hojas respecto al tiempo.

## Momento 2

Actividades para el desarrollo en el aula de clase

### Actividad 1

Sembrar las semillas de la planta orégano.

Tan pronto la planta germine, tome la fecha y espere siete días para la toma de datos por primera vez, y en adelante cada siete días, aproximadamente.

Los datos que se van a recolectar son: número de hojas, altura de la planta y grosor del tallo. La tabla que vamos a utilizar en la toma de datos es la siguiente (ya tiene los datos tomados de un ejemplo).

**Tabla 6.** Registro de datos tomados.

Fecha	Altura de la planta (cm)	Grosor del tallo (cm)	Número de hojas
22/03	7	0.5	4
29/03	13	1	5
5/04	16	2.5	10
19/04	20	2.5	18
26/04	22	3	20
17/05	30	3.2	27
31/05	33	3.5	30

### Actividad 2

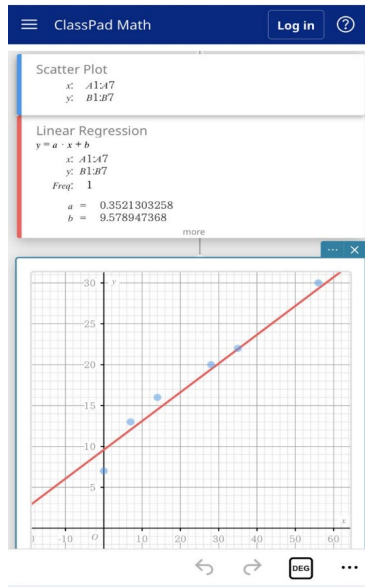
Con los datos de la tabla 6, asigne el número del día correspondiente a cada fecha y complete la tabla 7. Por ello, debe contar o calcular la cantidad de días entre las dos fechas. Asigne valor cero a la fecha en que realizó la primera observación.







Al escanear el código con el celular se obtiene



Gráfica de dispersión y recta de regresión altura vs tiempo por medio de la aplicación ClassPad.net

La relación entre ambas variables se puede representar mediante una recta de regresión, cuya ecuación es  $y = a + bx$

Tomamos los valores arrojados por la calculadora, cuando calculó la regresión lineal y los reemplazamos en la ecuación, así:

- Escriba el valor de  $a$   
 $a = 9,58$
- Escriba el valor de  $b$   
 $b = 0,35$
- Escriba el valor de  $r$   
 $r = 0,99$

- d. Interprete el valor de  $r$

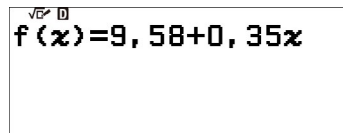
Correlación positiva perfecta, a mayor valor del tiempo mayor altura, el incremento de la altura es proporcional al tiempo transcurrido en días. En este caso, la planta crece cada día 0,35 cm.

- e. Escriba la ecuación de la recta de regresión

$$y = 9.58 + 0.35x$$

Para hacerlo en la calculadora se selecciona el modo *Calcular* y la siguiente combinación de teclas:

$f(x)$   $\nabla$   $\nabla$   $\text{EXE}$  9 , 5 8 + 0 , 3 5  $\times$   $\text{EXE}$



$f(x) = 9,58 + 0,35x$

- f. Estime la altura de la planta el día 30

Este cálculo se puede hacer

$$y = 9.58 + 0.35 \times (30)$$

Para realizarlo en la calculadora:

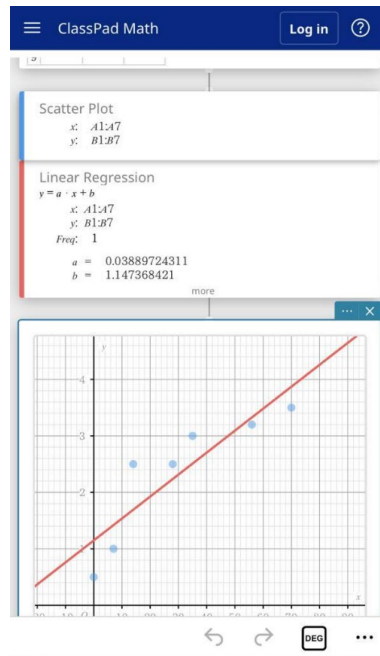
$\text{EXE}$   $f(x)$   $\text{OK}$  3 0 )  $\text{EXE}$



$f(30)$   
20,08

La altura de la planta el día 30 es 20,08 cm





Gráfica de dispersión y recta de regresión altura vs tiempo por medio de la aplicación ClassPad.net

La relación entre ambas variables se puede expresar mediante una recta de regresión, cuya ecuación es  $y = a + bx$

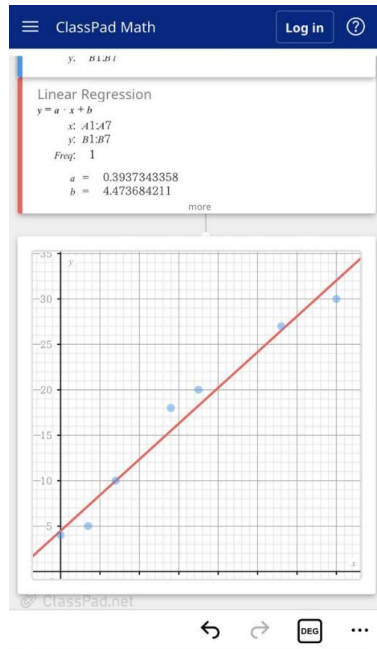
Tomamos los valores arrojados por la calculadora, cuando calculó la regresión lineal y los reemplazamos en la ecuación, así:

- Escriba el valor de  $a$   
 $a = 1,15$
- Escriba el valor de  $b$   
 $b = 0,04$
- Escriba el valor de  $r$   
 $r = 0,88$





Y al escanearlo con el celular se obtiene



La relación entre ambas variables se puede expresar mediante una recta de regresión cuya ecuación es  $y = a + bx$

Tomamos los valores arrojados por la calculadora, cuando calculó la regresión lineal y los reemplazamos en la ecuación, así:

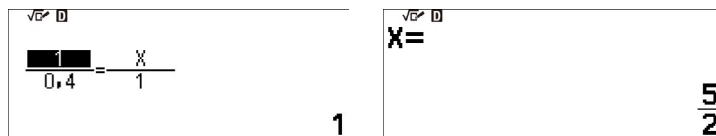
- Escriba el valor de  $a$   
4,47
- Escriba el valor de  $b$   
0,40
- Escriba el valor de  $r$   
0,99
- Interprete el valor de  $r$



Correlación positiva perfecta, a mayor valor del tiempo mayor altura, el incremento de la cantidad de hojas es proporcional al tiempo transcurrido en días, en este caso cada día la cantidad de hojas de la planta aumenta en 0,4. En este caso necesitamos una mejor interpretación porque el número de hojas es siempre un valor entero, entonces podríamos decir que aumenta una hoja cada 2,5 días.

Para ello, emplee el modo proporción y ejecute las siguientes combinaciones de teclas:

ⓀⓀ ⓀⓀ √ 0 , 4 EXE 1 ⓀⓀ

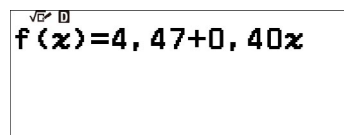


e. Escriba la ecuación de la recta de regresión

$$y = 4.47 + 0.40x$$

Para hacerlo en la calculadora se selecciona el modo *Calcular* y la siguiente combinación de teclas:

f(x) √ √ EXE 4 , 4 7 + 0 , 4 0 X EXE



f. Estime el número de hojas correspondiente al día 50

$$y = 4.47 + 0.40 \times 50$$

Para realizarlo en la calculadora:

f(x) ⓀⓀ 5 0 ) EXE

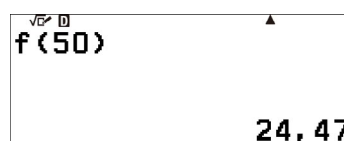
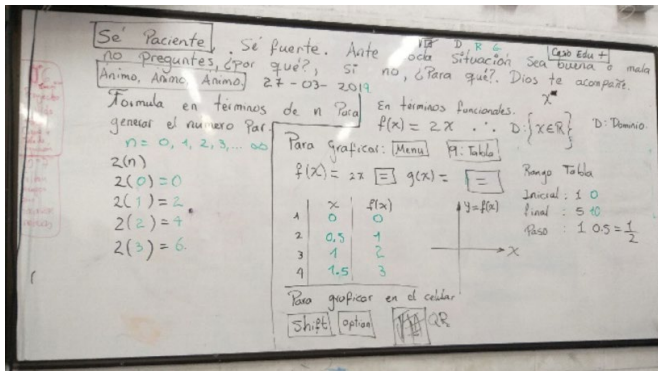




Figura 1. Explicación teórica en la clase.



Fuente: archivo del autor.

Figura 2. Estudiantes en la clase.



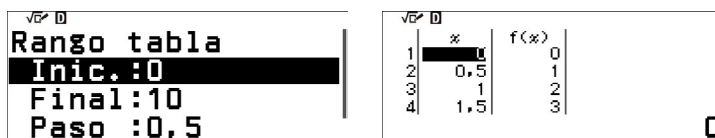
Fuente: archivo del autor.

Como ejercicio para explorar el manejo de la calculadora, en la fotografía de la clase, se enseña a generalizar una expresión matemática para llevarla a una expresión funcional. En esta situación se plantea encontrar la generalización de cualquier número par y, para ello, se expresa en términos de  $n$ , teniendo como resultado  $2n$ . Luego, se expresa en términos funcionales con la expresión  $f(x) = 2x$ .

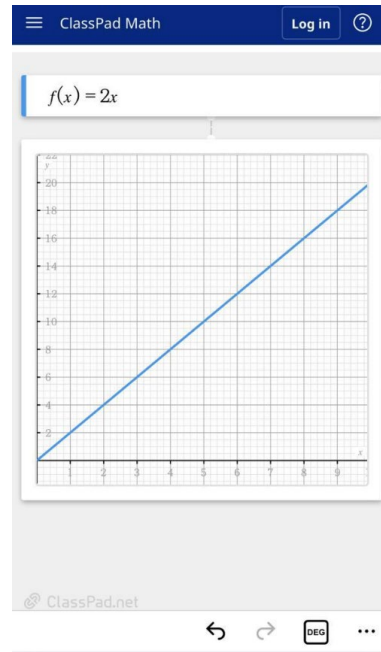
(Si no tiene activada la opción de frecuencia actívela con la siguiente combinación de teclas, en el modo Estadística: (OK) (OK) (000) (v) (EXE) (EXE) (5) (5) (5)).

En el modo Tabla, selecciona la siguiente combinación de teclas:

(000) (EXE) (0) (EXE) (1) (0) (EXE) (0) (,) (5) (EXE) (EXE)



Gráfica hallada en el Smartphone, después de leer el código QR en la calculadora empleando las teclas CASIO Classwiz fx-991LA CW



## Reflexiones pedagógicas

Las tecnologías motivan a los estudiantes y permiten un avance a mayor velocidad de la adquisición de conocimiento, además, de que posibilita el ahorro del tiempo que puede ser invertido en realizar análisis más profundos en las actividades que se estén planteando.

El uso de tecnología permite combinar la teoría con la práctica en la enseñanza. Los estudiantes se muestran más interesados y más curiosos porque se pueden presentar preguntas que los motive a explorar los diferentes modos de la calculadora. Los estudiantes mostraron interés en los temas aprendidos y en el uso de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW y se volvieron más participativos en las clases.

Sin embargo, se necesita hacer más acompañamiento en la toma de datos para que le den más relevancia.

## Bibliografía y webgrafía

- MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. MEN.
- MEN. (2017). *Derechos básicos de aprendizaje*. MEN.
- Barajas, C., Parada, S. y Molina, J. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación matemática*, 30(3), 297-323.
- Thompson, P. y Carlson, M. (2018). Variation, covariation and functions: foundational ways of mathematical thinking. En J. Cai (ed.). *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston.
- Vasco, C. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco (ed.). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (134-148). Universidad Pedagógica Nacional.

---

### Reconocimientos

Agradezco al Proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio.

---



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

0

$x$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

FORMAT

EXE

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

+

$\frac{\square}{\square}$

EXE

EXE

$\sqrt{\square}$

tan

0

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

EXE

EXE

$\sqrt{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$

$\square^{\square}$



## Análisis del crecimiento de una planta

Jeyson Emilio Palacio Vásquez

[jeysonemilio@gmail.com](mailto:jeysonemilio@gmail.com)

Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.</li> <li>• Uso comprensiblemente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.)</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Estudio del crecimiento de una planta.		
<b>Objetivo:</b> Modelar el crecimiento de una planta a través de la regresión lineal.		
<b>Conocimientos previos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber sembrar una planta y cultivarla.</li> <li>• Matemáticas grado noveno.</li> <li>• Concepto de función.</li> <li>• Ubicación de datos en el plano cartesiano.</li> <li>• Nociones de correlación de variables en estadística.</li> <li>• Gráfica de funciones en un Plano Cartesiano.</li> <li>• Interpretación de una gráfica en el Plano Cartesiano.</li> <li>• Manejo del calibrador pie de rey</li> </ul>	
<b>Recursos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio para plantar.</li> <li>• Lápiz, borrador, saca punta y papel.</li> <li>• Calculadora Classwiz fx-991LA CW.</li> <li>• Semillas de orégano.</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje



### Actividad 1

#### Sembrar las semillas de la planta orégano

Tan pronto la planta germine, tome la fecha y espere siete días para la toma de datos por primera vez, y en adelante cada siete días, aproximadamente.

Los datos que se van a recolectar son: número de hojas, altura de la planta y grosor del tallo. La tabla que vamos a utilizar en la toma de datos es la siguiente:



**Tabla 1.** Toma de datos de la planta de orégano.

Fecha	Altura de la planta (cm)	Grosor del tallo (cm)	Número de hojas

 **Actividad 2**

Con los datos de la tabla anterior, asigne el número de día correspondiente a cada fecha y complete la siguiente tabla. Además, deberá contar o calcular la cantidad de días entre las dos fechas. Asigne valor cero a la fecha en que realizó la primera observación.

**Tabla 2.** Registro de datos.

Fecha	Día
	0

 **Actividad 3**

Con los datos de las tablas de la actividad 1 y 2, complete la siguiente tabla con los correspondientes valores, según los valores registrados.



La relación entre ambas variables se puede representar mediante una recta de regresión cuya ecuación es  $y = ax + b$

- Escriba el valor de  $a$
- Escriba el valor de  $b$
- Escriba el valor de  $r$
- Interprete el valor de  $r$
- Escriba la ecuación de la recta de regresión
- Estime el grosor en cm correspondiente al día 45



## Actividad 5

Con los datos de las tablas de la actividad 1 y 2 complete la siguiente tabla 5 con los correspondientes valores según los valores registrados.

Tabla 5. Datos diligenciados.

Día (x días)	Número de hojas
0	

La relación entre ambas variables se puede modelizar mediante una recta de regresión cuya ecuación es  $y = ax + b$

- Escriba el valor de  $a$
- Escriba el valor de  $b$
- Escriba el valor de  $r$
- Interprete el valor de  $r$
- Escriba la ecuación de la recta de regresión
- Estime el número de hojas correspondiente al día 50

# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

**Mónica Marcela Parra-Zapata**  
monica.parra@udea.edu.co

**Alexander Castrillón-Yepes**  
alexander.cyepes@udea.edu.co

En este trabajo se propuso una actividad para estudiantes de grado once, con el cual se buscó realizar un análisis variacional del crecimiento de una planta. El uso de la calculadora permitió representar y visibilizar relaciones entre variables que posteriormente llevaron a la interpretación de datos en el tiempo. A continuación, planteamos posibilidades frente al uso de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, los contenidos matemáticos y la dinamización del ambiente.

En cuanto a la gestión del ambiente, proponemos que se organice al grupo en colectivos de trabajo, de esta manera las y los estudiantes podrán poner en común sus ideas matemáticas y avanzar en colectivo en la construcción de sus aprendizajes. El proceso del ambiente de aprendizaje inició con una actividad en el tablero (Figura 1), en la que se explica cómo realizar las gráficas con elementos de la calculadora y el proceso manual. Aquí sugerimos que este proceso se realice directamente con el emulador, para que las y los estudiantes exploren directamente sus herramientas.

## Tarea 1

La función  $f(x) = 9.58 + 0.35x$  describe la variación de la altura de una planta de orégano en el tiempo. Esta puede representarse en la calculadora y no en el tablero para realizar análisis e interpretaciones. Un proceso análogo puede realizarse con el modelo para el grosor de la planta de orégano en el tiempo.

En la **actividad 1**, proponemos implementar estrategias que permitan discutir con los estudiantes la noción de cambio y, así, darle sentido a la observación del crecimiento de las plantas hacia la variación. Una estrategia que puede realizarse es describir cualitativamente los cambios de características del crecimiento y discutir acerca de las implicaciones de estos cambios.



Allí, podrían hacerse preguntas como: ¿cómo podemos determinar el incremento del tamaño de las plantas desde un día dado?, ¿cómo determinar el incremento de la variación de la altura del día 9 al día 15?, ¿a medida que avanzan los días, la altura aumenta o disminuye? ¿cuál es la razón de ese aumento o disminución?, ¿a medida que avanzan los días, el grosor aumenta o disminuye? ¿cuál es la razón de ese aumento o disminución?, entre otras.

En esta actividad, se podría, también, no indicarse en concreto la unidad de medida a tomar (centímetros para la altura y el grosor) y permitir que los estudiantes presenten sus propuestas de instrumentos y unidades para completar las mediciones en la **tabla 1**.



Allí, se les puede pedir que describan ¿qué herramienta utilizarían y cómo la utilizarían?, ¿qué diferencias hay entre los instrumentos utilizados?, ¿afecta el crecimiento el instrumento de medida usado?

En la **actividad 2** se podrían determinar de manera más rigurosa los cambios en el crecimiento de la planta. Para esto pueden elaborarse tablas comparativas para indicar la razón de cambio entre el tamaño alcanzado y el tiempo transcurrido.

---

Tiempo en días

---

Tamaño en cm

---

Incremento/día

---

Tamaño/tiempo

---

Esta información se analiza discutiendo el registro en cada columna.

En las **actividades 3 y 4**, al obtener el modelo de regresión lineal se podrían ampliar las preguntas en términos de lo que arroja la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW y el gráfico que se genera en ClassPad.net, así como de la nube de puntos en él.



En términos de las gráficas proponemos que el profesor puede analizar con sus estudiantes las gráficas obtenidas y discutir las limitaciones frente al modelo que se presenta, preguntarse, por ejemplo: ¿de qué factores depende el crecimiento del orégano?, ¿cómo las gráficas que genera la calculadora presentan limitaciones con relación a la realidad? Esto considerando que la calculadora solo linealiza, pero no comprende que dicha linealización es por tramos de acuerdo con las etapas de crecimiento de la planta.

Para esto pueden hacerse preguntas como: ¿la ecuación proporcionada por la calculadora se adapta a la realidad del crecimiento del orégano?, ¿hasta qué punto pueden crecer o decrecer las gráficas obtenidas?, ¿puede la planta de orégano crecer tanto como crece la gráfica obtenida?, ¿puede la planta de orégano decrecer tanto como crece la gráfica obtenida?, ¿se ajustan los valores a la interpretación física?, ¿el modelo sirve para representar el crecimiento en cualquier intervalo de tiempo dado?, ¿qué limitaciones tiene el modelo obtenido?. También, puede utilizarse dos regresiones distintas para modelar el crecimiento, por ejemplo, una cuadrática y una exponencial, ¿podrían ser utilizados para estudiar el crecimiento de la planta de orégano?



## Tarea 2

Para esta, proponemos sembrar dos plantas con especies de orégano diferentes y hacer comparativos entre ellas y así lograr procesar, presentar y visualizar las relaciones entre las variables. Podría discutirse en clase de matemáticas asuntos relacionados con los beneficios o afectaciones del orégano e incluir en la gestión asuntos propios de la seguridad alimentaria. Puede compararse su crecimiento a partir de las gráficas que se generan. Para ello se realizaría el proceso de regresión para el crecimiento de cada planta y se compararían las gráficas obtenidas y las ecuaciones.



## Creemos con Pixeles. Conversión entre sistemas de numeración

Jorge León Echeverri Echeverri, Mónica Marcela Parra-Zapata  
y César Lau Mego

[jorge.echeverri@iefhb.edu.co](mailto:jorge.echeverri@iefhb.edu.co), [monikampz@gmail.com](mailto:monikampz@gmail.com)  
y [cesar.slmg@gmail.com](mailto:cesar.slmg@gmail.com)

Institución Educativa Félix Henao Botero, Institución Educativa  
Mariscal Robledo y Gakuhan

Secretaría de Educación de Medellín y CASIO Colombia,  
Colombia.

### Resumen:

Reportamos una situación de aprendizaje cuyo propósito es repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa, de tal forma que se posibilite la discusión en torno a estos sistemas y la comprensión en la representación de fenómenos con dos estados o niveles de estos. Esta reflexión es relevante porque, además de ser una parte del álgebra y de la lógica, es el sistema de representación de la información en la electrónica digital e informática. El sistema binario permite a la lógica computacional contabilizar en bits, los cuales representa con dos valores (0 y 1).

**Palabras clave:** Conversión de sistemas de numeración, sistema binario, sistema decimal, número decimal, número binario.





---

**Objetivo:** Repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.

---

**Conocimientos previos:** Sistema de numeración.

---

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

---

**Tiempo de duración:** Cuatro horas

---

**Recursos:**

- Cuaderno
- Hojas cuadriculadas
- Lápiz o lapiceros
- Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW

---

En esta situación nos proponemos repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa, de tal forma que posibilite la discusión en torno a estos sistemas, hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.

Para alcanzar el objetivo llevamos a cabo cuatro momentos.



### Momento 1. ¿Qué es un sistema de numeración?

Exploraremos características de los sistemas de numeración a partir de la discusión de algunos interrogantes. Vamos a concentrarnos en los sistemas de numeración posicionales en los que cada símbolo tiene un valor absoluto y, además, tomará un valor de acuerdo con la posición que ocupe dentro del numeral.

Proponemos que se discutan los elementos centrales de los tres principios que deben seguirse para representar números en un sistema de numeración posicional, el orden de una cifra, la base y las cifras.



### Momento 2. Juguemos con los sistemas binario y decimal

Conoceremos algunas características que tienen los sistemas de numeración binario y decimal, comparándolos entre sí e identificando las características de cada uno de ellos. Para hacerlo, proponemos una exploración de las reglas de cada sistema y la realización de agrupaciones de elementos que permitan su comprensión.



## Experiencia de aula y reflexión pedagógica

Un sistema numérico puede asumirse como el modo o estructura que puede usarse para representar las cantidades numéricas. Todo sistema, operacionalmente funcional, de numeración consta de: a) un número que sirve de base y b) guarismos que sirven para representar las unidades en su valor absoluto (Terigi, 1992). En este sentido, su construcción depende de símbolos y un conjunto de reglas que hacen posible la correcta representación de los números. Por estas razones, existen diversos sistemas de numeración.

La elaboración histórica de los sistemas de numeración puede entenderse como una búsqueda sostenida de economía en la representación que ha desembocado en la elaboración de un sistema por el cual, con un pequeño número de símbolos, es posible representar infinidad de complejas operaciones.

El estudio de los sistemas de numeración posibilita, según Terigi y Wolman (2007, p. 66):

- ▶ La utilización de agrupamientos, que permite superar la mera notación por correspondencia uno-a-uno, que es sólo la traducción de una enumeración que anuncia un grupo de objetos sin implicar para ello el desarrollo de la noción de cuantificación. La idea de agrupar las cantidades constituye un primer paso en la economía de la representación.
- ▶ La utilización del principio de la base, que convierte los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento, el principio de agrupamiento utilizado. Los sistemas de base son sistemas de agrupamientos regulares, donde el número de elementos que se agrupa es igual al número de símbolos utilizados en la escritura.
- ▶ Reconocer el valor posicional de las cifras: esta creación ha sido el principio fundamental para la economía en la notación numérica, en tanto permitió eliminar en la escritura la representación de los exponentes de las potencias

Los sistemas de numeración ofrecen numerosas oportunidades de interacción porque son un objeto cultural que tiene la particularidad de estar sumamente presente en el mundo social. Para corroborarlo basta con pensar en algunas de las situaciones cotidianas en las que aparecen numerales: en los casos del dinero, las rutas de los buses, los precios y los teléfonos, entre otros. La consideración de los sistemas de numeración como instrumentos sociales, implica que el análisis de este objeto que se requiere para diseñar su enseñanza no se agota en el conocimiento de sus aspectos matemáticos; requiere poner en juego otros saberes que no son los del especialista en el campo matemático.





Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.	Comprende la importancia de los diferentes sistemas de numeración y realiza conversiones entre ellos.
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.		Describe las diferencias y similitudes de los sistemas numéricos en diferentes bases tanto posicionales como aditivas.
<b>Eje central:</b> Realizar la conversión de números del sistema binario a sistema numérico decimal y viceversa		
<b>Objetivo:</b> Repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas. Hacia la comprensión del sistema de numeración binario en la representación de fenómenos con dos estados o niveles.		
<b>Conocimientos previos:</b> Sistema de numeración.		
<b>Recursos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuaderno</li> <li>• Hojas cuadrículadas</li> <li>• Lápiz o lapiceros</li> <li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

En esta situación nos proponemos repasar algunas ideas de los sistemas de numeración y ejercitar la conversión de números binarios a decimales y viceversa que posibilite la discusión en torno a estos sistemas.

Para alcanzar el objetivo vamos a llevar a cabo cuatro momentos.



### Momento 1. ¿Qué es un sistema de numeración?

Exploraremos algunas características de los sistemas de numeración a partir de la discusión de los siguientes interrogantes.



▶ ¿Qué es un sistema de numeración?

---



---



---



▶ ¿Qué elementos conforman los sistemas de numeración?

---

---

---

▶ ¿Qué clasificación podemos hacer de los sistemas de numeración? Descríbelos.

---

---

---

▶ Presenta dos ejemplos para cada uno de los tipos de sistemas de numeración


Ahora vamos a concentrarnos en los sistemas de numeración posicionales, en los que cada símbolo tiene un valor absoluto y tomará un valor de acuerdo con la posición que ocupe dentro del numeral.

Para representar números en un sistema de numeración posicional se siguen tres principios. Reflexionemos en torno a ellos.

### Del orden de una cifra



▶ ¿A qué hace referencia el orden de una cifra?

---

---

---

▶ ¿Cómo se da el incremento del orden de una cifra?

---

---

---



▶ ¿Existen diferencias entre el orden y el lugar de una cifra?

---



---



---

### De la base



▶ ¿Puede construirse un sistema de numeración de base 1?

---



---



---

▶ ¿Qué indica la base de un sistema de numeración?

---



---



---

▶ Agrupemos las siguientes unidades usando bases diferentes



### De las cifras



▶ ¿Puede construirse un sistema de numeración de base 24 con 32 cifras distintas? Justifica

---



---



---





► ¿Pueden ser los números -1, -2 cifras de un sistema de numeración?

---

---

---



## Momento 2. Juguemos con los sistemas binario y decimal

Conoceremos algunas características que tienen los sistemas de numeración binario y decimal, comparándolos entre sí e identificando las características de cada uno de ellos.

### Exploremos el sistema binario



► ¿Por qué es un sistema de numeración?

---

---

---

► ¿Qué cifras emplea el sistema de numeración binario?

---

---

---

► ¿Cuál es el valor de posición del sistema de numeración binario?

---

---

---

► Agrupemos las siguientes unidades usando base binaria y escribamos el número que representa





### Momento 3. Creemos con pixeles

Ejercitaremos la conversión de números del sistema binario al sistema decimal y viceversa. Esta conversión es sencilla puesto que en el primer caso simplemente requiere de divisiones sucesivas entre dos hasta llegar al 1 indivisible.

Vamos a construir juntos una imagen, que se realizará en una hoja cuadrículada.

- ▶ En la columna izquierda de la tabla 1, encontrarás números en base decimal, que debes pasar a base binaria con ayuda de la calculadora científica. Luego, en la tabla 2 escribe los números obtenidos.
- ▶ Grafica cada número hallado en la hoja cuadrículada (adjunta como anexo). Para ello, inicia con la cifra de menor orden. Ten presente que la cifra 1 representará casillas para colorear y la cifra 0 serán casillas vacías. Grafica los números de derecha a izquierda, algunas casillas no tendrán asignadas un 0 un 1, estas quedarán vacías a la izquierda.

**Tabla 1.** Números en representación decimal.

0	Fila 0
130816	Fila 1
1048512	Fila 2
1048544	Fila 3
2097136	Fila 4
2097144	Fila 5
4194296	Fila 6
4194300	Fila 7
8388604	Fila 8
7421852	Fila 9
7347228	Fila 10
7340060	Fila 11
6291484	Fila 12
6291468	Fila 13
6291468	Fila 14
6291464	Fila 15
3113192	Fila 16
2344840	Fila 17
2180480	Fila 18
0	Fila 19

0	Fila 20
0	Fila 21
0	Fila 22
0	Fila 23
15360	Fila 24
65280	Fila 25
130944	Fila 26
71808	Fila 27
0	Fila 28
0	Fila 29
65536	Fila 30
32768	Fila 31
31744	Fila 32
0	Fila 33

**Tabla 2.** Números en representación binaria.

	Fila 0
	Fila 1
	Fila 2
	Fila 3
	Fila 4
	Fila 5
	Fila 6
	Fila 7
	Fila 8
	Fila 9
	Fila 10
	Fila 11
	Fila 12
	Fila 13
	Fila 14
	Fila 15
	Fila 16
	Fila 17
	Fila 18

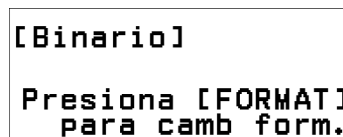


## Cambio de base con la calculadora

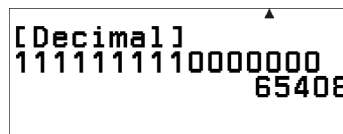
### De binario a decimal



Poner la calculadora en Modo Base-N y activar el sistema binario presionando la tecla .

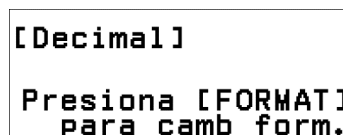


Ingresar el número en binario. Presionar igual  y pasar a decimal presionando de nuevo la tecla  de la calculadora.



### De decimal a binario

Poner la calculadora en *Modo Base-N*, se activará automáticamente el modo decimal.














## Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

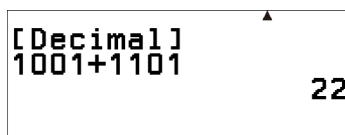
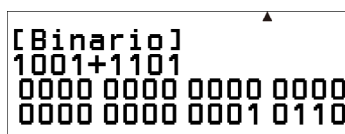
César Lau Mego  
cesar.slmg@gmail.com

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

La propuesta que se presentó en este capítulo estuvo centrada en la comprensión de la relación entre el sistema binario y el decimal, para ello se propusieron actividades de ejercitación con relación a la conversión de números entre estos dos sistemas. En términos generales, el uso de la calculadora propuesto permite la reducción de la carga operatoria. Sin embargo, es posible ampliar esta situación hacia otros usos de la calculadora enfocados tanto en la configuración del ambiente de aprendizaje como en los conceptos y procedimientos matemáticos que se pueden estudiar con el uso de la calculadora.

Respecto al ambiente de clase, previo al cuarto momento, se pueden explorar ciertas operaciones entre números binarios, con el propósito de reconocer el alcance y las relaciones entre los algoritmos en diferentes sistemas. Para ello, el profesor puede compartir con los estudiantes una figura generada con el mismo mecanismo descrito en el capítulo. Se pide a los estudiantes que identifiquen a qué número binario corresponde y que generen al menos dos estrategias, con o sin el uso de la calculadora, para hallar posibles sumandos en números binarios. Si bien los números binarios que representan a los pixeles de cada fila del gráfico no son sumandos en la actividad de obtención de la figura, se puede promover esta actividad para reconocer el alcance de los algoritmos. Después, en el salón de clase se puede explorar a partir de la descomposición de la figura.

El profesor también puede pedir a los estudiantes que exploren la suma y la resta de binarios con la calculadora. El profesor puede seguir el proceso: *Home*, *Base-N*, cambiar formato a binario, escribir la suma (por ejemplo  $1001 + 1101 = 10110$ , que en sistema decimal corresponde a:  $9 + 13 = 22$ ) como se muestra a continuación.



De manera similar, en clase se pueden explorar otros sistemas y los algoritmos asociados a las operaciones básicas. A continuación, presentamos otras tareas posibles con el uso de la calculadora:

## Tarea 1

Usa la calculadora para explorar la cantidad de números binarios que se pueden generar en función de la cantidad de bits. Para ello se sugiere elaborar una tabla de datos:

Cantidad de bits	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de números binarios que pueden ser generados								

**Nota:** el profesor también puede elaborar con los estudiantes la tabla de datos en la calculadora y explorar las características de la función que es generada ( $f(x) = 2^x$ , donde  $x$  corresponde a la cantidad de bits), con apoyo de ClassPad Math.

## Tarea 2

Explora los siguientes números binarios en el sistema decimal, con ayuda de la calculadora:

⬆️ OK [FORMAT] [FORMAT] 1 1 0 0 0 0 1 [EXE] [FORMAT] [FORMAT]

```
[Decimal]
1100001
          97
```

⬆️ OK [FORMAT] [FORMAT] 1 0 1 0 1 0 1 [EXE] [FORMAT] [FORMAT]

```
[Decimal]
1010101
          85
```

⬆️ OK [FORMAT] [FORMAT] 1 1 1 1 1 1 1 1 [EXE] [FORMAT] [FORMAT]

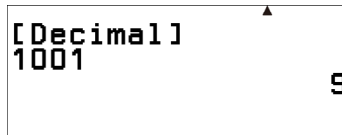
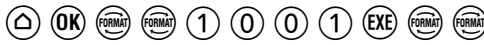
```
[Decimal]
11111111
          255
```

⬆️ OK [FORMAT] [FORMAT] 1 0 1 0 0 0 0 0 1 [EXE] [FORMAT] [FORMAT]

```
[Decimal]
101000001
          321
```

⬆️ OK [FORMAT] [FORMAT] 1 0 1 0 1 [EXE] [FORMAT] [FORMAT]

```
[Decimal]
10101
          21
```



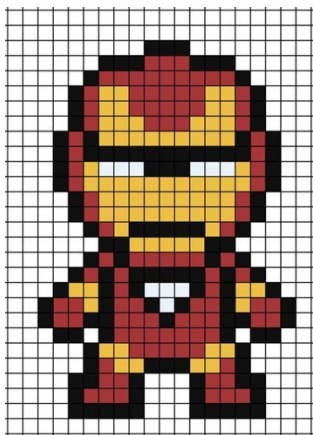
Ahora, genera hipótesis sobre las características de estos números ¿es posible generar alguna generalización? Explora con tu calculadora otras hipótesis y genera conclusiones con base en argumentos matemáticos, considerando el sistema de numeración.

**Nota:** el profesor puede orientar esta actividad con preguntas para que los estudiantes reconozcan aspectos como: todo número binario que termina en uno es impar, mientras que todo número terminado en cero es par. También puede promover generalizaciones como: para un número binario de  $n$  bits, el mayor número decimal que se puede generar es aquel cuyas cifras son solo unos, además se puede expresar de la forma  $f(n)=2^n-1$  (donde  $n$  es el número de bits).

### Tarea 3

Pintar la siguiente cuadrícula usando cuatro colores:

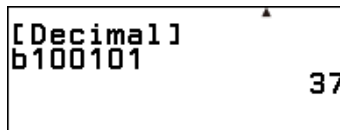
Utilizando el sistema de numeración de base 4 y considerando un color para cada cifra del sistema de numeración, codifica el siguiente gráfico:



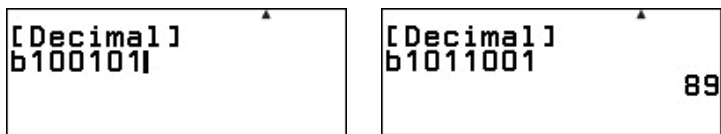
<https://www.pinterest.com.mx/pin/886786982855454750/>



En la calculadora se pueden transformar los números binarios a decimales, así:



Para convertir el resto de los números, solamente debes usar la tecla back para retroceder y editar el valor binario, luego presionar ok. Por ejemplo:

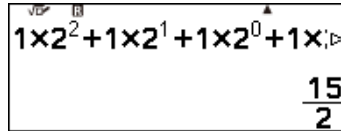


En ese sentido, se pueden generar preguntas con relación a: las diferentes vías en que la calculadora se puede emplear para resolver una tarea, los procesos que la calculadora emplea (la manera en que está programada) para ofrecer ciertos resultados y las ventajas y limitaciones de su uso.

## Tarea 5

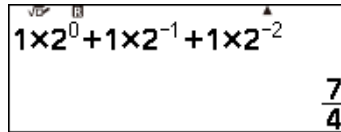
En el sistema de numeración decimal se utiliza el punto o la coma decimal para representar números fraccionarios decimales, del mismo modo el sistema de numeración binario hace uso del punto o coma binaria para representar números fraccionarios binarios.

$$111,1_{(2)} = 1(2)^2 + 1(2)^1 + 1(2)^0 + 1(2)^{-1} = 7,5$$



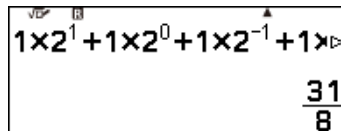
Calculator display showing the expansion of  $111,1_{(2)}$ :  $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = \frac{15}{2}$

$$1,11_{(2)} = 1(2)^0 + 1(2)^{-1} + 1(2)^{-2} = 1,75$$



Calculator display showing the expansion of  $1,11_{(2)}$ :  $1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = \frac{7}{4}$

$$11,111_{(2)} = 1(2)^1 + 1(2)^0 + 1(2)^{-1} + 1(2)^{-2} = 3,875$$



Calculator display showing the expansion of  $11,111_{(2)}$ :  $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = \frac{31}{8}$

Tres preguntas que pueden ser motivo de discusión en el aula son:

- ▶ ¿Cómo representaría el número decimal 0,3 en el sistema de numeración binario?
- ▶ Si un número fraccionario decimal no periódico (exacto) se convierte al sistema de numeración binario ¿se representará también como un número fraccionario no periódico?
- ▶ Determine el promedio aritmético de:

$$0,1_{(2)}; 0,011_{(2)}; 0,001_{(2)}$$

Dar la respuesta en el sistema de numeración binario.



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

$x$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

0

$\times 10^{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

0

+

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

1

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

2

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

3

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

4

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

5

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

6

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

7

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

8

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

9

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

0

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

1

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

2

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

3

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

4

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\sqrt{\square}$

tan

5

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

CATALOG

TOOLS

...

$\square$

log

$\square^2$

ln

log  $\square$

=

(

;

)

INS

$\times$

OFF

AC

B

E

Z

C

F

o"

(-)

$\approx$

FORMAT

EXE





# Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos

Johan Andrey Salazar Piedrahíta

[jasp87@msn.com](mailto:jasp87@msn.com)

Institución Educativa la Independencia

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Resumen:

Esta propuesta de aula brinda posibilidades de trabajo con la resolución de problemas para el desarrollo de habilidades matemáticas, mediadas por el método de George Polya y la estrategia cálculos parciales para hallar el volumen de cuerpos compuestos. Se emplean las calculadoras CASIO Classwiz fx-991LA CW como medio tecnológico que favorece este proceso. La experiencia se efectuó en la Institución Educativa la Independencia, de la comuna 13 de la ciudad de Medellín, con los estudiantes de 9°3. Las diferentes actividades tuvieron como eje central el trabajo cooperativo y compartir entre pares, lo que permitió que resultados como el cálculo de volúmenes compuestos, el trabajo cooperativo, la asimilación del método de Polya y la estrategia cálculos parciales, fueran comprendidos por los integrantes del grupo.

**Palabras clave:** Volumen compuesto, habilidades matemáticas, poliedros, resolución de problemas.



## Relación con los documentos nacionales

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
9°	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pensamiento geométrico.</li> <li>• Pensamiento numérico.</li> <li>• Pensamiento variacional.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.</li> <li>• Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmicación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y resolver problemas.</li> <li>• Justifica la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) en relación con las situaciones escolares y extraescolares.		Explica la pertinencia o no de la solución de un problema de cálculo de área o de volumen, de acuerdo con las condiciones de la situación.
<b>Eje central:</b> Cuerpos geométricos		
<b>Objetivo:</b> Utilizar algunos elementos del método de George Polya y la estrategia <i>hacer cálculos parciales</i> para hallar el volumen de cuerpos compuestos..		
<b>Conocimientos previos:</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Poliedros</li> <li>• Fórmulas para hallar el volumen de los poliedros y cuerpos redondos</li> <li>• Jerarquía de las operaciones</li> <li>• Manejo básico de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.</li> </ul>		

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

<b>Tiempo de duración:</b>	Tres semanas de clase (seis horas de clase)
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guía del estudiante</li> <li>• Presentación en Power point</li> <li>• Video "El museo más famoso del mundo"</li> <li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.</li> </ul>

### Momento 1. Contextualización y trabajo individual (una sesión de clase)

En este componente se trabajó lo relacionado con la contextualización de la propuesta y el trabajo con el docente y los estudiantes. Se realizó en seis horas de clase por bloques y su propósito fue que los estudiantes interpretaran, analizaran y utilizaran algunos elementos de George Polya, como estrategia para la resolución de problemas y la estrategia de cálculos parciales para la resolución de problemas con sólidos geométricos. Es impor-









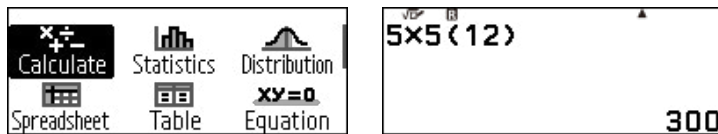




Como ejemplo, a continuación, se presenta cómo se pueden determinar dichos volúmenes con la calculadora.

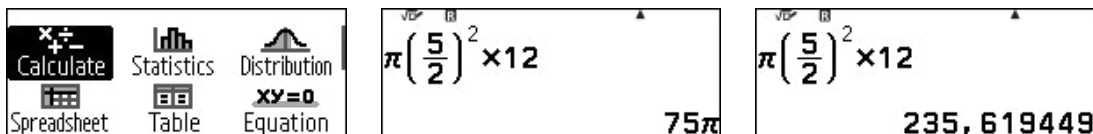
En el modo calcular, para el volumen del prisma:

⬆️ OK 5 × 5 ( ( 1 2 ) ) EXE

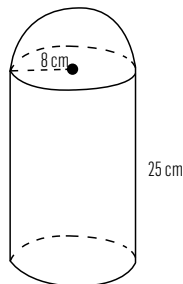


En el modo calcular, para el volumen del cilindro:

⬆️ OK ↑ 7 ( ( = 5 √ 2 > ) ) π × 1 2 EXE (FORMAT) √ OK

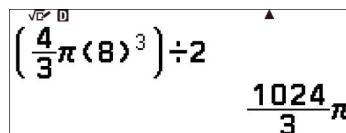


- Teniendo en cuenta las medidas señaladas, calcula el volumen de esta figura:



Halla el volumen de la semiesfera

( ( 4 = 3 > ) ) π OK √ OK ( ( 8 ) ) π 3 > ) ÷ 2



Halla el volumen del cilindro

⊞ ^ EXE √ ^ √ EXE ( 8 ) ■² × 2 5 EXE

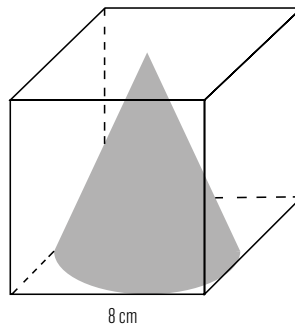
$$\pi(8)^2 \times 25 = 1600\pi$$

El volumen de la figura es el volumen de la semiesfera + el volumen del cilindro

① ① ② ④ ⊞ ③ > ⊞ ^ OK √ OK + ① ⑥ ① ① ⊞ ^ OK √ OK EXE

$$\frac{1024}{3}\pi + 1600\pi = \frac{5824}{3}\pi$$

- ▶ Halla el volumen entre el cono y el cubo.



Volumen del cono

( ① ⊞ ③ > ⊞ ^ OK √ OK ( 4 ) ■² × 8 ) EXE

$$\left(\frac{1}{3}\pi(4)^2 \times 8\right) = \frac{128}{3}\pi$$

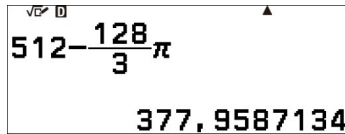
Volumen del cubo

(8) (x³) (3) (EXE)

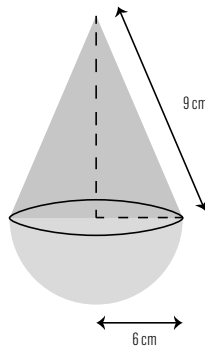


Volumen total = Volumen del cono - Volumen del cono

(5) (1) (2) (-) (1) (2) (8) (÷) (3) (>) (π) (^) (OK) (v) (OK) (EXE)



- Calcular el volumen del siguiente cuerpo.



V total = Volumen del cono + Volumen de la semiesfera



Una empresa comercializa termos con las características que muestra la imagen.

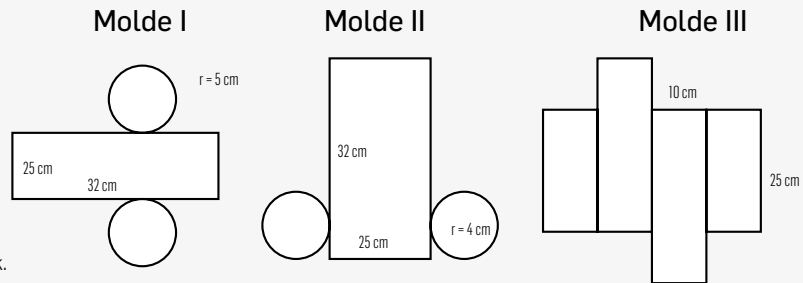
**Figura 4.** Termo para comercializar.



Fuente: @mrsiraphol - freepik.

Nombre del producto: Termo 1/2 litro  
 Perímetro de la base: 31,415 cm  
 Radio de la base: 5 cm  
 Altura: 25 cm

La empresa tiene los siguientes modelos de caja para empaclar los productos



A los estudiantes se les solicitó completar las siguientes cuestiones:



- ▶ ¿En cuál o en cuáles modelos se puede empaclar el termo?  
 En el modelo I y el modelo III
- ▶ Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la(s) variable(s) que cambian. ¿Qué puedes concluir respecto al volumen?

**Tabla 3.** Modelo I.

Modelo I Si solo cambia el radio	
Radio	Volumen
Triplifica	Por 9
Duplica	Por 4
Cuadruplica	Por 16
Quintuplica	Por 25

**Tabla 4.** Modelo II.

Modelo II Si no cambia el radio, pero se modifican las medidas del rectángulo	
Dimensiones	Volumen
Duplican	Por 4
Triplican	Por 9
Cuadruplican	Por 16

Si se desea construir 1.000 cajas, como el modelo III, para empaquetar los termos ¿qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?

Para esto se requiere sumar el total de las áreas del material para 1000 cajas. Así el área superficial de una caja es:

$$(2 \times 10 \times 25 + 2 \times 10 \times 35) \times 1000$$

A calculator screen showing the expression  $(2 \times 10 \times 25 + 2 \times 10 \times 35)$  and the result  $1200000$ .

Lo cual es equivalente a 120 metros cuadrados

### Momento 3. Evaluación de los aprendizajes

La evaluación, como un proceso continuo, se mantuvo durante todas las sesiones y con el uso de instrumentos de evaluación como la observación, el feedback, la coevaluación entre equipos y grupo con el propósito de potenciar algunas habilidades requeridas en el siglo XXI, tales como la comunicación y el trabajo cooperativo, en las que la participación constante es fundamental para el trabajo realizado.

Al finalizar la práctica de aula, los estudiantes compartieron sus dificultades, retos y aprendizajes adquiridos durante los diferentes momentos, tales como la aplicación consciente del método de Polya. Además, comprendieron cada uno de los pasos y se confundieron cuando debían hallar una potencia para calcular un dato. Varios equipos sumaron los datos en vez de multiplicarlos. De ello se infiere que es menester hacer más énfasis en este tipo de ejercicios o problemas y no en ejercicios mecánicos.

### Experiencia de aula

La práctica de aula se efectuó con 36 estudiantes del grado noveno-tres (9°3) de la Institución Educativa la Independencia, comuna 13 del municipio de Medellín. En ella se buscó desarrollar el pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y la estrategia de hacer cálculos parciales para resolver actividades que involucraran el uso de los cuerpos geométricos. El grupo ha trabajado, desde el 2016, con la metodología de trabajo cooperativo; sin embargo, es desde el mes de febrero del 2017 cuando se ha involucrado di-

cha metodología en el área de matemáticas y en otras por lo que durante esta actividad se ha visto reflejado estos avances.

Los estudiantes comprendieron y asimilaron lo que conlleva un trabajo con esta metodología. Es preciso aclarar que, aunque la tecnología está inmersa en todos los procesos de la sociedad y, por ende, permea a los aprendices, en ocasiones no tienen claridad en el uso de las herramientas tecnológicas en el ámbito educativo. Por tanto, se hace necesario empezar a trabajar con elementos que los lleve a resolver situaciones más complejas empleando dichas tecnologías. De otro lado, se buscó que los estudiantes más que utilizar la calculadora como un fin, se apoyaran en ella para hacer cálculos más rápidos, analizaran los resultados de acuerdo con la jerarquización de las operaciones, teniendo en cuenta que no es lo mismo un resultado positivo que uno negativo y que asimilaran la importancia del uso de herramientas tecnológicas como medio y no como un fin.

Los estudiantes manifestaron estar motivados con el uso de la calculadora como herramienta para desarrollar la actividad y solicitaron implementarla para otras didácticas en las que se involucren temas de estadística y matemáticas.

## Reflexión pedagógica

Uno de los grandes desafíos de los docentes en la sociedad actual es el uso de las tecnologías en el aula, porque surgen debates de si permitir el celular en las aulas o si permitir calculadoras en el área de matemáticas, son una opción viable debido a que las pruebas estandarizadas (ICFES) no permiten emplear dicha herramienta. Sin embargo, vivimos en una sociedad en la que estas tecnologías están inmersas en todos los procesos cotidianos básicos. Para citar algunos ejemplos: el señor de la tienda usa la calculadora para decirnos el costo del mercado, los ingenieros implementan la calculadora y otros programas para realizar los diferentes cálculos, nuestros estudiantes utilizan los celulares para casi todas las actividades que desarrollan a diario (leer, observar y escribir).

**Figura 5.** Estudiantes realizando la experiencia.



Fuente: Archivo del autor.

Desde este punto de vista, es importante que la escuela, como un ente activo de la sociedad, se cuestione sobre la manera correcta de implementar dichas tecnologías y no, por el contrario, prohibirlas, pues se evidencia que la herramienta como tal es un medio y no el fin. En el caso de la calculadora, los estudiantes pueden llegar a un resultado, pero ¿qué pasa si el resultado obtenido es negativo?, ¿para qué casos servirá un resultado como este, si se está preguntando por un volumen, una distancia o un área?, ¿cómo debe ser el resultado? El instrumento como tal es un medio para hacer un procedimiento, pero el análisis de lo obtenido le corresponde hacerlo a los estudiantes, que, en última instancia, es lo que denomina Polya como verificación de la respuesta para que podamos evaluar qué tanto han logrado comprender los aprendices del concepto que se despliega.

Es importante resaltar que el uso de herramientas tecnológicas en las diferentes actividades de clase, en este caso la calculadora, motiva a los estudiantes y les permite utilizar nuevas estrategias a la hora de resolver situaciones problémicas e incluso lograr resultados que, de forma escrita, no son posibles. Por eso, como docentes, debemos estar a la vanguardia de nuevas estrategias, metodologías y propuestas que, en vez de prohibirlas, puedan incluirlas dentro de los diferentes procesos escolares.

## Bibliografía

- Alanxelmundo. (28 de agosto de 2013). El museo más famoso del mundo - AXM Paris #6 [video]. Youtube. [https://www.youtube.com/watch?v=YZzydHgojMc&t=71s&ab\\_channel=alanxelmundo](https://www.youtube.com/watch?v=YZzydHgojMc&t=71s&ab_channel=alanxelmundo)
- Brainly. (3 de abril de 2020). Nuevas preguntas de matemáticas. Brainly. <https://brainly.lat/tarea/14635452>
- Decreto 230 de 2002 [con fuerza de ley]. Por medio del cual se dictan normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional. 11 de febrero de 2002.
- Educarchile. (s.f.). Pasos a considerar en la resolución de problemas. <http://ww2.educarchile.cl/Portal/Base/Web/VerContenido.aspx?ID=181701>
- Los tres editores. (2017). Estrategias Saberes Matemáticas. Los tres editores S.A.S.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Magisterio.
- MEN. (2016). Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas. Panamericana Formas E Impresos S.A.
- MEN. (2017). Vamos a aprender matemáticas, libro del estudiante 9. Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). Matriz de referencia de Matemáticas. Panamericana Formas E Impresos S.A.
- MEN. (2017). Vamos a aprender Matemáticas, libro del estudiante, 7. Bogotá, D.C., Colombia.: SM, S.A.
- Polya, G. (1984). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas.

---

### Reconocimientos

Un reconocimiento muy especial a mis peripatéticos de 9°3 por aventurarse en todas mis locuras y permitirme experimentar con ellos.

---





# Cálculos parciales como estrategia en la resolución de volúmenes compuestos

Johan Andrey Salazar Piedrahíta  
[jasp87@msn.com](mailto:jasp87@msn.com)  
Institución Educativa la Independencia  
Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.





## Reto I: El Museo más famoso del mundo

Figura 1. Museo de Louvre.



Fuente: Marco Santiago en Pixabay.

Se comenzó a construir en 1546 cuando Francisco I era el rey de Francia, pero a medida que transcurrieron los años y los reinados, fueron realizándose restauraciones. En el siglo XVII, cuando Enrique IV estaba en el poder, se terminó la gran Galería y cuando Napoleón III fue emperador se agregó un ala en la zona norte. A mediados del siglo XIX se terminó de construir este gran complejo. En 1793 fue inaugurado como museo público y en 1848 pasó a manos del Estado.

El ala norte del palacio del Louvre se transformó en una sala de exposiciones, con esto concluyó la segunda fase que incluía la construcción de un auditorio, una pirámide de cristal, muestras sobre la historia del Louvre, galerías para exposiciones temporales y la excavación de los fosos del Louvre medieval, además de tiendas, restaurantes y estacionamientos<sup>1</sup>.



- ▶ ¿Por qué creen que los museos pueden ser importantes para las grandes ciudades?

---

---

---

- ▶ ¿Qué museos conoces?, ¿cuál es el que más te gusta? Haz una pequeña descripción de este.

---

---

---

<sup>1</sup> Tomado de: Paris City Vision. (s.f.). El Louvre: historia de un palacio que se convirtió en museo. <https://www.pariscityvision.com/es/paris/museos/museo-louvre/louvre-palacio-convertido-museo>



- ▶ Escribe los nombres de los cuerpos geométricos que se observan en la figura 1 del Museo de Louvre

---



---



---

- ▶ Escribe el nombre de los cuerpos geométricos que se observan en el video

---



---



---

- ▶ ¿Qué datos se necesitan para calcular el volumen de la pirámide del Museo de Louvre?

---



---



---

- ▶ Si en vez de una pirámide fuese una esfera la que aparece en el museo ¿qué datos necesitas para calcular el volumen?

---



---



---



## Reto II: calculando el volumen de la pirámide del Museo de Louvre

- a. Completa la siguiente tabla, varía la altura de la pirámide, pero manteniendo el lado de la base constante.

Lado	Altura	Volumen
35		
35		
35		
35		

- ▶ ¿Qué relación se puede identificar entre la altura y el volumen de la pirámide?

---



---



---

Figura 2. Pirámide del Museo de Louvre.

**Pirámide del Museo del Louvre**



La pirámide rodeada por el Museo del Louvre

**Localización**

**País** Francia

**Ubicación** París, Francia

**Historia del edificio/monumento**

**Inauguración** 29 de marzo 1989

**Autor** Arquitecto Ieoh Ming Pei

**Dimensiones** 35 metros por lado y 20,1 metros de altura

**Coordenadas** 📍 48°51'40"N 2°20'09"E

Fuente: Wikipedia.

- b. Completa la siguiente tabla, varía el lado de la pirámide, pero manteniendo la altura de la pirámide constante.

Altura	Lado de la pirámide	Volumen
20,1		
20,1		
20,1		
20,1		

- ¿Qué relación se puede identificar entre el lado de la base y el volumen de la pirámide?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

- c. Completa la siguiente tabla y luego responde

	Lado	Alto	Volumen
Dimensiones reales			
Dimensiones si se duplica el lado y la altura			
Dimensiones si se triplica el lado y la altura			

- ¿Cómo cambia el volumen?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

- ¿Es posible construir una pirámide con las dimensiones reales en la cancha de tu Institución?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_


\_\_\_\_\_.



### Reto III

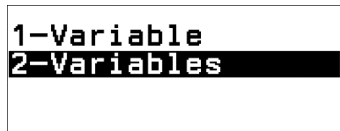
Utilizando la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, ingresa en el modo Estadística para generar una regresión lineal:

1. Obtenga el modelo lineal correspondiente a los datos de la Tabla donde el lado es fijo y la altura cambia. Utiliza los datos de las alturas y los volúmenes. Para hacer el proceso con la calculadora sigue los siguientes pasos:

Ingresa al modo Estadística  

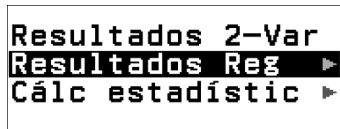


Selecciona dos variables  



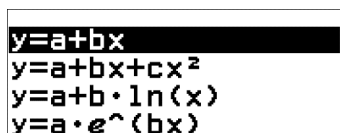
Ingresa diferentes valores para la altura y los volúmenes correspondientes (recuerda que el lado de la base de la pirámide es fijo). Después de hacerlo puedes seleccionar la opción regresión.



Selecciona el tipo de regresión y finaliza dando ok





Una opción alternativa es generar el QR en tabla y al escanearlo con el celular se genera la regresión y el gráfico de la nube de puntos.

- Obtenga el modelo cuadrático correspondiente a los datos de la Tabla donde la altura es fija y el lado cambia. Utiliza los datos de los lados y los volúmenes. El proceso con la calculadora es semejante al punto anterior, pero selecciona el modelo cuadrático.
- Completa la siguiente tabla y calcula la regresión correspondiente.

Altura	Área de la base de la pirámide	Volumen
20,1		
20,1		
20,1		
20,1		

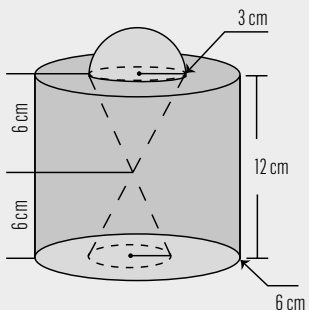
## Misión II. Resolución de problemas

### Hacer cálculos parciales

Con la ayuda de tu profesor y tus compañeros analicen la siguiente situación, utilicen las preguntas orientadoras del cuadro para completar los datos.

El envase de un perfume se elaboró con un cilindro del que se extrajo dos porciones iguales de cono y se añadió una semiesfera como tapa. (Observe la figura)

¿Cuál es el volumen de la estructura?

<p><b>Figura 3.</b> Cilindro de vidrio para estudiar.</p>  <p>Fuente: MEN, 2017.</p>	<p><b>Comprender el problema y leerlo varias veces.</b></p>	<p>¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar? Preguntas como las siguientes pueden ayudar a entender mejor el problema ¿Cuánto mide el radio de la base y la altura del cilindro? ¿Cuáles son las medidas del radio de la base y la altura de la tapa?</p>
	<p><b>Crear un plan</b></p>	<p>Cuando trabajamos la estrategia de hacer cálculos parciales calculamos el volumen de los sólidos que componen la estructura, y decidimos si debemos sumar o restar cada uno de los volúmenes hallados, de acuerdo con la situación planteada.</p>
	<p><b>Ejecutar el plan</b></p>	<p>Se efectúan las operaciones necesarias con los volúmenes parciales para determinar el volumen total.</p>
	<p><b>Verifica la respuesta</b></p>	<p>Se verifica que el volumen obtenido sea coherente con la situación planteada.</p>

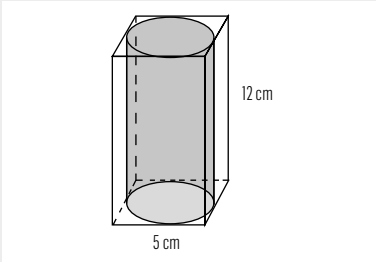


- ▶ En la situación anterior se aplicó la estrategia de resolución de problemas por "cálculos parciales" ¿a qué crees que hace referencia?
- ▶ ¿En qué tipo de problemas o situaciones se pueden implementar los cálculos parciales como una estrategia?

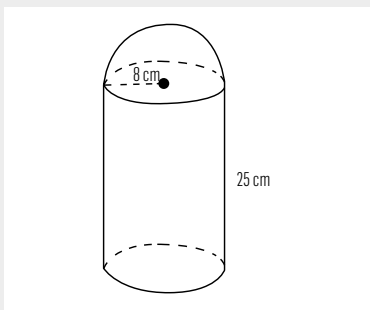


Con tu equipo de trabajo resuelve los siguientes ejercicios<sup>2</sup>.

**Reto I:** Halla el volumen de un prisma cuadrangular, de lado de la base 5 cm y altura 12 cm. Calcula también el volumen del cilindro inscrito en el prisma.



**Reto II:** Teniendo en cuenta las medidas señaladas, calcula el volumen de esta figura:



Fuente: MEN, 2017.

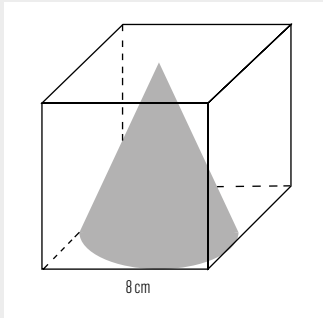
Comprender el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Leer varias veces el problema	
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

Comprender el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Leer varias veces el problema	
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

<sup>2</sup> Las situaciones son adaptaciones de Brainly (2020).



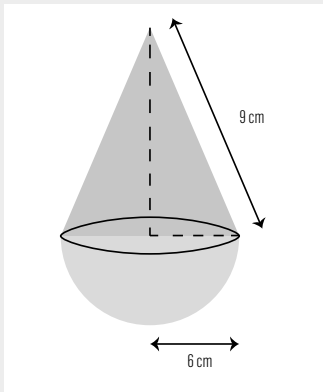
**Reto III:** Halla el volumen entre el cono y el cubo.



Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Leer varias veces el problema	
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

**Reto IV:** Calcular el volumen del siguiente cuerpo.



Fuente: MEN, 2017.

Comprender el problema	¿Qué datos tengo? ¿Qué necesito hallar?
Leer varias veces el problema	
Crear un plan	
Ejecutar el plan	
Verifica la respuesta	

## Misión final



### Reto final

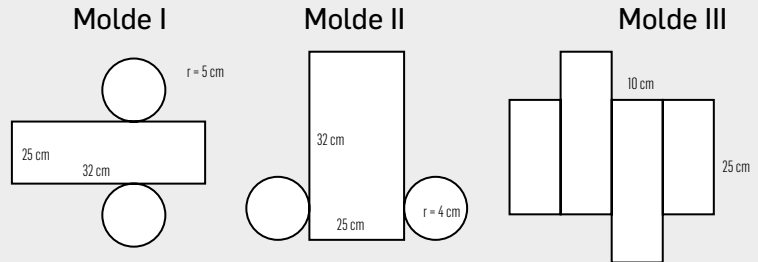
Una empresa comercializa termos con las características que muestra la imagen:

**Figura 4.** Termo para comercializar.



Fuente: @mrsiraphol - freepik.

La empresa tiene los siguientes modelos de caja para empacar los productos



Nombre del producto: Termo 1/2 litro  
Perímetro de la base: 31,415 cm - Radio de la base: 5 cm - Altura: 25 cm



- ▶ ¿En cuál o cuáles modelos se puede empacar el termo?
- ▶ Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta la (s) variable (s) que cambian. ¿qué puedes concluir con respecto al volumen? ¿Qué tipo de relación encuentras entre cada uno de los casos?


**Tabla 1.** Modelo I.

Modelo I Si solo cambia el radio	
Radio	Volumen
Triplica	Por 9
Duplica	Por 4
Cuadruplica	Por 16
Quintuplica	Por 25

**Tabla 2.** Modelo II.

Modelo II Si no cambia el radio, pero se modifican las medidas del rectángulo	
Dimensiones	Volumen
Duplican	Por 4
Triplican	Por 9
Cuadruplican	Por 16

Si se desea construir 1.000 cajas, como el modelo III para empacar los termos ¿qué cantidad de material es necesario para dicho trabajo?



## Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

En este capítulo se presentó una propuesta de aula enfocada en la estrategia de cálculos parciales para hallar el volumen de cuerpos compuestos. Estos cálculos permiten descomponer figuras geométricas en componentes más simples y de esta manera facilitar el proceso de cálculo del volumen total. Conscientes de la importancia de la incorporación de las tecnologías en el aula, se incorporó el uso de calculadoras como un medio tecnológico que fomenta y optimiza estos cálculos, es decir, que permiten disminuir la cantidad de operaciones para enfocarse en el análisis de los datos y los resultados. En ese sentido, presentamos algunas posibilidades de ampliación respecto al ambiente de clase y el uso de la calculadora.

En términos del ambiente de clase, se podrían proponer situaciones donde los estudiantes comprendan otros tipos de problemas relacionados con el volumen de distintas figuras. Por ejemplo, problemas que impliquen la comparación de volúmenes, la optimización de recipientes o el modelado de situaciones. Además, se pueden aprovechar situaciones cercanas a los estudiantes para que puedan hacer ejercicios relacionados con la medición y con los cálculos parciales. Un posible caso es brindar a los estudiantes el volumen de una pared interna en la habitación de un apartamento de 54 metros cuadrados y pedirles que indiquen las dimensiones de los ladrillos que podrían usarse y la cantidad de ladrillos necesarios. Esta situación podría aprovecharse para discutir si, considerando el tamaño del apartamento, las dimensiones dadas por los estudiantes son viables o no. La situación puede acompañarse con el uso no solo de la calculadora, sino también de otras herramientas virtuales empleadas para la construcción de planos y diseños (v.g. floorplaner).

Con relación al uso de la calculadora para ahorrar cálculos y procesos algorítmicos, se podrían promover situaciones que impliquen razonar acerca de los procesos asociados a la descomposición de volúmenes y donde los estudiantes deban construir representaciones. Considere la siguiente situación hipotética: se sabe que el volumen de una esfera es de  $\frac{2048}{3}\pi$  metros cúbicos. Además, un profesor entregó a estudiantes de otro grado una figura donde se había retirado una porción de la esfera y el procedimiento descrito para calcular el volumen que quedó fue:

$$\frac{512}{3}\pi + \frac{1024}{3}\pi$$

Se podría pedir a los estudiantes que hagan un dibujo de la situación propuesta. En este caso, deberían dibujar un cuarto de la esfera y una semi esfera, cuyo radio es de 8 metros. Así mismo, se podría preguntar por otras posibilidades (tanto para el cálculo como para el dibujo) de la misma situación. A continuación, se presentan otras tareas que pueden promover un uso diferente de la calculadora:

## Tarea 1

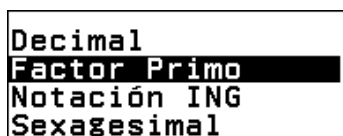


- ¿Cuántos cilindros diferentes se pueden generar de tal manera que su volumen siempre sea de  $768\pi$  metros cúbicos? Explique su respuesta si se espera que las medidas sean enteras.

**Nota:** en este caso, el estudiante puede explorar con su calculadora diferentes valores y estrategias para hallar posibles respuestas. Por ejemplo, puede descomponer el 768 en sus factores primos con la calculadora tal y como se presenta continuación:

$$768 = 2^8 \times 3$$





Con este resultado puede buscar combinaciones posibles para el radio y la altura.

Otra alternativa es dividir consecutivamente para hallar un número cuadrado, asociado al radio, y el factor que queda corresponde a la altura. Por ejemplo:  $\frac{768}{2} = 384$ , luego  $\frac{384}{2} = 192$ , es decir, que  $768 = 2^2 \times 192$ , por lo tanto,  $r = 2$  y  $h = 192$ .



- Una posibilidad adicional es que el profesor o la profesora indique que determinen diferentes medidas si la figura corresponde a un cono o una esfera. Aquí se pueden discutir aspectos como: ¿cuántos conos se pueden construir si el volumen es el mismo que el propuesto para el cilindro? ¿cuántas esferas son posibles?



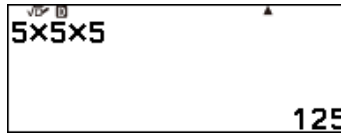
## Tarea 2

Se tiene un conjunto de cubos iguales, donde cada lado mide 5cm. Una compañera de clase utilizó su calculadora para realizar el siguiente procedimiento:

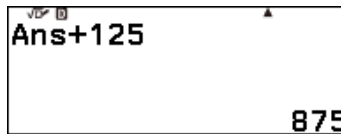
$$5 \times 5 \times 5 = +125 =====$$



OK 5 × 5 × 5 EXE



OK 5 × 5 × 5 EXE + 1 2 5 EXE EXE EXE EXE EXE



- a. Explica qué fue lo que hizo la compañera con las operaciones. Para hacerlo, se recomienda descomponer todo el proceso en fragmentos y razonar cada uno con las siguientes preguntas guía:



- ▶ ¿Para qué multiplico  $5 \times 5 \times 5$ ?, ¿qué quería hacer?, ¿qué resultado obtuvo y qué significa?
- ▶ ¿Qué pudo estar viendo o pensando tu compañera para sumar el resultado con 125?
- ▶ ¿Qué hizo la calculadora cuando se apretó la secuencia =====?, ¿qué representa esto en términos del conjunto de cubos?

- b. ¿Cuántas veces, después de teclear el 125, tuvo que apretar el = si se sabe que la compañera está sumando una serie de cubos que juntos forman otro cubo (el de menor tamaño posible)?

**Nota:** se sugiere que el segundo punto de la **tarea 2** se presente después de responder y discutir el **punto 1** para no inducir respuestas. En el **punto 2** se puede determinar que el menor cubo posible se forma con 8 cubos pequeños, el profesor puede aprovechar esta situación y ampliar con preguntas como: ¿cuántas veces se debe presionar el signo = para obtener la cantidad de cubos necesaria para formar el siguiente cubo?, ¿cuál será la medida del lado de ese cubo?



# La calculadora, ¿mayor que o menor que tu conocimiento? Uso en las inecuaciones

Javier Orlando Marín Sánchez

[javiermarin1975@hotmail.com](mailto:javiermarin1975@hotmail.com)

Institución Educativa San Juan Bosco

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

## Resumen:

En este trabajo se pretende profundizar en la solución de inecuaciones con la calculadora Casio fx-991LA CW como parte de un trabajo general cuyos objetivos son: utilizar las propiedades de orden de los números reales para la solución de inecuaciones y resolver ejercicios y problemas que se pueden presentar en la vida cotidiana, con la aplicación de las inecuaciones. Para que la actividad se lleve a cabo es necesario que las estudiantes conozcan simbología previa que será explicada durante las sesiones en las que se desarrolla el espacio.

**Palabras clave:** Inecuación, intervalo, pensamiento variacional, uso de la calculadora.





---

**Objetivo:** Solucionar inecuaciones de grados 2, 3 y 4 con la calculadora Casio fx-991LA CW e interpretar sus resultados.

---

**Conocimientos previos:**

- Concepto de desigualdad y sus símbolos.
- Grado de una inecuación.
- Despeje de inecuaciones.
- Intervalos.
- Solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2.

---

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

---

**Tiempo de duración:** Cuatro horas.

---

**Recursos:**

- Docente.
- Documento guía.
- Computador.
- Calculadora Casio fx-991LA CW.
- Emulador de la calculadora.
- Video beam.

---

La clase estuvo dividida en cuatro momentos.

### Exploración<sup>1</sup>

Se debe realiza la socialización de los saberes previos, preferiblemente con participación de las estudiantes y que sean ellas las que den respuestas con temas ya mencionados de: concepto de desigualdad y sus símbolos, grado de una inecuación, despeje de inecuaciones, intervalos y solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2.

### Estructuración

En esta etapa se solucionan, con ayuda del docente, algunas inecuaciones de primer y segundo grado. En este momento, fue clave recordar la organización en los pasos, agrupar términos semejantes, factorizar, análisis de casos, graficar, analizar y escribir el conjunto solución. Algunos ejercicios propuestos son (ver tabla 1).

---

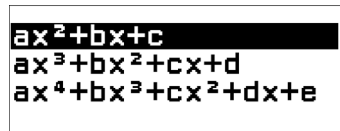
1 Los momentos propuestos son una adaptación de: MEN (2015). ¿Por qué es importante estudiar el movimiento de objetos en términos de su velocidad y aceleración? Parte 1 - Movimiento rectilíneo uniforme [video]. Colombia Aprende.



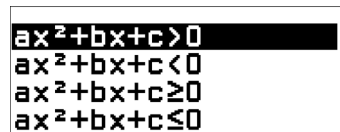
Secuencia de teclas:  $\Delta$   $\nabla$   $\nabla$  **OK**



Se selecciona el grado de la inecuación e identifica el tipo de desigualdad.



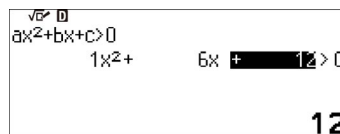
**OK**



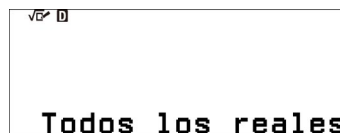
A continuación, se presentan imágenes de la solución de algunos de los ejercicios planteados.

Para:  $X^2 + 6X + 12 > 0$

**OK** **1** **OK** **6** **OK** **1** **2** **EXE**



**OK**









respuesta y es satisfactorio observar que los estudiantes logran un manejo adecuado de la herramienta en corto tiempo y su percepción de que la calculadora efectivamente minimiza los tiempos, pero se advierte que es de vital importancia una correcta interpretación de los resultados.

Es preciso añadir que no todas los estudiantes obtuvieron la apropiación de la herramienta en los mismos tiempos o una correcta interpretación de los resultados, pero, por medio de la práctica, se percibe que de una u otra manera, todos los logran hacer, esto se evidencia con comentarios como *“profesor, todo lo que teníamos que hacer al inicio y la calculadora nos da la respuesta de una”* o *“con la calculadora es más fácil”*. Estas afirmaciones hacen evidente el uso de la calculadora como herramienta de apoyo.

## Reflexión pedagógica

Sin dejar de lado el desarrollo operativo de los ejercicios, ya que en lo personal considero fundamental el saber cómo se llega a una respuesta y no obtener la misma simplemente, se puede mostrar a los estudiantes que las herramientas tecnológicas permiten minimizar tiempos para ser usados en otras actividades y facilitan la verificación de resultados que se obtienen de las operaciones ya realizadas.

Para los estudiantes es importante tener un conocimiento amplio del manejo de la calculadora y qué opciones de solución tienen con esta herramienta, pero esto debe ir de la mano con evidencias claras de que se entiende correctamente la interpretación de los resultados.

En este caso se trabajó con una calculadora por pareja y sería importante que cada estudiante tuviese la oportunidad manipular su propia calculadora para aumentar la apropiación de esta.

La contextualización de problemáticas relacionadas con la vida cotidiana se facilita más en inecuaciones de grado uno porque no tienen opción de solución en la calculadora, pero su proceso es relativamente sencillo, por lo que no requiere de la misma, aunque sí es de gran utilidad para las inecuaciones cuadráticas, cúbicas y de grado cuatro ya que minimiza tiempo que es utilizado en realizar operaciones y puede usarse en la interpretación de la información.

El uso del emulador de la calculadora fx-991LA CW es una gran ayuda durante la explicación del manejo de la herramienta porque permite una mejor visualización de los pasos y los resultados arrojados.

La evaluación del trabajo se realiza de manera permanente durante la actividad y para el inicio de la sección siguiente el docente propondrá encontrar las respuestas con la ayuda de la calculadora de tres inecuaciones, de grados dos, tres y cuatro para que las estudiantes hallen su respectiva respuesta y la escriban en forma de conjunto e intervalo y la grafiquen.

## Bibliografía

- Anzola, J. y Abril, P. (2013). *Saber matemático 11*. Didáctica y matemáticas LTDA.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Magisterio.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Competencias en Matemáticas*. Panamericana Formas e Impresos S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender matemáticas, libro del estudiante, 11*. Larousse.
- Quintero, L. (2017). *Estrategias de mejoramiento de competencias curriculares matemáticas*. Los tres Editores S.A.S.

---

### Reconocimientos

Para la elaboración de este trabajo se brinda un reconocimiento muy especial a las personas del proyecto Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia-Gakuhan Casio y de la comunidad educativa de la Institución Educativa San Juan Bosco, quienes intervinieron en esta propuesta didáctica.

---





Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento matemático en sus diversas formas, especialmente numérico y variacional.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo y contraste las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.</li> <li>• Establezco relaciones y diferencias entre distintas notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</li> <li>• Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza propiedades del producto de números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones.</li> <li>• Interpreta las operaciones en diversos dominios numéricos para validar propiedades de ecuaciones e inecuaciones.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Inecuaciones de grados 2, 3, 4.		
<b>Objetivo:</b> Solucionar inecuaciones de grados 2, 3 y 4 con la calculadora Casio fx-991LA CW e interpretar sus resultados.		
<b>Conocimientos previos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto de desigualdad y sus símbolos.</li> <li>• Grado de una inecuación.</li> <li>• Despeje de inecuaciones.</li> <li>• Intervalos.</li> <li>• Solución operativa de inecuaciones de grados 1 y 2.</li> </ul>	
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Docente.</li> <li>• Documento guía.</li> <li>• Calculadora Casio Classwiz fx-991LA CW.</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje



### Actividad 1

El profesor realiza una serie de preguntas enfocadas en la contextualización de saberes previos, que permitirán una mejor comprensión. Lo importante es que participes, aclares dudas y dejes el temor a equivocarte, pues de los errores se aprende.

## Actividad 2

El profesor explicará el proceso operativo para la solución de inecuaciones de primer y segundo grado. Es muy importante tu participación y que aclares cualquier duda que se presente, para que puedas solucionar los ejercicios propuestos a continuación y determines el grado de cada inecuación.

Ecuación	Grado	Solución
$X - 5 < 0$		
$X + 2 \geq 4$		
$3X + 5 < X - 7$		
$X^2 + 11X + 18 > 0$		
$X^2 + 2X \geq X + 6$		
$X^2 - 3X - 10 < 0$		

## Actividad 3

El profesor explicará el proceso de solución de inecuaciones con la calculadora Casio fx-991LA CW. Luego, con la tuya debes realizar los pasos que te indique el profesor y aclarar cualquier duda que se presente. La calculadora Casio fx-991LA CW te da una respuesta que deberás interpretar y saber escribir como conjunto solución con sus respectivos intervalos. Después de la explicación deberás solucionar los siguientes ejercicios, completa la tabla.

$X^2 + 6X + 12 > 0$
$6X^2 - 7X - 3 \leq 0$
$2X^2 - 5X + 2 \leq 0$
$-X^2 + 5X \geq 4$
$2X^3 - 3X^2 + 11X + 6 < 0$
$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \leq 0$
$2X^4 + X^3 - 8X^2 - X + 6 \geq 0$
$-X^4 + 5X^2 - 4 < 0$

# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

**Mónica Marcela Parra-Zapata**  
monica.parra@udea.edu.co

**Alexander Castrillón-Yepes**  
alexander.cyepes@udea.edu.co

En este trabajo se propuso una actividad para estudiantes de grado once, con el cual se buscó profundizar en la solución de inecuaciones con la calculadora Casio fx-991LA CW, por medio de la utilización de las propiedades de orden de los números reales para la solución de inecuaciones y resolver ejercicios y problemas que se pueden presentar en la vida cotidiana, con la aplicación de las inecuaciones. A continuación, planteamos posibilidades frente al uso de la calculadora Casio fx-991LA CW, los contenidos matemáticos y la dinamización del ambiente.

Frente al ambiente, sugerimos no reducir el proceso a solo una explicación de la operatividad en la solución de inecuaciones, sino que también discutir con las y los estudiantes la significación de estas en términos de una comparación de dos cantidades no equivalentes en donde se establece una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece una o más incógnitas. Además, profundizar en la idea de que resolver una inecuación consiste en encontrar todos los valores, el conjunto de valores solución, de la incógnita para los que se cumple la relación de desigualdad. En adición, recomendamos incluir en la solución directamente la calculadora y discutir las soluciones que ella arroja y los alcances de lo que nos presenta; así como presentar situaciones diversas de aplicación en la vida cotidiana del concepto.

En la exploración de saberes, el profesor menciona que se abordará el concepto de desigualdad y sus símbolos, despeje de inecuaciones, intervalos y solución operativa de inecua-

ciones de grados 1 y 2. Sin embargo, esto se hizo solo de manera enunciativa. Allí podrían realizarse preguntas que permitan a las y los estudiantes discutir el significado matemático de ciertos términos. Por ejemplo:

## Tarea 1

Discutan las preguntas, dados:

1.  $a > b$
2.  $a < b$
3.  $a \geq b$
4.  $a \leq b$



- ▶ ¿Si tenemos  $a > b$ , qué tipo de número será  $a - b$ ?
- ▶ ¿Si tenemos  $a < b$ , qué tipo de número será  $a - b$ ?
- ▶ ¿Si  $a - b$  es un número no negativo, es posible afirmar que  $a \geq b$ , por qué?
- ▶ ¿Si  $a - b$  es un número no negativo, es posible afirmar que  $a \leq b$ , por qué?

También podrían realizarse preguntas con relación a las propiedades de las desigualdades:



- ▶ Toma la expresión  $a > b$ , asigna diversos valores para  $a$  y para  $b$ , suma o resta una misma cantidad a los dos miembros de esta desigualdad. ¿luego de esto, se altera la desigualdad?, ¿qué podemos concluir?, ¿para cuántos valores de  $a$  y  $b$  se cumple esta conclusión?, ¿cómo podemos comprobarlo?
- ▶ Toma la expresión  $a > b$ , asigna diversos valores para  $a$  y para  $b$ , multiplica ambos miembros de esta desigualdad por una cantidad positiva ¿luego de esto, se altera la desigualdad?, ¿qué podemos concluir?, ¿para cuántos valores de  $a$  y  $b$  se cumple esta conclusión?, ¿cómo podemos comprobarlo? Ahora multiplica ambos miembros de esta desigualdad por una cantidad negativa, ¿luego de esto, se altera la desigualdad?, ¿qué podemos concluir?, ¿para cuántos valores de  $a$  y  $b$  se cumple esta conclusión?, ¿cómo podemos comprobarlo?

Situaciones similares podrían realizarse con las demás propiedades de las desigualdades. En la estructuración y la práctica, cuando el profesor explica la solución operativa, sugerimos darle más sentido al porqué resolver inecuaciones, realizar preguntas de análisis de lo que se obtiene matemáticamente en la calculadora. Y así, darles sentido a los métodos

para solucionar la inecuación y a las propiedades que se usan en su solución. En este punto se debe resaltar el aspecto de interpretación de la respuesta que da la calculadora, y esto se puede evidenciar escribiéndola como el conjunto solución con sus respectivos intervalos. También es posible hacer preguntas de pequeñas variaciones en la calculadora, ¿qué pasa si modificamos un número u otro? Para esto podría realizarse la siguiente tarea:

## Tarea 2

De acuerdo con lo anterior, sugerimos aprovechar la posibilidad de la calculadora Casio fx-991LA CW de graficar inecuaciones lineales en una misma pantalla en su opción *caja de herramientas*. Y a partir de ello realizar análisis de los gráficos y los conjuntos solución. Para ver esto proponemos:

Hallar el conjunto solución de las inecuaciones  $x \leq -2.5$ ,  $x > -3/4$ ,  $-3 < x \leq 1$ . Determinamos la solución con apoyo de la calculadora, así:

⬆ ⬇ ⬇ ⬇ ⬇

[]          
 Matriz    Vector    Proporción  
[] [  
 Caja Mat

OK ⬇ ⬇

[] Lanzar Dado  
[] Lanzar Moneda  
[] **Recta Numérica**  
[] Circulo

OK

[] A: ▶  
[] B: ▶▶  
[] C: ▶▶▶  
[] Ejecutar

OK ⬇ OK OK - 2 , 5 EXE EXE



¿Qué significado tienen las flechas izquierda y derecha ( $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ; señaladas en con color rojo) y los círculos abiertos y cerrados ( $\bullet$ ,  $\circ$ ; señalados en azul) que aparecen en cada extremo de las rectas numéricas? Así puede indicarse que:

- ▶ Flecha a la izquierda ( $\leftarrow$ ) indica la continuación de un rango menor que en la desigualdad.
- ▶ Flecha a la derecha ( $\rightarrow$ ) indica la continuación de un rango mayor que en la desigualdad.
- ▶ Círculo abierto ( $\circ$ ) indica que este valor no es una posible solución de la inecuación.
- ▶ Círculo cerrado ( $\bullet$ ) indica que este valor es una posible solución de la inecuación.

Esto es:

- ▶ En la inecuación  $x \leq -2.5$ , círculo cerrado ( $\bullet$ ) y flecha a la izquierda ( $\leftarrow$ ) indican que el conjunto solución toma el valor  $-2.5$  y continúa en un rango menor a  $-2.5$ .
- ▶ En la inecuación  $x > -3/4$ , círculo abierto ( $\circ$ ) y flecha a la derecha ( $\rightarrow$ ) indican que el conjunto solución no toma el valor  $-3/4$  y continúa en un rango mayor a  $-3/4$ .
- ▶ En la inecuación  $-3 < x \leq 1$ , círculo abierto ( $\circ$ ) y círculo cerrado ( $\bullet$ ) indican que el conjunto solución no toma el valor  $-3$  y continúa hasta el  $1$ , tomando dicho valor.

### Tarea 3

Para el caso de una inecuación cuadrática podemos hacer también análisis de la información arrojada por la calculadora, a través de las diferentes maneras de representación del conjunto solución.



Por ejemplo, preguntarnos ¿qué tipo de intervalo es?, ¿qué pasos aparecen entre los procesos de factorización y el conjunto solución?

Aquí podría proponerse la siguiente situación: presenta dos posibles estrategias con uso de la calculadora para resolver la inecuación. Dos de estas posibles estrategias son usar el modo *desigualdad* e indicar el conjunto solución o usar el modo *ecuación*, hallar las raíces, indicar el conjunto y encontrar el máximo o mínimo. En la calculadora se vería así:



⬆ ⬇ ⬇ OK  
⌚ ⌚ XY=0  
 Hoja cálc Tabla Ecuación  
XY>0 ⌚ 2 8 10 16  
 Desigualdad Complejos Base-N  
OK

$ax^2+bx+c > 0$   
 $ax^2+bx+c < 0$   
 $ax^2+bx+c \geq 0$   
 $ax^2+bx+c \leq 0$

OK 1 OK 6 OK 1 2 EXE  
 $ax^2+bx+c > 0$   
 $1x^2+ 6x + 12 > 0$   
 12  
EXE

$\sqrt{b^2-4ac}$   
 Todos los reales

$\frac{x}{y}$  ⌚ ⌚  
 Calcular Estadística Distribución  
⌚ ⌚ XY=0  
 Hoja cálc Tabla Ecuación

Sist ec lineal  
 Polinómica  
 Resolver

$ax^2+bx+c$   
 $ax^3+bx^2+cx+d$   
 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$\sqrt{b^2-4ac}$  ⌚  
 $ax^2+bx+c$   
 $1x^2+ 6x + 12$   
 12

$\sqrt{b^2-4ac}$  ⌚  
 $ax^2+bx+c=0$   
 $x_1 = -3 + \sqrt{3} i$

$\sqrt{b^2-4ac}$  ⌚  
 $ax^2+bx+c=0$   
 $x_2 = -3 - \sqrt{3} i$

$\sqrt{b^2-4ac}$  ⌚  
 Min de  $y=ax^2+bx+c$   
 $x = -3$

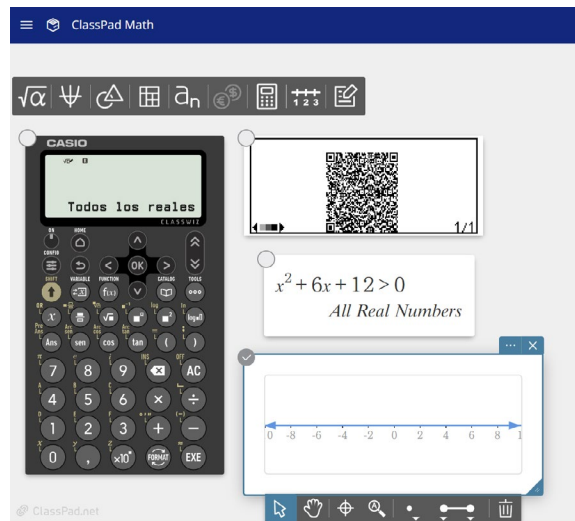
$\sqrt{b^2-4ac}$  ⌚  
 Min de  $y=ax^2+bx+c$   
 $y = 3$

En la transferencia, recomendamos proponer situaciones concretas de aplicación de las inecuaciones y no solo listar inecuaciones a resolver. Y allí discutir el tipo de situaciones en las que es útil usar las inecuaciones.

Por último, en la valoración sugerimos una evaluación centrada en el diálogo sobre las interpretaciones de los valores que arroja la calculadora y sus significados para favorecer otros procesos de la actividad matemática y no solo la ejercitación de algoritmos. Para la inecuación anterior, el código QR es:



En ClassPad.net se muestran las representaciones de los intervalos en la recta numérica.

The screenshot shows the ClassPad Math application interface. At the top, there is a blue header with the text "ClassPad Math". Below the header is a toolbar with various mathematical symbols and icons. The main workspace contains four elements: 1) A CASIO calculator with a green screen displaying "Todos los reales". 2) A QR code in a white box with a black border, similar to the one in the previous image. 3) A white box containing the equation  $x^2 + 6x + 12 > 0$  and the text "All Real Numbers". 4) A number line with arrows at both ends, ranging from -8 to 8 with tick marks every 2 units. The number line is currently empty.



## Solución a la vuelta de la esquina

Luisa Fernanda Marín Ramírez

[luisa.marin@udea.edu.co](mailto:luisa.marin@udea.edu.co)

Institución Educativa El Corazón

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

### Resumen:

El presente trabajo hace parte de la formación Diseño de situaciones didácticas mediadas por herramientas tecnológicas para el desarrollo del pensamiento matemático con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, dirigida a maestros de matemáticas de Básica Secundaria y Media, de la Secretaría de Educación de Medellín. El trabajo es una propuesta didáctica de aula dirigida a los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Tomás Carrasquilla N° 2 de la Ciudad de Medellín. El desarrollo de la actividad estuvo caracterizado por analizar una situación real de la ciudad relacionada con la dificultad para la movilidad y el desplazamiento de los estudiantes en el área cercana a la institución educativa, debido a la imprecisión en los cálculos de un conductor de un tractocamión para dar la vuelta de una calle a una carrera. Se plantea una alternativa de solución a la situación, en la que los estudiantes, por medio del uso de la calculadora científica como apoyo, logren poner en diálogo sus saberes matemáticos.

**Palabras clave:** Punto crítico, máximo de una función, dominio de una función.



## Relación con los documentos nacionales


Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento espacial. Pensamiento variacional.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</li> <li>• Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.</li> <li>• Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. DBA 3-V2. Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explica las respuestas y resultados en un problema con las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos.</li> <li>• Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Punto crítico, máximo de una función		
<b>Objetivo:</b> Hallar el valor del máximo de la función que permite el paso de un tractocamión de una calle a una carrera con las unidades reglamentarias.		
<b>Conocimientos previos:</b>	Semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, despeje de variables, función, dominio, punto crítico, máximo de una función, primera derivada	
<b>Recursos:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La función.</li> <li>• Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Datos reglamentarios de calles, carreras y tractocamiones.</li> </ul>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

La situación de aprendizaje se llevó a cabo teniendo en cuenta las siguientes actividades, las cuales permitieron una secuencia de reflexión, análisis de las condiciones iniciales, planteamientos de los pensamientos pertinentes para la búsqueda de la solución y relaciones entre la situación y los saberes previos de los estudiantes, de tal manera que se construyó una base teórica para resolver con ellos. Se aclaró que las actividades orientan un mecanismo de solución, pero existen otras alternativas. Así, se logró reconocer las oportunidades que ofrece el uso de la calculadora científica CASIO Classwiz fx-991LA CW<sup>1</sup>

<sup>1</sup> La propuesta se desarrolló con la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA X y el recurso CASIO EDU+. Sin embargo, se ha actualizado el capítulo con el modelo de calculadora más reciente de CASIO, la Classwiz fx-991LA CW; además, se incluyó el uso de ClassPad.net en lugar de CASIO EDU+, ya que

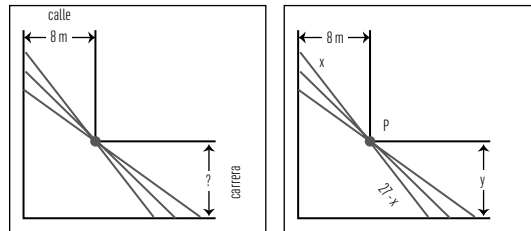


 Con esta información responde: ¿Qué ancho debe tener la carrera para que el tractocamión pueda doblar la esquina en un solo intento? (No tener en cuenta el ancho del tractocamión).

- a. Completa la gráfica con las condiciones iniciales:  $P$ , punto de “apoyo” en el que el tractocamión dobla de la calle a la carrera,  $y$  el ancho mínimo de la carrera para hacer un giro “ $x$ ” o “ $27 - x$ ”, la variable del largo del tractocamión más la carga en la calle y carrera.

Es necesario orientar al estudiante para que la gráfica sea la misma para todos y la información quede ubicada de manera concreta.

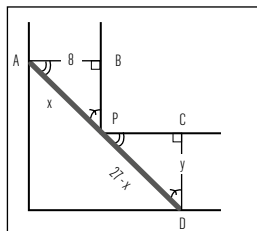
Figura 2. Gráficas del proceso.



Fuente: kjpargeter - freepik.

- b. Considerando la posición del tractocamión en el momento de doblar en  $P$ , se forman dos triángulos rectángulos. Añade a la gráfica los puntos  $A$  y  $B$  como los extremos del segmento del ancho de la calle (8 metros), y  $C$  y  $D$  los extremos del segmento  $y$ .

Figura 3. Gráficas del proceso.

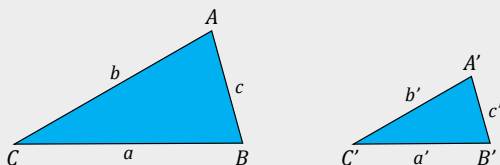


Fuente: kjpargeter - freepik.

El docente debe reorientar la construcción de la gráfica para que todas las indicaciones se ubiquen correctamente. Además, debe hacer alusión a los criterios de semejanza de los triángulos y se añadan los ángulos de igual medida.

- c. Los triángulos  $ABP$  y  $PCD$  son semejantes por tener los ángulos respectivos congruentes. Establece las relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.



$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{B'A'} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Además, por el criterio de semejanza ángulo y ángulo, es suficiente verificar que dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente a dos ángulos de otro triángulo.

Fuente: Adaptado de: [www.aegeometria.com](http://www.aegeometria.com)

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PC}|} = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|}$$

- d. Escoge solo las dos razones que relacionen las variables  $x$  y  $y$  a través de las condiciones iniciales y el teorema de Pitágoras.

$$\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|}$$

$$|\overline{BP}| = \sqrt{x^2 - 64} \quad |\overline{CD}| = y \quad |\overline{AP}| = x \quad |\overline{PD}| = 27 - x$$

El propósito es orientar a los estudiantes para que deduzcan estas relaciones a través de la gráfica de los triángulos rectángulos que se presentan en el problema.



- e. Reemplaza en las razones para que toda la expresión quede en términos de  $x$  y  $y$ . Despeja a la  $y$ .

$$\frac{\sqrt{x^2 - 64}}{y} = \frac{x}{27 - x}$$

$$y = \frac{(27 - x)\sqrt{x^2 - 64}}{x}$$

La expresión, de esta forma, puede ser analizada como una función.

- f. Halla el dominio de la función obtenida.

Las variables que se analizan son longitudes, por lo tanto, sus valores son positivos:  $y > 0$  y  $x > 0$ .

$$\text{Así, } \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x} > 0$$

Como  $x > 0$ ,  $(27 - x)\sqrt{x^2 - 64} > 0$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} (27 - x) > 0 & \quad x < 27 \\ \sqrt{x^2 - 64} > 0 & \quad x^2 - 64 > 0 \\ x < -8 \text{ o } x > 8, & \quad x > 8 \end{aligned}$$

Se concluye que el dominio es la intersección entre  $x > 0$ ,  $x < 27$  y  $x > 8$ , es decir,  $(8, 27)$  es el dominio de la función y que corresponde a los valores positivos.

Para precisar el valor del ancho de la calle se realiza la siguiente actividad.

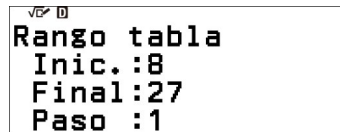
### Actividad 3

Con la anterior información, halla el máximo valor de  $y$  (ancho de la calle), para que el tractocamión pueda voltear en un sólo intento.

- a. Utiliza la calculadora científica CASIO Classwiz fx-991LA CW, opción **Tabla** para registrar algunos valores de una función específica.







En este caso se puede analizar la tabla con diferencias de una unidad en el valor de  $x$ . Se despliega la tabla con los siguientes valores:

$x$	$f(x)$
1	0
2	8,2462
3	10,2
4	10,981

8

$x$	$f(x)$
5	11,18
6	11,035
7	10,668
8	10,15

15

$x$	$f(x)$
9	9,5262
10	8,8235
11	8,0622
12	7,2562

19

$x$	$f(x)$
13	6,4156
14	5,5475
15	4,6577
16	3,7502

23

$x$	$f(x)$
17	2,8284
18	1,8948
19	0,9514
20	0

27

Donde el valor de  $x = 12$  arroja el mayor resultado en  $f(x) = y$ .

$x$	$f(x)$
3	10,2
4	10,981
5	11,18
6	11,035

12

d. Analiza el valor  $x = 12$  en el intervalo del rango y comprueba si se trata del valor máximo.

Se puede utilizar separando el dominio entre  $(8, 12)$  y  $(12, 27)$ .

e. Utiliza la calculadora para generar un QR, el cual te llevará a la plataforma ClassPad.net. Allí verás la gráfica de la función y podrás verificar el punto anterior.







Los estudiantes, desde meses previos, hicieron uso de la calculadora y es sorprendente lo fácil que es para ellos utilizar los comandos con indicaciones verbales de mi parte. Además, disfrutaban con la herramienta porque agiliza los procesos, en el caso, para completar una tabla. Una actividad alternativa del momento consistió en dar cuatro números dentro del rango a cuatro estudiantes para que llevaran a cabo la sustitución sin ayuda de la calculadora para comprobar los resultados; otros tres estudiantes recibieron como tarea verificar tres valores fuera del dominio. Se demostró la precisión en la tabla.

Por cuestiones de tiempo y planeación periódica la, **Actividad 4** no se llevó a cabo, razón por la cual aparece como sugerencia y estrategia alterna. El tiempo para la propuesta inicialmente fue de dos bloques de clase, es decir, dos encuentros de 110 minutos cada uno, pero no fueron suficientes para la realización de toda la situación.

Al finalizar la propuesta y hallar el valor propuesto como incógnita, los estudiantes demostraron desconcierto al descubrir que, a pesar de cumplirse la norma vigente respecto a los corredores viales, no es suficiente y se debería replantear el tránsito y uso de vehículos con carga que excede su tamaño, incluidas las horas pertinentes para tal función, a lo que su conclusión fue: *“profe, seguiremos llegando tarde”*.

## Reflexión pedagógica

El uso de calculadoras en las aulas no requiere convertirse en un modelo pedagógico, se constituye en un mecanismo de construcción de ambientes de aprendizaje con herramientas de apoyo para el desarrollo del pensamiento matemático. Dicho uso implica el diseño de estrategias que orienten el análisis, la reorganización de los saberes, el diseño y el despliegue de alternativas de solución para mejorar o sustituir un sistema de representación por otro.

Un estudiante que apoya sus procesos de pensamiento matemático en el uso de la calculadora científica tiene el potencial de adquirir métodos y estrategias alternativas de representación que permiten trabajar a un nivel de complejidad matemática que no alcanzaría de otra manera.

La propuesta didáctica permite la conexión de experiencias reales con saberes matemáticos por usar una combinación de toma y procesamiento de datos reales y la forma de organizarlos y representarlos gráficamente para ser interpretados con mayor precisión.







## Solución a la vuelta de la esquina

Luisa Fernanda Marín Ramírez

[luisa.marin@udea.edu.co](mailto:luisa.marin@udea.edu.co)

Institución Educativa El Corazón

Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

Grado	Pensamientos matemáticos relacionados	Estándares básicos de competencias relacionados:
Undécimo	Pensamiento espacial. Pensamiento variacional.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</li> <li>• Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.</li> <li>• Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.</li> </ul>
<b>DBA relacionados:</b>		<b>Evidencias de aprendizaje relacionadas:</b>
Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. DBA 3-V2. Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explica las respuestas y resultados en un problema con las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos.</li> <li>• Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.</li> </ul>
<b>Eje central:</b> Punto crítico, máximo de una función		
<b>Objetivo:</b> Hallar el valor del máximo de la función que permite el paso de un tractocamión de una calle a una carrera con las unidades reglamentarias.		
<b>Conocimientos previos:</b>	Semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, despeje de variables, función, dominio, punto crítico, máximo de una función, primera derivada	
<b>Recursos:</b>	La función, calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, Cuaderno, Datos reglamentarios de calles, carreras y tractocamiones.	

## Desarrollo de la situación de aprendizaje

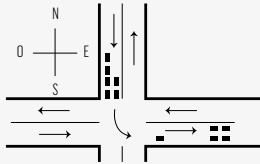
### Actividad 1

Lee la siguiente situación:

Durante las últimas semanas, una cantidad considerable de estudiantes de una institución educativa ha llegado tarde. Al indagar por las razones de tal fenómeno se halló la causa: cerca de la institución se lleva a cabo una obra de construcción de viviendas y en el momento en el que algunos trasportes escolares se desplazan por la vía, encuentran como obstáculo un tractocamión. El conductor debe maniobrar en repetidas ocasiones para realizar el cambio vial de calle, de 8 metros de ancho, a carrera, lo que, en ocasiones, le toma más de 10 minutos. La carrera parece no contar con el ancho suficiente para que el conductor logre pasar en un solo intento y carga unas vigas que superan el largo del auto en más de 9 metros. Además, es la única vía de acceso tanto para la obra como para la institución educativa.



## Actividad 2



El Departamento Administrativo de Planeación de la Alcaldía de Medellín (2007) regula que cada carril debe tener un mínimo de 7 metros para dos carriles.

Figura 1. Insumos para desarrollar la actividad.



Fuente: La autora.

Con la anterior información, responde:

- ▶ ¿Qué anchura debe tener la carrera para que el tractocamión pueda doblar la esquina en un solo intento? (No tener en cuenta el ancho del tractocamión).

---



---



---



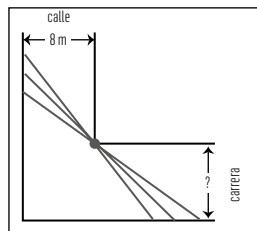
---



---

- Completa la gráfica con las condiciones iniciales:  $P$ , punto de "apoyo" en el que el tractocamión dobla de la calle a la carrera,  $y$  el ancho mínimo de la carrera para hacer un giro y  $x$  o  $27-x$  la variable del largo del tractocamión más la carga en la calle y carrera.

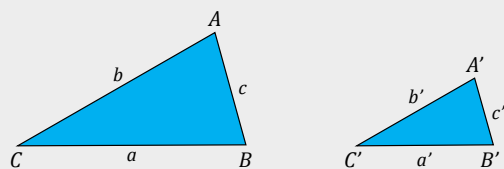
Figura 2. Gráficas del proceso.



Fuente: kjpargeter - freepik.

- b. Considera la posición del tractocamión en el momento de doblar en  $P$ , se forman dos triángulos rectángulos. Añade a la gráfica los puntos  $A$  y  $B$  como los extremos del segmento del ancho de la calle (8 metros), y  $C$  y  $D$  los extremos del segmento  $y$ .
- c. Los triángulos  $ABP$  y  $PCD$  son semejantes por tener los ángulos respectivamente congruentes. Establece las relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño



$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BA}{B'A'} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Además, por el criterio de semejanza ángulo y ángulo, es suficiente verificar que dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente a dos ángulos de otro triángulo. Adaptado de: [www.aegeometria.com](http://www.aegeometria.com)

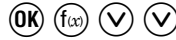
- d. Escoge solo las dos razones que relacionen las variables  $x$  y  $y$  a través de las condiciones iniciales y el teorema de Pitágoras.
- e. Reemplaza en las razones para que toda la expresión quede en términos de  $x$  y  $y$ . Despeja  $y$ . La expresión de esta forma puede ser analizada como una función.
- f. Halla el dominio de la función obtenida.

### Actividad 3

Con la anterior información, halle el máximo valor de  $y$  (ancho de la carrera) para que el tractocamión pueda voltear en un solo intento.

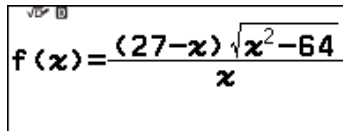
- a. Utilice la calculadora científica CASIO Classwiz fx-991LA CW, opción 9 para hacer la tabla con una función específica en el caso.





- b. Añade la función  $f(x) = \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x}$

Recurre al siguiente proceso en tu calculadora



- c. Introduce los valores del dominio de la función separados por una unidad.





- f. Sustituye el valor en la fórmula inicial.
- g. Concluye.



## Actividad 4

Existe otra estrategia para resolver la situación problema a través de la derivada de la función en el dominio.

- a. Halle la primera derivada de la función.
- b. Use el criterio de la primera derivada para hallar los valores críticos.

**Definición:** si  $f$  está definida en  $x = c$ , decimos que  $c$  es un valor crítico de  $f$  si  $f'(c) = 0$  o  $f'(c)$  no existe.

**Teorema:** si  $f$  está definida en un intervalo abierto que contenga a  $c$  y  $f$  tiene un extremo relativo en  $x = c$ , entonces  $f'(c) = 0$  o  $f'(c)$  no existe, es decir que  $x = c$  es un valor crítico

Analiza cómo se comporta la función en los puntos críticos dentro del dominio.

# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Alexander Castrillón-Yepes  
[alexander.cyepes@udea.edu.co](mailto:alexander.cyepes@udea.edu.co)

Mónica Marcela Parra-Zapata  
[monica.parra@udea.edu.co](mailto:monica.parra@udea.edu.co)

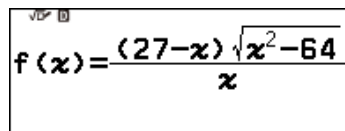
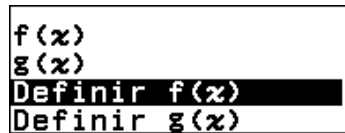
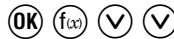
Este capítulo se ocupó de presentar una propuesta para el análisis de una situación que involucra dificultades para la movilidad y el desplazamiento de los estudiantes de una institución educativa. La situación consiste en determinar cálculos y desarrollar procedimientos matemáticos que permitan dar cuenta del ancho de una carrera para que un tractocamión de vuelta desde una calle. Aunque la propuesta se ha pensado para que los estudiantes den solución a la situación con el uso de la calculadora científica, como apoyo en sus cálculos y procedimientos, en este apartado presentamos momentos y aspectos de la propuesta que podrían ser ampliados, analizados y transferidos a otro tipo de tareas.

En primer lugar, previo a presentar la situación, los profesores pueden generar una discusión con relación a las experiencias de movilidad que han tenido los estudiantes al dirigirse a sus instituciones. Con ello se podrán reconocer dificultades, oportunidades y acciones que han tomado para desplazarse al dirigirse a sus instituciones educativas. Asimismo, el profesor podrá aprovechar esas experiencias para motivar el estudio matemático de situaciones de movilidad. En relación con el uso de la calculadora, se puede aprovechar la pregunta por el dominio de una función para explorar otras posibilidades de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW como las desigualdades y, en la *caja de matemáticas*, la opción de *recta numérica*, a partir de la cual se pueden reconocer, de manera gráfica, las intersecciones entre intervalos.



Entre la **actividad 2** y la **actividad 3**, podrían promoverse algunas ampliaciones. Por ejemplo, una de ellas en términos de las posibilidades y limitaciones del modelo propuesto para la situación, esto permitirá que los estudiantes reconozcan aspectos cruciales de los procesos de modelación que en ocasiones no son explícitos. En ocasiones las representaciones gráficas suelen generar confusión y los valores que se extraen de ella pueden estar alejados de los valores precisos, así que se puede aprovechar esto para promover otras situaciones; en este caso, se podría preguntar si realmente el máximo está en 12 o en 11.95 (o cualquier otro valor cercano). Por tanto, se podría utilizar la calculadora para generar una tabla entre los valores  $x = 11$  y con diferencia de 0.5, así:

En el modo *tabla* define la función



Selecciona **OK** y elige el rango desde  $x = 11$  hasta  $x = 13$  con un paso de 0.5

**OK** **1** **1** **EXE** **EXE** **1** **3** **EXE** **0** **,** **5** **EXE**

```

Rango tabla
Inic.:11
Final:13
Paso :0,5
    
```

**EXE**

Así, se obtienen los siguientes resultados

x	f(x)
11	10,981
11,5	11,134
12	11,18
12,5	11,141

**11**

x	f(x)
11,5	11,134
12	11,18
12,5	11,141
13	11,035

**11,5**

De manera similar, se puede acotar el intervalo para tener mayor certeza de que el valor máximo se encuentra en  $x = 12$ . En la actividad 4, el profesor puede proponer a los estudiantes el cálculo de la derivada con lápiz y papel, pero también podría usar la calculadora para verificar si la derivada de la función en  $x = 12$  realmente hace que  $y' = 0$ , para eso se puede hacer el siguiente procedimiento:

En el modo calcular define la función

**△**

**OK** **f(x)** **∇** **∇**

```

f(x)
g(x)
Definir f(x)
Definir g(x)
    
```

**OK** **≡** **(** **2** **7** **-** **x** **)** **√** **x** **²** **-** **6** **4** **∇** **x**

$$f(x) = \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x}$$

⊞ ⊞

Análisis Func ▾  
 Probabilidad ▾  
 Cálculo Numérico ▾  
 Áng/Coord/Sexag ▾

⊞

Derivada (d/dx)  
 Integración (∫)  
 Suma (Σ)  
 Resto

⊞

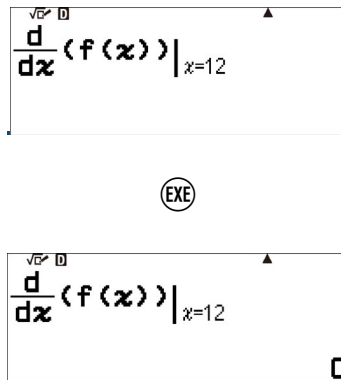
$$\frac{d}{dx} (\square) \Big|_{x=\square}$$

Luego calcula la derivada para la función y se evalúa ésta en el valor  $x = 12$

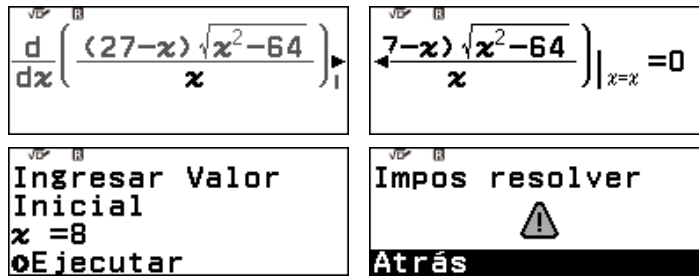
f(x)

f(x)  
 g(x)  
 Definir f(x)  
 Definir g(x)

⊞ (x) ) > 1 2 ⊞

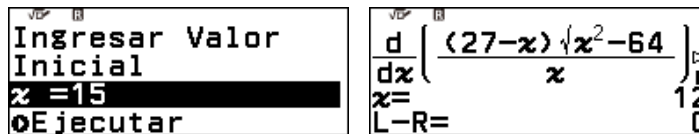


Se puede utilizar otra estrategia con el modo "Resolver" del modo "Ecuaciones", para determinar el valor de  $x = 12$  donde la primera derivada es cero.



Esto sucede porque el valor inicial 8, no permite que el algoritmo se aproxime al valor de la solución, la calculadora utiliza el método de *Newton-Raphson* para resolver numéricamente la ecuación y es necesario considerar sus limitaciones al momento de ingresar el valor para iniciar el algoritmo.

Cambiando el valor inicial a  $x = 15$



Vemos que la calculadora obtuvo la solución  $x = 12$  para que el valor de la derivada de la función sea cero.

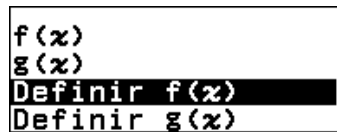
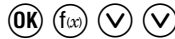
Finalmente, se proponen otras tareas que pueden promoverse a partir de la situación con el uso de la calculadora:

## Tarea 1

El modelo creado es  $f(x) = \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x}$ , considera que, en otra institución, que enfrenta la misma situación, crearon el siguiente modelo:  $g(x) = \frac{(25-x)\sqrt{x^2-49}}{x}$ . Construye el enunciado de la situación y responde: ¿esta carrera debe ser más o menos ancha que la anterior? Utiliza la calculadora para resolver el problema y explica la manera en que lo hiciste.

Emplea el método de *Tabla* para comparar ambas funciones en la calculadora, describe el comportamiento de cada función y compáralos. El procedimiento es:

Define ambas funciones en el modo *tabla*



$$f(x) = \frac{(27-x)\sqrt{x^2-64}}{x}$$

f(x)

f(x)  
g(x)  
Definir f(x)  
Definir g(x)

EXE

$$g(x) =$$

EXE   (  2  5  -  x  )  (    x    -  4  9   x

$$g(x) = \frac{(25-x)\sqrt{x^2-4}}{x}$$

Selecciona  OK y configura la tabla para que aparezca la columna de entrada de  $g(x)$  así:

OK

Rango tabla  
Def f(x)/g(x)   
Tipo de Tabla   
Editar

OK  OK

f(x)/g(x)  
 f(x)  
 g(x)

$\mathcal{X}$  (EXE) (■) (AC) ( $\times 10^{\square}$ ) ((■))  $\mathcal{X}$  (EXE) (■) (AC) ( $\times 10^{\square}$ ) ((■))

$\sqrt{\square}$ D	x	f(x)	g(x)
1			
2			
3			
4			

Por último, selecciona el rango de la tabla desde  $x = 7$ , hasta  $x = 27$  con un paso de 1

(OK) (7) (EXE) (2) (7) (EXE) (1) (EXE)

$\sqrt{\square}$ D
Rango tabla
Inic.:7
Final:27
Paso :1

(OK)

$\sqrt{\square}$ D	x	f(x)	g(x)
1	7	ERROR	0
2	8	8,23	8,23
3	9	8,2462	10,056
4	10	10,2	10,712

Una posible pregunta que se puede realizar es ¿cuál es el significado de las entradas que arrojan error? Esto permitirá indagar en el concepto de dominio y el rango, en caso de que el rango de la tabla se establezca con valores diferentes. También sería posible pedirles a los estudiantes definir el rango de la tabla.

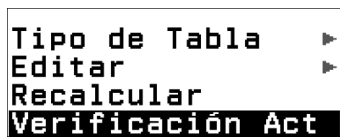
## Tarea 2

► Una posibilidad que ofrece la Calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW tiene que ver con la opción *Verificación*. Vamos a calcular algunos valores utilizando papel y lápiz, y vamos a verificarlo con apoyo de la calculadora. Para eso, lo primero que harás es determinar, en caso de que existan, los siguientes pares de valores:

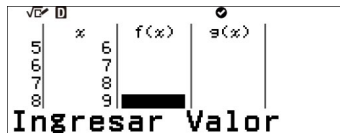
- $f(2), g(2)$
- $f(8), g(8)$
- $f(10), g(10)$
- $f(-10), g(-10)$
- $f(12), g(12)$

- ▶ Luego, deberás comparar cada pareja, indicando si el valor para  $f(x)$  es mayor, menor o igual que el valor de  $g(x)$  asociado.
- ▶ Finalmente, se compararán estos resultados con el apoyo de la calculadora. Se sugiere el siguiente procedimiento:

En el modo *Tabla*, luego de haber ingresado las funciones y seleccionado el rango de la tabla, activa el modo *verificar* así:



Selecciona | y a continuación aparecerán las columnas de la tabla vacías



Ingresa un valor para cada entrada y verifica si es verdadero o falso, por ejemplo:  $f(9) = 4$  es



**Nota:** El profesor puede emplear esta opción de muchas maneras, por ejemplo, la opción de *Verificación* se puede utilizar para corroborar valores en el modo *Calcular*, verificar ecuaciones y complejos. En ese sentido, el profesor puede sugerir otras situaciones en correspondencia con los propósitos de clase.







DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:
<p>DBA asociado # 10.</p> <p>Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.</li> <li>• Construye diagramas de caja y, a partir de los resultados representados en ellos, describe y compara la distribución de un conjunto de datos.</li> <li>• Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.</li> <li>• Elabora conclusiones para responder el problema planteado.</li> </ul>
<p><b>Eje central:</b> Variables aleatorias y distribuciones</p>	
<p><b>Objetivo:</b> Posibilitar la construcción de objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa San José Obrero, basados en las situaciones didácticas cotidianas que se puedan resolver matemáticamente.</p>	
<p><b>Conocimientos previos:</b> Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.</p>	

## Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

<b>Tiempo de duración:</b>	Dos semanas de clase. Ocho horas.
<b>Recursos:</b>	Datos, monedas, tabla para escribir los datos, proyector, computador con el emulador de la calculadora, red Wifi, Las calculadoras CASIO Classwiz fx-991LA CW.

## Juegos de dados<sup>1</sup>

Esta es una propuesta que integra la probabilidad y la estadística y parte de situaciones típicas en el estudio de la probabilidad con tecnología de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, se hacen las tablas de distribución de frecuencia y los gráficos que permiten tomar decisiones respecto al juego que se propone.

Se espera que pueda ser enriquecida con las experiencias y contextos educativos de los docentes que la usen, quienes pueden acudir a otros elementos como monedas, tomados o múltiples combinaciones.

<sup>1</sup> La situación propuesta fue tomada de manera literal de Godino et al. (2004).



Así pues, calcula las frecuencias relativas para obtener 5 y 3 en el dado. Completa todas las columnas de la tabla.

**Tabla 1.** Registro de lanzamientos.

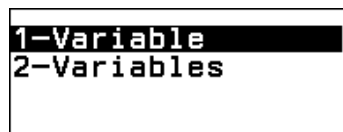
Resultado	Veces que sale el número al tirar el dado.	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Número esperado de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

Fuente: Zweigmedia (2018).

- En la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.
- Usa el modo Estadística.



- 1-Variable.





Si queremos medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1, al cual llamamos probabilidad. Asignamos una probabilidad de 0 a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un nueve. Asignamos un 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento, por ejemplo, que salga un número entero positivo menor que 7. A cualquier otro suceso distinto del imposible de probabilidad 0 y del seguro de probabilidad 1 se le asigna un número entre 0 y 1 (Zweigmedia, 2018).

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera cuando lanzamos un dado?

- ▶ La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6.
- ▶ La probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3.
- ▶ La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6.
- ▶ La probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3.
- ▶ La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un  $1/2$ .
- ▶ La probabilidad de obtener un 1 es menor que la de obtener un  $1/2$ .

## Lanzamiento de dados

### Variables aleatorias

Definir una variable aleatoria en un experimento aleatorio consiste en asociar un valor numérico con cada suceso elemental del experimento. Interesa fundamentalmente asignar probabilidades a dichos valores numéricos. En ocasiones, los sucesos elementales de un experimento aleatorio son números. En esta situación esos números coinciden con el valor de una variable aleatoria. A continuación, presento ejemplos y definiciones extraídos de Zweigmedia (2018).

### Ejemplos

- a. **Tira un dado:** el número en la cara superior. Valores de (1, 2, 3, 4, 5, 6).
- b. **Elige un futbolista:** el número de goles marcados por el futbolista durante la temporada. Valores de 0, 1, 2, 3, 4...
- c. **Lanza una moneda tres veces:** el número de veces que salen caras. Valores de 0, 1, 2, 3.





Figura 2. Lanzamiento de dados.



Fuente: Google imágenes.

Tabla 3. Combinaciones posibles al tirar un par de dados.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

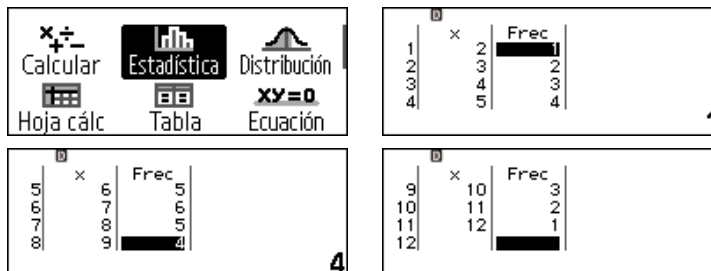
Tabla 4. Suma de las caras superiores.

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Se puede utilizar la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW para mostrar la distribución de la suma de los valores obtenidos al lanzar los dos dados y apoyarse también en ClassPad.net.

### Modo estadística

Ingresamos los valores de la variable y su frecuencia respectiva en la calculadora.





Estas respuestas son para el conocimiento de los profesores, el objetivo es que sean realizadas por los estudiantes y discutidas en clase.

Cada vez que se tiran los dos dados se obtiene una suma, esto es un evento. Calculemos la probabilidad de estos eventos:

$$P(\text{sacar } 2) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{sacar } 3) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(\text{sacar } 4) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{sacar } 5) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{sacar } 6) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{sacar } 7) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{sacar } 8) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{sacar } 9) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{sacar } 10) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{sacar } 11) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(\text{sacar } 12) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{36}$$



d. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias relativas.

x	Frec
1	2
2	3
3	4
4	4

e. Con SHIFT  $\uparrow$  + QR  $\otimes$ .

f. Usa el celular con el App CASIO ClassPad.net para visualizar el histograma correspondiente.

Tira los dados 50 veces y usa la tabla para escribir cuándo sale cada suma.

Puedes dibujar una raya oblicua cada vez que salga una suma en la columna Veces que sale una suma al tirar los dados.

**Tabla 6.** Registro de procedimientos.

Resultado	Veces que sale una suma al tirar los dados	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total		50	1









**Figura 3. Resultados Siempre Día E 2018.**

PRUEBAS SABER GRADO NOVENO									
Aprendizajes de la competencia comunicación Matemáticas									
Aprendizajes de la competencia comunicación aprendizajes.	Porcentajes de respuestas incorrectas				Diferencia con Colombia				Gráficos
	2014	2015	2016	2017	2014	2015	2016	2017	
Reconocer relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos y analizar la pertinencia de la representación (aleatorio).	31,0	39,6	41,1	62,6	4,0	-2,6	5,1	-6,1	
Comparar, usar e interpretar datos de situaciones reales y traducir entre diferentes representaciones de un conjunto de datos. (aleatorio).	56,2	56,2	55,2		3,5	4,6	2,3		
Reconocer la posibilidad o la imposibilidad de ocurrencia de un evento a partir de una información dada de un fenómeno (aleatorio)	60,4		56,7		17,5		-5,6		

Fuente: ICFES (2018).

La experiencia se desarrolló con el grupo 9A de la sede San José de la Institución Educativa San José Obrero, jóvenes entre 13 y 16 años que pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, y que viven en la Vereda San José o en las urbanizaciones que recientemente se han construido en el Corregimiento de San Antonio de Prado. Es un grupo trabajador y receptivo. Realizar experiencias de este tipo en clase es un reto, hay pocos recursos dispo-



ayuda a desarrollar habilidades cognitivas y matemáticas que serán fundamentales en su educación superior y en su vida profesional. Es necesario seguir explorando formas innovadoras de enseñar matemáticas que aprovechen al máximo las ventajas que nos ofrecen las tecnologías actuales.

## Bibliografía

- De Zubiría, J. (6 de noviembre de 2014). *¿Cómo mejorar la educación en Colombia?* Las2Orillas. <https://www.las2orillas.co/como-mejorar-la-educacion-en-colombia/>
- Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, M. (1991). *Azar y Probabilidad*. Síntesis.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.
- ICFES. (2018). *Resultados Siempre Día E-2018*. Institución Educativa San José Obrero. Medellín.
- Lipschutz, S. (1972). *Matemáticas Finitas*. Seri Compendios Schaum.
- Waner, S. y Costenoble, S. (16 de abril de 2019). *Matemáticas finitas y cálculo aplicado: ¡todo!* <https://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=combo&lang=es&ed=7>
- Zweigmedia. (2018). *Teaching Better Math* (versión mayo de 2018) [software]. Zweigmia. [www.zweigmedia.com](http://www.zweigmedia.com)



Pre Ans

Ans

7

5

2

,

$\times 10^{\square}$

0

$x$

sen

8

6

3

$\times 10^{\square}$

FORMAT

EXE

$\frac{\square}{\square}$

cos

9

4

+

$\frac{\square}{\square}$

EXE

EXE

$\sqrt{\square}$

tan

0

$\times$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

EXE

EXE

$\sqrt{\square}$

INS

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

CATALOG

TOOLS

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

log

$\frac{\square}{\square}$

ln

$\frac{\square}{\square}$

(

)

OFF

AC

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$

$\frac{\square}{\square}$



Grado:	Pensamientos matemáticos relacionados:	Estándares básicos de competencias relacionados:
Noveno	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Seleccione y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).</li> <li>• Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas y selecciono información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (Prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).</li> <li>• Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.</li> <li>• Calculo probabilidad de eventos simples con diversos métodos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).</li> <li>• Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc).</li> </ul>
DBA relacionados:	Evidencias de aprendizaje relacionadas:	
DBA asociado # 10.  Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.</li> <li>• Construye diagramas de caja y, a partir de los resultados representados en ellos, describe y compara la distribución de un conjunto de datos.</li> <li>• Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.</li> <li>• Elabora conclusiones para responder el problema planteado.</li> </ul>	
<b>Eje central:</b> Variables aleatorias y distribuciones		
<b>Objetivo:</b> Posibilitar la construcción de objetos mentales relacionados con Probabilidad y Estadística en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa San José Obrero, basados en las situaciones didácticas cotidianas que se puedan resolver matemáticamente.		
<b>Conocimientos previos:</b>	Operaciones básicas con fraccionarios, manejo de tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, probabilidad y conectores lógicos y lingüísticos.	







Completa todas las columnas de la tabla.

**Tabla 1.** Registro de lanzamientos.

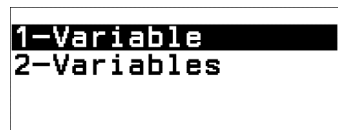
Resultado	Veces que sale el número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Número de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total	Absoluta		1	24

Fuente: MEN, 2018.

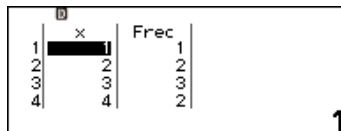
- En la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.
- Usa el Modo Estadística.



- 1-Variable.



- En la columna x se entran los valores que puede caer el dado (1, 2, 3, 4, 5, 6).







- *Variable aleatoria finita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar solo un número finito de valores (como el resultado de un tiro de un dado)
  - *Variable aleatoria infinita discreta.* Las variables aleatorias discretas que pueden tomar un número efectivamente ilimitado de valores (como el número de pasos en un procedimiento) son variables aleatorias infinitas discretas.
- **Variable aleatoria continua:** puede tomar cualquier valor dentro de un rango continuo o un intervalo, como la temperatura en Medellín o la altura exacta en metros de un compañero.

## Ejemplos

**Tabla 2.** Tipos de variables y ejemplos.

Variable aleatoria	Valores	Tipo
Tirar un dado. El número de la cara superior	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Finita. Solo hay seis valores posibles.
Elige un futbolista. El número de goles marcados por el jugador durante la temporada.	0, 1, 2, 3, 4, ...	Infinita discreta. No hay un límite máximo establecido para el número de goles.
Peso de tu montón de ropa sucia. El peso exacto en kg	Todos los números reales no negativos	Continua. El peso puede ser cualquier número no negativo en un rango continuo.

Fuente: Zweigmedia (2018).

La probabilidad simple se define como la división entre el número de casos favorables entre el número de casos posibles y debe estar entre cero y uno.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables ( que cumplen)}}{\text{Número de casos posibles ( todos los del espacio muestral)}}$$

## Lanzamiento de dos dados

Analicemos ahora el lanzamiento de un par de dados

Figura 2. Lanzamiento de dados.



Fuente: Google imágenes.

Tabla 3. Combinaciones posibles al tirar un par de dados.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabla 4. Suma de las caras superiores.


2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12



### Preguntas

- ▶ ¿Cuántos resultados posibles hay? (Espacio muestral del lanzamiento de dos dados)
- ▶ ¿Cuántos suman par?
- ▶ ¿Cuántos suman impar?
- ▶ ¿Cuántos suman siete?
- ▶ ¿Por qué creen que las caras contrarias de un dado suman siete?
- ▶ ¿Cuántas sumas son números primos?
- ▶ ¿Cuántas sumas son números múltiplos de tres?
- ▶ ¿Cuántas sumas son números múltiplos de cinco?

Tabla 5. Registro de la probabilidad.

	Suma de las caras superiores <sup>3</sup>	Probabilidad
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
	11	
	12	
	13	

Fuente: el autor.

Usa la calculadora para pasar de fracción a número decimal tomando cuatro cifras después de la coma, para cada suceso

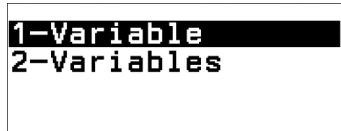
- a. En la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.

Usa el menú *Estadística*.

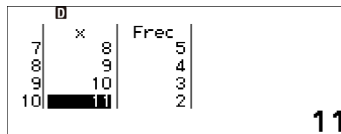


- 3 La suma de las caras superiores del dado convencional no podría dar 1 o 13, se espera que el profesor discuta este asunto con sus estudiantes y que allí se hable de los sucesos imposibles y cómo se expresan numéricamente.

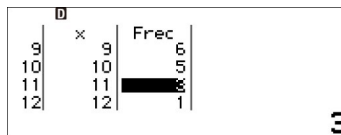
b. 1: Variable.



c. En la columna x se ingresan los valores que puedes obtener al lanzar dos dados y sumar sus resultados (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).



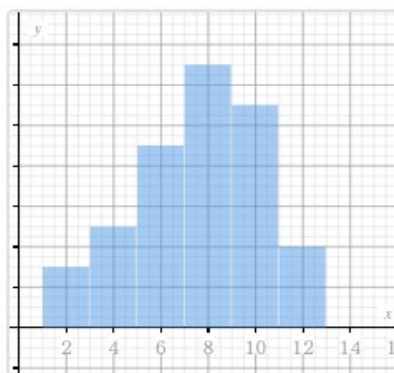
d. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias absolutas.



e. Para generar un código QR, presionar SHIFT q + QR [.



f. Usa el celular para leer el código QR y visualizar el histograma correspondiente.



Ahora realizaremos un experimento lanzando los dados 50 veces y usa la siguiente tabla para anotar cuando sale cada suma. Puedes colocar una raya oblicua cada vez que salga una suma en la columna Veces que sale una suma al tirar los dados.

**Tabla 6.** Registro de resultados.

Resultado	Veces que sale una suma al tirar los dados	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total	50		1

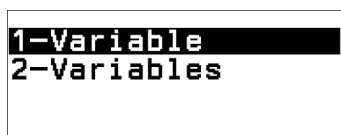
Fuente: el autor.

Ahora ingresaremos los datos en nuestra calculadora

- En la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW.
- Usa el menú Estadística.



- 1- Variable.





- d. En la columna x se ingresan los valores que puede la suma de los dos dados (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

x	Frec
7	6
8	6
9	4
10	2

8

- e. En las columnas de frecuencia las correspondientes frecuencias absolutas.

x	Frec
7	6
8	6
9	4
10	2

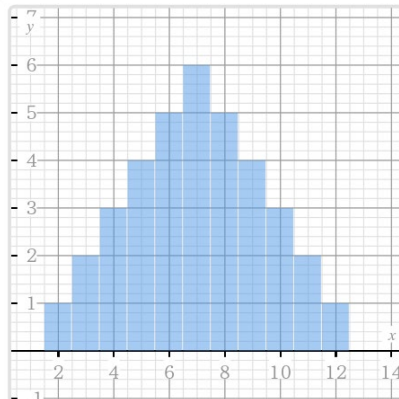
6

- f. Con SHIFT  $\uparrow$  + QR  $\otimes$ .



1/1

- g. Usa el celular para escanear el código QR.  
h. Mira en el celular el diagrama de barras de la distribución de frecuencias.



- i. Con la función Clase se pueden integrar todos los resultados de los diferentes equipos para observar el comportamiento de la distribución con una cantidad mayor de datos.



# Posibilidades de ampliación con la calculadora Classwiz fx-991LA CW

Mónica Marcela Parra-Zapata  
monica.parra@udea.edu.co

Alexander Castrillón-Yepes  
alexander.cyepes@udea.edu.co

En este trabajo se propuso una actividad para estudiantes de grado noveno para contribuir a la construcción de los objetos mentales relacionados con probabilidad y estadística. A continuación, planteamos posibilidades frente al uso de la calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, los contenidos matemáticos y la dinamización del ambiente.

En cuanto a la gestión del ambiente, proponemos recurrir al trabajo en grupo, así como promover actividades que se centran en la experimentación repetida de situaciones aleatorias con la calculadora. De tal manera, que permitan que se acuerden procedimientos, se pongan en contexto estadístico los cálculos aritméticos, se favorezca la interpretación de situaciones y se permita que los propios estudiantes construyan y enuncien propiedades.

En la actividad se propone el cálculo de probabilidad y de medidas estadísticas a partir del lanzamiento de un dado de seis caras, asunto que es habitual. Una posibilidad de ampliación estaría en usar dados con cuatro, ocho, diez, doce, o más caras y así extrapolar las comprensiones. A continuación, presentamos una tarea, ejemplo de trabajo con un dado de doce caras, en donde se vinculan elementos de la geometría y la estadística.



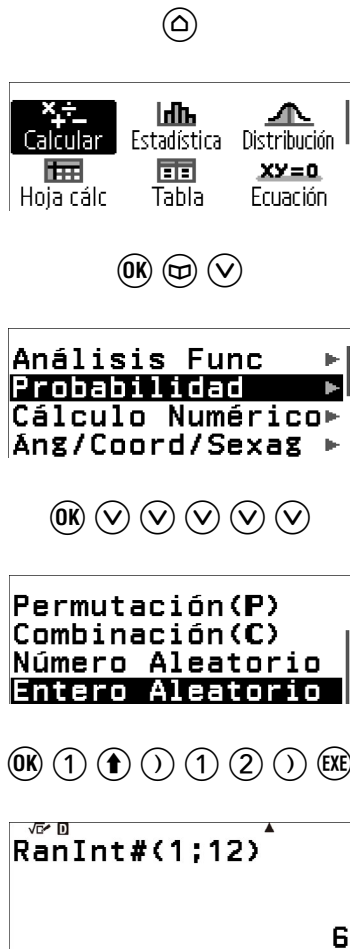
## Tarea 1

Construir en la clase dos dados dodecaedros por estudiante. Para esto puedes usar una plantilla o realizar construcción con regla y compás. En los siguientes QR se proporcionan posibilidades para esto.



Esta parte de la actividad puede realizarse también sin necesidad de tener que utilizar dados dodecaédricos ya que la calculadora dispone de la función *entero aleatorio*, la cual genera un número aleatoriamente entre un valor inicial y un valor final especificado.

Para simular el lanzamiento de un dado de 12 caras con la función *entero aleatorio* se accionan las siguientes teclas en el *Modo Calcular*.

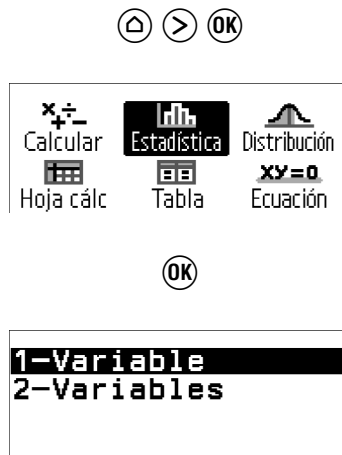


Luego se pueden realizar discusiones alrededor de lo que es la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. Posteriormente, se pedirá representar, con apoyo de la calculadora, el diagrama de barras de las frecuencias absolutas y el de las frecuencias relativas. Por ejemplo, para el caso en el que la tabla anterior se complete así:

Número obtenido	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	4	0.08
2	2	0.04
3	6	0.12
4	4	0.08
5	7	0.14
6	2	0.04
7	9	0.18
8	2	0.04
9	5	0.08
10	2	0.04
11	4	0.08
12	4	0.08
<b>Total</b>	<b>50</b>	<b>1</b>

**Nota:** La actividad que se propone es experimental, por lo que los resultados que se obtengan serán propios de cada grupo de estudiantes.

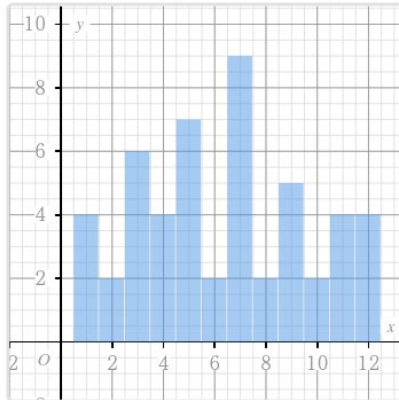
Para obtener la gráfica de la frecuencia absoluta se realizan en el *Modo Estadística* las siguientes acciones:



Se selecciona **OK** y se introducen los datos

x	Frec
5	2
6	9
7	2
8	2

Se genera el QR **↑** **x**



De manera análoga se genera el gráfico para la frecuencia relativa

Calcular	Estadística	Distribución
Hoja cálcul	Tabla	Ecuación

**OK**

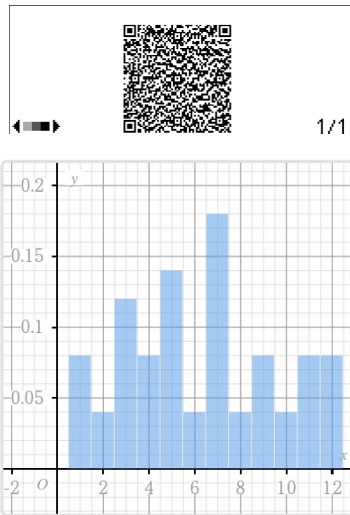
**1-Variable**  
**2-Variables**

Se selecciona **OK** y se introducen los datos

x	Frec
7	0,08
8	0,04
9	0,08
10	0,04

0,08

Se genera el QR  



Posteriormente, se pueden recuperar y agrupar en una sola tabla los resultados de todos los experimentos realizados por el grupo y elaborar, así, los diagramas de frecuencia absoluta y relativa para el grupo en total.



Luego podrán comentarse las diferencias y semejanzas entre los dos diagramas. Podrían hacerse preguntas y acciones como: ¿cuál es la media de las puntuaciones que se obtienen en cada grupo?, compara la media que has obtenido con la de tus compañeros, calcula la media de todas las medias, ¿qué resultado se obtiene?, ¿qué relación existe entre las dos medias obtenidas?, ¿crees que eso pasa siempre? Ahora, pon en común todos los datos con tu grupo.

Para realizar el cálculo de la media de todos los datos, es necesario introducir en la calculadora las frecuencias agrupadas de todos los estudiantes.



# Sobre autoras y autores



**Mónica Marcela Parra-Zapata** es candidata a Doctora en Educación, Magíster en Educación-Línea Educación Matemática y Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. La profesora ejerce su profesión hace 14 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas de la Secretaría de Educación de Medellín, en la Institución Educativa Mariscal Robledo. Es también profesora de cátedra de la Facultad de Educación de la Universidad de

Antioquia, allí orienta cursos en pregrado y maestría. Es asesora académica de Statur para el proyecto Gakuhan CASIO Colombia. Es integrante del grupo de investigación MATHEMA-FIEM y miembro fundadora de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM), miembro y vocal por Sudamérica del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME y de Juventud Clame. Ha participado en diferentes proyectos de investigación y docencia con la Universidad de Antioquia, la Secretaría de Educación de Medellín y el Ministerio de Educación Nacional. Es coautora de los Derechos Básicos de Aprendizaje y las Mallas de Aprendizaje para el área de matemáticas y de otras producciones académicas. Sus intereses en la educación son en particular la docencia a partir del trabajo por proyectos y la investigación en Educación Matemática, especialmente la modelación matemática, la Educación Matemática en las infancias y el aprendizaje basado en proyectos. Ha realizado publicaciones académicas en revistas, libros y eventos nacionales e internacionales. Su información académica está disponible en: [http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod\\_rh=0001349413](http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001349413)



**César Lau** es economista, realizó sus estudios doctorales en la universidad Nacional Mayor de San Marcos en Lima, en la especialidad de Economía de Gestión Global, es director de la división académica de CASIO en América Latina y lidera procesos de formación de docentes de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas de países de América Latina, en congresos internacionales de Educación Matemática, organizaciones educativas de ámbito nacional o internacional, tiene 26 años de experiencia como educador matemático.



**Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo** es Magíster en Educación y Licenciada en educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. La profesora ejerce su profesión hace 14 años, en la actualidad es docente de Matemáticas en los grados décimo y undécimo de la Institución Educativa San Antonio de Prado. Ha sido profesora en colegios públicos y privados de la ciudad de Medellín y del departamento de Antioquia y hace parte del grupo de Investigación MATHEMA-FIEM de

la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Sus intereses en la educación y en investigación son la Educación Matemática y la Modelación Matemática en Educación Primaria.



**Maria Leonor Vélez Aramburo** es odontóloga de profesión, ha dedicado parte de su vida profesional al desarrollo del sector educativo. Persiguiendo su pasión, desde hace varios años ha trabajado como líder del proyecto GAKUHAN, de apoyo a la enseñanza de las matemáticas con tecnología CASIO en Colombia. Durante este tiempo, ha hecho contribuciones en el desarrollo de este, a la cabeza de colaboraciones con secretarías de educación e instituciones educativas públicas y privadas. De su labor profesional se destaca el haber organizado talleres de formación y eventos académicos para un significativo número de maestros de matemáticas en Colombia; entre otras, colaboraciones con la Universidad de La Sabana, Secretaría de Educación de Medellín y la Universidad de Antioquia.



**John Alexander Alba Vásquez** es Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia, Magíster en Pedagogía de la Universidad de La Sabana. Líder de Diseño Curricular y Trayectoria Educativa de la Universidad de La Sabana, miembro del Consejo de la World Association of Lesson Studies (WALS), investigador vinculado a los grupos "Educación y Educadores" y "Pedagogía de los saberes y disciplinas", profesor del seminario de Teoría de la Evaluación en las Maestría en Pedagogía y de Evaluación del aprendizaje de la Maestría en Educación Médica de la misma Universidad. Por varios años fue el director de la Maestría en Pedagogía de la Universidad de La Sabana, docente de los seminarios de investigación, Enseñabilidad de la Matemática y Estrategias Didácticas para el Desarrollo del Pensamiento Matemático de la maestría en Pedagogía. Cuenta con una amplia experiencia como docente de pregrado, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de La Sabana, en las áreas de Matemáticas, Química y Operaciones Unitarias; docente de la Escuela Internacional de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de La Sabana, en las áreas de matemáticas y cálculo aplicado; a nivel de educación secundaria, jefe del departamento y docente de matemáticas.



**Alexánder Castrillón-Yepes** es Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia y Candidato a Doctor en Educación en la línea de Educación Matemática de la misma universidad. Actualmente, es profesor en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Señor de los Milagros y profesor de cátedra en la Universidad de Antioquia. Ha participado en diversos eventos académicos nacionales e internacionales y ha publicado trabajos relacionados con sus líneas de interés, que incluyen el uso de las tecnologías, la modela-

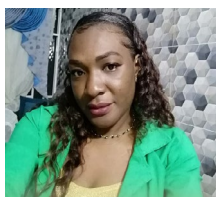
ción, el trabajo interdisciplinario y la formación de profesores de matemáticas. Además, ha promovido y participado en la estrategia de Semilleros de Investigación en la Universidad de Antioquia, donde coordinó la Red de Semilleros de Investigación (Red-SIN U. de A.) durante los períodos 2018-2019 y 2019-2020. También fue coordinador del Semillero de Investigación MATHEMA. Forma parte de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM), es integrante de Juventud CLAME y del grupo de investigación MATHEMA-FIEM. Su información académica está disponible en: [https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod\\_rh=0001632433](https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001632433)



**Jhony Alexander Villa-Ochoa** es Licenciado en Matemáticas y Física, Magíster y Doctor en Educación-Línea Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. Es profesor titular de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, allí orienta cursos en Pre-grado, Maestría y Doctorado. En la actualidad es el editor de la Revista Uni-pluriversidad de la Universidad de Antioquia. Ha participado en diferentes proyectos de investigación y docencia con la Universidad de Antioquia, la Secretaría de Educación de Medellín y el Ministerio de Educación Nacional, así como en proyectos internacionales. Es integrante del grupo de investigación MATHEMA-FIEM, y miembro fundador de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (RECOMEM). Sus intereses en la investigación son la modelación matemática, el uso de las tecnologías y la formación de profesores. Ha realizado publicaciones académicas en revistas, libros y eventos nacionales e internacionales. Su información académica está disponible en: [http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod\\_rh=0000186473](http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0000186473)

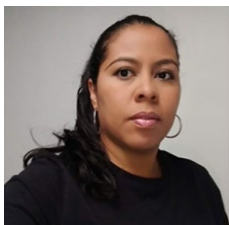


**Edwin Enrique Correa Carmona** es Ingeniero Químico de la Universidad de Antioquia, Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El profesor ejerce su profesión hace once años, en la actualidad es docente de matemáticas en los grados noveno, décimo y once de la Institución Educativa Mater Dei. Como docente se ha interesado en el uso de las herramientas tecnológicas en el aula, tratando de explotar al máximo el vínculo estudiante–tecnología. Sus intereses en la educación y en la investigación son mejorar la percepción de los estudiantes hacia las matemáticas y las ciencias exactas, haciendo un uso adecuado de las herramientas tecnológicas.



**Lorena Mena Mena** es licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica del Chocó “Diego Luis Córdoba”, Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Colombia. La profesora ejerce su profesión hace 21 años, en la actualidad es docente del área de física y matemáticas en la Institución Educa-

tiva Villa Flora. Como docente investigadora busca que el estudiante construya su conocimiento, basada en la teoría de Ausubel con el aprendizaje significativo, relacionando el conocimiento previo con el nuevo conocimiento, porque sabemos que los conocimientos se relacionan de forma sistemática. Ser docente le permite desarrollar las habilidades de los estudiantes en las competencias básicas, científicas y laborales, y le permite aprender cada día más de sus estudiantes, lo cual la lleva a diseñar propuestas metodológicas acorde a las necesidades que ellos presentan.



**Paula Andrea Barrientos Tascón** es Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Magíster en La Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. La profesora ejerce su profesión hace 14 años, en la actualidad es docente del área de Matemáticas y Física en los grados 10° y 11° de la Institución Educativa San Pablo. Los 5 años de Formación inicial le permitieron manejar conceptos de las asignaturas que debe presentar

a sus estudiantes, pero 12 años en el aula la han motivado a repensarse como docente y cada que encuentra dificultades conceptuales y procedimentales en sus estudiantes, busca estrategias para ayudarlos a alcanzar las competencias básicas de aprendizaje. El uso adecuado de la calculadora (ClassWizz) dentro del aula le permitió avanzar en la enseñanza de conceptos y procedimientos que en ocasiones son tediosos para los estudiantes. Su interés en la educación es encontrar una estrategia eficaz para nivelar a los estudiantes que lleguen en cualquier momento a su aula, sin importar las condiciones particulares de cada uno de ellos y de acuerdo con los documentos rectores del país. Durante los últimos 6 años se ha dedicado a enseñar estrategias a jóvenes de grado 11° para abordar las Pruebas Saber y sus ingresos a las universidades públicas, además a desarrollar preguntas por competencias en el área de matemáticas y capacitar a otros docentes en la elaboración y abordaje en la evaluación por competencias.



**Jeyson Emilio Palacio Vásquez** es Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional, Sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 13 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas en la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo. Es un docente interesado por despertar el talento y el interés de los estudiantes por el amor al conocimiento e infundirles que el estudio es la base para cambiar su vida y transformar su futuro; también se interesa en aprender y aplicar pedagogía práctica que le permita a sus estudiantes interesarse por adquirir conocimiento. Entendiendo que la

educación es el eje transformador de una nación, le interesa ser parte de esta transformación apoyando a los estudiantes en la investigación y profundización de los conocimientos.



**Jorge León Echeverri Echeverri** es Ingeniero de Sistemas de la Universidad de Antioquia, Especialista en Gerencia Integral del Politécnico Jaime Isaza Cadavid. Es profesor hace 22 años en diversas instituciones educativas públicas y privadas, en la actualidad es docente de Media Técnica en Sistemas en los grados décimo y undécimo en la Institución Educativa Félix Henao Botero. Una vez terminó su formación inicial y en vínculo con la docencia (hace cinco años) se dedicó a compartir sus experiencias y conocimientos con los estudiantes de su actual institución educativa. Lo más importante es poder orientar a los jóvenes, no solo en

los conocimientos técnicos y de las diferentes asignaturas en las que imparte, sino acompañarlos a afianzar sus principios y valores como seres humanos cada vez mejores.



**Johan Andrey Salazar Piedrahita** es Licenciado en matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Magíster en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 14 años, en la actualidad es docente en los grados décimos y en el programa especial Pensar 1, 2 y 3 de la institución Educativa la Independencia. Ha trabajado en proyectos de investigación que buscan potenciar la vinculación de las herramientas tecnológicas en los procesos educativos con la universidad EAFIT y el Centro de innovación y Desarrollo (CID) de Envigado, además, adelanta

un proceso investigativo en la institución donde labora articulando diferentes asignaturas con enfoque STEM y pensamiento computacional. Sus intereses en la educación y en investigación son buscar nuevas estrategias enfocadas a metodologías activas que potencien el aprendizaje en los estudiantes y mejoren las prácticas de aula, al igual que fortalecer la investigación escolar como eje de los procesos institucionales.



**Javier Orlando Marín Sánchez** es Tecnólogo Químico de la Universidad de Antioquia, Ingeniero en Alimentos de la Corporación Universitaria Lasallista, Abogado de la Universidad de Antioquia, Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El profesor ejerce su profesión hace 15 años y medio, en la actualidad es docente de Matemáticas en los grados décimo y once de la Institución Educativa San Juan Bosco, ubicada en el barrio Campo Valdés. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y física, constantemente se capacita en diferentes actividades que aportan a su

formación como maestro, con la finalidad de integrar estos conocimientos a las clases. Sus intereses en la educación y en la investigación se han enfocado en generar un pensamiento crítico con relación a la diferencia, desde el estudio de las ciencias exactas como un entre-

namiento para la mente, concatenado con la parte social, en pro de que seamos mejores personas como fin primordial y de esta manera poder llegar a ser grandes profesionales, para quienes así lo deseen.



**Luisa Fernanda Marín Ramírez** es licenciada en matemáticas y física y Magíster en Educación de la Universidad de Antioquia. La profesora ejerce su profesión hace 20 años, en la actualidad cursa el Doctorado en Educación en la UPB, con la propuesta doctoral titulada: "Desarrollo de competencias matemáticas, una perspectiva desde las competencias socioemocionales" y es docente de matemáticas en los grados séptimo y noveno de la Institución educativa El Corazón. Trabaja como docente desde el año 2004 en el área de matemáticas en los grupos de secundaria y en algunas oportunidades

en el área de física. Su interés en la educación y en investigación consiste en potenciar en los estudiantes, a través de los saberes matemáticos y los recursos tecnológicos, el reconocimiento y liderazgo de la realidad que se les presenta en permanente transformación. Realizó su trabajo de investigación en la maestría acerca de las competencias digitales de los estudiantes de secundaria cuando se reconocen como ciudadanos digitales en el aula, el cual se tituló "Perspectiva de la ciudadanía digital, una experiencia desde el aula".



**Edgar Daniel Sánchez Londoño** es Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Magíster en La Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. El profesor ejerce su profesión hace 18 años, en la actualidad es docente del área de matemáticas, ciencias naturales y física en los grados sexto, octavo, décimo y once en la Institución Educativa San José Obrero. Allí orienta un Proyecto experimental tendiente a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mecánica newtoniana en la escuela primaria. Participó en el III Congreso

Nacional de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología -EDUCYT- Universidad de Nariño en el año 2012. Sus intereses en la educación y en la investigación son la enseñanza de las ciencias para niños y niñas, y la preparación de los estudiantes para pruebas externas y de selección universitaria, los proyectos educativos ambientales PRAE articulados al P.E.I. mediante ejes temáticos. Publicó un artículo de divulgación para la revista TEXTOS de la Universidad Pontificia Bolivariana para la formación inicial de maestros.

# Sobre la organización y la estructuración



**Alexánder Álvarez Colorado** es Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, miembro del semillero de investigación MATHEMA-FIEM, adscrito al grupo de investigación que lleva el mismo nombre. Ha participado en diferentes proyectos de investigación y eventos académicos locales e internacionales como ponente. Sus intereses académicos abarcan la interdisciplinariedad, el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y los desarrollos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.



**Karen Melisa Ospina Berrío** es estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física de la Universidad de Antioquia. Ha participado como ponente en diferentes proyectos de investigación y eventos académicos locales e internacionales. Es pasante de investigación en el proyecto Diseño de estrategias para la contextualización y flexibilización curricular a partir de la gestión del conocimiento territorial con el grupo MATHEMA-FIEM. Miembro del semillero de investigación MATHEMA. Sus intereses en la investigación son la modelación matemática, la interdisciplinariedad y el trabajo por proyectos.



**Ángela María Quiceno Restrepo** es Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas y Magíster en Educación de la Universidad de Antioquia. Pertenece al grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad de la universidad de Antioquia. Ha Sido docente de niños de los grados primero hasta quinto como docente de matemáticas, con experiencias en el trabajo por proyectos de manera significativa. Ha sido docente de adolescentes de séptimo a noveno de secundaria. Trabajó con el Ministerio de Educación Nacional como tutora del programa todos a aprender. Actualmente es profesora de Cátedra de la Universidad de Antioquia.



**María Camila Patiño Henao** es Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, y estudiante del programa de maestría en Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil y Primaria en la Universidad Unir. Actualmente es profesora de matemáticas en los grados segundo y tercero de primaria del Colegio La Salle – Bello. En su trabajo de grado, abordó y analizó posturas críticas de estudiantes de secundaria, generadas a partir de un ambiente de Modelación Matemática. Sus principales intereses tanto en la formación como en la investigación se enfocan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Además, ha participado activamente en espacios de formación en investigación, como en los semilleros de investigación, y en el grupo de investigación MATHEMA-FIEM.



Esta obra se publicó en versión digital  
en el mes de febrero de 2025.





*Hacia el desarrollo del pensamiento matemático con calculadora. Propuestas y experiencias segunda edición*, presenta las reflexiones de maestras y maestros de la Secretaría de Educación de Medellín en relación con su experiencia y situaciones didácticas con calculadora, las cuales se han presentado dentro del Proyecto CODI 2020-34799 del grupo de investigación Mathema-FIEM de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y Grupo Statur con el proyecto Gakuhan de CASIO Calculadoras, durante los años 2021 y 2022, en diferentes instituciones educativas de la ciudad de Medellín.

El proyecto Gakuhan de CASIO Calculadoras es una iniciativa de CASIO Japón, liderada en Colombia por Grupo Statur que, en convenio con la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propuso una estrategia de formación de maestras y maestros con el objetivo de invitar a la reflexión, principalmente, acerca de la relevancia que cobra el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de las y los estudiantes y las múltiples maneras en las que se pueden diseñar y potenciar varias situaciones didácticas en el aula, como la modelación matemática o STEM+H y que están mediadas con esta tecnología.

Esta segunda edición incluye un proceso de actualización al nuevo modelo de calculadora CASIO Classwiz fx-991LA CW, un desarrollo más amplio en cada una de las guías docentes y de estudiantes, y nuevas tareas como posibilidades de ampliación con el nuevo modelo de calculadora.