UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Procesos de Matematización que Emergen de los Estudiantes en la Solución de Tareas Matemáticas en Contextos Realistas

Dennis Lorena Monsalve-López

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación

Asesora
Lucía Zapata-Cardona, Doctor (PhD) en Educación Matemática

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación
Medellín, Antioquia, Colombia
2022

Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Monsalve-López, D. (2022). *Procesos de Matematización que Emergen de los Estudiantes en la Solución de Tareas Matemáticas en Contextos Realistas,* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

creative commons BY NC SA

Maestría en Educación, Cohorte XIX

Grupo de Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas GECEM

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Vicerrectoría de Docencia

Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano/Director: Wilson Bolívar Buriticá

Jefe departamento: Ruth Elena Quiroz Posada

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Dedicatoria

A Dios, a mi familia, a mi maestra, a mis estudiantes.

.

Agradecimientos

Dios todopoderoso gracias por ser mi fortaleza durante este proceso de formación académica y poner en mi camino cada ser maravilloso.

A mi familia por creer en mí, por su amor, su paciencia y su apoyo incondicional. Gracias por ser mi principal motivación para nunca desistir en este sueño.

A la doctora Lucía Zapata Cardona, mi querida maestra, por ser mi bendición en este proceso. Le agradezco su compromiso, su paciencia y sus orientaciones. Gracias por ayudarme en este sueño y mejorar mis herramientas como docente.

A mis compañeros y profesores de la línea de formación en Educación Matemática quienes, con sus desafiantes observaciones, comentarios y reacciones ayudaron a ampliar mi campo de visión.

A la Magíster Ingrith Yadira Álvarez Alfonso, Doctor Diego Alejandro Pérez Galeano y a la Doctora Luz Adriana Cadavid Muñoz evaluadores de la propuesta, quienes con sus aportes me ayudaron a enriquecer el trabajo investigativo tanto en los aspectos teóricos como metodológicos.

A los participantes de la investigación, a mis estudiantes, por su disposición, su tiempo, apertura para trabajar y aprender juntos. Gracias por sus valiosos aportes sin los cuales no hubiese sido posible llevar a cabo esta investigación.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo analizar procesos de matematización que emergen de los estudiantes en la solución de tareas matemáticas en contextos realistas. En coherencia con el objetivo se buscó resolver la pregunta de investigación: ¿qué procesos de matematización emergen de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas en contextos realistas? Para responder a la pregunta formulada se adoptó un paradigma de investigación cualitativo con un enfoque hermenéutico. Los participantes de la investigación fueron diez estudiantes voluntarios que cursaban octavo y noveno grado del sistema escolar colombiano. Las principales fuentes de información provienen de entrevistas, basadas en cuatro tareas matemáticas en contextos realistas, que fueron grabadas en video y luego transcritas para facilitar el análisis. Los análisis se centraron en la actividad matemática que tuvo lugar cuando los participantes se enfrentaron a la solución de las tareas matemáticas. Los hallazgos revelan que las tareas matemáticas en contextos realistas estimularon en los estudiantes procesos de matematización como: conteo, tanteo, establecimiento de conexiones, identificación de patrones o reglas de formación, realización de representaciones pictóricas y numéricas, búsqueda de atajos, identificación de estructuras numéricas y espaciales, argumentación, identificación y clasificación de información relevante, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización. También se evidenció que las tareas posibilitaron diferentes rutas para la formalización y revelaron la importancia del contexto realista como recurso para validar resultados.

Palabras clave: tareas matemáticas, contextos realistas, procesos de matematización, actividad matemática

Abstract

The present research aimed to analyze the mathematization processes that emerged from students in solving mathematical tasks in realistic contexts. The research question to be answered was: what mathematization processes do emerge from students when they solve mathematical tasks in realistic contexts? To achieve the proposed goal and answer the research question, a qualitative research paradigm and a hermeneutic approach were adopted. The research participants were ten volunteer students in eighth and ninth grade from the Colombian school system. The main sources of information came from interviews, based on four realistic mathematical tasks, which were videotaped and then transcribed to facilitate analysis. The analyzes focused on the mathematical activity that took place when the participants faced the resolution of the mathematical tasks. The findings reveal that mathematical tasks in realistic contexts stimulated students' mathematization processes such as: counting, testing, establishment of connections, identification of patterns or rules of formation, realization of pictorial and numerical representations, search for shortcuts, identification of numerical and spatial structures, argumentation, identification and classification of relevant information, generalization, identification of functional relationships , correspondence, covariation and formalization. It is also highlighted that the tasks enabled different routes for formalization and revealed the importance of the realistic context as a resource to validate results.

Keywords: mathematical tasks, realistic contexts, mathematization processes, mathematical activity

Introducción

Este reporte da cuenta de una investigación en el campo de la educación, bajo el cual se estudiaron procesos de matematización de los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de tareas matemáticas en contextos realistas. La investigación se presenta en este documento como capítulos. El primer capítulo, da cuenta de los argumentos que dieron origen al problema, así como de la pregunta, el objetivo de la investigación y la justificación. En el segundo capítulo se presenta el marco teórico que describe los fundamentos teóricos en el marco de la Educación Matemática Realista. Allí se exponen los referentes teóricos de la Educación Matemática Realista y la matematización.

El tercer capítulo da cuenta de la ruta metodológica seguida para llevar a cabo el estudio, la cual se enmarcó en un paradigma de investigación cualitativo y en un enfoque hermenéutico. Allí se presentan las tareas matemáticas en contextos realistas como estrategia metodológica que estimula los procesos de matematización. Se presentan los participantes de la investigación, los aspectos éticos, el trabajo de campo, los instrumentos para la producción de registros y datos y una breve descripción del proceso de análisis. En el cuarto capítulo se exponen los hallazgos y las conclusiones de la investigación, en términos de la Educación Matemática Realista, los procesos de matematización, y la importancia del contexto.

Planteamiento del problema

La actividad matemática, entendida como el conjunto de acciones (planificación, ejecución, uso de instrumentos) que una persona emprende para la solución de tareas matemáticas ha ganado interés en los últimos años en el campo de la educación matemática y en especial en la Educación Matemática Realista (Gravemeijer et al., 2016). La Educación Matemática Realista es una corriente didáctica que nace como resistencia al carácter mecánico que reinaba en las matemáticas escolares en los países bajos en la segunda mitad del siglo pasado. Esta corriente promueve la matemática como actividad humana para todos (Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) y les otorga a los estudiantes un papel activo y protagónico mientras los pone en actividad matemática para que accedan a conocimientos, objetos y habilidades dentro de situaciones problemáticas en contextos realistas que generen la necesidad del uso de herramientas matemáticas para su organización y solución. Esa actividad matemática se conoce como *matematizar* y uno de los propósitos de esta corriente es precisamente que el estudiante avance en sus procesos de matematización. Es decir, concretizar la acción de solución de tareas matemáticas mediada por los recursos culturales disponibles como instrumentos, discursos, conceptos y objetos. No obstante, aunque la Educación Matemática Realista ha venido madurando en los últimos 30 años, aun se cuenta con una descripción muy limitada de esos procesos que los estudiantes activan cuando emprenden la solución a una tarea matemática.

Las tareas matemáticas hacen referencia a los enunciados, problemas o actividades prácticas que se usan como herramientas de instrucción (Zapata-Cardona, 2014). Tradicionalmente, en la matemática escolar se emplean tareas que se caracterizan por: poseer la información necesaria para resolverlas; obtener la solución al aplicar una o más operaciones aritméticas; tener sentido; ignorar el contexto; usar en la solución todas cantidades dadas y tener una solución única (Jiménez & Verschaffel, 2014; Orrantia et al., 2005). Sin embargo, este tipo de tareas no siempre logran hacer evidente en los estudiantes la actividad matemática que ponen en juego en la solución de tareas que les permitan sopesar información, clasificarla y establecer posibles incoherencias (Gravemeijer, 2020; Reusser & Stebler, 1997). Así, mucha de esta actividad matemática queda oculta a los ojos del docente o investigador.

Algunas investigaciones (Jiménez & Ramos, 2011; Jiménez & Verschaffel, 2014; Orrantia et al., 2005) sugieren que los estudiantes al resolver tareas descontextualizadas y procedimentales se fijan en palabras claves; se guían por las cantidades del enunciado para definir la operación a usar; son influenciados por la operación más reciente enseñada en el aula; o ejecutan la operación con la que se sienten más confiados. En ese sentido, las tareas descontextualizadas y que privilegian los procedimientos no permiten evidenciar procesos de matematización como identificar y clasificar información relevante, sopesar incoherencias, hacer esquemas, encontrar nuevos caminos o atajos, usar bocetos, explicar, establecer vínculos con la realidad o analizar tendencias. Es posible que la forma como se presentan las tareas matemáticas, con o sin contextos, tenga una relación directa con las oportunidades de los estudiantes para matematizar y poner en acción los recursos culturales disponibles como conceptos, instrumentos, discursos, objetos y conocimientos.

La matematización es la actividad de organizar una situación matemática en un contexto realista con el fin de encontrarle solución (Gravemeijer et al., 2016). Las herramientas matemáticas pueden ser: “la representación de la situación problemática, la esquematización, la suma reiterada, la aplicación del conocimiento de los hechos numéricos, la forma de hacer el seguimiento de los resultados y la comunicación de las estrategias”[1](Heuvel-Panhuizen, 2002, p. 17). No obstante, es usual que las tareas a las que se enfrentan los estudiantes en su vida escolar carezcan de contexto y respondan a unas matemáticas procedimentales (Alvis-Puentes et al., 2019), que ocultan las herramientas matemáticas usadas y sus procesos de matematización.

La estimulación de los procesos de matematización requiere una visión de las matemáticas que supere el fuerte privilegio que se le ha dado a los procedimientos y algoritmos en situaciones descontextualizadas. Los contextos realistas no necesariamente hacen referencia a situaciones que tienen un vínculo con el mundo real sino a aquellas que pueden ser imaginables, visualizables, recreables o representables en la mente del estudiante ante las cuales se pone en juego el sentido común y se vinculan las matemáticas (Zolkower et al., 2020). Los contextos no solo se presentan verbalmente, sino también a partir de figuras, dibujos, fotografías, diagramas y otras visualizaciones.

El estudiante basado en los contextos realistas hace uso de las habilidades y conocimientos matemáticos informales e intuitivos para darle solución a una tarea. Los procesos de

[1] Both the constitution of mathematical tools (the representation of the problem situation, the schematization, the repeated addition, the application of number fact knowledge, the way of keeping track of the results, and the communicating about the strategies)

matematización, es decir, de reorganización de la realidad con las matemáticas (Freudenthal, 2006), emergen cuando los estudiantes hacen uso de sus habilidades, nociones y procedimientos intuitivos de manera activa en los contextos realistas.

Pregunta y Objetivo de Investigación

Teniendo en cuenta los diferentes aspectos problemáticos que fueron expuestos en los párrafos anteriores, se propone como pregunta de investigación: ¿qué procesos de matematización emergen de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas en contextos realistas? Dicha pregunta está orientada por el objetivo: analizar procesos de matematización que emergen de estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas en contextos realistas.

Justificación

La presente investigación cobra relevancia al permitir estudiar en profundidad procesos de matematización que emergen de los participantes en la solución de tareas en contextos realistas. Desde el punto de vista metodológico, el diseño propuesto en este estudio favorece el papel activo y protagónico de cada participante en ambientes diferentes al aula. Además, el uso de tareas matemáticas en contextos realistas para la producción de la información es una oportunidad de estimular la actividad matemática que emerge de los participantes en el contexto; posibilitando una visión de las matemáticas que permite ir más allá del uso de algoritmos y procedimientos sin una conexión real.

Asimismo, visibilizar procesos de matematización que emergen de los participantes cuando resuelven tareas en contextos realistas puede servir de insumo para que los docentes de matemáticas anticipen las respuestas de sus estudiantes y los orienten en su actividad matemática. En términos prácticos, hacer evidente los procesos de matematización podría ser una herramienta para ayudar a los docentes a reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas y a comprender los variados recursos y estrategias que ponen en juego los estudiantes para llegar a la formalización matemática. Cuanta más información se adquiera sobre los procesos de matematización de los estudiantes, más oportunidades se pueden crear para estimular el trabajo matemático en niveles más elevados (Cai et al., 2017). Estudiar a profundidad los procesos de matematización puede ofrecer oportunidades de investigación didáctica que contribuyan a enriquecer el trabajo en el aula.

En términos teóricos, esta investigación se justifica como una oportunidad para aportar al conocimiento académico sobre las formas de matematización de los estudiantes. También es una posibilidad para avanzar en el campo de la educación matemática en la misma línea de diversas investigaciones que se han enfocado en reflexionar sobre el papel de las tareas con contextos y en los procesos de matematización (Alsina, 2016; da Ponte & Brocardo, 2020; Dekker, 2020; Heuvel-Panhuizen, 2002; Vos, 2020; Wijers & de Haan, 2020).

Marco teórico

Educación Matemática Realista

Hans Freudenthal fue uno de los promotores de la Educación Matemática Realista en los países bajos a partir de los años 60 del siglo XX. En este proyecto se vincularon varios investigadores conectados con el Instituto para el Desarrollo de la Educación de la Matemática de la Universidad de Utrecht en Holanda, denominado actualmente instituto Freudenthal (Heuvel-Panhuizen, 2020). La Educación Matemática Realista se ha caracterizado por: el uso de problemas contextuales, modelos como estrategia para el progreso, las producciones y construcciones propias de los estudiantes, la interacción en el proceso de aprendizaje que propicia la reflexión y la interconexión entre los ejes del currículo (Zapata-Cardona, 2020). El progreso hace referencia a la capacidad de avanzar de cada estudiante en sus procesos de matematización, pasando de unos muy intuitivos a otros cada vez más elaborados. "El progreso implica que los estudiantes lleguen a soluciones más generales a partir de soluciones relacionadas con el contexto[2]"(Heuvel-Panhuizen, 2002, p. 11).

Hans Freudenthal consideraba que la matemática era una actividad humana para todos y no para unos cuantos. La matemática al ser una actividad humana no se transmite a los estudiantes, el estudiante es un participante activo que descubre sus propias estrategias mediante la guía del docente (Sumirattana et al., 2017). También el hacer matemático, o matematización, tiene su punto de partida en los contextos realistas (Gravemeijer & Doorman, 1999) dentro de los cuales los estudiantes construyen sus propias estrategias y conceptos matemáticos.

La palabra realista en holandés "zichs realiseren" hace referencia a imaginar. Una situación es realista "si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada" (Zolkower et al., 2006, p. 13). La esencia de las tareas realistas está en que tenga significado para los estudiantes, sean imaginables y recreables. Además, en la Educación Matemática Realista "hacer matemáticas no solo se centra en la solución final, sino también en

[2] Progress implies that students arrive at more general solutions from context-related solutions

cómo se lleva a cabo el proceso, como: buscar los patrones y la relación, las pruebas de conjeturas y la estimación de resultados"[3] (Sitorus & Masrayati, 2016, p. 119).

Matematización

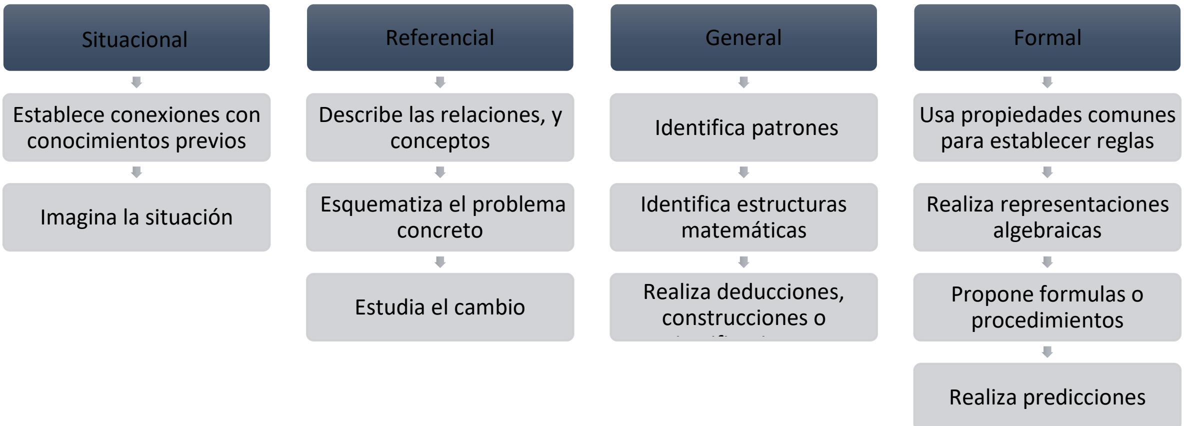
La matematización puede surgir de actividades de exploración intuitivas en tareas matemáticas que brindan a los estudiantes la oportunidad de modelar, estructurar, representar problemas y soluciones (Dekker, 2020; Gutiérrez A. et al., 2017; Jupri et al., 2014; Ramos, 2005; Wijers & de Haan, 2020). Freudenthal (2006) define matematizar dentro de la corriente didáctica de la Educación Matemática Realista, como una actividad humana en la que se usan herramientas matemáticas estructurantes y organizadoras para comprender el mundo incluida la matemática misma. De acuerdo con esta postura, los procesos de matematización son toda actividad matemática empleada para la comprensión, organización o estructuración de los contextos. La actividad matemática son todas las acciones del pensamiento que los individuos ponen en juego para darle respuesta a un problema matemático. Gravemeijer (2020) y Zapata-Cardona (2020) indican que la matematización es actividad matemática. Así, matematizar está relacionada con la actividad de organización matemática, que puede ser resultado de una experiencia intuitiva expresada en un lenguaje cotidiano y puede derivar en una expresión matemática.

La Educación Matemática Realista promueve la matematización progresiva extraída de la realidad (Gravemeijer & Doorman, 1999). La matematización es progresiva al hacer uso de herramientas matemáticas en diferentes niveles de evolución. Las herramientas matemáticas se emplean en la situación contextual y permiten visibilizar procesos de matematización. Algunas herramientas matemáticas son las representaciones y las descripciones (Freudenthal, 2002; Alagia et al., 2005). Los niveles de matematización que pueden emerger en la solución de las tareas son: situacional, referencial, general o formal (Alagia et al., 2005; Freudenthal, 2006). Algunos de los procesos de matematización que pueden aparecer de acuerdo con los niveles de matematización se ilustran en la Figura 1.

[3] Doing mathematics does not only focus on the end solution but also how the process takes place, such as: search the patterns and rapport, conjecture testing as well as result estimation.

Figura 1

Niveles de matematización



Nota. Elaboración de los niveles de matematización de acuerdo con Gravemeijer (2020), Gravemeijer y Doorman (1999). Cada nivel de matematización está asociado con ciertas acciones características.

El nivel situacional es el nivel en que el estudiante en contextos realistas imagina la situación del contexto realista y establece conexiones con conocimientos previos y la creatividad (Trelles-Zambrano et al., 2019). El estudiante realiza procesos de matematización que corresponden al nivel referencial cuando toma conciencia del objeto matemático que se está presentando en el contexto realista, puede describir las relaciones y conceptos que esquematizan el problema concreto y empieza a estudiar el cambio.

El nivel de matematización general tiene lugar cuando el estudiante produce esquemas, identifica patrones, estructuras matemáticas, realiza deducciones, construcciones o justificaciones que le ayudan a poner a prueba lo razonado. El nivel de matematización formal se da cuando el estudiante usa propiedades comunes para establecer reglas, realizar representaciones algebraicas, proponer fórmulas, procedimientos o realizar predicciones. Los procesos de matematización ayudan tanto a traducir un problema de un contexto realista al mundo matemático y a su vez ofrece la oportunidad de visibilizar las matemáticas que se usan al organizar y resolver tareas realistas (Gravemeijer, 2020).

Interacción

La interacción es uno de los principios en la Educación Matemática Realista, al ser considerada la matemática como una actividad social (Freudenthal, 2006). La interacción es un intercambio de conocimientos y estrategias entre los estudiantes, los estudiantes en grupo con el docente o el docente y el estudiante. La interacción es una condición que propicia que los estudiantes bajo la guía del docente reinventen objetos, modelos, operaciones y estrategias matemáticas con sus pares y el docente (Zolkower et al., 2006). La reflexión es un punto central para progresar en los procesos de matematización y ésta es posible mediante la interacción (Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Las preguntas juegan un papel primordial en los tipos de interrogantes que promueven la interacción del docente con los estudiantes. Según Gravemeijer (2020) las normas socio-matemáticas pueden limitar las formas esperadas de actuar y explicar en un aula determinada.

Metodología

Para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿qué procesos de matematización emergen en los estudiantes al resolver tareas matemáticas en contextos realistas? se siguió un paradigma cualitativo con enfoque hermenéutico. Este paradigma es pertinente por la naturaleza cualitativa del objeto de estudio y los procesos de matematización. El enfoque hermenéutico, que busca comprender e interpretar los fenómenos para rastrear su desarrollo, permitió estudiar los procesos de matematización de los participantes a partir de la técnica de análisis de su discurso (Creswell, 2014).

El enfoque de investigación hermenéutico fue pertinente porque permitió explorar, describir y comprender la actividad matemática que los participantes de la investigación emprendieron cuando se enfrentaron a la solución de tareas matemáticas en contextos realistas. Para Sánchez Gamboa, (1998) en el enfoque hermenéutico, la interpretación se da mediante la indagación, con el fin de aclarar los aspectos ocultos que se esconden detrás de los fenómenos revelando los significados que no se dan inmediatamente. La investigación hermenéutica permitió estudiar la actividad matemática oculta en las declaraciones verbales y en las acciones de los participantes.

Se analizó la actividad matemática de los participantes a partir de las verbalizaciones o producciones escritas que emergieron cuando solucionaban las tareas matemáticas en contextos realistas. Para lo cual, se planteó como técnica de producción de información la entrevista semiestructurada basada en tareas matemáticas en contextos realistas como herramientas de producción de información. La actividad matemática de los estudiantes participantes al resolver tareas realistas se constituyó en la unidad de análisis de la investigación. La actividad matemática de los estudiantes se estudió a partir de lo que ellos decían o hacían cuando resolvían las tareas matemáticas en contextos realistas, con especial atención en los momentos en los que buscaban atajos, cambiaban de estrategias, elaboraban de modelos, clasificaban, organizaban, entre otros.

Participantes en la Investigación

Los participantes se seleccionaron teniendo como criterio fundamental la edad, la disponibilidad y los recursos tecnológicos. Una de las principales limitantes que existía en ese momento en el trabajo de campo era la pandemia del COVID-19. Durante ese periodo, la presencialidad se vio limitada por riesgo de contagio y muchos procesos tuvieron que llevarse a cabo de manera virtual. Para invitar a los participantes se realizó una convocatoria abierta y se envió un poster a través de WhatsApp a grupos escolares (Anexo A) y a conocidos de la investigadora que cumplían con la edad, la disponibilidad y el acceso tecnológico.

Los participantes fueron diez estudiantes que cursaban octavo y noveno grado en el sistema escolar colombiano que para el momento en que se llevó a cabo el trabajo de campo, tenían entre los 13 y 15 años. Los participantes recibieron la información sobre la investigación antes de decidir participar libremente y fueron autorizados por sus acudientes después de llevar a cabo todo el proceso de consentimiento informado (Anexo B). De los diez participantes de la investigación, en el análisis sólo aparecen siete debido a que solo se presenta el episodio que mejor representa la actividad matemática que se observó. Esta decisión se tomó con el ánimo de evitar redundancias. Los episodios son fragmentos de las entrevistas semiestructuradas en los que los participantes, resolviendo las tareas matemáticas en contextos realistas, reflejaban procesos de matematización.

Las entrevistas se llevaron a cabo de forma individual, lo que favoreció que las acciones de los participantes fueran auténticas y no estuvieran condicionadas por las de otros agentes. Para proteger la integridad y la privacidad de los participantes de acuerdo con las normas de investigación con seres humanos en Colombia, los nombres que aparecen en este reporte son seudónimos. La información de cada participante se sintetiza en la Tabla 1.

Tabla 1

Información de los participantes

Seudónimo	Edad	Grado
Juan	13	8
Keiner	13	9
Hanna	14	9
Augusto	15	9
Luis	13	9
Carlos	15	8

Vanessa	14	9
Pablo	15	8
Brayan	15	9
Ana	13	8

Nota. La tabla contiene información de los participantes como el seudónimo, la edad al momento de realizar el trabajo de campo y el grado escolar que cursaban.

Los participantes realizaron operaciones mentales que se podían deducir parcialmente por lo que hacían en el papel o por sus argumentos; sin embargo, durante todas las entrevistas fue fundamental que la investigadora indagara más y propiciara la reflexión mediante preguntas como: ¿de qué manera lo hiciste?, ¿cómo llegaste a esa conclusión?, ¿de qué otra manera lo realizarías?, ¿puedes explicarme eso?, ¿cómo verificarías esa respuesta? También se tenían protocolo específico a cada tarea que incrementaba la dificultad en las acciones matemáticas. El proceso de interacción exigió precaución de la investigadora para tratar de develar lo que el participante hacía sin influir su pensamiento mediante pistas, ni descalificativos de su actividad matemática. En todo momento se trató al participante como el experto en el tema.

Producción de la Información

El trabajo de campo se llevó a cabo durante los meses de marzo y abril del año 2021. Se hicieron entrevistas semiestructuradas basadas en cuatro tareas matemáticas en contextos realistas. Las entrevistas semiestructuradas se basan en un protocolo de preguntas mediante la cual el entrevistador tiene flexibilidad para avanzar de acuerdo con las respuestas del participante (Hernández et al., 2014). La entrevista tuvo una duración aproximada de treinta minutos por participante.

En la investigación cualitativa el investigador tiene un papel fundamental en la producción de información de los participantes (Creswell, 2014). Según Kool, (2020) el rol del investigador incluye estimular a los participantes a que se unan activamente en la solución de problemas mediante preguntas que inviten a la reflexión, además de crear una atmósfera donde los participantes se sientan seguros. Los participantes fueron entrevistados de forma individual en un ambiente fuera de la escuela.

Se les presentó de forma oral el enunciado de la tarea y se apoyó con representaciones visuales. Se les pidió que iniciaran la solución de la tarea y que fueran narrando en voz alta lo que iban pensando y las decisiones que iban tomando. Las entrevistas se realizaron en modalidad presencial o virtual de acuerdo con la disponibilidad de los participantes. Las entrevistas fueron video grabadas, se transcribieron para facilitar el análisis y se eligieron episodios críticos que hacían evidente los procesos de matematización.

A cada participante se le dotó (o se le solicitó) de hojas de papel en blanco y lápices y este material se dispuso en caso de que los necesitaran para hacer alguna representación, esquema o cálculo. Al final se hicieron preguntas de comprobación si se estimaba que era necesario. Las preguntas se emplearon como estrategias para hacer evidente el pensamiento de los participantes al resolver la tarea. Para Zapata-Cardona, (2012) el aprendizaje y el conocimiento que desarrolla el estudiante se puede potenciar dependiendo de la forma como se pregunte. Se formularon preguntas que indagaban el *cómo* o el *por qué* para rastrear la actividad matemática. Para Vos (2020) las preguntas están destinadas a hacer que el estudiante realice actividad matemática. También, se estimularon preguntas como: ¿Por qué funciona esto? ¿Cómo lo hiciste? ¿Siempre funciona? ¿Puedes explicarlo de otra manera? La actividad matemática de los estudiantes se observó en los enunciados verbales del discurso y en algunas representaciones en la producción escrita.

Tareas Matemáticas en Contextos Realistas

Las tareas son enunciados que tienen una pregunta o una secuencia de preguntas y están destinadas a movilizar la actividad matemática de quien se enfrenta a la solución (Vos, 2020). Las tareas se usan como herramienta de instrucción que pueden limitar o potencializar el aprendizaje (Zapata-Cardona, 2014). Lo "realista" de las tareas en la Educación Matemática Realista está relacionado con lo que el estudiante puede imaginar o representar en su mente, pero no solo hace referencia a la conexión con el mundo real (Heuvel-Panhuizen, 2002). Para Freudenthal, (2006) lo "realista" es aquello que tiene sentido para los individuos y puede representarse mentalmente incluyendo objetos y acciones mentales.

En la Educación Matemática Realista las tareas se presentan dentro de un contexto en el que los participantes puedan solucionarlas de diversas formas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Además, las tareas realistas deben generar procesos de matematización, por lo cual no pueden ser rutinarias, ni triviales, deben basarse en el conocimiento informal y ampliarlo (Wijers & de Haan, 2020).

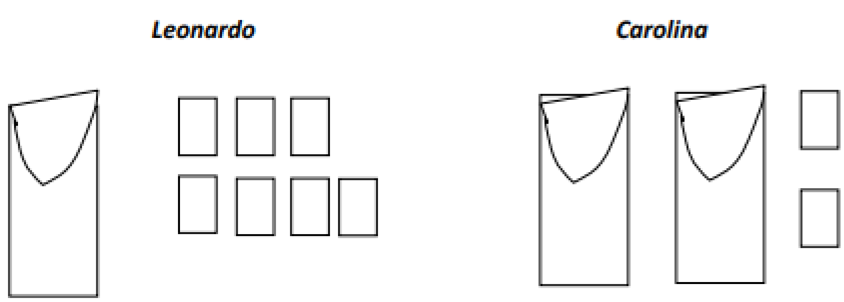
Las tareas matemáticas en contextos realistas usadas como los instrumentos para la producción de la información fueron tomadas de diversas investigaciones (Callejo et al., 2016; Sabena & Cusi, 2020; Vergel et al., 2020; Vergel & Rojas, 2018). Las tareas realistas generaran la necesidad en el participante de organizar matemáticamente la realidad (Heuvel-Panhuizen, 2002). Se usaron tareas de álgebra para la investigación porque se prestaban para estimular los procesos de matematización, tenían diferentes formas de llegar a la solución y los estudiantes podían partir del conocimiento informal. Las tareas matemáticas en contextos realistas al permitir que el estudiante imagine o experimente una situación como real, favorecen el desarrollo de diferentes habilidades mentales al realizar una matematización progresiva (da Ponte & Brocardo, 2020; Gravemeijer, 2020; Heuvel-Panhuizen, 2002, 2020; Webb & Peck, 2020).

Tarea 1 - Boletas

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó un sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres como se ilustra en la Figura 2. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre? (Tarea tomada de Mora Moreno, 2019).

Figura 2

Boletas de Leonardo y Carolina



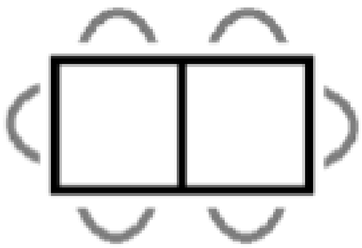
Nota. Se ilustra la situación de la cantidad de sobres y boletas de Carolina y Leonardo. La imagen fue tomada de Mora Moreno (2019).

Tarea 2 - Mesas

En un restaurante se juntan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo 6 comensales. La Figura 3 representa la ubicación de los puestos en relación con las mesas juntas por comensales sentados. ¿Cuántos comensales se podrán sentar en 5 mesas juntas? ¿Cuántos comensales se podrán sentar cuando se tiene una cantidad más grande de mesas juntas? (Tarea tomada de Callejo et al., 2016).

Figura 3

Organización de mesas y sillas



Nota. Ilustración de la disposición espacial de las sillas y las mesas en la Tarea 2 tomada de Callejo et al. (2016).

Tarea 3 – Punticos

Observa la Figura 4 con atención y responde las preguntas: ¿Cuántos puntos habrá en la cuarta posición? ¿Cuántos en la quinta posición? ¿Cuántos hay en la posición 20? ¿Cuántos puntos hay en la posición 500? Realiza una breve descripción respecto a cómo llegaste a tus respuestas. Si tienes 3005 puntos ¿A qué número de posición corresponde? Relata con detalle cómo obtuviste tu respuesta. 7856 puntos ¿Corresponde a una posición de esta secuencia? (Tarea tomada de Vergel et al., 2020).

Figura 4

Posiciones de la secuencia de punticos

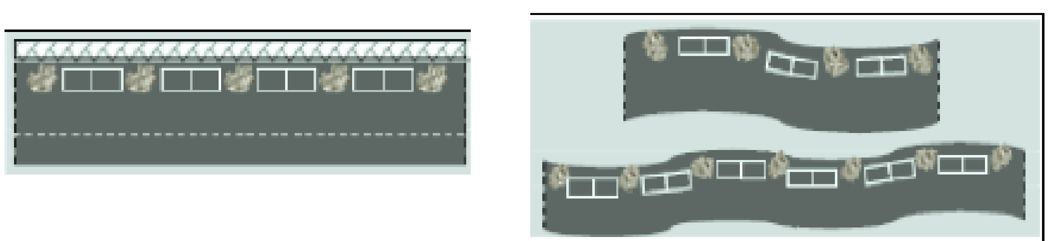
Nota. El contexto de la tarea fue una representación visual. Imagen tomada de Vergel et al. (2020).

Tarea 4 - Estacionamiento

Un edificio debe organizar los estacionamientos cumpliendo el patrón ilustrado en la Figura 5. Se ubica un árbol, luego dos espacios para estacionamiento y de nuevo un árbol. A lo largo de un bulevar hay 37 árboles plantados. ¿Cuántos estacionamientos se pueden construir en el bulevar? (Tarea adaptada de Sabena y Cusi, 2020).

Figura 5

Distribución de estacionamientos en el bulevar



Nota. La imagen ilustra la distribución espacial de los parqueaderos y los árboles para cualquier tramo del estacionamiento. Imagen tomada de Sabena y Cusi (2020).

Prueba piloto

Previamente al trabajo de campo se realizó una prueba piloto con otros participantes con el propósito de afinar el instrumento y tomar decisiones metodológicas. La prueba piloto reveló varios aspectos que debieron ser ajustados para la presentación de las tareas con contextos realistas como: el formato oral o escrito, el apoyo de representaciones visuales y la estructura de las preguntas.

Durante la prueba piloto se entregó a los participantes el enunciado de la tarea en hojas de papel. Los participantes leían el contenido de las hojas e inmediatamente iniciaban el proceso de solución. Sólo hasta el final cuando terminaban la tarea había oportunidad de preguntar algo y establecer una conversación con el participante. La prueba piloto permitió descubrir que presentar los enunciados de las tareas en hojas no fue favorable para estimular los procesos de pensamiento de los participantes que permitirían rastrear los procesos de matematización. Mediante la presentación de la tarea en hojas los participantes emprendían la solución como si fuera una evaluación escrita y los procesos de matematización quedaban ocultos. De acuerdo con este resultado, se decidió transformar el formato escrito y presentar la tarea en formato oral.

Para este propósito se tomaron dos decisiones: (1) apoyar cada tarea con una representación visual y (2) preparar con anticipación el qué, cómo y cuándo se preguntaba. Así, se presentaron las tareas en formato oral, se acompañaba la presentación con una representación visual y se iniciaba la entrevista semi estructurada. Una vez el participante tenía claridad sobre la tarea se le pedía resolverla y cuando anunciaba una respuesta se le pedía explicación o argumentación de cómo lo había realizado; luego, se hacían preguntas de verificación o se hacían preguntas con un nivel de complejidad mayor.

Durante la prueba piloto los participantes resolvían una tarea a la vez antes de continuar con la siguiente. Luego de que el participante terminaba cada tarea, se le preguntaba si quería continuar o deseaba parar en ese momento. El participante realizaba máximo cuatro tareas por encuentro.

Análisis de la Información

Todos los encuentros con los participantes fueron grabados en video. Las videograbaciones fueron transcritas palabra a palabra. Posteriormente, se observaron una y otra vez los videos y se leyeron las transcripciones de manera reiterada y detallada rastreando la actividad matemática de los participantes. Se identificaron las acciones que daban cuenta de los procesos de matematización y se realizaron anotaciones sobre las transcripciones. Se identificaron fragmentos específicos en los videos que debían ser analizados a mayor profundidad y que ejemplificaban los procesos de matematización. Luego, se hicieron las interpretaciones relacionadas con la actividad matemática de los participantes. El proceso de análisis demandó volver reiteradamente a los datos e ir contrastando la información aportada por los sujetos participantes con el marco teórico.

Se sistematizó la información producida a partir de las entrevistas y los artefactos, teniendo en cuenta los procesos de matematización, los referentes teóricos y los conceptos claves que se repetían en las transcripciones. La validación del proceso de análisis se realizó mediante la triangulación entre la información producida, las comprensiones de la investigadora y los referentes teóricos de la investigación.

Consideraciones Éticas

Garantizar el bienestar de todos los participantes durante y después del trabajo de campo y de la investigación en general es un factor fundamental en la investigación con seres humanos. El investigador debe tener en cuenta los principios morales que guían el trabajo ético desde el bienestar de los participantes y la protección de sus derechos. Por lo cual, antes de iniciar el trabajo de campo se informó a todos los participantes y a sus acudientes sobre los propósitos de la investigación, los procedimientos, la protección de la información, los beneficios y potenciales riesgos mediante encuentros virtuales por la plataforma de Google Meet o llamadas telefónicas.

Además, se hizo claridad sobre la participación voluntaria y la posibilidad de desistir de participar en cualquier momento sin ningún tipo de perjuicio o penalidad. Se abrió un espacio para aclarar dudas que presentaran los potenciales participantes. Este proceso terminó con la firma de un documento en el cual declaraban que habían recibido la información y daban su consentimiento como participantes de la investigación. El documento denominado *consentimiento de participación* aparece en el Anexo B. A los participantes se les dio un estímulo económico simbólico como una forma de agradecer su tiempo y disponibilidad.

Se guardó la privacidad y confidencialidad con la información que los participantes aportaron a la investigación, y en caso de que los participantes o sus acudientes lo solicitaran, se les ofreció tener acceso a dicha información. Además, se garantizó el anonimato de los participantes de forma que su identidad no se viera comprometida, para ello en el reporte final se utilizaron seudónimos.

Resultados

En este apartado se presentan los procesos de matematización que emergieron de los estudiantes participantes en la solución de las tareas matemáticas en contextos realistas. Las tareas son en contextos *realistas* no porque generen un vínculo con el mundo real sino porque ofrecen un contexto para que los participantes imaginen y proyecten en su mente la situación de estudio y conecten lo concreto con lo abstracto (Zapata-Cardona, 2020). Los procesos de matematización hacen referencia a la actividad matemática empleada para la comprensión, organización o estructuración de las tareas planteadas en contextos realistas. La actividad matemática son todas las acciones mentales y concretas que los individuos ponen en juego para darle respuesta a un problema matemático. Este apartado se organizó en tres tópicos: tareas que promueven diferentes procesos de matematización, tareas que posibilitan diferentes rutas para la formalización y el contexto realista de las tareas como recurso para validar resultados.

Tareas que promueven diferentes procesos de matematización

Los procesos de matematización están relacionados con las acciones que emprenden las personas al hacer matemáticas. Estos procesos tienen que ver con cómo las personas *identifican y clasifican la información*, *identifican incoherencias*, *realizan esquemas*, *buscan y encuentran atajos*, *analizan tendencias*, *ponen a prueba conjeturas*, *estiman resultados*, *elaboran modelos*, *cambian de estrategias*, *cuentan*, *deducen* y *formalizan* situaciones de las tareas matemáticas en contextos realistas (Bressan & Gallego, 2010; Gravemeijer, 2020; Gravemeijer & Doorman, 1999; Heuvel-Panhuizen, 2005; Webb & Peck, 2020; Zolkower et al., 2020). A continuación, se presentan algunos episodios de las entrevistas con los participantes que reflejan los procesos de matematización.

En la solución de la tarea 2, la de las mesas, la participante Luisa se apoyó en la *representación visual* que fue presentada, generó una *representación mental,* expresó que podría incluir una mesa en la mitad de las dos que ya estaban dispuestas y *así determinó* el total de sillas. El siguiente fragmento de la entrevista con Luisa ilustra esta estrategia.

1	Investigadora	Si colocamos otra mesa ¿Cuántas personas se podrían sentar?
2	Luisa	Ocho
3	Investigadora	¿Me podrías explicar que hiciste para determinar eso?
4	Luisa	Agregué una mesa en la mitad (Entrevista Luisa, marzo 30 2021)

En la línea 4 se puede apreciar que la participante conservó las dos mesas dadas en los extremos e incluyó una mesa en el centro. La participante usó una estrategia vinculada al contexto coordinando la *representación mental* y el conteo para determinar el total de sillas. Una representación mental es de naturaleza inobservable y surge de la reproducción en la mente como respuesta a una representación externa (Rico Romero, 2009). Las representaciones son las formas de plasmar las ideas y procedimientos matemáticos (Alsina, 2016). Las representaciones se pueden clasificar como verbales, pictóricas, numéricas y simbólicas (Merino et al., 2020). Así, las representaciones mentales son formas de reproducir en la mente de quien resuelve la tarea ideas expresadas en enunciados verbales, imágenes, expresiones algebraicas o símbolos. En el caso de la estudiante Luisa, ella expresó la idea de la mesa en el medio como una modificación de la imagen inicial que acompañó la presentación de la tarea y luego usó el conteo para determinar el total de sillas.

Acorde a Zolkower et al., (2006) en la Educación Matemática Realista el contexto al ser susceptible de ser imaginado es realista y según Gravemeijer y Doorman,(1999) ese es el punto de partida para el hacer matemático o matematización. El nivel situacional es el nivel en que el estudiante representa mentalmente el contexto de la tarea realista y establece conexiones con conocimientos previos y la creatividad (Trelles-Zambrano et al., 2019). Se podría inferir que la representación mental empleada por Luisa en la tarea 2 es uno de los procesos de matematización que se encuentran enmarcados en el nivel situacional y que permitió *establecer conexiones* con la imagen de apoyo frente a los requerimientos de la tarea matemática.

La tarea de las boletas, que pedía determinar el número de boletas en los sobres, fue resuelta por todos los participantes mediante el tanteo. El tanteo es un proceso de solución que no sigue una estructura formal o algebraica, sino que se hacen múltiples ensayos con valores diferentes, algunas veces sistemáticos, hasta que se encuentra el resultado. El tanteo es un proceso de matematización porque activa la actividad matemática, aunque es una estrategia informal de matematizar. Las estrategias informales son todos aquellos procedimientos adquiridos a partir de la intuición (de Castro Hernández et al., 2015). A continuación, un episodio en la solución de la tarea de las boletas con el participante Augusto.

Investigadora	¿Cuántas boletas contiene cada sobre?
Augusto	Cinco boletas
Investigadora	¿Podrías explicarme cómo lo hiciste?
Augusto	Leonardo tenía más boletas que Carolina, pero solamente se ganó un sobre, entonces era fácil afirmar haciendo cuentas rápidas y fáciles, por ejemplo: yo hice primero con una, después con dos hasta que llegué a cinco. Tenían de

11 a cinco pues siete más cinco es doce y así se sabía el contenido de cada sobre. (Entrevista Augusto, 15 de marzo 2021).

El participante Augusto *usó el tanteo*, fue evidente que lo hizo de forma sistemática, y luego validó el resultado en el contexto de la tarea mediante la suma. El participante intentó con diferentes valores y aplicó la suma hasta que se cumplió la igualdad.

En la solución de la tarea 3, la de los punticos, los participantes presentaron diferentes soluciones relacionadas con la *identificación de patrones de formación*. La identificación de patrones requiere el reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los elementos de una secuencia. Un patrón es una sucesión de elementos que se construye siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o recurrencia (Bressan & Gallego, 2010). Se puede identificar un patrón mediante la observación de las regularidades de los elementos de la secuencia. Cuando los elementos de una secuencia se presentan en forma periódica es un patrón de repetición, como por ejemplo la secuencia de la tarea de los parqueaderos A, P, P, A, P, P, A, P, P, A, P, A donde primero va un árbol (A) y luego dos parqueaderos (P) y continúa repitiéndose la secuencia hasta que finaliza con un árbol. Cuando cada término de la sucesión se expresa en función del término anterior se denomina patrón de recurrencia, como por ejemplo la secuencia de la tarea de los puntos que numéricamente se representa de la forma 1, 3, 5, 7, 9…, y cada término es el resultado de adicionarle 2 al término anterior, por tanto, para cualquier término se cumple la igualdad $a_n = a_{n-1} + 2$. A continuación, el siguiente episodio ilustra el momento donde el participante Juan identificó un patrón en la tarea de punticos.

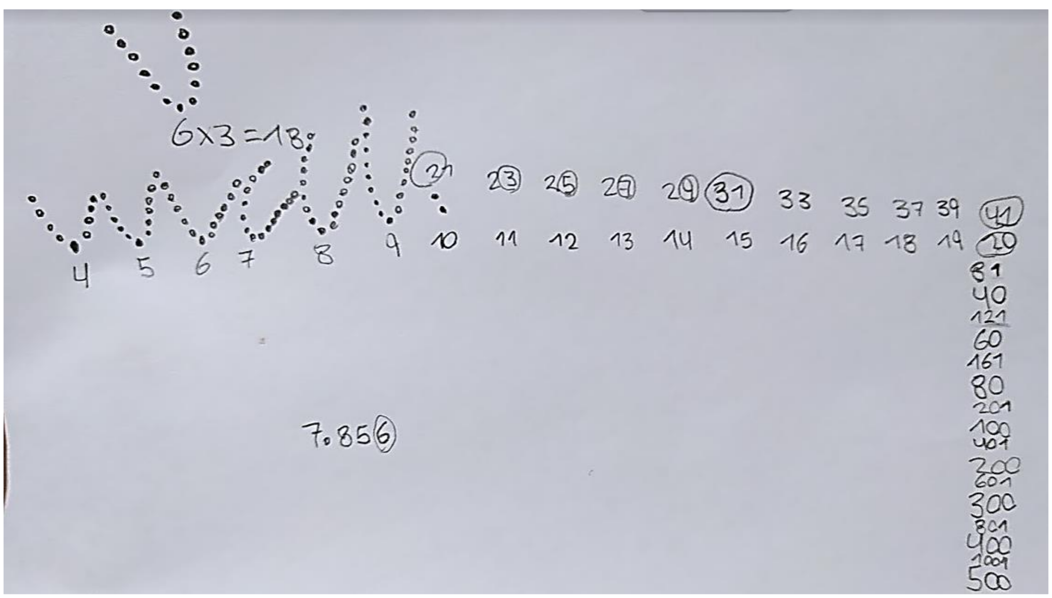
12 Investigadora ¿Cuántos puntos habrá en la posición 4?

Juan	Si en la primera hay tres, en la segunda hay cinco y en la tercera hay siete, serían nueve. Se suman de a dos. (Entrevista Juan, 3 de abril, 2021)

El participante Juan en las líneas 13 – 14 usó *conteo* y *descubrió la regla de formación* de la secuencia. Él identificó que al sumar dos a la figura inicial lograría predecir la cantidad de puntos que tendría la siguiente posición. Por tanto, logró *identificar el patrón* de *recurrencia* que surgía al sumar dos al término anterior. La Figura 6 es una representación desarrollada por el participante Juan y que corresponde al patrón identificado en la línea 13.

Figura 6

Representación realizada por el participante Juan en la tarea de los punticos



Posteriormente al episodio, la investigadora le preguntó a Juan por la cantidad de puntos en la posición veinte, y el participante realizó un cambio en la *representación del patrón identificado*. Se puede apreciar en la Figura 6 que cuando pasa de la posición 9 a la 10, el participante Juan cambió las representaciones gráficas a numéricas correspondiente al total de puntos en cada posición. En este caso, el participante Juan intentó ser eficiente por eso cambió su representación y *buscó un atajo* para evitar el camino largo. Rodríguez y Juárez (2019) han sugerido que la mente busca atajos para elaborar estrategias más eficientes y para evitar caminos largos. Posiblemente el participante descartó la representación gráfica en búsqueda de simplificar y optimizar sus acciones para dar respuesta a la pregunta planteada. La matematización es un proceso de reorganización que resulta en *atajos* mediante el uso de conexiones entre conceptos y estrategias (Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). En consecuencia, la reorganización de la representación optimizando la forma de resolver la tarea es un atajo.

Además, la Figura 6 también da cuenta de que el participante Juan logró *identificar un patrón de repetición* cuando encerrando con un círculo identificó los números impares correspondientes al segundo digito (,3,5,7,9,1) de la cantidad de puntos en las posiciones 11 a 14, los cuales se repetían nuevamente de la posición 15 a la 20. Los patrones de repetición dan cuenta de la identificación de regularidades y secuencias, y son un paso conceptual para la generalización (Bressan & Gallego, 2010). Luego, el participante identificó *la correspondencia* y *covariación* a partir de la posición 20; saltando de veinte en veinte las posiciones y agregando de a cuarenta a la cantidad total de puntos. Los estudiantes aprenden a visualizar *la correspondencia* en aspectos cuantificables de figuras con posición /número de elementos y atienden a la *covariación* con un tipo particular de crecimiento a medida que los aspectos cuantificables cambian en cada figura de la secuencia (Wilkie, 2022). El participante Juan hasta ese momento del desarrollo de la tarea *contó, descubrió la regla de formación, identificó dos patrones de incremento uno de recurrencia y otro de repetición, realizó una representación pictórica y una numérica y buscó atajos*.

La identificación de estructuras numéricas y espaciales es uno de los procesos de matematización que emergió en los participantes previo a la generalización. La identificación de estructuras numéricas y espaciales consiste en identificar el número de elementos de un término y la ubicación física de cada elemento de este término en relación con los otros elementos del término (Callejo & Zapatera, 2017). A continuación, un episodio de la solución de la tarea 4 por parte del participante Keiner en la que se pedía encontrar el patrón de formación en el diseño de un estacionamiento. El participante identificó estructuras numéricas y espaciales que lo llevó a una relación funcional.

Investigadora	¿Cuántos estacionamientos se pueden construir con treinta y siete árboles plantados?
Keiner	Setenta y dos espacios para estacionarse
Investigadora	¿Qué hiciste para determinar eso?
Keiner	Sumé los espacios, por cada árbol tenía que haber un espacio, entonces le resté un árbol porque para encerrarlo todo deberíamos tener un árbol de más y como es del doble espacio, entonces, sería el doble. (Entrevista Keiner, 30 marzo 2021)

En las líneas 19 y 20 el participante *argumentó* que por cada árbol hay un espacio de parqueadero y luego otro árbol para encerrarlo todo en la secuencia del parqueadero. La argumentación según Sabena y Cusi (2020) es una herramienta que puede visibilizar el pensamiento de los estudiantes gracias a la guía docente. La guía docente puede realizarse mediante preguntas que favorezcan el proceso de argumentación y que inviten a los estudiantes a justificar sus respuestas o los cuestionen sobre lo que realizaron. En el episodio de Keiner en la línea 18 se puede evidenciar la pregunta realizada por parte de la investigadora: "¿Qué hiciste para determinar eso?". La pregunta posibilitó que el estudiante argumentara su respuesta y expresara en las líneas de la 19 a la 21 "Sumé los espacios, por cada árbol tenía que haber un espacio, entonces, le resté un árbol porque para encerrarlo todo deberíamos tener un árbol de más y como es del doble espacio, entonces, sería el doble". Por tanto, la argumentación pudo hacer visible la *identificación de la relación funcional* de la forma $P = (A - 1) * 2$ por parte del participante, donde P corresponde al número de parqueaderos y A el número de árboles.

Los participantes en sus argumentaciones dieron cuenta de la forma como *establecieron relaciones* con la situación contextual, el tipo de información que consideraron relevante y así mismo la forma en que la clasificaron. El siguiente episodio, resolviendo la tarea de las mesas, muestra cómo el participante Juan *estableció relaciones* con la situación contextual.

22	Investigadora	¿Cuántas personas se pueden sentar en cinco mesas?
23	Juan	Doce
24	Investigadora	¿Me podrías explicar qué estás pensando?
25	Juan	Porque tiene cuatro lados, pero no se utilizan todos
26		porque se necesitan para juntar la mesa. Entonces,
27		al juntar las cinco mesas en el lado izquierdo dan cinco sillas y en el
28		derecho cinco. Arriba daría un puesto y abajo daría otro (Entrevista Juan, 3 de abril 2021)

El participante Juan *identificó y clasificó información relevante* en la línea 25, cuando señaló que la mesa tenía cuatro lados, pero que no se utilizaban todos los lados. Luego, a partir de la clasificación de la información relevante el participante *identificó el patrón* en las líneas 27 y 28 en el que a cada mesa le cabían dos sillas, una por el lado derecho y otra por el lado izquierdo. Finalmente, el participante Juan *estableció una relación* entre las mesas y las sillas de acuerdo con la ubicación de las mesas, y en la línea 28 especificó una relación en las mesas de los extremos superior e inferior con una silla adicional.

A continuación, un episodio del participante Luis en el que estableció una relación funcional usando el lenguaje numérico mientras resolvía la tarea de las mesas. El *establecimiento de relaciones funcionales* es un proceso de matematización formal. El establecimiento de la relación funcional como una relación de dependencia entre dos cantidades covariantes se origina con la *identificación de un patrón de formación* y la posterior *generalización* (Cañadas & Molina, 2016).

29	Investigadora:	¿Y si te digo que para cien mesas?
30	Luis:	Si por cada mesa se sientan dos personas entonces
31		multiplico dos por cien.
32	Investigadora:	¿Y ese sería el total de las personas?
33	Luis:	Sería el total y solamente habría que sumarle dos
34		sillas más (Entrevista Luis, 28 de febrero 2021).

La *identificación del patrón de formación* se considera un paso previo a la generalización la cual a la vez se entiende como el establecimiento de reglas que logran deducir el valor correspondiente para posiciones lejanas en la serie. Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de llegar al número de elementos de la posición 100 en una serie, se puede decir que ha logrado generalizar (Callejo & Zapatera, 2017; El Mouhayar & Jurdak, 2013). En consecuencia, cuando el participante Luis logra determinar la cantidad de sillas para 100 mesas logra generalizar.

La generalización implica descubrir la regla general mediante la coordinación del número de elementos de un término y la posición de cada término de la serie (Radford, 2011). Cuando los estudiantes descomponen la secuencia para establecer la relación entre la posición en la secuencia y el número de elementos que la componen están coordinando dos estructuras y logran establecer una relación funcional (Callejo & Zapatera, 2017). Por lo cual, cuando se logra generalizar mediante el establecimiento de reglas, se está estableciendo una relación funcional que aplica para cada término de la serie.

Las figuras en un patrón creciente pueden ayudar a los estudiantes a percibir visualmente las relaciones funcionales (Wilkie, 2022). La relación funcional en secuencias se establece gracias a la generalidad que es cierta para cada posición en un patrón. Se evidenció el *establecimiento de la relación funcional* por parte del participante Luis en una secuencia de pasos que llevan un orden lógico. Cuando se habla de orden lógico se hace referencia al orden en el paso a paso que el participante creó para determinar el total de sillas para cien mesas. Inicialmente, el participante identificó que por cada mesa se sentaban dos personas, lo que correspondía al patrón de formación. Luego, en la generalización, el participante multiplicó por dos el total de mesas y adicionalmente consideró el valor constante debido a las dos sillas de los extremos.

La relación de correspondencia entre las mesas y las sillas se estableció cuando el participante identificó que por cada mesa podían acomodarse dos sillas. La relación funcional se generalizó cuando el participante enunció la relación de correspondencia entre el número de sillas que le correspondía a cada mesa usando la multiplicación y luego usó la adición para agregar las dos sillas que tenían un comportamiento diferente a las demás. La multiplicación por dos representa la *covariación* del pensamiento proporcional entre las mesas y las sillas. La adición del valor constante y la correspondencia da cuenta de la identificación de una relación funcional.

Algunos participantes llegaron a establecer reglas para poder aplicar la relación funcional identificada. *Establecer reglas* consiste en delimitar la aplicación de la estructura funcional para orientar el desarrollo de una acción o actividad (Gravemeijer, 2020). A continuación, un episodio de la entrevista con la participante Vanessa mientras resolvía la tarea de las mesas.

35	Investigadora:	Para cualquier cantidad de mesas ¿qué harías para
36		determinar las personas que se pueden sentar?
37	Vanessa:	Primero tendríamos que mirar la cantidad
38		de mesas que hay disponibles. Ya después tendríamos
39		que multiplicar por dos la cantidad de mesas y ya
40		sumarles las dos sillas de los lados. (Entrevista Vanessa, 30 de marzo de 2021)

La participante Vanessa delimitó la aplicación de la *relación funcional* cuando expresó en la línea 37 y 38 "primero tendríamos que mirar la cantidad de mesas que hay disponibles". Luego la participante, aplicó en la línea 39 y 40 el procedimiento para hallar el total de sillas, el cual da cuenta de una relación funcional de la forma $y = x * 2 + 2$, donde *y* son las sillas y la *x* son las mesas. La participante usó la información disponible, le dio sentido y a partir de eso tradujo la situación contextual a un lenguaje matemático. En otras palabras, se hizo evidente un proceso de matematización.

Los participantes emprendieron acciones que evidenciaron diversos procesos de matematización: *conteo, tanteo, establecimiento de relaciones, identificación de patrones o reglas de formación, realización de representaciones pictóricas y numéricas, búsqueda de atajos, identificación de estructuras numéricas y espaciales, argumentación, identificación y clasificación de información relevante, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización*. Algunos participantes migraron de un lenguaje informal, basado en la descripción de la situación contextual, a un lenguaje matemático logrando la formalización. La formalización en la Educación Matemática Realista es el proceso de adornar, ajustar y transformar el lenguaje común a un lenguaje formal (Freudenthal, 2006). Esto no solo tiene que ver con un asunto estético o de reorganización sino con el rigor que se le imprime a la actividad matemática.

Cuando a un estudiante se le estimulan diferentes procesos de matematización se le favorece un aprendizaje gradual, en el que adquiere conocimientos y habilidades a partir de su propia actividad matemática (Freudenthal, 2006). El estudiante a partir de los contextos realistas desarrolla nuevas ideas matemáticas con su propia actividad matemática (Gravemeijer, 2007). Se considera que hay progreso en la matematización cuando el estudiante va realizando estrategias más formales a partir del contexto realista. La matematización progresiva es la forma como el estudiante evoluciona en los recursos que usa para matematizar (Heuvel-Panhuizen, 2002).

Cuando a los estudiantes se le estimulan diferentes procesos de matematización, estos tienen la oportunidad de reconocer los múltiples usos y significados de las matemáticas en diferentes contextos. Los estudiantes en el surgimiento de los procesos de matematización experimentaron las matemáticas no como la repetición de procedimientos de forma rutinaria, sino como una actividad creativa vinculada al sentido común. De acuerdo con lo manifestado por (Gravemeijer, 2020), las tareas deben incitar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a resolver creativamente problemas abiertos desconocidos.

En la Educación Matemática Realista el papel del docente incluye plantear las tareas y las preguntas que permitan fomentar el pensamiento en los estudiantes como una forma de ayudar a construir su comprensión (Gravemeijer, 2020). Las preguntas empleadas por la investigadora como: “¿Qué hiciste para determinar eso?, ¿Me podrías explicar qué estás pensando?, ¿Podrías explicarme cómo lo hiciste?” invitaron a la reflexión y permitieron que los estudiantes explicaran, argumentaran y justificaran sus soluciones. Evidenciar los procesos de matematización por los que avanzaron los participantes dependió en gran medida de la forma como se les preguntó. Si no se hubieran realizado las preguntas con el interés de evidenciar los procesos de matematización del estudiante, estos hubieran quedado ocultos. El rol del docente es fundamental para comprender los diversos procesos de pensamiento de los estudiantes y así tener oportunidad de guiarlos a soluciones más refinadas o novedosas.

Tareas que posibilitan diferentes rutas para la formalización

La formalización en la Educación Matemática Realista se da cuando el estudiante usa propiedades comunes para establecer reglas, realizar representaciones algebraicas, proponer fórmulas, procedimientos o realizar predicciones (Gravemeijer, 2020; Gravemeijer & Doorman, 1999). La formalización no se centra únicamente en la manipulación rigurosa de expresiones algebraicas. La formalización se dio cuando los participantes hicieron generalizaciones a través de conjeturas o argumentación expresándose en formas cada vez más formales, en donde las tareas posibilitaron diversas formas para obtener la solución. Las tareas realistas posibilitan a los estudiantes diversas formas de obtener una o varias soluciones, retomar conocimientos previos, y ampliarlos (Heuvel-Panhuizen, 2020).

A medida que se pedía deducir el número de elementos en posiciones elevadas de la secuencia, los participantes desarrollaron procesos de matematización más elaborados y generales. La tarea de las mesas fue una de ellas y permitió visibilizar dos rutas diferentes para formalizar. Una de las rutas para la formalización se hizo evidente en el participante Pablo, quien de acuerdo con la forma como describió la organización de las sillas y las mesas en la situación contextual usó una estrategia que da cuenta de una relación funcional de la forma $y = (x-2) * 2 + 6$ para determinar la cantidad de sillas para cien mesas.

Investigadora: ¿Cuántas personas se pueden sentar en cien mesas?

Pablo: Doscientas dos

Investigadora: ¿Cómo determinar esa cantidad de personas?

Pablo: Como hay dos mesas se toma lo que falta para llegar a los cien, multiplicamos por dos, que son los que caben, y se suman las seis personas que están en las dos mesas. (Entrevista Pablo, 24 de marzo 2021)

El participante Pablo expresó en las líneas 44 a 46 su pensamiento usando el lenguaje con el que se le presentó la situación contextual. Allí él expresó una relación funcional, pero el término constante fueron los seis asientos con los que se le planteó la tarea inicialmente. El participante conservó las seis sillas de las dos mesas iniciales, luego separó las dos mesas dadas en el planteamiento de la tarea y acomodó allí, en el centro, otras adicionales ubicando de a dos sillas. El participante en su formalización restó las mesas iniciales del total de las mesas dadas y luego sumó las sillas de estas mesas.

El contexto "dota de significado el resultado" (Zapata-Cardona, 2020, p. 13). Al contextualizar una tarea los números adquieren un significado en unidades y dimensiones (Vos, 2020). En el contexto de cada una de las tareas presentadas los números tenían un significado asociado tanto en sus unidades como en sus dimensiones que les daban sentido a los resultados. Los participantes en la tarea de las mesas asociaban un número y una imagen a cada elemento, tanto a las mesas como a las sillas para hacer alusión a la cantidad. Cada imagen tenía unas dimensiones específicas que limitaban la solución de la tarea. Cuando se preguntaba por la cantidad de sillas necesarias para determinada cantidad de mesas, los participantes vinculaban a la cantidad dada la distribución espacial que representaban mentalmente. Así, cada expresión dada por el participante estaba relacionada con el contexto y tenía un significado para él. Por ejemplo, cuando el participante expresó en la línea 44 “como hay dos mesas” se refiere a las mesas iniciales dadas en el contexto de la tarea de mesas y sillas. En la línea 44 expresó “se toma lo que falta para llegar a cien”, allí el participante restó al total de las mesas dadas las dos mesas iniciales. Luego en la línea 45 dijo “multiplicamos por dos” debido a que, por cada mesa, ubicada en posiciones diferentes a los extremos, se podían sentar dos personas.

Otra ruta de formalización que fue usada por los participantes para resolver la tarea de las mesas y las sillas se ilustra en el siguiente episodio de Keiner. El participante dio cuenta de la *identificación de la relación funcional* del tipo *y=x*2+2*.

47	Investigadora:	¿Si en vez de ser cinco mesas, fueran quince mesas juntas?
48		¿Cuántas personas se pueden sentar?
49	Keiner:	Treinta y dos
50	Investigadora:	¿Y qué hiciste para hacerlo tan rápido?
51	Keiner:	Ya me aprendí el patrón: por cada mesa son dos puestos,
52		lo tuve que multiplicar por dos, más los dos de las esquinas
		(Entrevista Keiner, 24 de marzo 2021)

A diferencia de la solución dada por Pablo, en la relación establecida aquí el término constante fueron las dos sillas de los extremos. El participante Keiner en la línea 51 identificó un patrón en la situación contextual en la que a cada mesa le correspondían dos sillas, posteriormente en la línea 52 explicó que empleó la *multiplicación* por dos y al resultado le adicionó las dos sillas de los extremos. Cuando se comparan las dos formas de establecer relaciones funcionales, la de

Pablo y la de Keiner, se puede evidenciar que, los estudiantes establecieron rutas diferentes a partir del mismo contexto realista. Unos participantes establecieron relaciones de correspondencia que se diferenciaron por el término constante, unos tuvieron en cuenta toda la disposición de las mesas de los extremos y otros solo consideraron las dos sillas de los extremos.

Los participantes emplearon diferentes estructuras funcionales para representar las relaciones entre las variables que aparecían en la situación contextual. La Educación Matemática Realista se caracteriza porque estimula diversas formas de solucionar una tarea contextual realista. Cada participante es un agente activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que desarrollan herramientas y conocimientos matemáticos (Heuvel-Panhuizen, 2002; Sumirattana et al., 2017).Aunque las relaciones funcionales empleadas variaron en su forma, ambas formalizaciones tenían un uso comparable y generaban el mismo resultado cuando se quería predecir para un número determinado grande de mesas. Así, ambas formalizaciones cumplieron con el propósito que buscaban los participantes de encontrar una expresión funcional que permitiera la generalización para cualquier número de mesas. Las estrategias para solucionar tareas en contextos realistas no son únicas y pueden dar lugar a variedad de formas (Bressan & Gallego, 2010; Heuvel-Panhuizen, 2020).

Se le puede ayudar a los estudiantes a expandir y construir diferentes formas de pensar compartiendo las diferentes formas en que solucionan una tarea mediante la interacción (Gravemeijer, 2020). La interacción es una actividad social que permite a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos y reflexionar sobre ellos (Heuvel-Panhuizen, 2002). La interacción en la investigación se dio únicamente entre la investigadora y cada participante. La interacción se presentó en la investigación gracias a las preguntas planteadas en las entrevistas semiestructuradas, unas preguntas que tenían como finalidad profundizar en los procesos de matematización desarrollados por los participantes mediante una invitación permanente a la reflexión.

Contexto realista de las tareas como recurso para validar resultados

La validación es el proceso mediante el cual el participante vuelve a la situación real a comprobar que los resultados tengan sentido y correspondan al planteamiento inicial (Verdejo et al., 2021). Algunos participantes partieron de la situación realista, pero la abandonaron pronto en el proceso y aunque llegaban a soluciones, estas no tenían sentido dentro del contexto en el que se planteaba la tarea. Algunos participantes *establecieron relaciones entre los elementos del contexto* y *la distribución espacial de las tareas*, pero rápidamente abandonaron *la distribución espacial del contexto* y se centraron únicamente en realizar operaciones matemáticas sin corroborar la utilidad del resultado en la situación contextual de la tarea matemática. Un caso de estos fue el participante Brayan quien solo se fijó en el total de sillas por cada mesa e intentó aplicar una regla de tres con esta información como se presenta en el siguiente episodio.

Investigadora:	Hay dos mesas juntas, si se adiciona otra mesa, ¿Cuántas personas más se podrían sentar?
Brayan:	¿En la imagen son dos mesas individuales juntas?
Investigadora:	Sí
Brayan	Si se agrega una tercera podrían haber otras tres personas en total serían nueve. (Entrevista Brayan, 24 de marzo de 2021)

El participante solo se fijó en una parte de la información proporcionada en el contexto, y estableció una *correspondencia entre la cantidad de mesas y sillas*. Con la información que se le presentó en la tarea, a cada mesa le hizo corresponder tres sillas. El participante extrajo porciones de la información numérica del contexto de la tarea y con ella *estableció una relación de proporcionalidad*. Al separar la información cuantificable de la distribución espacial dada en la representación visual se desvinculó de información relevante del contexto realista. Pese a que el participante continuaba pensando en las sillas que iba a asignar a las mesas, *no clasificó como información importante la conformación espacial de las mesas y las sillas*. Esto llevó al participante al *uso de diferentes representaciones* que ubicara las nueve sillas, en las tres mesas juntas, aunque dichas representaciones eran forzadas.

Investigadora: ¿Cuántas personas se sentarían?
Brayan: Podrían ser cuatro en un lado y tres en otro y dos en las esquinas o cuatro en cada lado y una en una esquina. De cualquiera de las dos podría ubicarse porque tendrían que sentarse nueve (Entrevista Brayan, 24 de marzo de 2021)

El participante en la línea 62 resaltó el hecho de que independiente de la ubicación de la otra silla en cualquier lado de las mesas se *tenían* que sentar nueve. El participante ubicaba de distintas formas una silla que tenía de más en las esquinas. El participante seleccionó la cantidad de sillas por mesas como la única información relevante del contexto. Para él, la relación proporcional explicaba el fenómeno, pero fue insuficiente.

Posterior a la identificación de la dificultad del participante, la investigadora le repitió que la pregunta hacía referencia a cuántas personas se podían sentar en tres mesas juntas pero las mesas tenían que conservar la disposición inicial. Ya con la aclaración de la pregunta, el participante logró dar respuesta sobre la cantidad de personas en tres mesas juntas. No obstante, cuando se le preguntó por la cantidad de personas en cinco mesas juntas el participante Brayan abandonó la conformación espacial nuevamente y emprendió acciones que dieron cuenta de un pensamiento proporcional que para el caso de interés no era pertinente.

Investigadora:	¿Cuántas personas se pueden sentar en cinco mesas juntas?
Brayan:	En cinco mesas podrían caber doce sillas, entonces, en diez mesas acomodadas de la misma forma podría hacer multiplicar ese número por dos o podría sumarlo.
Investigadora:	Entonces ¿Cuántas sillas te dio para diez mesas?
Brayan:	Me dieron las veinticuatro. (Entrevista Brayan, 24 de marzo de 2021)

Se puede evidenciar en las líneas 65 - 67 del anterior episodio que el participante usó un pensamiento proporcional para encontrar el resultado. El participante argumentó que, si en cinco mesas cabían doce sillas, entonces en diez mesas era el doble de sillas. El participante seleccionó nuevamente las magnitudes identificadas en la información que tenía en el momento y se desvinculó de la disposición espacial inicial de las mesas y las sillas sin validar con la información que le ofreció el contexto de la tarea realista.

Las tareas matemáticas en contextos realistas pueden brindar herramientas para validar los resultados. La validación es un proceso que crea sentido (Ishibashi & Uegatani, 2022). El sentido hace referencia a la necesidad de comprobar que los resultados fueran acertados en la situación dada. Al respecto Chamoso y Cáceres, (2018) argumentan que, en las tareas realistas para dar la solución a la pregunta planteada, hace falta un razonamiento posterior que conecte el cálculo matemático con la situación contextual. En consecuencia, las tareas matemáticas en contextos realistas posibilitan la validación, pero es necesario que el participante haga uso del razonamiento posterior a la solución para conectar los resultados con el contexto realista y les dé sentido. Al respecto Zapata-Cardona (2020) identificó en su investigación que los modelos creados por las participantes a partir de la tarea matemática en contextos realistas tuvieron la función de validación que les permitió mejorar su cálculo e interpretación. Sin embargo, cuando algunos participantes obtenían soluciones, no realizaban la validación de los resultados como es el caso de Brayan. Coincidiendo con Verdejo et al. (2021) algunos participantes no se mostraban familiarizados con la necesidad de validar sus resultados, y consideraban finalizada la tarea matemática en el momento de verbalizar la solución.

Conclusiones

Esta investigación permitió evidenciar procesos de matematización que emergen de los participantes cuando resuelven tareas realistas en ambientes diferentes al aula. Algunos de los procesos que se hicieron evidentes fueron: *conteo, tanteo, establecimiento de conexiones, identificación de patrones de recurrencia, identificación de patrones de repetición o reglas de formación, realización de representaciones pictóricas y numéricas, búsqueda de atajos, identificación de estructuras numéricas y espaciales, argumentación, identificación y clasificación de información relevante, generalización, identificación de relaciones funcionales, correspondencia, covariación y formalización.* Los procesos de matematización que emergieron pueden ser un recurso para ayudar a los docentes a reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas y a comprender las múltiples estrategias que ponen en juego los estudiantes para llegar a la formalización matemática. Los participantes usaron algunas veces procesos de matematización primitivos que eran seguidos por procesos de matematización más avanzados y complejos o partían de procesos avanzados de formalización.

Los participantes lograron la transición del uso de un lenguaje informal, basado en la descripción de la situación contextual, a expresiones más matemáticas gracias a las tareas matemáticas en contextos realistas. Además, las soluciones presentadas en tareas de contextos realistas no fueron únicas, se pudieron evidenciar diferentes formas de formalizar. La variedad en los procesos de formalización se dio gracias a que los participantes pusieron en juego diferentes formas de identificar la información y de interpretarla. Las diversas rutas de formalizar podrían ser un insumo importante para ayudar a los docentes a descubrir las estrategias alternas que usan los estudiantes para resolver una tarea matemática.

La tarea realista permite la validación de las estrategias de los participantes y la confrontación de los resultados en la búsqueda de sentido. La validación de los resultados en el contexto realista va a depender del razonamiento del estudiante en el desarrollo de la tarea. La forma de validar o buscar la creación de sentido en el desarrollo matemático fue la comprobación de la relación funcional que se identificó en algunos términos de la secuencia.

Una posible implicación de la investigación es que el docente al ver los diferentes procesos de matematización de los estudiantes pueda enriquecer el trabajo en el aula, implementando estrategias como las tareas matemáticas en contextos realistas. El docente puede favorecer los espacios de interacción de los estudiantes para enriquecer las formas de solucionar una tarea matemática con contexto realista en el aula. Los diferentes procesos de matematización que se describen en este estudio pueden ser un insumo importante para orientar la reflexión en los procesos de formación de docentes frente al cómo, el qué, el cuándo y el para qué de su enseñanza. Tener una visión general del proceso por el que pasan los estudiantes es importante para avanzar en la enseñanza. Los diferentes procesos de matematización aportan a los docentes información sobre las estrategias de solución de los estudiantes a las tareas matemáticas. Por lo cual, al docente o investigador discutir y compartir los diversos procesos de matematización podrían generar espacios de reflexión para futuras investigaciones.

Aunque el trabajo de campo se realizó con estrategia virtual por la crisis debida a la pandemia COVID-19, el marco de Educación Matemática Realista fue pertinente y posibilitó la reflexión evidenciando diversos procesos de matematización de los estudiantes. Dicho hallazgo, abre las puertas a más investigaciones con apoyo virtual que permitan ampliar el horizonte conceptual en la educación matemática y muy en especial de la Educación Matemática Realista.Referencias

Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Libros del Zorzal.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Revista Épsilon*, *33*(92), 7-29.

Alvis-Puentes, J. F., Aldana-Bermúdez, E., & Caicedo-Zambrano, S. J. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *10*, 135-147.

Bressan, A., & Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones | GPDM. *Correo del Maestro*, *168*, 5-21. https://new.gpdmatematica.ar/el-proceso-de-matematizacion-progresiva-en-el-tratamiento-de-patrones/

Cai, J., Mok, I. A. C., Reddy, V., & Stacey, K. (2017). International Comparative Studies in Mathematics: Lessons and Future Directions for Improving Students' Learning. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 79-99). Springer International Publishing.

Callejo, M. L., García-Reche, Á., & Fernández, C. (2016). Evolución del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, Article 10. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/

Chamoso, J., & Cáceres, M. J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *13*(17), 83-94.

Creswell, J. W. (2014). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4.ª ed.). Sage publications.

da Ponte, J. P., & Brocardo, J. (2020). Echoes and Influences of Realistic Mathematics Education in Portugal. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 209-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_12

de Castro Hernández, C., López, G. F., & García, M. R. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias pedagógicas*, *26*, 89-108.

Dekker, R. (2020). Mathematics and Common Sense The Dutch School. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 55-61). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_4

El Mouhayar, R. R., & Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 379-396. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6

Freudenthal, H. (2006). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Gravemeijer, K. (2007). *Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education*. conference; Plenary lecture at the APEC-TSUKUBA International Conference III, Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study.

Gravemeijer, K. (2020). A Socio-Constructivist Elaboration of Realistic Mathematics Education. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 217-233). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_12

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of Mathematics Education Reform in The Netherlands: A Paradigm Case? *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(1), 25-44. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107821

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1), 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Gutiérrez A., R. E., Prieto G., J. L., Ortiz Buitrago, J., Gutiérrez A., R. E., Prieto G., J. L., & Ortiz Buitrago, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación matemática*, *29*(2), 37-68. https://doi.org/10.24844/em2902.02

Hernández, R., Fernández, C., & Bautista, P. (2014). Metodología de la Investigación (Sexta Edición). McGraw-Hill Education.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Common Sense in Mathematics Education*, 1-43.

Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Heuvel-Panhuizen, M. van den. (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? *Cambridge Journal of Education*, *35*(1), 35-53. https://doi.org/10.1080/0305764042000332489

Heuvel-Panhuizen, M. van den. (2020). A Spotlight on Mathematics Education in the Netherlands and the Central Role of Realistic Mathematics Education. En *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 1-14). Springer, Cham. http://undefined/chapter/10.1007/978-3-030-33824-4_1

Ishibashi, I., & Uegatani, Y. (2022). Cultural relevance of validation during mathematical modeling and word problem-solving: Reconceptualizing validation as an integration of possible fictional worlds. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100934. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100934

Jiménez, L., & Ramos, F. J. (2011). El impacto negativo del contrato didáctico en la resolución realista de problemas. Un estudio con alumnos de 2º y 3º de Educación Primaria. *Electronic*

Journal of Research in Education Psychology, *9*(25), 1155-1182. https://doi.org/10.25115/ejrep.v9i25.1499

Jiménez, L., & Verschaffel, L. (2014). *Development of children's solutions of non-standard arithmetic word problem solving*. *19*(1). https://doi.org/10/48298

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683-710. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0097-0

Kool, M. (2020). Sixteenth Century Reckoners Versus Twenty-First Century Problem Solvers. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 105-120). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_7

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2020). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Mora Moreno, C. A. (2019). *Desarrollo de pensamiento científico y lógico matemático* [Trabajo de grado, Universidad Distrital Francisco José Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/23631

Orrantia, J., González, L. B., & Vicente, S. (2005). Analysing arithmetic word problems in Primary Education text books. *Journal for the Study of Education and Development*, *28*(4), 429-451. https://doi.org/10.1174/021037005774518929

Radford, L. (2011). *Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking*. *4*, 17-24.

Ramos, S. E. (2005). Análisis socioepistemológico de los procesos de matematización de la predicción en la economía. En J. Lezama, M. Sánchez, & J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18, pp. 631-637). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/6162/

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7*(4), 309-327. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00014-5

Rico Romero, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rodríguez, T., & Juárez, J. A. (2019). Estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria: El caso de Luisa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *102*, 67-81.

Sabena, C., & Cusi, A. (2020). The role of the teacher in fostering students' evolution across different layers of generalization by means of argumentation. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 93-105.

Sánchez Gamboa, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa: Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Cooperativa Magisterio.

Sitorus, J. & Masrayati. (2016). Students' creative thinking process stages: Implementation of realistic mathematics education. *Thinking Skills and Creativity*, *22*, 111-120. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2016.09.007

Sumirattana, S., Makanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, *38*(3), 307-315. https://doi.org/10.1016/j.kjss.2016.06.001

Trelles-Zambrano, C., Toalongo, X., Alsina, Á., & Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: Una propuesta para el aula de secundaria. *Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»*, *102*, 43-59.

Verdejo, A. M., Arenas, M. M., & Uclés, R. R. (2021). Errores de profesores de Matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(2), 109-136.

Vergel, R., Carrillo, L. M. G., & Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 67-81.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula. *Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.

Vos, P. (2020). Task Contexts in Dutch Mathematics Education. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 31-53). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_3

Webb, D. C., & Peck, F. A. (2020). From Tinkering to Practice The Role of Teachers in the Application of Realistic Mathematics Education Principles in the United States. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 21-39). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_2

Wijers, M., & de Haan, D. (2020). Mathematics in Teams—Developing Thinking Skills in Mathematics Education. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education* (pp. 15-29). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_2

Wilkie, K. J. (2022). Generalization of quadratic figural patterns: Shifts in student noticing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *65*, 100917. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100917

Zapata-Cardona. (2020). El rol de las tareas realistas en la interpretación del residuo de la división aritmética. *Uni-pluriversidad*, *20*(2). https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.20.2.04

Zapata-Cardona, L. (2012). Dime qué preguntas y te diré que promueves en la clase de Estadística. *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 706-718.

Zapata-Cardona, L. (2014). Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística. *Uni-pluri/versidad*, *1*(14), 53-62.

Zolkower, B., Bressan, A., & Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, *6*, 11-30.

Zolkower, B., Bressan, A. M., Pérez, S., & Gallego, M. F. (2020). From the Bottom Up—Reinventing Realistic Mathematics Education in Southern Argentina. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 133-166). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_9