UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

Autor

Diego Antonio Rolong Molinares

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

Año 2022

Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial

Diego Antonio Rolong Molinares

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Educación.

Asesores:
Dr. René Alejandro Londoño Cano
Dr. Carlos Mario Jaramillo López

Línea de Formación
Educación Matemática
Grupo de Investigación
Educación Matemática e Historia – EDUMATH (UdeA – Eafit)

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada
Medellín, Colombia
2022

Dedicatoria

A Dios, porque hizo posible este sueño, mi devoción y mi eterno agradecimiento.

A mis padres, porque con su amor y presencia me incentivaron.

A mis hijos, quienes me inspiran para seguir adelante en esta ardua labor.

Agradecimientos

A Dios, por colocar personas maravillosas e idóneas en este camino, sin ellas, no se hubiera realizado este sueño.

A mis asesores, el doctor René Alejandro Londoño Cano y el doctor Carlos Mario Jaramillo López, quienes de manera incondicional dieron lo mejor de sí para orientarme en todo momento, en el que su capacidad, experiencia y conocimiento esculpieron mi formación como investigador. Gracias, por brindarme su apoyo y voto de confianza, por animarme en todo momento para seguir adelante, por enseñarme con su ejemplo la disciplina, perseverancia y amor por la investigación y la educación.

Al doctor Rafael Escudero Trujillo, quien puso a mi disposición su amplia trayectoria en investigación en Educación Matemática y me ayudó a formalizar algunos aspectos de mi trabajo de investigación durante el proceso de pasantía.

A la doctora Luz Stella Mejía Aristizábal, quien me brindó su apoyo, su conocimiento y experiencia en investigación, los cuales contribuyeron para refinar algunos aspectos metodológicos, desde el inicio de mi proceso en la investigación.

A la doctora Sandra Milena Zapata, quien estuvo presente desde el inicio de mi proceso, dispuesta para realizar intercambios de conocimientos y posturas académicas que ayudaron en mi formación, por sus recomendaciones, aclaraciones e intervenciones en algunos aspectos de mi trabajo de investigación oportunos en su momento.

Al doctor Walter F. Castro Gordillo, por poner a mi disposición en todo momento, su experiencia y conocimiento de manera incondicional, por sus recomendaciones y observaciones que contribuyeron al refinamiento de mi trabajo de investigación.

Al doctor Edgar Gualdrón Pinto, quien colocó su experiencia y conocimiento para proponer orientaciones y observaciones que contribuyeron al refinamiento de mi trabajo de investigación.

A la doctora Débora da Silva Soares, por poner a nuestra disposición su aportes teóricos y metodológicos para el refinamiento del trabajo de investigación.

Al doctor John Henry Durango Urrego, por alentarme en todo momento, por brindarme su apoyo y conocimiento de manera incondicional, por disponer sus recomendaciones, observaciones y perspicacia académica al refinamiento de mi trabajo de investigación.

A los profesores José Alberto Rúa Vásquez y Jorge Alberto Bedoya Beltrán, por brindar de manera oportuna críticas constructivas su disposición y colaboración.

A los profesores que integran el Grupo de Investigación Edumath, por su disponibilidad y tiempo para aportar elementos que contribuyeron al refinamiento de mi trabajo de investigación.

A los profesores y compañeros de los seminarios de investigación, por su tiempo dedicación, asesorías y consultas personalizadas, quienes estuvieron dispuestos en todo momento para reflexionar, evaluar, aportar, orientar y consolidar mi trabajo de investigación.

A los profesores participantes del proceso de investigación, por su entrega en cada momento y brindar de manera oportuna críticas constructivas, cuyo propósito era fortalecer mi trabajo de investigación.

A Federico y Guillermo, por brindarme su experiencia, consejos, ayuda incondicional en todo momento y por acompañarme en momentos difíciles.

A mi sobrino Miguel, por su tiempo y apoyo incondicional.

A mis hijos, por esperarme en cada momento y apoyarme en todo el proceso.

A mis padres, Antonio Abad Rolong Domínguez y Silvia Diosa Molinares Caro, quienes a través de sus consejos me motivaron permanentemente.

A mi familia y amigos, quienes me brindaron su apoyo, entendieron mis ausencias y siguieron de cerca mi proceso.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

GLOSARIO

Concepto, es la capacidad que tiene un estudiante a través de sus procesos de reflexión interna y externa de manera continua para organizar propiedades, similitudes y diferencias relacionadas con un objeto, animal o cosa.

Representación analítica, constituida por la interpretación gráfica que se asocia con un fenómeno y en la que se involucran características y propiedades.

Representación algebraica, caracterizada en este contexto por el empleo de símbolos como variables, para tratar de estructurar expresiones que modelan fenómenos.

Crecimiento de la comprensión, expresión que denota la evolución que un estudiante exhibe en el proceso de aprehensión de un concepto matemático, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

Proceso, hace referencia en nuestro contexto a la secuencia de acciones, expresiones y procedimientos que involucran reflexiones mentales realizadas por un estudiante para resolver un problema o un interrogante.

Resolución de una ecuación diferencial, hace alusión a las acciones, técnicas y métodos, que un estudiante emplea en procesos de enseñanza y aprendizaje para dar respuesta a un interrogante en una situación planteada.

RESUMEN

La tesis doctoral titulada “Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial”, se justifica desde el punto de vista práctico, teórico y metodológico, los cuales dan cuenta de la importancia que tiene la comprensión de conceptos matemáticos para abordar problemas en contextos naturales. La naturaleza del problema planteado insinuó la necesidad de comprender conceptos matemáticos al abordar situaciones en el marco de las ecuaciones diferenciales, motivo por el cual la investigación tuvo por objetivo analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, para lo que se empleó como referente teórico las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

Para dar una respuesta a la pregunta ¿Cómo es la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial? la investigación empleó un enfoque de carácter cualitativo de naturaleza exploratoria descriptiva, en la que se emplearon los experimentos de enseñanza como herramienta metodológica para recolectar información relacionada con la comprensión de los estudiantes, sobre conceptos matemáticos involucrados en las diferentes situaciones planteadas en la entrevista. El análisis de los resultados del experimento de enseñanza en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, y el análisis retrospectivo, permitieron, por un lado, analizar el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes, en los que intervinieron procesos de *folding back* y los descriptores propuestos y refinados en transcurso del trabajo de campo, por otro, identificar la ruta conceptual seguida por cada participante, en la comprensión de los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, al abordar las diferentes situaciones planteadas, asimismo, se estableció una sinergia entre las complementariedades de la acción y la expresión y las acciones a seguir en los experimentos de enseñanza.

Palabras clave: comprensión, experimentos de enseñanza, ecuación diferencial, conceptos matemáticos.

ABSTRACT

The doctoral thesis entitled "Understanding of concepts involved in resolution processes of a differential equation", is justified from the practical, theoretical and methodological point of view, which realize the importance of understanding mathematical concepts to address problems in natural contexts. The nature of the problem posed hinted at the need to understand mathematical concepts when addressing situations within the framework of differential equations, which is why the research aimed to analyze how students understand the concepts involved in the resolution processes of a differential equation, in order to what was used as theoretical reference the complementarities of the action and the expression of the theory of Pirie and Kieren (1994).

To give an answer to the question: How is the understanding of the students about the concepts involved in the resolution processes of a differential equation? the research used a qualitative approach, of a descriptive exploratory nature, in which teaching experiments were used as a methodological tool to collect information related to the students' understanding of mathematical concepts involved in the different situations raised in the interview. The analysis of the results of the teaching experiment within the framework of the complementarities of action and expression and the retrospective analysis allowed, on the one hand, to analyze the level of understanding reached by the students, in which processes of folding back and the proposed descriptors, on the other hand, to identify the conceptual route followed by each participant, in understanding the concepts of rate of change, derivative, antiderivative and first-order linear differential equation, when addressing the different situations raised, likewise, a synergy was established between the complementarities of action and expression and the actions to follow in the teaching experiments

Keywords: comprehension, teaching experiments, differential equation, mathematical concepts.

Introducción

La tesis doctoral titulada *Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial*, se justificó desde el punto de vista teórico, con investigaciones que reportaron las dificultades exhibidas por estudiantes para articular registros numéricos y gráficos, al abordar situaciones planteadas que involucran ecuaciones diferenciales (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010), de igual manera, se referenciaron estudios como el de Rodríguez y Quiroz (2016) quienes reportaron dificultades para realizar procedimientos analíticos ejecutados por los estudiantes en la solución de una ecuación diferencial y estudios como el de Nápoles,Valdés, González, Brundo, Genes y Basabilbaso (2004), quienes informan acerca de la escasa comprensión que presentan los estudiantes sobre el proceso de solución de una ecuación diferencial, entre otros.

De igual modo, se tuvo en cuenta investigaciones como la de Rasmussen (2001) y Rasmussen y Kwon (2007) quienes presentaron un marco teórico como propuesta para analizar la manera como los estudiantes aprenden matemáticas, mediante la buena argumentación y, la forma cómo éste marco contribuye a la reconstrucción de los conceptos matemáticos a través de técnicas analíticas. Desde el punto de vista práctico, el estudio se sustentó a través de investigaciones que reportan dificultades para relacionar procedimientos algebraicos, numéricos y gráficos; (Cervantes, Ordoñez, y Morales, 2020) y emplear elementos tecnológicos en diferentes sistemas de representación en la solución de una ecuación diferencial (Martins, 2013), asimismo, se apoyó en las observaciones realizadas en aulas de clase, cuando los estudiantes desarrollan procesos ejecutados para resolver una situación planteada.

Adicional a lo anterior, el estudio empleó un marco metodológico relacionado con los experimentos de enseñanza, lo que permite identificar la ruta conceptual empleada por los estudiantes para comprender conceptos matemáticos mediante las complementariedades de la acción y la expresión. Finalmente, la necesidad de analizar y detallar la comprensión de los estudiantes sobre conceptos matemáticos involucrados en situaciones planteadas, así como las posibles relaciones que se pueden establecer entre ellos, las investigaciones, artículos y conferencias rastreadas, entre otras, propiciaron elementos de convergencia que justifican la pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren en la investigación, la que a su vez, proporcionó objetos de reflexión para analizar la información recolectada en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

La tesis está conformada por cinco capítulos, los cuales proporcionan un sustento teórico que permitió dar respuesta a la pregunta y a la consecución del objetivo de investigación. El capítulo 1 presenta antecedentes relacionados con la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales, el planteamiento del problema se sustentó en: marco teórico, práctico y metodológico, los que a su vez, dieron lugar a la formulación de la pregunta de investigación ¿Cómo es la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial? y, para tratar de dar respuesta a esta pregunta se propone como objetivo, analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

El capítulo 2 presenta el marco que involucró la teoría del crecimiento para la comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren (1994), los niveles de comprensión y sus características, asimismo, se muestran algunos estudios en los que se empleó la teoría en mención para dar respuesta a problemas que involucran la comprensión de conceptos matemáticos. Lo anterior constituye un referente teórico que permitió el análisis de la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, formulados en las diferentes situaciones planteadas en la entrevista.

El capítulo 3 presenta la metodología, en ella se describen los participantes y sus características, además, se especifica cómo se construyó la entrevista y los fundamentos teóricos empleados, se explicita el trabajo de campo realizado, su contexto, ejecución, las fases desarrolladas y, finalmente, se reseña la forma en que se recolectó la información en el experimento. En el capítulo 4 se presentan los análisis y los resultados de la investigación, para este efecto, se describieron los criterios para efectuar el análisis en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión. Adicionalmente, se emplearon los experimentos de enseñanza (Molina, 2011), para identificar la ruta conceptual usada por los estudiantes para comprender los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, y con ello manifestar algunas posturas y reflexiones en correspondencia con el análisis realizado.

Finalmente, se exponen conclusiones dirigidas a dar una respuesta para la pregunta de investigación y la consecución del objetivo planteado, se exponen algunas dificultades percibidas en la investigación y se plantean posibles ramas de investigación a futuro, las cuales emergieron durante el desarrollo de la investigación. De igual modo, se explicitan algunos aportes en el campo de la Educación Matemática, relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos, para los cuales se tuvo en cuenta el análisis de los resultados.

1. Antecedentes

1.1. Contextualización del planteamiento del problema

Estudios relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos, razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales ponen de manifiesto algunas dificultades exhibidas por los estudiantes para abordar una situación planteada y resolver problemas en un ambiente natural. En este ámbito, la revisión de literatura muestra investigaciones que dan cuenta del proceso que siguen los estudiantes para comprender, analizar, interpretar y relacionar conceptos en diferentes contextos conforme se analiza la información, dando cuenta del progreso de los estudiantes en su proceso de comprensión; en este contexto, a continuación, se presentan algunos estudios que examinan algunas de las dificultades exhibidas por los estudiantes.

1.1.1. Estudios relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos

La comprensión de conceptos matemáticos es importante en todo proceso de enseñanza y aprendizaje, para analizar los fenómenos ligados a la naturaleza, de tal manera que posibiliten visualizar construcciones en diferentes sistemas de representación, para los que se emplean la interpretación, conexiones, esquemas y abstracciones, entre otros. Asimismo, se puede considerar como un proceso que implica construir ideas relacionadas con las características y propiedades de un concepto matemático, susceptibles a cambios y representaciones simbólicas que permitan desarrollar paso a paso diferentes actividades, que involucran estructuras conceptuales y posibilitan relaciones matemáticas.

En esta línea, Sfard (1991) considera la comprensión como una forma de elaborar esquemas mentales que permiten relacionar los conceptos matemáticos a través de representaciones como objetos, símbolos y artefactos, las cuales dependen de la capacidad que tiene un individuo para relacionar sus ideas con los elementos del medio que lo rodea. De igual modo, expresa que la evolución de la comprensión de los conceptos matemáticos, puede emerger de alguna manera por procedimientos y luego por abstracciones mediadas por las interacciones entre lo operacional y estructural (Sfard, 2001). Por su parte, Skemp (1993) propone analizar la comprensión de un estudiante según la matemática relacional e instrumental, la primera, se caracteriza por saber qué hacer, por qué se debe hacer y por poseer estructuras conceptuales, que posibiliten desarrollar construcciones mentales o físicas para el desarrollo de alguna actividad, la segunda, hace referencia a conocer qué hacer para abordar una situación planteada que posibilite acceso rápido a algunas respuestas. Estas concepciones permiten dejar la visión unidimensional de lo correcto y lo incorrecto en la resolución de un problema, para visualizarla como un fenómeno que puede presentar diferentes tipos de comprensión, concebido no sólo como un logro, sino como el desarrollo de actividades mentales de manera continua que pueden relacionarse con otras áreas del saber.

Por otra parte, las estructuras de conocimiento permiten examinar las posibilidades para establecer relaciones entre los conceptos matemáticos, de tal manera que se construyan y se reorganicen (Meel, 2003), según la teoría de Pirie y Kieren (1989) y al análisis que se puede realizar con ella sobre el crecimiento de la comprensión de conceptos matemáticos. Al mismo tiempo, manifiesta que la teoría mencionada se puede considerar como una estructura de conocimiento avanzado, que permite examinar las relaciones que se pueden establecer entre conceptos matemáticos. Meel (2003) también hace referencia a la teoría APOE (Dubinsky,1991), en la cual se considera que la comprensión comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, empleando procesos de abstracción reflexiva de Piaget, en comunión con las etapas de acción, proceso, objeto y esquema, para la comprensión de conceptos matemáticos que posibiliten construir y organizar conexiones entre ellos.

Por su parte, Gallardo (2004) considera la comprensión como un proceso en desarrollo, que posibilita analizar las capacidades y habilidades para reorganizar y reestructurar nuevas conexiones entre conceptos a través de representaciones, relaciones y modelos mentales, que permiten la evolución del conocimiento. En el contexto de la comprensión de conceptos matemáticos, Villa (2011) elabora una interpretación alterna de la tasa de variación, usando de manera simultánea representaciones geométricas, numéricas y cinemáticas. En este estudio, se evidenció un análisis de la comprensión de este concepto al emplear la teoría de Pirie y Kieren, teniendo en cuenta los procesos de *folding back* en los niveles propios que la teoría postula, lo que permitió evidenciar la evolución en la comprensión de los estudiantes.

En el mismo contexto, Londoño (2011) en su investigación emplea la teoría para el crecimiento de la comprensión de Pirie y Kieren (1994) y los procesos de *folding back*, para mostrar una comprensión de la relación inversa entre los conceptos de área bajo una curva y la pendiente de una recta tangente en un punto a una curva, inherentes al teorema fundamental del cálculo. En su investigación, logra identificar y caracterizar las ideas intuitivas y formales de los participantes en los cuatro primeros niveles de la teoría en mención, a través de descriptores en el marco de una entrevista semiestructurada de carácter socrático.

Por su parte, Delgado, González y Monterrubio (2013) analizan el proceso que siguen los estudiantes al tratar de realizar conexiones entre diferentes concepciones matemáticas, proponiendo la resolución de una actividad relacionada con el cálculo de la altura y el volumen de una torre, en el que involucra un trabajo con series armónicas, en particular, al emplear el concepto de serie numérica. Los autores muestran la evolución de la comprensión de los estudiantes sobre este concepto, al analizar los procesos de *folding back* y las interacciones involucradas en el mismo proceso de comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. En la misma línea de comprensión, Rodríguez, Ponce y Pérez (2016) analizan el tipo de conocimiento y las técnicas empleadas por los estudiantes para lograr transferencias matemáticas en diferentes sistemas de representación, los cuales proporcionan una autonomía en un proceso de aprendizaje que les permita establecer una relación entre la aplicación y el conocimiento intrínseco del concepto.

De otro lado, Godino (2017) expresó la complejidad que tiene el conocimiento matemático, tanto individual como colectivo, al reflexionar sobre el uso de las nociones de comprensión conceptual y la capacidad que tiene un estudiante para aplicarla en la resolución de un problema, para ello, emplea un modelo cognitivo que utiliza componentes del lenguaje matemático en una perspectiva práctica y conceptual. En particular, dados los procesos de enseñanza aprendizaje sobre conceptos matemáticos en los que se involucran la reflexión, explicación y abstracción, un estudiante puede establecer una relación en diferentes contextos, si la comprensión que exhibe le permite precisar expresiones que posibiliten visualizar algún tipo de correspondencia con otros conceptos en diferentes contextos.

A partir de las observaciones en las diferentes actividades de clase y del intercambio de experiencias entre profesores de la asignatura de ecuaciones diferenciales, emergen algunas preguntas que originan debates sobre los procesos de comprensión estudiantil, entre ellas: ¿Cómo comprenden los estudiantes? ¿Qué tipo de comprensión exhiben? ¿Con qué herramientas o instrumentos se cuenta? ¿Qué tanto influye en la resolución de una ecuación diferencial la comprensión de conceptos matemáticos? Las preguntas expuestas anteriormente, proponen un interés por analizar el grado de comprensión de conceptos matemáticos, la capacidad de abstracción, de razonamiento y la habilidad para resolver problemas, las cuales son actividades cognitivas imprescindibles que requieren diferentes registros de representación, como lo declara Duval (2004) al manifestar que un estudiante debe recurrir a diferentes registros de representación para comprender un concepto.

Por otro lado, la integración de las tecnologías de la información y la comunicación en los diferentes campos de la ciencia, en particular, en las ecuaciones diferenciales, surge por la necesidad de transformar las prácticas en el aula de clase, para analizar de qué manera los estudiantes integran el conocimiento en diferentes contextos usando herramientas tecnológicas, muchas veces influenciado por la capacidad de reflexión y asimilación del estudiante, para expresar de manera explícita e implícita su solución. Hasta el momento, se divisan diferentes posturas epistémicas que involucran procesos de elaboración, relación, construcción y abstracción, que dan lugar a reorganizar un conocimiento para comprender un concepto matemático, de igual manera, se perciben dificultades para realizar los procesos mencionados anteriormente al abordar un problema o tratar de resolver una situación planteada.

Dichas posturas y el presente estudio presentan similitudes dado que están enfocadas hacia el proceso de compresión de conceptos matemáticos; la diferencia radica en que la presente investigación se centró en los procesos de resolución, mientras que las investigaciones antes mencionadas se concentraron en la solución de problemas y la manera cómo la comprensión de los conceptos matemáticos contribuía para tal fin. Los aportes de cada estudio permitieron a la presente investigación explorar nuevos caminos, así como considerar otras perspectivas y dinámicas que posibilitaron dilucidar qué tipo de comprensión exhibían los estudiantes, no solo en la solución de una ecuación diferencial sino en el proceso de resolución de la misma.

Así entonces, se logró vislumbrar la manera cómo los estudiantes establecen relaciones entre sus conocimientos para explicitar sus ideas en el proceso de resolución. En este sentido, Pirie y Kieren (1994) visualizaron dos aspectos complementarios, necesarios para alcanzar la comprensión de conceptos matemáticos, los cuales constituyen el foco de interés del presente estudio. A continuación, se mencionan algunas investigaciones en matemáticas avanzadas relacionadas con el concepto de razón de cambio que brindan información sobre las dificultades que exhiben los estudiantes para comprender dicho concepto.

1.1.2. *Estudios relacionados con la comprensión del concepto de razón de cambio*

Fenómenos como velocidad y aceleración de un automóvil, fuerza aplicada, presión, crecimiento o decrecimiento exponencial de bacterias, calentamiento o enfriamiento de la temperatura de un cuerpo, entrada y salida de una composición salina diluida en un líquido a razón constante en un recipiente, entre otros, se dan a diario e involucran variables que están propensas a cambios de manera simultánea o individual algunas veces perceptibles, en este sentido, Dolores (2010) afirma que es importante el estudio de fenómenos en los que se aprecien variaciones de unas variables con respecto a otras, para analizar qué tan rápido se manifiestan los cambios entre ellas. El interés de algunos investigadores para proponer estudios en los cuales se puedan analizar dichos cambios, muestra las dificultades para afrontar las diferentes situaciones y, de alguna manera, la influencia que tienen los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre su percepción.

Las observaciones realizadas en las aulas de clase muestran, por un lado, las dificultades que exhiben los estudiantes para establecer una relación entre expresiones algebraicas y el enunciado de un problema, lo que les impide efectuar algunos procesos de razonamiento y de comprensión para hallar una solución adecuada, por otro, las habilidades para analizar los cambios de las variables involucradas en la resolución de un problema, que faciliten una comprensión amplia de los conceptos inherentes al mismo. Con estos asuntos emergen planteamientos que pocas veces presentan conexiones para describir las relaciones entre las variables involucradas, por lo que surge la necesidad de analizar el razonamiento estudiantil para establecer dichas conexiones, mediante el empleo de conceptos matemáticos como razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, derivada y antiderivada.

Dichas dificultades emergen quizás por el tratamiento algebraico dado en el proceso de enseñanza aprendizaje que usualmente se emplea para los conceptos mencionados anteriormente, las cuales no le permiten representarlos y organizarlos. En particular, los estudiantes conciben en forma independiente y desconectada las nociones de razón de cambio promedio con la pendiente de una recta secante a una función, al igual que la noción de razón de cambio instantánea con la pendiente de una recta tangente a una curva (Dolores, Chi, Canul, Cantú, y Pastor, 2009). En este contexto, un estudiante manifiesta concepciones erróneas como consecuencia de comprensiones equivocadas, producto de la resistencia para manipular símbolos que permitan establecer relaciones entre conceptos involucrados, lo que llama la atención en algunos investigadores, ya que el concepto de razón de cambio toma importancia por la utilidad que representa en la resolución de problemas en diferentes ambientes de la vida cotidiana.

En este sentido, los fenómenos mencionados han estimulado el interés de algunos investigadores para analizar de qué manera se involucra el concepto de razón de cambio en ellos. En este sentido, Luna, Ruiz, Loera, Barrón y Salazar (2013) realizaron experimentos sobre fenómenos físicos, en los que se trata de motivar al estudiante para interpretar el concepto de razón de cambio en un contexto natural y lo puedan relacionar con el concepto de derivada.

Se debe aclarar que inmerso en los procesos cognitivos están las interpretaciones gráficas que se pueden hacer a una función, a través de las cuales se expresan relaciones que evidencian cambios en las variables inherentes al fenómeno analizado. En este sentido, Dolores, García y Gálvez (2017) analizan el concepto de razón de cambio cuando estudiantes de bachillerato interpretan gráficamente una función como un punto o como una magnitud, a través de la cual se analiza el concepto de pendiente sin examinar el concepto de velocidad, con el fin de identificar los cambios conceptuales que se pueden generar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un estudiante. De igual modo, se han incorporado acciones en los procesos cognitivos como lo manifiesta Fuentealba (2017), quien declaró que los estudiantes establecieron relaciones de manera puntual y global al asociar el signo de la primera derivada con el proceso que permitió inferir el comportamiento de la razón de cambio de una función en un intervalo, con el cual dieron a conocer los valores extremos o puntos de inflexión.

Por otra parte, los diversos ambientes de aprendizajes que se pueden integrar con las tecnologías de la información y la comunicación, pueden apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en particular, las ecuaciones diferenciales, mediante la adaptación de modelos a las herramientas tecnológicas que permitan recabar información para analizar las convergencias, similitudes y diferencias en diversos sistemas de representación, y a su vez, den cuenta de los cambios que ocurren entre las variables (Gutiérrez, Buitrago y Ariza, 2017). En este contexto, la investigación de Zúñiga (2017) dio a conocer que el uso de los sistemas algebraicos y numéricos para el aprendizaje de la razón de cambio no es suficiente, siendo las herramientas tecnológicas, entre ellas, las calculadoras graficadoras y los computadores, elementos que contribuyen en cierto modo para la comprensión de dicho concepto. Además, mostró que los estudiantes comprendieron el concepto de pendiente como razón de cambio a través de secuencias didácticas, en las cuales se emplearon las mencionadas herramientas tecnológicas.

Hasta el momento, las investigaciones consultadas sugieren, por un lado, el estudio de la comprensión del concepto de razón de cambio en diferentes campos de la ciencia, en particular, aquellos involucrados en el cálculo diferencial, integral y afines, por otro, la importancia que tiene adecuar herramientas educativas y tecnológicas para comprender una solución en la que se involucra el concepto mencionado. En síntesis, los estudios indagados muestran la aplicación del concepto de razón de cambio en diferentes disciplinas cientificas, lo que se constituye como un concepto que proporciona una estrecha relación con otros que indican cambios de una variable con respecto a otra, referenciados en estudios del cálculo diferencial, integral y las ecuaciones diferenciales, brindando así un carácter de transversalidad del concepto en diferentes sistemas y contextos; de allí la importancia de su estudio, toda vez que se observan dichas variaciones entre las variables involucradas.

1.1.3. Estudios relacionados con la comprensión del concepto de derivada

El análisis de la naturaleza de los fenómenos físicos, biológicos, químicos y mecánicos, entre otros, así como el estudio de los cambios que presentan las variables involucradas en ellos, es el interés de algunos investigadores en Educación Matemática. Analizar los cambios de las variables asociadas a los fenómenos antes mencionados, requiere de métodos y estrategias que demandan relaciones matemáticas para promover su comprensión, los cuales se relacionan en la enseñanza del cálculo diferencial (Vrancken y Engler, 2014). Sin embargo, los estudiantes al abordar situaciones que involucran algunos de los fenómenos mencionados, exhiben dificultades para manifestar razones de cambio y de variación a través de expresiones algebraicas que permitan comprender el fenómeno en cuestión.

Lo anterior se debe quizás al tratamiento algebraico dado a los conceptos matemáticos en la enseñanza del cálculo diferencial, a los contenidos teóricos presentados por profesores de manera descontextualizada y a los obstáculos de carácter epistemológico, conceptual y procedimental (Portillo, Avila, Cruz y López, 2019). Los estudiantes al abordar una situación planteada que involucra el concepto de derivada, realizan operaciones algebraicas para hallar una solución, reduciendo este concepto a procesos en los que se manipulan técnicas y algoritmos. En este contexto, emergen algunas dificultades para realizar abstracciones y análisis de información gráfica que requieren procesos de comprensión y razonamiento (Dolores, 2000).

Es así como no podría señalarse el método que pueden emplear los estudiantes que promueva la comprensión de conceptos matemáticos, de igual modo, se desconocen las herramientas que pueden proporcionar una comprensión adecuada de fenómenos que involucren el cambio o variación de magnitudes (Vrancken y Engler, 2014). Se colige la importancia de dotar con herramientas teóricas y ejemplos contextualizados a los cursos de matemática, en particular, cálculo diferencial, integral y afines, con el propósito de brindar al estudiante constructos matemáticos que le permitan visualizar conexiones entre los conceptos en diferentes sistemas de representación y, en algunos casos, emplear herramientas tecnológicas que promuevan el proceso de comprensión y de razonamiento.

En esta línea de trabajo, la revisión de literatura muestra investigaciones como las de Sealey y Flores (2005), quienes analizan la importancia que tienen los conceptos de función, razón de cambio y límite en la comprensión de la derivada de una función, como también, los obstáculos que limitan al estudiante para relacionar las concepciones en otros sistemas de representación, por lo que proponen diferentes estrategias de enseñanza que posibiliten relacionarlo con la razón de cambio de la función que da el área bajo una curva. De igual modo, Sánchez, García y Llinares (2008) plantean la comprensión de este concepto en diferentes contextos, direcciones y formas, declarando que se puede establecer como una relación en diferentes sistemas de representación entre los conceptos de razón de cambio y cociente incremental o como una correspondencia entre la derivada de una función en un punto y su operador.

En este sentido, las herramientas tecnológicas muestran las conexiones y representaciones de una forma versátil, que facilitan la comprensión de conceptos matemáticos en diferentes contextos. Al respecto, Soares y Borba (2014) manifiestan que las herramientas tecnológicas son importantes dada la diversidad de información, significados e interpretaciones en diferentes ámbitos, que permiten recrear eventos físicos, biológicos y químicos, entre otros. Por otra parte, la enseñanza de conceptos matemáticos, en particular los del cálculo diferencial, requieren de nuevos retos, dado que los profesores no suelen emplear metodologías y estrategias en las que se propongan ejercicios cuya respuesta esté representada en diferentes sistemas de representación, entre ellos, el gráfico, el algorítmico, el analítico o el cualitativo. De acuerdo con Portillo, Avila, Cruz y López (2019), estos sistemas de representación mediados por herramientas tecnológicas, permiten desarrollar habilidades y abordar problemas en diferentes contextos (Weurlander, Cronhjort y Filipsson, 2017) brindando soluciones acordes con las necesidades y exigencias de diferentes programas y profesiones.

En particular, las diversas formas que se pueden emplear para representar el concepto de derivada en diferentes contextos, apoyados por herramientas tecnológicas que permitan relacionarlo con diferentes sistemas de representación, pueden conducir a la comprensión del mismo, sin embargo, estos procesos dependen de la capacidad para analizar, sintetizar e interpretar la información suministrada en una solución, que permitan proponer descripciones aproximadas y transversales en otros campos del saber.

Hasta el momento, en las investigaciones consultadas se manifiesta la importancia que tiene analizar el concepto de derivada y las dificultades que exhiben los estudiantes para comprender y relacionarlo en otros sistemas de representación, bien sea, física, mental o mediante herramientas tecnológicas con las que se pueda visualizar geométricamente el concepto. Además, muestran la forma cómo los estudiantes a través de un proceso, técnica o estrategia, se puede orientar para adquirir un conocimiento y dar un significado o una interpretación sobre una solución, que permita evidenciar la comprensión del mismo concepto de derivada. A continuación, se presentan algunas investigaciones relacionadas con la comprensión del concepto de integral, que exponen las manifestaciones de los estudiantes y la manera cómo lo conciben.

1.1.4. Estudios relacionados con la comprensión del concepto de integral

La comprensión del concepto de integral en Educación Matemática, ha motivado diversos estudios, algunos centrados en perspectivas gráficas y numéricas, otros, enfocados en la visualización de la integral como el área bajo la curva de una función y como límite de una suma de Riemann. Asimismo, hay estudios que vinculan el desarrollo de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto matemático mencionado anteriormente, cuyo objetivo es analizar las dificultades que exhiben los estudiantes para hallar una primitiva y la forma en que la relacionan con la derivada de una función.

En este contexto, la revisión de literatura muestra investigaciones como las de Metaxas (2007), Camacho, Depool y Garbin (2008), Porres, Pecharmán y Ortega (2017), Thompson y

Silverman (2007) y Saparwadi, Sa`dijah, Rahman y Daniel (2019) relacionadas con la comprensión de conceptos matemáticos, en particular, el concepto de integral definida, en los que se proponen estudios que involucran marcos teóricos para analizar la comprensión estudiantil teniendo en cuenta las estrategias y métodos para abordar un problema y aplicar dicho concepto; cabe resaltar que las interacciones sociales y los procesos de formación de un estudiante influyen en la aplicación de un concepto (Pensado, Ramírez, y González, 2017).

De igual modo, los estudiantes al emplear herramientas tecnológicas pocas veces establecen relaciones entre la gráfica de una función, su derivada y su primitiva; por ejemplo, se les dificulta establecer que en cualquier punto sobre la curva de una primitiva, la pendiente de la recta tangente es igual a la coordenada y del par ordenado (x, y) perteneciente a la gráfica de la función (Swidan y Yerushalmy, 2014). Por otro lado, Metaxas (2007) considera que los estudiantes exhiben dificultades para comprender y manipular el concepto de integral definida, dado que este proceso lo realizan de manera algorítmica y pocas veces otorgan significado a una primitiva. Este hecho fue tratado por Camacho, Depool y Garbin (2008), quienes manifiestan que los estudiantes interpretan la integral como el área bajo la curva de una función y resaltan que los estudiantes no manifiestan dificultades para hallar las primitivas de funciones continuas, sin embargo, advierten que estas surgen cuando la función es continua por tramos, por lo que proponen analizar los aspectos cognitivos empleados por los estudiantes al hallar las primitivas en este tipo de funciones.

En el proceso del cálculo de las primitivas de una función, autores como Porres, Pecharmán y Ortega (2017) analizan el proceso de enseñanza del concepto de integral, teniendo en cuenta dos perspectivas, por un lado, emplean el software *Derive* para mejorar la comprensión de dicho concepto, por otro, usan el cálculo mental en la resolución de problemas para hallar primitivas de funciones. En este último, los estudiantes manifiestan algunas dificultades para realizar este proceso, dado que pocas veces tienen en cuenta las constantes de integración, desconocen las funciones elementales como una familia de funciones, derivan una función de manera errada y utilizan, incorrectamente, las tablas de derivadas elementales. Adicionalmente, Thompson y Silverman (2007) expresan que los estudiantes centran su atención en la búsqueda numérica de la integral de una función como el área bajo una curva, además, consideran que el desarrollo de los conceptos de acumulación, variación y sumas de Riemann es fundamental en la comprensión del mismo, de igual modo, manifiestan que en la práctica son pocos los profesores que los enfatizan para lograr una comprensión del objeto matemático integral.

Las dificultades mencionadas anteriormente, han generado investigaciones para analizar la comprensión del concepto de integral definida, por lo que se han propuesto estudios como los de Camacho, Depool y Garbin (2008) y Saparwadi, Sa`dijah, Rahman y Daniel (2019) en los que se involucren estrategias que posibiliten visualizarlo mediante herramientas tecnológicas en diferentes contextos y sistemas, que brinden la posibilidad de analizar cómo los estudiantes emplean los conceptos involucrados para hallar una primitiva, y a su vez, relacionarla gráficamente con su derivada.

En este contexto, Camacho, Depool y Garbin (2008) también emplean el software Derive a través de *Computer Algebra System*, para analizar la manera cómo los estudiantes expresan una primitiva en diferentes sistemas de representación, lo que permite analizar las concepciones estudiantiles sobre el concepto de integral. En este sentido, Saparwadi, Sa`dijah, Rahman y Daniel (2019) declaran que la habilidad mental de un estudiante para regresarse en el proceso cognitivo al hallar una primitiva, al que denominan pensamiento reversible, permite recorrer el camino utilizado desde la función hasta su primitiva y viceversa, empleando el software Maple, posibilitando visualizar gráficamente la derivada y su primitiva sin necesidad de realizar cálculos manuales, los cuales algunas veces son imprecisos; sin embargo, los estudiantes pueden contrastar las respuestas obtenidas entre el cálculo manual y el realizado por Maple para verificar cuál de ellas logra un mayor acercamiento a la gráfica.

De acuerdo con lo anterior, los estudios muestran algunas dificultades exhibidas por los estudiantes para comprender el concepto de integral y establecer una relación entre la derivada de una función con su primitiva, algunos autores proponen emplear el uso de software Maple para comprender el concepto de integral.Sin embargo, de las acciones mentales emergentes en los procesos cognitivos para hallar una primitiva de una función y las expresiones generadas para representarlas en forma algebraica, numérica, gráfica o analítica en diferentes sistemas, pocas veces se explicita el tipo de relación que establecen los estudiantes entre las acciones y las expresiones que evidencien la compresión de conceptos matemáticos involucrados en la primitiva de una función. A continuación, se presentan algunos estudios en los que se relacionan, marcos teóricos, estrategias y dificultades para comprender la solución de una ecuación diferencial.

1.1.5. Estudios relacionados con la compresión de una solución de una ecuación diferencial

La resolución de problemas que involucren fenómenos fìsicos, químicos y biológicos en los que se emplean conceptos, técnicas y métodos usados en ecuaciones difereciales, involucran elementos del cálculo diferencial e integral, los cuales se pueden relacionar en distintos contextos y con diferentes sitemas de representación. Sin embargo, en las aulas de clase se puede apreciar que los estudiantes presentan dificultades para hallar una solución empleando los elementos antes mencionados, así como para interpretar y comprender lo que fugazmente llaman un resultado. Habitualmente, los estudiantes al resolver una ecuación diferencial aplican de memoria algoritmos específicos de clasificación y resolución (Camacho, Perdomo y Santos Trigo, 2007), lo que genera algunas dificultades conceptuales y procedimentales que le imposibilitan aplicar apropiadamente los conceptos involucrados, quizás por el poco razonamiento y análisis que realizan en el proceso de resolución de una ecuación.

En particular, la falta de reflexión en la resolución de un problema, es una de las causas por las cuales emergen los obstáculos conceptuales, infundado posiblemente por el tipo de aprendizaje y la orientación recibida en el mismo, lo que impide de cierta manera que el estudiante discrimine entre la solución de una ecuación y la información subyacente a ella. En este sentido, se observa que los estudiantes para representar e interpretar los campos direccionales de una solución de una ecuación diferencial, manifiestan dificultades, por un lado, para organizar gráficamente la información inherente a la solución, por otro, al tratar de representar algebraicamente las observaciones sobre una gráfica, dado que ellos realizan una búsqueda numérica y no articulan registros de representación que le permitan relacionar el cálculo numérico con lo representado gráficamente (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales está influenciado por diversos agentes , entre ellos, por profesores que utilizan textos para proporcionar estrategias algorítmicas para modelar diferentes fenómenos, “disfrazando” de esta manera los conceptos matemáticos involucrados en los fenómenos, lo que conlleva a alejarse de los mismos y por ende, a dificultades para comprender una solución (Nápoles, González, Brundo, Genes y Basabilbaso, 2004). Asimismo, los procedimientos analíticos que se introducen en las disertaciones de los contenidos de programas de ecuaciones diferenciales para buscar soluciones a problemas, es otra influencia que predomina sobre los métodos numéricos y los cualitativos (Rodríguez y Quiroz, 2016). Además, los autores consideran que en la formación de estudiantes, no es factible aplicar un solo método para el aprendizaje de conceptos matemáticos, sino que se requieren de destrezas y habilidades para aplicarlos en otros contextos de formación para alcanzar un conocimiento.

Dullius, Araujo y Veit (2011) declararon que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales está orientada hacia el uso de métodos analíticos para hallar una solución y consideran que las herramientas tecnológicas, aunque poco usadas en estos procesos, permiten incrementar las posibilidades estudiantiles para comprender e interpretar una solución, no solo en términos de los procesos hacia donde están direccionadas, si no con el uso de softwares matemáticos, aunque pueden emerger algunas dificultades de tipo práctico para su implementación y uso en los que se involucran diferentes sistemas (Martins, 2013). De igual modo, al emplear las calculadoras graficadoras se pueden realizar análisis que permitan al estudiante ir desde un concepto matemático abstracto hasta una interpretación visual geométrica (Cornejo, Villalobos, Tabares, Soledad, y Rodriguez, 2013). Asi, Cervantes, Ordoñez y Morales (2020) manifiestan que los procedimientos algebraicos, numéricos y gráficos, son realizados sin vínculo entre ellos, por lo que proponen analizar el razonamiento estudiantil y la expresión de sus ideas, para tratar de establecer tipos de conexiones o desconexiones que por ellos son manifiestas, y describir fenómenos o significados de una solución de un problema, relacionado con los procedimientos antes mencionados.

Por otra parte, para interpretar la comprensión y dificultades de las ideas matemáticas relacionadas en ecuaciones diferenciales, Rasmussen (2001) propone un marco teórico centrado en el dilema de la función como solución y en las intuiciones, producto de la reflexión de los estudiantes, cuyo propósito es, por un lado, orientar su pensamiento hacia formas interpretativas, por otro, refinar y construir análisis gráfico y numérico en las soluciones de ecuaciones diferenciales. Con el fin de establecer mecanismos que propicien la solución de un problema, Rasmussen y Kwon (2007) proponen un marco teórico al interior del proyecto *An inquiry-*

oriented approach to under graduate mathematics (IO-ED)[1] que distingue dos categorías, la primera, centrada en aprender matemática a través de la buena argumentación, y la segunda, en el desarrollo de la capacidad del estudiante para reconstruir la matemática a través de técnicas analíticas, gráficas y numéricas que posibiliten examinar las soluciones de ecuaciones diferenciales.

De acuerdo con la revisión realizada, se encuentran estudios que resaltan la necesidad de analizar la comprensión de la solución de una ecuación diferencial. Estos estudios se han desarrollado teniendo en cuenta las dificultades que exhiben los estudiantes para realizar procesos de búsqueda desde su nivel más interno de conocimiento hasta el más externo y para establecer relaciones entre los conceptos matemáticos involucrados en la solución de una ecuación diferencial. Podría decirse entonces, que es necesaria una búsqueda de acciones y de expresiones en el razonamiento de los estudiantes que se complementen, tales que posibiliten la comprensión de conceptos matemáticos, la solución de una ecuación diferencial y los significados de la misma en diferentes sistemas de representación empleando herramientas tecnológicas que permitan comprender un fenómeno.

1.2. Planteamiento del problema

Las ecuaciones diferenciales modelan fenómenos relacionados con problemas físicos, biológicos, químicos y económicos, entre otros; en ellas se emplean a menudo las derivadas de funciones, y a su vez, relacionan en cierta manera la forma en la que cambian las variables que intervienen en cada situación analizada, constituyéndose como una herramienta fundamental en el campo científico para estudiar los cambios ocurridos en ciertos fenómenos del mundo físico. Si bien es cierto que antes del siglo XVII existían investigaciones que contribuyeron al desarrollo de las ecuaciones diferenciales, es a partir de esta fecha que se consolidan conceptos fundamentales para formar la base de una teoría rica, abundante e inherente a este campo específico de las ecuaciones diferenciales, en la que los investigadores matemáticos han podido

[1]El proyecto IO-ED se apoyó inicialmente en los enfoques para sistemas dinámicos contemporáneos desarrollados por Blanchard, Devaney y Hall (1998) y West (1996), los cuales representan un distanciamiento de los tratamientos convencionales a las ecuaciones diferenciales, que hacen hincapié en el empleo de una serie de técnicas analíticas para resolver una clase especial de problemas que estén bien planteados. En esta dirección, estos enfoques desarrollan técnicas analíticas, gráficas y numéricas como métodos distintos para analizar la solución de una ecuación diferencial.

brindar importantes soluciones a problemas propios de las ciencias, por lo tanto, ha sido un conocimiento indispensable a tener en cuenta en los currículos de los programas de ciencias e ingenierías en los que tanto estudiantes como profesores han tenido que enfrentar arduos razonamientos para interpretar y comprender una ecuación diferencial y su solución.

Por otra parte, la enseñanza de ecuaciones diferenciales ha tenido algunas transformaciones en las últimas décadas (Barros, Bosco y De Miranda, 2014) que proponen ciertas condiciones para que los estudiantes aprendan. Así mismo, los dota de autonomía para seleccionar un camino apoyado en diferentes métodos, estrategias y metodologías que le permitan resolver un problema o un fenómeno cuyo inicio se manifiesta con la introducción de estudios cualitativos, que conllevarán al análisis de la solución de una ecuación diferencial y las relaciones que se pueden establecer de manera cualitativa en diferentes sistemas de representación (Caicedo, 2017).

En este sentido, la introducción de software matemáticos y ordenadores es otra de las iniciativas de los investigadores para generar cambios en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, de tal manera que posibiliten modelar e interpretar su solución (Morales y Salas, 2010). De igual modo, al adaptar los avances de las calculadoras graficadoras e interactivas a las ecuaciones diferenciales, se suministran visualizaciones que despiertan el interés de estudiantes y profesores, por lo que dedican tiempo extra para su aprendizaje (Mora, Urquiza y Vásquez, 2017). Así emergen nuevas concepciones que dan lugar al análisis de la información obtenida de la solución en diferentes sistemas de representación. En este orden de ideas, las ecuaciones diferenciales han sido orientadas mediante programas que son motivados por una concepción formal de la matemática y emplean técnicas analíticas para obtener una solución (Dullius, 2009, p.37) que brindan una formación para resolver problemas, mediante el uso de definiciones y procedimientos matemáticos (Dullius, Araujo, y Veit, 2011) aplicados algorítmicamente por los estudiantes, los cuales dejan a un lado los procesos de razonamiento, análisis, abstracción, conceptualización, generalización, que a su vez, demandan distintas formas de expresión y representación (Duval, 2004).

En este contexto, dada una situación de un fenómeno planteado en una disciplina en particular, los estudiantes tratan de establecer expresiones en términos de ecuaciones diferenciales que modelen y describan dicho fenómeno y, para determinar su solución, usan conceptos matemáticos involucrados en métodos para hallar una solución pertinente (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009). Sin embargo, se observó que los estudiantes exhiben dificultades en la construcción de modelos matemáticos que representen dicha situación, ya que las relaciones que establecían entre los conceptos allí involucrados, entre ellos, razón de cambio, derivada y antiderivada, algunas veces no correspondían con el enunciado. Así entonces, los estudiantes obtuvieron resultados erróneos al aplicar procedimientos y algoritmos en la resolución de la ecuación diferencial que representaba al enunciado en cuestión (Nápoles y Negrón, 2002), lo anterior sucede, quizás, por el poco énfasis que se da en diferentes programas de ingeniería y ciencias afines para analizar fenómenos y establecer relaciones entre los conceptos matemáticos que cada estudiante posee (Camacho, Perdomo y Santos, 2007).

En esta dirección, los procesos de enseñanza seguidos por el profesor influencian a los estudiantes para determinar e interpretar la solución de una ecuación diferencial en diferentes sistemas de representación, ya que ellos imitan los procesos y métodos propuestos por él cuando tratan de determinar una solución y, en cierto sentido, el análisis cualitativo y analítico de la solución es escaso. Por otro lado, el texto empleado condiciona a los estudiantes para replicar los modelos, estrategias y técnicas allí tratadas, los cuales repiten de manera mecánica dejando a un lado los procesos de comprensión que le permita permear los conceptos, sistemas de representacion, interpretación y la soluciónn de la ecuación diferencial.

<u>En la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se observaron las dificultades que los estudiantes exhiben para comprender conceptos matemáticos involucrados en el respectivo proceso de resolución, dado que ellos pocas veces emplean un software y calculadoras graficadoras interactivas, como herramientas metodológicas que les permitan visualizar gráficamente la solucion de una ecuación diferencial y representarla en diferentes registros;</u> por ejemplo, para tratar de expresar de manera algebraica un campo direccional de una solución y viceversa, o para realizar un análisis gráfico de los resultados obtenidos en el proceso de resolución. Además, los estudiantes exhiben dificultades para visualizar gráficamente en los ordenadores el campo direccional y los resultados hallados, así como para analizar cualitativamente los mismos. Asumiendo esta postura, podría entonces considerarse que la relación entre registros de representación puede coadyuvar al proceso de comprensión de una ecuación diferencial (Sazhin, 1998; Kent y Nos, 2003; Kent, 2001).

En este sentido, el panorama planteado anteriormente muestra las dificultades que exhiben los estudiantes en la comprensión de conceptos matemáticos; este hecho afecta directamente la formación de los futuros ingenieros, debido a que pueden tener conceptos erróneos y al aplicarlos en el desarrollo de trabajos en su desempeño profesional, pueden generar problemas de orden social, industrial y económico, entre otros. De allí, la importancia de analizar la comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya que muchos de los problemas que se presentan a diario en contextos naturales, se pueden modelar y, por ende, trasladar a otros contextos.

Formulación del problema

Teniendo en cuenta que los fenómenos físicos, químicos, de crecimiento exponencial y económicos, entre otros, pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales para hallar una solución numérica a una situación planteada, los estudiantes emplean procedimientos algorítmicos, en los que aplican técnicas, fórmulas y algunas veces calculadoras graficadoras, asociados a procesos que algunas veces están alejados del debido razonamiento, lo que genera dificultades para comprender e interpretar los conceptos involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, a continuación, se formula la pregunta de investigación:

¿Cómo es la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial?

1.3 Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Indagar por las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada y los conceptos subyacentes a ellos.
- Elaborar descriptores para analizar la comprensión de estudiantes en el proceso de resolución de una ecuación diferencial.
- Describir los niveles de comprensión exhibidos por los estudiantes en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, en un proceso de resolución de una ecuación diferencial.

2. Marco teórico

2.1. Estudios relacionados con el concepto de comprensión

Dada la complejidad del pensamiento y las dificultades para recabar información que permita discernir el tipo de reflexiones, construcciones y transformaciones que realiza un estudiante para comprender un concepto matemático, los investigadores proponen estudios para conocer tanto el razonamiento como el tipo de relaciones que se pueden establecer entre algunos conceptos para comprender otros. Para tal fin, se emplean teorías y modelos, que posibilitan documentar información relacionada con aquellos procesos mentales para explicitar conceptos matemáticos, en los que se involucran pensamientos formales, no formales y lógicos.

En este sentido, la revisión de literatura muestra diversas acepciones dadas al concepto de comprensión, pero dada su complejidad no se establece una definición con la que se identifique plenamente. Al respecto, Skemp, referenciado en Gallardo (2004), establece una relación entre el concepto de comprensión con los procesos algorítmicos realizados por un estudiante al abordar un problema, de modo que saben qué hacer, pero no razonan debidamente, lo que es denominado por Skemp comprensión instrumental. De igual modo, analiza la capacidad que exhibe un estudiante al abordar un problema cuando intenta saber qué hacer y qué se debe hacer, al establecer posibles relaciones entre algunos conceptos, lo que Skemp nombra comprensión relacional.

Por otro lado, desde la perspectiva de Sierpinska (1990), se puede visualizar la comprensión de conceptos matemáticos como actos en los cuales se relaciona el significado de un concepto con la comprensión, mediante razonamientos en los que se relacionan los teoremas y conjeturas con las explicaciones y demostraciones, los que, a su vez, son considerados como objetos que facilitan la comprensión de conceptos. Por otra parte, Tall y Vinner (1981) expresan que al describir las características y elementos que conforman un concepto, se construye la imagen del concepto, mientras que para definirlo se establecen correspondencias entre el objeto representante y el representado a través de abstracciones físicas.

De igual modo, Sfard (1991) manifiesta que la comprensión de un concepto matemático requiere de un proceso constructivo que permite reorganizar el conocimiento de un estudiante, el cual está determinado por su capacidad para relacionar los conceptos conocidos, a través de acciones físicas, mentales y procedimientos algebraicos, desarrollados como una concepción operacional hasta una estructural, en la que se involucran representaciones abstractas. En este ámbito, las teorías y modelos cognitivos en contextos de enseñanza-aprendizaje permiten analizar la comprensión de conceptos matemáticos, entre ellas: el modelo de comprensión de conceptos geométricos propuesto por Van Hiele (1957), la teoría APOE de Dubinsky (1991) y la teoría para analizar el crecimiento de la comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren (1994).

En particular, en la resolución de una ecuación diferencial no solo podemos esperar que los estudiantes sepan qué hacer y qué se debe hacer al abordar un problema, sino que puedan establecer relaciones conceptuales, que involucren acciones mentales o físicas para explicitar expresiones de manera clara y precisa para interpretar su solución en sistemas de representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. A continuación, se explicitarán algunos aspectos relacionados con la teoría para la evolución de la comprensión de conceptos de matemáticos.

2.2. Teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren

La teoría para el crecimiento de la comprensión matemática emerge desde un enfoque constructivista propuesto por Von Glasersfeld (1987), que posibilita a un estudiante reflexionar y reorganizar su estructura cognitiva para formar nuevos conceptos. Pirie y Kieren (1991) apoyados en esta propuesta, consideran la comprensión matemática como un todo dinámico, no lineal, recursivo y jerarquizado de una reorganización de las estructuras cognitivas, el cual sucede en la acción y no como un resultado de estas.

Cabe resaltar que esta teoría se constituye en una herramienta que actúa como una lente, a través de la cual puede observarse el proceso de evolución en la comprensión de un concepto matemático de un individuo o de un grupo de individuos. Esta teoría considera que el fenómeno dinámico es un proceso que realizan los estudiantes para comprender un concepto matemático y la evolución del mismo, además, pone de manifiesto que el proceso de comprensión no tiene un orden específico, es decir, dado el cumplimiento de algunas condiciones pueden suceder otras, lo que concuerda con la no linealidad del mismo. Otro aspecto importante es la recursividad, que sucede cuando el pensamiento de un estudiante se desplaza a través de los ocho niveles de sofisticación que se han propuesto para esta teoría, diseñados en tal forma que cada nivel contiene a los anteriores.

Por lo mencionado anteriormente, se puede esperar que la comprensión de conceptos matemáticos evoluciona de un nivel interior hacia uno exterior, es decir, desde los conocimientos primitivos hasta los más complejos, sin embargo, los procesos de reflexión continuos para construir un conocimiento nuevo y reconstruir el actual, permiten que un estudiante pueda desplazarse con un movimiento de ida y de retorno a través de los niveles propuestos, no obstante, este proceso para cada estudiante puede ser diferente, dado que algunos pueden poseer algunos conocimientos primitivos y otros avanzados. En nuestro contexto, cabe decir que para analizar el proceso de resolución de una ecuación diferencial en términos de la teoría de Pirie y Kieren, se hace necesario tener en cuenta estrategias, técnicas y métodos, que permitan analizar las acciones mentales o físicas de un estudiante para expresar de manera clara las posibles relaciones entre los conceptos involucrados, y a su vez, posibilite visualizar su solución como una expresión que pueda representarse en sistemas algebraicos, gráficos y numéricos simultáneamente, entre otras posibilidades.

Asimismo, considerando que, para algunos estudiantes, la resolución de una ecuación diferencial finaliza al hallar una respuesta al interrogante propuesto, el interés de esta investigación es analizar la comprensión en el proceso de resolución y no al finalizar el mismo. A continuación, se hace una descripción de los niveles de comprensión propuestos para esta teoría, de igual modo, se ilustra con algunas gráficas el modelo para la compresión de conceptos matemáticos, propuesto por Pirie y Kieren, así como las características de la misma.

2.2.1. Niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren

En este apartado, se ponen de manifiesto la concepción y características propias para cada nivel.

Nivel 1. Conocimiento Primitivo (Primitive Knowing)

El “conocimiento primitivo” hace referencia al conocimiento inicial que posee un estudiante para abordar un problema y se puede considerar como un punto de partida para la comprensión de conceptos matemáticos. El término primitivo, no puede pensarse como los conocimientos matemáticos de bajo nivel que exhibe un estudiante, por el contrario, son aquellos que un estudiante conoce a excepción de los nuevos (Pirie y Kieren, 1992; Pirie, y Kieren, 2006). Pirie y Kieren (2006) afirman que con este término no se pretende transmitir ningún juicio en cuanto al nivel de sofisticación de las matemáticas o, de hecho, cualquier otro conocimiento que la persona posee. Este conocimiento está conformado por todo lo que una persona trae "en su mente" a la tarea actual, por ejemplo, su experiencia en la situación real, sus ideas y concepciones frente a la matemática y al concepto mismo.

En este escenario, el adjetivo “primitivo” no significa que califica a este conocimiento como precario o en un nivel matemático bajo. Además, mencionan que, como observadores, nunca se podrá saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona, sin embargo, si se conseguirán interpretaciones a partir de la evidencia que se ponga a nuestra disposición a través de algunas acciones físicas, verbales o escritas.Un mecanismo útil para saber si un estudiante se encuentra razonando en un nivel de comprensión al interior de la teoría en cuestión, consiste en lograr identificar unos criterios mínimos que den cuenta de tal razonamiento, inicialmente de manera hipotética y, posteriormente, respaldados o validados después de ser modificados y refinados, los cuales se denominarán descriptores. Es de aclarar que este mecanismo ya ha sido usado anteriormente por Londoño (2011) y Villa (2011) en sus tesis doctorales, entre otras.

Por ejemplo, en nuestro contexto no se puede asegurar cuál es el conocimiento de un estudiante al abordar un problema que involucra ecuaciones diferenciales, dado que el profesor asume ciertos conocimientos básicos en un estudiante, tales como: razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales. Algunos, no necesarios para abordar los problemas, otros, útiles en el proceso de resolución. No obstante, de todo el conocimiento inicial se realiza un rastreo para seleccionar aquellos que se puedan emplear como posible base inicial para la evolución de la comprensión Pirie y Kieren (2006).

Nivel 2. Construcción de la imagen (Image Making)

En este nivel, la comprensión de un concepto se genera cuando se realizan representaciones mentales o físicas con el fin de crear una idea del nuevo concepto (Pirie, y Kieren, 2006). Además, afirman que el crecimiento de la comprensión en este nivel comienza al hacer distinciones matemáticas a través de las acciones, todo sobre la base del conocimiento primitivo. La intención del trabajo en este nivel radica en que se da lugar a la creación de nuevas imágenes matemáticas que puedan existir en forma mental, física, verbal y escrita.

En el contexto de la presente investigación, cuando un estudiante ha trazado gráficas de conceptos matemáticos involucrados en el cálculo diferencial e integral, tales como: razón de cambio, relaciones entre una función y su derivada, derivada de una función y área bajo la curva de una función, o al momento de abordar un problema en el contexto de su resolución, elabora relaciones algebraicas, numéricas y gráficas de manera clara que permiten establecer conexiones entre los conceptos comprendidos y el enunciado de un problema.

No obstante, los estudiantes en procesos de resolución pocas veces tienen éxito para establecer alguna relación, quizás por desconocimiento, por no recordar la gráfica de la función o por no conocer el concepto, pero no halla la manera de establecer conexiones entre el enunciado de un problema y los conceptos que se involucran en él. Así entonces, elaboran distintas gráficas, en las que se observan patrones que le posibiliten exhibir las conexiones acertadas y las erradas; en ellas, tratan de observar patrones que permitan relacionar los conceptos involucrados con el enunciado de un problema.

Nivel 3. Obtención de la imagen (Image Having)

En este nivel, un estudiante orienta un proceso mental para construir una clasificación de las características de una imagen, asimismo, está en condiciones de hablar sobre sus acciones, de tal manera que le permitan identificar elementos similares y reemplazarlos con imágenes mentales asociadas a una actividad, que no necesariamente puede ser la adecuada, lo que da paso para liberar las matemáticas en él, al realizar acciones físicas (Pirie y Kieren, 1992). Por ejemplo, un estudiante al analizar un enunciado de una ecuación diferencial, posiblemente identifique elementos, características y propiedades que le permitan relacionarlos con algunos conceptos matemáticos tales como: razón de cambio, derivada y antiderivada, lo que posibilita una expresión verbal o escrita de manera gráfica, algebraica y numérica que lo direcciona para generar una estructura matemática que explicite el enunciado analizado.

Nivel 4. Observación de la propiedad (Property Noticing)

Se puede decir que en este nivel un estudiante manipula, combina, construye imágenes, las examina, establece relaciones y diferencias entre ellas, que permitan elaborar definiciones en las que se precisan algunas características de un concepto, mientras que se desconocen otras. Asimismo, la capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar la manera de cómo contrastar esta conexión, es una de las diferencias entre el nivel de “obtener la imagen” y “observación de la propiedad” (Meel, 2003).

Por otra parte, en este nivel un estudiante cuestiona su comprensión con el fin de expresar de manera general lo que se puede aludir sobre la imagen, en palabras de Pirie y Kieren (2006, p. 190), en este nivel se reflexiona y esta reflexión es un modo de "caminar atrás” sobre el conocimiento de un estudiante a fin de suscitar una nueva comprensión. Por ejemplo, cuando un estudiante elabora una gráfica de un enunciado en un problema que involucra una ecuación diferencial, puede distinguir algunas de las propiedades y características mencionadas en el contexto del problema para elaborar una gráfica del fenómeno, y a su vez, una estructura matemática que la represente (Pirie y Kieren, 1992).

Nivel 5. Formalización (Formalising)

En este nivel, un estudiante está en la capacidad de realizar abstracciones sobre las propiedades y cualidades comunes en algunos objetos mentales, no necesita relacionarse con contextos matemáticos específico que dieron lugar a su comprensión, así mismo, puede generar definiciones matemáticas y formular reglas, las cuales alcanza al darse cuenta de las clases de objetos que ha construido a partir de la formación de imágenes mentales (Pirie y Kieren, 1989).

Por ejemplo, la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$ la puede relacionar gráficamente con una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano, dado que su pendiente es positiva y carece de término independiente, asimismo, la puede relacionar con el concepto de razón de cambio, de tal manera que por cada unidad de desplazamiento o cambio realizado en el eje horizontal, en el eje vertical se desplazan o cambian dos unidades simultáneamente, o también, la puede relacionar con el concepto de derivada, ya que la expresión algebraica dada es la derivada con respecto a la variable x de la función $y = x^2$.

Nivel 6. Observación (Observing)

En este nivel, los estudiantes poseen habilidades para reflexionar, coordinar y revisar su pensamiento, a través de razonamientos que permitan generar verbalizaciones relacionadas con la comprensión de un concepto formalizado. Pirie, S., y Kieren, T. (2006, p.190) exponen una analogía entre los niveles de la siguiente manera: observar es a formalizar como el aviso de propiedad es a tener una imagen.

En particular, esta relación se puede observar en nuestro contexto, cuando los estudiantes hacen uso de conceptos matemáticos formalizados a través de teoremas y demostraciones, entre ellos, razón de cambio, derivada y antiderivada, sin embargo, un estudiante puede analizar y tener clara la comprensión de esa formalidad, pero podría ir más allá de la comprensión de la misma al aplicarlos en otros contextos, alcanzando con ello niveles sofisticados de pensamiento matemático en temas relacionados con ecuaciones diferenciales, de este modo, en el proceso de resolución algunos optarán por realizar operaciones algebraicas, otros, se interesarán por mostrar propiedades y características a través de gráficas en forma escrita o por medio de un ordenador.

En este contexto, por ejemplo, en la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$ los estudiantes pueden elaborar pensamientos relacionados con los conceptos de razón de cambio y derivada, y posiblemente mencionarán algunas características de esta función relacionada con el concepto de pendiente. Sería interesante observar las relaciones que pueden hacer los estudiantes con respecto al planteamiento del problema y la solución del mismo.

Nivel 7. Estructuración (Structuring)

La estructuración involucra la capacidad de explicar o generar teoría sobre las observaciones formales en un contexto lógico, en el cual se emplea un sistema axiomático y se incluye una estructura matemática Pirie, S., y Kieren, T. (2006, p.194). En este nivel, las observaciones de las formalizaciones del tema en cuestión son incluidas en la matematización que representa al problema, en este sentido, los estudiantes observarían los conceptos matemáticos involucrados en las ecuaciones diferenciales de manera natural sin necesidad de un trato individual para cada uno.

Nivel 8. Invención (Inventising)

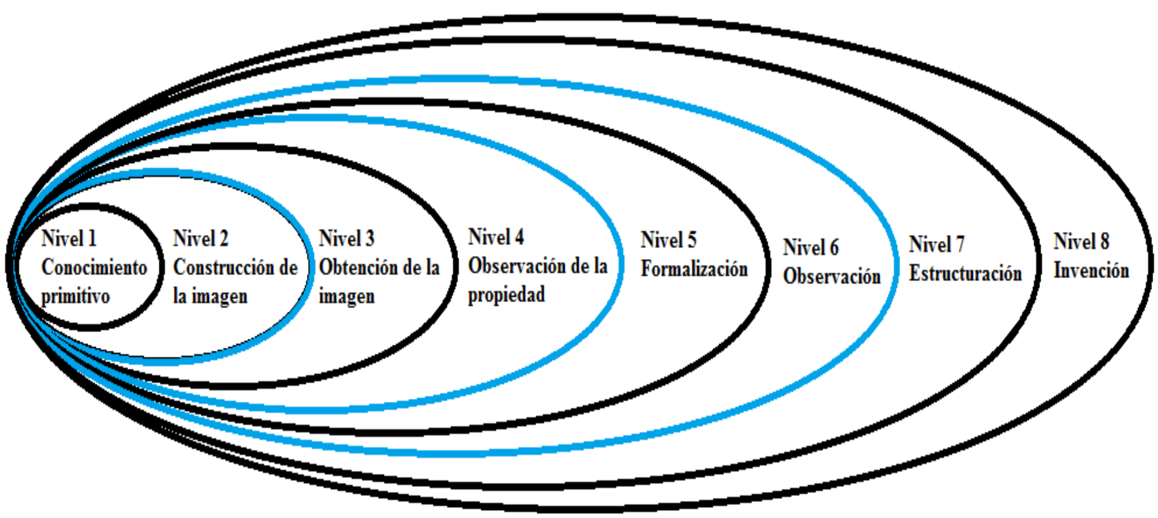
Según la propuesta de Pirie, S., y Kieren, T. (2006, p.194) la Invención requiere de una ruptura con las preconcepciones que surgieron en la comprensión inicial para plantear nuevas preguntas que pueden dar lugar al crecimiento de un concepto totalmente diferente. Al respecto, Meel (2003) afirma que:

> […] el uso de la invención no implica que una persona no puede inventar en otros niveles, sino que se utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo del nuevo concepto (p.239).

A continuación, la Figura 1 representa el modelo del crecimiento de la teoría de Pirie y Kieren, que está formado por ocho niveles representados entre óvalos con un punto en común; cada óvalo identifica un nivel, los cuales están nombrados así: Conocimiento primitivo (nivel 1), construcción de una imagen (nivel 2), obtención de una imagen (nivel 3), observación de la propiedad (nivel 4), formalización (nivel 5), observación (nivel 6), estructuración (nivel 7) e invención (nivel 8), siendo el nivel 1 el más interno y el nivel 8 el más externo; es de aclarar que el nivel 1 está contenido en el nivel 2, el nivel 2 en el 3 y así sucesivamente hasta llegar al más externo.

Figura 1.

Niveles del crecimiento de la comprensión matemática (Pirie y Kieren, 1994)

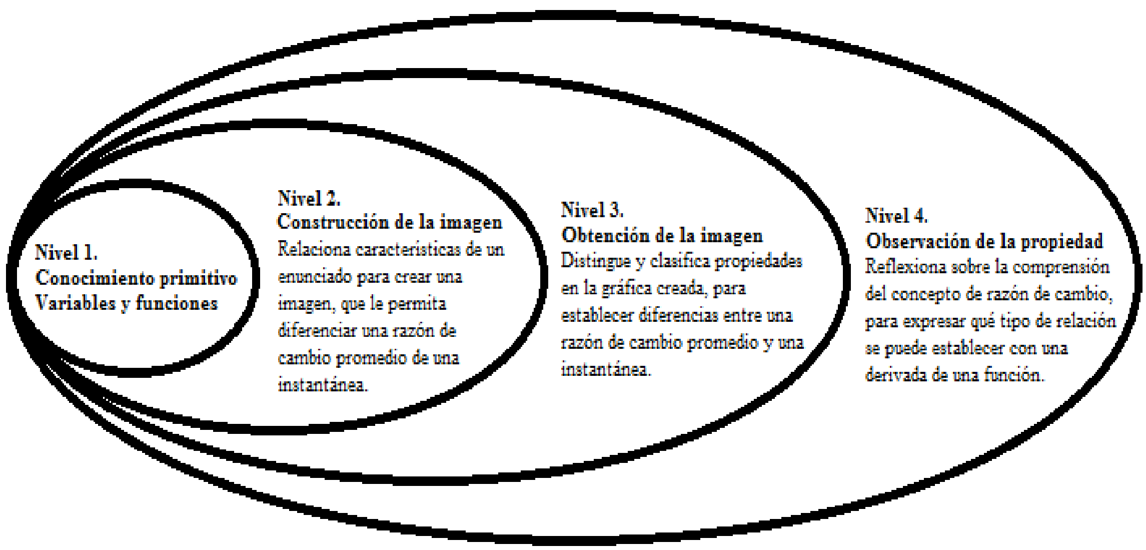


Fuente: Tomada de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

Así, en la investigación pueden emerger otras acciones que permitan describir la comprensión del concepto tratado, así como los niveles alcanzados por los estudiantes. Es de aclarar que en esta investigación se analizarán los cuatro primeros niveles de la teoría en mención, pero puede que algunos estudiantes alcancen niveles inferiores y otros logren otros superiores. Pirie y Kieren (1994) caracterizan algunas acciones realizadas en cada nivel de comprensión, en esta investigación se caracterizaron los cuatro primeros niveles de acuerdo a situaciones a priori generadas a partir de la experiencia de los investigadores y de las observaciones en las aulas de clase en las diferentes situaciones planteadas. La Figura 2 muestra varias acciones relacionadas con el concepto de razón de cambio, las cuales se trata de asociar con las acciones del modelo de la teoría en cuestión.

Figura 2.

Caracterización del concepto de razón de cambio en el marco de la teoría de Pirie y Kieren



Fuente: Creación propia con base en el modelo de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

A continuación, en la Tabla 1 se explicitan algunas caracterizaciones propuestas por los investigadores para los cuatro primeros niveles de comprensión, relacionadas con el concepto de razón de cambio, las cuales son producto de la experiencia de los investigadores y de las observaciones al interior del aula de clase, cuyo objeto es analizar su comprensión.

Tabla 1.

Caracterización del concepto de razón de cambio en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

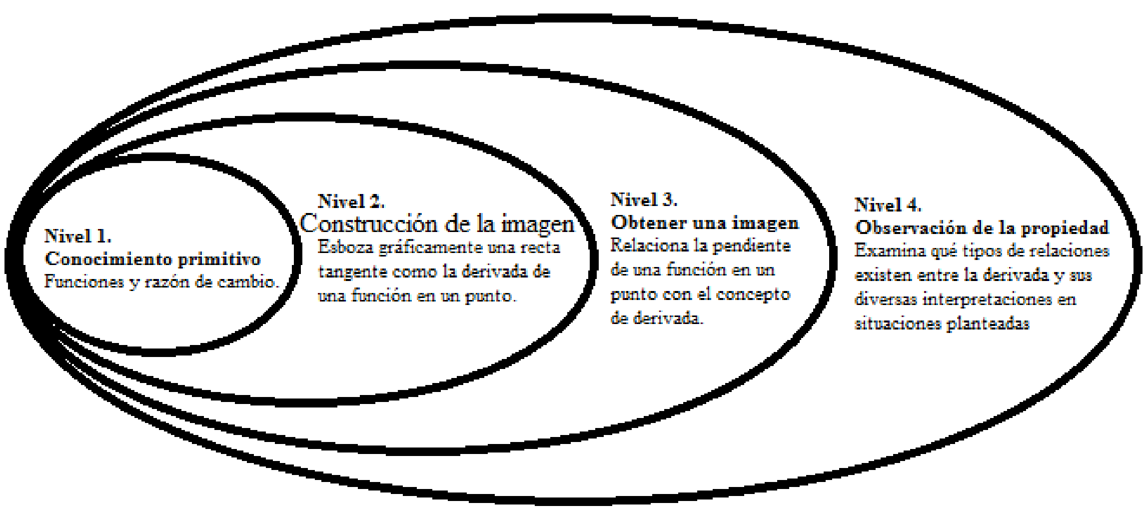
Nivel	Nombre	Descripción
1	**Conocimiento primitivo**	Variables y funciones.
2	**Construcción de la Imagen**	Relacionar características de un enunciado para crear una imagen de una razón de cambio, que le permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
3	**Obtención de la Imagen**	Distinguir y clasificar propiedades en la gráfica creada, para establecer diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
4	**Observación de la propiedad**	Reflexionar sobre la comprensión del concepto de razón de cambio, para expresar qué tipo de relaciones existen con la la derivada de una función.

Fuente: Creación propia con base en la caracterización de los niveles de comprensión.

Asimismo, en la Figura 3 se propone un modelo para caracterizar el crecimiento de la comprensión del concepto de derivada en los diferentes niveles de la teoría de Pirie y Kieren; en él se exponen algunas acciones a realizar para una posible comprensión del concepto de derivada en un problema.

Figura 3.

Caracterización del concepto de derivada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren



Fuente: Creación propia con base en el modelo de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

A continuación, en la Tabla 2 se explicitan los elementos para la caracterización del concepto de razón de cambio.

Tabla 2.

Caracterización del concepto de derivada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

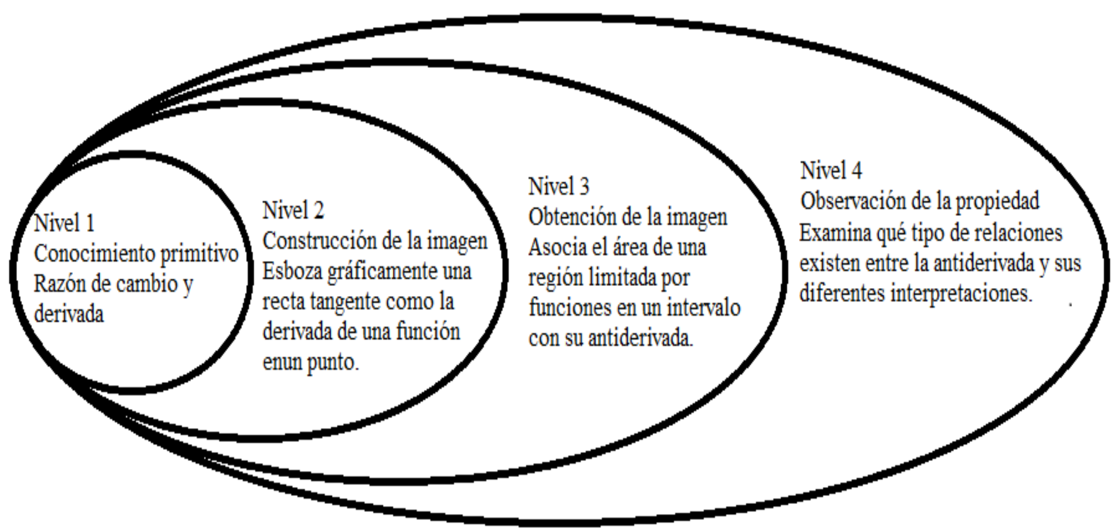
Nivel	Nombre	Descripción
1	**Conocimiento primitivo**	Funciones y razón de cambio promedio.
2	**Construcción de la imagen**	Esbozar gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
3	**Obtención de la imagen**	Relacionar la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
4	**Observación de la propiedad**	Examinar qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones en situaciones dadas.

Fuente: Creación propia con base en la caracterización de los niveles de compresión.

De igual modo, en la Figura 4 se propone un modelo para visualizar la evolución de la comprensión del concepto de antiderivada en el marco de los niveles de la teoría en mención, el cual exhibe algunas acciones que permitan describir una posible comprensión del concepto antes mencionado.

Figura 4.

Caracterización del concepto de antiderivada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.



Fuente: Construcción propia con base en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

A continuación, en la Tabla 3 se explicitan los elementos para la caracterización del concepto de antiderivada.

Tabla 3.

Caracterización del concepto de antiderivada en el marco de la teoría de Pirie y Kieren

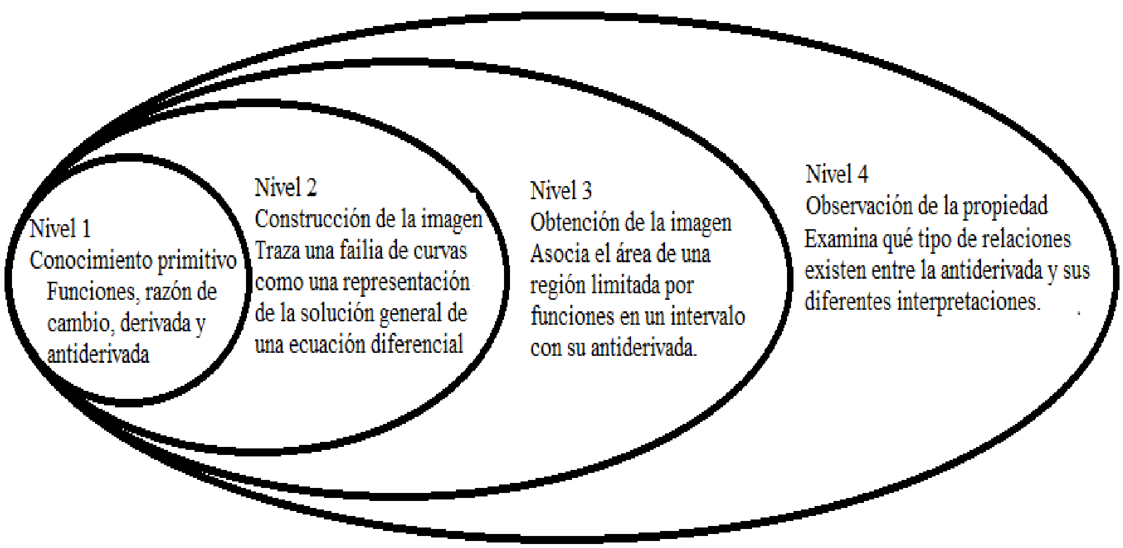
Nivel	Nombre	Descripción
1	**Conocimiento primitivo**	Razón de cambio y derivada.
2	**Construcción de la imagen**	Esbozar gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
3	**Obtención de la imagen**	Asociar el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
4	**Observación de la propiedad**	Examinar qué tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

Fuente: Creación propia con base en la caracterización de los niveles de comprensión.

En este contexto, en la Figura 5 se propone un modelo para representar el crecimiento de la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden en los distintos niveles de la teoría en mención, el cual exhibe algunas acciones que permitan describir una posible comprensión del concepto antes mencionado al resolver un problema.

Figura 5.

Caracterización del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden en el marco de los niveles de la teoría de Pirie y Kieren.



Fuente: Construcción propia con base en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

A continuación, la Tabla 4 explicita elementos necesarios para caracterizar el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

Tabla 4.

Caracterización del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

Nivel	Nombre	Descripción
1	**Conocimiento primitivo**	Funciones, razón de cambio, derivada y antiderivada.
2	**Construcción de la imagen**	Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
3	**Obtención de la imagen**	Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
4	**Observación de la propiedad**	Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Fuente: Creación propia con base en la caracterización de los niveles de compresión.

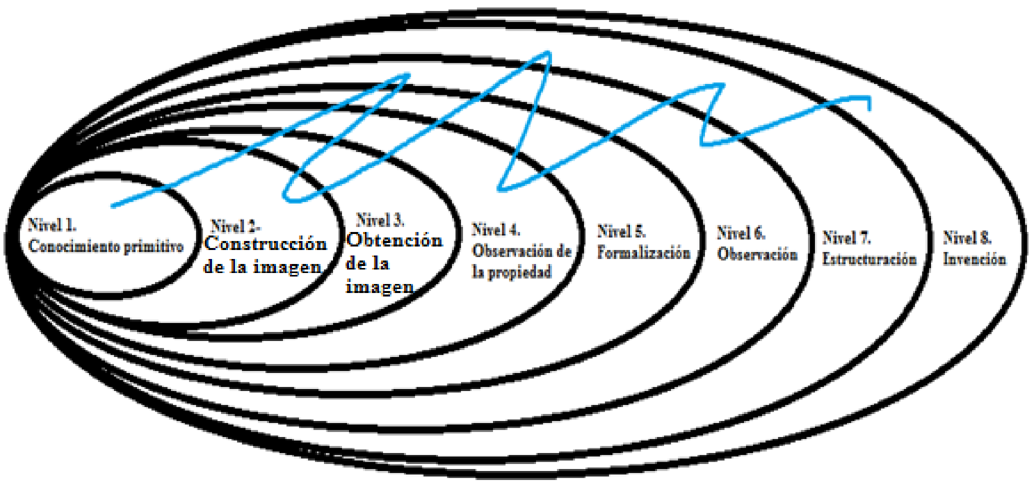
2.2.2. Características de la teoría

En este apartado se explicitarán las características propuestas por Pirie y Kieren en su teoría, las cuales proporcionan algunas herramientas educativas que posibilitan reseñar y evaluar con mayor exactitud la evolución de la comprensión en los estudiantes, las cuales se describen brevemente a continuación.

En este sentido, la primera se denomina *folding back* o redoblado, relacionada con el proceso dinámico de ida y retorno en el campo del conocimiento de un estudiante, es un movimiento realizado continuamente en la medida que se reflexiona y reconstruye el mismo. Dado que la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos no se realiza de manera lineal, es decir que un estudiante para comprender un concepto no avanzará de manera sucesiva del nivel uno al ocho, dado que puede iniciar en el nivel uno y saltar al nivel cuatro y luego regresar al nivel dos; en este sentido, un estudiante puede llevar a cabo el proceso de redoblado al desplazarse desde un nivel de comprensión más interno hasta un nivel más externo, sin hacer distinción en cuál se inicia o en cuál termina, lo anterior, para establecer una nueva comprensión como base para futuros conocimientos, tal como se muestra en la Figura 6.

Figura 6.

Representación de un posible folding back



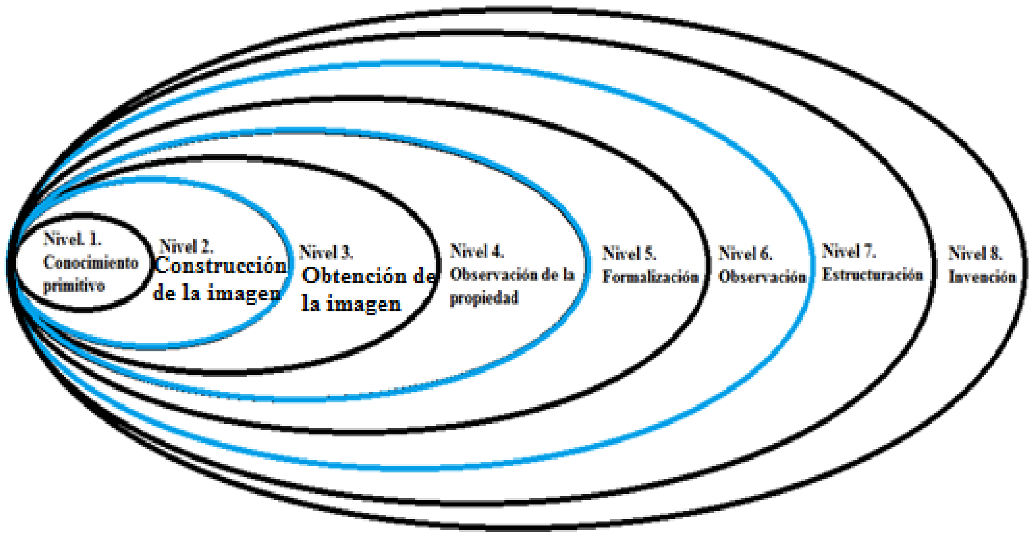
Fuente: Construcción con base en los niveles de comprensión de Pirie y Kieren

Esta característica se puede apreciar en el razonamiento de un estudiante, por ejemplo, al abordar un problema que involucra conceptos tales como razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, el estudiante realiza un un recorrido mental para expresar de manera escrita o verbal una reorganización de un concepto que está abordando por uno más elaborado.

La segunda característica del modelo, hace referencia a los límites de la falta de necesidad, en la que se describe el progreso de un estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable, que no precisa de los elementos de los niveles más bajos (Pirie y Kieren, 1994). Al moverse entre límites de falta de necesidad, se aprecia un importante cambio cualitativo en la comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, aún cuando se hayan superado estos límites, es posible que regrese a niveles bajos de comprensión, los cuales se muestran en la Figura 7 de color azul, cabe señalar que estos límites se indican cada dos niveles excepto los dos últimos.

Figura 7.

Representación diagramática de los límites de falta de necesidad.



Fuente: Tomada de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

Por otra parte, la tercera característica fundamental del modelo se refiere a las complementariedades de la acción y la expresión. Pirie y Kieren (1994) afirman que más allá del conocimiento primitivo, cada nivel está compuesto por dos aspectos complementarios, una acción y una expresión presentes en los demás niveles, con excepción del primero y el último. El crecimiento de la comprensión sucede primero actuando y luego expresando, aspectos esenciales para pasar de un nivel a otro. El primero incluye actividades mentales y físicas para una comprensión previa y proporciona continuidad con los niveles internos; en este contexto, un estudiante puede analizar cómo su comprensión previa se puede aplicar a un escenario de aprendizaje. La segunda analiza y articula las formas y conceptos involucrados en las acciones de diferentes formas para cada nivel, en particular, un estudiante pone en claro para sí mismo o para otros qué conceptos comprendió y con qué alcance lo hizo.

En este contexto, Pirie y Kieren (1994) expresan algunos detalles de las complementariedades al interior de los niveles Image Making, Image Having y Property

Noticing, para lo cual consideran la comprensión como un proceso y no como una adquisición o localización, de modo que los anillos de cada nivel, representan las formas o modos de comprensión que un estudiante puede exhibir y no como fases lineales para la comprensión, razón por la cual seleccionan seis verbos, para catalogar las complementariedades de la acción y la expresión al interior de los niveles mencionados anteriormente, entre otros verbos están: hacer y revisar para Image Making, ver y decir para Image Having; predecir y registrar para Property Noticing.

En esta investigación, se considera relevante involucrar otros verbos, además de los propuestos por la teoría, que cumplan roles similares para cada nivel y cada complementariedad, los cuales son producto del trabajo de campo realizado y los resultados encontrados, de acuerdo con ciertas regularidades. Así, para el nivel 2 (construcción de una imagen), la complementariedad de la acción está relacionada con el verbo hacer, y en la investigación se propone adicionar los verbos realizar, esbozar, aproximar y trazar, mientras que para la complementariedad de la expresión se relaciona el verbo revisar, y se propone adicionar los verbos aproximar, verbalizar, explicar y describir.

Para el nivel 3 (obtención de la imagen), la complementariedad de la acción está relacionada con el verbo ver, y se propone adicionar los verbos establecer, relacionar y asociar; para la complementariedad de la expresión se relaciona el verbo decir, y se propone adicionar los verbos justificar y determinar. Para el nivel 4 (observación de la propiedad), la complementariedad de la acción está relacionada con el verbo predecir, y se propone adicionar los verbos examinar y analizar, mientras que para la complementariedad de la expresión se asocia el verbo registrar, y se propone adicionar los verbos interpretar, explicar e inferir. Lo anterior se muestra en la Tabla 5.

Cabe anotar que el interés de esta investigación es analizar la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos en los procesos de resolución de una ecuación diferencial, por lo que sólo es necesario estudiar los primeros cuatro niveles de la teoría en mención.

Tabla 5.

Caracterización de algunos verbos para la complementariedad de la acción y la expresión.

Nivel	Complementariedad de la acción	Complementariedad de la expresión
Conocimiento primitivo		
Construcción de la imagen	**Hacer** Realiza, esboza, aproxima, traza	**Revisar** Verbaliza, explica, describe
Obtención de la imagen	**Ver** Establece, relaciona, asocia	**Decir** Justifica, determina
Observación de la propiedad	**Predecir** Examina, analiza	**Registrar** Interpreta, explica, infiere

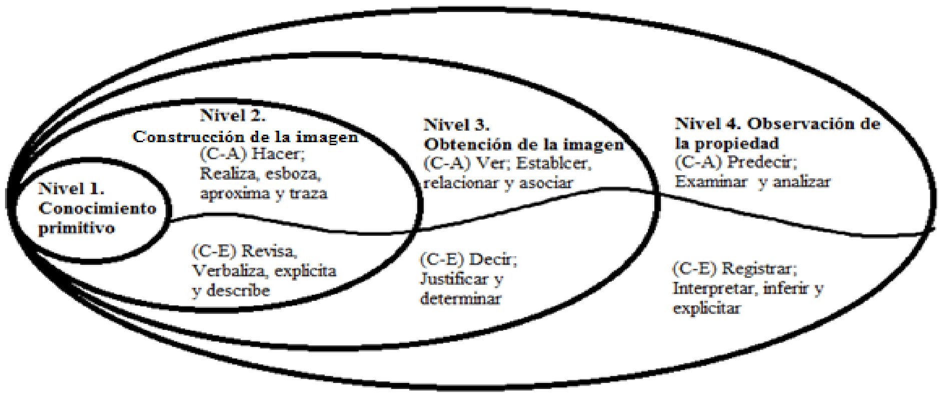
Fuente: Creación propia a partir de la propuesta de Pirie y Kieren (1994)

En el nivel de *construcción de la imagen*, un estudiante desarrolla acciones mentales o físicas que se direccionan a la construcción de una imagen, mientras que, al revisar la imagen creada, un estudiante puede observar algunas características y relacionarlas.Para el nivel de *obtención la imagen*, el verbo ver está relacionado con visualizar, caracterizar y relacionar los patrones para elaborar una imagen mental o escrita, mientras que el verbo decir, ocurre cuando un estudiante articula y determina a partir de algunas características un patrón que luego relaciona y analiza.

Asimismo, para el nivel *observación de la propiedad*, predecir está relacionado con analizar las características y propiedades de los conceptos involucrados, para pronosticar la aplicación de otros, mientras que el verbo registrar, está relacionado con la expresión oral o escrita de las propiedades y características de los conceptos involucrados, a continuación, se muestra una representación diagramática de las complementariedades de acción y la expresión con base en la propuesta por Pirie y Kieren, en la cual se incluyen los verbos que se consideran importantes como se ilustra en la Figura 8.

Figura 8.

Representación diagramática de las complementariedades de la acción y la expresión.



Fuente: Creación propia.

Teniendo en cuenta la caracterización de los verbos a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión manifestada en la Tabla 5 y representado en el modelo de la Figura 8, a continuación, se presenta la Tabla 6 y un modelo representado en la Figura 9 en los cuales se muestra una posible caracterización del concepto de razón de cambio empleando verbos propuestos para los cuatro primeros niveles de la teoría en mención.

Tabla 6.

Caracterización de los verbos en las complementariedades de la acción y la expresión sobre el concepto de razón de cambio.

Nivel	Complementariedad de la Acción (C-A)	Complementariedad de la expresión (C-E)
Conocimiento primitivo		
Construcción de la imagen	Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.	Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
Obtención de la imagen	Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.	Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
Observación de la propiedad	Examina qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.	Infiere qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio

	promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.

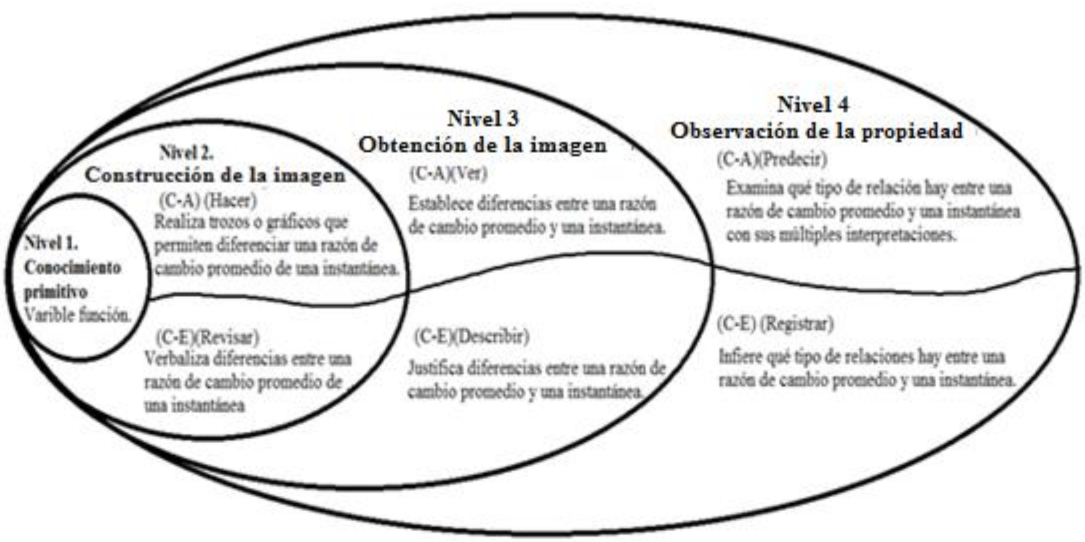
Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren.

Lo mencionado anteriormente, se puede evidenciar en las siguientes gráficas, para describir la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos empleando las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren.

En este contexto, la Figura 9 exhibe una línea que divide desde el segundo hasta el cuarto nivel en dos complementos, los cuales se relacionan con la acción y la expresión. En el modelo, las complementariedades de la acción (C-A) están ubicadas en la parte superior de cada nivel y las complementariedades de la expresión (C-E) están ubicadas en la parte inferior de cada nivel. En cada nivel se coloca el verbo asignado a cada complementariedad por Pirie y Kieren, con los cuales se hace alusión a las posibles acciones y expresiones a realizar por los estudiantes al abordar un problema, sin descartar en ningún momento los procesos de *folding back* realizados por ellos en el proceso de aprendizaje.

Figura 9.

Caracterización de algunos verbos a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión sobre el concepto de razón de cambio.



Fuente: Creación propia con base en la caracterización de Pirie y Kieren (1994).

De igual modo, se presenta una caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión relacionada con el concepto de derivada relacionadas en la Tabla 7; en ella se ponen de manifiesto algunas de las posibles acciones y expresiones que se pueden realizar al momento de abordar una situación que involucre este concepto.

Tabla 7.

Caracterización de algunos verbos a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión sobre el concepto de derivada.

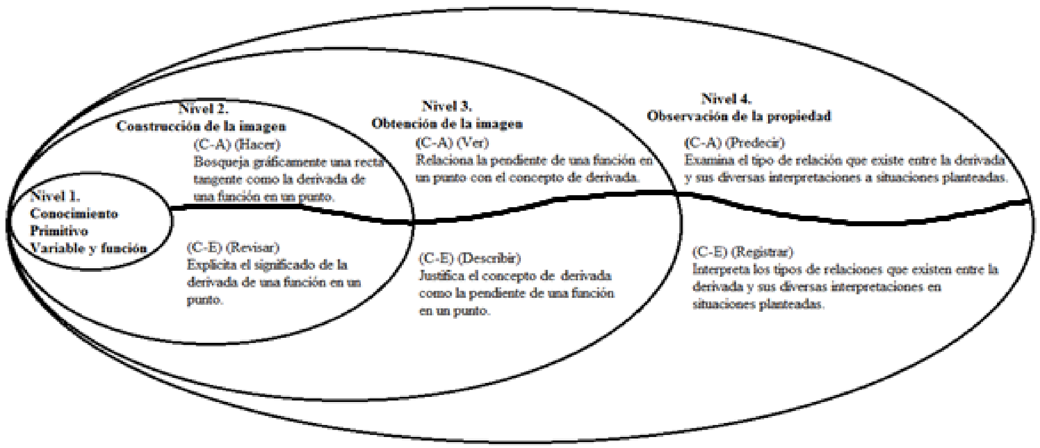
Nivel	**Complementariedad de la acción (C-A)**	**Complementariedad de la expresión (C-E)**
Conocimiento primitivo		
Construcción de la imagen	Esboza gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.	Explicita el significado de la derivada de una función en un punto.
Obtención de la imagen	Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.	Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
Observación de la propiedad	Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones en situaciones dadas.	Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones en situaciones dadas.

Fuente: Creación propia con base en la caracterización de los verbos propuestos en la teoría de Pirie y Kieren.

A continuación, la Figura 10 muestra los elementos involucrados en las complementariedades de la acción y la expresión relacionadas con el concepto de derivada.

Figura 10.

Caracterización de la complementariedad de la acción y la expresión sobre el concepto de derivada.



Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren

En esta dirección, se pone de manifiesto una caracterización del concepto de antiderivada en la cual se involucran los verbos antes mencionados, en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión relacionados en la Tabla 8 por medio de los cuales se analizó la evolución de este concepto.

Tabla 8.

Caracterización de algunos verbos en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión relacionado con el concepto de antiderivada.

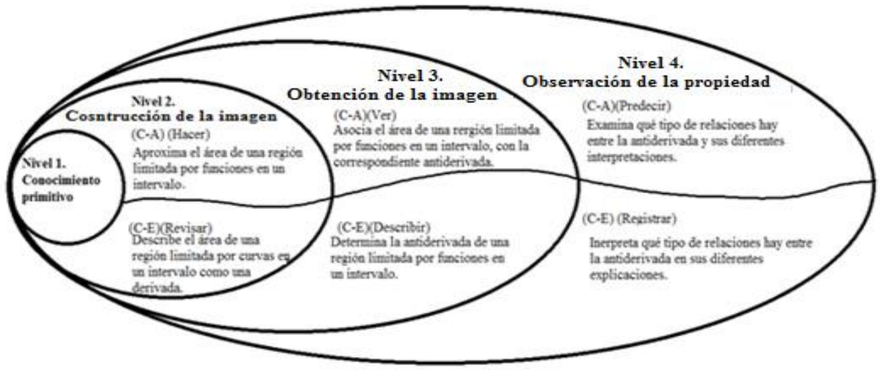
Nivel	Complementariedad de la acción (C-A)	Complementariedad de la expresión (C-E)
Conocimiento primitivo		
Construcción de la imagen	Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.	Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
Obtención de la imagen	Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.	Determina la anti derivada de una región limitada por funciones en un intervalo.
Observación de la propiedad	Examina qué tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.	Interpreta qué tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren.

A continuación, se presenta una caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión relacionadas con el concepto antiderivada en la Figura 11.

Figura 11.

Caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión relacionada con el concepto de antiderivada.



Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren.

En esta línea de trabajo, en la Tabla 9 se relacionan algunas caracterizaciones de las complementariedades de la acción y la expresión que involucran el concepto de ecuación diferencial en el marco de la teoría en mención, que, a su vez, se muestran en la Figura 12.

Tabla 9.

Caracterización de algunos verbos para las complementariedades de la acción y la expresión relacionadas sobre el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

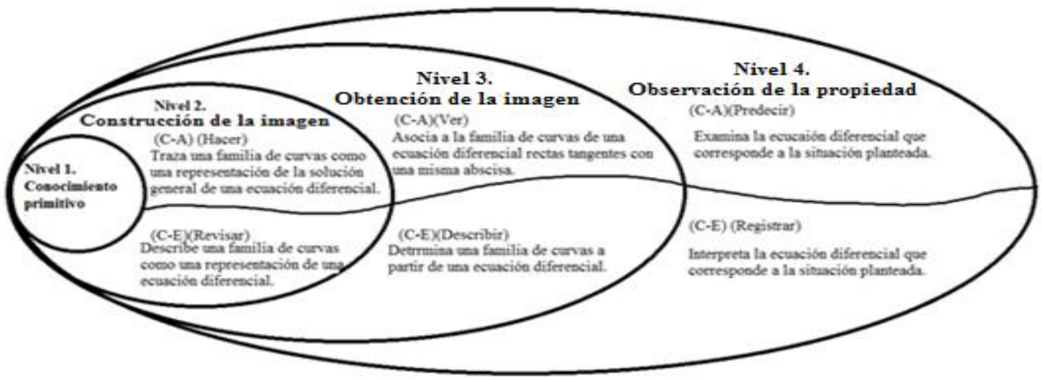
Nivel	Complementariedad de la acción (C-A)	Complementariedad de la expresión (C-E)
Conocimiento primitivo		
Construcción de la imagen	Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.	Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
Obtención la imagen	Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas de una solución de una ecuación diferencial con el concepto de en un punto.	Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
Observación de la propiedad	Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.	Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren.

A continuación, se presenta en la Figura 12 una caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión relacionadas con el concepto ecuación diferencial.

Figura 12.

Caracterización de las complementariedades de la acción y la expresión relacionada con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.



Fuente: Creación propia con base en los verbos propuestos por Pirie y Kieren.

Por otra parte, Pirie y Kieren (1994), además de las tres características mencionadas anteriormente, dotan su teoría de la denominada *fatalidad*; los investigadores la consideran como una herramienta educativa que permite describir y evaluar con mayor precisión el crecimiento de la comprensión de un estudiante. En palabras de los autores:

> […] Por ejemplo, se podría observar a una persona en el nivel de invención como si tuviera comprensión previa para una nueva acción primitiva [Conocimiento Primitivo]. Una consecuencia principal de esta línea de pensamiento es que, para un observador, la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona “dentro” de la acción primitiva y observar la misma estructura nivelada (p.240).

Con estos argumentos, los autores muestran que el crecimiento de los niveles externos es de forma recursiva desde los niveles internos, asimismo, el conocimiento a un nivel externo retiene los niveles internos, toda vez que un estudiante recorra los niveles del modelo hasta llegar al nivel de invención; este conocimiento puede convertirse en uno primitivo, que permite comprender otro quizás más elaborado (Pirie y Kieren, 1989), lo que muestra la importancia que tiene la información ubicada en el nivel interno.

La Figura 13, que representa el modelo de frac talidad propuesto por Pirie y Kieren, en ella se colocan algunos símbolos escritos, los cuales representan el nombre de cada nivel de comprensión, es decir:

PK: Primitive Knowing (conocimiento primitivo)

IM: Image Making (Construcción de la imagen)

IH: Image Having (Obtención de la imagen)

PN: Property Noticing (Observación de la propiedad)

F: Formalising (Formalización)

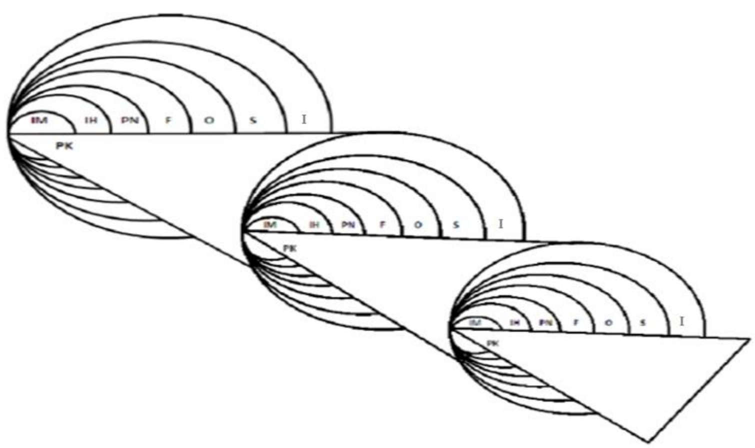
O: Observing (Observación)

S: Structuring (Estructuración)

I: Inventising (Invención)

Figura 13.

Representación diagramática de la forma fractal del modelo para la evolución matemática de Pirie y Kieren



Fuente: Tomada de la teoría de Pirie y Kieren (1994).

Por otra parte, en nuestro contexto, la característica de fractalidad se puede observar cuando un estudiante requiere resolver un problema asociado con ecuaciones diferenciales, pero al afrontarlo exhibe dificultades con algunos conceptos involucrados en ellas, es decir, puede requerir los conceptos de razón de cambio promedio e instantánea o ambos, los cuales al ubicarse en alguno de los niveles de comprensión del modelo postulado por Pirie y Kieren, se pueden convertir en un conocimiento primitivo para otro concepto. Por ejemplo, puede requerir el concepto de razón de cambio instantánea al abordar una ecuación diferencial, con lo cual podría mostrar el cambio proporcional que experimenta una variable con respecto a otra.

Los estudios hasta el momento mencionados, exhiben algunos aspectos que facilitan la comprensión de conceptos asociados a un fenómeno y declaran que los estudiantes necesitan procesos mentales o físicos para describir y construir estructuras matemáticas que posibiliten el análisis de diversas situaciones que requieren solución. Las investigaciones destacan la importancia que tiene la comprensión de conceptos matemáticos en la solución de situaciones planteadas, porque a través de ellas, los estudiantes reestructuran su conocimiento desde un nivel interno hasta el nivel más externo sin importar el orden en que realice dicho proceso (Pirie y Kieren, 1994).

En este sentido, la comprensión de los participantes del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden analizada en el marco de experimento de enseñanza, se puede ubicar en el nivel exterior y requerir de otros conceptos adyacentes a él, que estén en el nivel interior, tales como: razón de cambio, derivada y antiderivada, así como de estructuras complementarias que permitan alcanzar una comprensión de los conceptos asociados en cada situación. Los estudios anteriores mencionados permean la presente investigación, dado que los estudiantes en el proceso de resolución de una situación planteada algunas veces expresan gráficamente la comprensión de su enunciado; lo anterior, es un proceso que se puede relacionar con lo manifestado por Tall y Vinner (1981), y a su vez, con el proceso de construcción de la imagen de la teoría de Pirie y Kieren (1994) ubicada en el segundo nivel de comprensión.

Las situaciones así planteadas requieren expresiones matemáticas que permitan generar modelos, y con ello, evidenciar los cambios de las variables asociadas, para lo cual los estudiantes realizan procesos de ida y retorno en su conocimiento para relacionar los conceptos involucrados, de manera que posibiliten soluciones a los interrogantes allí presentados, lo que se puede correlacionar con los procesos de *folding back* propuestos por Pirie y Kieren (1994) y con lo manifestado por Rodríguez, Ponce y Pérez (2016).

En el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales, los estudiantes reorganizan sus conocimientos para construir modelos alusivos a cada situación propuesta, que pueden visualizarse como esquemas mentales o físicos que muestran de cierta manera diferentes caminos para hallar posibles soluciones a las ecuaciones allí planteadas, lo que está en la dirección de lo manifestado por Pirie y Kieren (1994), relacionado con la construcción de la imagen partiendo de sus conocimientos primitivos. Asimismo, se observa una estrecha relación con lo planteado por Sfard (2001) ya que los estudiantes construyen esquemas para relacionar los conceptos involucrados, además, se encuentra en coherencia con lo propuesto por Delgado, González y Monterrubio (2013), concerniente a las conexiones entre las concepciones matemáticas que los estudiantes realizan en el proceso de resolución.

En el contexto anterior, en cada situación planteada, las capacidades de los estudiantes se ponen a prueba, de modo que puedan recorrer su pensamiento desde lo abstracto hasta lo particular, con el objeto de identificar qué técnicas, procesos y fórmulas están relacionadas con las figuras y modelos elaborados, de manera que distingan cuál de las conocidas debe emplear en el proceso de resolución, y con ello, dar una interpretación sobre su solución en diferentes sistemas de representación, tal como lo manifiestan Rodríguez, Ponce y Pérez (2016). Así entonces, los modelos se transforman en detonadores que estimulan el conocimiento matemático de los estudiantes, lo que se puede correlacionar con el tercer nivel de la teoría de Pirie y Kieren (1994), en el cual los estudiantes dan libertad a las matemáticas para dar una posible solución a la situación planteada.

De este modo, los estudiantes al realizar procesos de resolución de ecuaciones diferenciales, cuestionan sus conocimientos, los manipulan, relacionan y combinan, estableciendo diferencias y similitudes en diferentes contextos y sistemas para precisar características conocidas (Sánchez, García y Llinares, 2008), lo que concuerda con Delgado (2013) y que prmueve el avance a una nueva comprensión en el cuarto nivel de la teoría de Pirie y Kieren (1994). A continuación, se manifiestan algunos aspectos relacionados con la importancia de la teoría de Pirie uy Kieren (1994).

2.2.3. Relevancia de la teoría para la comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren

La teoría de Pirie y Kieren se ha elegido para el desarrollo de esta investigación porque: Permite no sólo analizar en detalle la comprensión necesaria de conceptos matemáticos, sino también establecer relaciones entre ellos (Meel, 2003), tal como ha sido posible en algunas tesis doctorales, entre ellas, "la relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren" (Londoño, 2011) y "la comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis de acuerdo con la teoría de Pirie y Kieren" (Villa, 2011).

Esta teoría permite interacciones entre estudiantes y profesores de diversas maneras, con las cuales un investigador puede dar cuenta de las dificultades y del progreso en la comprensión de conceptos matemáticos, como lo manifiestan Londoño (2011) y Villa (2011) en sus investigaciones. Autores como Codes, Delgado, González y Monterrubio (2013) aseguran que la teoría de Pirie y Kieren no es para la enseñanza sino para el aprendizaje, además, permite describir el proceso de comprensión que han seguido algunos estudiantes, mientras resuelven las actividades propuestas. Por su parte, Meel (2003) manifiesta que esta teoría se puede emplear como una herramienta que posibilita concebir, observar y analizar la evolución de la comprensión como un proceso continuo que busca relaciones entre las acciones de comprensión poco formales con las más formales, en las que interactúan estudiantes y profesores (Pirie y Martin, 2000).

2.2.4. Algunas investigaciones relacionadas con la teoría de Pirie y Kieren

La revisión de literatura reporta algunos estudios que emplean la teoría para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren en diferentes áreas de la ciencia. A continuación, se mencionan algunas:

Duzenli y Balut (2018) emplearon un estudio de caso como método de investigación cualitativa en un estudiante de sexto grado de una escuela primaria en Turquía. Para recopilar datos emplearon hojas de actividades, formularios de auto evaluación y una entrevista semi estructurada. El objetivo de la investigación fue mejorar la función de mapeo de Pirie y Kieren a la luz del uso de representaciones múltiples, para potenciar las representaciones de los mapas producidos. El estudio recopiló información que permitió mostrar una relación entre las preferencias de los estudiantes sobre el empleo de diferentes formas de representación y el nivel de comprensión alcanzado de la multiplicación de fracciones.

Gülkilik, Hüseyin, y Yürük (2015) tuvieron como propósito analizar la comprensión de estudiates de décimo grado sobre las transformaciones geométricas desarrolladas en un entorno con múltiples representaciones. Para tal fin, se observaron cuatro estudiantes en sus lecciones de traducción, rotación, reflexiones y dilatación. Para la recolección de la información se emplearon las observaciones y una entrevista semi estructurada basada en tareas. La investigación mostró que los estudiantes tienen tendencia a utilizar comprensiones informales, aunque los niveles de comprensión matemática de los estudiantes se desarrolló de lo informal a lo formal. Cabe aclarar que este desarrollo no fue de manera unidireccional. Además, reveló que la comprensión matemática estuvo mediada por el proceso de *folding back* y por las formas de actuar y expresar provenientes de una de las caracterísiticas de la teoría, asimismo, manifestaron que los estudiantes exhibieron dificultades en la comprensión matemática en los niveles de construcción de la imagen y notificación de las propiedades.

Codes, Delgado, González, y Monterrubio (2013) llevaron a cabo una investigación con un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas de la Escuela de Informática de una universidad privada de España, matriculados por primera vez en la asignatura de Fundamentos Matemáticos I. Tiene como objetivo analizar el proceso que siguen los estudiantes al resolver una actividad que involucra el cálculo de la altura y el volumen de una torre, empleando series armónicas mediante el modelo de Pirie y Kieren. Los autores analizan las observaciones y los escritos de los estudiantes y manifiestan que al interactuar realizan conexiones entre diferentes elementos del concepto de serie numérica y recurren al *folding back* para avanzar en la comprensión del mismo en los diferentes niveles de la teoría en mención.

En la investigación de Nillas (2010) participaron cinco maestros de pre-servicio, los cuales eran estudiantes de educación primaria o especial; en este estudio se indagó por la caracterización de la comprensión matemática de los maestros, cuyo propósito era examinar la comprensión matemática del maestro en servicio. La recolección de información se realizó a través de grabaciones, observaciones, entrevistas y los registros escritos de las repuestas. El análisis de la información recolectada se realizó de dos maneras, por un lado, se utilizó para caracterizar la comprensión matemática del profesor que implica relaciones algebraicas, quien tuvo en cuenta lo desarrollado por (Miles y Huberman, 1994), por otro, se analizó el crecimiento de la comprensión matemática empleando el modelo de Pirie y Kieren (1994). La información analizada reveló que los maestros al completar las tareas matemáticas realizadas en clase, manifestaron diferentes niveles de comprensión matemática, además, respalda la idea de involucrar a los maestros en formación para que experimenten de primera mano lo que significa enseñar y aprender para comprender.

Por otra parte, Manu (2005) en su investigación emplea un estudio de caso sobre dos estudiantes bilingües de Tonga, ubicada en el pacífico sur, cuyo propósito es, por un lado, ilustrar una aplicación de la teoría de Pirie y Kieren en un contexto bilingüe, como un lenguaje y una forma de observar y explicar el crecimiento de la comprensión, por otro, examinar en el contexto bilingüe la sutil relación entre el cambio del idioma y el crecimiento de la comprensión matemática. Para la recolección de la información se emplearon grabaciones de video, trabajo escrito y entrevistas de seguimiento. La información recolectada en la investigación muestra que, a pesar de la deficiencia en la habilidad del idioma inglés, los estudiantes podían progresar en el trabajo propuesto, dado un patrón, por lo que infiere que la comprensión matemática reposa sobre las ideas y las imágenes y no sobre las palabras.

3. Metodología

En este apartado se presentan elementos de la metodología de investigación que permitieron analizar la comprensión de los estudiantes sobre conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial. La recolección de información se realizó a través de registros escritos, hablados y de audio, conforme se avanzó en el trabajo de campo y en la ejecución de las fases del experimento de enseñanza propuesto. El análisis mencionado centró su atención en cada uno de los cuatro primeros estratos, considerando el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren (1994); para tal finalidad, en la investigación se consideraron los experimentos de enseñanza como una herramienta metodológica pertinente para recolectar información relevante, que permitió indagar por la ruta conceptual que cada estudiante siguió para la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en la resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

3.1. Enfoque de la investigación

La investigación se desarrolló en el contexto de un curso de ecuaciones diferenciales de un programa de ingeniería, en la cual se observaron interacciones entre el profesor investigador, el profesor de la asignatura y los estudiantes en el transcurso del desarrollo del estudio, procesos mentales y lenguajes convergentes en torno a los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales. Con esta indagación no se pretende generalizar los resultados en otro contexto (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), en su lugar, se busca analizar la comprensión de los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, teniendo en cuenta los recursos y conocimientos previos que ponen de manifiesto los estudiantes y la manera como emergen y se desarrollan las ideas en las interacciones entre profesores y estudiantes (Confrey, 2006), por lo que se considera pertinente un enfoque de carácter cualitativo.

En esta línea de trabajo, se emplearon los experimentos de enseñanza como una herramienta para recolectar información que permita discernir el nivel de comprensión de los estudiantes sobre los conceptos mencionados anteriormente. En este contexto, el enfoque cualitativo brinda un espectro amplio de posibilidades para precisar las interpretaciones de los participantes, del investigador y de las interacciones que emergen durante el estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), así como el refinamiento de los conceptos y la ruta conceptual descrita por las observaciones y los descriptores propuestos.

En este sentido, el estudio doctoral pretende analizar cómo comprenden lo estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, a través de un experimento realizado en tres fases con cinco estudiantes participantes. En particular, la investigación consideró los experimentos de enseñanza bajo la perspectiva de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren (1994), como una herramienta que propició interacciones entre los investigadores, estudiantes y profesores, en un contexto natural que involucra diversas situaciones planteadas de las cuales no todas se pueden controlar (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004). Además, posibilitan la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, del profesor y de los investigadores que participan en la investigación (Confrey, 2006; Kelly y Lesh, 2000).

Cabe resaltar que los experimentos de enseñanza permiten refinar el instrumento empleado, así como la hipótesis planteada para el mismo, en la medida del desarrollo de la investigación; en nuestro contexto, es una entrevista semi estructurada y el refinamiento emerge teniendo en cuenta las observaciones de los investigadores, la información proporcionada por los estudiantes a través de sus respuestas y los momentos de *folding back* realizados por los estudiantes en el transcurso de la entrevista.

3.2. Diseño de la investigación

El diseño del estudio es de naturaleza exploratoria descriptiva bajo la perspectiva de los experimentos de enseñanza en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, asumiendo el contexto de la investigación de diseño o investigación basada en diseño, los cuales permiten refinamiento continuo en el desarrollo del trabajo de campo, para promover el aprendizaje y crear conocimiento útil (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003), desde esta perspectiva se pretende analizar la comprensión de estudiantes sobre conceptos matemáticos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, teniendo en cuenta las características del problema y el objetivo propuesto para la investigación en cuestión.

3.2.1. Diseño de la entrevista

Esta investigación considera la entrevista como una estrategia metodológica para recolectar información pertinente al estudio, que permite analizar la comprensión de conceptos matemáticos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial. Asimismo, involucra complementariedades de la acción y la expresión, procesos de *folding back* y pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren, los cuales se emplean a su vez en concordancia con la intencionalidad de la pregunta de investigación con el proposito de alcanzar el objetivo propuesto. En este orden de ideas, se espera que la entrevista propicie momentos en los que a través de las complementariedades de la acción y la expresión y los procesos de *folding back*, emerjan redes conceptuales que permitan analizar la evolución de la comprensión de los estudiantes en cada nivel.

En nuestro contexto, es posible examinar la manera cómo a través de un proceso de *folding back*, los estudiantes reestructuran su conocimiento para comprender una situación planteada, cómo el profesor investigador indaga la reestructuración de los estudiantes sobre conceptos matemáticos, para analizar su evolución en la comprensión y cómo los investigadores involucrados reestructuran sus concepciones sobre la comprensión de los estudiantes, teniendo en cuenta la realizada por ellos y el profesor; lo relacionado anteriormente, se postula en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión y los experimentos de enseñanza, en particular, considerando lo mencionado por Confrey (2006), quien manifiesta que, al realizar un experimento de enseñanza, se espera que un estudiante construya conocimiento, que el profesor investigador lo haga sobre el construido por el estudiante y, finalmente, que el investigador también lo construya conocimiento sobre el construido por el estudiante y del profesor.

En este orden de ideas, la entrevista busca tanto en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (1994) como en los experimentos de enseñanza, por un lado, evidenciar el crecimiento de la comprensión de los estudiantes sobre conceptos matemáticos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, por otro, identificar la ruta conceptual utilizada por los estudiantes para tal fin, en este contexto, inicialmente se analizan los conceptos primitivos que exhiben y, a partir de ellos, se busca dilucidar la comprensión con base en los registros escritos, grabaciones en audio y video, y las observaciones registradas por los investigadores (Confrey, 2006).

Por otra parte, la entrevista permite que los estudiantes reflexionen sobre la comprensión de algunos conceptos matemáticos, de modo que se estimule una revisión continua de su conocimiento en la búsqueda de información que le permita comprender los abordados, además, se emplearon preguntas orientadoras abiertas y cerradas que permitieron analizar cómo evoluciona la comprensión de los estudiantes en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión. Adicionalmente, una de las ventajas de la entrevista, es que permite indagar por el proceso seguido por el estudiante a través de los niveles de comprensión, las cuales se reconocen en Pirie y Kieren (1989), quienes manifiestan que las evaluaciones con una o varias opciones como respuesta, no reflejan lo realmente comprendido por los estudiantes, además, las evaluaciones en las que se selecciona una respuesta, proporcionan representaciones pictóricas estáticas que un estudiante puede exteriorizar, por lo tanto, se cosidera que las entrevistas son instrumentos relevantes para descubrir cómo comprende un estudiante.

En el contexto de la teoría de Pirie y Kieren (1994), la entrevista permite determinar con certeza el nivel de comprensión de un estudiante, describir su evolución toda vez que se analicen sus registros y la manera cómo plasman los procesos mentales y las verbalizaciones a través de sus escritos, que pueden provocar comprensión en un nivel más externo, invocar el proceso de *folding back* y validar la comprensión que un estudiante exhibe sobre un concepto determinado.

Elaboración de la entrevista

Con la intención de generar una entrevista, que permitió analizar el nivel de comprensión de cada estudiante, se tuvo en cuenta la teoría de Pirie y Kieren, en particular, las complementariedades de la acción y la expresión, en ella se conformaron preguntas direccionadas hacia las características mencionadas anteriormente, con la posibilidad de que los estudiantes brindaran sus respuestas en el sentido de la acción, de la expresión o de ambas, o quizás no lograran expresar alguna de ellas, adicional a lo anterior, se empleó un mecanismo declarado por Londoño (2011) como descriptores, los cuales permitieron ubicar a cada estudiante en un nivel de comprensión determinado. La información recolectada en el trabajo de campo a través de la entrevista permitió dar de manera cualitativa respuesta a la pregunta de investigación y la manera en la cual se alcanzó el objetivo propuesto.

Por otra parte, analizar la comprensión de los estudiantes sobre conceptos matemáticos ha sido un referente en esta investigación, de esta preocupación emergen diferentes situaciones y preguntas, por lo que inicialmente se propuso de manera adecuada una entrevista para examinar qué información posee un estudiante al abordar una situación planteada, de igual manera, determinar el conocimiento primitivo que los estudiantes exhiben con respecto a los conceptos indagados, así como la forma en la cual los estudiantes establecieron relaciones entre los conceptos y una posible componente visual geométrica de los mismos; de igual modo, se examinó cómo a través de sus acciones basadas en los conocimientos primitivos, las estructuras matemáticas que ellos tenían las reemplazaron por otros objetos durante el proceso de razonamiento.

A raíz de las anteriores indagaciones, se formuló una entrevista como fruto de las observaciones en las aulas de clase; de la experiencia de los investigadores en la enseñanza del cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales; y de las reuniones en las que se analizó qué tipo de comprensión exhibía cada estudiante al abordar las situaciones planteadas en la entrevista. El escenario anterior, fundamentó el camino para conformar un conjunto de preguntas, cuyo fin fue analizar la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos, las cuales permitieron exhibir sus procesos de razonamiento y la manera de expresar sus respuestas, bien sean en el marco de la acción o la expresión, en el que involucraron procesos de *folding back;* con el fin de obtener una entrevista más robusta y entregar una versión mejorada de la misma, se realizaron reuniones de manera continua en la medida que avanzaba la ejecución del trabajo de campo.

En este contexto, un elemento que formó parte de las discusiones en el refinamiento de la entrevista fue el uso de una componente visual geométrica con la cual los estudiantes podrían así mostrar su comprensión al momento de establecer relaciones entre los conceptos matemáticos involucrados en la misma. A manera de ejemplo, se plantean tres situaciones posibles con una recta secante a una curva y una recta tangente a la misma: la recta tangente y su relación con la razón de cambio instantánea, la recta secante y su relación con la razón de cambio promedio, y la relación entre la razón de cambio instantánea con una familia de curvas que representa una solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Otro aspecto que se tuvo en cuenta al conformar y refinar las preguntas de la entrevista, fue el tipo de lenguaje empleado por los estudiantes al referirse a los objetos matemáticos, bien sea en la formalidad de los conceptos o en la susceptibilidad de posturas no tan rígidas que permitieron comprenderlos, así como los modos y tiempos empleados para la construcción de las oraciones en cada pregunta propuesta, lo anterior permitió distinguir con cuál tipo de lenguaje fue accesible a la comprensión sobre conceptos matemáticos en el marco de la complementariedad de la acción o la expresión en un proceso de resolución de una ecuación diferencial.

Por otra parte, en esta investigación se propició un ambiente adecuado que posibilitó un acercamiento entre el profesor investigador, el profesor de la asignatura y los estudiantes, de modo que generó en cierto sentido, un grado de confianza en el marco de lo académico, motivo por el cual se sintieron cómodos y entusiasmados al abordar cada situación planteada, de modo que sus respuestas emanaron de manera natural y espontánea. De esta forma, algunas preguntas de la entrevista se diseñaron de lo general a lo particular y otras solo hicieron referencia a lo particular, de modo que los estudiantes lograran discernir entre una idea y un concepto, y posteriormente, motivarlos a responder sobre las complementariedades de la acción y la expresión, para así analizar el proceso de comprensión del estudiante sobre un concepto involucrado en cada situación planteada (Ver Anexo 2. p.304).

3.2.2. Categorías y unidades de análisis

El trabajo de campo realizado permitió recolectar información relacionada con los conceptos involucrados en la resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, en las cuales los estudiantes ponen de manifiesto su comprensión para resolverla. Con el propósito de establecer las categorías y unidades de análisis se sistematiza la información, en primer lugar, organizando las respuestas de los estudiantes que establecieron algún tipo de relación y vínculo entre los objetos matemáticos, lo que condujo a ubicar la información en tres categorías: comprensión, complementariedad y conceptos involucrados; en algún momento se pensó en definir a los estudiantes como categoría y quizás sería lo indicado, pero se centró el interés en analizar sus ideas y soluciones escritas, así que no se consideró pertinente esta opción.

En ese sentido, se consideraron subcategorías para los cuatro primeros niveles de la teoría de Pirie y Kieren: categoría 1, comprensión, y subcategorías, los niveles de comprensión 1 a 4; categoría 2, complementariedades, y subcategorías, complementariedad de la acción y complementariedad de la expresión; categoría 3, conceptos involucrados, y subcategorías, conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada. La Tabla 10 presenta la distribución de las categorías y respectivas subcategorías, además de las unidades de análisis, las cuales se pueden considerar como aquellos elementos investigativos más simples objeto de estudio, los cuales permitirán realizar inferencias sobre procesos básicos en la construcción de conocimiento (Vasilachis, 2006).

Tabla 10.

Categorías y unidades de análisis

Categoría	**Subcategoría**				**Unidades de análisis**
Niveles de comprensión	N1	N2	N3	N4	Descriptores clasificados por nivel
Complementariedad	No aplica	De la acción			Descriptores clasificados por complementariedad de la acción
		De la expresión			Descriptores clasificados por complementariedad de la acción
Conceptos involucrados	Razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden				Descriptores clasificados por concepto

Fuente: Creación propia.

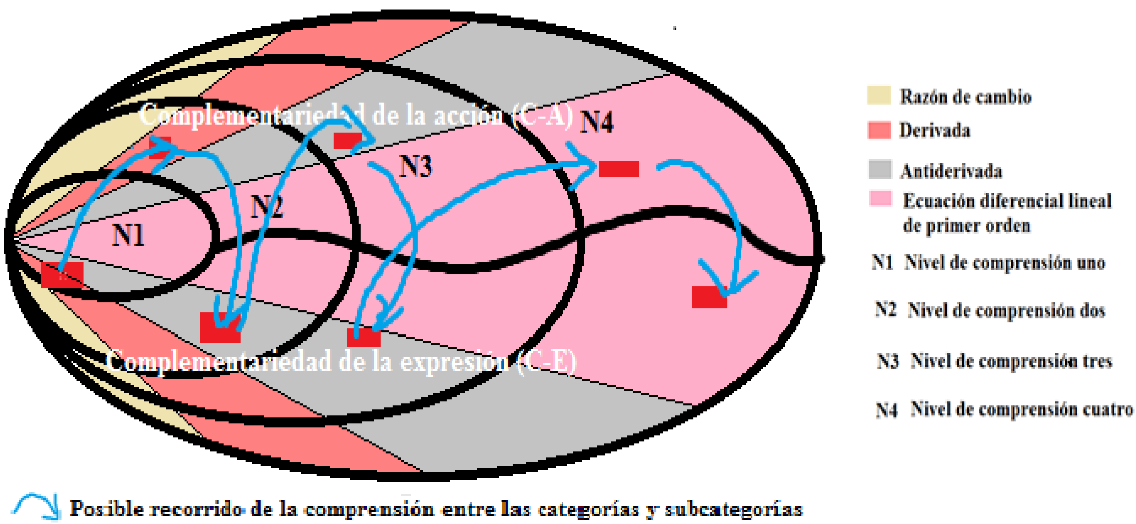
Teniendo en cuenta la Tabla 10, se puede observar que estas categorías y unidades de análisis permiten un rastreo aproximado del proceso de comprensión seguido por un estudiante, incluso, es posible visualizar la trazabilidad de los conceptos involucrados en el proceso mismo; en este orden de ideas, la Figura 14 muestra un posible recorrido del crecimiento de la comprensión de un estudiante sobre los conceptos matemáticos involucrados en cada episodio a través de los descriptores entre las categorías y subcategorías.

En las Figuras 14 y 15 se ilustran aspectos tales como el recorrido de comprensión, el cual se indica con una línea en color azul; los puntos rojos que señalan los descriptores en consonancia con las respuestas de los estudiantes. En la Figura 14 se puede observar que el recorrido inicia en el nivel 1 considerando el concepto de razón de cambio; posteriormente, se manifiesta un avance hacia el nivel 2 considerando el concepto de derivada; allí, puede decirse que hay manifestación de comprensión del concepto, dado que esta se exhibe en la forma señalada por Pirie y Kieren (1994), es decir, primero actuando y luego expresando. La respuesta de uno de los estudiantes y de acuerdo con los descriptores, evidencian que este exhibe primero la complementariedad de la acción, y luego la complementariedad de la expresión. De igual modo, se observa un avance de comprensión del estudiante hacia el nivel 3 sobre el concepto de antiderivada, exhibiendo primero la complementariedad de la acción y luego la complementariedad de la expresión y finalmente, el estudiante avanza hacia el nivel 4, evidenciando su comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden, a través de las complementariedades de la acción y de la expresión.

De esta manera, es posible ilustrar un recorrido de comprensión a través de los niveles y las complementariedades de la acción y la expresión, es decir, a través de las categorías y subcategorías que allí pueden observarse. Cabe resaltar que un recorrido puede manifestarse de variadas formas, como por ejemplo lo que ocurre en la Figura 15, que a diferencia de la Figura 14, se presenta un salto del nivel 2 al nivel 4 y posteriormente un redoblamiento entre el nivel 3, con lo cual se pueden apreciar dos aspectos, en primer lugar, la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos, considerada como actos o procesos mentales o físicos, realizados por un estudiante de manera no secuencial para comprender conceptos matemáticos en los diferentes niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren (1994), en segundo lugar, la ocurrencia de un proceso de *folding back*, dado que el estudiante primero avanza del nivel 2 hacia el nivel 4 y luego retrocede del nivel 4 al nivel 3.

Figura 14.

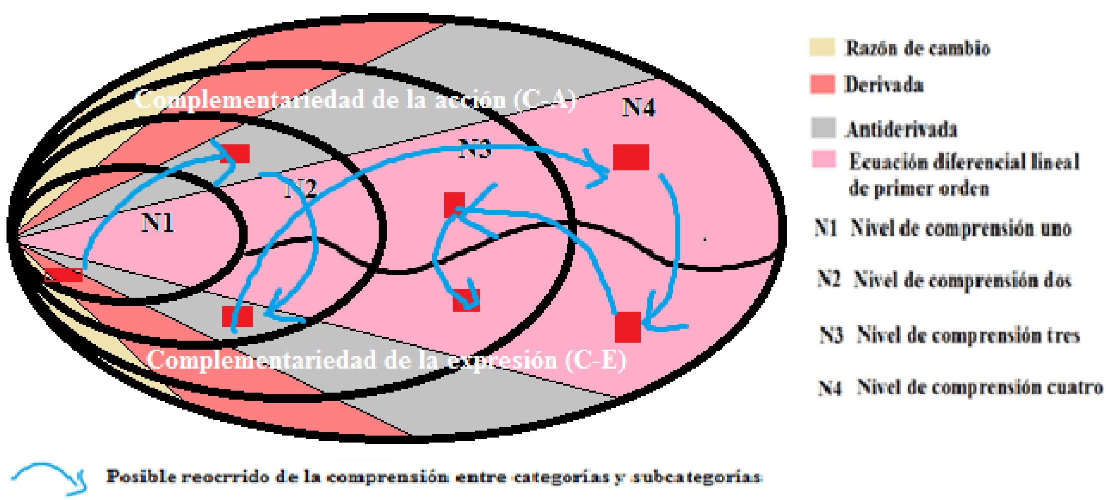
Representación de un posible recorrido de comprensión



Fuente: Construcción propia.

Así entonces, otro posible recorrido se muestra en la Figura 15.

Figura 15.
Representación del posible recorrido de comprensión



Fuente: Construcción propia.

A continuación, en aras de dar claridad a los descriptores propuestos en la Tabla 11, se muestra una distribución de ellos por nivel, por complementariedad y por concepto; ahora bien, puede ocurrir que un descriptor se encuentre por nivel, por complementariedad y a su vez por concepto. De esta manera se concibe que los conceptos son transversales a los niveles de comprensión y a las complementariedades de la acción y la expresión. Tanto la Tabla 10 como la Tabla 11 conservan la misma estructura; la diferencia se explicita en la última columna; mientras los descriptores propuestos en la Tabla 10 se colocan de manera general, en la Tabla 11 se distribuyen según la correspondencia con las categorías y las subcategorías, como se muestra a continuación.

Tabla 11.

Unidades de análisis correspondientes a cada subcategoría.

Categoría	Subcategoría	Unidad de análisis clasificados por nivel
Comprensión	Nivel 1	C P 1.1. Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
		C P 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
		C P 1.3. Distingue las variables que intervienen en una situación planteada.
		C P 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
		C P 1.5. Identifica la tasa de cambio como un cociente entre incrementos de variables.
		C P 1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
		C P 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
Comprensión	Nivel 2	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
		A 2.2. <u>Bosqueja gráficamente</u> una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
		A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
		A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
		A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
		A 2.6. Esboza la cantidad de puntos que existen entre dos extremos sobre una curva.
		A 2.7. <u>Bosqueja la antiderivada</u> de una función.
		E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
		E 2.2. Explicita el significado de la derivada de una función en un punto.
		E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.

		E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
		E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
		E 2.6. Describe el tipo de aproximación que existe entre dos puntos sobre una curva.
		E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.
Comprensión	Nivel 3	A 3.1. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
		A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
		A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
		A 3.5. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
		E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
		E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
		E 3.3. Determina una región limitada por funciones en un intervalo a través de una antiderivada.
		E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
		E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.
Comprensión	Nivel 4	A 4.1. Examina el tipo de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
		A 4.2. Examina el tipo relaciones que existe entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		A 4.3. Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas representaciones ante situaciones dadas.
		A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
		A 4.5. Examina el tipo de relaciones que hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		A 4.6. Examina los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente.
		E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
		E 4.2. Interpreta el tipo de relación que existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
		E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
		E 4.5. Infiere el tipo de relación que hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.

		E 4.6. Explica los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente en una curva.
Complementariedad	De la Acción (C-A)	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
		A 2.2. <u>Bosqueja gráficamente</u> una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
		A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
		A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
		A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
		A 2.6. <u>Bosqueja la cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.</u>
		A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
		A 3.1. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada. A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
		A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes, en una misma abscisa de una familia de curvas, con una ecuación diferencial.
		A 3.5. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
		A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
		A 4.2. Examina el tipo relaciones que existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		A 4.3. Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
		A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada
		A 4.5. Examina el tipo de relaciones que hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		A 4.6. Examina los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente.
Complementariedad	De la Expresión (C-E)	E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
		E 2.2. Explicita el significado de la derivada de una función en un punto.
		E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
		E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
		E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
		E 2.6. Describe el tipo de aproximación que existe entre dos puntos sobre una curva.
		E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.

		E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
		E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
		E 3.3. Determina una región limitada por funciones en un intervalo a través de una antiderivada.
		E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
		E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
		E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.
		E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
		E 4.2. Interpreta el tipo de relaciones que existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
		E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
		E 4.5. Infiere el tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		E 4.6. Explica los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente en una curva.
Conceptos involucrados	Razón de cambio	C P 1.1. Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
		C P 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
		A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
		E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
		A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
		E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.
		A 4.5. Examina el tipo de relaciones entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		E 4.5. Infiere el tipo de relaciones entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
	Derivada	C P 1.5. Identifica la tasa de cambio como un cociente entre incrementos de variables.
		A 2.2. Bosqueja gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
		E 2.2. Explicita el significado de la derivada de una función en un punto.
		A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
		E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
		A 4.1. Examina los tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
		E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.

	Antiderivada	C P 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
		A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
		E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.
		A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
		E 3.3. Determina una región limitada por funciones en un intervalo a través de una antiderivada.
		A 4.2. Examina el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		E 4.2. Interpreta el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
	Ecuación diferencial lineal de primer orden	C P 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
		A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
		E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
		A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
		E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
		A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
		E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Fuente: Construcción propia.

3.2.3. Proceso de codificación

Este proceso se realizó a partir del análisis de la información recolectada de los participantes, por los investigadores y por el profesor investigador en el transcurso del desarrollo de los episodios del experimento, inicialmente se agruparon las ideas y las respuestas más comunes de los estudiantes, para lograr un análisis detallado del nivel de comprensión adquirido por cada uno de los estudiantes.

En este contexto, emergen algunos descriptores en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, en particular, de las complementariedades de la acción y la expresión para las categorías y subcategorías que allí se proponen en cada nivel; cabe resaltar que los descriptores indicaron el nivel de comprensión alcanzado por cada estudiante, así como los momentos de folding back y la complementariedad empleada al responder las preguntas de la entrevista, teniendo en cuenta que los descriptores se refinan continuamente durante el trabajo de campo, con el fin de precisar información relevante que permita una descripción pormenorizada, tanto como sea posible, de la evolución de la comprensión de los estudiantes. La codificación se puede entender como un proceso que permite conceptualizar, organizar e integrar información, de modo que posibilite el análisis y las relaciones entre los datos recolectados, con miras a visualizar la evolución de la comprensión de cada estudiante.

Así entonces, se lograron distinguir tres categorías a las cuales nombramos niveles de comprensión, complementariedad y conceptos involucrados; para la primera, se tiene como subcategorías los niveles 1 a 4 representados por los símbolos N1, N2, N3 y N4 respectivamente; en la segunda, se identificaron las complementariedades de la acción y de la expresión como subcategoría, las cuales se simbolizan (C-A) y (C-E) respectivamente; para la tercera, se identificaron los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, los cuales no se asociaron con símbolos. Cabe señalar que en el nivel 1 será simbolizado por (CP) que proviene de conocimiento primitivo, el nivel 2 por (CI) que proviene de construcción de la imagen, el nivel 3 por (OI) que significaobtención de la imagen y el nivel 4 por (OP) que significa de observación de la propiedad.

Adicionalmente, para los descriptores se empleó una simbolización, con el objeto de sistematizar la información recolectada, por ejemplo, en el descriptor A 3.1, la letra A, indica que el descriptor pertenece a la complementariedad de la acción, el número 3, indica el nivel para el cual se propuso y el número 1 indica la posición en la tabla entre los descriptores del nivel 3, es decir, es el descriptor de la complementariedad de la acción del nivel 3, posición 1; de igual modo, en el descriptor E 3.2, la letra E señala que es un descriptor involucrado en la complementariedad de la expresión del nivel 3 ubicado en la posición 2. Finalmente, dado que la cantidad de información recolectada fue mucha y compleja, se optó por codificar, para organizar, clasificar y tabular la información y, con ello facilitar el análisis la comprensión de conceptos matemáticos en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

3.2.4. Métodos de recolección de información

En el marco de los experimentos de enseñanza, la recolección de información se hace de manera continua en cada fase del experimento. Creswell (2017) manifiesta que este proceso se puede realizar a través de observaciones, entrevistas, documentos y materiales visuales, en los que se tiene en cuenta: el entorno del estudiante, entendido este como el lugar donde se realiza la investigación; los participantes que son estudiantes matriculados por primera vez en un curso de ecuaciones diferenciales; los eventos, considerados como aquellos que realizan los participantes;

y los procesos, considerados como la naturaleza del participante para desarrollar eventos o actividades en un entorno determinado.

Por otro lado, Molina (2011) muestra las acciones que se deben realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza, las cuales permiten recolectar información desde el momento en que inicia hasta que finaliza un experimento; se puede observar entonces que el proceso de recolección y de análisis ocurren simultáneamente. En esta investigación, se recolecta la información a través de una entrevista, registros escritos, video y las observaciones de los investigadores (Creswell, 2017), en este sentido, la Tabla 12 ilustra algunas características del experimento en el que se incluyen las fases, fechas en las que se realizaron los episodios, acciones realizadas en cada uno de ellos, las instrucciones para las acciones realizadas y la manera cómo se recolecta la información.

Tabla 12.

Características generales del experimento

Diseño de la intervención							
	Fases	**Fecha**	**Tiempo**	**NE**	**Actividad**	**Instrucción**	**Recolección**
1	Preparación del experimento	5 de agosto	2 horas	5	Evaluación inicial.	Relacionada con los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.	Registro de video. Registro escrito de estudiantes. Observaciones de los investigadores.
2	Experimentación	19 de agosto	2 horas	5	Analizar la comprensión del concepto de razón de cambio.	Relacionada con la razón de cambio promedio, instantánea, recta secante y sus diversas interpretaciones.	Registro de video. Registro escrito de estudiantes. Observaciones de los investigadores.
		21 de agosto	2 horas	5	Analizar la comprensión del concepto de derivada. Analizar la comprensión del concepto de antiderivada.	Relacionada con la razón de cambio promedio, instantánea, recta tangente a una curva y sus diversas interpretaciones. Relacionada con el concepto de antiderivada como una función inversa a la derivada.	Registro de video. Registro escrito de estudiantes. Observaciones de los investigadores
		26 de agosto	2 horas	5	Proceso de resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.	Relacionada con el proceso de resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, involucrando conceptos de derivada, antiderivada y sus diversas interpretaciones.	Registro de video. Registro escrito de estudiantes. Observaciones de los investigadores.
3	Análisis retrospectivo	Distanciamiento del análisis del primer episodio.					
		Identificar ruta conceptual y cambios que realiza un estudiante.					

Fuente: Creación propia, tomando como base lo propuesto por Creswell (2017) en la recolección de datos.

En este sentido, la primera fase tiene como propósito analizar qué conceptos poseen inicialmente los estudiantes para abordar una situación planteada; la segunda fase permite analizar la evolución de la comprensión en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de Pirie y Kieren correspondientes a cada nivel, en relación a los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales; la tercera fase, a través del análisis retrospectivo, permite analizar qué camino conceptual siguen los estudiantes para comprender los conceptos antes mencionados.

Pasos para la recolección de información

La ejecución de los cuatro episodios del experimento de enseñanza generó información importante para esta investigación, en cada uno de ellos se solucionan preguntas de una entrevista, enmarcadas en las complementariedades de la acción y la expresión. A continuación, se explicitan los pasos que se siguieron para recolectar dicha información.

Paso 1. Emplear herramientas como la observación, la entrevista, registro de audio y video, y las observaciones de los investigadores, de modo que permita recolectar toda la información posible que emerge en el desarrollo de la investigación como lo manifiesta Creswell (2005).

Paso 2. Registrar toda la información generada por las respuestas de los estudiantes, las observaciones de los investigadores y del profesor investigador, así como los cambios en las decisiones tomadas de manera justificada con el fin de analizar la evolución de la comprensión de los conceptos involucrados, como lo manifiesta Cobb y Gravemeijer (2008).

Paso 3. Transcribir los registros de las entrevistas realizadas a cada estudiante para identificar palabras y frases comunes, de modo que al emplear un software de análisis de datos cualitativos como el Atlas Ti, permita discernir la información de relevancia, a fin de que posibilite su organización bajo una categoría. Asimismo, el análisis de la información recolectada en la primera fase en el marco de la evaluación del estudiante, permitió la construcción de oraciones que describen en cierto modo la comprensión de los conceptos antes mencionados, los cuales se postulan como descriptores, y a su vez, se emplean como unidades de análisis, dado que ellos pueden describir el nivel de comprensión de cada estudiante en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

En este contexto, a través del análisis de la información se identificaron categorías y unidades de análisis que permitieron codificar la información, con el fin de facilitar el proceso de análisis de la misma y con ello, dar respuesta a la pregunta de investigación y alcanzar el objetivo propuesto.

3.3. Investigación de diseño

La investigación de diseño o investigación basada en diseño tiene sus raíces en la entrevista clínica y el constructivismo radical y social (Confrey, 2006); autores como Molina (2011) la consideran como un paradigma metodológico de carácter cualitativo desarrollado al interior de las ciencias del aprendizaje, integrada por un amplio campo disciplinar en la que se incluye la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia y las didácticas específicas (Confrey, 2006; Sawyer, 2006), cuyo objetivo es analizar el aprendizaje a través de diseños, estrategias y herramientas de enseñanza susceptibles a los aprendizajes de los estudiantes.

Por su parte, Confrey (2006) considera la investigación de diseño como investigaciones de interacciones educativas, en las que se emplean diversas actividades de manera secuenciada, cuyo objetivo es estudiar cómo aprenden los estudiantes un campo conceptual o un conjunto de competencias bajo el direccionamiento de un profesor, de igual modo, manifiesta que este tipo de estudio procura documentar qué recursos y conocimientos previos ponen en juego los estudiantes en las tareas, cómo interaccionan los estudiantes y profesores, cómo son creados los registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones y cómo es llevada a cabo la enseñanza (p.2).

Por otro lado, la investigación de diseño se considera importante para promover el aprendizaje, crear conocimiento útil y hacer progresar las teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos, la cual va más allá de una intervención particular y se centra en el diseño de experiencias educativas. Este tipo de estudio más alla de crear dieños eficaces que permitan determinar un aprendizaje, sugieren formas con las que pueden adaptarse en otros contextos (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; DBRC, 2003).

Por su parte, Shavelson y Towne (2002) consideran la investigación de diseño como "Enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas (currículo, métodos enseñanza, applets informáticos) que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente" (p.120). En este contexto, la investigación empleó los experimentos de enseñanza, como una herramienta medotológica en conjunción con las complementariedades de la acción y de la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, para analizar la comprensión que exhiben los estudiantes sobre los conceptos mencionados anteriomente.

Por otro lado, Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003), manifiestan que en la investigación de diseño se pueden emplear métodos que faciliten conexiones entre los procesos de actuación y los resultados, de modo que se generen conocimientos aplicados de manera directa a la práctica. De igual forma, manifiestan que mediante el diseño de elementos en ambientes de aprendizaje y la forma cómo funcionan conjuntamente, permiten una mayor comprensión de los mismos para promover el aprendizaje. Asimismo, Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) expresan que más allá de crear diseños para un aprendizaje establecido, los estudios de diseños explican por qué funcionan en la práctica y sugieren modos que se pueden adaptar a nuevas situaciones, mientras que Shavelson y Towne (2002) consideran que las investigaciones al emplear este tipo de estudio, tratan de responder la pregunta ¿cómo y por qué sucede algo?

En nuestro contexto, se diseñó una entrevista semi estructurada en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, mediada por los experimentos de enseñanza, adaptada a situaciones en contextos naturales al interior de un curso regular de ecuaciones diferenciales, la cual permitió a través de un análisis de los datos recolectados indagar por la comprensión de conceptos matemáticos y el tipo de relaciones que establecen los estudiantes con respecto a los conceptos involucrados. Así entonces, lo anterior permitió recolectar información relevante para responder la pregunta cómo es la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

En este sentido, las conexiones manifestadas por Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) pueden tener cierta relación con las consideraciones hechas por Pirie y Kieren (1994), al declarar que la comprensión es un proceso que se manifiesta en los estudiantes primero actuando y luego expresando, estos modos de manifestación de la comprensión de un concepto se apreciaron en las complementariedades de la acción y la expresión, la cual es una característica de la teoría en cuestión.

3.3.1.1. Características.

Barab y Squire, (2004) expresan que la investigación de diseño ocurre en escenarios naturales en el que se genera algún tipo de aprendizaje y se involucran múltiples variables que hacen complejo su estudio, cabe señalar que no todas se pueden controlar, por lo que se requiere especificar cuáles serán objeto de estudio y cuáles se asumen como variables del contexto, de modo que con ellas se expongan situaciones en las que se manifiesten interacciones entre investigadores y profesores, investigadores y la comunidad e investigadores y estudiantes. En este tipo de investigaciones actúan diferentes participantes con sus experiencias, capacidades de producción y análisis, que permiten revisar el diseño constantemente desde el momento de su inicio. Este proceso denominado refinamiento progresivo posibilita a los investigadores modificar y mejorar las actividades propuestas constantemente.

Kelly, Baek, Lesh y Bannan-Ritland (2008) manifiestan que la investigación de diseño rompe con la diferencia entre investigador y profesor, dado el interés del profesor de participar activamente en la investigación, además, proporcionó información relacionada con el proceso de aprendizaje de los estudiantes y la manera cómo este se suscitó al desarrollar una investigación. En nuestro contexto, la investigación involucra activamente al profesor del curso de ecuaciones diferenciales y a los investigadores, dado el interés del profesor por participar activamente en ella, permite romper con la diferenciación mencionada por, Kelly, Baek, Lesh, y Bannan-Ritland (2008), además, este hecho, proporcionó información relacionada con la interacción entre los estudiantes y el profesor, permitió detallar la manera cómo los estudiantes concibieron la comprensión de algunos conceptos matemáticos y la evolución de la comprensión de los mismos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

Por su parte, el colectivo de investigación basado en diseño (COLLECTIVE. DBRC, 2002) considera que este tipo de estudio es una metodología para comprender cómo, cuándo y por qué las innovaciones educativas funcionan en la práctica y la manera cómo las investigaciones sobre intervenciones particulares contribuyen con las teorías de enseñanza y aprendizaje. Al mismo tiempo, manifiestan que van más allá de diseñar y probar intervenciones específicas, ya que este tipo de investigaciones tienen como foco explorar toda innovación y el funcionamiento de su diseño en la enseñanza y aprendizaje, con los cuales reúnen afirmaciones teóricas específicas que permiten analizar de qué manera comprenden los estudiantes algunas relaciones específicas entre ellas.

Cabe aclarar que Collins, Joseph, Diana y Bielaczyc, Katherine (2004) reconocen algunas debilidades en la investigación de diseño, entre ellas, las dificultades para manipular el volumen de información generado por las múltiples variables involucradas en estos estudios, la complejidad de las situaciones en contextos naturales, el análisis de la información suministrada por diferentes investigadores y las dificultades para demarcar el tipo de conocimiento adquirido por los participantes durante la investigación, debido a las interacciones entre la teoría y la práctica.

3.3.1. Participantes

Ana, Antonio, Pedro, Diana y Juan fueron los nombres que se asignaron a los estudiantes de un curso regular de ecuaciones diferenciales del programa de ingenierías de la universidad de Medellín, quienes se vincularon a la investigación de manera voluntaria y recibieron información sobre el experimento relacionada la selección de estudiantes, el número de episodios y el tiempo de duración. Asimismo, se informó que sus derechos serán protegidos a través de un documento denominado consentimiento informado, en el cual, se explicita que serán fotografiados, grabados en audio y video, con la opción de desvincularse de la investigación en el momento que lo deseen.

Los estudiantes fueron citados a una reunión en la que se les informó que la investigación se realizaría en tres fases y cuatro episodios, en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y kiren, y a su vez, mediada por los experimentos de enseñanza, con duración de seis horas cada episodio, las cuales se distribuyeron así: dos horas para acondicionamiento de la entrevista, dos horas para ejecutar la entrevista y dos horas para discutir las respuestas, además, se les manifestó que serían grabados y fotografiados en el desarrollo de cada episodio. Por otro lado, la selección de estudiantes se realizó teniendo en cuenta los siguientes aspectos: suscripción voluntaria, disponibilidad de tiempo y estar matriculados en un curso regular de ecuaciones diferenciales por primera vez. Atendiendo a las indicaciones anteriores, los participantes voluntarios fueron cinco, además del profesor investigador, el profesor de la asignatura y un profesor que hará las veces de observador.

3.3.2. Experimentos de enseñanza y sus fases

De acuerdo con el contexto de la investigación de diseño están los *experimentos de enseñanza*, los cuales son de naturaleza cualitativa (Cobb y Gravemeijer, 2008), surgen por la necesidad de crear modelos que incluyan el progreso de los estudiantes como resultado de la interacción matemática, así como el empleo de los conocimientos matemáticos propios de los investigadores, en vez de los ya conocidos. Otro factor es el hecho que los modelos creados para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes no estaban direccionados hacia la Educación Matemática.

Por otra parte, los investigadores al realizar algunos estudios acostumbran a seleccionar muestras de una población, para las cuales se propone un tratamiento y posteriormente se realiza una comparación entre la población tratada y la no tratada. En ese ámbito, Steffe y Thompson (2000) afirman que, en esas circunstancias, solo se lograban establecer algunas diferencias y se deja a un lado el análisis conceptual, al mismo tiempo, mencionan que los estudiantes involucrados son solo receptores de tratamientos y no participan en la construcción de los mismos; además, el análisis conceptual no se centra en ellos y tampoco la forma de crear significado por parte de los estudiantes es foco de interés en el presente estudio.

Los escenarios mencionados anteriormente evidencian la necesidad de que la comunidad de investigación en educación proponga propuestas metodológicas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, entre ellas experimientos de enseñanza, dado que las técnicas empleadas hasta el momento solo requieren de la formalidad y de las estructuras complejas de la matemática, dejando a un lado las interacciones y los procesos realizados entre profesores y estudiantes. Los experimentos de enseñanza se llevaron a Estados Unidos de norte américa después de 1970 a través de un proyecto entre las universidades de Chicago, Georgia y Stanford, en el que se traducen al inglés algunos experimentos de enseñanza desarrollados en la academia de ciencias pedagógicas de la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (Ghosh, 2013).

Los experimentos de enseñanza son una secuencia de episodios de enseñanza en los que participan un profesor-investigador, uno o más estudiantes y un investigador-observador (Steffe y Thompson, 2000); la duración de los experimentos de enseñanza es variable y pueden realizarse en horas, o en uno o más años (Molina, 2011). En el marco de la investigación, las consideraciones de Steffe y Thompson (2000) se conciben de la siguiente manera: el experimento de enseñanza se realizó a través de una secuencia de cuatro episodios y tres fases, en las que participarán el profesor titular del curso de ecuaciones diferenciales, cinco estudiantes voluntarios, el investigador principal y un investigador observador. La duración estimada para este experimento es de 24 horas, tomadas en común acuerdo con los estudiantes y el profesor del curso, sin que interrumpa las actividades planificadas para el mismo. Para la presente investigación, los episodios propuestos para el experimento se mencionan a continuación:

El primer episodio relacionado con la evaluación del estudiante, se realizó en el contexto de la primera fase denominada preparación del experimento; en ella se analizan los conceptos que los estudiantes emplean para resolver las preguntas propuestas en la entrevista, las cuales pretenden analizar la comprensión estudiantil sobre los conceptos de razón de cambio, derivada, anti derivada y ecuaciones diferenciales. Dado que el primer nivel de la teoría de Pirie y Kieren analiza los conceptos primitivos que los estudiantes poseen para abordar una situación planteada, ambas guardan una estrecha relación, dado que se centran en la búsqueda del conocimiento inicial o primitivo de los estudiantes.

La fase dos, llamada experimentación, está conformada a su vez por tres etapas denominadas:

Antes del experimento, en la cual se identificaron los objetivos para cada pregunta, se recolectó información del trabajo de campo realizado previamente con los estudiantes en el aula de clase y se ultimaron detalles en la construcción de la entrevista teniendo en cuenta la información recogida.

Durante el experimento, etapa que se efectúa en tres de los cuatro episodios propuestos para el experimento de enseñanza: el episodio dos, relacionado con el análisis de la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, empleando las preguntas uno, dos y tres; el episodio tres en el que se analizó la comprensión del concepto de antiderivada, utilizando las preguntas cuatro y cinco; y el episodio cuatro, relacionado con el análisis del concepto de ecuaciones diferenciales, para el que se usaron las preguntas seis y siete de la entrevista.

Después del experimento, se analizaron los datos recolectados, se revisó y reformuló la hipótesis y conjeturas propuestas inicialmente, las cuales se refinaron toda vez que se analizaban los datos recogidos. Por otra parte, el experimento de enseñanza se desarrolló en contextos naturales que fueron ambientes de aprendizajes amplios, habitaciones-laboratorios y sesiones de clases completas, en las que se llevaron a cabo las entrevistas. Al poner en marcha un experimento de enseñanza se espera construcción de conocimientos por parte del estudiante, por parte del investigador sobre la elaboración del estudiante y por parte de los investigadores involucrados con relación al conocimiento de ambos; esta distinción en diferentes planos es denominada multiniveles o multietapas (Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000).

En el marco de lo expuesto anteriormente, en esta investigación se tuvo en cuenta las distinciones realizadas por Cobb y Gravemeijer (2008) y Molina (2011) para el desarrollo del experimento de enseñanza con tres fases denominadas: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. Para este efecto, se empleó una serie de cuatro episodios, los cuales se desarrollaron con las mismas condiciones para los participantes, en condiciones naturales de un aula de clase, con una duración de seis horas cada uno, como se muestra en la Tabla 13; cabe aclarar que en la tabla no aparecen las dos horas de acondicionamiento y las dos horas de socialización de las respuestas de los estudiantes

Tabla 13.

Diseño del experimento de enseñanza.

Experimento										
Fase			**Tiempo**	**NE**	**Actividad**	**Instrucción**				**Recolección**
1	Preparación de experimento		2	5	Episodio 1	Evaluación del estudiante				Registro de video Registro escrito de estudiantes observaciones de los investigadores
2	Experimentación	ANTES	Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula de clase con los estudiantes, de modo que se tenga al momento de elaborar la entrevista. Identificar los objetivos de cada instrucción. Ultimar detalles en la construcción de la entrevista teniendo en cuenta la informción recolectada Registro de las decisiones tomadas en el proceso de ejecución							Registro de video Registro escrito de estudiantes observaciones de los investigadores
			2	5	Episodio2	Razón de cambio, derivada	C-A	C-E	Preguntas 1, 2 y 3	Registro de video Registro escrito de estudiantes observaciones de los investigadores
			2	5	Episodio 3	Antiderivada	C-A	C-E	4 y 5	Registro de video Registro escrito de estudiantes observaciones de los investigadores
			2	5	Episodio 4	Ecuaciones diferenciales			6 y 7	Registro de video Registro escrito de estudiantes observaciones de los investigadores
		Después	Analizar los datos recolectados en la intervención							
			Revisar y reformular la hipótesis y conjeturaas							
3	Análisis retrospectivo		Distanciamiento de la información fase 1							
			Identificar ruta conceptual y cambios que realiza un estudiante							

Fuente: Construcción propia con base en las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren mediado por los experimentos de enseñanza en Molina (2011, p.81).

A continuación, se explicitan algunos de los significados de los símbolos que aparecen en la Tabla 13: NE: Número de estudiantes; (C-A): Complementariedad de la acción, (C-E): Complementariedad de la expresión.

Por otra parte, Steffe y Thompson (2000) afirman que los experimentos de enseñanza se llevan a cabo para valorar y generar hipótesis en el desarrollo del experimento o durante los episodios del mismo, los cuales se pueden refinar en cada momento del desarrollo de la investigación, teniendo en cuenta la información recolectada y las observaciones proporcionadas por los investigadores. Para efecto del desarrollo del experimento de enseñanza, se formula la siguiente hipótesis: ¿será posible que a través de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, se pueda analizar la comprension sobre los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial en un nivel determinado?

Fases del experimento de enseñanza.

En la presente investigación se asumieron las distinciones propuestas por Cobb y Gravemeijer (2008) para las fases de un experimento de enseñanza, que a saber son: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. Las etapas que se desarrollaron en cada fase se muestran en la Tabla 14.

Tabla 14.

Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza.

Nombre		**Acciones**
Fase 1.	**Preparación del experiment**	Definir el problema y objetivo de investigación. Identificar los objetivos instruccionales. Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Diseñar la recolección de datos.
Fase 2. Experimentación	**Antes de cada intervención**	Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, el cual se tendrá en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Refinar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.

		Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos. Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones.
	En cada Intervención	Modificar el diseño de la intervención si es necesario, sobre la marcha, de manera justificada, de acuerdo con los objetivos de la intervención. Recolectar datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.
	Después de cada intervención	Analizar los datos recogidos en la intervención. Revisar y reformular las hipótesis/conjeturas de la investigación.
Fase 3.	**Análisis retrospectivo de los datos**	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar de la información recolectada implica: a) Alejarsede los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del profesor-investigador que contribuyeron a dichos cambios.

Fuente : Tomado de Molina (2011).

3.3.2.1. *Fase1. Preparación del experimento*.

En esta investigación se inició con la definición del problema en el capítulo 1, sección 1.2 y se identificaron los objetivos para cada instrucción. La evaluación del conocimiento se realizó a través de una entrevista en la cual se analizó el conocimiento inicial que exhiben los estudiantes sobre algunos conceptos matemáticos y el tipo de relación que se pueden establecer entre ellos para abordar un problema. La entrevista estuvo conformada por cuatro preguntas, en la primera se analizó el concepto de razón de cambio, rapidez y proporcionalidad directa, así como las relaciones que los estudiantes establecieron entre ellos; la segunda examinó la forma cómo los estudiantes evaluaron las condiciones iniciales; posteriormente la tercera inspeccionó cómo los estudiantes reconocieron las variables independientes y dependientes y, la cuarta, analizó la relación entre una expresión algebraica y un enunciado y las diferentes interpretaciones que pueden emerger al dar una solución al problema planteado.

3.3.2.2. *Fase2. Experimentación.*

En esta fase se identifican tres etapas que se explicitan a continuación:

3.3.2.2.1. *Antes de la experimentación.*

En la segunda fase, la información obtenida en el episodio permitió detectar los conocimientos iniciales de los estudiantes, los cuales después de ser analizados se tuvieron en cuenta para el refinamiento de la entrevista, mientras que los siguientes episodios permitieron indagar y describir la comprensión de los conceptos antes mencionados en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

En esta investigación, de acuerdo con el análisis de los datos iniciales, las observaciones de los investigadores, y la experiencia y trayectoria en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de los investigadores y del profesor investigador, se propone en el marco de la teoría de Pirie y Kieren y de los experimentos de enseñanza la siguiente hipótesis: ¿será posible que a través de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, se pueda analizar y describir la evolución de la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial en un nivel determinado?

3.3.2.2.2. *Durante la expermentación.*

En cada episodio del experimento se recolectó información, se realizó observaciones y se documentó toda acción o expresión proveniente de las respuestas de los estudiantes, los investigadores y el profesor involucrado en la investigación, y las interacciones entre los participantes, las cuales se guardan en los registros escritos de audio y video en concordancia con lo manifestado por Kelly y Lesh (2000) al experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes. En este contexto, la variedad de información favorece la elaboración, diseño y refinamiento de la entrevista, otorgando calidad al proceso de investigación (Steffe y Thompson, 2000), se indagó si el modelo teórico fue factible a la luz de la información recolectada (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000). Cabe anotar que se refinó de manera fundamentada todo cambio y toma de decisiones relacionada con la investigación (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000).

3.3.2.2.3. *Después de la experimentación.*

Después de la experimentación, se consolidaron los descriptores, se tomaron los datos de manera convergente y se organizó la información recolectada para el análisis respectivo; cabe mencionar que las entrevistas en cada episodio se conformaron a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, direccionadas hacia el análisis de conceptos involucrados en cada situación planteada como se señaló en el apartado 3.3 del capítulo tres, en este sentido, la entrevista en el episodio dos estuvo direccionada para analizar la comprensión de los conceptos razón de cambio y derivada; la entrevista en el episodio tres se orientó hacia la comprensión del concepto de antiderivada y la entrevista del capítulo cuatro estuvo orientada para analizar la comprensión del concepto de ecuaciones diferenciales.

Lo mencionado anteriormente, preparó el camino en el cual se colocaron todos los elementos necesarios a través de los cuales en el capítulo cuatro se analizó la información respectiva de cada estudiante en relación con los conceptos antes mencionados involucrados en cada situación planteada.

3.3.2.3. *Fase 3. Análisis retrospectivo.*

El trabajo mancomunado entre investigadores y profesores es relevante a la hora de hacer el análisis retrospectivo, dado que ambos pueden aportar aspectos que son complementarios, aunque ambas perspectivas están claramente diferenciadas y se benefician con cada contribución, este ejercicio permitió experimentar de cerca los procesos de aprendizaje y razonamiento de cada estudiante (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000), los cuales en nuestro contexto, tienen que ver con la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en cada situación planteada y con los procesos de *folding back* para desplazarse entre los niveles de comprensión de la teoría en cuestión, además, este esfuerzo contribuyó con la disminución de la diferenciación entre profesor e investigador.

Por otro lado, el análisis retrospectivo de la información recolectada permitió recapitular nuevamente la experiencia vivida al interior del aula, lo que en nuestro contexto posibilitó observar aquellos detalles que fueron desapercibidos al realizar el análisis de los datos, los cuales contribuyeron en fortalecer el mismo, de igual manera, permitió analizar la ruta conceptual seguida por los estudiantes para comprender los conceptos matemáticos involucrados en cada situación planteada. En este sentido, el análisis retrospectivo de cada episodio se encuentra de manera detallada en los apartados siguientes: 4.3.1.1 correspondiente al concepto de razón de cambio y derivada (en el episodio dos); 4.3.2.1 correspondiente al concepto de antiderivada (en el episodio tres) y 4.3.3.1 correspondiente al concepto de ecuaciones diferenciales (en el episodio cuatro).

3.3.3. Trabajo de campo

Con el propósito de analizar y describir el proceso de comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados para la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, se examinaron las respuestas en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, lo cual mostró el nivel de comprensión que alcanzó cada estudiante durante en el desarrollo del experimento. En este orden de ideas, el experimento se realizó en tres fases y cuatro episodios, denominadas así: fase uno o preparación del experimento, la cual involucró la ejecución del episodio uno; el trabajo de campo que se desarrolló en él, tuvo una duración de seis horas, distribuidas en tres momentos de dos horas cada uno.

El primero, fue previo a la ejecución de la entrevista; se preparó el salón de clases, ambiente que rodeó a los estudiantes y se hizo una ilustración sobre la entrevista, en la que se informó que no se colocaría una nota buena o mala sobre los resultados de las respuestas que ellos emitieran, pero que serían objeto de análisis en el marco de la teoría mencionada anteriormente, además, estas no incidían en ninguna forma sobre las notas del curso regular de ecuaciones diferenciales; cabe señalar que los estudiantes tuvieron las mismas condiciones para la ejecución de la entrevista.

Es importante mencionar que la información recolectada en la primera fase fue analizada en el marco de la teoría antes mencionada para refinar la entrevista, con miras a obtener un documento más robusto que diera cuenta del avance de la comprensión de los estudiantes sobre conceptos matemáticos involucrados en las situaciones planteadas en cada pregunta, en particular, de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales. Para este efecto, se tuvieron en cuenta las respuestas orales y escritas de los estudiantes, las observaciones de los investigadores y los acuerdos producto de discusiones al interior de diferentes reuniones, en las que se analizó cada respuesta.

El segundo momento, se relacionó con la ejecución de la entrevista, teniendo en cuenta los procesos y desarrollos llevados a cabo por los estudiantes; también se atendieron algunas dudas e interrogantes que emergieron. El tercero, tuvo que ver con la socialización de las respuestas emitidas por los estudiantes, registrando de manera escrita algunas observaciones realizadas por los investigadores, así como las apreciaciones de los estudiantes. En el contexto de las observaciones, se hace necesario manifestar que los estudiantes solicitaron, por un lado, más tiempo para realizar la entrevista, por otro, una entrevista por concepto, dado que al analizar todos al mismo tiempo, la visualizaron de manera compleja y generaba dificultades para resolverla.

Con base en lo mencionado anteriormente, se conformó una entrevista por concepto, producto de reuniones con el profesor de la asignatura, los investigadores y las observaciones de los estudiantes, cabe aclarar que en la segunda fase cada episodio tuvo una distribución de seis horas, en el sentido de una preparación para la entrevista, ejecución de la entrevista y socialización del análisis de las preguntas, por lo tanto, la segunda fase denominada experimentación, por un lado, se tuvo en cuenta lo mencionado por Molina (2011) relacionado con las acciones a seguir en un experimento de enseñanza, en el cual menciona que en la fase de experimentación se involucran tres etapas llamadas así:

Antes de la experimentación: se tuvo en cuenta el análisis de la información recolectada del trabajo de campo realizado para conformar el *episodios dos*, en el cual se analizó la comprensión de los conceptos de razón de cambio y derivada ubicados en las preguntas uno, dos y tres de la entrevista; el *episodio tres*, permitió indagar por la comprensión del concepto de antiderivada ubicado en las preguntas cuatro y cinco y, el *episodio cuatro*, posibilitó analizar el concepto de ecuaciones diferenciales ubicado en las preguntas seis y siete.

Además, se ultimó y detalló las preguntas y situaciones planteadas; se verificaron los medios para recolectar la información, entre otros, audio, video, registros escritos y hablados de los estudiantes, además de las observaciones de los investigadores y, por último, se manifestó que las decisiones tomadas durante el desarrollo de cada episodio se registrarían de manera escrita, es decir, si alguna de las preguntas se debía modificar de manera justificada.

Durante la experimentación: no hubo necesidad de modificar las preguntas propuestas para la ejecución de cada episodio y la recolección de la información se registró durante el desarrollo de los mismos.

Después de la experimentación; se sistematizó la información recolectada y no hubo necesidad de reformular la hipótesis planteada para la entrevista, cabe aclarar que esta hipótesis es para la entrevista y no es objeto de investigación en el estudio.

Fase tres, análisis retrospectivo de la información, este se ubicó en el capítulo cuatro de la presente tesis, para el cual se tuvo en cuanta la información recolectada en cada episodio, en este análisis se indagó por la ruta conceptual empleada por los estudiantes para comprender los conceptos de razón de cambio y derivada en el apartado 4.3.1.1.; antiderivada en el apartado 4.3.2.1 y ecuaciones diferenciales en el apartado 4.3.3.1.

3.4. Descriptores

El análisis de registros escritos de los estudiantes en el episodio uno, diseñado en el marco de experimentos de enseñanza, la experiencia de los investigadores en la enseñanza de los conceptos antes mencionados, las reuniones y discusiones al interior de las mismas con los investigadores y el profesor participante, todo esto permitió indagar de manera minuciosa cómo comprenden los estudiantes los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden.

Dicho análisis genera la necesidad de un mecanismo que permita distinguir en qué nivel de comprensión se encuentran los estudiantes, en este sentido, Londoño (2011) manifiesta que identificar unos descriptores para evidenciar los momentos de comprensión, es una manera de indagar por el nivel de comprensión de un estudiante sobre conceptos matemáticos; en nuestro contexto, se plantearon algunos descriptores que posibilitaron analizar el nivel de comprensión de los conceptos matemáticos mencionados anteriormente.

Dado que la teoría de Pirie y Kieren (1994) sugiere que la comprensión se produce primero actuando y luego expresando, los descriptores para esta investigación se formularon en este sentido, a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, ubicados en cada nivel de la teoría en cuestión. Así entonces, los descriptores pueden señalar el progreso de la comprensión de un estudiante en cada nivel sobre un concepto; es de aclarar que este proceso precisó de reuniones en las cuales se analizaban las características de cada pregunta, teniendo en cuenta las observaciones, la experticia y conocimiento de los investigadores con relación a la enseñanza de los conceptos involucrados en la resolución de una ecuación diferencial, de modo que entre las preguntas de la entrevista y los descriptores se manifieste una convergencia en términos de las complementariedades mencionadas. (Ver Anexo 3. p.309).

Las tablas siguientes ilustran los descriptores preliminares propuestos correspondientes a los niveles de comprensión dos, tres y cuatro, teniendo en cuenta que los descriptores refinados se lograron durante y después del trabajo de campo y que serán objeto de análisis en el capítulo de la metodología.

Tabla 15.

Construcción de descriptores para el nivel dos de comprensión.

Acción	Construcción de la imagen	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
		A 2.2. Esboza gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.

Nivel 2			A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
			A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación.
	Expresión	Análisis de la imagen	E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio y una instantánea.
			E 2.2. Explica el significado de la derivada de una función en un punto.
			E .2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
			E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.

Fuente: Creación propia, construcción de los descriptores para el nivel 2 de comprensión de los conceptos involucrados.

Tabla 16.

Refinamiento de los descriptores para el nivel dos de comprensión.

Nivel 2	Acción	Construcción de la imagen	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea
			A 2.2. Esboza gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
			A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
			A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
			A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
			A 2.6. Esboza la cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
			A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
	Expresión	Análisis de la imagen	E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio y una instantánea.
			E 2.2. Explica el significado de la derivada de una función en un punto.
			E .2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
			E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
			E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.

	E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
	E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.

Fuente: Creación propia, refinamiento de los descriptores del nivel 2 de comprensión de los conceptos involucrados.

Se puede observar, comparando los descriptores de la Tabla 15 con los de la Tabla 16, que el refinamiento logrado, permite evidenciar de manera aproximada el proceso de comprensión en cuanto a la construcción de la imagen, manifestado por los estudiantes de los conceptos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y antiderivada.

Tabla 17.

Construcción de los descriptores para el nivel tres de comprensión.

Nivel 3	Acción	Obtención de la imagen	A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
			A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
			A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
			A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
	Expresión	Análisis de la imagen	E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
			E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
			E 3.3. Determina la antiderivada de una región limitada por funciones en un intervalo.
			E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.

Fuente: Creación propia, construcción de los descriptores del nivel 3 de comprensión de los conceptos involucrados.

Tabla 18.

Refinamiento de los descriptores para el nivel tres de comprensión.

	A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

Nivel 3	Acción	Obtención de la imagen	A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
			A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
			A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
			A 3.5. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
			A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
	Expresión	Análisis de la imagen	E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
			E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
			E 3.3. Determina la antiderivada de una región limitada por funciones en un intervalo.
			E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
			E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
			E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.

Fuente: Creación propia, refinamiento de los descriptores del nivel 3.

Se aprecia en la Tabla 18 cómo los estudiantes avanzan en su comprensión mediante la obtención de una imagen que les permite asociar y relacionar los conceptos de razón promedio, razón de cambio instantánea y antiderivada.

Tabla 19.

Construcción de los descriptores para el nivel cuatro de comprensión.

Nivel 4	Acción	Análisis de la propiedad	A 4.1. Examina los tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
			A 4.2. Examina el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
			A 4.3. Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
			E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.

	Expresión	Registro de la propiedad	E 4.2. Interpreta el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
			E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.

Fuente: Creación propia, construcción de los descriptores del nivel 4.

Tabla 20.

Refinamiento de los descriptores par el nivel cuatro de comprensión.

Nivel 4	Acción	Análisis de la propiedad	A 4.1. Examina los tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
			A 4.2. Examina el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
			A 4.3. Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
			A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
			A 4.5. Examina el tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
			A 4.6. Examina los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente.
	Expresión	Registro de la propiedad	E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
			E 4.2. Interpreta el tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
			E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
			E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
			E 4.5. Infiere qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
			E 4.6. Explica los trozos o gráficos de una recta secante o una tangente en una curva.

Fuente: Creación propia, refinamiento de los descriptores del nivel 4.

En este nivel 4, los descriptores refinados en la Tabla 20 permiten señalar la comprensión manifestada por los estudiantes en el proceso de solución de una ecuación diferencial en concordancia con un enunciado planteado.

4. Análisis de resultados

Los resultados en esta investigación muestran cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren (1994); cabe señalar que en el estudio se emplearon los experimentos de enseñanza, como metodología para recolectar información pertinente que permitió dar respuesta a la pregunta de investigación y a la consecución del objetivo propuesto. A continuación, se explicitan los resultados en cada fase y el correspondiente análisis.

4.1. Fase 1. Preparación del experimento y episodio uno

En esta fase se tuvo en cuenta lo señalado por Molina (2011), relacionado con las acciones a seguir en un experimento de enseñanza, delimitando el problema de investigación, objetivos y evaluación del conocimiento de un estudiante. Los dos primeros se desarrollaron en los apartados 1.2 y 1.3 respectivamente, mientras que la evaluación del estudiante se muestra a continuación.

4.1.1. Episodio 1 y evaluación del conocimiento inicial de estudiantes

Grosso modo, en la fase de preparación del experimento se diseñó una entrevista con la cual se recolectó información relacionada con los conceptos que los estudiantes presentan para abordar una situación planteada (Ver Anexo 1 p.303), lo que en el marco de la teoría de Pirie y Kieren converge con los conocimientos primitivos, mientras que en los experimentos de enseñanza coincide con el conocimiento inicial; se observó entonces que ambas buscan el conocimiento que los estudiantes traen para abordar una situación planteada.

Cabe señalar que durante la evaluación del conocimiento del estudiante no se realizaron modificaciones a la entrevista, sin embargo, el análisis de la misma mostró que ellos exhibieron dificultades para establecer relaciones entre los conceptos involucrados, quizás por las limitaciones en su capacidad para conectarlos entre sí, probablemente, por tratar de replicar lo que algunas veces observaron en clase o, porque trasladaron las dificultades adquiridas en cursos anteriores al aprendizaje actual. En particular, se evidenció que los estudiantes no identificaron las variables que intervienen en una situación planteada, por lo que exhiben dificultades para manifestar una expresión algebraica que las involucre o en la que se indique el cambio de una respecto a otra; en este contexto, dichos cambios requieren de relaciones matemáticas para representarlas y asociarlas a fenómenos como lo declara Vrancken y Engler (2014).

Por otra parte, los estudiantes se distanciaron del razonamiento y de la comprensión al realizar procesos mecánicos en la resolución de las situaciones planteadas, exhibiendo dificultades para hallar la antiderivada de una función y para comprender y manipular el concepto de antiderivada como lo manifiesta Metaxas (2007), de igual forma, se observó que los participantes derivaron de manera errada la función, de modo que manifestaron dificultades para hallar su antiderivada, lo cual está en convergencia con lo manifestado por Porres, Pecharromán, y Ortega (2017). De otro lado, se percibió que los estudiantes al abordar una ecuación diferencial y tratar de hallar una solución, realizan de algún modo procedimientos algebraicos, numéricos y gráficos, los cuales, para ellos, son elementos totalmente desconectados el uno del otro, lo que está en dirección de lo manifestado por Cervantes, Ordoñez y Morales (2020).

Con el panorama anterior, el análisis de los datos recolectados en esta fase, dio cuenta de los conceptos iniciales que trae un estudiante para abordar una situación planteada. En el transcurso de las entrevistas se observaron las imprecisiones de algunos estudiantes en sus respuestas en lo algebraico y lo numérico al momento de interpretar la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, quizás, debido a una comprensión errada de los conceptos involucrados. Asimismo, este análisis reflejó qué tipo de comprensión exhiben los estudiantes sobre los conceptos de pendiente, razón de cambio antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden.

Como producto de la entrevista, del análisis de los datos recolectados y de las observaciones, cabe mencionar que los estudiantes solicitaron tiempo adicional para solucionar las preguntas de la entrevista, programar otras sesiones, y a su vez, evaluar en cada una de ellas uno o dos conceptos, con el objeto de interactuar mejor con ellos, ya que al intentar analizar todos los conceptos en una sola sesión se les tornó difícil. De igual manera, manifestaron que las ilustraciones gráficas en las preguntas podrían facilitar las relaciones entre los conceptos involucrados, también, solicitaron proveer algunas definiciones formales que les permitieran familiarizarse con los conceptos involucrados.

En este orden de ideas, se realizaron diferentes reuniones en las que se trataron varios aspectos, entre ellos: refinamiento de la entrevista, empleo del lenguaje y precisión del modo para visualizar el direccionamiento de las preguntas, es decir, las preguntas dirigidas desde lo general hacia lo particular o viceversa, entre otros aspectos. En este sentido, se optó por un lenguaje sencillo, no cargado, con algunos elementos de la matemática formal; además, dadas distintas discusiones alrededor de la temática tratada se decidió por el sentido de lo general a lo particular.

Cabe aclarar que el análisis de la información permitió inferir que los dos sentidos serían necesarios para direccionar las preguntas a los estudiantes acerca de la comprensión de conceptos matemáticos en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión. Lo anterior se plantea como una estrategia en la cual se analiza primero lo global para luego abordar las formas particulares en cada pregunta. Es importante aclarar que, en la entrevista refinada, el enfoque visual geométrico permitió aportar cierta claridad sobre los conceptos a través de las figuras o formas de las curvas propuestas, brindando un matiz diferente, lo que permitió el acceso a la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en las situaciones planteadas. Todos estos aspectos permitieron refinar la entrevista y los descriptores a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren.

Por otra parte, el propósito de las preguntas formuladas en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión fue el de motivar a los estudiantes a razonar sobre los conocimientos para establecer relaciones entre los conceptos involucrados, de modo que pudieran manifestar su comprensión sobre los conceptos en cada situación abordada y, de este modo, dar paso a un crecimiento de una comprensión elaborada en un nivel exterior (Pirie y Kieren, 1994). El análisis de la información recolectada en esta fase fue fundamental para refinar la entrevista y dar inicio a la segunda fase del experimento denominada experimentación. Cabe señalar que en la etapa durante el experimento se ejecutaron los episodios 2, 3 y 4, lo que a continuación se presenta.

4.2. Fase 2. Experimentación

En esta fase se pone en marcha el experimento de enseñanza, empleando la entrevista refinada en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, para la cual se tuvo en cuenta el análisis de la información recolectada en la fase 1, las observaciones de los investigadores y experticia de ellos en la enseñanza de los conceptos antes mencionados; es de aclarar que esta fase se realiza en tres etapas denominadas así: antes de la experimentación, durante la experimentación y después de la experimentación, las cuales se abordan a continuación.

4.2.1. Antes de la experimentación

En esta etapa, el análisis de la información recolectada en la fase 1 ofreció información relevante para preparar la fase 2 del experimento. Así que la información del trabajo previo realizado con los estudiantes al interior del aula de clase, mostró algunas dificultades tales como relacionar una expresión algebraica con un enunciado o representar gráficamente una situación planteada y su solución en diferentes sistemas de representación; de igual manera, para analizar una solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden de manera cualitativa, se observó que los estudiantes no logran razonar sobre los conceptos algebraicos involucrados y optan por usar procesos rutinarios o mecánicos.

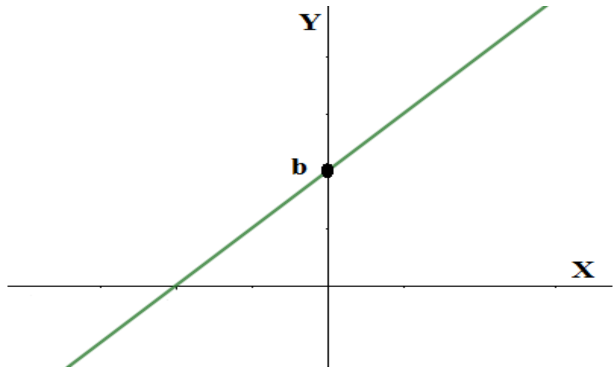
A continuación, en este estudio se señalan las acciones seguidas en el experimento de enseñanza en el marco de lo manifestado por Molina (2011), inicialmente, indicando la intencionalidad de cada instrucción. En nuestro contexto, lo anterior está estrechamente relacionado con las preguntas de la entrevista y los descriptores propuestos para la misma (Ver Anexo 4. P.310), así entonces, al finalizar cada pregunta en cada ítem se pueden encontrar códigos que corresponden a los descriptores a través de los cuales se analizaron las respuestas emitidas por los estudiantes.

Por ejemplo, a la pregunta 1 se le asignan dos códigos: (CP1.1) que significa conocimiento primitivo, nivel 1, descriptor 1, a través del cual se analiza dicha pregunta; y (CP1.2) que significa conocimiento primitivo, nivel 1, descriptor 2; y así sucesivamente, tal como se muestra en la Figura 16.

Figura 16.

Función lineal y = mx +b

Dada la gráfica de la función lineal $y\ = mx\ + b$



Responde cada pregunta, según la Figura.

a. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = \ mx\ + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo? (CP1.1), (CP1.2).

Fuente: Registro de la entrevista de creación propia del investigador (Ver Anexo 4 p.310).

Por otro lado, en las acciones a seguir manifestadas por Molina (2011), se sugiere plantear una hipótesis del experimento de enseñanza que, para el caso particular, fue construida en diferentes sesiones teniendo en cuenta las complementariedades de la acción y la expresión, además de la comprensión de los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden. Así las cosas, la hipótesis del experimento de enseñanza es de la siguiente manera:

> "A través de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, es posible analizar cómo un estudiante comprende los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primero orden en un nivel determinado".

Finalmente, durante el proceso de recolección de datos, fue posible analizar en detalle la forma en la que se llevaría a cabo la entrevista, la grabación, los registros escritos de los estudiantes, las observaciones de los investigadores y el registro de las decisiones tomadas, para dar paso a realizar la segunda fase del experimento.

4.2.2. *Durante la experimentación*

Teniendo en cuenta lo considerado por Molina (2011), quien manifiesta que, de ser necesario, es posible “modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la investigación”, en este estudio, cada puesta en ejecución de los diferentes episodios del experimento de enseñanza tuvo en cuenta algunas preguntas realizadas por los estudiantes en la planificación del episodio siguiente, sin requerirse realizar cambios en los objetivos.

Por ejemplo, el episodio 1 relacionado con la evaluación del estudiante en el que se analizó el conocimiento inicial que el participante posee para abordar las diferentes situaciones planteadas, se observaron algunas dificultades relacionadas con los conceptos involucrados, las cuales después de analizarlas, contribuyeron en el refinamiento de las preguntas para el episodio 2 y posteriores. En esta fase se realizaron tres etapas, las cuales se emplearon para indagar por los conceptos de razón de cambio y derivada. Así, para el episodio 2 se utilizaron las preguntas 1, 2 y 3 y en el episodio 3 las preguntas 4 y 5, con las cuales se indagó por la comprensión del concepto de antiderivada; finalmente, en la etapa 3 se evaluó el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden teniendo en cuenta las preguntas 6 y 7.

La ejecución de cada etapa se realizó en un tiempo de cuatro horas, con las mismas condiciones y ambientes naturales para cada estudiante. En ellas se tuvieron en cuenta las observaciones y preguntas de los estudiantes y al culminar cada etapa, se organizó la información para ser analizada. La recolección de información se realizó a través de los registros escritos, de audio y video, proporcionándose en cada episodio del experimento información relevante. En el apartado 4.3 del análisis de la información se detalla su análisis.

4.2.3. Después de la experimentación

Después de la puesta en ejecución del experimento de enseñanza a través de la entrevista en el episodio correspondiente, la información recolectada fue clasificada y organizada para analizar y detallar aspectos tales como el estrato de comprensión alcanzado, las complementariedades detectadas y el tipo de redoblamientos realizados en cada episodio, todo a la luz de las acciones a seguir en un experimento de enseñanza, según lo manifestado por Molina (2011) en relación a la identificación de la ruta conceptual de los estudiantes. En nuestro contexto, dicha ruta mostró el camino conceptual recorrido por los estudiantes para alcanzar la comprensión de los conceptos involucrados en cada entrevista. Adicional a lo anterior, se verificó la existencia de observaciones realizadas durante el desarrollo de cada episodio, con el objeto de vincularlas al análisis de la información.

4.3. Fase 3. Análisis retrospectivo de la información

El trabajo del investigador, al igual que el realizado por el profesor de la asignatura del grupo en el que se lleva a cabo el trabajo de campo, son relevantes para hacer el análisis retrospectivo de la información recolectada, dado que ambos aportaron aspectos que son complementarios desde sus respectivas perspectivas, lo que facilitó en cierto modo este análisis.

En este orden de ideas, el análisis realizado permitió a través de los videos, registros escritos y orales, recapitular la experiencia vivida durante el desarrollo del experimento; para este efecto, se pone en práctica lo declarado por Molina (2011) quien manifiesta que para realizar este tipo de análisis hay que distanciarse del análisis realizado en la primera fase del experimento, con el objeto de profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje. Además, para identificar la ruta conceptual, el autor declara la relevancia de cuatro aspectos que permiten realizar dicho análisis, los cuales son:

- Identificar las estrategias que emplean los estudiantes en la resolución de sentencias numéricas consideradas.
- Caracterizar el uso del pensamiento relacional que evidencie sus producciones e intervenciones, identificando los elementos en los que centra su atención cuando hace este tipo de pensamiento.
- Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que mostraron al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numérica.
- Detallar la evolución de la comprensión del signo igual y del uso del pensamiento relacional puesto de manifiesto.

En nuestro contexto, estos aspectos se relacionan con:

- *Identificar acciones realizadas:* el investigador indagó por las acciones a la luz de la teoría de Pirie y Kieren, realizadas por un estudiante para resolver cada pregunta de la entrevista, así que se identificaron procesos algebraicos, mecánicos, de razonamiento (o analíticos) y gráficos, que le posibilitaron dar una respuesta a la pregunta abordada.
- *Evidenciar conceptos involucrados:* los estudiantes distinguieron características, similitudes y diferencias de conceptos que poseen para asociarlos a los conceptos matemáticos empleados en cada pregunta, los cuales son ubicados en una Tabla en la que se indica la pregunta e ítem en el cual se empleó dicho concepto.
- *Detallar la evolución de la comprensión*: este proceso se realizó a través del análisis de las respuestas de los estudiantes a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, para determinar los cambios conceptuales generados a partir de las reflexiones y de los procesos de *folding back* en el marco de la teoría en cuestión, al interior de cada situación planteada en la entrevista.

- *Analizar el nivel de comprensión:* este se logró al equiparar el cumplimiento o no de cada respuesta brindada por los estudiantes con respecto a los descriptores propuestos para cada uno de los niveles o estratos de comprensión en correspondencia con las complementariedades de la acción y la expresión. La entrevista permite evidenciar el nivel alcanzado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en cada pregunta.

A continuación, se presenta un análisis de los episodios 2, 3 y 4 en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, y posteriormente, un análisis retrospectivo a luz de las acciones a seguir en un experimento de enseñanza, de acuerdo a lo señalado por Molina (2011).

4.4. Análisis de episodios

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en tres fases y cuatro episodios de la siguiente manera: la primera fase denominada preparación del experimento, en la que transcurrió el episodio 1 para analizar los conceptos mencionados de los estudiantes en el abordaje de las diferentes situaciones planteadas.

La segunda fase se desarrolló en tres etapas denominadas, antes del experimento, durante el experimento y después del experimento. En la segunda etapa se desarrolló el episodio 2 en el que se indagó por el concepto de antiderivada; en este episodio fueron refinadas las preguntas del primer episodio y se hicieron observaciones tanto de los estudiantes como del profesor de la asignatura; posteriormente, en el episodio 3 se indagó por la comprensión del concepto de antiderivada y en el episodio 4 se analizó la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

La tercera fase denominada análisis retrospectivo de la información, permitió analizar la ruta conceptual seguida por los estudiantes para comprender los conceptos involucrados; cabe señalar que el experimento de enseñanza se realizó empleando las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren.

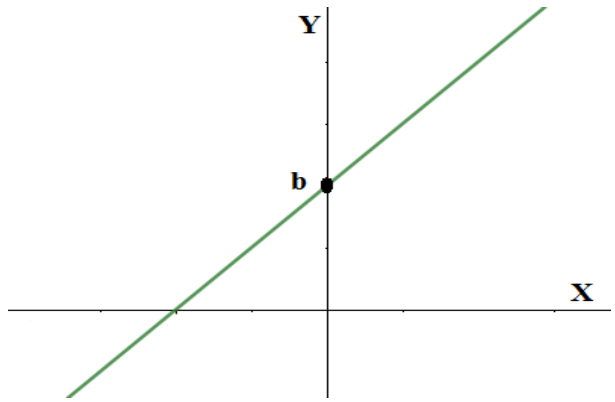
4.4.1. *Análisis del episodio 2 relacionado con los conceptos de razón de cambio y derivada*

De acuerdo a Pirie, S., y Kieren, T. (2006, p.188), la comprensión de un concepto se genera cuando se realizan representaciones mentales o físicas con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto; en el mismo sentido y en el contexto del cálculo, Dolores, García y Gálvez (2017) manifiestan que se pueden apreciar cambios conceptuales en un estudiante al interpretar gráficamente la pendiente de una función en un punto. Para nuestro caso, los cambios conceptuales son entendidos como los momentos de posibles *folding back* (redoblamientos) y avances en la comprensión cuando nuevos elementos conceptuales entran en escena para ampliar las estructuras cognitivas ya existentes.

Así, la pregunta 1 considera una componente visual geométrica de la función lineal $y = mx + b$ para propiciar en los estudiantes un posible *folding back* y poder relacionar los conceptos de razón de cambio, pendiente y derivada en cualquier punto o sus significados en un intervalo, como se muestra en la Figura 17.

Figura 17.

Funcion lineal y=mx+b



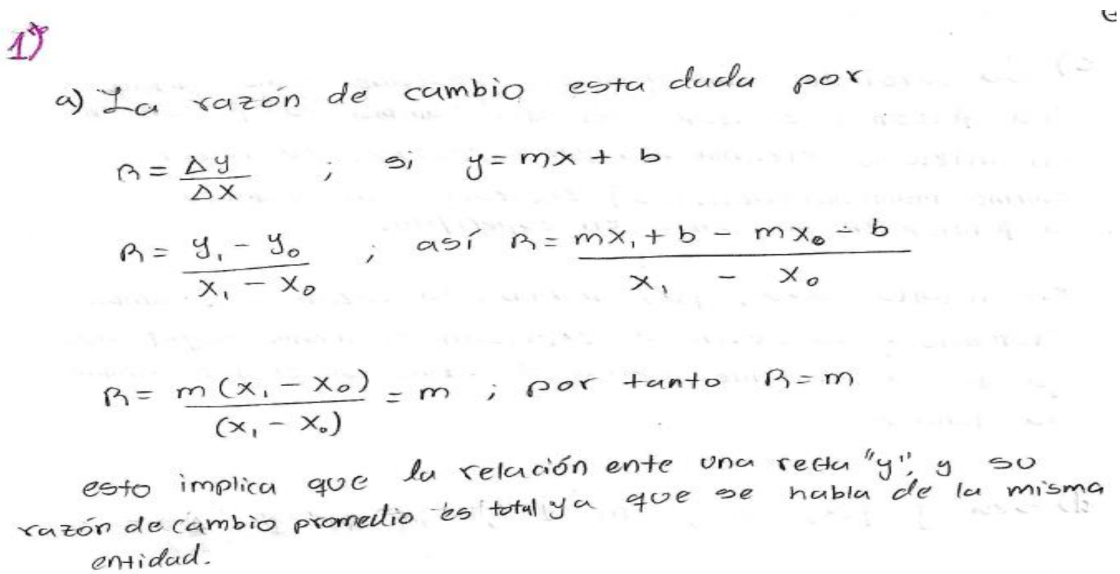
Fuente: Archivo registro escrito de la entrevista, agosto 2019.

La respuesta de la estudiante Ana a la pregunta ¿cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ con la razón de cambio promedio en cualquier intervalo? mostró que ella reconoce la razón de cambio promedio al relacionarla con el concepto de pendiente. Esto es posible gracias a que la entrevista permite rastrear, examinar e identificar la información brindada por la estudiante en consonancia con el descriptor CP 1.1, el cual pretende establecer si un estudiante "reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación"; y de igual manera, con el descriptor CP 1.2, que permite confirmar si un estudiante "identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva."

Lo mencionado anteriormente permite ubicar a Ana en el nivel 1 denominado conocimiento primitivo, dado que satisface ambos descriptores. Se aprecia que el investigador, quien hace el papel de observador, nota que, ante respuestas a situaciones planteadas, Ana formula preguntas tales como: ¿Cuál es la relación que puedo hallar entre la razón de cambio y una recta? ¿Qué elementos puedo usar para relacionarlas?" estos interrogantes dan cuenta de un proceso de *folding back* en busca de conceptos que posiblemente le permitan razonar sobre sus ideas y seleccionar aquellas con las cuales abordó la situación. La Figura 18 es una evidencia escrita de la respuesta de la estudiante.

Figura 18.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal a



1)

a) La razón de cambio esta dada por

$R = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; si $y = mx + b$

$R = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$; así $R = \frac{mx_1 + b - mx_0 - b}{x_1 - x_0}$

$R = \frac{m(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = m$; por tanto $R = m$

esto implica que la relación ente una recta "y", y su razón de cambio promedio es total ya que se habla de la misma entidad.

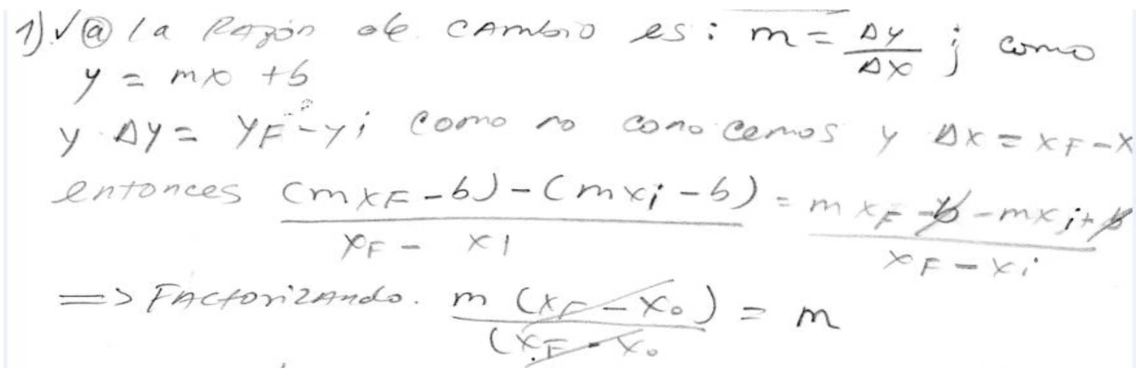
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante, agosto 2019.

Por otro lado, Antonio reconoce la razón de cambio y la relaciona con la pendiente de una recta tangente a una curva como un cociente de diferencias, reconociendo los elementos asociados a la expresión algebraica $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; además, se observó que buscó características y similitudes relacionadas con los objetos de estudio en cuestión. Así que a la luz del descriptor CP 1.1, se puedo evidenciar que “reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación”, es de aclarar que Antonio reconoce la razón de cambio promedio y con algo de dificultad expresa de manera verbal o escrita la instantánea. También, el descriptor CP 1.2 permitió analizar si un estudiante “identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.” En particular, Antonio solo reconoce la pendiente de una recta secante dado que de manera explícita escribe un cociente de diferencias en términos de la ecuación $y = mx + b$

Lo mencionado anteriormente, permite manifestar que Antonio exhibe pocos conocimientos primitivos, dado que satisface de manera incipiente los descriptores mencionados. Dado que la noción de límite está presente en la razón de cambio instantánea, se infiere que Antonio exhibe algunos conocimientos primitivos relacionados con los conceptos involucrados. La Figura 19 evidencia su comprensión sobre la razón de cambio promedio.

Figura 19.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 1 literal a



1) √ⓐ la Razón de cambio es: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; como $y = mx + b$

y $\Delta y = y_F - y_i$ como no conocemos y $\Delta x = x_F - x$

entonces $\frac{(mx_F - b) - (mx_i - b)}{x_F - x_1} = \frac{mx_F - \cancel{b} - mx_i + \cancel{b}}{x_F - x_i}$

$\Rightarrow$ Factorizando. $\frac{m(\cancel{x_F - x_0})}{(\cancel{x_F - x_0})} = m$

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante, agosto 2019.

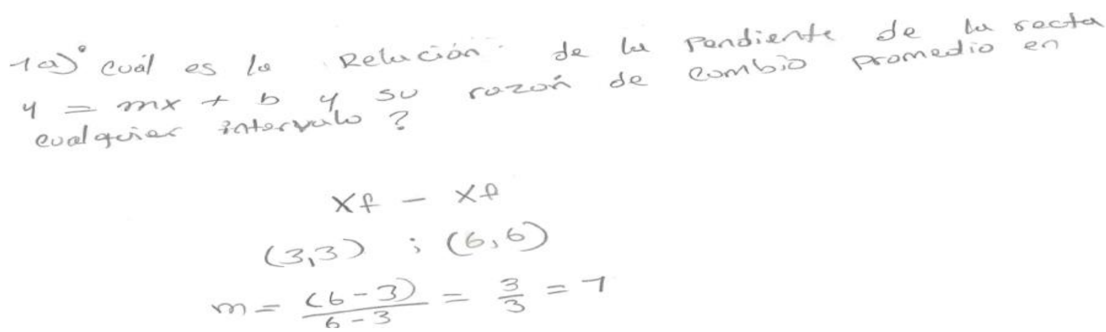
Por su parte, Diana hizo transferencia de su pensamiento a un proceso mecánico o rutinario para determinar la pendiente de la recta secante y recurre a la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Con este proceso, ella trata de relacionar la pendiente de la recta $y = mx + b$ con su razón de cambio en cualquier intervalo, sin embargo, seleccionó los puntos de coordenadas (3,3) y (6,6) para establecer de manera particular la relación; lo anterior da indicios de ciertas dificultades en la comprensión de los conceptos, pues al tratar de relacionar la razón de cambio promedio con la pendiente de la recta, hace énfasis en cálculos operativos sin poder explicar la situación.

En este sentido, se analizan las respuestas de Diana para verificar si satisface los descriptores CP 1.1 y CP 1.2 con los cuales se pretende visualizar si “reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación planteada” y, con ello, determinar si posee conocimientos primitivos relacionados con los conceptos involucrados, sin embargo, al observar su proceso de *folding back* rastreando información relacionada con los conceptos involucrados, solo da cuenta de la razón de cambio promedio ya que no explicita su comprensión sobre la instantánea.

Por otro lado, se observó que solo identifica la pendiente de una recta secante, con lo cual cumple parcialmente con el descriptor CP 1.2 (identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva). Lo mencionado anteriormente permite manifestar que Diana posee algunos conocimientos relacionados con la razón de cambio promedio sin manifestar conocimiento relacionado con la razón de cambio instantánea, por lo que no se puede ubicar a Diana en el nivel 1 de comprensión. La Figura 20 evidencia su comprensión frente a la razón de cambio promedio.

Figura 20.

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 1 literal a

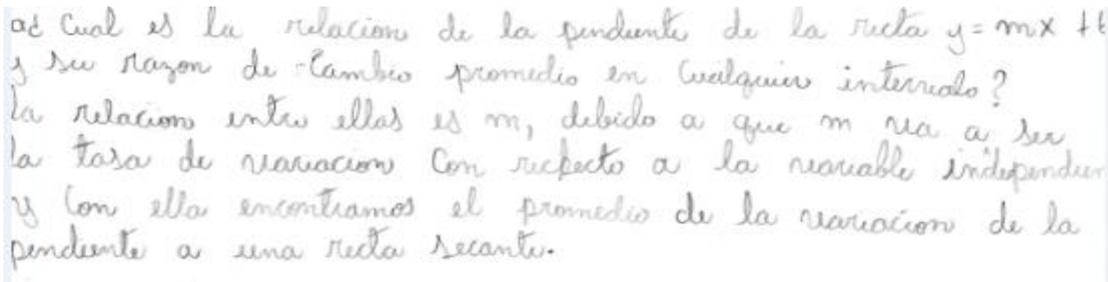


Fuente: Registro del archivo de la estudiante Diana 2019.

Para el caso de Juan, al responder la pregunta ¿cuál es la relación entre la recta $y = mx + b$ con una razón cambio? concluye que es la pendiente y la simboliza con la letra (m) y lo justifica mencionando que ella "va a ser la tasa de variación de la variable dependiente con respecto a la variable independiente y con ella encontramos el promedio de la variación de la pendiente a una recta secante". Con lo expresado anteriormente por el estudiante, se observa que reconoce una razón de cambio promedio y logra relacionarla con la pendiente de una recta secante, sin embargo, el estudiante manifiesta un escaso conocimiento sobre la aproximación de las rectas secantes a una recta tangente. Así, Juan se puede ubicar en el nivel 1 de la teoría en mención. La Figura 21 evidencia su comprensión frente a este concepto.

Figura 21.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal a

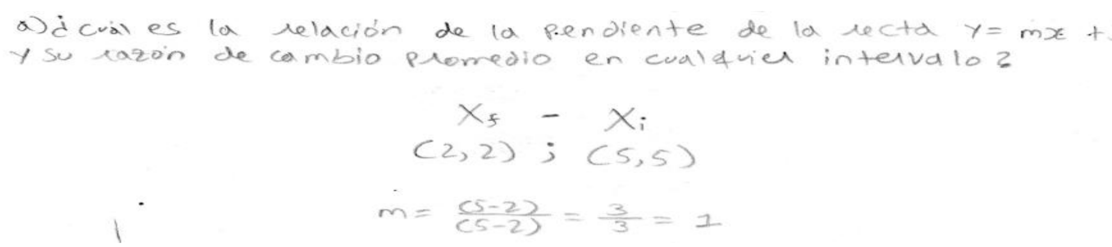


Fuente: Registro del archivo de la estudiante Juan, 2019.

Pedro, por su parte, realiza un proceso mecánico o rutinario, usando dos puntos arbitrarios de la recta, para hallar un valor numérico de una razón de cambio promedio, la cual relaciona con la pendiente de la recta de manera particular, como un intento para mostrar una relación entre esta y la pendiente de la recta $y = mx + b$. Se puede observar que el proceso realizado por el estudiante es usar un cociente numérico cuyo resultado es una constante que representa la pendiente de la recta. Se observó entonces que el estudiante reconoce la estructura de una razón de cambio promedio, por lo cual la respuesta satisface el descriptor CP 1.1. Así, es posible afirmar que se encuentra en el nivel 1 de comprensión, aclarando que el estudiante no señala cuál es la relación con la recta secante o tangente. La Figura 22 evidencia su comprensión frente a este concepto.

Figura 22.

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 1 literal a

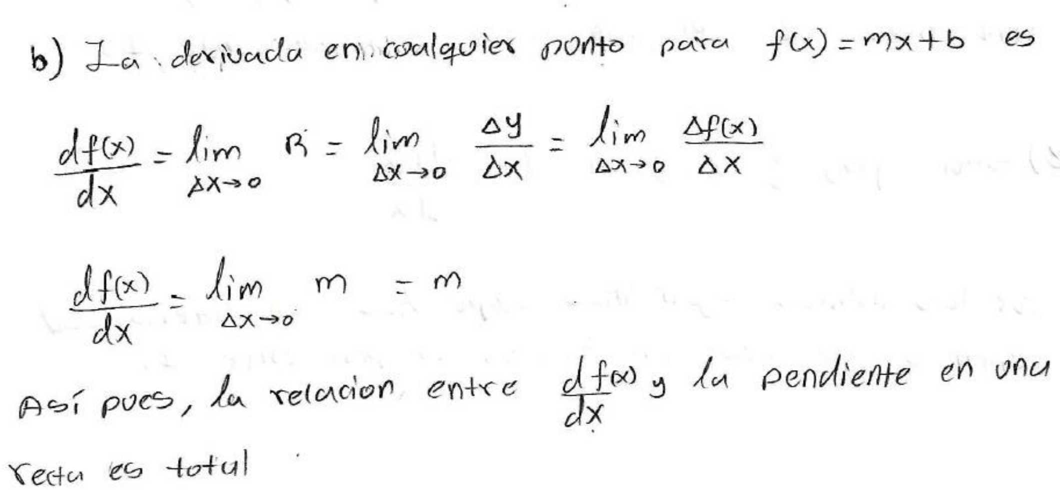


Fuente: Registro del archivo de la estudiante Pedro 2019.

Con respecto a la pregunta 1 en el literal b ¿Cuál es la relación de la pendiente de una función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto? Ana plantea de manera escrita un proceso analítico mediante el cual especifica que “la relación entre $\frac{df(x)}{dx}$ y la pendiente de una recta es total”, e involucra el límite cuando $\Delta x \to 0$ para una razón de cambio. La expresión planteada por la estudiante es de la forma $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$, la cual le posibilitó a Ana, por un lado, reconocer razones de cambio instantánea en la situación planteada, permitiendo así satisfacer los descriptores CP 1.1 y CP 1.2 empleados para este efecto, por otro, equiparar el concepto de razón de cambio instantánea con la pendiente de una recta. También, relacionó este concepto con el concepto de derivada de una función, por lo que satisface el descriptor A 3.2. y lo justificó empleando la expresión $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$, con lo cual se cumple el descriptor E 3.2. Lo anterior se evidenció en la respectiva respuesta ilustrada en la Figura 23.

Figura 23.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal b



b) La derivada en cualquier punto para $f(x) = mx + b$ es

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} B = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} m = m$$

Así pues, la relación entre $\frac{df(x)}{dx}$ y la pendiente en una recta es total

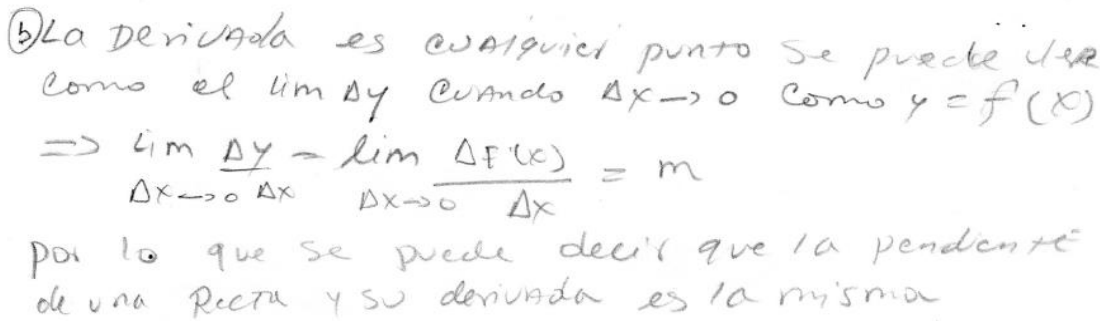
Fuente: Registro del archivo de la estudiante Ana, 2019.

Por su parte, Antonio reconoce el concepto de razón de cambio instantánea como "la derivada en cualquier punto" y, a su vez, menciona que "se puede ver como la pendiente de una recta" dado que expresa una relación entre la recta $y = mx + b$ y su derivada con la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = m$; luego, Antonio satisface el descriptor CP1.2, por lo que es posible afirmar que se encuentra razonando en el nivel 1 de comprensión.

Además, él relacionó la pendiente de una función con el concepto de derivada y con ello satisface el descriptor A 3.2, al explicitar que la pendiente de la función y su derivada es la misma, así que logra justificar su respuesta cumpliendo con el descriptor E 3.2. Por lo tanto, razona en el nivel 3 de comprensión actuando y expresando. También, se corrobora la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos, característica postulada en la teoría en cuestión, dado que se pudo apreciar que del nivel 1 relacionado con el concepto de razón de cambio, *salta* al nivel 3 de comprensión sobre el concepto de derivada, lo que se evidencia en la respuesta registrada en la Figura 24.

Figura 24,

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 1 literal b



b) La Derivada es cualquier punto se puede ver como el lim Δy cuando Δx → 0 como $y = f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = m$$

por lo que se puede decir que la pendiente de una Recta y su derivada es la misma

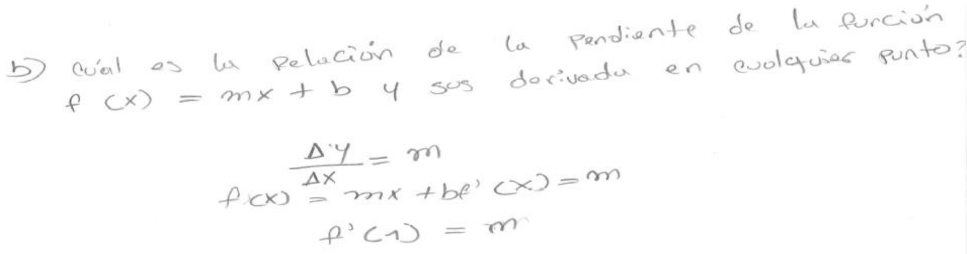
Fuente: Registro del archivo de la estudiante Antonio, 2019.

En cambio, para esta misma pregunta, se pudo apreciar que Diana realizó un proceso de *folding back* que le permitió identificar y expresar una razón de cambio promedio como un cociente de diferenciales y lo relaciona con la pendiente de la recta $y = mx + b$, satisfaciendo con ello el descriptor CP 1.1.

Sin embargo, se evidenció en su respuesta dificultades para: expresar una razón de cambio instantánea, expresar una relación entre la función $f(x)$ y su pendiente (m), manifestar una expresión para la pendiente de la recta tangente y exhibir dificultades para establecer la relación entre la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto, por lo que es posible afirmar que se ubica en el nivel de conocimiento primitivo. La Figura 25 ilustra la respuesta de la estudiante.

Figura 25.

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 1 literal b


b) Cuál es la relación de la pendiente de la función f (x) = mx + b y sus derivada en cualquier punto?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

$$f(x) = mx + b \quad f'(x) = m$$

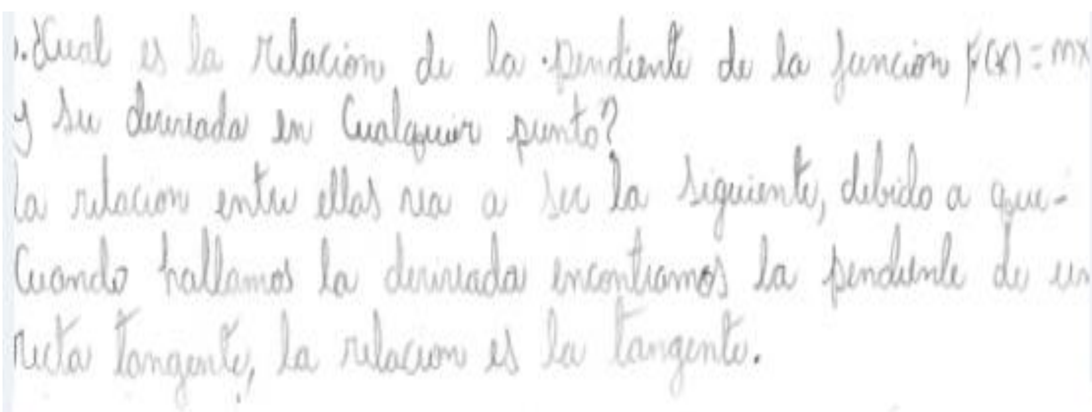
$$f'(1) = m$$

Fuente: Registro del archivo de la estudiante Diana, 2019.

Considerando esta misma pregunta 1 en su literal b, Juan afirma que al derivar una función se halla la pendiente de una recta tangente, realizando un proceso de *folding back* que le permite abstraer un conocimiento y le posibilita establecer cierta relación entre ambos conceptos, lo que hace de manera escrita pero no simbólica; con ello satisface al descriptor CP 1.1, lo que permite establecer que se encuentra en el nivel 1de comprensión. La Figura 26 ilustra lo dicho por el estudiante.

Figura 26.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal b


1. Cual es la Relación de la pendiente de la función f(x) = mx y su derivada en Cualquier punto?

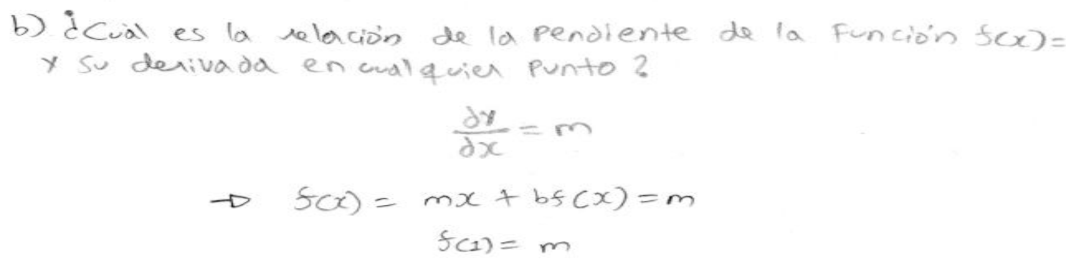
La relacion entre ellas va a ser la siguiente, debido a que Cuando hallamos la derivada encontramos la pendiente de un recta Tangente, la relacion es la tangente.

Fuente: Registro del archivo de la estudiante Juan, 2019.

Por su parte, Pedro a través de un proceso mecánico intenta establecer una relación entre el concepto de derivada de una función y la pendiente de una recta. Se aprecia que logra reconocer una razón e identifica la tasa de cambio como un cociente de incrementos, lo cual confirma el descriptor CP1.5, por lo tanto, exhibe un nivel 1 de comprensión. La Figura 27 ilustra la respuesta del estudiante.

Figura 27.

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 1 literal b



b) ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función f(x)= y su derivada en cualquier punto ?

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m$$

$$\rightarrow \quad f(x) = mx + b \quad f(x) = m$$

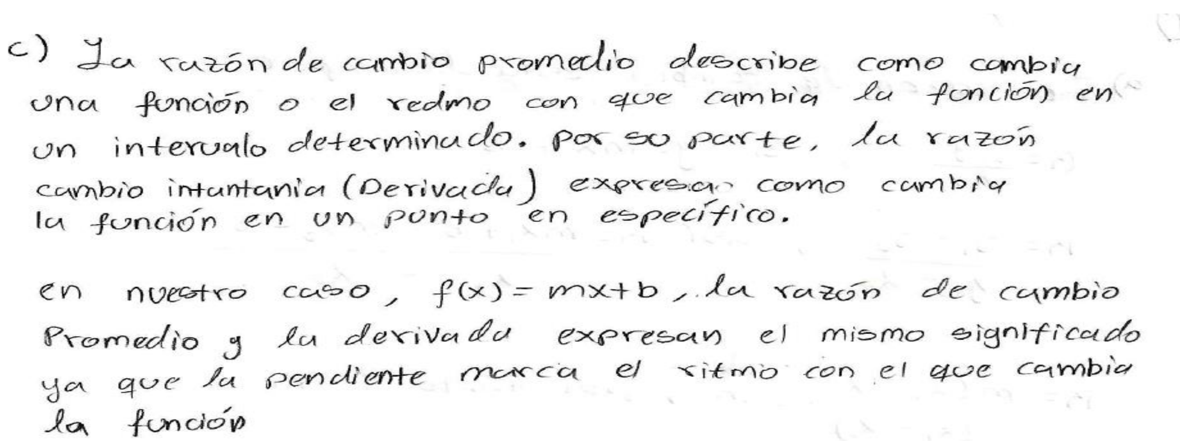
$$f(1) = m$$

Fuente: Registro del archivo de la estudiante Pedro, 2019.

Con respecto a la pregunta 1 en su literal c, Ana realiza un proceso de *folding back* para establecer distinciones entre los conceptos, haciendo uso de su conocimiento primitivo, asimismo, manifiesta que el primero describe el ritmo de cambio de una función en un intervalo, mientras que el segundo especifica el cambio instantáneo que realiza una función en un punto determinado, lo que satisface el descriptor E 2.1. Se puede afirmar así que Ana exhibe el nivel 2 de comprensión. La Figura 28 ilustra la respuesta de la estudiante.

Figura 28.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal c



c) La razón de cambio promedio describe como cambia una función o el redmo con que cambia la función en un intervalo determinado. por su parte, la razón cambio intantania (Derivada) expresan como cambia la función en un punto en específico.

en nuestro caso, $f(x) = mx+b$, la razón de cambio Promedio y la derivada expresan el mismo significado ya que la pendiente marca el ritmo con el que cambia la función

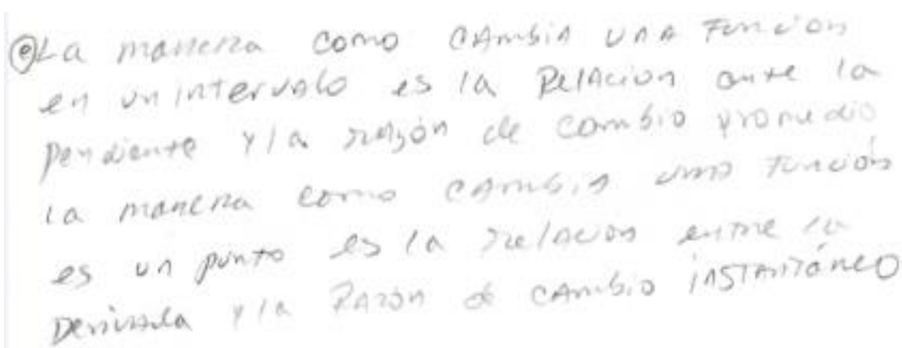
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Para esta misma pregunta 1 en su literal c, Antonio realiza un proceso de *folding back* a la luz de su conocimiento primitivo, manifestando distinciones matemáticas en la manera cómo concibe la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, propias de un nivel avanzado de comprensión, en el marco de lo afirmado por Pirie y Kieren (2006).

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se observa que el estudiante verbaliza algunas características, similitudes o diferencias sobre los conceptos involucrados en la situación planteada, lo que satisface el descriptor propuesto para la complementariedad de la expresión E 2.1 del nivel 2 de comprensión. La Figura 29 ilustra la respuesta del estudiante.

Figura 29.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta uno literal c

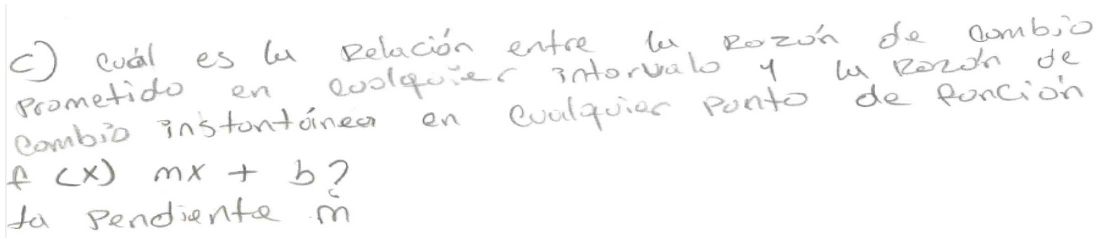


Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

Entre tanto, Diana declara que la pendiente es la relación que existe entre ambos conceptos sin ningún tipo de argumento, así que no es posible afirmar que la estudiante ha hecho distinciones matemáticas explícitas basada en un conocimiento primitivo que indiquen un avance por los niveles, además, su respuesta no permite evidenciar una de las complementariedades, bien sea de la acción o de la expresión. La Figura 30 ilustra su respuesta.

Figura 30.

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 1 literal c



c) Cuál es la Relación entre la Razón de cambio promedito en cualquier intervalo y la Razón de cambio instantánea en cualquier punto de función

f (x) mx + b?

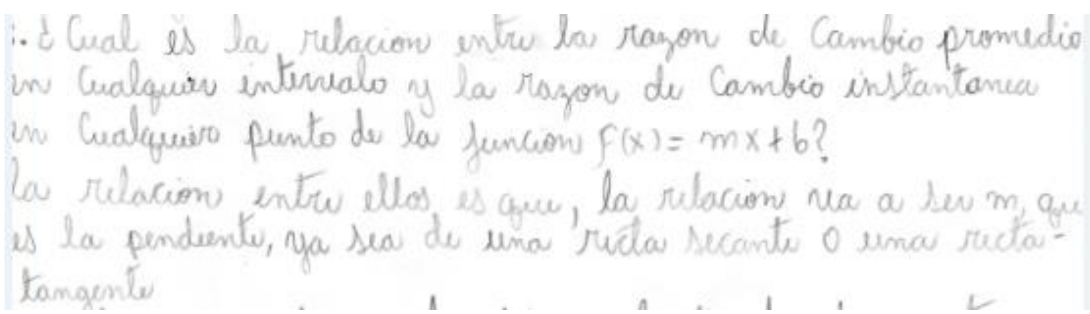
La Pendiente m

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Diana agosto 2019.

Juan, por su lado, manifiesta que la relación es la pendiente de una recta tangente o de una secante, reconociendo posiblemente ambos conceptos, además, observa que no realiza distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo sobre los conceptos involucrados, y tampoco aprecia alguna expresión que satisfaga los respectivos descriptores relacionados con las complementariedades de la acción y la expresión. Así, se puede inferir que Juan permanece en el nivel 1 de comprensión. La Figura 31 ilustra la respuesta del estudiante.

Figura 31.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal c



1. ¿Cual es la relacion entre la razon de Cambio promedio en cualquier intervalo y la razon de Cambio instantanea en Cualquier punto de la funcion f(x) = mx+b?

la relacion entre ellos es que, la relacion va a ser m, que es la pendiente, ya sea de una recta secante o una recta tangente

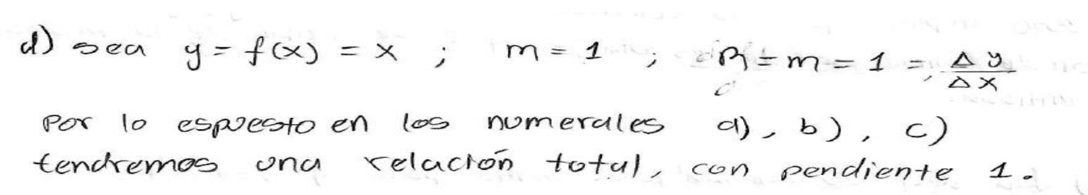
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

En cuanto a la pregunta 1 en su literal d, ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = x$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo? Ana emplea un *folding back* para seleccionar aquellos conocimientos que le permita tomar las distinciones expuestas en las respuestas anteriores y lograr explicitar el tipo de relación que existe entre la razón de cambio promedio de la recta $y = x$ y el cambio instantáneo en un punto.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, se observó que Ana realizó un proceso de *folding back* para reconocer los conceptos involucrados y con base en esos conocimientos primitivos logró expresar el tipo de relación existente entre ellos, escribiendo que “la relación es total”. Se pude apreciar que su respuesta está basada en distinciones matemáticas provenientes del conocimiento primitivo, sin embargo, no logra expresar de manera escrita las diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea, así que no cumple con el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.1 como tampoco con el descriptor de la expresión E 3.1. Luego, de acuerdo a las distintas respuestas brindadas, ella exhibe un nivel 2 de comprensión. La Figura 32, ilustra la respuesta de la estudiante.

Figura 32.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal d

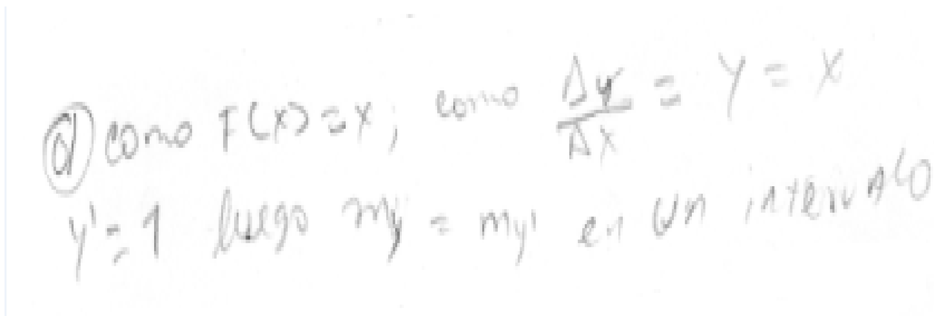


Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana agosto 2019.

Antonio en esta misma pregunta, analizó la respuesta a través de un procedimiento mecánico, tratando de establecer una relación a través de distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo. Sin embargo, esta respuesta es errónea, generada quizás porque el estudiante concibe en su pensamiento los conceptos de razón de cambio promedio, instantánea y de pendiente de una recta tangente de manera independiente, sin lograr establecer relación alguna entre ellos. Por lo tanto, su respuesta no satisface el descriptor propuesto para la complementariedad de la acción A 3.1 como tampoco el descriptor para la complementariedad de la expresión E 3.1, así que no presenta indicios de avance hacia el nivel 3 de comprensión. La Figura 33 ilustra la respuesta del estudiante.

Figura 33.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta de la pregunta 1 literal d

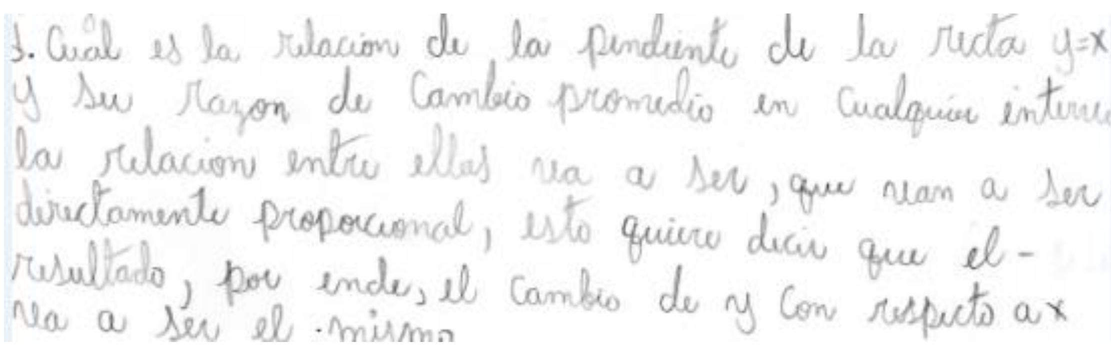

(d) como f(x)=x; como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = y = x
y' = 1 luego m_y = $m_{y'}$ en un intervalo

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

En esta pregunta, Juan considera que la relación entre la razón de cambio promedio es directa mente proporcional con la razón de cambio instantánea y el cambio de la variable dependiente (y) con respecto a la variable independiente (x) es el mismo. Al parecer, concibe los conceptos involucrados de manera independiente el uno del otro y, presenta dificultades para establecer distinciones matemáticas que partan de su conocimiento primitivo, bien sea en forma simbólica o escrita, por lo que se puede decir que el estudiante permanece en el nivel 1 de comprensión.

Figura 34.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal d


1. Cuál es la relacion de la pendiente de la recta y=x y su razon de Cambio promedio en Cualquier interv
la relacion entre ellas va a ser, que van a ser directamente proporcional, esto quiere decir que el-resultado, por ende, el Cambio de y Con respecto a x va a ser el mismo

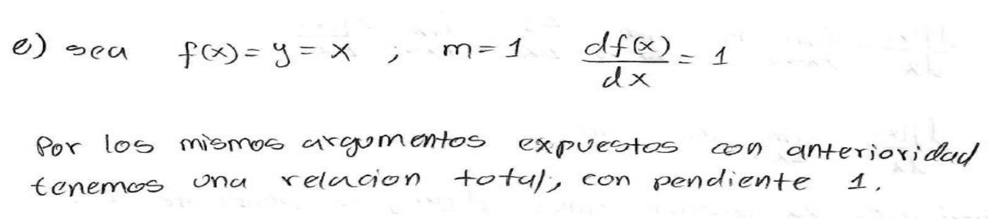
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

Por su parte, Pedro no responde la pregunta ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = x$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?, por lo que no se muestra evolución hacia el nivel 2 de comprensión.

Para la pregunta 1 en su literal e ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = x$ y su derivada en cualquier punto?, Ana realizó un proceso de *folding back* y consideró distinciones matemáticas, así que logra manifestar el tipo de relación entre la pendiente de una función $f(x) = x$ y su derivada, satisfaciendo así el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.2 y de la expresión E 3.2, por lo que se puede ubicar en el nivel 3 de comprensión. La Figura 35 ilustra su respuesta.

Figura 35.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal e



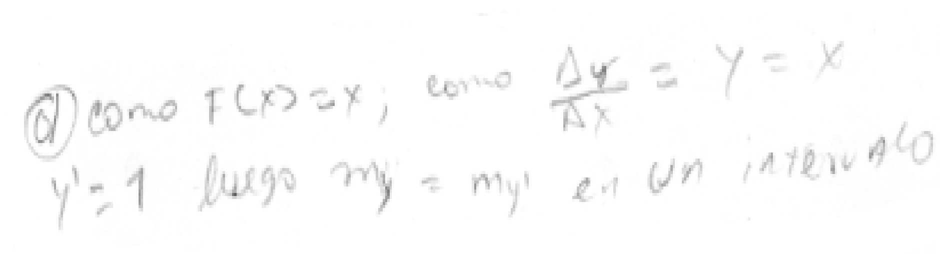
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Por otro lado, Antonio para la misma pregunta, realiza un proceso mecánico y rutinario que lo conduce a obtener una respuesta errónea, debido a que concibe los conceptos involucrados de manera independiente; cabe anotar que hace distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo para manifestar de manera simbólica que la derivada de una función lineal es igual a su pendiente.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, Antonio de cierta manera satisface el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.2 y de la expresión E 3.2, a través de una expresión algebraica en donde muestra el tipo de relación que existe entre los conceptos, por lo que se puede ubicar en el nivel 3 de comprensión. La Figura 36 ilustra su respuesta.

Figura 36.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 1 literal d



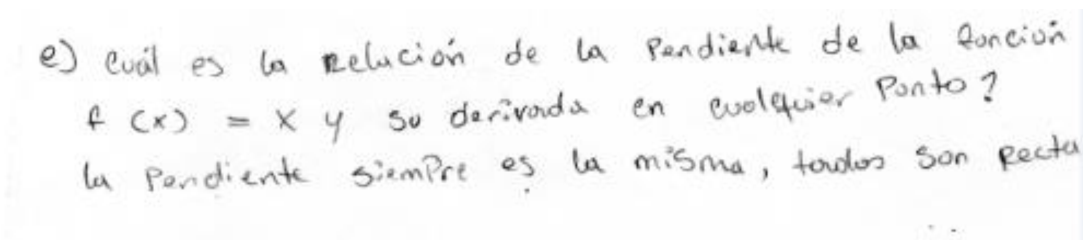
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

Por otro lado, Diana intenta responder realizando un proceso mecánico erróneo, sin embargo, haciendo distinciones matemáticas para manifestar de manera simbólica que la derivada de la función lineal propuesta es igual a su pendiente, además, concibe los conceptos involucrados de manera independiente el uno del otro.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, Diana de cierta manera con su respuesta, no satisface el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.2 ni el de la expresión E 3.2, así que no avanza el nivel 3 de comprensión. La Figura 37 ilustra su respuesta.

Figura 37.

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 1 literal e

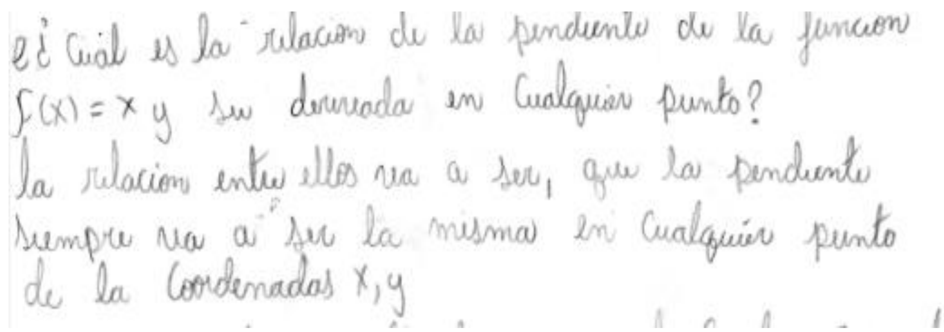


Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Diana, agosto 2019.

Juan a su vez, declara que la pendiente de la recta en cualquier punto (x, y) es la misma y coincide con la derivada; cabe señalar que no se observó en la respuesta de la estudiante un proceso que posibilite evidenciar razonamiento ni justificación alguna de su respuesta, sin embargo, se puede afirmar que exhibe un proceso de *folding back.* No satisface los descriptores A 3.2 y E 3.2, lo que permite establecer que razona en el nivel 2 de comprensión. La Figura 38 ilustra su respuesta.

Figura 38.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal e



¿Cuál es la relación de la pendiente de la función
$f(x) = x$ y su derivada en cualquier punto?
la relación entre ellos va a ser, que la pendiente
siempre va a ser la misma en cualquier punto
de la coordenadas x, y

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

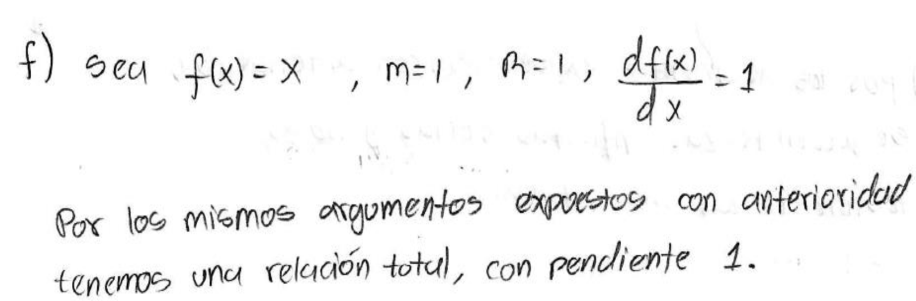
Por otro lado, Pedro no responde, quizás por la poca relación o concepción que posee sobre los conceptos involucrados en la misma, así que no exhibe avance en su proceso de comprensión.

Para la pregunta 1 en su literal f ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio en cualquier intervalo y la razón de cambio instantánea en cualquier punto de la función $f(x) = x$? Ana realizó un *folding back* y con base en respuestas anteriores, declaró que la relación entre estos conceptos es total, cuyo valor de la pendiente es igual a 1.

Con lo manifestado anteriormente, se observa que Ana establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea, además, muestra el tipo de relación a través de una expresión algebraica, así que satisface los descriptores A 3.1 y E 3.1. Se puede afirmar que se encuentra razonando en el nivel 3 de comprensión. La Figura 39 ilustra su respuesta.

Figura 39.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 1 literal f



f) sea $f(x) = x$, $m=1$, $R=1$, $\frac{df(x)}{dx} = 1$

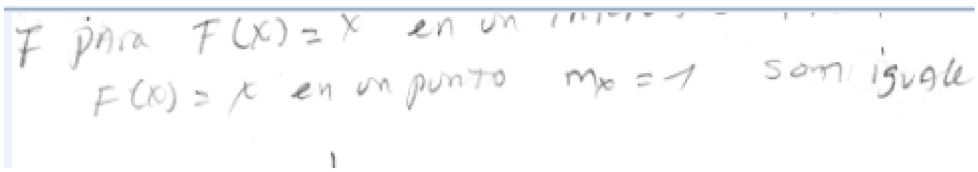
Por los mismos argumentos expuestos con anterioridad
tenemos una relación total, con pendiente 1.

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Antonio por su parte, expresa que tanto la deriva como la pendiente de la función corresponden al mismo valor 1, mostrando una relación a través de una expresión algebraica. Se observa entonces que cumple con el descriptor A 3.1, sin embargo, no logra cumplir con el descriptor E 3.1 debido a que no logra establecer diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea. La Figura 40 ilustra su respuesta.

Figura 40.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 1 literal f

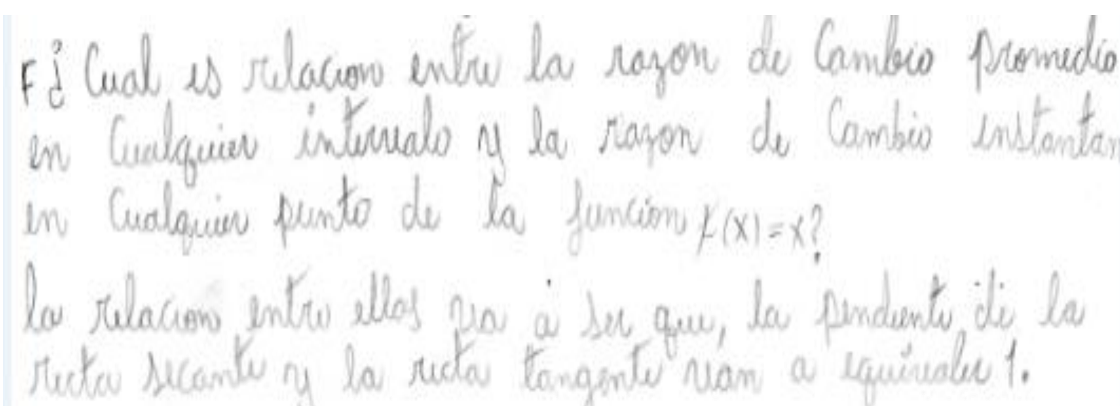

F para F(x) = x en un [illegible]
F(x) = x en un punto $m_x = 1$ son iguale

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

Se observa además que Diana no expresa una respuesta a la pregunta 1 en su literal f, quizás por la poca relación o concepción que posee sobre los conceptos vinculados en la situación, por lo que, a la luz de la teoría en cuestión, se puede manifestar que no exhibe avance en su comprensión. Por otro lado, Juan señala que la relación entre los conceptos tiene un valor igual a 1, poniendo de manifiesto un proceso de *folding back*, con el que realiza distinciones matemáticas. Se aprecia que no satisface el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.1 y de expresión E 3.1, así que no exhibe progreso en su comprensión. La Figura 41 ilustra su respuesta.

Figura 41.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 1 literal f


F ¿Cual es relacion entre la razon de Cambio promedio en Cualquier intervalo y la razon de Cambio instantan en Cualquier punto de la funcion f(x)=x?
la relacion entre ellos va a ser que, la pendiente de la recta secante y la recta tangente van a equivaler 1.

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan agosto 2019.

En la misma pregunta, Pedro manifiesta que la pendiente de la recta secante y de la recta tangente tienen el valor de 1. Su respuesta es escueta, así que no es posible evidenciar procesos de razonamiento que permitan establecer el cumplimiento de los descriptores A 3.1 y E 3.1. Por lo tanto, su progreso en la comprensión es escaso. La Figura 42 ilustra su respuesta.

Figura 42.

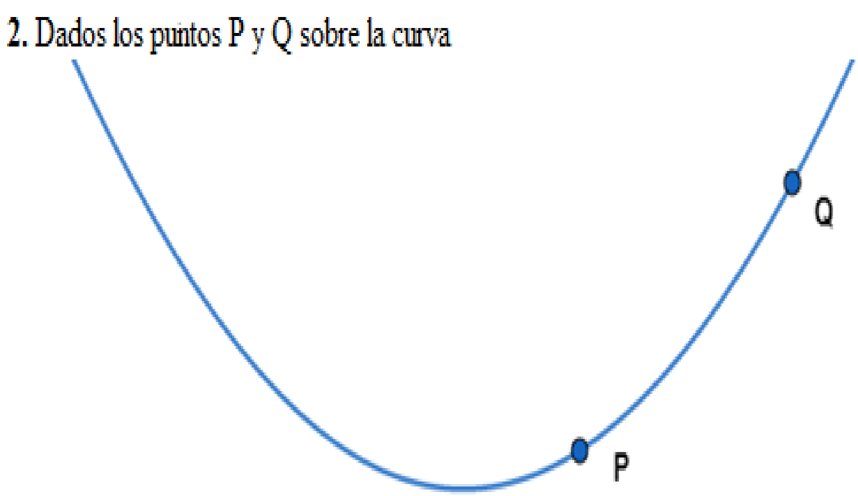
Evidencia del registro de Pedro. respuesta a la pregunta 1 literal f

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Pedro, agosto 2019.

Pasando a la pregunta 2, se acude a la componente visual geométrica de una función cuadrática, estableciendo momentos de *folding back*, tal como se muestra en la Figura 43.

Figura 43.

Representación visual geométrica, pregunta 2



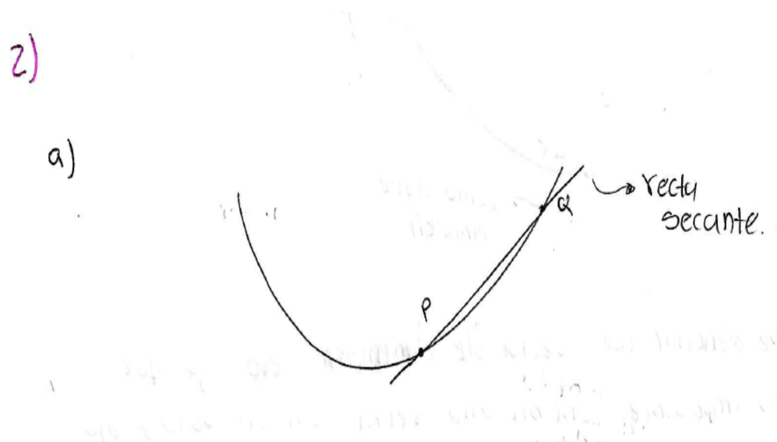
Fuente: Registro de la pregunta 2 en la entrevista, agosto 2019.

En el literal a de la pregunta 2, se pide trazar una recta que pase por los puntos P y Q ¿Cómo se denomina esta recta?

Ana traza la recta que pasa por los puntos P y Q, tal como se muestra en la Figura 44, de modo que satisface al descriptor para la complementariedad de la acción A 2.5.

Figura 44.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 2 literal a



Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Antonio también la traza satisfaciendo al descriptor para la complementariedad de la acción A 2.5. Se observa que él no logra satisfacer el descriptor E 2.5.

Figura 45.

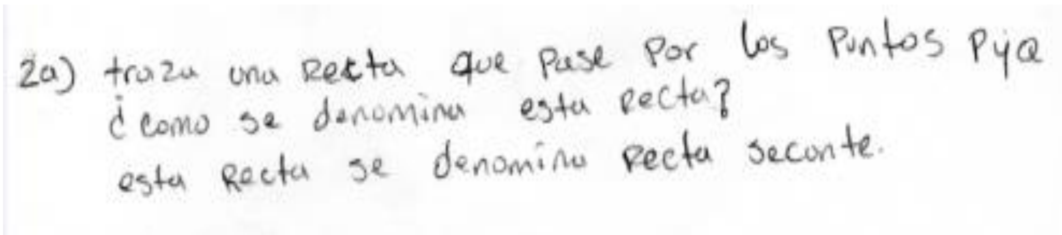
Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 2 literal a

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

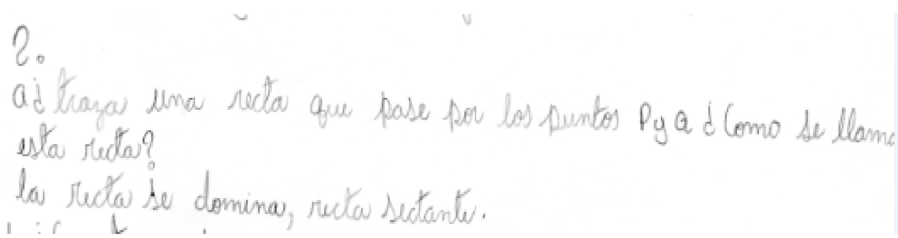
Para el caso de Diana, Juan y Pedro, afirman que se trata de una recta secante, pero no la trazan ni la explican, por lo que no se satisfacen los descriptores A 2.5, E 2.5, A 3.5 y E 3.5.

Figura 46.

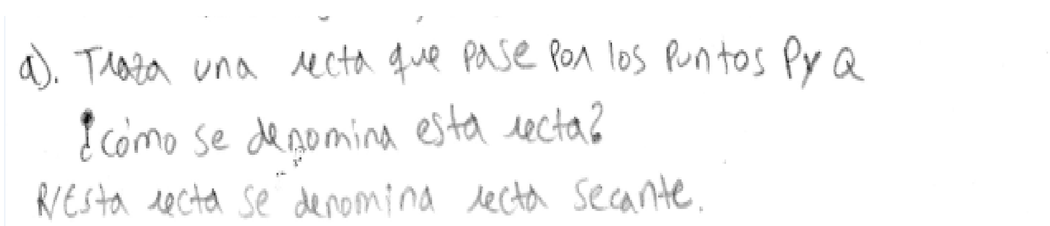
Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 2 literal a


2a) traza una Recta que Pase Por los Puntos PyQ
¿como se denomina esta recta?
esta Recta se denomina Recta seconte.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 2 literal a


2.
a) ¿traza una recta que pase por los puntos P y Q ¿Como se llam
esta recta?
la recta se domina, recta sectante.

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 2 literal a


a). Traza una recta que pase por los puntos P y Q
¿cómo se denomina esta recta?
R/Esta recta se denomina recta secante.

Fuente: Archivo registro escrito de los estudiantes Diana, Juan y Pedro, agosto 2019.

En cuanto a la pregunta 2 en su literal b ¿Cuántos puntos hay sobre la curva entre P y Q? Los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro declararon que hay infinitos puntos, además, se percibió un proceso de *folding back*, lo que satisface el descriptor propuesto para la complementariedad de la acción A 2.6. En este contexto, los estudiantes establecen una relación entre los puntos sobre una curva, satisfaciendo el descriptor A 3.6 propuesto para la complementariedad de la acción en el nivel 3, con ello, se apreció un avance en su comprensión en el marco de las complementariedades de la acción del nivel 2 hacia el nivel 3.

En la pregunta 2 en su literal c, al desplazar sobre la curva el punto Q hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P? Diana y Pedro no emiten una respuesta, sin embargo, Ana, Antonio y Juan consideran que su aproximación sería infinita, máxima y muy cerca, respectivamente, lo que denota un proceso de *folding back* para reorganizar sus estructuras cognitivas y buscar en su conocimiento primitivo una relación que les permita hallar una respuesta sobre el tipo de aproximación existente entre dos puntos sobre una curva, así que se puede evidenciar que satisfacen el descriptor E 2.6.

En la pregunta 2 en su literal d, al desplazar Q hacia P y tomando el punto P fijo ¿Cuántas rectas sobre la curva podemos trazar entre P y Q? Los estudiantes Diana y Pedro no la responden, sin embargo, Ana, Antonio y Juan consideran que es posible trazar infinitas rectas, satisfaciendo el descriptor A 3.6. Sin embargo, no lograron establecer qué relación existe entre la pendiente de una recta tangente con la derivada de una función en un punto, aspecto relacionado con el descriptor A 3.2, motivo por el cual se consideró que es posible que los estudiantes conozcan los conceptos de razón de cambio instantánea y de derivada, pero no necesariamente los conciben de manera independiente, así que no cumplen con el descriptor A 3.2.

Figura 47.

Evidencia de respuesta de Ana, Antonio y Juan pregunta 2 literal d

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 2 literal d

d) ya que se tiene infinitos puntos sobre la curva ente los puntos P y Q; la cantidad de rectas que se pueden trazar son infinitas

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 2 literal d

2d se pueden TRAZAR infinitas RECTAS en a medida que se desplaza Q hacia. P, entonces se pueden TRAZAR infinitas RECTA

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 2 literal d

d. ¿al desplazar Q hacia P y tomando el punto P fijo ¿Cuantas rectas sobre la curva podemos trazar entre P y Q?
la cantidad de rectas que se pueden trazar sobre la curva son infinitas

Fuente: Archivo registro escrito de los estudiantes Ana, Antonio y Juan, agosto 2019.

Con respecto a la pregunta 2 en su literal e ¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más a P? ¿Es posible trazar una última recta? Se observó en las respuestas ilustradas en la Figura 48 que los estudiantes Diana, Antonio y Pedro exhiben cierta similitud en sus respuestas, cuando manifiestan que se pueden trazar infinitas rectas cuando Q se aproxima a P, cumpliendo así el descriptor A 2.5. Sin embargo, no relacionaron la pendiente en un punto con el concepto de derivada, para lo cual no satisfacen el descriptor A 3.2.

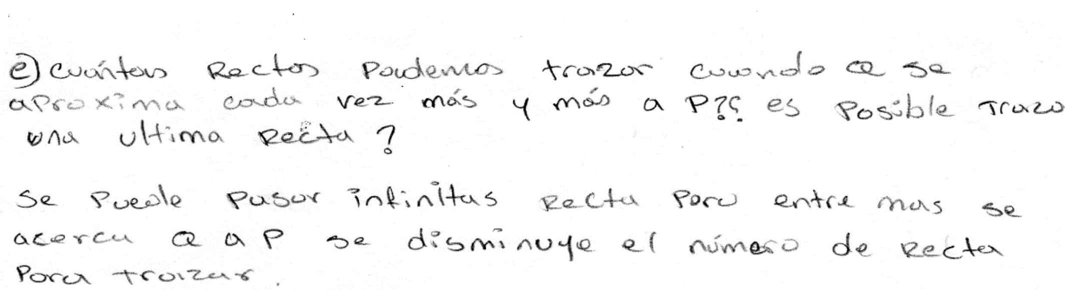
Además, manifestaron que al acercarse el punto Q a P existe una aproximación a una recta tangente y al describir algunas diferencias entre los trozos de rectas secantes y tangentes expresan cierta congruencia con el descriptor para la complementariedad de la expresión E 2.5, el cual permitió analizar si los estudiantes describieron las diferencias entre rectas secantes y tangentes.

Por otro lado, los estudiantes Ana y Juan manifestaron que se pueden trazar infinitas rectas cuando Q se aproxima a P y se aproximan a una recta tangente, aspecto que satisface el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.5.

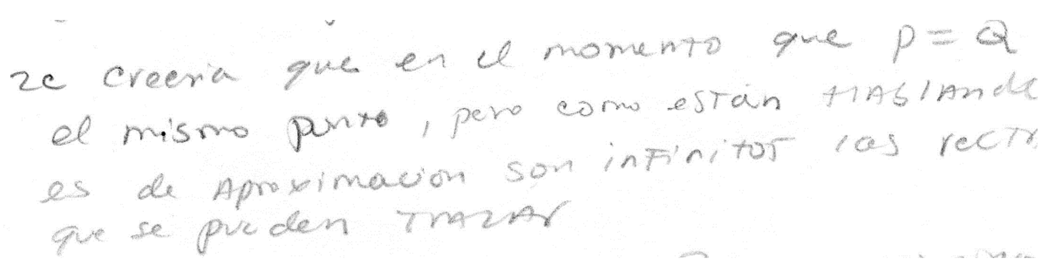
Figura 48.

Evidencia del registro de Diana, Antonio y Pedro, respuesta de la pregunta 2 literal e

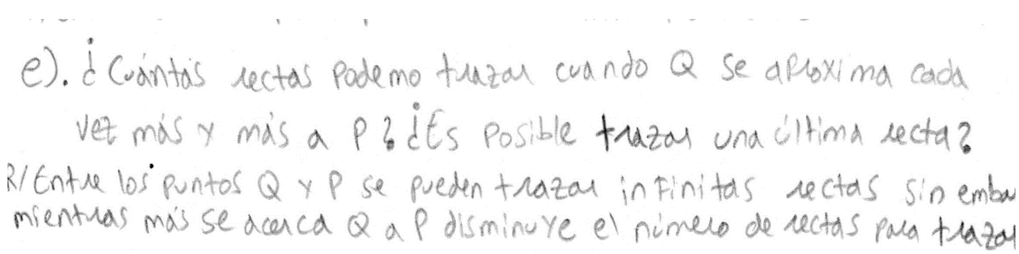
Evidencia del registro de Diana, respuesta de la pregunta 2 literal e


e) Cuántos Rectos Podemos trazor cuando Q se aproxima cada vez más y más a P?¿ es Posible Trazo una ultima Recta ?
Se Puede Pasor infinitas Recta Poro entre mas se acerca Q a P se disminuye el número de Recta Para trozar.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta de la pregunta 2 literal e


ze creería que en el momento que P = Q
el mismo punto, pero como están TrASlAndo
es de Aproximación son infinitos las recTAS
que se pueden TrAzAr

Evidencia del registro de Pedro, respuesta de la pregunta 2 literal e


e). ¿Cuántas rectas Podemo trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más a P?¿Es posible trazar una última recta?
R/ Entre los puntos Q y P se pueden trazar infinitas rectas sin embar mientras más se acerca Q a P disminuye el número de rectas para trazar

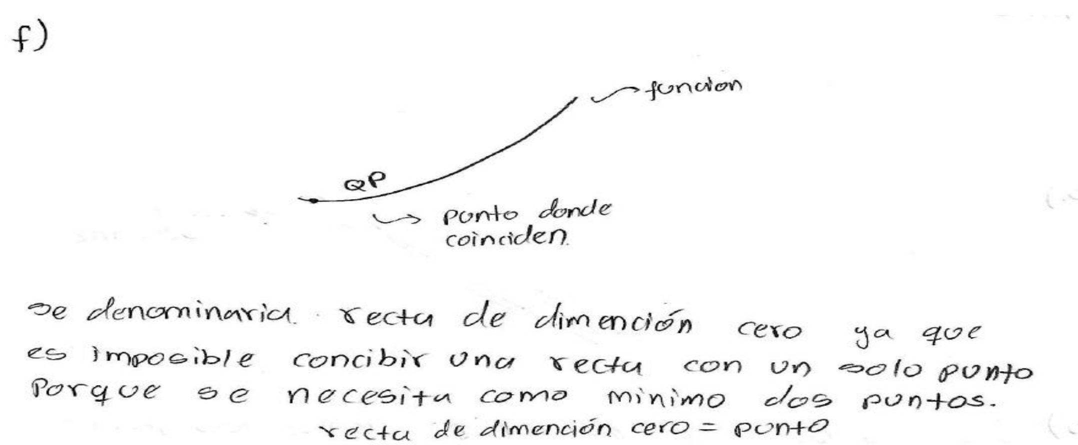
Fuente: Archivo registro escrito de los estudiantes Diana, Antonio y Pedro, agosto 2019.

En relación con la pregunta 2 en su literal f, traza la recta cuando Q coincide con P ¿Cómo se denomina esta recta? Ana considera que es imposible visualizar una recta tangente dado un punto, la cual denomina recta de dimensión cero, a pesar de que en la respuesta del literal anterior, concibe infinitas rectas entre dos puntos extremos cuando uno de ellos se acerca al otro. Para Ana, este proceso de aproximación no es posible realizarlo, por lo que considera la imposibilidad de un acercamiento del haz de rectas secantes a una tangente.

En el contexto de las complementariedades de la acción y la expresión, la estudiante describe una justificación sujeta a la manera en la cual concibe una recta, lo que en cierto modo cumple con el descriptor E 3.5. Además, brinda una explicación relacionada con los trozos de una recta secante a una curva, aspecto correspondiente al descriptor E 4.6. Es importante anotar que esta evolución en la comprensión se debe a la concepción del concepto de recta que posee, como lo muestra la Figura 49. Por su parte, Juan al dar respuesta al mismo interrogante, a pesar de afirmar que se pueden trazar infinitas rectas y declarar la posibilidad de trazar una última recta al desplazarse el punto Q hacia P, a esta última la denomina secante; al parecer, su concepción y las diferencias y similitudes de estos conceptos para Juan no están claros, por lo que se observa que el estudiante no exhibe avance en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

Figura 49.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 2 literal f



Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

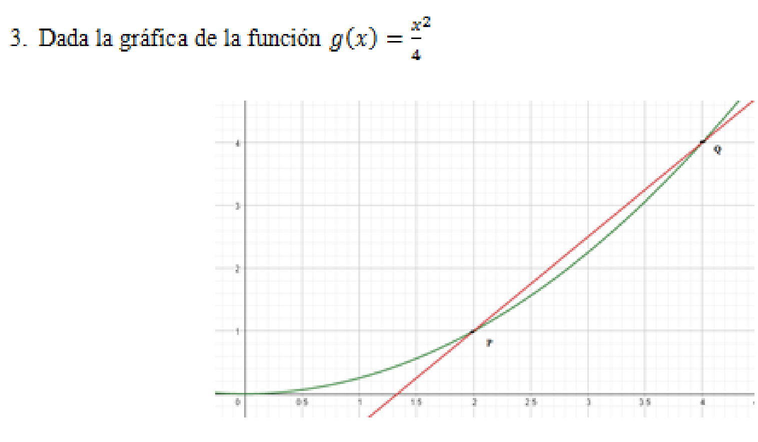
Por otro lado, Antonio, Diana y Pedro consideran que el acercamiento entre dos puntos es posible interpretarlo como una aproximación del haz de rectas secantes hacia una recta tangente, afirmando así que esta última es una tangente; además, se puede observar el proceso de *folding back* realizado para hacer distinciones matemáticas que les permiten establecer relaciones entre los conceptos involucrados.

En el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, los estudiantes en respuestas anteriores realizaron distinciones sobre los trozos de rectas secantes o tangentes a una curva, lo que está en correspondencia con el descriptor A 2.5, asimismo, las respuestas satisfacen en cierta manera el descriptor A 3.5. Por lo tanto, se observa un avance en la comprensión de los conceptos relacionados, en el marco de las complementariedades de la acción entre el nivel 2 y 3.

En la pregunta 3, se propone una función $g(x) = \frac{x^2}{4}$, cuya gráfica se representa en la Figura 50, posibilitando al estudiante razonar sobre los infinitos puntos que existen en el intervalo [2,4]; analizar aproximaciones entre los extremos del intervalo dado; visualizar la cantidad de rectas que se pueden trazar a medida que la longitud de intervalo tiende a 0; y relacionar la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea con las rectas secantes y la recta tangente, y la respectiva derivada de la función en cada punto.

Figura 50.

Gráfica de la función parábola relacionada en la entrevista.



Fuente: registro de la entrevista, agosto 2019.

A continuación, se aborda un análisis en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

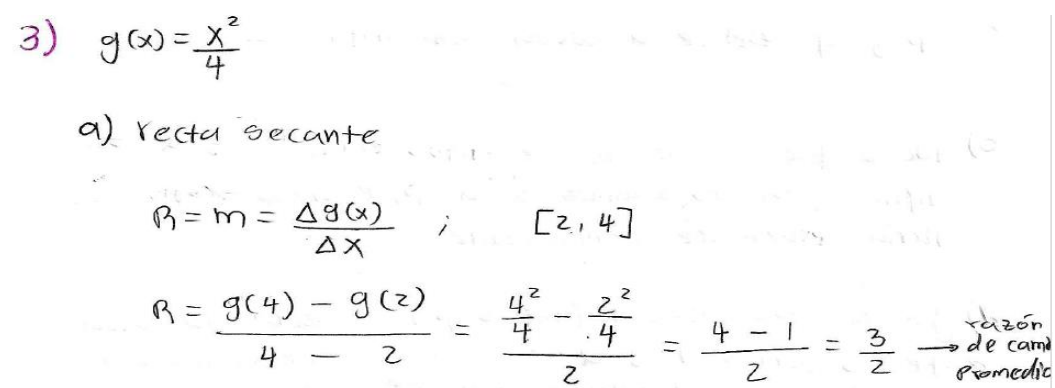
Con relación a la pregunta 3 en su literal a ¿Cómo se denomina la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo [2,4]? Ana manifiesta de manera simbólica una respuesta en la que referencia a una recta secante, con lo que satisface el descriptor A 2.5. Sin embargo, no cumple el descriptor E 2.5 dado que no establece diferencias entre rectas tangentes y secantes.

En este contexto, se observó que la respuesta de la estudiante evidencia su comprensión, satisfaciendo los descriptores relacionados con los conceptos entre las sub categorías del nivel 2, complementariedad de la acción y de la expresión, y el descriptor clasificado por conceptos. Al mismo tiempo, la expresión algebraica escrita permite interpretar un proceso mecánico, para hallar una razón de cambio promedio ilustrado en la Figura 51, cumpliendo así con el descriptor para la complementariedad de la acción A 3.6; de igual forma, justificó su respuesta al relacionarla con la razón de cambio, lo que satisface el descriptor E 3.1.

En este contexto, se observó que Ana en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, exhibe una comprensión relacionada con el descriptor A 2.5 sobre el concepto de secante, mientras que su desempeño sobre el concepto de razón de cambio promedio, cumple con los descriptores A 3.1 y E 3.6. Se puede inferir entonces que hay un progreso en la comprensión, a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, avanzando del nivel 2 al nivel 3.

Figura 51.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 3 literal a



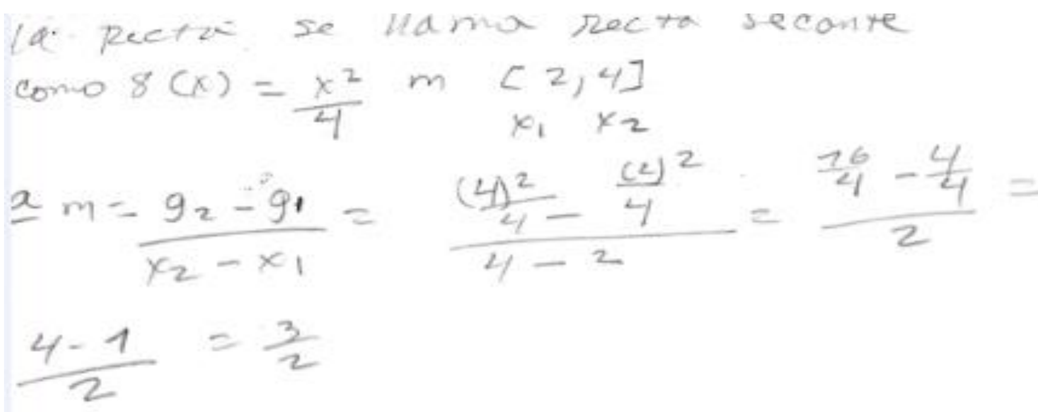
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Con relación a la misma pregunta, Antonio expresa que esa línea es una recta secante, lo cual satisface el descriptor A 2.5, distinguiendo una recta secante de una tangente a una curva, sin embargo, en su respuesta no se aprecia que satisface al descriptor E 2.5.

Asimismo, él explicita el valor de la razón de cambio promedio en el intervalo [2,4] representado en la Figura 52. Con esta respuesta se puede observar un proceso de índole mecánico para hallar un valor numérico y un proceso de *folding back* para hallar esta solución, cumpliendo con el descriptor A 3.6. De lo mencionado anteriormente, en el marco de las complementariedades, se puede inferir que el estudiante exhibe un avance en su razonamiento del nivel 2 al nivel 3, cumpliendo los descriptores relacionados con el concepto de razón de cambio, en consonancia con las complementariedades de la acción.

Figura 52.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 3 literal a



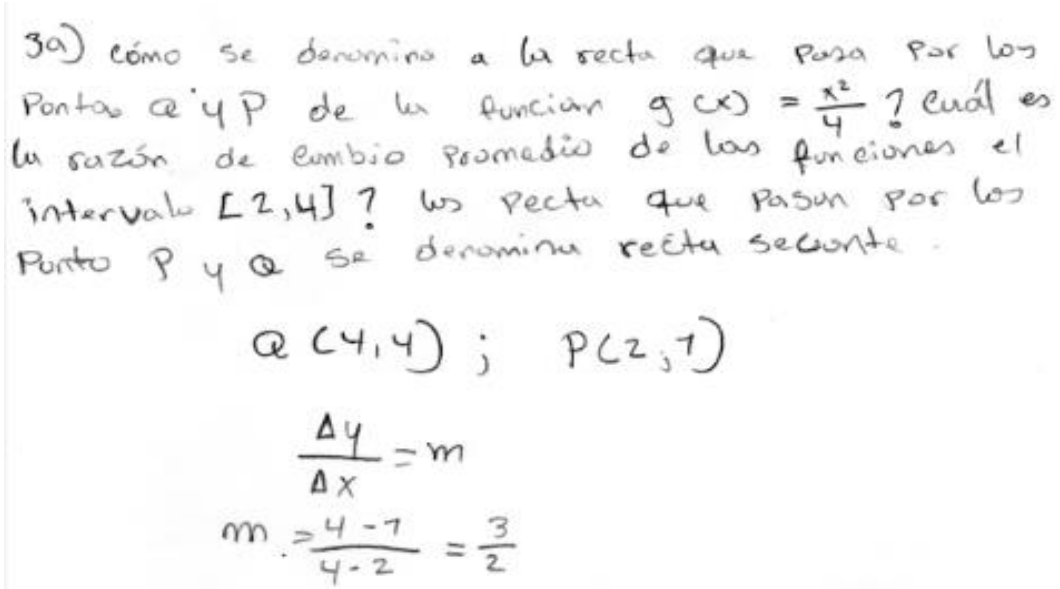
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

Por otro lado, las respuestas de Diana y Pedro mostradas en la Figura 51, justifican la recta secante que trazan entre los puntos P y Q, lo que satisface el descriptor A 2.5. Se observa, además, un proceso de *folding back* para obtener los resultados respectivos. Este proceso se ilustra en la Figura 53, cumpliendo con el descriptor E 3.6. Se puede afirmar entonces, su avance del nivel 2 al 3.

Figura 53.

Evidencia del registro de Diana y Pedro, repuesta a la pregunta 3 literal a

Evidencia del registro de Diana, repuesta a la pregunta 3 literal a

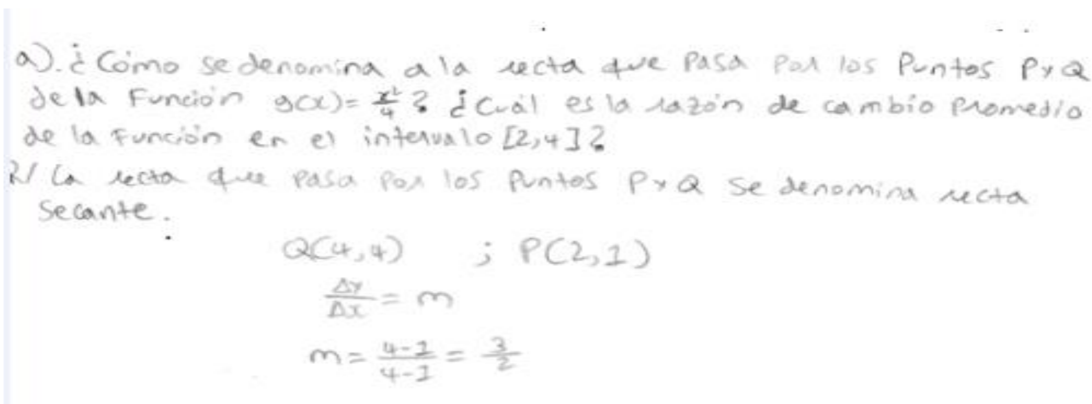

3a) cómo se denomina a la recta que pasa por los Puntos Q y P de la funcion $g(x) = \frac{x^2}{4}$? Cuál es la razón de cambio promedio de las funciones el intervalo [2,4] ? la recta que pasan por los Punto P y Q se denomina recta secante.

$Q(4,4)$; $P(2,1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

$m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$

Evidencia del registro de Pedro, repuesta a la pregunta 3 literal a


a). ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los Puntos P y Q de la Función $g(x)= \frac{x^2}{4}$? ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo [2,4] ?
R/ La recta que pasa por los Puntos P y Q se denomina recta Secante.

$Q(4,4)$; $P(2,1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

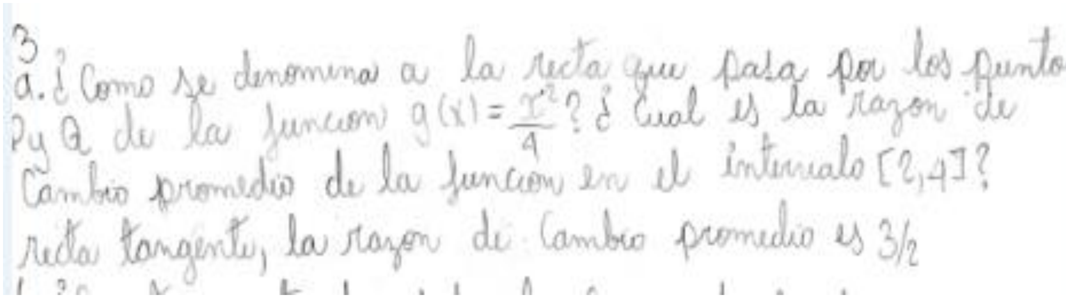
$m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$

Fuente: Archivo registro escrito de los estudiantes Diana yPedro, agosto 2019.

En el caso de Juan, a pesar de reconocer el concepto de recta secante y tangente, exhibe dificultades para realizar escritos, trozos o gráficos que le permitan diferenciar una recta secante de una tangente en el intervalo $[2{,}4]$, lo cual se evidenció en la respuesta de la estudiante ilustrada en la Figura 54, así que no satisface el descriptor A 2.5. Asimismo, el estudiante realiza un proceso de *folding back* que le posibilitó determinar el valor de la razón de cambio promedio, sin embargo, no explicitó el proceso para hallar el valor de 3/2. Se pude afirmar que cumple con el descriptor E 3.6.

Figura 54.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 3 literal a.


3
a. ¿Como se denomina a la recta que pasa por los punto P y Q de la funcion $g(x)=\frac{x^2}{4}$? ¿Cual es la razon de Cambio promedio de la funcion en el intervalo [2,4]?
recta tangente, la razon de Cambio promedio es 3/2

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

Avanzando en el análisis, la pregunta 3 en su literal b, ¿Cuántos puntos hay sobre la curva de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2{,}4]$? está estrechamente relacionada con los literales c y d, dado que en la pregunta anterior estos aspectos se trataron de manera general y funcionaron como detonadores que le permitieron a los estudiantes visualizar los procesos de manera particular. En este contexto, se analizó el concepto de aproximación entre dos puntos extremos del intervalo $[2{,}4]$, concibiendo el acercamiento entre las rectas secantes trazadas y la recta tangente como límite de las primeras.

Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro manifiestan que existen infinitos puntos entre los extremos del intervalo $[2{,}4]$, lo que satisface el descriptor A 2.6. Por otro lado, al referirse a la pregunta 3 en su literal c, al desplazar el punto Q sobre la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P? Pedro y Diana no proporcionan respuesta alguna, denotando con ello una ausencia de razonamiento motivada, quizás por la poca o nula relación que pueden establecer con sus conocimientos primitivos, mientras que Ana, Antonio y Juan dan como respuesta que el punto Q se puede aproximar infinitamente hacia el punto P. Antonio en particular, manifiesta que se aproximan mucho y Juan declara que su aproximación es máxima, mostrando con ello un proceso de *folding back*, realizando distinciones matemáticas a través de acciones basadas en su conocimiento primitivo para obtener una respuesta.

Con relación a la pregunta 3 en su literal d "¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más al punto fijo P? ¿Es posible trazar una última recta?", Pedro no emite respuesta alguna, denotando con ello una ausencia de razonamiento por la poca relación que concibe entre los conceptos primitivos que posee, pudiéndose inferir que no cumplió con los descriptores propuestos para esta pregunta.

Por otro lado, Ana, Antonio y Juan manifiestan en su respuesta, ilustrada en la Figura 55, que se puede trazar infinitas rectas a medida que la longitud del intervalo $[2,4]$ se acerca a 0. El hecho de considerar el trazo de una última recta, evidencia una relación entre el acercamiento del haz de rectas secantes hacia una recta tangente y la aproximación de un punto a otro fijo sobre la curva de la función; as, de manera implícita, se está relacionando el concepto de razón de cambio instantánea con la recta tangente, y a su vez, el concepto de recta secante con el concepto razón de cambio promedio.

Este tipo de razonamiento está estrechamente relacionado con los descriptores A 3.1 y A 3.2. Dado que en las respuestas no se observó una justificación al trazar la recta tangente; se puede afirmar que no se satisfacen los descriptores E 3.1 y E 3.2. Sin embargo, Diana considera que se pueden trazar infinitas rectas, pero no concibe trazar una recta única.

Figura 55.

Evidencia del registro de Ana, Antonio, Diana y Juan, respuesta a la pregunta 3 literal d.

Evidencia del registro de Ana respuesta a la pregunta 3 literal d.

d) infinitas, explicado con anterioridad y no es posible trazar una ultima recta

Evidencia del registro de Antonio respuesta a la pregunta 3 literal d.

d) ¿ cuantas Rectas podemos trazar cuando Q se Aproxima cada vez más al punto Fijo P ? ¿ es posible trazar una ultima Recta ?
Infinitas Rectas se pueden trazar, si se puede trazar una ultima Recta

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 3 literal d.

d) Cuántas Recta Podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez mas y mas Punto fijo P? ¿es posible Trazar una última Recta?

Podemos trazar infinita recta al acercarse Q a P, Pero no creo que se Pueda una recta única

Evidencia *del registro de* Juan

d. ¿Cuantas rectas podemos trazar cuando Q se aproxim cada vez mas y mas al punto fijo P? ¿es posible trazar una ultima recta?

Se puede trazar enfinitas rectas, podria tener una ultima r antes de que se llegue al punto al P

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

En cuanto a la pregunta 3, sus literales e, f y g permitieron analizar la comprensión del concepto de razón de cambio promedio e instantánea en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, desde la perspectiva de la variación relacionada con la aproximación de un punto hacia otro sobre la curva en el intervalo $[2,4]$. Así mismo, dado que hay infinitos puntos, los estudiantes deducen que se obtiene infinitas razones de cambio a medida que los puntos en el intervalo cambian de posición; esto se evidenció al trazar rectas secantes y establecer el tipo de relación entre la razón de cambio promedio en el intervalo $[2,4]$ y la instantánea en el punto $x = 2$.

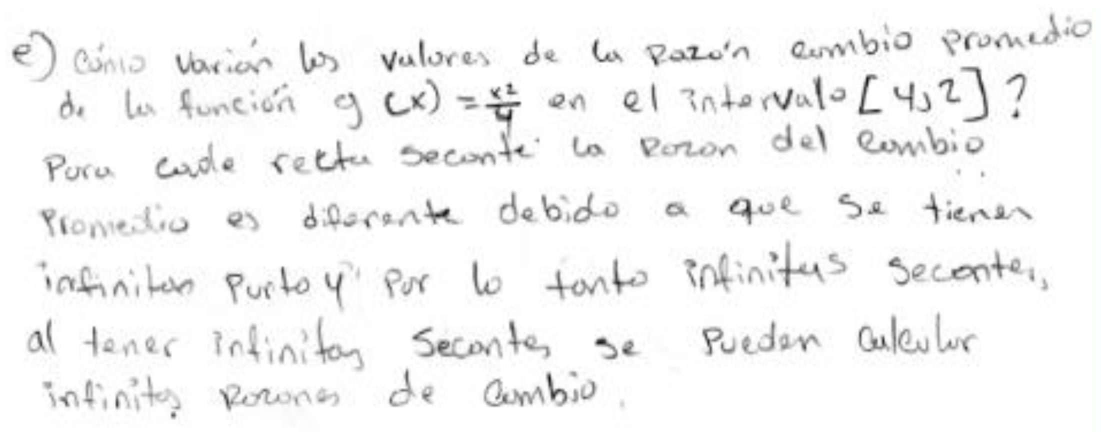
Al analizar el proceso de razonamiento de los estudiantes, se observó que Diana, Pedro y Antonio proporcionaron una respuesta a la pregunta 3 en su literal e "¿Cómo varían los valores de la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? ilustrada en la Figura 56. La respuesta permite observar un proceso de *folding back*, al construir una imagen mental asociada a la misma. Se puede afirmar que se encuentran razonando en el nivel 3 de comprensión, cuando afirman que cada secante tiene una razón de cambio promedio diferente, porque en el intervalo $[2,4]$ hay infinitos puntos, estableciendo diferencias con una tasa instantánea de cambio. Por lo tanto, al establecer similitudes y diferencias entre los conceptos, se puede afirmar que cumplen con los descriptores A 3.1 y E 3.1.

Por otro lado, Juan solo expresa que los valores varían de 1 a 2 como se muestra en la Figura 56; con ello, podría pensarse que realizó un proceso de *folding back* cuando indaga por la manera como varían los valores de la razón de cambio en el intervalo señalado, sin embargo, no explicitan una expresión que confirme su proceso mental.

Figura 56.

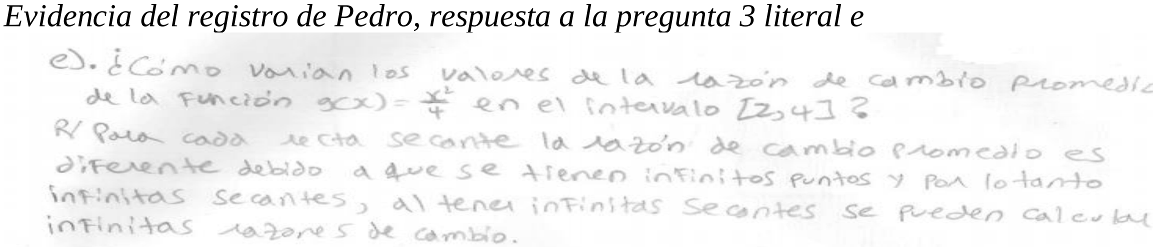
Evidencia del registro de Diana, Pedro, Antonio y Juan, respuesta a la pregunta 3 literal e

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 3 literal e



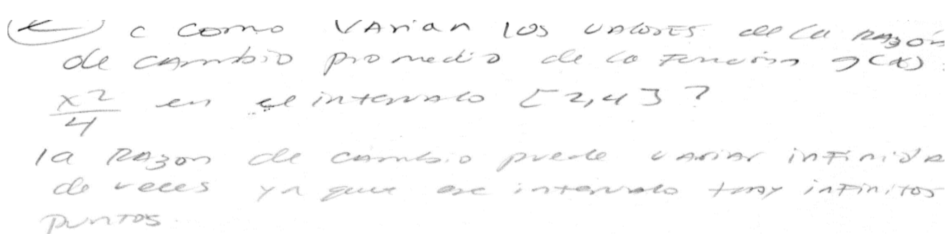
e) Cómo varían los valores de la razón cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [4,2]?
Para cada recta secante la razon del cambio promedio es diferente debido a que se tienen infinitos punto y por lo tanto infinitas secantes, al tener infinitas secantes se pueden calcular infinitas razones de cambio.

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 3 literal e



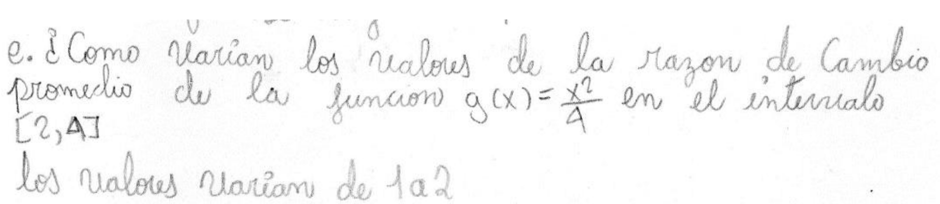
e). ¿Cómo varían los valores de la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [2,4]?
R/ Para cada recta secante la razón de cambio promedio es diferente debido a que se tienen infinitos puntos y por lo tanto infinitas secantes, al tener infinitas secantes se pueden calcular infinitas razones de cambio.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 3 literal e



e) ¿como varian los valores de la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [2,4]?
la Razon de cambio puede variar infinidad de veces ya que ese intervalo tiene infinitos puntos.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 3 literal e



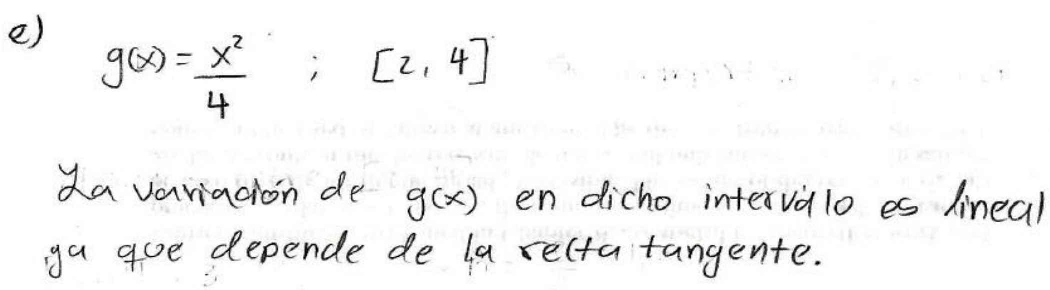
e. ¿Como varían los valores de la razon de Cambio promedio de la funcion $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [2,4]
los valores varían de 1 a 2

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Diana, agosto 2019.

Por su parte, Ana manifiesta que los valores de la razón de cambio varían en el intervalo [2,4] de manera lineal, ya que dependen de la recta tangente, como se ilustra en la Figura 57. Al parecer, con esta respuesta exhibe un razonamiento que emplea un proceso de *folding back* para buscar propiedades relacionadas con los conceptos primitivos, de modo que le permitieron orientar su proceso mental para establecer una relación entre ellos y emitir una respuesta, pero, al tratar de construir una imagen no lo logra, debido quizás a la poca conexión que realiza entre los conceptos que posee. Ella no logra identificar diferencias entre los conceptos involucrados, así que no satisface los descriptores A 3.1 y E 3.2.

Figura 57.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 3 literal e



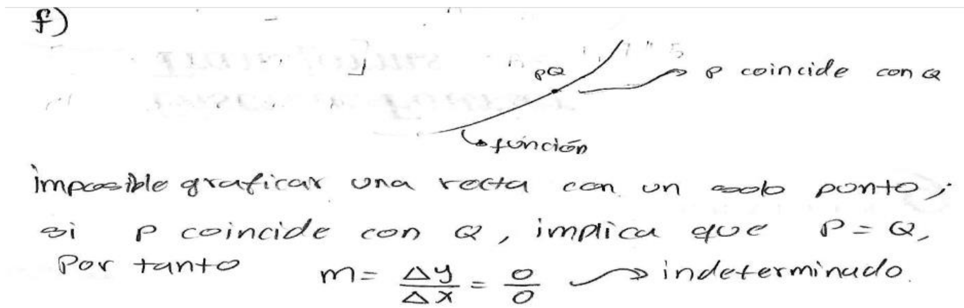
Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

Con la respecto a la pregunta 3 en su literal f, Ana y Diana declaran en la respuesta ilustrada en la Figura 58, que es imposible graficar una recta con un solo punto y no existe la recta al coincidir Q con P, dado que, en respuestas anteriores, ellas consideraron un acercamiento de forma lineal en el intervalo [2,4]. Con este panorama, estimaron infinitas rectas secantes e infinitas razones de cambio promedio, respectivamente, con lo que se evidenció con este razonamiento que Ana y Diana no lograron relacionar la aproximación del haz de rectas secantes a una tangente, así que no cumplen con el descriptor A 2.1. De igual modo, ellas manifestaron dificultades para relacionar la pendiente de una función con el concepto de derivada, para lo cual no cumplen con el descriptor A 3.2.

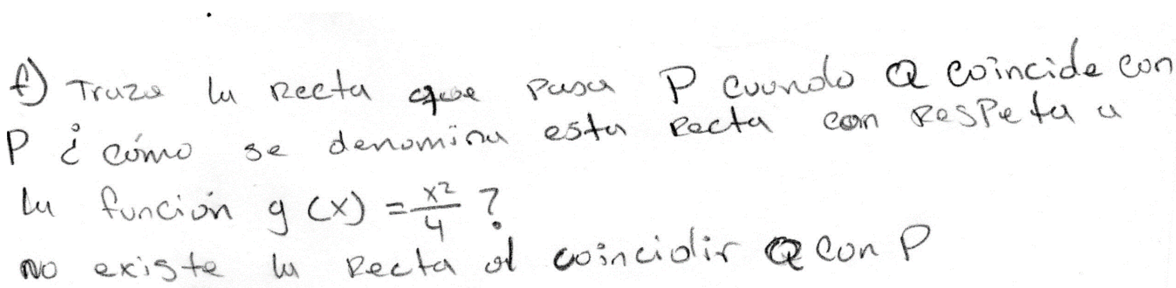
Figura 58.

Evidencia del registro de Ana y Diana, respuesta a la pregunta 3 literal f

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 3 literal f



Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 3 literal f

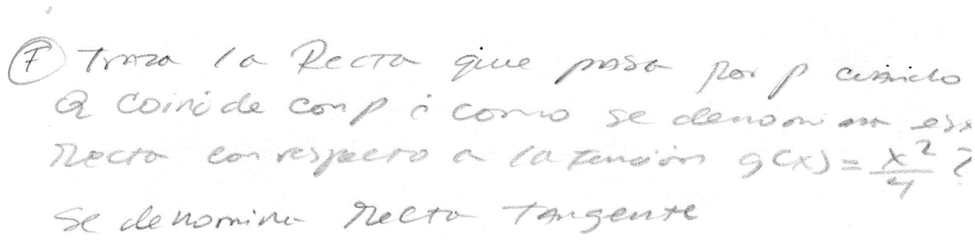


Fuente: Archivo registro escrito de las estudiantes Ana y Diana, agosto 2019.

Por otro lado, Antonio consideró la variación de los valores de la razón de cambio promedio de manera infinita (Figura 59) manifestando que la recta trazada en el punto P es la tangente; de igual modo, se aprecia un proceso de *folding back,* que le permitió realizar algunas distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo y relacionar los conceptos involucrados en la situación planteada. Este tipo de razonamiento es propio de estudiantes que están razonando en el nivel 2 de comprensión. Se puede evidenciar que Antonio cumple con el descriptor A 2.1, dado que diferencia una razón de cambio promedio de una instantánea, sin embargo, no es posible evidenciar que cumple con el descriptor E 2.1.

Figura 59.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta la pregunta 3 literal f


(F) Traza la Recta que pasa por P cuando Q coincide con P ¿como se denomina esa Recta con respecto a la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?
Se denomina Recta Tangente

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Antonio, agosto 2019.

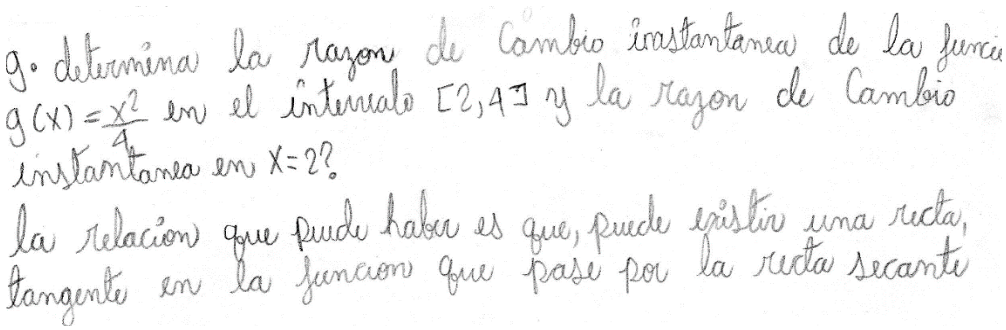
Por su parte, Pedro no responde la pregunta, dado que no logró relacionar el haz de secantes y su acercamiento a la recta tangente como límites del haz de secantes, por lo que su respuesta no logra satisfacer los respectivos descriptores. Juan presenta dificultades para distinguir entre una recta secante y una tangente, lo que es evidenciado cuando manifiesta que la recta recibe el nombre de secante, tal como se ilustra en la Figura 60; así que no exhibe un avance en la comprensión del concepto de razón de cambio, de igual modo, el estudiante no relaciona el concepto de derivada con la pendiente de una función.

Con respecto a la pregunta 3 en su literal g, la cual solicita determinar la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P, adicionando el interrogante ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función? Ana, Antonio, Diana y Pedro realizan un proceso mecánico para hallar la razón de cambio, a través de cual determinaron la pendiente de la recta a través de la derivada de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$. Posteriormente, para hallar la razón de cambio instantánea, reemplazaron el valor de $x = 2$ en la derivada. Se puede afirmar que los estudiantes realizaron un *folding back* para hacer distinciones matemáticas y visualizar una imagen mental o física asociada a la pregunta, así que cumplen con los descriptores A 3.6 y E 3.6.

A su vez, Juan en su respuesta ilustrada en la Figura 60, no logra establecer una diferencia entre los conceptos de razón de cambio promedio con la razón de cambio instantánea, ya que concibe que la recta tangente de la función pasa por una de las rectas secantes, así que no cumple los respectivos descriptores asociados a esta pregunta, por lo que no exhibe un avance en su comprensión.

***F*igura 60.**

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 3 literal g


g. determina la razon de Cambio instantanea de la funci
$g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [2,4] y la razon de Cambio
instantanea en X=2?
la relación que puede haber es que, puede existir una recta,
tangente en la funcion que pase por la recta secante

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Juan, agosto 2019.

Con relación a la pregunta 3 en su literal h, ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$ y la razón de cambio instantánea en $x = 2$? Se puede afirmar que los tres estudiantes, Ana, Diana y Pedro, manifestaron un proceso de $folding\ back$ que les permitió buscar algunas características de los conceptos involucrados, bien sea escritas o simbólicas, a través de acciones que le posibilitaron cuestionar su comprensión y asociarla a la pregunta, proporcionando una respuesta de manera particular y con ello una nueva comprensión (Pirie y Kieren, 2006).

Además, en este contexto, los estudiantes determinaron el valor de la razón de cambio promedio en el intervalo $[2,4]$ y la razón de cambio instantánea en el punto $x = 2$, a través de un proceso mecánico que se exhibe en la Figura 61, sin embargo, no lograron establecer una relación entre la pendiente de una función con el concepto de derivada, por lo que no se cumple el descriptor A 3.1. El análisis de la respuesta a la luz de las complementariedades de a la acción y la expresión reflejó que los estudiantes están en el nivel tres de comprensión, ya que ellos identificaron algunas características matemáticas a través de procesos de *folding back,* que les permitió hallar la razón de cambio promedio e instantánea, así que también cumplen con el descriptor E 3.6.

A través del uso de operaciones algebraicas, aspecto ilustrado en la Figura 61, se puede observar que examinan el tipo de relación que hay entre las razones antes mencionadas, así que las respuestas de los estudiantes satisfacen el descriptor A 4.5; además, mediante un proceso algebraico, trata de inferir qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio antes nombrada y sus múltiples interpretaciones, con lo cual satisface al descriptor E 4.6. Particularmente, Ana cumple con los descriptores E 3.6 mostrando un avance en la comprensión del concepto de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y la derivada en una ecuación diferencial de orden primer orden.

Figura 61.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 3 literal h.

h) razon de cambio promedio entre [2,4] ; $\frac{3}{2} = m_1$

razon de cambio instantanea en $x=2$

$$\frac{dg(2)}{dx} = \frac{2}{2} = 1 = m_2$$

relación

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Ana, agosto 2019.

En la respuesta de Diana, registrada en la Figura 62, se aprecia que no logra justificar cuál es la relación entre las razones de cambio promedio e instantánea y no exhibe un progreso en la comprensión en el marco de las complementariedades de la expresión, así que no satisface el descriptor E 4.6.

Figura 62.

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 3 literal h.

H) ¿cual es la relación entre la razón de cambio Promedio de la funcion $g(x)\frac{x^2}{4}$ en el intervalo [4,2] y la razón de cambio instantanea en $x=2$?

$$g(x) = \frac{x^2}{4} \rightarrow g'(x) = \frac{x}{2}$$

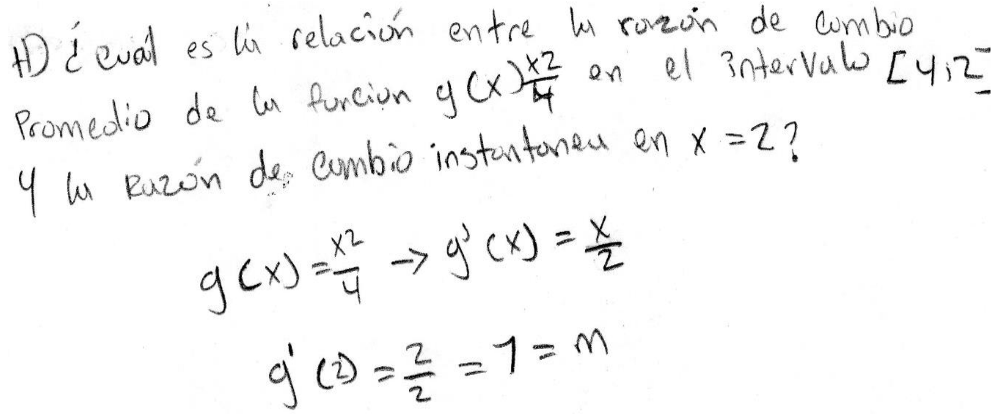
$$g'(2) = \frac{2}{2} = 1 = m$$

Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Diana, agosto 2019.

Ahora bien, el proceso que exhibe Pedro es similar al de Diana, debido a que no evidencia en su respuesta, ilustrada en la Figura 63, una justificación que permita visualizar cuál es el tipo de relación entre la razón de cambio promedio e instantánea, así que él, tampoco exhibe un progreso en la comprensión en el marco de las complementariedades de la expresión, por lo tanto, él no satisface el descriptor E 4.6.

Figura 63.

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 3 literal h.



Fuente: Archivo registro escrito de la estudiante Pedro, agosto 2019.

Por su parte, Antonio y Juan no responden la pregunta, exhibiendo una carencia de razonamiento en procesos de acciones que les permitan obtener imágenes relacionadas con los conceptos matemáticos involucrados en la pregunta, así que no avanzan al nivel 3 de comprensión.

4.4.2. Análisis retrospectivo relacionado con el concepto de razón de cambio y derivada correspondiente al episodio 2.

El trabajo mancomunado del investigador y los profesores de las asignaturas es relevante a la hora de hacer el análisis retrospectivo en el marco de la teoría en cuestión, en correspondencia con la metodología de experimentos de enseñanza, dado que ambos están estrechamente ligados por cuanto hay trabajos de investigación que validan una coordinación entre los niveles de la primera y las fases de la segunda, pero claramente diferenciados, por ser la primera una teoría y la segunda una metodología.

Por otro lado, la sistematización de la información recolectada a través de grabaciones, registros escritos, de audio y video, permitieron recapitular la experiencia vivida durante el desarrollo del experimento al interior del aula de clase. Para realizar este análisis retrospectivo, tanto el profesor como el investigador se distanciaron de las observaciones, conjeturas y análisis del primer episodio. Este distanciamiento buscó profundizar el análisis de los datos recolectados sin influenciar de alguna manera la comprensión de los estudiantes, tal como lo manifiesta Molina (2011) en las acciones a seguir en un experimento de enseñanza.

En este contexto, Molina (2011) en su investigación manifiesta la relevancia de cuatro aspectos que permiten realizar el análisis retrospectivo e indagar por la ruta conceptual de los estudiantes, que a saber son:

- *Identificar las estrategias* que emplean los estudiantes en la resolución de sentencias numéricas consideradas.
- *Caracterizar el uso del pensamiento* relacional que evidencien sus producciones e intervenciones, identificando los elementos en los que centra su atención cuando se hace presente este tipo de pensamiento.
- *Analizar y evaluar la comprensión del signo igual* que mostraron al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numérica.
- *Detallar la evolución de la comprensión del signo igual* y del uso del pensamiento relacional puesto de manifiesto.

En esta investigación, los aspectos mencionados anteriormente son abordados de la siguiente manera:

Identificar acciones realizadas por los estudiantes: el investigador en este apartado reconoció cuáles son las acciones a la luz de la teoría de Pirie y Kieren realizadas por los estudiantes para resolver cada pregunta de la entrevista, de modo que le permitan identificar qué procesos algebraicos, mecánicos, de razonamientos (o analíticos) y gráficos emplean en su razonamiento, con el objeto de obtener una posible solución y poder emitir una respuesta.

Evidenciar conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial: el investigador analizó los procesos de *folding back* de cada estudiante, los cuales se evidenciaron cuando distinguen características, similitudes y diferencias de los conceptos que posee para relacionarlos a los involucrados en cada pregunta y así hallar una solución. En este contexto, los descriptores permitieron señalar las acciones seguidas por el estudiante en su proceso de comprensión en cada uno de los niveles.

Detallar la evolución de la comprensión de los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial: es un proceso que se realizó a través del análisis de las respuestas de los estudiantes a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, para precisar los cambios conceptuales relacionados con la razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, los cuales fueron generados a partir de las reflexiones al interior de cada situación planteada en la entrevista. Al respecto, en cada episodio del experimento se analizó qué tipo de razonamiento realiza un estudiante para tratar de inferir la manera en la que evoluciona su comprensión, sin embargo, estos razonamientos algunas veces son erróneos.

Analizar el nivel de comprensión de los conceptos involucrados en procesos de solución de una ecuación diferencial: en esta investigación se logra analizar si las respuestas de los estudiantes satisfacen los descriptores propuestos para las complementariedades de la acción y la expresión en cada pregunta de la entrevista y su proceso de comprensión en el marco de las categorías y subcategorías. Así mismo, permitieron identificar el nivel de comprensión sobre los conceptos involucrados en la solución de cada una de las situaciones planteadas.

Los aspectos antes mencionados se pueden observar en el análisis que se presenta a continuación, en el que se indagó por las acciones y los conceptos, detallando la evolución en cada uno de los niveles de comprensión.

4.4.2.1. Identificar acciones realizadas por los estudiantes.

El análisis retrospectivo de la información recolectada en el episodio 2, permitió identificar algunas acciones realizadas por los estudiantes para dar respuesta a cada pregunta de la entrevista; en este contexto, por un lado, el *folding back* posibilitó detectar los conceptos que un estudiante requirió para abordar de nuevo y con mayor claridad las preguntas de la entrevista, por otro, las complementariedades de la acción y la expresión posibilitaron analizar el nivel de comprensión de los conceptos involucrados.

En este orden de ideas, Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan, respondieron las preguntas de la entrevista, realizando algunas acciones que les permitieron desarrollar procesos de manera mecánica y usando expresiones algebraicas en la resolución de los interrogantes propuestos, tal como se ilustra en la Tabla 21. Esta consta de cuatro columnas, en la primera se ubican las acciones que realizan los estudiantes para abordar cada pregunta de la entrevista, la segunda corresponde a la descripción sobre el proceso que ellos realizan después de reconocer, identificar y distinguir los conceptos que requieren para abordar cada situación planteada, posteriormente, en la siguiente se sitúa una de las preguntas de la entrevista, y en la última se coloca una figura que ilustra la respuesta del estudiante a la pregunta. Por otro lado, Ana, Antonio, Diana y Pedro emplean el concepto de razón de cambio promedio para abordar la pregunta 1 en sus literales a y b, y el concepto de razón de cambio instantánea para la pregunta 3 en su literal a.

Por el contrario, Juan responde a la pregunta 1 en su literal a sin emplear fórmulas o procesos mecánicos. Recurre al razonamiento empleando la tasa de variación con respecto a la variable independiente para analizar la pendiente de la recta secante. Para la pregunta 1 en su literal b, consideró que sólo con hallar la derivada de una función se obtiene la pendiente de una recta tangente y para la pregunta 3 en su literal a, calculó el valor de la pendiente. Lo mencionado anteriormente, muestra los procesos de *folding back*, con los cuales identificó características, similitudes y diferencias de los conceptos involucrados.

Por otro lado, se observó que los estudiantes realizan algunas acciones para abordar las preguntas de la entrevista, de manera que descubren criterios que posibilitan conexiones entre conceptos. Las observaciones realizadas sobre las respuestas de los estudiantes, dan cuenta entre otras cosas, de las acciones que llevó a cabo cada estudiante para resolver una situación planteada en la entrevista; dichas acciones estuvieron en correspondencia con acciones tales como reconocer, identificar y analizar, en el contexto de la teoría de Pirie y Kieren.

Por otro lado, al identificar las características y similitudes de un concepto, un estudiante efectúa distinciones matemáticas basadas en sus conocimientos primitivos, acción propia de estudiantes que razonan en el nivel 2 de comprensión. Asimismo, al analizar las características, similitudes y diferencias de un concepto o en una imagen del mismo, se posibilitó identificar elementos asociados a los conceptos involucrados en las preguntas y, posteriormente, los sustituyó por algunos que representan una solución acorde a la pregunta planteada, tal como se muestra en la Tabla 21.

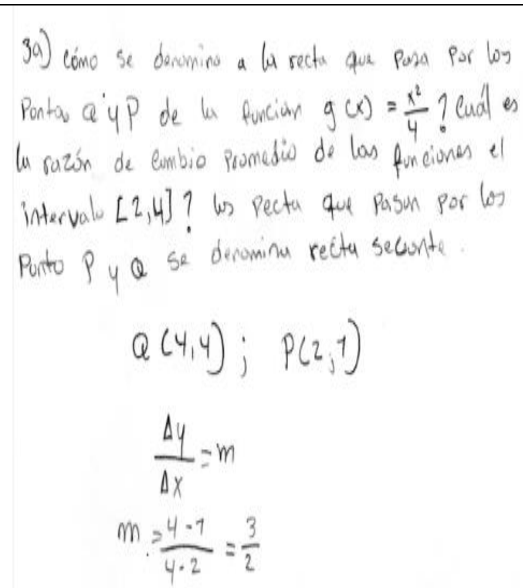
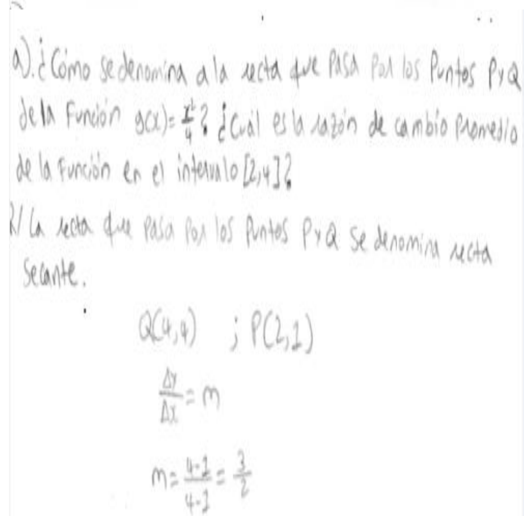
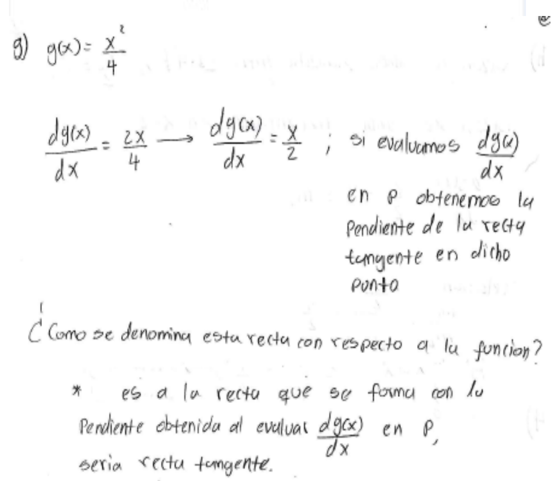
Tabla 21.

Procesos de comprensión.

Acción	Descripción	Pregunta	Respuesta
Ana Reconoce una razón de cambio promedio e instantánea	A través del proceso de *folding back* identifica criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con el concepto de pendiente.	1, literal a ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?	a) La razón de cambio esta dada por $R = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; si $y = mx + b$ $R = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$; así $R = \frac{mx_1 + b - mx_0 - b}{x_1 - x_0}$ $R = \frac{m(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = m$; por tanto $R = m$ esto implica que la relación ente una recta "y", y su razón de cambio promedio es total ya que se habla de la misma
Antonio Reconoce una razón de cambio promedio e instantánea	A través del proceso de *folding back* identifica criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con el concepto de pendiente.	1, literal a ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?	1) a) la Razón de cambio es: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; como $y = mx + b$ y $\Delta y = y_F - y_i$ como no conocemos y $\Delta x = x_F - x$ entonces $\frac{(mx_F - b) - (mx_i - b)}{x_F - x_I} = \frac{mx_F - \cancel{b} - mx_i + \cancel{b}}{x_F - x_i}$ $\Rightarrow$ Factorizando. $\frac{m\cancel{(x_F - x_0)}}{\cancel{(x_F - x_0)}} = m$

Diana Reconoce una razón de cambio promedio e instantánea	A través del proceso de *folding back* identifica criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con el concepto de pendiente.	1, literal a ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?	$Xf - Xf$ $(3,3)\ ;\ (6,6)$ $m = \frac{(6-3)}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$
Pedro Reconoce una razón de cambio promedio e instantánea	A través del proceso de *folding back* identifica criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con el concepto de pendiente.	1, literal a ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?	$X_f - X_i$ $(2,2)\ ;\ (5,5)$ $m = \frac{(5-2)}{(5-2)} = \frac{3}{3} = 1$
Ana Identifica el concepto de derivada para relacionarlo con la pendiente de una recta	Aplica el concepto de derivada como límite para relacionarlo con la pendiente de una función.	1, literal b ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto?	b) La derivada en cualquier punto para $f(x)=mx+b$ es $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} B = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} m = m$ Así pues, la relación entre $\frac{df(x)}{dx}$ y la pendiente en una recta es total

Antonio có Identifica el concepto de derivada para relacionarlo con la pendiente de una recta	Aplica el concepto de derivada como límite para relacionarlo con la pendiente de una función.	1, literal b ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto?	b) La derivada es cualquier punto se puede usar como el lim Δy cuando Δx→0 como $y=f(x)$ $\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=m$
Diana Identifica el concepto de derivada para relacionarlo con la pendiente de una recta	Aplica el concepto de derivada como límite para relacionarlo con la pendiente de una función.	1, literal b ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto?	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$ $f(x)=mx+b\,f'(x)=m$ $f'(1)=m$
Pedro Identifica el concepto de derivada para relacionarlo con la pendiente de una recta	Aplica el concepto de derivada como límite para relacionarlo con la pendiente de una función.	1, literal b ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto?	$\frac{dy}{dx}=m$ $\Rightarrow f(x)=mx+b\,f(x)=m$ $f(1)=m$
Ana Reconoce el concepto de razón de cambio promedio	Aplica un proceso algebraico para hallar la razón de cambio promedio.	3, literal a ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo [2,4]?	3) $g(x)=\frac{x^2}{4}$ a) recta secante $R=m=\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$; [2,4] $R=\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=\frac{\frac{4^2}{4}-\frac{2^2}{4}}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}\to$ razón de cambio promedio

Diana Reconoce el concepto de razón de cambio promedio	Aplica un proceso algebraico para hallar la razón de cambio promedio.	3, literal a ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo [2,4]?	 3a) cómo se denomina a la recta que pasa por los Puntos Q y P de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? Cuál es la razón de cambio promedio de las funciones el intervalo [2,4] ? la recta que pasan por los Punto P y Q se denomina recta secante. Q (4,4) ; P(2,1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ $m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$
Pedro Reconoce el concepto de razón de cambio promedio	Aplica un proceso algebraico para hallar la razón de cambio promedio.	3, literal a ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo [2,4]?	 a). ¿Cómo se denomina a la recta que PASA Por los Puntos P y Q de la Función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? ¿Cuál es la razón de cambio Promedio de la Función en el intervalo [2,4]? R/ La recta que pasa Por los Puntos P y Q Se denomina recta Secante. Q(4,4) ; P(2,1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ $m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$
Ana Analiza el concepto de derivada de una función para relacionarlo con su pendiente	Halla la derivada de la función y aplica punto $x = 2$	3, literal g Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función?	 g) $g(x) = \frac{x^2}{4}$ $\frac{dg(x)}{dx} = \frac{2x}{4} \longrightarrow \frac{dg(x)}{dx} = \frac{x}{2}$; si evaluamos $\frac{dg(x)}{dx}$ en P obtenemos la pendiente de la recta tangente en dicho punto ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función? * es a la recta que se forma con la pendiente obtenida al evaluar $\frac{dg(x)}{dx}$ en P, sería recta tangente.

Antonio Analiza el concepto de derivada de una función para relacionarlo con su pendiente	Halla la derivada de la función y aplica punto $x = 2$	3, literal g Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función?	g como $g(x) = \frac{x^2}{4}$ $g'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$ como $p = [2,1]$ $g(2) = \frac{2}{2} = 1$  Recta tangente
Diana Analiza el concepto de derivada de una función para relacionarlo con su pendiente	Halla la derivada de la función y aplica punto $x = 2$	3, literal g Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función?	los recta que pasan por los punto P y Q se denomina recta secante. Q(4,4) ; P(2,1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ $m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$
Pedro Analiza el concepto de derivada de una función para relacionarlo con su pendiente	Halla la derivada de la función y aplica punto $x = 2$	3, literal g Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función?	R/ La recta que pasa por los puntos P y Q se denomina recta secante. Q(4,4) ; P(2,1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ $m = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011)

4.4.2.2 *Evidenciar conceptos empleados por los estudiantes en procesos de resolución de una ecuación diferencial.*

El análisis del episodio 2 reveló que los estudiantes centraron su atención en algunos conceptos matemáticos con los que determinaron una respuesta. Los procesos fueron llevados a cabo, algunas veces aplicando expresiones algebraicas, y otras, haciendo uso de procedimientos rutinarios. Los procesos de comprensión abordados consideraron conceptos tales como: función, razón de cambio, razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, pendiente, derivada, aproximación, haz de rectas secantes y recta tangente; es de aclarar que, en cuanto al concepto de derivada, algunos estudiantes lo visualizaron desde la perspectiva de la razón de cambio instantánea, para luego relacionarlo con la pendiente de una recta tangente, como se muestra en las Tablas 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 28.

4.4.2.3. *Descripción de la evolución de la comprensión de los conceptos razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y derivada.*

El análisis de la información del episodio 2 permitió detallar, en el marco de los niveles de comprensión y de las complementariedades de la acción y la expresión, de qué manera evolucionó la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y derivada: la información se registró en las Tablas, 22, 23, 24, 25, 26, 27 y 28. En ellas se colocaron de manera horizontal los números de cada pregunta correspondiente al episodio 2. En la primera columna, el episodio realizado; en la segunda, el número de preguntas y el literal correspondiente; en la tercera, el concepto empleado; en las siguientes, los procesos realizados: algebraico, mecánico, de razonamiento (o analíticos) y gráfico; en las siguientes, las subcategorías que corresponden a niveles de la teoría y debajo de cada nivel, las subcategorías complementariedades de la acción (C-A) y de la expresión (C-E); en la última columna, el nivel de comprensión alcanzado por cada estudiante en cada ítem, en el cual se detalla si exhibe avance o no en la comprensión de los conceptos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y derivada.

La evolución de la comprensión en los estudiantes centró su análisis, en el marco de las complementariedades, observando primero la acción y luego la expresión, siendo esta última la de mayor exigencia, ya que requiere de más elaboración por parte del estudiante; cabe aclarar que en algunas ocasiones se dio solo una de las complementariedades y en otras ninguna. El cumplimiento de los descriptores propuestos para cada uno de los niveles de comprensión se ilustra en las Figuras 63, 64, 65, 66 y 67, 68, 29, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78.

4.4.2.4. Analizar el nivel de comprensión de los conceptos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y derivada.

Ana en la pregunta 1 literal a, muestra conocimiento primitivo correspondiente al nivel 1, dado que su respuesta cumple con los descriptores CP 1.1 y CP 1.2; así mismo, en el literal b, razona en el nivel 3 de comprensión dado que satisface los descriptores de complementariedad de la acción A 3.2 y de la expresión E 3.2; para el literal c, exhibe un razonamiento en el nivel de compresión 2, dado que su respuesta satisface los descriptores A 2.1 y E 2.1, en el literal d, solo cumple con el descriptor E 2.1, para los literales e y f, razona en un nivel 3 de comprensión, dado que satisface los descriptores A 3.1, E 3.1, A 3.5 y E 3.6. También, se puede afirmar que razona en el nivel 4, dado que satisface los descriptores A 4.5 y E 4.5. Además, es importante anotar que la estudiante realizó procesos de *folding back* que se ilustran en la Tabla 22 y la Figura 64.

Tabla 22.

Descripción del proceso de comprensión de Ana.

	Nombre			**Ana**												
Epi	Pre		Con	Procesos				Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)			C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
		A	Recta	A	M			CP1.1	CP1.2							CP
		B	Límite		M							A3.2	E3.2			N3
	1	C	Función	A		R				A2.1	E2.1					N2
		D	Pendiente	A		R				A2.1	E2.1					N2
		E	Pendiente	A		R						A3.1	E3.1			N3
		F	Pendiente	A		R						A3.1	E3.1			N3
2		A	Recta secante				G			A2.5	E2.5	A3.6	E3.6			N2-N3
		B	Punto			R				A2.5	E2.5					N2
		C	Aproximación			R				A2.6	E2.6					N2
	2	D	Rectas			R						A3.2	E3.2			N3
		E	Rectas			R						A3.5	E3.5			N3
		F	Rectas			R	G			A 2.5	E 2.5					N2
		A	Secante	A	M	R				A2.5	E2.5	A3.6	E3.6			N2-N3
		B	Infinito	A		R				A2.6	E2.6					N2
		C	Infinito			R				A2.5	E2.5					N2
	3	D	Recta			R						A3.2	E3.2			N3
		E	Variación			R						A3.5	E3.5			N3
		F	Recta tangente	A		R	G			A2.1	E2.1					N2
		G	Recta tangente	A		R						A3.6	E3.6			N3
		H	Razón de cambio	A		R								A4.5	E4.5	N4

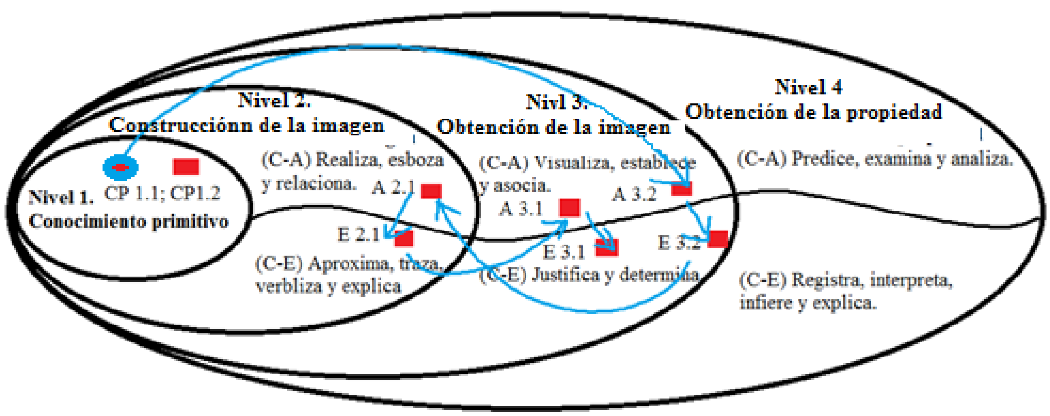
Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

Aclaración Simbólica: *Alg: Algebraica; Mec: Mecánico; Raz: Razonamiento; Grá: Gráfico; Obs: Observación; Pre: Pregunta; Epi: Episodio; N1: Nivel uno; N2: Nivel dos; N3: Nivel tres; N4: Nivel cuatro; N2-N3: Avance del nivel dos al nivel tres.*

Cabe aclarar que en la Figura 64, la línea azul indica el posible cumplimiento de los descriptores propuestos para los conceptos de razón de cambio y derivada, proceso que inició en el conocimiento primitivo, avanzando al nivel tres y razonando sobre el concepto de derivada, luego redobla al nivel 2 retomando el concepto de razón de cambio y, finalmente, avanza al nivel 3, exhibiendo comprensión del concepto de razón de cambio. Lo anterior, pone de manifiesto la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos propuesta por Pirie y Kieren (1994) en su definición.

Figura 64.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Ana al responder la pregunta 1.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 22.

Aclaración simbólica de la Figura 64.

Los símbolos a través de los cuales se indicará el cumplimiento de los descriptores en el recorrido por los niveles, así como la correspondencia entre las complementariedades de la acción y la expresión, se muestran a continuación:

 Recorrido por los niveles de un descriptor hacia otro o salto entre dos niveles.

 Correspondencia entre las complementariedades de la acción y la expresión.

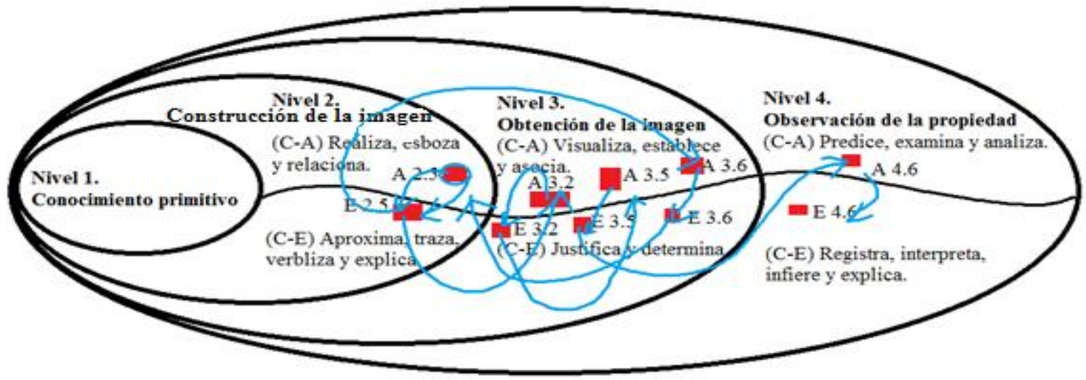
Descriptores empleados en la Figura 64

- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como la pendiente de una función en un punto.

En la Figura 65 se muestra un esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Ana al responder la pregunta 2 y en la Figura 66 se muestra el esquema al responder la pregunta 3. Se puede observar allí el proceso de *folding back* realizado y el cumplimiento de los descriptores; los puntos rojos son los diferentes descriptores que ella cumple. Se aprecia entonces, su crecimiento a través de los niveles hasta lograr un nivel 4 de comprensión.

Figura 65.

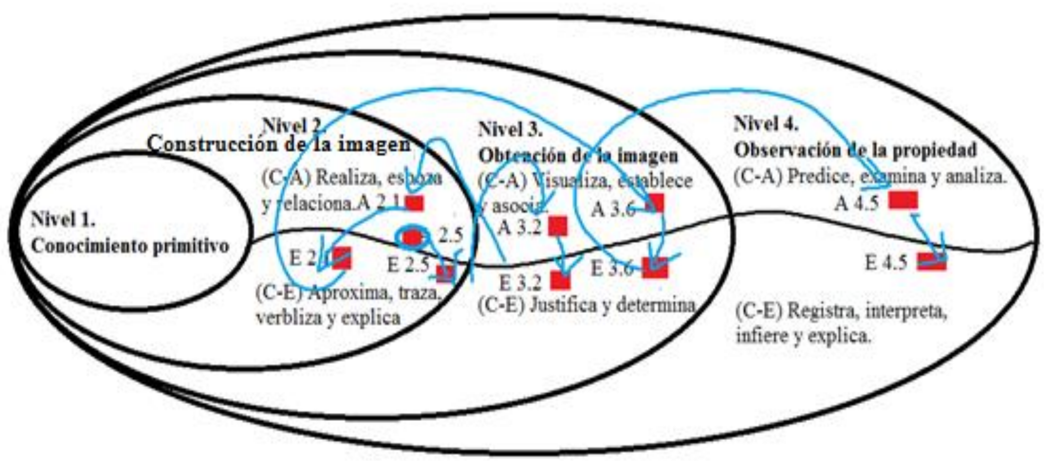
Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Ana al responder la pregunta 2.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 22.

Figura 66.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Ana al responder la pregunta 3.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 22.

Las respuestas de Antonio a la pregunta 1, por su parte, evidencian un nivel 1 de comprensión, cumpliendo los descriptores CP 1.1 y CP 1.2, así mismo, en el literal b, razonó en el nivel 3 de comprensión, dado que satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 3.2 y de la expresión E 3.2 con respecto al concepto de derivada; en el literal c, razona en un nivel de compresión 2, dado que su respuesta satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 2.1 y de la expresión E 2.1; en el literal d, cumple con el descriptor de la complementariedad de la acción A 2.1 y de la expresión E 2.1; para el literal e y f, razona en el nivel 3 de comprensión, dado que satisface los descriptores A 3.1 y E 3.1 relacionados con el concepto de razón de cambio.

Además, de acuerdo a las respuestas dadas en la pregunta 2, literales a y f, el estudiante no responde; en la respuesta a la pregunta b, se observa que cumple con el descriptor A 2.5 y E 2.5, además, satisface los descriptores A 3.5 y E 3.5 del nivel 3; la respuesta del literal c, evidencia que cumple con los descriptores A 2.6 y E 2.6; para el literal d, Antonio razona en el nivel 3 de comprensión al cumplir con los descriptores A 3.2, A 3.6, E 3.2 y E 3.6; la respuesta a la pregunta del literal e, evidenció una relación al identificar la recta que se puede trazar cuando los puntos coinciden, por lo que satisface los descriptores A 3.2, y al sustentar que posiblemente allí se puede observar la derivada de la función en ese punto, declara que coincide con la pendiente de la recta tangente, cumpliendo con el descriptor E 3.2.

Antonio no responde a los literal c y d de la pregunta 3; para el literal a, razona en un nivel de comprensión 3 al satisfacer los descriptores para la complementariedad de la acción A 3.6 y luego para la expresión E3.6; en el literal b, satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 2.6 y posteriormente de la expresión E 2.6; cabe aclarar que los descriptores satisfechos hasta el momento están relacionados con el concepto de razón de cambio; para el literal e, mostró un avance hacia el nivel 3 de comprensión sobre el concepto de derivada, cumpliendo con los descriptores A 3.2 para la acción y E 3.2 para la expresión; acto seguido, en el literal f, exhibe un redoblamiento al nivel 2 de comprensión dado que satisface los descriptores A 2.1 para la acción y E 2.1 para la expresión y, en el literal g, manifiesta un avance hacia el nivel 3 ya que satisface los descriptores A 3.5 y E 3.5 como se ilustra en la Tabla 23 y en la Figura 67.

Tabla 23.

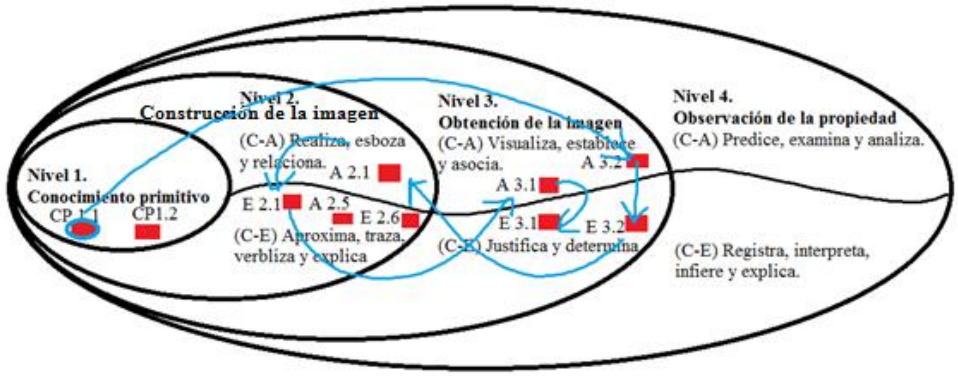
Avance de la comprensión y relación de conceptos involucrados por parte de Antonio.

Epi	Pre	Nombre		Antonio													
			Concepto	Procesos				Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)			C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
2	1	A	Razón de cambio		M			CP1.1	CP1.2							CP
		B	Límite y derivada			R						A3.2	E3.2			N3
		C	Razón de cambio promedio			R				A2.1	E2.1					N2
		D	Función y derivada	A		R				A2.1	E2.1					N2
		E	Derivada		M	R						A3.1	E3.1			N3
		F	Función				G					A3.1	E3.1			N3
	2	A	Puntos infinitos			R				A2.5	E2.5	A3.6	E3.6			N2-N3
		B	Puntos infinitos			R				A2.5	E2.5					N2
		C	Aproximación			R				A2.6	E2.6					N2
		D	Rectas			R						A3.2	E3.2			N3
		E	Rectas			R						A3.5	E3.5			N3
		F	Rectas			R	G									
	3	A	Razón de cambio promedio	A	M	R						A3.6	E3.6			N3
		B	Infinito			R				A2.6	E2.6					N2
		C	Aproximación			R				A2.5	E 2.5					N2
		D	Recta			R				A2.5	E 2.5	A3.2	E3.2			N3
		E	Razón de cambio, variación	A		R	G					A3.5	E3.5			N2-N3
		F	Recta tangente	A		R	G			A2.1	E2.1					N2
		G	Recta tangente	A		R						A3.5	E3.5			N3
		H														

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada

Figura 67.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Antonio al responder la pregunta 1.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 23.

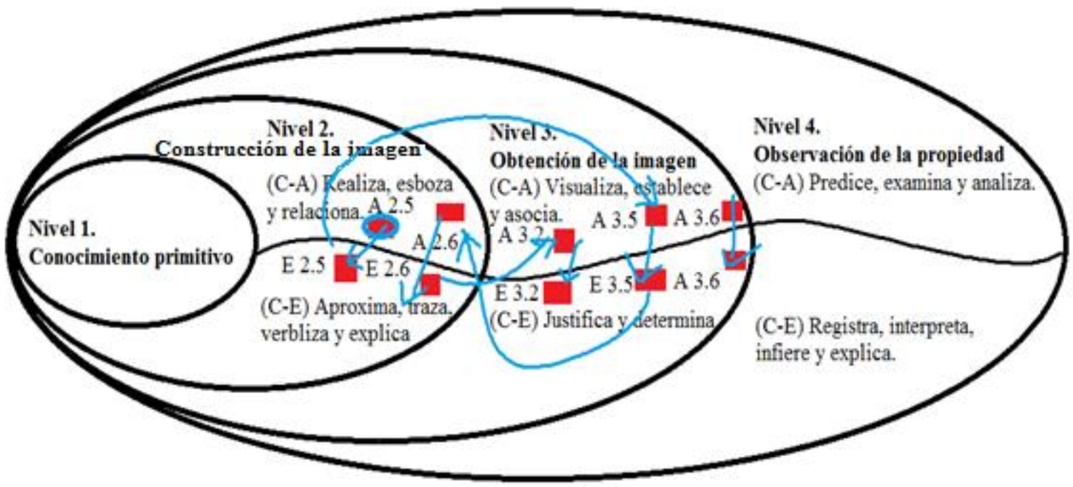
Descriptores empleados en la Figura 67

- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio
- instantánea.
- E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
- E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.

Las Figuras 68 y 69 ilustran un esquema aproximado del proceso exhibido por Antonio entre los niveles de comprensión, al responder respectivamente las preguntas 2 y 3, considerando el proceso de *folding back* y el cumplimiento de cada uno de los descriptores.

Figura 68.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Antonio al responder la pregunta 2.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 23.

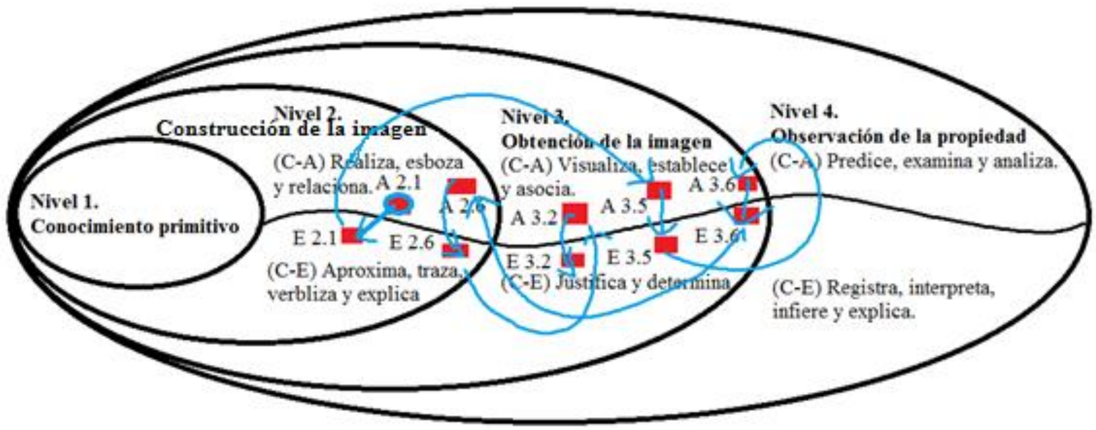
Descriptores empleados en la Figura 68.

- A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
- E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
- A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
- E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
- A 3.5. Asocia los trozos o gráficos a una recta secante o una tangente a una curva.
- E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
- A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.

- E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.

Figura 69.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Antonio al responder la pregunta 3.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 23.

Descriptores empleados en la Figura 69.

- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio
- instantánea.
- A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
- E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
- A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
- E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
- A 3.5. Asocia los trozos o gráficos a una recta secante o una tangente a una curva.
- E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
- A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
- E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.

Para el caso de Diana, al responder la pregunta 1 se observa que cumple con los descriptores CP 1.1 y CP 1.2; no responde a la pregunta 2 en sus literales a y f, mientras que en la pregunta b, se observó un progreso en la comprensión del concepto de razón de cambio del nivel 2, cumpliendo los descriptores A 2.5, A 2.6, E 2.5, E 2.6 y E 2.5; al responder la pregunta 3, se observa que cumple con los descriptores del nivel 3, A 3.5, E 3.5 y A 3.6, lo que se ilustra en la Tabla 24. La Figura 70 ilustra respectivamente el esquema del proceso de comprensión exhibido por Diana de acuerdo a sus respuestas.

Tabla 24.

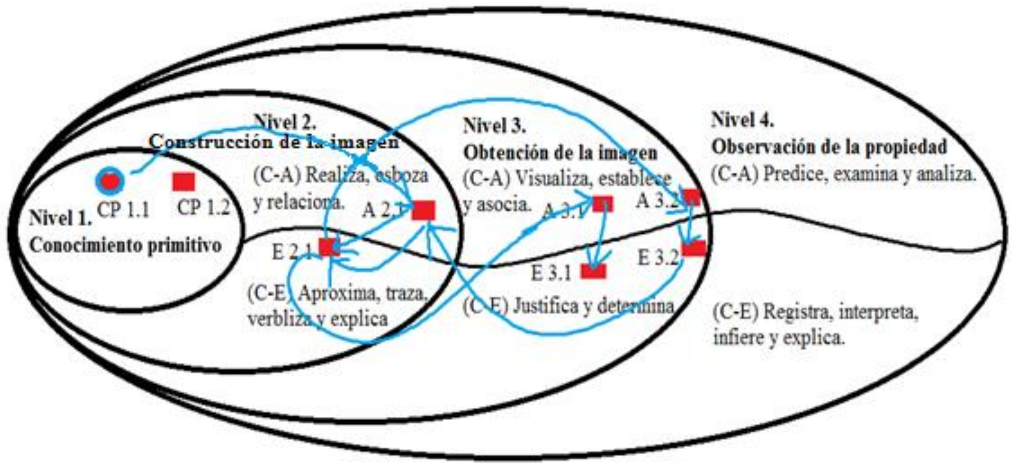
***Avance de la comprensión y relación de conceptos involucrados por Diana*.**

Nombre				Diana												
	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)			C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
		A	Razón de cambio	A	M			CP1.1	CP1.2							CP
		B	Límite y derivada	A	M	R						A3.1	E3.1			N3
		C	Pendiente		M	R				A2.1	E2.1					N2
Epi	1	D	Pendiente			R				A2.1	E2.1					N2
		E	Derivada			R						A3.1	E3.1			N3
		F	Función				G					A3.1	E3.1			N3
		A	Recta secante			R				A2.5	E 2.5					N2
		B	Puntos infinitos			R				A2.5	E 2.5	A 3.5	E 3.5			N2-N3
		C	Aproximación			R				A 2.6	E2.6					N2
		D	Rectas			R	G					A3.6	E 3.6			N3
	2	E	Rectas			R				A 2.5	E 2.5					N2
		F	Rectas			R										
		A	Razón de cambio promedio	A	M	R				A 2.2	E 2.2	A3.6	E 3.6			N3-N3
2		B	Infinito			R				A2.6	E 2.6					N2
		C	Aproximación			R				A2.6	E 2.6					N2
		D	Recta			R						A3.1	E3.1			N3
		E	Razón de cambio, variación	A		R	G					A3.1	E3.1			N3
		F	Recta tangente	A		R	G			A2.1	E 2.1					N2
	3	G	Recta tangente	A		R	G					A3.6	E3.6			N3
		H												A .4.5	E 4.5	N4

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011)

Figura 70.

Caracterización en la pregunta 1 del recorrido de los descriptores y del proceso de folding back relacionado con los conceptos razón de cambio y derivada, de Diana.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 24.

Descriptores empleados en la Figura 70.

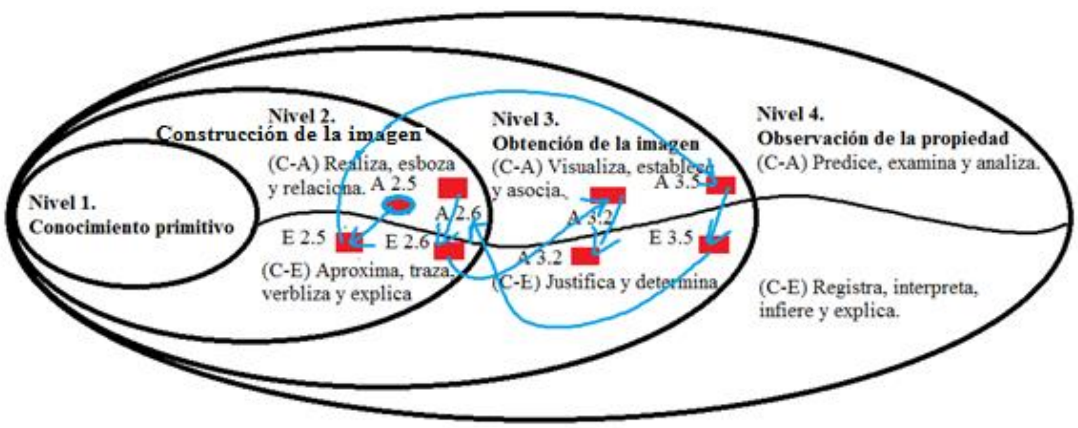
- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio
- instantánea.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.

La Figura 71, ilustra un proceso de *folding back* en el cual se señala un posible recorrido realizado por los descriptores entre las categorías y subcategorías de la pregunta 2; en este contexto, el recorrido inició con la comprensión del concepto de razón de cambio, exhibiendo un avance hacia el nivel 3. También presentó un proceso de redoblamiento al nivel, y luego un avance hacia el nivel 3, en el que la estudiante manifestó comprensión del concepto de derivada.

Con el panorama anterior, se observó un proceso de ida y retorno en el razonamiento de la estudiante entre los niveles de comprensión relacionados con los conceptos razón de cambio y derivada, evidenciando un *folding back,* lo que le permitió a la estudiante avanzar en la comprensión del concepto de razón de cambio y derivada.

Figura 71.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Diana a la pregunta 2.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 24.

Descriptores empleados en la Figura 71.

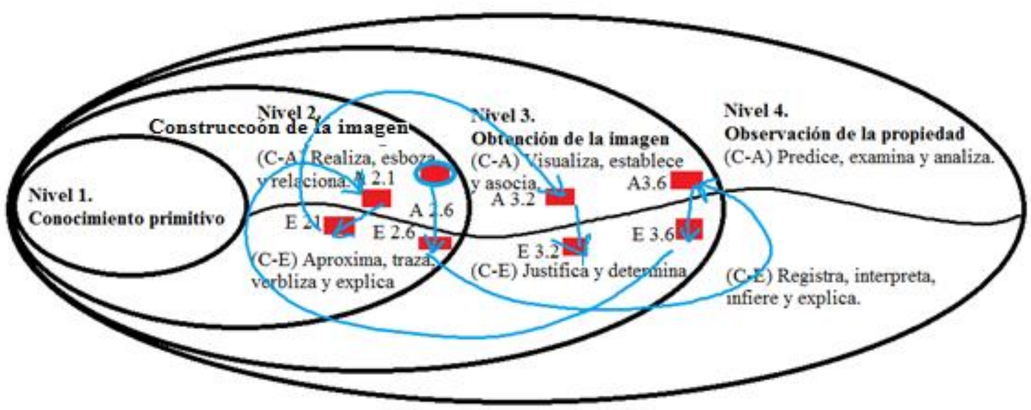
- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.

- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio
- instantánea.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
- E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.

La Figura 72 da cuenta del proceso de *folding back* realizado por la estudiante durante su razonamiento, asimismo, muestra un posible recorrido de los descriptores con la solución a cada ítem al desarrollar la pregunta 3; en este sentido, el recorrido inició con la comprensión del concepto de razón de cambio en el nivel 2, posteriormente, redobló a un nivel interno para así avanzar hacia el nivel 3 en relación con el concepto de razón de cambio, después redobló al nivel 2 en relación con el concepto en cuestión y, finalmente, mostró un avance hacia el nivel 3, exhibiendo allí comprensión del concepto de derivada.

Figura 72.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por de Diana en la pregunta 3.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 24.

Descriptores empleados en la Figura 72.

- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.

- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
- E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
- A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
- E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.

Por otra parte, con respecto a las respuestas de Juan a la pregunta 1, en su literal a, cumple con los descriptores CP 1.1 y CP 1.2; para el literal b, satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 3.1 y de la expresión E 3.1; para el literal c, satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 2.1 y de la expresión E 2.1; para el literal d, cumple con el descriptor para la complementariedad de la acción A 2.1 y de la expresión E 2.1, para los literal e y f, Juan razona en el nivel 3 de comprensión, debido a que satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 3.1 y de la expresión E 3.1.

En la pregunta 2 en los literales a y f no se evidenciaron respuestas, mientras que en b, se observó un avance en la comprensión ya que cumple con los descriptores A 2.5 para la acción y E 2.5 para la expresión; en el nivel 3 cumple con los descriptores A 3.5 y E 3.5; se observa en la respuesta c que Juan razona en el nivel 2 porque satisface los descriptores A 2.6 para la acción y E 2.6; para el literal d, se puede afirmar que Juan se encuentra en el nivel 3 de comprensión al cumplir con los descriptores A 3.6 y E 3.6. Es importante anotar que las respuestas de Juan para la pregunta 3 en sus literal c y d, no permitieron evidenciar respuestas, dado que no logró establecer una relación entre sus conocimientos para emitir una respuesta, por lo tanto, tampoco manifestó comprensión acerca del concepto de derivada. Lo anterior se ilustra en la Tabla 25.

Tabla 25.

Avance de la comprensión y relación de conceptos involucrados por Juan.

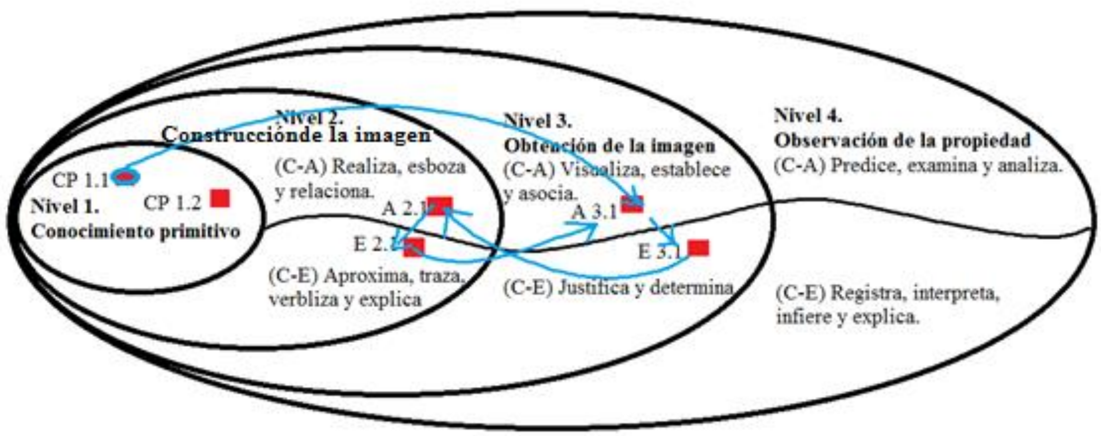
			Nombre						**Juan**							
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)			C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
2	1	A	Razón de cambio	A	M			CP1.1	CP1.2							CP
		B	Límite y derivada	A	M	R						A3.1	E3.1			N3
		C	Pendiente		M	R				A 2.2	E 2.2					N2
		D	Pendiente			R						A 3.1	E 3.1	A4.5	E 4.5	N3-N4
		E	Derivada			R										
		F	Función				G									
	2	A	Recta secante			R										
		B	Puntos infinitos			R										
		C	Aproximación			R				A 2.2	E 2.2	A 3.2	E 3.2			N2
		D	Rectas			R	G			A 2.1	E 2.1					N3
		E	Rectas			R										
		F	Rectas			R						A 3.1	E 3.1			N3
	3	A	Razón de cambio promedio	A	M	R										
		B	Infinito			R				A 2.6						N2
		C	Aproximación			R										
		D	Recta			R				A 2.3						N2
		E	Razón de cambio, variación	A		R	G									
		F	Recta tangente	A		R	G									
		G	Recta tangente	A		R	G									
		H														

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011)

Las Figuras 73, 74 y 75 son esquemas aproximadas del proceso de comprensión exhibido por Juan acorde a las preguntas 1, 2 y 3, respectivamente.

Figura 73.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por de Juan acorde a la pregunta 1.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 25.

Descriptores empleados en la Figura 73.

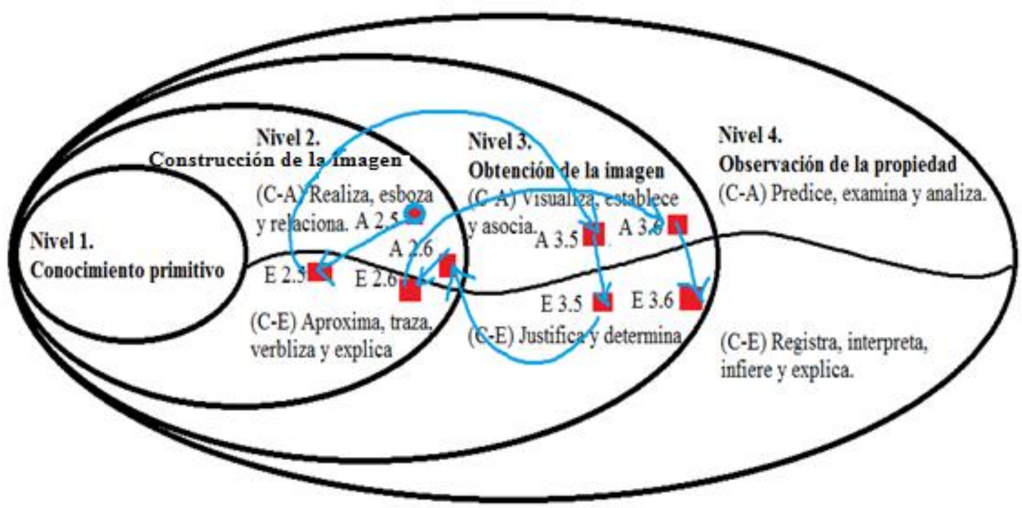
- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

La Figura 74, ilustra un proceso de *folding back* registrado en la pregunta 3, en la cual se señala un posible recorrido de comprensión entre las categorías y subcategorías al desarrollar cada uno de los ítems propuestos; en este contexto, el recorrido inició con la comprensión del concepto razón de cambio en el nivel 2, posteriormente, mostró un avance del nivel 2 al nivel 3, exhibiendo comprensión del concepto relacionado anteriormente. Luego, experimentó un proceso de redoblamiento entre el nivel 2 y 3 en relación con el mismo concepto.

Con el escenario anterior, se observó un proceso de ida y retorno en el razonamiento del estudiante entre los niveles de comprensión y las complementariedades de la acción y la expresión, en el cual el concepto de razón de cambio se evidenció en los tres primeros niveles de comprensión, lo que reflejó un *folding back.* Así, el estudiante alcanzó comprensión del concepto de razón de cambio en los niveles 1, 2 y 3, aclarando que el proceso realizado por el estudiante no dio cuenta sobre la comprensión del concepto de derivada.

Figura 74.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Juan acorde a la pregunta 2.



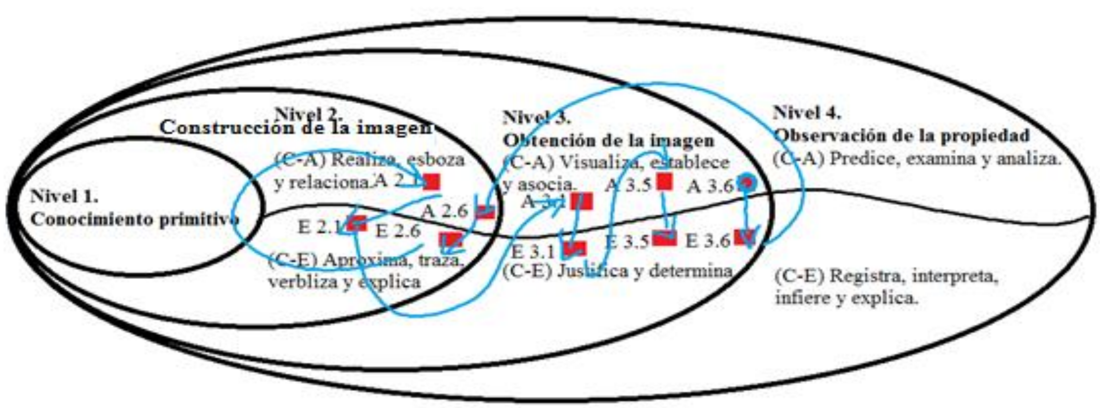
Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 25.

Descriptores empleados en la Figura 74.

- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
- E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
- A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
- 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

En este sentido, la Figura 75 ilustra un esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Juan.

Figura 75.
Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Juan acorde a la pregunta 3.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 25.

- **Descriptores empleados en la Figura 75.**

- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
- E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

En el caso de Pedro, su respuesta al literal a de la pregunta 1 evidencia que cumple con los descriptores CP 1.1 y CP 1.2; las respuestas de los literal b y c, evidencian que razona en un nivel 2 de comprensión, dado que satisface los descriptores A 2.1, E 2.1, A 2,5 y E 2.5, y en la respuesta a los literales e y f, manifiesta razonamiento en el nivel 3 de comprensión, dado que satisface los descriptores para la complementariedad de la acción A 3.6 y E 3.6.

Además, el análisis de las respuestas a la pregunta 2 permite inferir que: para el literal a, satisface los descriptores A 2.1, E 2. 1, A 2.5, E 2.5, A 3.5 y E 3.5; en los literales b, c y e, se evidencia que se satisfacen los descriptores A 2.6 y E 2.6; el literal c y d no los responde, y el literal f, evidencia que satisface los descriptores para la acción A 3.5 y la expresión E 3.5.

En el mismo sentido, Pedro para la pregunta 3 evidencia en el literal a un avance en la comprensión del nivel 2 al 3, ya que satisface los descriptores A 2.5, E 2.5, A 2.6, E 2.6, A3.6, E3.6, A 3.5 y E 3.5. Cabe anotar que no se registró respuesta a la pregunta del literal h y no se evidencia comprensión del concepto de derivada.

Tabla 26.

Avance de la comprensión y relación de conceptos involucrados por Pedro.

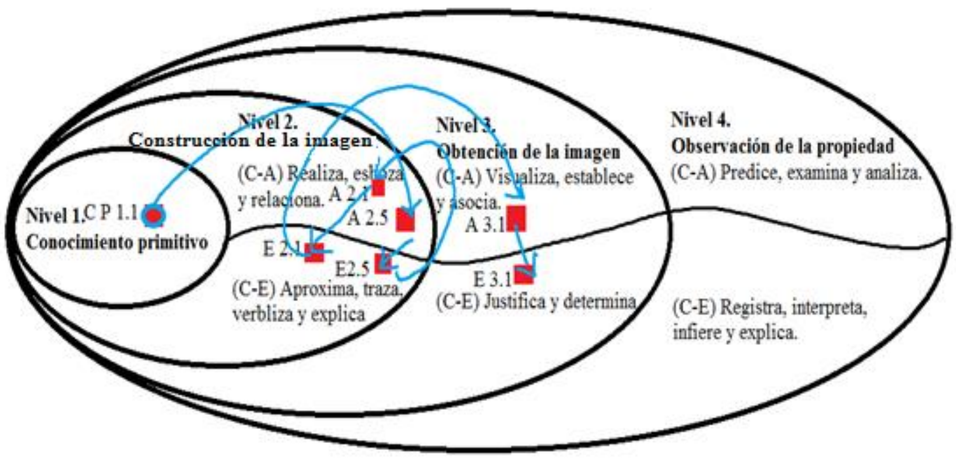
Nombre				Pedro												
				Procesos				Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
	Pre		Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)			C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
		A	Razón de cambio	A	M			CP1.1	CP1.2							CP
		B	Función	A	M	R				A 2.5	E 2.5					N2
		C	Pendiente			R				A 2.1	E 21					N2
Epi		D	Pendiente			R				A 2.1						N2
	1	E	Recta tangente			R						A 3.6	E 3.6			N3
		F	Función				G					A 3.6	E 3.6			N3
		A	Recta secante			R				A 2.5	E 2.5					N2
		B	Puntos infinitos			R				A 2.6	E 2.6					N2
		C	Aproximación			R				A 2.6	E 2.6					N2
		D	Rectas			R	G					A 3.6	E3.6			N3
	2	E	Rectas			R						A 3.5	E3.5			N3
		F	Rectas			R						A 3.5	E3.5			N3
		A	Razón de cambio promedio	A	M	R				A 2.5	E 2.5	A 3.6	E 3.6			N2-N3
2		B	Infinito			R				A 2.6	E 2.6					N2
		C	Aproximación			R				A 2.6	E 2.6					N2
		D	Recta			R				A 2.5	E 2.5					N2
		E	Razón de cambio, variación	A		R	G					A 3.5	E3.5			N3
		F	Recta tangente	A		R	G					A 3.6	E 3.6			N3
	3	G	Recta tangente	A		R	G					A 3.6	E 3.6			N3
		H														

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011)

La Figura 76, 77 y 78 ilustran un esquema de comprensión exhibido por Pedro acorde a las preguntas 1, 2 y 3, respectivamente. Cabe anotar que, de acuerdo a sus respuestas, no se logró evidenciar comprensión del concepto de derivada, siendo esta una de las dificultades manifestadas desde el episodio 1.

Figura 76.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por de Pedro acorde a la pregunta 1.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 26.

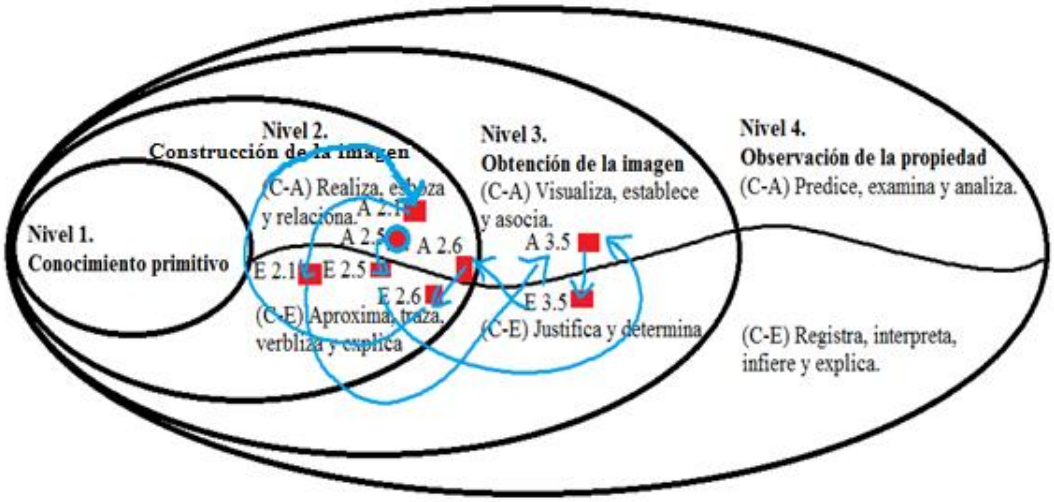
Descriptores empleados en la Figura 76.

- CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
- CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
- A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
- E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
- A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
- E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.

– A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
– E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.

Figura 77.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por de Pedro acorde a la pregunta 2.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 26.

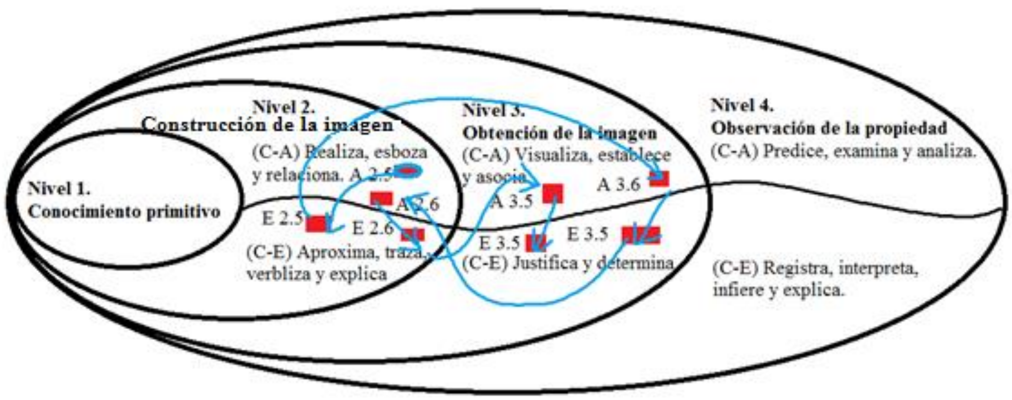
Descriptores empleados en la Figura 77.

– A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
– E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
– A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
– E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
– A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
– E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
– A 3.5. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.

– E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.

Figura 78.

Esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por de Pedro acorde a la pregunta 3.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 26.

Descriptores empleados en la Figura 78.

– A 2.5. Realiza escritos, trozos o gráficos que permitan diferenciar una recta secante de una tangente en una curva.
– E 2.5. Describe diferencias entre trozos de rectas secantes y de rectas tangentes.
– A 2.6. Esboza qué cantidad de puntos existen entre dos extremos sobre una curva.
– E 2.6. Describe qué tipo de aproximación existe entre dos puntos sobre una curva.
– A 3.5. Asocia los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
– E 3.5. Justifica los trozos de una recta secante o una tangente a una curva.
– A 3.6. Relaciona los puntos sobre una curva entre dos extremos con rectas secantes o tangentes.
– E 3.6. Determina una razón de cambio promedio o instantánea.

De acuerdo al análisis anterior, los procesos de *folding back* que emergieron en el transcurso de las respuestas de los estudiantes, permitieron evidenciar las relaciones establecidas por los estudiantes entre los conceptos involucrados. Así que se observó, por un lado, que en el episodio 2, los estudiantes Ana, Antonio y Diana evidenciaron relaciones entre los conceptos razón de cambio, derivada y el límite del haz de secantes, por otro, comprendieron las respectivas expresiones algebraicas. Luego, lograron visualizar, la razón de cambio promedio como la pendiente de una recta secante y la razón de cambio instantánea como la pendiente de la recta tangente a una curva, sin embargo, Juan y Pedro no lograron establecer relaciones de tipo algebraico y geométrico con el concepto de derivada.

Cabe anotar que los estudiantes presentan dificultades para exhibir una comprensión de las expresiones formales de los conceptos matemáticos en cuestión, y es por esto que hay un escaso o nulo cumplimiento de los descriptores relacionados con la complementariedad de la expresión. El cumplimiento de estos descriptores evidenciaría un avanzado crecimiento en el proceso de comprensión en cada uno de los conceptos involucrados en los respectivos niveles.

4.4.3. Análisis episodio 3 relacionado con el concepto de antiderivada

El episodio 3 en la entrevista está conformado por las preguntas 4 y 5, las cuales surgen del refinamiento del episodio 1, para el que se tuvo en cuenta las sugerencias de los estudiantes, observaciones de los investigadores y preguntas que surgieron en el desarrollo del episodio 1. A través de estas preguntas, se analizó la comprensión del concepto de antiderivada. La ejecución se desarrolló en aproximadamente seis horas, las cuales se distribuyeron así: dos horas para preparar el ambiente y condiciones requeridas para la misma, dos horas para el desarrollo de la entrevista y dos horas para la socialización de las respuestas de los estudiantes.

La conformación de las preguntas en la entrevista es la siguiente: la pregunta 4 propone una componente visual geométrica para razonar sobre dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, las cuales se ilustran en la Figura 79, a su vez, se compone por los ítems a, b y c para los cuales se formularon los siguientes descriptores en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión bajo el rótulo de A 2.3; A 3.3; E 2.3 y E 3.3, de la siguiente manera:

A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.

E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
E 3.3. Determina la antiderivada de una región limitada por funciones en un intervalo.

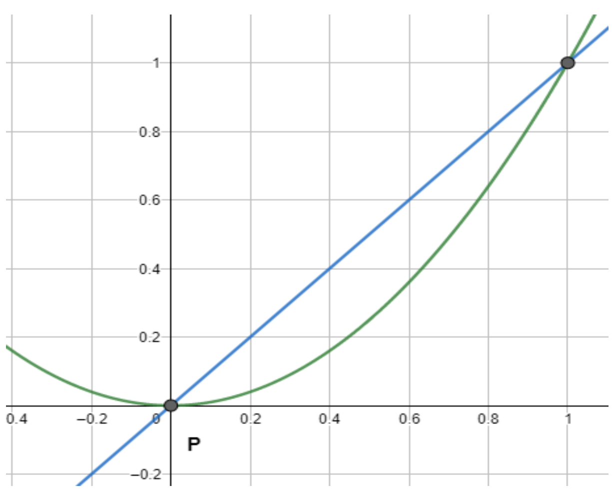
A continuación, se presenta un análisis de la pregunta en cuestión.

Después de realizar la entrevista a los estudiantes, se procedió con el análisis de las respuestas en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, apoyados en el cumplimiento de los descriptores, los cuales darán cuenta del tipo de comprensión, recorrido por los niveles y los procesos de *folding back* realizados. Posteriormente, se realizó un análisis retrospectivo que permitió indagar por la ruta conceptual utilizada por los estudiantes para lograr una comprensión de dicho concepto.

Figura 79.

Componente visual geométrica de la función lineal y la parábola en la pregunta 4.

$$\boldsymbol{f(x) = x \text{ y } g(x) = x^2}$$



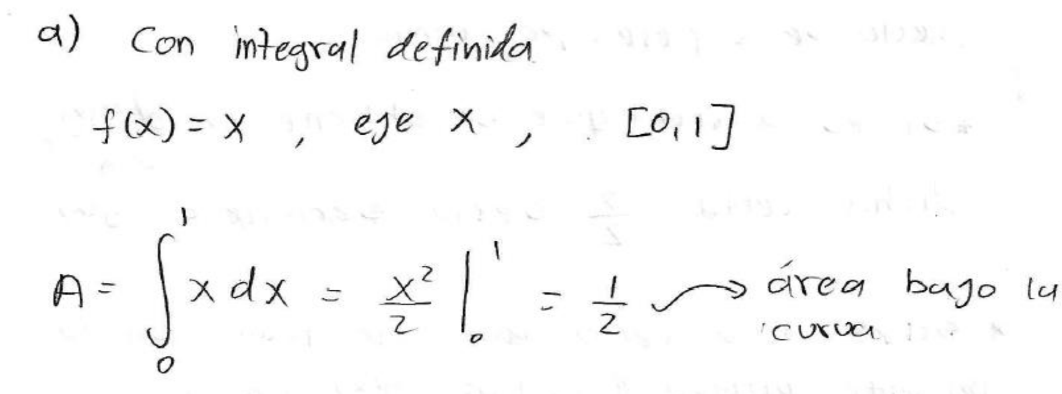
Fuente: Creación propia, registro en la entrevista a los estudiantes.

En este contexto, la pregunta 4 en su literal a, ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intervalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área?, permitió que Ana exhibiera un razonamiento en el cual realizan distinciones matemáticas basadas en sus conocimientos primitivos, que permiten explicitar una imagen y el proceso mediante el cual halló el área de la región limitada por la función y el intervalo en cuestión.

Se observó que la estudiante rastrea, examina e identifica el respectivo conocimiento que le permita relacionar la gráfica suministrada con el concepto de antiderivada; específicamente, Ana satisface los descriptores A 2.3, E 2.3, A 3.3 y E 3.3, así que esto evidencia un *folding back* para asociar la región limitada por una función en un intervalo con la correspondiente antiderivada. La Figura 80 ilustra la respuesta de Ana.

Figura 80.

Evidencia del registro de Ana, respuesta de la pregunta 4 literal a.

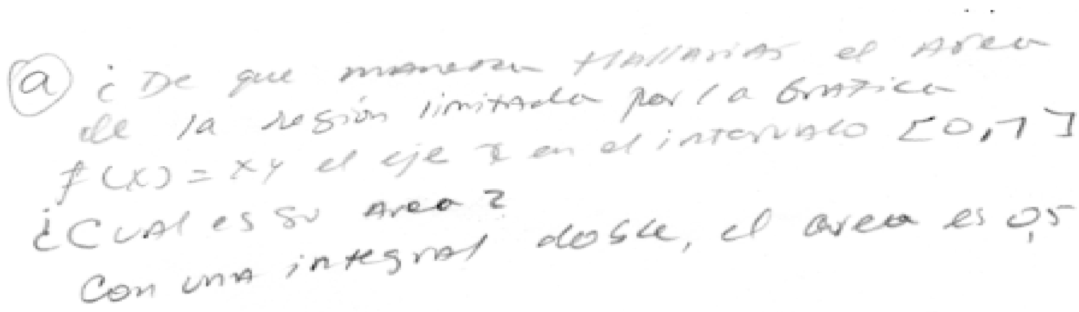


Fuente: Registro de la estudiante Ana, 2019.

Al respecto de la misma pregunta, Antonio manifiesta que el área se puede hallar mediante una integral doble, para lo cual expresa el valor numérico de la misma, sin ninguna expresión algebraica o proceso que lo respalde. Se observa entonces que su respuesta no satisface los descriptores A 3.3, A 2.3, A 3.3 E 2.3 ni E 3.3, por lo tanto, no avanzó del nivel 2 al nivel 3 de comprensión. La Figura 81 ilustra la respuesta de Antonio.

Figura 81.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 4 literal a.



(a) ¿De que manera hallarias el area de la región limitada por la grafica
f(x) = x y el eje x en el intervalo [0,1]
¿Cual es su area?
Con una integral doble, el area es 0,5

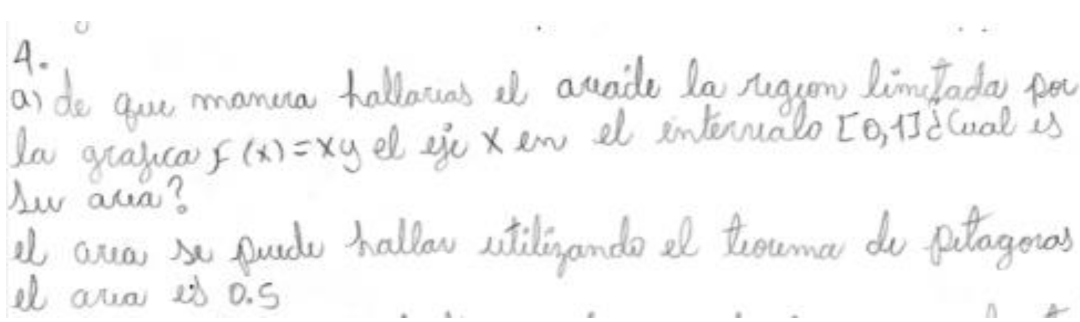
Fuente: Registro del estudiante Antonio, 2019.

Juan, por su parte, a través de un proceso de *folding back*, relacionó el área que está debajo de la función con el área de la figura formada entre la función en el intervalo, la cual es de forma triangular; el estudiante manifestó que se puede equiparar el área del triángulo con el área de la función delimitada por el intervalo, por lo que deduce que el valor asignado al área del triángulo es la misma que el área debajo de la función, determinando así un valor numérico.

A la luz de las complementariedades, Juan cumple con el descriptor A 2.3, sin embargo, se pone de manifiesto que lo pensado y lo expresado suscitan diferencias significativas. En particular, el estudiante logró relacionar la situación planteada con el área de una región bajo una curva, pero su proceso de razonamiento no coincide con la respuesta brindada, de modo que se puede inferir que su comprensión se acerca al concepto de antiderivada como el área bajo la curva, sin embargo, él no exhibe comprensión a la luz de la complementariedad de la expresión. La Figura 82 ilustra su respuesta.

Figura 82.

Evidencia del registro de Juan, respuesta la pregunta 4a.



4.
a) de que manera hallarias el area de la region limitada por
la grafica f(x)=xy el eje X en el interrvalo [0,1] ¿Cual es
su area?
el area se puede hallar utilizando el teorema de pitagoras
el area es 0.5

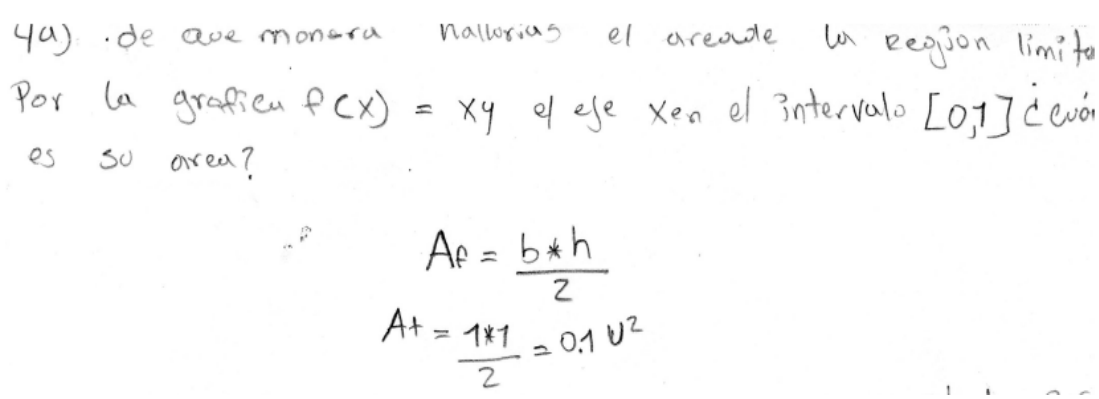
Fuente: Registro del estudiante Juan 2019.

Por su parte, Diana y Pedro exhibieron un proceso de *folding back* que les permitió relacionar el área de un triángulo con el área de la región determinada por la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$. Esta relación la establecieron a través de la expresión matemática $A_T = \frac{b*h}{2}$, relacionada con el área de un triángulo, la cual posibilitó hallar el valor correspondiente del área en mención limitada por la función en el intervalo, cumpliendo con el descriptor A 2.3, es decir, exhibiendo razonamiento en el nivel 2 de comprensión.

En este sentido, hallaron el valor de la antiderivada, sin asociarlo conceptualmente a este, sin embargo, ellos satisfacen el descriptor E 3.3, es decir, razonan en el marco de la acción en el nivel 2 y a la luz de la expresión en el nivel 3. La Figura 83 ilustra las respuestas de Diana y Pedro.

Figura 83.

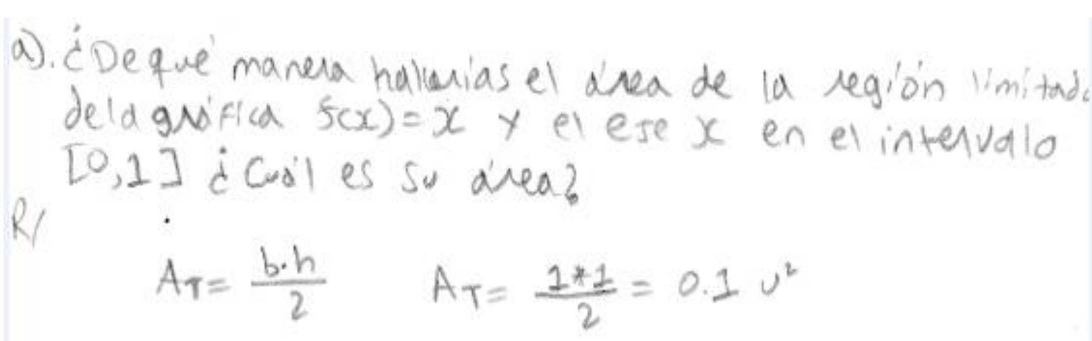
Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 4 literal a.


4a) .de que manera hallarias el area de la region limita por la grafica f(x) = x y el eje x en el intervalo [0,1] ¿cuál es su area?

$$A_T = \frac{b*h}{2}$$

$$A_T = \frac{1*1}{2} = 0.1\ U^2$$

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 4 literal a.


a). ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada de la gráfica f(x) = x y el eje x en el intervalo [0,1] ¿Cuál es su área?

R/

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A_T = \frac{1*1}{2} = 0.1\ U^2$$

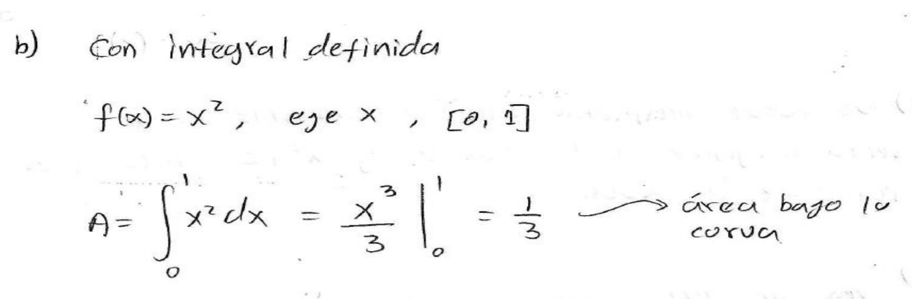
Fuente: Registro de los estudiantes Diana y Pedro, 2019.

Con respecto a la pregunta 4 en su literal b, ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la función $g(x) = x^2$ y el eje x en el intevalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área? Ana realiza un proceso de *folding back*, para hallar una técnica o procedimiento que le permita determinar el área de la región limitada por la función y el intervalo mencionados anteriormente, acorde con la situación planteada. Este procedimiento realizado por ella involucra la expresión matemática $A = \int_0^1 x^2 dx$, que está estrechamente relacionada con el descriptor A 2.3, además, se observó que asoció el área de la región limitada por la función en el intervalo, con el valor determinado por la antiderivada; este hecho evidencia que satisface los descriptores E 2.3, A 3.3 y E 3.3. La Figura 84 ilustra su respuesta.

Se puede apreciar entonces que Ana reorganizó de manera dinámica su conocimiento y realizó acciones mentales para elaborar conocimiento que le permitiera avanzar en su nivel de comprensión, es decir, evidenció procesos de *folding back*, para buscar una estructura matemática y así hallar el área de la región limitada por la función en el intervalo. Así que logró un avance del nivel 2 al nivel 3 de comprensión.

Figura 84.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 4 literal b.


b) Con Integral definida

$f(x) = x^2$, eje x , $[0, 1]$

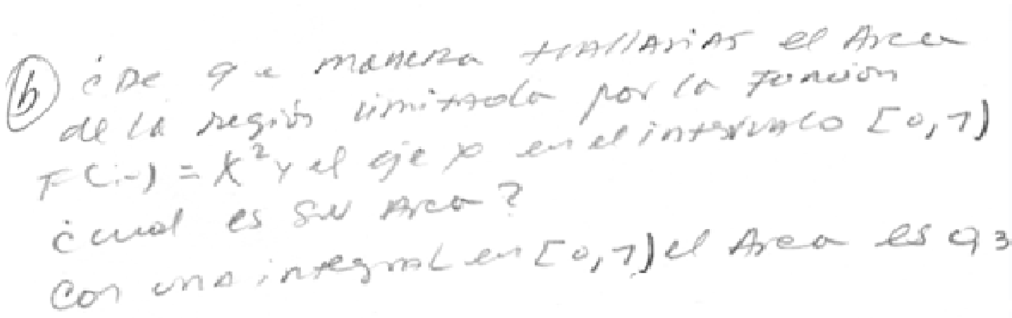
$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ → área bajo la curva

Fuente: Resgistro de la estudiante Ana, 2019.

Al respecto de la misma pregunta, Antonio declara que el área se puede hallar a través de una integral en el intervalo $[0,1]$ y expresa el valor numérico de la misma; evidencia así un proceso de *folding back* para rastrear conceptos que permitieron calcular el área de la región planteada, satisfaciendo así el descriptor A 2.3 y E 2.3. La Figura 85 ilustra su respuesta.

Figura 85.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 4 literal b.

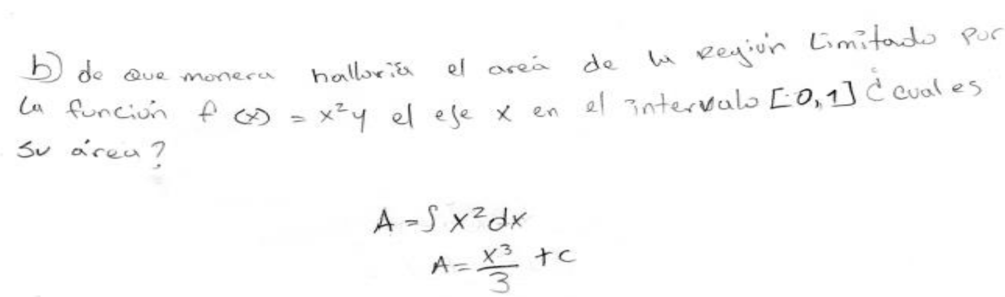


Fuente: Resgistro del estudiante Antonio, 2019.

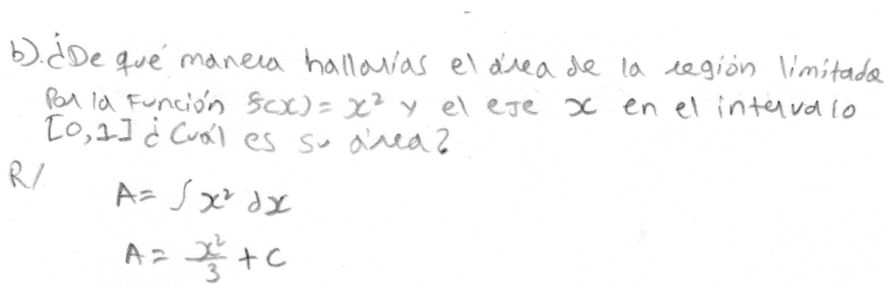
Por otra parte, se observó que Diana al igual que Pedro realizaron un proceso de *folding back* para indagar sobre el concepto de área limitada por una función en un intervalo, lo cual se pudo evidenciar, ya que ambos explicitaron la expresión matemática $A = \int x^2\, dx$, sin tener en cuenta el intervalo o parámetros de integración, sin embargo, asociaron el área de una región con su respectiva antiderivada. Diana por su parte, la expresó como $A = \frac{x^3}{3} + c$, mientras que Pedro la explicitó como $A = \frac{x^2}{3} + c$, siendo esta la antiderivada no correspondiente a la función planteada, sin embargo, cumplen en cierta manera con los descriptores A 2.3, E 2.3, A 3.3 y E 3.3, exhibiendo así un avance del nivel 2 al nivel 3 de comprensión. La Figura 86 ilustra las respectivas respuestas.

Figura 86.

Evidencia del registro de Diana y Pedro, respuesta a la pregunta 4 literal b.



Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 4 literal b.


b). ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área?

R/

$A = \int x^2\, dx$

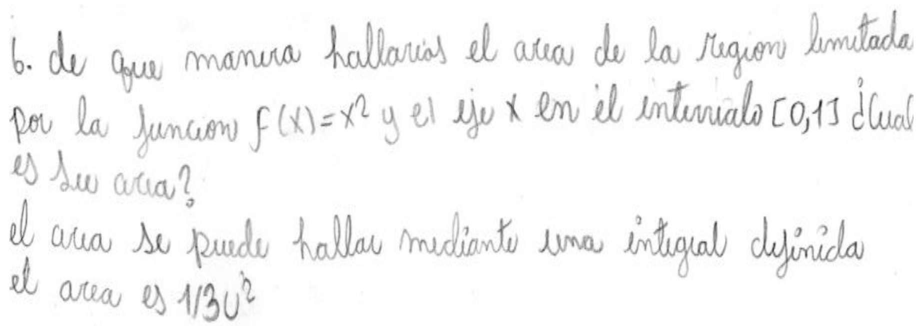
$A = \frac{x^2}{3} + C$

Fuente: Resgistro de la estudiante Diana y Pedro, 2019.

Por otra parte, Juan explicita la manera en la que se puede hallar el área de la región planteada y esboza una respuesta numérica tal como se ilustra en la Figura 87. Se puede observar entonces que realiza un proceso de *folding back* para indagar acerca del área limitada por una función en un intervalo y determinarla a través de una integral, sin embargo, en el proceso no tuvo en cuenta el intervalo, ya que solo expresa la respuesta simbólica $\frac{1}{3}U^2$, cumpliendo así con el descriptor A 2.3. Se puede apreciar que Juan intenta avanzar al nivel 2 de comprensión.

Figura 87.

Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 4 literal b.


b. de que manera hallarias el area de la region limitada por la funcion $f(X)=X^2$ y el eje X en el intervalo $[0,1]$ ¿Cual es su area?

el area se puede hallar mediante una integral definida

el area es $1/3U^2$

Fuente: Resgistro del estudiante Juan, 2019.

Con respecto a la pregunta 4 en su literal c, ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la función $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ el intevalo $[0{,}1]$ ¿Cuál es su área? Se observó que los estudiante Ana, Diana y Pedro realizaron un proceso de *folding back* con el cual establecieron la manera para calcular el área de la región comprendida entre las dos gráficas de las funciones atrás mencionadas; lo anterior se evidenció en la respuesta ilustrada en la Figura 88, en la que manifestaron las expresiones matemáticas:

$\int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx$ escrita por Ana,

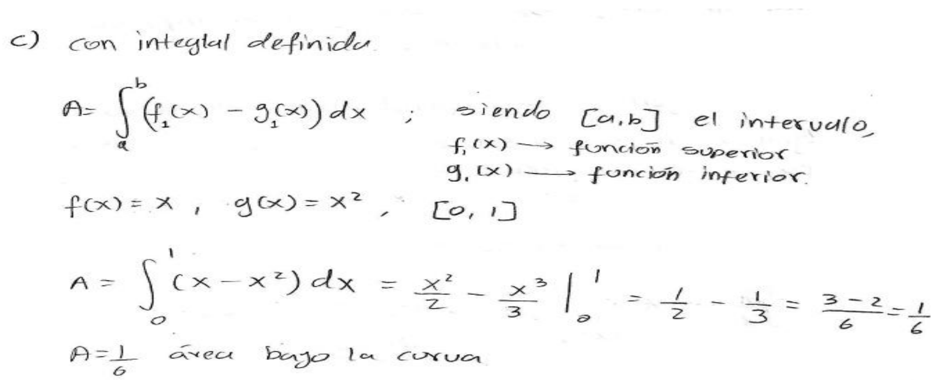
$\int_1^0 (x - x^2)dx$ escrita por Diana y

$\int_0^1 (x - x^2)dx$ expresada por Pedro,

cumpliendo así con los descriptores A 2.3, E 2.3, A 3.3, E 3.3, A 4.2 y E 4.4, lo que permite ubicarlos en el nivel 4 de comprensión.

Figura 88.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 4 literal c.



c) con integlal definida

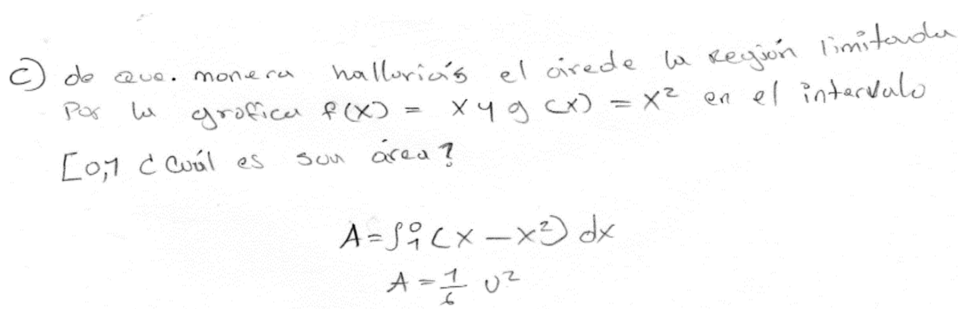
$A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))\,dx$; siendo $[a,b]$ el intervalo,
$f_1(x) \rightarrow$ función superior
$g_1(x) \longrightarrow$ función inferior.

$f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $[0, 1]$

$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

$A = \frac{1}{6}$ área bajo la curva

Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 4 literal c.

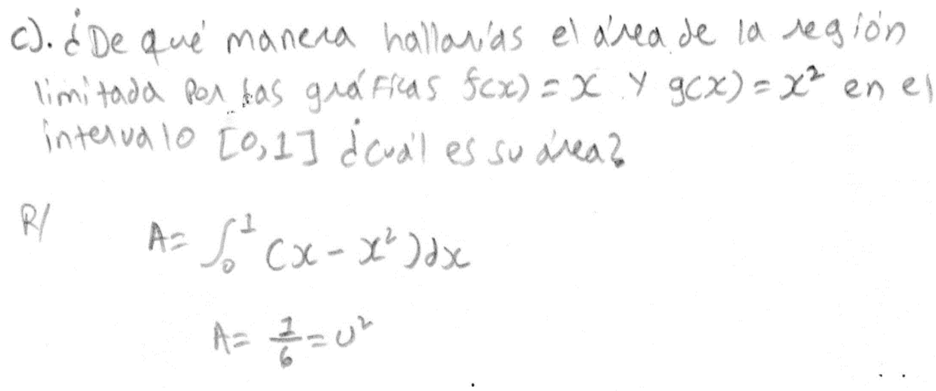


c) de que manera hallarías el área de la región limitada por la grafica $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área?

$A = \int_1^0 (x - x^2)\,dx$

$A = \frac{1}{6}\,u^2$

Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 4 literal c.



c). ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ ¿cuál es su área?

R/ $A = \int_0^1 (x - x^2)dx$

$A = \frac{1}{6} = u^2$

Fuente: Resgistro de los estudiantes Ana, Diana y Pedro, 2019

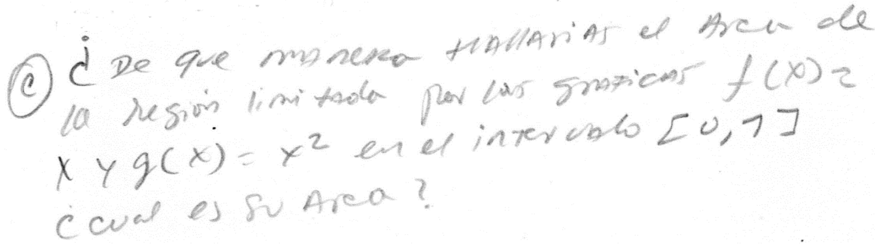
Por otro lado, con respecto a Antonio y Juan en relación con la respuesta a la anterior pregunta, Antonio expresa que para hallar el área solicitada se puede hacer “con una integral doble” para la cual relaciona el valor numérico 0,16, mientras que Juan manifiesta que para determinar el área “se puede hacer una resta de las áreas para conocer el área restante”. En este contexto, Juan realizó la diferencia entre el área del triángulo formado por la función lineal y el eje x, restando del área de la región formada por la párabola y asociando a esta diferencia el valor numérico 70.16, tal como se ilustra en la Figura 89. Se puede observar en sus respuestas, que no realizan gráficas para señalar la región correspondiente en el plano cartesiano, además, no explicitan el proceso de cálculo para hallar el respectivo resultado.

Por lo tanto, se puede apreciar que Antonio y Juan presentan dificultades en exhibir una comprensión de las expresiones formales de los conceptos matemáticos en cuestión y, por lo tanto, no logran avanzar de un nivel 1 a un nivel 2 de comprensión.

En este conexto, a la luz de la teoría de Pirie y Kieren (1994), se observó que los estudiantes realizaron procesos de *folding back,* para los los que tratan en cierta forma de conectar los conocimientos que poseen con la situación planteada en la entrevista; se evidenció que a pesar del proceso realizado, los estudiantes no explicitan como resultado de su razonamiento una expresión matemática que muestre la manera como obtuvieron los valores asignados. Lo mencionado anteriormente, a la luz de la teoría señalada, evidenció que los estudiantes no identificaron criterios mínimos que den cuenta de tal razonamiento, lo que pone de manifiesto que los estudiantes no están razonando en el nivel 2 de comprensión.

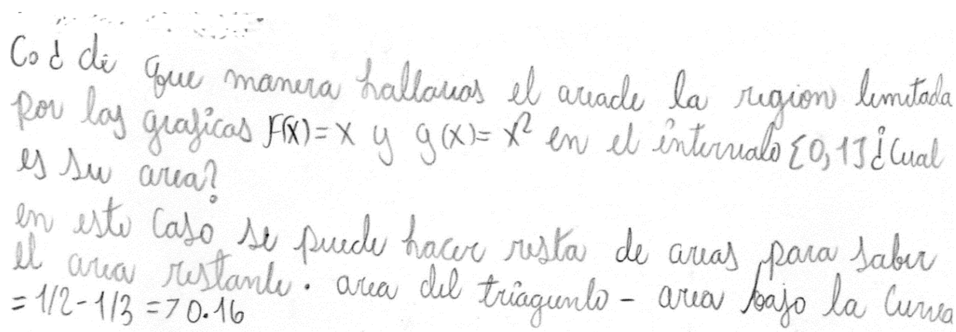
Figura 89.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta la pregunta 4 literal c.



c ¿De que manera hallarias el Area de la region limitada por las graficas $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ ¿cual es su Area?

Evidencia del registro de Juan, respuesta la pregunta 4 literal c.



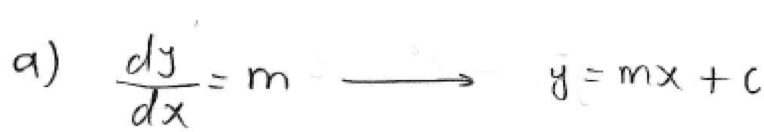
Co ¿ de Que manera hallaras el areade la region limitada por las graficas $F(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$ ¿Cual es su area?
en este caso se puede hacer resta de areas para saber el area restante. area del triangulo - area bajo la curva $= 1/2 - 1/3 = 7\ 0.16$

Fuente: Resgistro de los estudiante Antonio y Juan, 2019.

Pasando a la pregunta 5, en su literal a, en la cual se solicita escribir la antiderivada correspondiente para cada función, se observó que Ana realizó un proceso *folding back*, para rastrear información pertinente que le permitió asignar la expresión matemática $y = mx + c$, como una antiderivada a la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx} = m$, lo que se ilustra en la Figura 90; además, se infiere que satisface el descriptor CP 1.4, empleado para analizar si un estudiante reconoce la antiderivada de una función como proceso inverso a la derivada.

Figura 890.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 5 literal a.



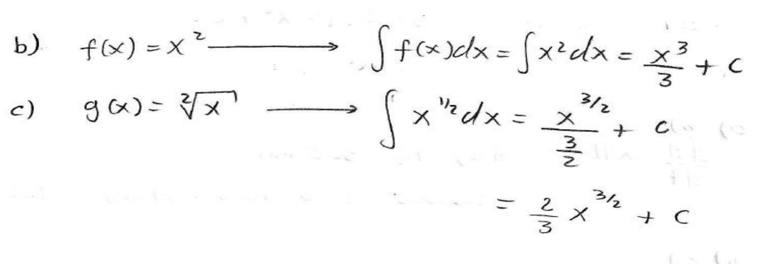
a) $\frac{dy}{dx} = m \longrightarrow y = mx + c$

Fuente: Resgistro del estudiante Ana, 2019.

De igual manera, se evidenció que Ana realizó distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo, las cuales empleó para dar respuesta a la pregunta en los literales b y c, lo que indica que satisface los descriptores A 2.7 y E 2.7. La Figura 91 ilustra su respuesta.

Figura 90.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 5 literales b y c.

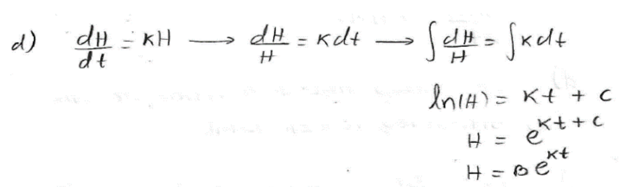


Fuente: Resgistro del estudiante Ana, 2019.

Por otro lado, se observó que en la pregunta 5 del literal d, $\frac{dH}{dt} = kH$, Ana logró asociar a la expresión matemática $\int \frac{dH}{dt}$ a una antiderivada de la forma $e^{kt+c} = Be^{kt}$, la cual es producto del análisis de las características, similitudes y diferencias que ella conoce; en este contexto, el proceso de razonamiento realizado lo relaciona con la situación planteada y la sustituye por imágenes que representan la antiderivada de la expresión suministrada. Así que ella satisface los descriptores A 4.2 y E 4.2. La Figura 92 ilustra su respuesta.

Figura 91.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 5 literal d.



Fuente: Resgistro del estudiante Ana, 2019.

Por otra parte, Ana para dar respuesta a la pregunta 5 en su literal e, mediante un proceso de *folding back*, clasificó e identificó conceptos que le posibilitaron asociar teoremas y definiciones, que le permitieron cuestionar su propia comprensión para determinar la solución a la expresión $xdx + ydy = 0$, tal como se ilustra en la Figura 93. Se puede afirmar entonces que se satisface los descriptores A 4.2 y E 4.2, por lo tanto, exhibe un nivel de comprensión 4.

Figura 92.

Evidencia del registro de Ana, respuesta a la pregunta 5 literal e.

e) $xdx + ydy = 0$

$xdx = -ydy$

$\int x\,dx = -\int y\,dy \longrightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

$y^2 = -x^2 + c$

$y = \pm\sqrt{-x^2 + c}$

Fuente: Resgistro del estudiante Ana, 2019.

Con respecto a la misma pregunta, Antonio en el literal a realizó un proceso de *folding back* en el que indagó por las similitudes, diferencias y criterios mínimos con los que identificó la antiderivada relacionada con la expresión $\frac{dy}{dy} = m$, lo que se evidenció al explicitar la estructura $y = mx$.

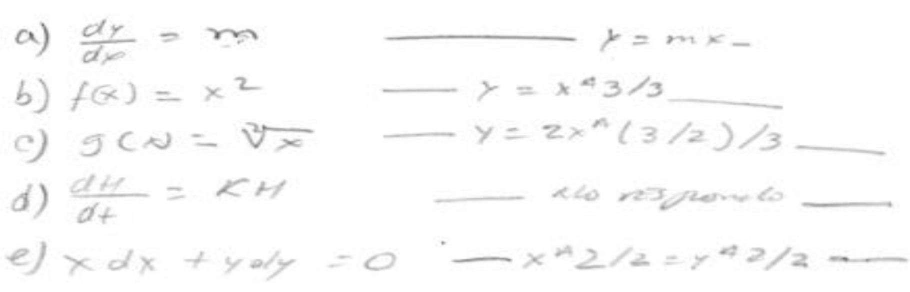
Además, Antonio en los literales b y c, mediante un proceso de *folding back,* distinguió algunas propiedades entre los conceptos que posee y estableció una relación con las expresiones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, con el fin de asociarlas a las antiderivadas $y = \frac{x^3}{3}$ y $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, respectivamente. Se puede afirmar que sus respuestas satisfacen los descriptores A 2.7 y E 2.7, exhibiendo un nivel 2 de comprensión. Es importante mencionar que no responde el literal d, a pesar de que puede identificar propiedades y distinguir cualidades entre las antiderivadas que conoce; él no logró hallar una expresión matemática como solución a la situación planteada.

Para determinar una solución a la expresión matemática $xdx + ydy = 0$, determina una antiderivada para cada término de la expresión propuesta, mas no para la ecuación, Antonio escribe la expresión $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$. Se observa entonces que no logra comprender la expresión como antiderivada general, además de que ignora el signo menos que se involucra. Se puede afirmar que satisface el descriptor A 4.2, sin embargo, no logra avanzar al nivel 4 de comprensión. Su respuesta se ilustra en la Figura 94.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, el estudiante estaba razonando en el nivel de comprensión 4, lo que se evidencia al calcular la antiderivada de cada término de la ecuación, a la luz de las complementariedades. La respuesta del estudiante satisface el descriptor para la acción A 4.2, con el cual se analizó si Antonio examinaba el tipo de relaciones que existen entre las derivadas y sus diferentes interpretaciones, tal como se registra en la Figura 94.

Figura 93.

Evidencia del registro de Antonio, respuesta a la pregunta 5 literal e.



Fuente: Resgistro del estudiante Antonio 2019.

Para la pregunta, Diana, Pedro y Juan realizaron procesos de *folding back*, que les permitieron indagar por similitudes y diferencias relacionadas con el concepto de antiderivada involucrado en la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = m$. La respuesta de Diana y Pedro es $y = mx + b$, mientras que la respuesta de Juan es $y = mx + C$.

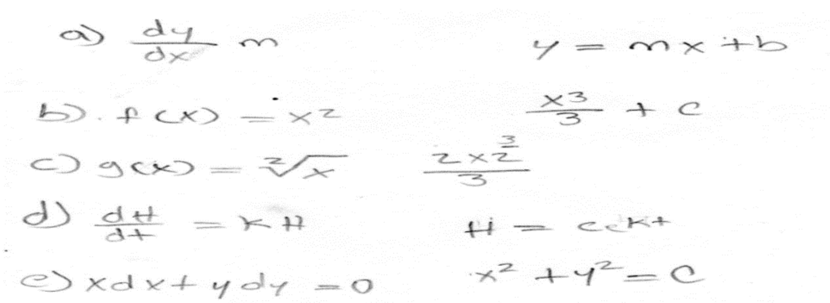
De igual manera, las respuestas de Diana y Juan a las preguntas de los literales b y c, sobre las antiderivadas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son las expresiones $\frac{x^3}{3}$ y $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$, respectivamente, mientras que Pedro escribe la expresión $2x^{\frac{3}{2}}$ para hallar la antiderivada $g(x) = \sqrt{x}$. Obsérvese que los estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de antiderivada como una representación de infinitas funciones.

Al respecto de la pregunta 5 en el literal d, al resolver la ecuación $\frac{dH}{dt} = kH$, Diana, Pedro y Juan logran hallar la siguiente respuesta: $H = Ce^{kt}$, sin embargo, no explicitaron el proceso de solución. Al parecer, realizaron procesos similares a los propuestos en el curso de cálculo integral, cuyo interés es hallar antiderivadas, sin tener en cuenta que es una ecuación, motivo por el cual lograron establecer esta relación entre ambas expresiones. Sin embargo, las respuestas de Diana y Pedro a la pregunta 5 en su literal e, logran evidenciar una asociación con la ecuación $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$, lo que permite afirmar entonces que cumplen con el descriptor E 4.2, exhibiendo un nivel 4 de comprensión. La Figura 95 ilustra las respuestas.

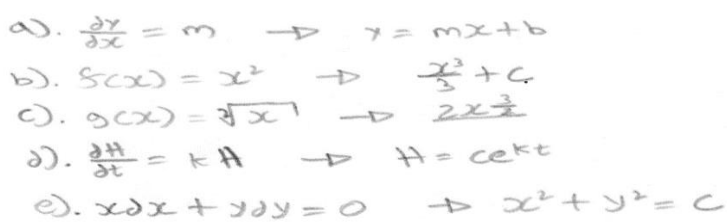
Figura 94.

Evidencia del registro de Diana, Pedro y Juan, respuesta a la pregunta 5 literal e.

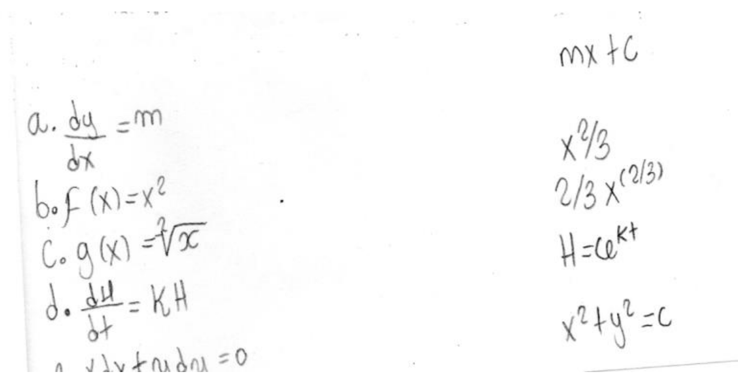
Evidencia del registro de Diana, respuesta a la pregunta 5 literal e.



Evidencia del registro de Pedro, respuesta a la pregunta 5 literal e.



Evidencia del registro de Juan, respuesta a la pregunta 5 literal e.



Fuente: Resgistro de los estudiantes Diana, Pedro y Juan, 2019.

4.4.4. Análisis retrospectivo sobre el concepto de antiderivada correspondiente al episodio 3.

En el contexto del apartado 4.4.2 correspondiente al análisis retrospectivo del episodio 2, a la luz de lo manifestado por Molina (2011, p. 82), se presenta un análisis de estos aspectos en el contexto de las complementariedades de la acción y la expresión.

4.4.4.1. Identificar acciones realizadas por los estudiantes.

El análisis retrospectivo de la información recolectada en el episodio 3, permitió identificar algunas acciones realizadas por Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro, para dar respuesta a las preguntas 4 y 5 relacionadas con el concepto de antiderivada. Estas acciones implicaron procesos de actuación y de expresión. Mediante el proceso del *folding back*, los estudiantes rastrearon información que les posibilitó de alguna manera, examinar propiedades, y establecer similitudes y diferencias entre los conceptos involucrados en una situación planteada para avanzar en su nivel comprensión.

Específicamente, los estudiantes reconocieron la antiderivada de una función como un operador inverso a la derivada, examinaron qué tipo de relaciones existían entre una antiderivada y las diferentes interpretaciones que se pueden manifestar en una situación planteada, asociando el área de una región limitada por una función y su intervalo, así que estas acciones realizadas por los estudiantes en su proceso de razonamiento, les permitieron comprender el concepto de antiderivada.

En la perspectiva señalada anteriormente y considerando el literal a en la pregunta 4, la Tabla 27 presenta algunas de las acciones señaladas, mientras que la Tabla 28 hace referencia a las acciones realizadas por los estudiantes en el literal a de la pregunta 5. Ambas tablas consideran el concepto de antiderivada y están constituidas por cuatro columnas, distribuidas así: primera columna, acciones realizadas por los estudiantes; segunda, descripción del proceso realizado por los participantes, tercera, preguntas abordadas y cuarta, respuestas manifestadas por los estudiantes.

Tabla 27.

Acciones relacionadas con respecto al concepto de antiderivada.

Acción	Descripción	Pregunta	Respuesta del estudiante
Ana **Reconoce la antiderivada como proceso a la derivada.**	A través del proceso de *folding back* identificó criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con la antiderivada de una función.	**4, literal a** ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo [0,1]	a) Con integral definida $f(x) = x$, eje x, $[0,1]$ $A = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 = \frac{1}{2}$ área curva
Antonio **Reconoce la antiderivada como proceso a la derivada.**	A través del proceso de *folding back* identificó criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con la antiderivada de una función.	**4, literal a** ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo [0,1]	Con una integral doble, el área es 0,5
Diana **Reconoce la antiderivada como proceso a la derivada.**	A través del proceso de *folding back* identificó criterios, definiciones en su conocimiento primitivo para realizar distinciones matemáticas y	**4, literal a** ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica	

	asociarlas con la antiderivada de una función.	$f(x) = x$ y el eje x en el intevalo [0,1]	4a) ¿de que manera hallarias el area de la región limita por la grafica $f(x) = x$ y el eje x en el intervalo [0,1] ¿cuál es su area? $A_t = \frac{b*h}{2}$ $A_t = \frac{1*1}{2} = 0{,}1\ U^2$
Juan **Reconoce la antiderivada como proceso a la derivada**	A través del proceso de *folding back* identificó criterios, definiciones para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con la antiderivada de una función.	**4, literal a** ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo [0,1]	el area se puede hallar utilizando el teorema de pitagoras el area es 0.5
Pedro **Reconoce la antiderivada como proceso a la derivada.**	A través del proceso de *folding back* identificó criterios, definiciones para realizar distinciones matemáticas y asociarlas con la antiderivada de una función.	**4, literal a** ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo [0,1]	$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$ $A_T = \frac{1*1}{2} = 0.1\ U^2$

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado por Molina (2011).

Tabla 28.

Acciones relacionadas con respecto al concepto de antiderivada.

Acción	Descripción	Pregunta	Respuesta del estudiante
Ana **Esboza la antiderivada de una función.**	Identificó criterios y definiciones a través del *folding back*, para asociarlas con la antiderivada de la expresión.	**5 literal a** Escribe la antiderivada correspondiente para cada función.	b) $f(x) = x^2 \longrightarrow \int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Antonio **Esboza la antiderivada de una función.**	Identificó criterios y definiciones a través del *folding back*, para asociarlas con la antiderivada de la expresión.	**5 literal a** Escribe la antiderivada correspon-diente para cada función.	b. $f(x)=x^2$ $2/3\, x^{(2/3)}$
Diana **Esboza la antiderivada de una función.**	Identificó criterios y definiciones a través del *folding back*, para asociarlas con la antiderivada de la expresión.	**5 literal a** Escribe la antiderivada correspon-diente para cada función.	a) $\frac{dy}{dx}\, m$ $y=mx+b$
Juan **Esboza la antiderivada de una función.**	Identificó criterios y definiciones a través del *folding back*, para asociarlas con la antiderivada de la expresión.	**5 literal a** Escribe la antiderivada correspondiente para cada función.	b. $f(x)=x^2$ $2/3\, x^{(2/3)}$
Pedro **Esboza la antiderivada de una función.**	Identificó criterios y definiciones a través del *folding back*, para asociarlas con la antiderivada de la expresión.	**5 literal a** Escribe la antiderivada correspondiente para cada función.	b). $f(x)=x^2 \rightarrow \frac{x^3}{3}+C$

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011).

4.4.4.2. Evidenciar conceptos empleados por los estudiantes en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

El proceso de análisis del tercer episodio reveló evidencias que permitieron visualizar la manera cómo los estudiantes centraron su atención alrededor del concepto de antiderivada de una expresión algebraica y cómo se apropiaron de otros subyacentes a éste para clarificar y organizar sus ideas, así entonces, se observó cómo emplean los conceptos de área de una región, razón de cambio y pendiente, los cuales les permitieron expresar una respuesta bien sea en términos de la complementariedad de la acción, de la expresión o en ambas, todo esto para avanzar en su comprensión.

En este orden de ideas, en este proceso identificaron características, similitudes y diferencias entre los conceptos involucrados en las situaciones planteadas en las preguntas cuatro y cinco, cabe anotar que el proceso de *folding back* jugó un papel importante durante el proceso de comprensión del concepto de antiderivada. Las Tablas 29, 30, 31, 32, y 33 muestran los conceptos consultados por los estudiantes para abordar las situaciones planteadas en las preguntas antes mencionadas.

4.4.4.3. Descripción de la evolución de la comprensión del concepto de antiderivada.

El análisis de la información del episodio 3 permitió detallar, en el marco de los niveles de comprensión y de las complementariedades de la acción y la expresión, la manera en que evolucionó la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de antiderivada. La información se registró en las Tablas, 29, 30, 31, 32, 33. En ellas se colocaron de manera horizontal los números de cada pregunta correspondiente al episodio 3. En la primera columna, el episodio realizado; en la segunda, el número de preguntas y el literal correspondiente; en la tercera, el concepto empleado; en las siguientes, los procesos realizados: algebraico, mecánico, de razonamiento (o analíticos) y gráfico; en las siguientes, las subcategorías que corresponden a niveles de la teoría y debajo de cada nivel, las subcategorías complementariedades de la acción (C-A) y de la expresión (C-E); en la última columna, el nivel de comprensión alcanzado por cada estudiante en cada ítem, en el cual se detalla si exhibe avance o no en la comprensión del concepto de antiderivada.

La evolución de la comprensión en los estudiantes centró su análisis en el marco de las complementariedades, observando primero la acción y luego la expresión, siendo esta última la de mayor exigencia, ya que requiere de más elaboración por parte del estudiante; cabe aclarar que en algunas ocasiones se dio solo una de las complementariedades y en otras ninguna. El cumplimiento de los descriptores propuestos para cada uno de los niveles de comprensión se ilustra en las Figuras 96, 97, 98, 99 y 100.

4.4.4.4. Análisis del Proceso de comprensión del concepto de antiderivada.

El análisis de la información recolectada en el episodio tres, a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, permitió observar el crecimiento de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de antiderivada, así como el nivel alcanzado, en la medida que sus respuestas satisfacen los descriptores propuestos para este fin.

Cada una de las tablas siguientes presentan información relacionada con el concepto empleado, procesos realizados, complementariedad manifestada y nivel de comprensión alcanzado por cada estudiante, distribuidas así: se colocó de izquierda a derecha, en la primera columna el episodio realizado; en la segunda el número de la pregunta y el literal correspondiente; en la tercera el concepto empleado para resolver o tratar de comprender el concepto involucrado; les siguen los procesos (algebraico, mecánico, de razonamiento y gráfico realizados); luego los niveles de comprensión de la teoría en mención y en la última, el nivel de comprensión alcanzado por el estudiante.

Por otra parte, se observó en el análisis de las respuestas Del episodio 3, que Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro mostraron en su proceso de razonamiento una recurrencia en los procesos de *folding back*, para hacer una autorreflexión en sus procesos mentales de conceptos tales como: área de una región limitada por una función en un intervalo, lo que para nuestro contexto, corresponde a funciones consultadas por los estudiantes, a saber, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, adicional a esto, razón de cambio, pendiente y antiderivada.

Lo mencionado anteriormente a la luz de lo declarado por Molina (2011), mostró una ruta conceptual para comprender el concepto de antiderivada, entre otras, en la cual se visualizaron los conceptos de área de una región limitada por una función y un intervalo, razón de cambio, pendiente y antiderivada.

Tabla 29.

***Evidencias de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Ana con respecto al concepto de antiderivada*.**

Nombre				**Ana**											
				Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
Epi	Pre		Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
3	4	A	Área	A	M				A 2.3	E 2.3	A 3.3	E 3.3			N2-N3
		B	Área	A	M	R			A 2.3	E 2.3					N2
		C	Área	A	M	R			A 2.3	E 2.3	A 3.3	E 3.3	A 4.3	E 4.3	N2-N3-N4
	5	A	Razón de cambio	A	M				CP 1.4						CP
		B	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		C	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		D	Antiderivada	A	M	R	G						A 4.2	E 4.2	N4
		E	Antiderivada	A	M	R							A 4.2	E 4.2	N4

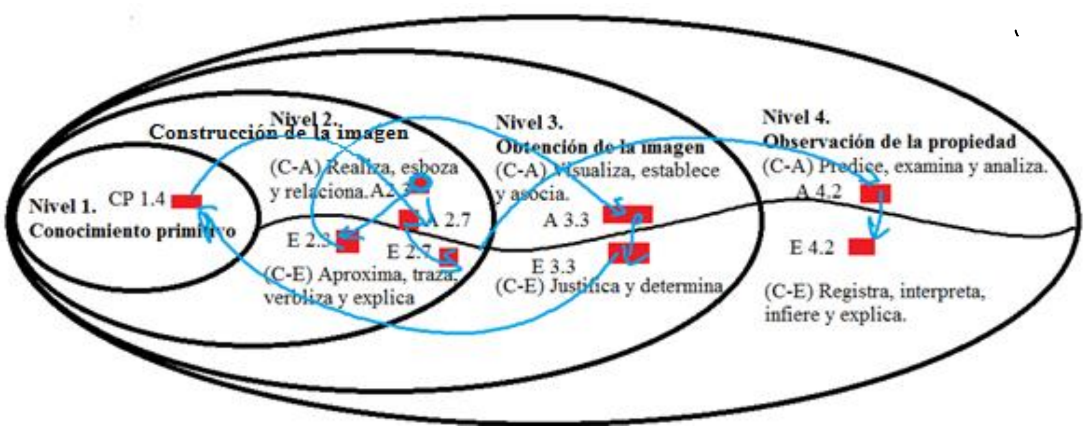
Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

En este contexto, el análisis mostró que Ana en la pregunta 4, indagó por el concepto de área de una región delimitada por las funciones $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, asimismo, reveló la forma en la cual se dio la comprensión del concepto, satisfaciendo los descriptores A 2.3, E 2.3, A 3.3 y E 3.3 para avanzar del nivel 2 al 3.

Es importante anotar que Ana exhibió un conocimiento primitivo satisfaciendo el descriptor CP 1.4, este hecho se reconoce en las palabras de Pirie y Kieren (2006) quienes mencionaron que este conocimiento "es todo lo que un estudiante trae en su mente a la tarea actual". Por otro lado, se evidenció además que alcanza el nivel 4 de comprensión, dado que satisface los descriptores A 4.2 y E 4.2, entre otros. La Figura 96 ilustra un esquema aproximado de su proceso de comprensión, haciendo notar que su recorrido entre los niveles, el cumplimiento de los descriptores y el proceso de *folding back* del nivel 3 al nivel 1, hasta alcanzar el nivel 4 de comprensión.

Figura 95.

Esquema aproximado del proceso de comprensión de Ana con respecto al concepto de antiderivada.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 29.

Descriptores empleados en la Figura 96.

- CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
- A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
- A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.

- A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
- A 4.2. Examina qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
- E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
- E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.
- E 3.3. Determina una región limitada por funciones en un intervalo a través de una antiderivada.
- E 4.2. Interpreta qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

Por otro lado, a través de procesos de *folding back* para responder las preguntas 4 y 5, Antonio rastreó información que le permitió establecer relaciones, y examinar propiedades similitudes y diferencias entre otros elementos involucrados, para dar solución a las situaciones planteadas, aspectos analizados en el episodio tres, los cuales se realizaran en el contexto del análisis realizado en los apartados 4.3.2.1. y 4.3.2.2 del análisis retrospectivo del episodio 2. Todo esto permitió establecer una ruta conceptual para la comprensión del concepto de antiderivada. La Tabla 30 ilustra el cumplimiento de descriptores, su evolución en la comprensión de cada uno de los niveles hasta alcanzar el nivel 4 y los cuatro aspectos relacionados por Molina (2011). Es importante anotar que Antonio alcanzó el nivel 4 de compresión, sin pasar por el nivel 3, lo que muestra la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos, teniendo como base la triangulación entre las complementariedades de la acción y la expresión.

Tabla 30.

Evidencias de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Antonio con respecto al concepto de antiderivada.

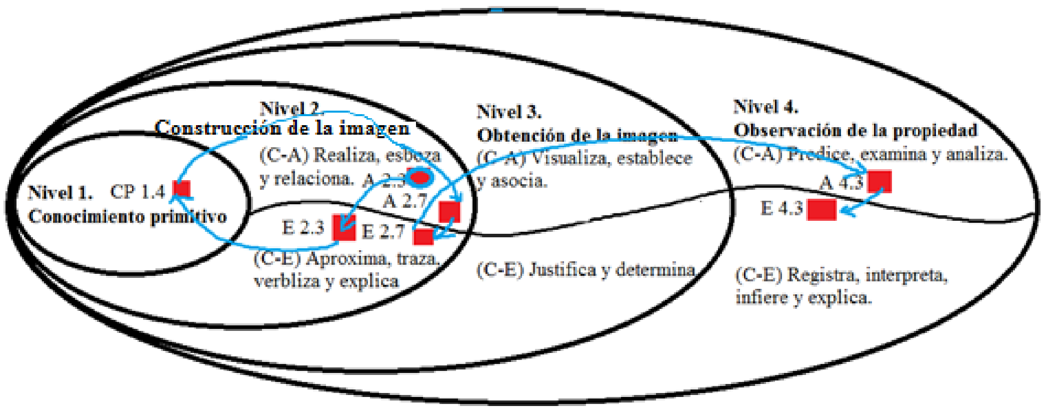
Nombre			**Antonio**											
			Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
Epi	Pre	Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
	4	A Área						A2.3	E 2.3					N”
		B Área			R			A2.3	E 2.3					N2
		C Área			R			A2.3	E 2.3					N2
3	5	A Razón de cambio					CP 1.4							CP
		B Antiderivada		M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		C Antiderivada		M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		D Antiderivada										A 4.2	E 4.2	N4
		E Antiderivada			R									

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

La Figura 97 es un esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Antonio en correspondencia con los descriptores entre las categorías y subcategorías, su avance de un nivel de comprensión a otro y los procesos de *folding back* realizados.

Figura 96.

Esquema aproximado del proceso de comprensión de Antonio con respecto al concepto de antiderivada



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 30.

Descriptores empleados en la Figura 97.

- CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
- A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
- A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
- A 4.2. Examina qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
- E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
- E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.
- E 4.2. Interpreta qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

Por otra parte, el análisis en el marco de lo manifestado por Molina (2011) referenciado en el apartado 4.4.2.1, con el cual se detectaron las acciones empleadas por Diana para abordar diferentes situaciones planteadas en las preguntas 4 y 5, mostró que dichas acciones realizadas estuvieron en torno a la actuación y la expresión; en el sentido de la actuación, ella examinó propiedades, similitudes y diferencias entre conceptos relacionados con la antiderivada. En cuanto a las complementariedades de la expresión, identificó en su mayoría procesos algebraicos, mecánicos y de razonamiento pertinentes y realizó una descripción, usando símbolos adecuados, para explicar sus respuestas.

De igual modo, teniendo en cuenta el análisis de la información del episodio 3, en el marco de lo manifestado por Molina (2011) y abordado en el apartado 4.4.2.2 se puede evidenciar la ruta conceptual seguida por Diana para comprender el concepto de antiderivada; la información respectiva se ilustra en la Tabla 31.

Además, para visualizar la evolución de la comprensión de Diana, se tuvo en cuenta el respectivo análisis realizado en los apartados 4.4.2.3 y 4.4.2.4; estos análisis permiten evidenciar el cumplimiento de cada uno de los descriptores de los respectivos niveles, concluyendo que evolucionó a un nivel 4. Cabe anotar que Diana manifiesta un salto del nivel 2 de comprensión al 4, con lo cual se evidencia la no linealidad de la comprensión, manifestada por Pirie y Kieren (1994).

Tabla 31.

***Evidencias de conceptos, evolución de la comprensión de Diana con respecto al concepto de antiderivada*.**

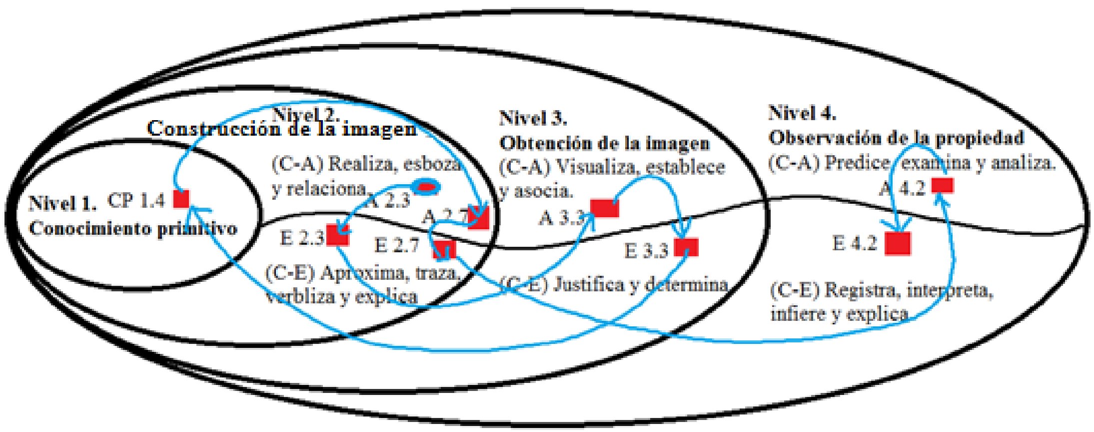
Nombre				Diana										
				Procesos			Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
Epi		Pre	Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
3	4	A	Área	A	M				A2.3	E 2.3					N2
		B	Área	A	M	R			A2.3	E 2.3					N2
		C	Área	A	M	R			A2.3	E 2.3					N2
	5	A	Razón de cambio	A	M			CP 1.4							CP
		B	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		C	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		D	Antiderivada	A	M	R							A 4.2	E 4.2	N4
		E	Antiderivada	A	M	R							A 4.2	E 4.2	N4

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

La Figura 98 es un esquema aproximado de la descripción del proceso de comprensión exhibido por Diana en correspondencia con los descriptores entre las categorías y subcategorías y su avance de un nivel de comprensión a otro, así como con los procesos de *folding back* realizados.

Figura 97.

Esquema aproximado del proceso de comprensión de Diana con respecto al concepto de antiderivada.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 31.

Descriptores empleados en la Figura 98.

- CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
- A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
- A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
- A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
- A 4.2. Examina qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
- E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
- E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.

- E 4.2. Interpreta qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

De igual modo, para el análisis de las acciones realizadas por Juan alrededor de la actuación y la expresión, y en relación con las preguntas 4 y 5, en el marco del episodio 3, se pone a consideración los apartados 4.4.2.1 y 4.4.2.2. Así que, de acuerdo con sus respuestas, los procesos de *folding back* realizados y el cumplimiento de los respectivos descriptores, se pudo evidenciar la ruta conceptual seguida por Juan para comprender el concepto de antiderivada; este análisis se ilustra en la Tabla 32.

Al respecto, Juan empleo en su mayoría procesos de razonamiento usando *folding back*, que le posibilitaron examinar su conocimiento sobre conceptos relacionados con la antiderivada; en este contexto, se evidenció que su consulta fue sobre el área de la región limitada por las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, de igual modo, averiguó por conceptos de razón de cambio, lo que se percibió en la respuesta de la pregunta 5, literal a, y por el concepto de antiderivada verificadas en las respuestas de las preguntas 4 y 5. Se observa que él evolucionó del nivel de comprensión 2 al 4, por lo que exhibió un salto en la comprensión del objeto matemático en cuestión.

Tabla 32.

Evidencia de evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Juan con respecto al concepto de antiderivada

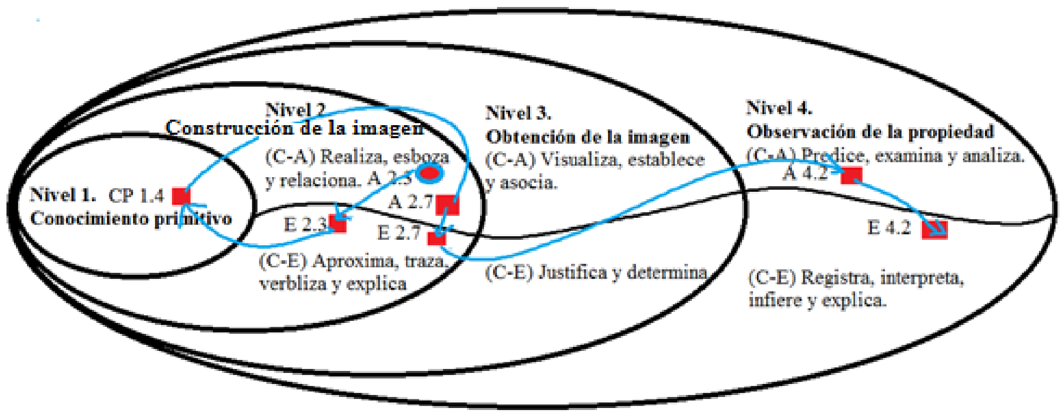
Nombre				Diana											
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
3	4	A	Área						A2.3	E 2.3					N2
		B	Área		M	R			A2.3	E 2.3					N2
		C	Área			R			A2.3	E 2.3					N2
	5	A	Razón de cambio			R		CP 1.4							CP
		B	Antiderivada			R			A 2.7	E 2.7					N2
		C	Antiderivada			R			A 2.7	E 2.7					N2
		D	Antiderivada			R							A 4.2	E 4.2	N3
		E	Antiderivada			R							A 4.2		N3

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada

Considerando la tabla anterior, se construyó un esquema aproximado de la comprensión de Juan, el cual se ilustra en la Figura 99; allí se explicitan, entre otros aspectos, los descriptores que ha cumplido y el proceso de *folding back* realizado, todo esto acorde a sus respuestas.

Figura 99

Esquema aproximado de la comprensión de Juan con respecto a concepto de antiderivada.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 32.

Descriptores empleados en la Figura 99.

- CP1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
- A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
- A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.
- A 4.2. Examina qué tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
- E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
- E 2.7. Explicita la antiderivada de una función.
- E 4.2. Interpreta qué tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

De igual manera, para analizar las respuestas de Pedro a las preguntas 4 y 5, se tuvo en cuenta los apartados 4.4.2.1 y 4.4.2.2 con el fin de lograr evidenciar la ruta conceptual seguida en su proceso de comprensión del concepto de antiderivada.

Pedro en su proceso de *folding back*, rastreó información, hizo una valoración requerida a través de procesos algebraicos, mecánicos y de razonamiento, relacionó los conceptos, examinó algunas de sus características y mostró una sucesión de pasos que ponía de manifiesto las acciones realizadas, expresando respuestas. La Tabla 33 ilustra el proceso de comprensión exhibido por Pedro.

Tabla 33.

Evidencia de concepto, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Pedro relacionada con el concepto de antiderivada.

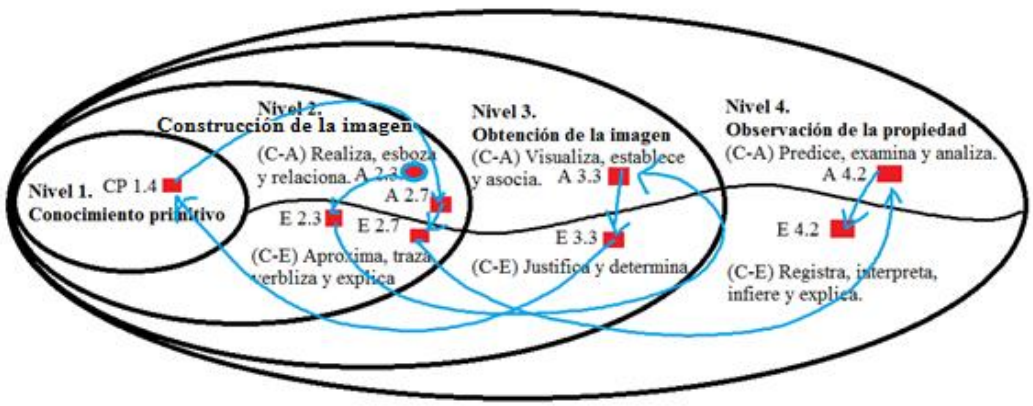
Nombre				**Pedro**											
				Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
Epi	Pre		Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
3	4	A	Área	A	M				A2.3	E 2.3					N2
		B	Área	A	M	R			A2.3	E 2.3					N2
		C	Área	A	M	R			A2.3	E 2.3					N2
	5	A	Razón de cambio	A	M	R		CP 1.4							CP
		B	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		C	Antiderivada	A	M	R			A 2.7	E 2.7					N2
		D	Antiderivada	A	M	R							A 4.2	E 4.2	N4
		E	Antiderivada	A	M	R							A 4.2	E 4.2	N4

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

La Figura 100 ilustra un esquema aproximado del proceso de comprensión de Pedro de acuerdo a sus respuestas, el cumplimiento de los descriptores, el proceso de *folding back* realizado y las acciones realizadas, entre otros aspectos.

Figura 100

Caracterización del progreso de la comprensión de Pedro con respecto a concepto de antiderivada.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 33.

Descriptores empleados en la Figura 100.

–CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.

–A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en u intervalo.

–A 2.7. Esboza la antiderivada de una función.

–A 4.2 Examina que tipo de relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

–A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.

–E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo con una E 2.7. antiderivada.

–E 2.7. Explica la antiderivada de una función

- E 3.3. Determina una región limitada por funciones en un intervalo a través de una antiderivada.
- E 4.2. Interpreta qué tipo de relaciones existe entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.

A continuación, se realiza el análisis del episodio 4 a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, sobre el concepto de ecuaciones diferenciales; posteriormente, se presenta un análisis retrospectivo de la información en el marco de los aspectos declarados por Molina (2011).

4.4.5. Análisis del episodio 4 relacionado con el concepto de ecuaciones diferenciales

El episodio 4 se conformó después del refinamiento de los episodios anteriores; para tal efecto, se tuvo en cuenta las observaciones de los investigadores, sugerencias y preguntas de los estudiantes en relación con el tema tratado, además de un sin número de reuniones que se emplearon para refinar el episodio 4, toda vez que se requería entregar una versión mejorada de la misma.

El episodio 4 se desarrolló en seis horas a través de una entrevista a los estudiantes; para llevarlo a cabo, se consideró el mismo escenario en condiciones naturales sujetas al salón de clase y la universidad. Este ambiente propició la participación e interacción de los cinco estudiantes con el profesor de la asignatura y los investigadores con el propósito de abordar las preguntas seis y siete y así lograr analizar el proceso de comprensión de los estudiantes de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

La pregunta seis suministró un aporte de información relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden y su modelo de ecuación, su solución particular, representación, entre otros, todo esto, teniendo en cuenta las sugerencias realizadas por los estudiantes en el proceso de refinamiento.

A su vez, la pregunta considera literales a, b, c y d, para los cuales se formularon descriptores en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, así: literal a, descriptor CP 1.7; literal b, descriptores A 2.4, E 2.4, A 3.4 y E 3.4; literal c, descriptores

A 4.3 y E 4.3 y literal d, descriptores A 4.3 y E 4.3, los cuales permitieron analizar los procesos de *folding back* surgidos en el transcurso de la evolución de la comprensión de cada estudiante frente a los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

A continuación, se muestran los descriptores propuestos para este episodio.

CP 1.7. Reconoce una razón de cambio como una ecuación diferencial

A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.

E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.

E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.

A 4.3. Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales de sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.

E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.

En este contexto, se considera la pregunta 6 en su literal a expresadas así: dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$, su respectiva solución general está dada por la expresión $y = x^2 + C$. ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$? Al respecto, Ana y Antonio exhibieron un razonamiento a través del cual manifiestan una recurrencia para indagar por los conceptos de recta tangente y pendiente, en el cual se percibió cierta convergencia en ambos. Ana consideró la pendiente de la recta tangente para cualquier punto de la curva, mientras que Antonio, solo en un punto como se evidencia en la Figura 101. Además, las distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo les permitió relacionarlos con la ecuación diferencial propuesta, de modo que declararon una respuesta acorde a la situación planteada, representada en la Figura 101, la cual satisface el descriptor CP 1.7 empleado para analizar si un estudiante reconoce una razón de cambio instantánea como una ecuación diferencial.

Figura 101.

Evidencia del registro de Ana relacionada con la respuesta a la pregunta 6 literal a Ana.

a) se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + c$, en cualquer punto de la curva.

Evidencia *del registro de* Antonio

la Ecuación de/dx = 2x es la recta TAngente en un punto de la grafica y = x^2

Fuente: Registro de los estudiantes 2019

Por su parte, Diana realizó su proceso recurriendo a procesos de *folding back*, en los que reconoce la expresión dada como una razón de cambio instantánea, para lo cual considera que $m = 2x$, en este contexto, se observó que la estudiante realizó un rastreo de información en su conocimiento primitivo, que le permitió emitir una respuesta, lo que evidencia que Diana, al reconocer la razón de cambio instantánea de la expresión matemática propuesta, satisface el descriptor CP 1.7. La Figura 102 ilustra su respuesta.

Figura 102.

Evidencia del registro de Diana relacionado con la respuesta a la pregunta 6 literal a.

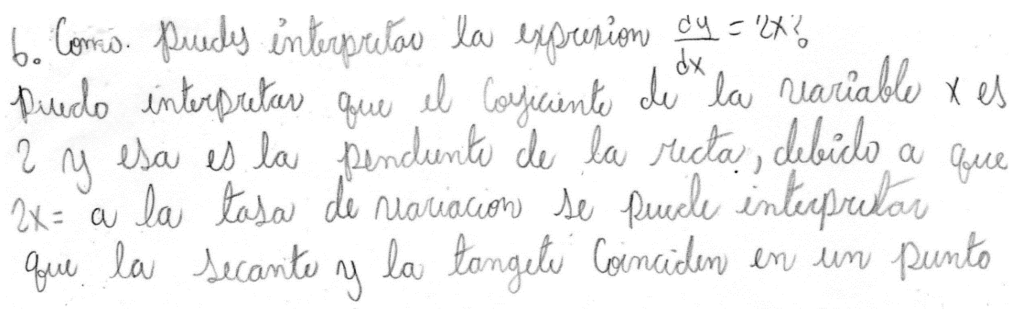
Como Puede interpretar la expreción $\frac{dy}{dx} = 2x$?
Se observa una razon de cambio instantonea en la que $m = 2x$.

Fuente: Registro de la estudiante Diana 2019.

Por su parte Juan, considera la pendiente como una tasa de variación en la cual interpretó que la secante y la pendiente coinciden en un punto, tal como se ilustra en la Figura 103. Se puede apreciar que él realizó un proceso de *folding back* a través del cual recabó información de su conocimiento que le permitió reconocer la expresión matemática como una razón de cambio instantánea y así satisfacer el descriptor CP 1.7. Vale la pena reiterar que se evidenció que Juan abordó la situación planteada con algunos conocimientos primitivos, lo cual, en el marco de lo declarado por Pirie y Kieren (2006) es todo lo que una persona trae en su mente, para abordar una situación planteada.

Figura 98.

Evidencia del registro de Juan relacionada con la respuesta a la pregunta 6 a.

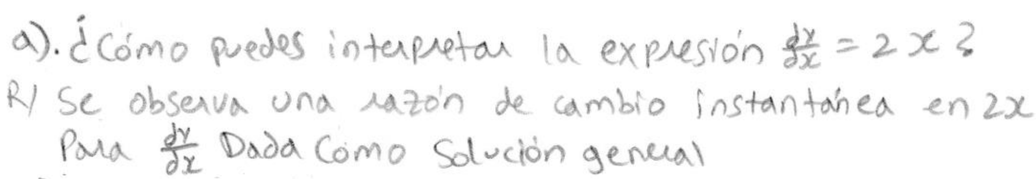

b. Como puedes interpretar la expresion $\frac{dy}{dx} = 2x$?
Puedo interpretar que el coeficiente de la variable x es 2 y esa es la pendiente de la recta, debido a que 2x = a la tasa de variacion se puede interpretar que la secante y la tangente coinciden en un punto

Fuente: Registro del estudiante Juan 2019.

Por otro lado, Pedro exhibe un proceso a través del cual indaga por los conceptos de razón de cambio y pendiente; al establecer relaciones con ellos, declaró que la razón de cambio instantánea $\frac{dy}{dx}$ es $2x$, tal como se ilustra en la Figura 104, en este sentido, se evidenció que el estudiante al abordar la situación planteada trajo consigo conocimientos previos relacionados con la razón de cambio instantánea y pendiente. Así que se puede corroborar que satisface el descriptor CP 1.7.

Figura 99.

Evidencia del registro de Pedro relacionada con la respuesta a la pregunta 6 a.


a). ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?
R/ Se observa una razón de cambio instantanea en 2x.
Para $\frac{dy}{dx}$ Dada Como Solución general

Fuente: Registro del estudiante pedro 2019.

La pregunta 6 en su literal b solicita trazar la gráfica de $y = x^2$+C en el plano xy para los siguientes valores de $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ¿Cuántas gráficas más puedes trazar?”

Al respecto, Ana, Antonio y Diana consideraron que se pueden trazar infinitas rectas, para graficarlas, tuvieron en cuenta los valores asignados a la constante C y las visualizaron a través de las gráficas ilustradas en la Figura 105; en ellas, mostraron rectas tangentes en cada curva trazada. Para este efecto, tomaron un punto fijo en las abscisas cuyo valor fue 1 y para las ordenadas los valores variaron, de acuerdo a la correspondencia asignada en cada punto de las diferentes curvas, posteriormente, en cada punto sobre cada curva trazaron rectas tangentes, para así visualizar las rectas que se pueden trazar.

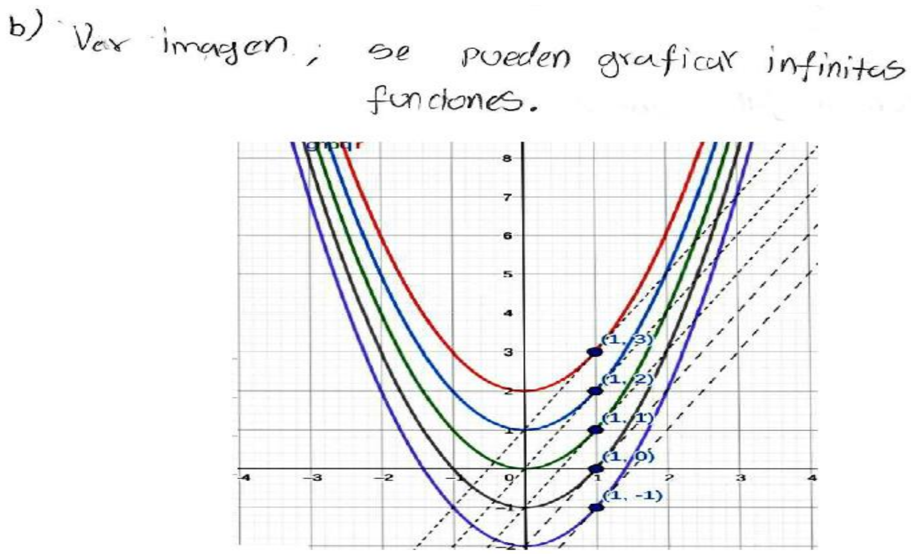
En este contexto, se observó en los estudiantes un razonamiento a través de un proceso de *folding back* que está estrechamente relacionado con el nivel 2 de comprensión, ya que realizaron distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo a través de los cuales identificaron características, similitudes y diferencias de los conceptos involucrados y los aplicaron en la construcción de las gráficas, por lo que sus respuestas satisfacen al descriptor A 2.4, luego, trazaron una familia de curvas que representó la solución de la ecuación diferencial correspondiente, lo que está en correspondencia con el descriptor E 2.4.

Asimismo, asociaron las pendientes de rectas tangentes con una misma abscisa a cada curva, las cuales se muestran en la Figura 105, cumpliendo con el descriptor para la acción A 3.4, posteriormente, determinaron la familia de curvas a partir de una ecuación diferencial, cumpliendo con el descriptor para la expresión E 3.4. Por lo tanto, se infiere que Ana, Antonio y Diana alcanzaron nivel 3 de comprensión; en este sentido, se observó un avance del nivel 2 al nivel 3 de comprensión.

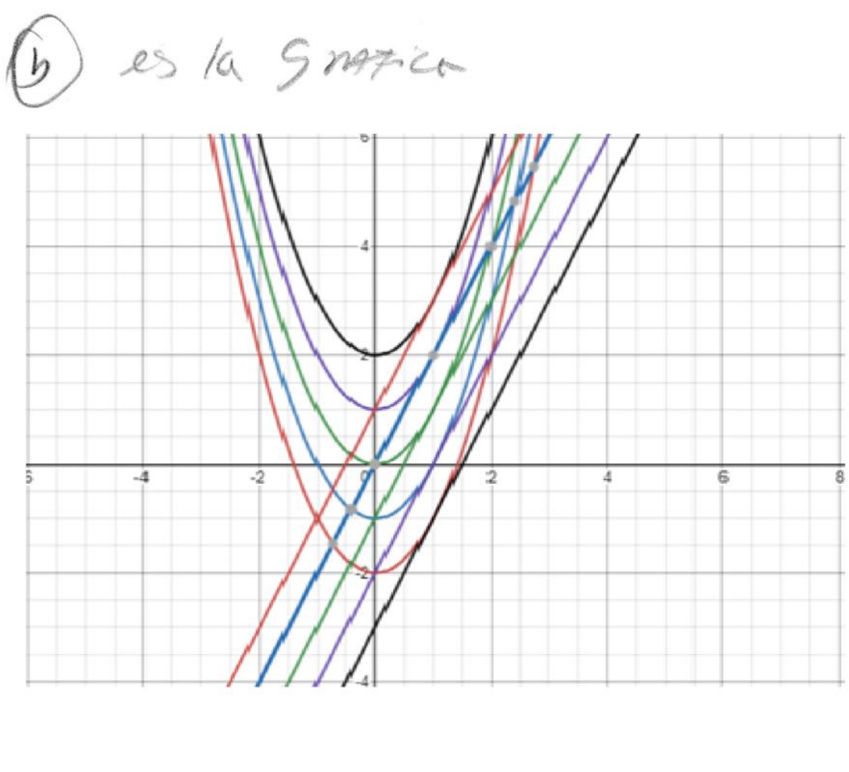
Figura 100.

Evidencia de Ana, Antonio y Diana, relacionado con la respuesta a la pregunta 6 b.

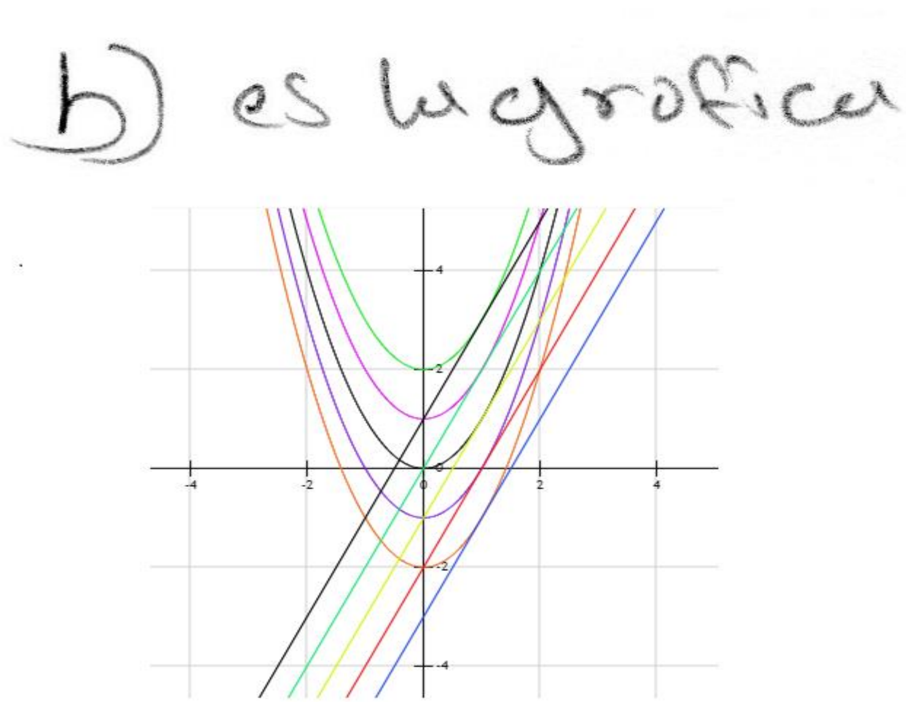
Evidencia del registro de Ana.



Evidencia del registro de Antonio.



Evidencia del registro de Diana.



Fuente: Registro de los estudiantes 2019.

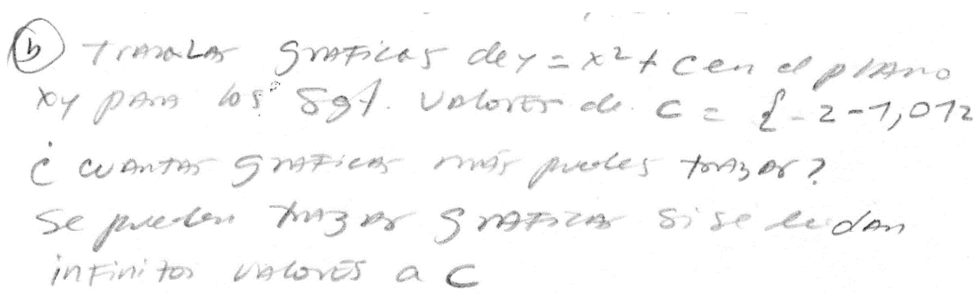
Por otra parte, Antonio, Diana y Juan, manifiestan respuestas similares, en las que consideraron que el número de rectas dependía de los valores asignados a las constantes C, como se muestra en la Figura 106, sin embargo, en ellas no se evidenció una gráfica o acción que permitiera visualizar las rectas que se podían trazar, además, se observó un proceso de *folding back* que quizás les permitió realizar distinciones matemáticas basadas en su conocimiento primitivo, sin embargo, no ilustraron este proceso, motivo por el cual estas respuestas no satisfacen los descriptores A 2.4, A 3.4 y E 3.4 propuestos para esta pregunta, así que solo satisfacen el descriptor E 2.4 , por lo tanto, los estudiantes al parecer exhiben una incipiente comprensión de los conceptos involucrados sin lograr avanzar hacia otros niveles desde el primer nivel.

Por su parte, Pedro no emite respuesta a este interrogante, lo que permite deducir que no cumple con los descriptores correspondientes, por lo tanto, se infiere que el estudiante permanece en el nivel 1 de comprensión relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

Figura 101.

Evidencia de Diana, Antonio, Juan y Pedro relacionado con la respuesta a la pregunta 6 b.

Evidencia del registro de Antonio.

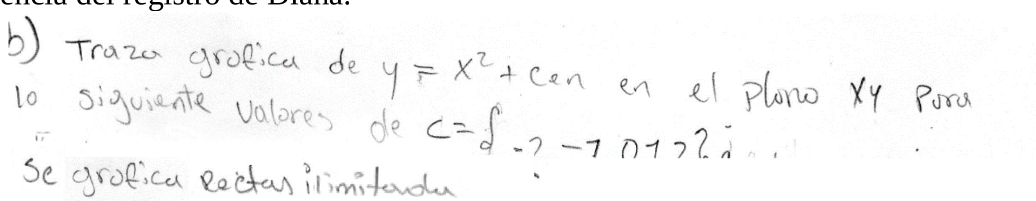


(b) Trazalas graficas de $y = x^2 + C$ en el plano xy para los sg. valores de $C = \{-2 -1, 0 1 2$

¿Cuantas graficas más puedes trazar?

Se pueden trazar graficas si se le dan infinitos valores a C

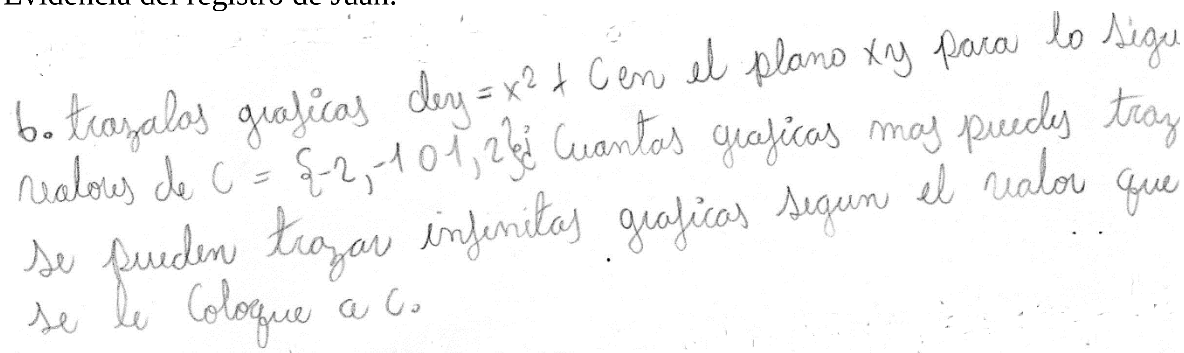
Evidencia del registro de Diana.



b) Traza grafica de $y = x^2 + c$en en el plano XY para lo siguiente valores de $c = \{-2 -1 0 1 2\}$ . . .

Se grafica Rectas ilimitadas

Evidencia del registro de Juan.



b. trazalos graficas de $y = x^2 + C$ en el plano xy para lo sigu valores de $C = \{-2, -1 0 1, 2\}$ ¿Cuantas graficas mas puedes traz

Se pueden trazar infinitas graficas segun el valor que se le cologue a C.

Fuente: Registro de la estudiante Ana 2019.

Para la pregunta 6 en su literal c que solicita representar gráficamente trozos de recta tangentes a las curvas trazadas para un mismo valor de x elegido, ¿Cómo son sus pendientes? ¿Qué relación tiene esas pendientes con la ecuación diferencial dada? Ana en su respuesta ilustrada en la Figura 107, exhibió un proceso algebraico para hallar una pendiente de una recta tangente a través de sustituciones diversas de los valores de C para generar la gráfica de la solución de la ecuación diferencial dada, en ella graficó la recta tangente en cada curva sobre una misma abscisa, lo cual se corresponde con el descriptor A 3.4, posteriormente, llevó a cabo un razonamiento relacionado con la situación planteada en el que concluye que la pendiente en cada curva es la misma, al determinar la familia de curvas a partir de la solución de ecuación diferencial, así que satisface el descriptor E 3.4.

El escenario anterior pone de manifiesto un proceso de *folding back* que le permitió a Ana rastrear información relacionada con los conceptos antes mencionados y posibilitó reconocer una razón de cambio instantánea como una ecuación diferencial; asimismo, Ana representó gráficamente la solución de la ecuación diferencial planteada, satisfaciendo el descriptor A 2.4. Además, se observó que Ana, Antonio y Diana representaron la solución de la ecuación diferencial a través de un gráfico, para el cual emplearon la calculadora gráfica e interactiva Demos, asociando las rectas tangentes en un punto con una abscisa, lo que está en congruencia con los descriptores para A 3.4 y E 3.4.

Además, Ana analizó el concepto de pendiente y sus diferentes manifestaciones en la respuesta ilustrada en la Figura 107, satisfaciendo el descriptor para la acción A 4.3, y al brindar una explicación a través del proceso algebraico sobe el concepto de pendiente a la curva, también satisfizo el descriptor E 4.3; entre tanto, Antonio y Diana no sustentaron el proceso gráfico de manera algebraica o simbólica, como se ilustra en la Figura 107.

Figura 102.

Evidencia de Ana relacionada con la respuesta a la pregunta 6c.

c) Ver imagen ; las pendientes son todas iguales en $x=1$, esto es dado porque la función es la misma pero con desplazamientos en el eje y.

el valor de la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Big|_{x=1} \longrightarrow m = 2(1) = 2$$

$$\boxed{m = 2}$$

$\downarrow$

la relación, es directa ya que de esta e c obtiene la pendiente.

Fuente: Registro de la estudiante Ana 2019.

Por su parte, Diana no respondió esta pregunta, por lo tanto, no avanzó su nivel de comprensión, dado que no satisface los descriptores propuestos para este interrogante. Por su parte, Antonio, Juan y Pedro dan cuenta de un razonamiento que no involucra procesos algebraicos que justifiquen la manera cómo dedujeron el valor de la pendiente. Antonio escribe la expresión algebraica $\frac{dy}{dx} = 2x$ y manifiesta que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es 2, mientras que Juan considera que las pendientes son paralelas y equivalentes para cada curva, sin embargo, no manifiesta valor alguno para la misma y no reconoce la pendiente con una razón de cambio instantánea en el contexto de las ecuaciones diferenciales. Pedro considera la pendiente como una razón de cambio instantánea que se asocia con la expresión $m = 2x$, asimismo, de su razonamiento no emerge una gráfica que represente o justifique los valores hallados. Se puede observar que asociaron las rectas tangentes a la curva con una misma abscisa, pero, al mismo tiempo, no explicaron el análisis del proceso realizado, así como de su solución, por lo tanto, no cumplieron con el descriptor para la acción A 4.3 ni para la expresión E 4.3. Así que logran exhibir un nivel 3 de comprensión. La Figura 108 ilustra las respuestas correspondientes.

Figura 103.

Evidencia de Antonio, Juan y Pedro relacionada con la respuesta a la pregunta 6 c.

La expresión $dy/dx = 2x$, el $2 =$ a la pendiente de esas rectas.

Evidencia del registro de Juan.

las pendientes son paralelas. la relacion es que las pend son equivalentes

Evidencia del registro de Pedro.

la pendiente de la recta es la razón de cambio instantánea $m = 2x$

Fuente: Registro de los estudiantes Antonio, Juan y Pedro 2019.

A continuación, se presenta el análisis de la pregunta 7 en la cual se tuvo en cuenta los aportes conceptuales sugeridos por los investigadores y por los estudiantes en episodios anteriores; cabe señalar que la información suministrada se relacionó con las representaciones simbólicas de algunas frases que aparecen en el enunciado de la pregunta, orientadas hacia el contexto de la situación planteada en la entrevista. Por ejemplo, $H(t)$ representó el número de habitantes presentes en un tiempo cualquiera; $\frac{dH}{dt} = KH$, simbolizó el crecimiento de habitantes directamente proporcional al número de habitantes presente en un tiempo t dado en años, con $K \in \boldsymbol{R}$; $H(0) = H_0$; indicó el número de habitantes inicial en un tiempo $t = 0$ años, denominada condición inicial; $H(t)$, señaló el número de habitantes en un tiempo t. Los estudiantes emplearon la información anterior según su criterio y conocimiento.

Por otro lado, la pregunta 7 comprende los literales a, b, c, d, e y f para las cuales se formularon descriptores en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión representados de la siguiente manera: literal a, descriptor CP 1.3; literal b, descriptor CP 1.6; literal c, descriptores A 4.3 y E 4.3; literal d, descriptores A 4.1 y E 4.1; literal e, descriptores A 4.1 y E 4.1, y literal f, descriptores A 2.4 y E 2.4; estos permitieron analizar la comprensión, avance y procesos de *folding back*, aspectos estrechamente relacionados con el concepto y solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

El enunciado de la pregunta 7 es: La ciudad R tiene un crecimiento de habitantes directamente proporcional al número presente en un tiempo cualquiera. Se sabe que el número de habitantes inicial es de 300 mil y al cabo de 6 años es de 900 mil" en el literal a, identifica las variables que están involucradas en la situación planteada"

Al respecto, Antonio, Juan y Pedro identificaron la variable dependiente e independiente involucradas en la situación planteada, las cuales se relacionaron con el número de habitantes y el tiempo, por su parte, Ana y Diana no lograron identificaron estas variables. Con ello, se evidenció que Antonio visualizó y explicitó la variable dependiente $y(t) =$ número de habitantes en función de la variable independiente de tiempo t, y de igual modo se indicó que $t =$tiempo medido en años; cabe anotar que Juan solo hace referencia a la cantidad de habitantes.

Se puede apreciar entonces cómo los estudiantes reconocen las variables involucradas en una situación planteada, observando en ellos procesos de *folding back* que evidenciaron la identificación de símbolos para asociarlos con las variables involucradas. Además, Antonio, Juan y Pedro con sus respuestas, satisfacen el descriptor CP 1.3, mientras que Ana y Diana no lo logran. Este descriptor se empleó para analizar si los estudiantes identificaron las variables involucradas en la situación planteada, tal como se ilustra en la Figura 109.

Figura 104.

Evidencia de Antonio, Juan y Pedro relacionado con la respuesta a la pregunta 7 a.

Evidencia del registro de Antonio.

Y(t) = Número de habitantes en un tiempo t

T = tiempo en años.

Evidencia del registro de Juan.

Cantidad de habitantes y tiempo

Evidencia del registro de Pedro.

R/ H: # de habitantes

t: Tiempo que tarda en crecer la población.

Fuente: Registro de los estudiantes Antonio, Juan y Pedro 2019.

Para el literal b en el que se solicita identificar las condiciones iniciales propuestas en la situación planteada, se observó que los estudiantes Ana, Diana, Juan y Pedro, recurrieron a procesos de *folding back* a través de los cuales emplearon símbolos y los asociaron a las dos condiciones iniciales identificadas, las cuales ilustraron de la siguiente manera:

Ilustración de Ana, asoció los símbolos $H(0) = H_0 = 300.000$ habitantes para t= 6 años, $H(6) = 900.000$ habitantes.

Ilustración de Antonio: lo indicó como $H_0 = 300.000$

Ilustración de Pedro, estableció así $T = 0, x = 700.000$

Ilustración de Juan, optó por explicitar $T = 0$; 300.000 habitantes al cabo del tiempo igual a seis años

Las ilustraciones anteriores y la Figura 110 dan cuenta de la manera en la cual los estudiantes reconocieron e identificaron la variable dependiente e independiente y la manera como estaban relacionadas en la situación planteada, de modo que coincidieron con las condiciones planteadas en el enunciado, aspecto tenido en cuenta en el descriptor CP 1.6.

Figura 105.

Evidencia de Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro relacionada con la respuesta a la *pregunta 7 b.*

Evidencia de Ana.

b)

$\frac{dH}{dt} = kH$; $H(0) = H_0 = 300$ mil

Pasados $t = 6$ años $H(6) = 900$ mil

Evidencia del registro de Antonio.

(b) identifica las condiciones iniciales propuesta en la situación planteada

$y(0) = 300.000$

Evidencia del registro de Diana.

. Identifica las condiciones iniciales propuestas en la situación planteada.

$t = 0$; $H = 700.000$

$t = 6$; $H = 900.000$

Evidencia del registro de Pedro.

J. Identifica las variables que están involucradas en la situación planteada.

R/ H: # de habitantes

t: Tiempo que tarda en crecer la población.

Evidencia del registro de Juan.

tiempo = 0 habitantes = 300.000 y luego de 6 años habitantes

Fuente: Registro de los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan 2019.

Con respecto a la pregunta c, escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada, Ana, Diana, Juan y Pedro identificaron variables y símbolos que posteriormente las relacionaron a través de la expresión $\frac{dH}{dt} = KH$; se observó una clara relación entre la variación de habitantes con respecto al tiempo , mientras que Antonio optó por representarlo de manera diferente $\frac{dy}{dt} = 100.000$; $y(t) = 300.000 + 100.000t$, la cual es un claro reflejo de que le cuesta dificultad identificar la razón de cambio instantánea de las variables involucradas en la situación planteada.

La visualización algebraica presentada por los estudiantes, evidencia la forma en que ellos concibieron y relacionaron la situación planteada en términos de la derivada como una razón de cambio instantánea y su debida interpretación, de hecho, se observó allí que los estudiantes identifican las variables y la variación de los habitantes con respecto al tiempo, excepto Antonio, que solo expresó su relación con el tiempo, lo cual en el marco de la teoría en mención, usa las representaciones pictóricas basadas en sus conocimientos primitivos y a pesar de usar procesos de *folding back*, no logró conectar los conceptos que posee para sintetizar una figura o expresión que represente el enunciado.

En este contexto de la pregunta, se apreciaron reflexiones continuas que permitieron cuestionamientos relacionados con el proceso de compresión de cada estudiante de los conceptos que conoce y que a través de procesos de *folding back* las lograron configurar mediante expresiones algebraicas.

Lo mencionado anteriormente, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, es propio de estudiantes que están razonando en el nivel 4 de comprensión, así entonces, al analizar las respuestas de los estudiantes, se puede afirmar que satisfacen el descriptor A 4.4, formulado para examinar qué tipos de relaciones establecieron los estudiantes entre las derivadas conocidas y las diversas interpretaciones de una ecuación diferencial, evidenciado en la explicación dada por los estudiantes sobre la expresión algebraica.

Además, sus respuestas satisfacen al descriptor E 4.4, postulado para analizar el tipo de interpretación realizado por los estudiantes para escribirla como una ecuación diferencial, aspectos que se percibieron al verificar la coherencia en la expresión algebraica, identificando las variables dependiente e independiente. Se puede decir entonces que los estudiantes alcanzaron el nivel de comprensión 4, excepto Antonio, al no satisfacer los descriptores propuestos. La Figura 111 ilustra las respectivas respuestas.

Figura 106.

Evidencia de Ana, Antonio, Juan y pedro relacionada con la respuesta a la pregunta 7c.

Evidencia del registro de Ana.

$$c)\quad \frac{dH(t)}{dt} = KH(t)$$

Evidencia del registro de Antonio.

$$Dy/dt = 100.000 \quad y(t) = 300.000 + 100.000t$$

Evidencia del registro de Diana.

$$\frac{dH}{dt} = KH \quad \int \frac{dH}{H} = \int K\, dK$$

$$In\, H = Kt + C \quad H = e^{Kt} + e^{c} \quad H = ce^{Kt}$$

Evidencia del registro de Pedro.

$$\frac{dH}{dt} = KH \quad \int \frac{dH}{H} = \int K\, dK$$

$$In\, H = Kt + C \quad H = e^{Kt} + e^{c} \quad H = ce^{Kt}$$

Evidencia del registro de Juan.

$$dH/dt = KH$$

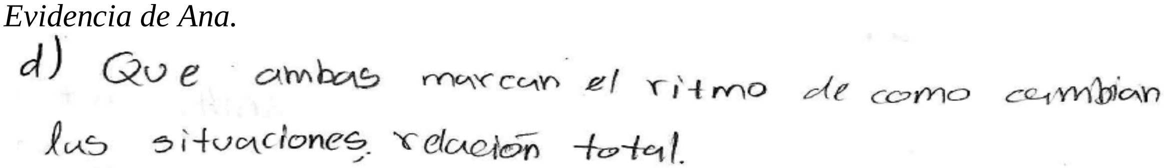
Fuente: Registro de los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan 2019.

Para el literal d, ¿Qué relación observas entre el concepto de derivada y la ecuación diferencial planteada por ti?” Ana, Diana, Juan y Pedro manifestaron en diferentes formas el tipo de relación que generó su razonamiento teniendo en cuenta la expresión algebraica con la que representaron la situación planteada, en este orden de ideas, Ana considera que “ambas marcan el ritmo de cambio de las situaciones ”, adicional a lo anterior, manifiesta que la relación entre la derivada y la ecuación diferencial es total; Diana, por su parte, manifiesta que es una relación estrecha entre una razón de cambió instantánea y una antiderivada; por su lado, Juan considera que la relación se puede establecer entre la derivada de una función y una antiderivada, asimismo, su interpretación la realizó sobre la expresión $H = Ce^{kt}$; por otro lado, Pedro, manifestó que la relación entre la ecuación diferencial y la derivada está dada por la pendiente, mientras que Antonio no logra expresar un tipo de relación en la ecuación propuesta por él. Esto permite afirmar que cumplen los descriptores A 4.1 y E 4.1, formulados para analizar de qué manera examinaron los estudiantes la ecuación diferencial que ellos plantearon y las características de la misma. La Figura 112 ilustra las respectivas respuestas.

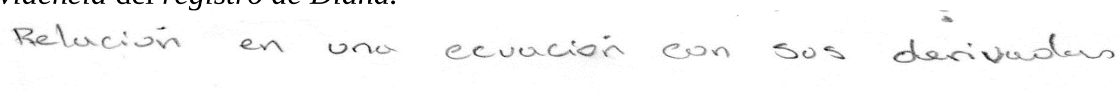
Figura 107.

Evidencia de Ana, Diana, Juan y Pedro relacionado con la respuesta a la pregunta 7 d.

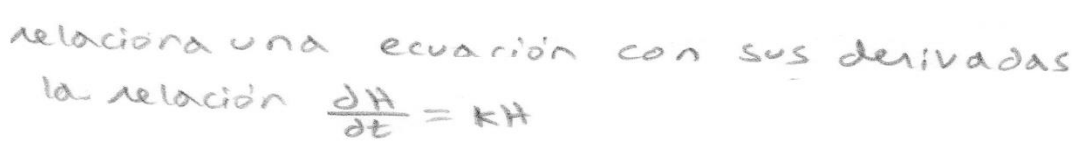
Evidencia de Ana.



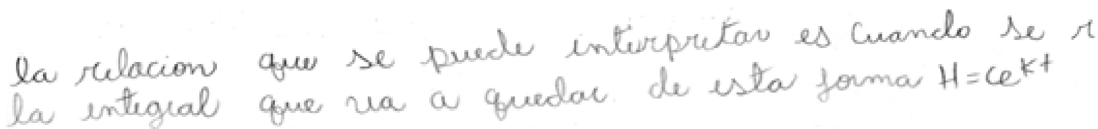
Evidencia del *registro de Diana.*



Evidencia del *registro de Pedro.*



Evidencia del *registro de Juan.*



Fuente: Registro de los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan 2019.

Para el literal e que solicita hallar la solución general de la ecuación diferencial planteada e interpretar su solución, Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro explicitaron de diferentes maneras la solución de la ecuación diferencial; si bien algunos recurrieron a procesos algebraicos y de razonamiento que les permitieran obtener una respuesta, Antonio escribió una solución no acorde a la situación planteada, ya que solo escribió como solución la expresión $y(1) = 100.00t + 300.00$, la cual no guarda relación con la ecuación diferencial, mientras que Ana empleó procesos algebraicos y mecánicos en los que involucró las condiciones iniciales propuestas, para hallar una solución general de la situación planteada, observando que no se brindó una interpretación a dicha solución.

Diana halló la solución de la ecuación a través de procesos algebraicos y mecánicos, que le permitieron obtener una solución general de la ecuación planteada, en ese proceso de solución usó las condiciones iniciales propuestas, pero se percibió que no interpretó la solución obtenida; por su lado, Juan explicita una solución sin evidenciar un proceso algebraico, además, no emplea las condiciones iniciales y no interpreta la solución hallada; Pedro por su parte, realizó un proceso algebraico que le posibilitó obtener la solución de la ecuación diferencial propuesta por él; cabe anotar que no se evidenció una interpretación de dicha solución.

El escenario anterior permitió evidenciar en la Figura 113 cómo los estudiantes a través de diferentes procesos de *folding back* obtienen de alguna manera una solución de la ecuación diferencial, la cual expresaron en forma algebraica; por otro lado, en cada estudiante se evidenció un razonamiento que involucró la comprensión de los conceptos de derivada, antiderivada, ecuación diferencial, logaritmo natural y función exponencial, lo que permitió avanzar y retroceder entre los niveles de comprensión hasta lograr un nivel 4.

Figura 108.

Evidencia de Ana, Diana, Juan y Pedro relacionada con la respuesta a la pregunta 7 e

Evidencia del *registro de Ana.*

$H(t) = Be^{kt}$

$H(0) = B \longrightarrow B = 300\text{mil}$

$H(6) = 300\,e^{6K} \longrightarrow 900 = 300\,e^{6K}$

$3 = e^{6K} \longrightarrow 6K\ln(e) = \ln(3)$

$6K = \ln(3)$

$K = \frac{\ln(3)}{6}$

$K = 0{,}18$

$H(t) = 300\,e^{0{,}18t} \longrightarrow$ solucion del Problema

Evidencia del *registro de Antonio.*

solución

$y(t) = 100.000t + 300.000$

Evidencia del *registro de Juan.*

la solucion general $\frac{dH}{dt} = KH \quad H = Ce^{Kt}$

Evidencia del *registro de Diana.*

Cuando $t=0;\ H = 700.000$

$700.000 = ce^{k0}$ $\quad H = 700.000e^{kt}$

Cuando $t=6;\ H = 900.000 = 700.000e^{6k}$

$\ln\left|\frac{900.000}{700.000}\right| = \ln\left|e^{6k}\right|$ $\quad \ln\left|\frac{900.000}{700.000}\right| = k$

$k = 0.041$ $\quad H = 700.000e^{0.041}$

Evidencia del *registro de Pedro.*

Cuando $t=0\ ;\ H=700.000$

$700000 = ce^{k0}$

$c = 700.000$

$H = 700000e^{kt}$

Cuando $t=6\ ;\ H = 900.000$

$900000 = 700000e^{6k}$

$\frac{900000}{700000} = e^{6k}$

$\mathrm{Ln}\left|\frac{900000}{700000}\right| = \mathrm{Ln}\left|e^{6k}\right|$

$\frac{\mathrm{Ln}\left|\frac{900000}{700000}\right|}{6} = k$

$k = 0.041$

$H = 700000e^{0.041k}$

Fuente: Registro de los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan 2019.

En el literal f, se solicita representar e interpretar gráficamente la solución de la ecuación diferencial, teniendo en cuenta las condiciones dadas.” Los estudiantes tenían a su disposición ordenadores que les facilitaron representar gráficamente la solución de la ecuación diferencial, para este efecto, se les sugirió que emplearan la calculadora graficadora en línea Demos. En este orden de ideas, Ana y Diana representaron gráficamente la solución de la ecuación diferencial teniendo en cuenta las condiciones iniciales; cabe señalar que ellas manifestaron que “para interpretar la solución de la ecuación diferencial faltaba recordar algunos conceptos que en el momento no recordaban”, mientras que Antonio graficó de manera errónea la situación correspondiente a la ecuación diferencial que se había propuesto.

Por su parte, Juan al no aplicar las condiciones iniciales en la solución de la ecuación diferencial, exhibió dificultades para representarla gráficamente a través de la calculadora graficadora. Pedro, por su parte, no logró representar la solución de la ecuación diferencial gráficamente. Cabe señalar que, para la interpretación de la gráfica, teniendo en cuenta los valores iniciales, declararon que "para interpretar una ecuación diferencial no imaginaba que se requiriera de tantos conceptos".

En este contexto, se vislumbró cierta interacción entre los estudiantes y el ordenador, sin embargo, algunos estudiantes manifestaron de nuevo que "la interpretación de la solución de la ecuación diferencial estaba complicada", adicional a lo anterior, manifestaron falta de tiempo; por su parte, Pedro, declaró que "obtener la forma general de la ecuación diferencial fue todo un reto", agregó además, "tuve algunas dificultades para hacerlo y su interpretación requiere de algunos conceptos que no recuerdo en el momento".

El escenario anterior evidencia cómo los estudiantes requieren de diversos conceptos para realizar distinciones matemáticas, a través de acciones basadas en procesos de *folding back* que les permitan reorganizar el conocimiento en los niveles de comprensión anteriores para establecer diferencias y similitudes entre ellos y así graficar la solución de una ecuación diferencial obtenida.

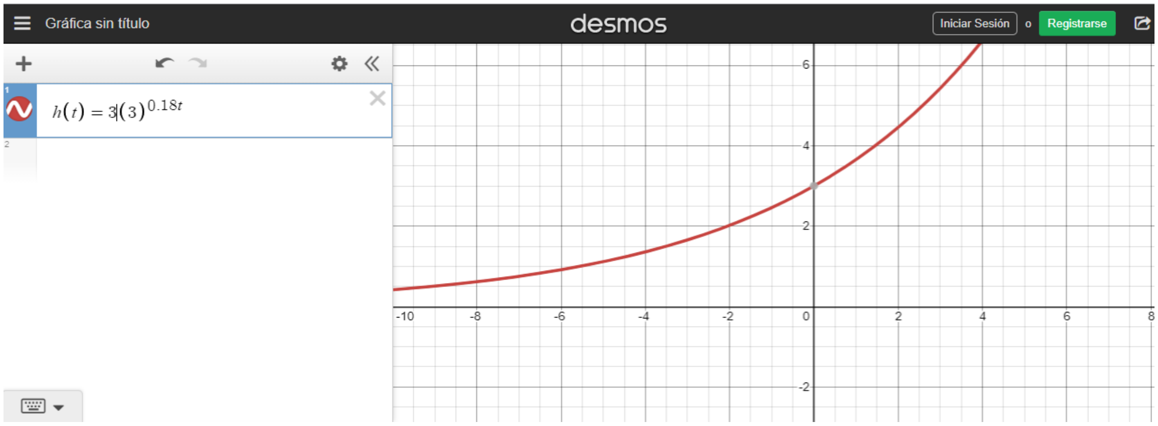
Se observa entonces que los estudiantes no logran establecer una explicación a partir de la gráfica de la solución de la ecuación diferencial propuesta por ellos, sin embargo, avanzan hacia el nivel 4 de comprensión.

Cabe aclarar que, para graficar las respectivas funciones, se suprimieron los ceros con el objetivo de facilitar su visualización así: Ana: $h(t) = 30000(3)^{\frac{t}{6}}$; Diana, $h(t) = 700000e^{0.041t}$ y Antonio, $y(t) = 100000t + 300000$. La Figura 114 ilustra la interacción de los estudiantes con la mencionada calculadora gráfica.

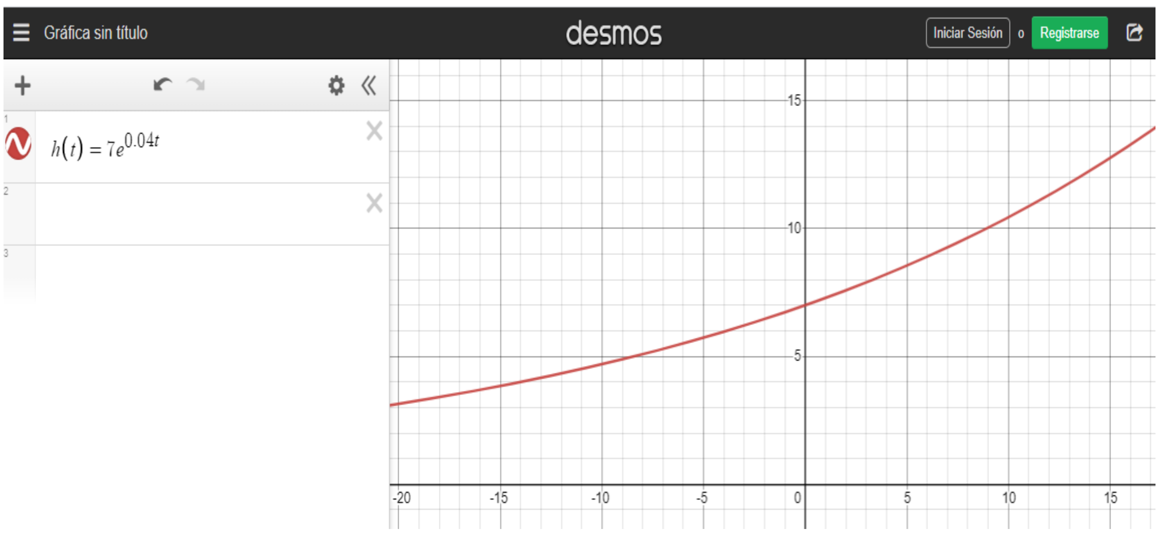
Figura 109.

Evidencia de Ana, Diana y Antonio relacionada con la respuesta a la pregunta 7 e.

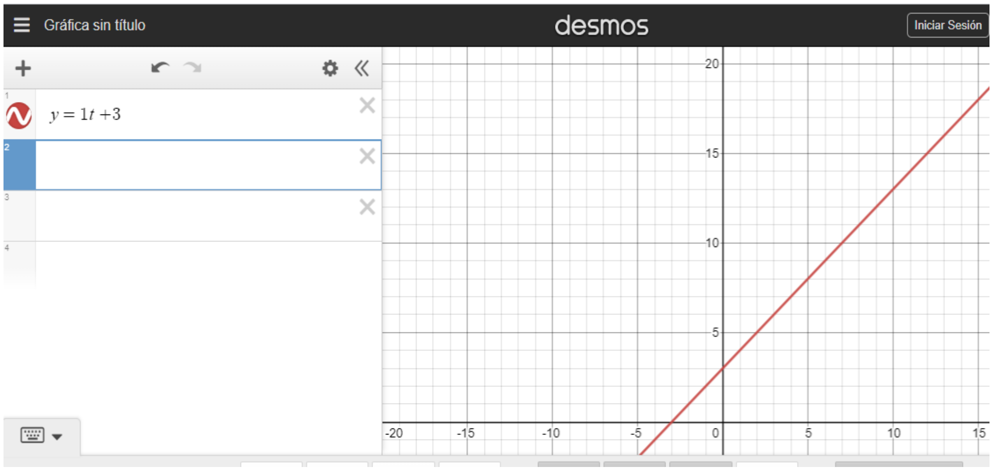
Evidencia del *registro de Ana.*



Evidencia del *registro de Diana*



Evidencia del *registro de* Antonio.



Fuente: Registro de los estudiantes Ana, Antonio y Diana 2019.

A continuación, se presenta un análisis retrospectivo de la información del episodio cuatro en el contexto de lo declarado por Molina (2011).

4.4.6. Análisis retrospectivo del episodio 4 relacionado con el concepto de ecuaciones diferenciales.

Con el propósito de analizar la ruta conceptual seguida por los estudiantes para comprender el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden, vale la pena reiterar lo mencionado por Molina (2011), quien propone cuatros aspectos para realizar el análisis retrospectivo: identificar acciones realizadas por los estudiantes, evidenciar conceptos involucrados al abordar una situación planteada, detallar la evolución de la comprensión y analizar el nivel de comprensión de los estudiantes. A continuación, se mostrará cada aspecto de manera sucinta, asimismo, se detallarán algunos momentos del desarrollo del experimento considerando los aspectos mencionados.

4.4.6.1. Identificar acciones realizadas por los estudiantes.

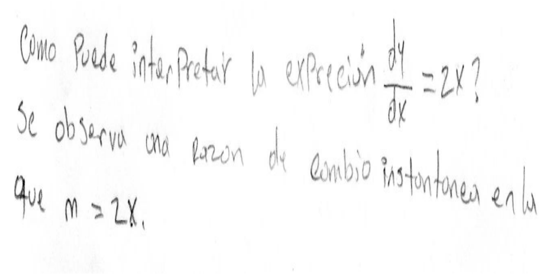
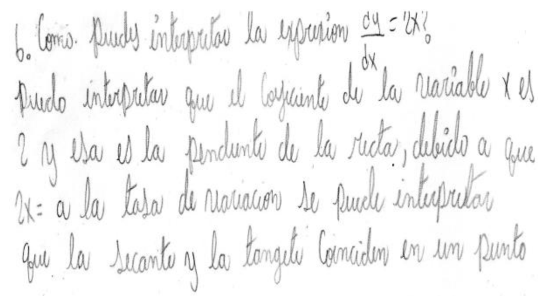
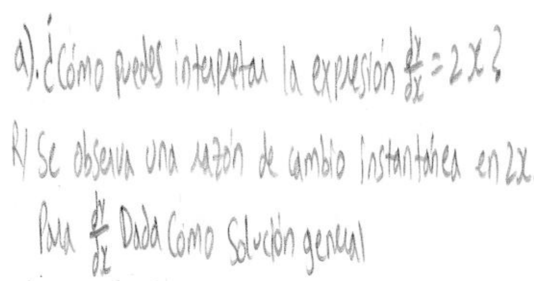
El análisis retrospectivo de la información recolectada en el episodio 4, permitió identificar algunas acciones realizadas por Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro, para dar respuesta a las preguntas 6 y 7 relacionadas con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden y su proceso de solución; en este contexto, los estudiantes realizaron acciones que implicaron procesos de actuación y de expresión, los cuales mediante un proceso de *folding back*, les posibilitó de alguna manera, establecer relaciones que delinearon un camino para orientarlos hacia la comprensión de nuevos conceptos.

En la perspectiva de lo señalado anteriormente, la Tabla 34 contextualiza la pregunta 6 en su literal a; en ella, se muestran las acciones realizadas por los estudiantes para esta pregunta que involucra una relación entre el concepto de razón de cambio y una ecuación diferencial lineal de primer orden. La tabla se conformó por cuatro columnas, distribuidas así: primera columna, acciones realizadas por los estudiantes; segunda columna, descripción del proceso realizado por los participantes; tercera columna, preguntas abordadas, y cuarta columna, respuesta emitida por los estudiantes a la pregunta en cuestión.

Tabla 34.

Acciones relacionadas con el concepto de ecuaciones diferenciales pregunta 6 a.

Acción	Descripción	Pregunta	Respuesta del estudiante
Ana **Reconoce la razón de cambio en una ecuación diferencial lineal de primer**	Empleó el proceso de *folding back,* con el cual identificó criterios y definiciones del concepto de razón de cambio y los relacionó con la ecuación diferencial.	**6, literal a** ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?	a) se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva $y=x^2+C$, en cualquier punto de la curva.
Antonio **Reconoce la razón de cambio en una ecuación diferencial lineal de primer**	Empleó el proceso de *folding back,* con el cual identificó criterios y definiciones del concepto de razón de cambio y los relacionó con la ecuación diferencial.	**6, literal a** ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?	la Ecuación $dy/dx=2x$ es la recta TAngente en un punto de la grafica $y=x^2$

Diana **Reconoce la razón de cambio en una ecuación diferencial lineal de primer**	Empleó el proceso de *folding back*, con el cual identificó criterios y definiciones del concepto de razón de cambio y los relacionó con la ecuación diferencial.	**6, literal a** ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?	 Cómo Puede interPretar la exPreción $\frac{dy}{dx} = 2x$? Se observa una Razon de cambio instantanea en la que $m = 2x$.
Juan **Reconoce la razón de cambio en una ecuación diferencial lineal de primer**	Empleó el proceso de *folding back*, con el cual identificó criterios y definiciones del concepto de razón de cambio y los relacionó con la ecuación diferencial.	**6, literal a** ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?	 6. Como puedes interpretar la expresion $\frac{dy}{dx} = 2x$? Puedo interpretar que el coeficiente de la variable x es 2 y esa es la pendiente de la recta, debido a que $2x =$ a la tasa de variacion se puede interpretar que la secante y la tangente coinciden en un punto
Pedro **Reconoce la razón de cambio en una ecuación diferencial lineal de primer**	Empleó el proceso de *folding back*, con el cual identificó criterios y definiciones del concepto de razón de cambio y los relacionó con la ecuación diferencial.	**6, literal a** ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?	 a). ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$? R/ Se observa una razón de cambio instantánea en 2x. Para $\frac{dy}{dx}$ Dada Como Solución general

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011).

A continuación, en la Tabla 35 se muestra la pregunta 7 en su literal c, para la que se mencionan algunas de las acciones realizadas por los estudiantes al abordar la pregunta; se pone de manifiesto la posible relación entre una derivada y una ecuación diferencial.

Tabla 35.

Acciones relacionadas con el concepto de ecuaciones diferenciales pregunta 7 c.

Acción	Descripción	Pregunta	Respuesta del estudiante

Ana **Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.**	Identificó criterios y definiciones a través de procesos de *folding back* y los asoció con una ecuación diferencial.	**7, literal c** Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada.	c) $\frac{dH(t)}{dt} = KH(t)$
Antonio **Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.**	Identificó criterios y definiciones a través de procesos de *folding back* y los asoció con una ecuación diferencial.	**7, literal c** Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada.	$Dy/d_t = 100.000$ $y(t) = 300.000 + 100.000t$
Diana **Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.**	Identificó criterios y definiciones a través de procesos de *folding back* y los asoció con una ecuación diferencial.	**7, literal c** Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada.	$\frac{dH}{dt} = KH$ $\int \frac{dH}{H} = \int K\,dK$ $\ln H = Kt + C$ $H = e^{Kt} + e^{c}$ $H = ce^{Kt}$
Juan **Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.**	Identificó criterios y definiciones a través de procesos de *folding back* y los asoció con una ecuación diferencial.	**7, literal c** Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada.	$dH/dt = KH$
Pedro **Interpreta los tipos de**	Identificó criterios y definiciones a	**7, literal c** Escribe una ecuación	

relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.	través de procesos de *folding back* y los asoció con una ecuación diferencial.	diferencial que represente la situación planteada.	$\frac{\partial H}{\partial t} = kH$ $\int \frac{\partial H}{H} = \int k\partial t$

Fuente: Creación propia con base en lo manifestado en Molina (2011).

4.4.6.2. Evidenciar conceptos empleados por los estudiantes en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

El análisis del cuarto episodio reveló la manera cómo los estudiantes centraron su atención alrededor del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden y, la forma cómo se apropiaron de otros subyacentes a él, lo que les permitió llevar a cabo procesos de razonamiento que les posibilitó distinguir características y propiedades para clarificar y organizar las ideas relacionadas con los conceptos involucrados en dicha ecuación.

Es importante enfatizar que los procesos de *folding back* se consideran relevantes para evidenciar la naturaleza y formas de comprensión de los conceptos matemáticos, los cuales se ilustran en las Tablas 36, 37, 38 y 39 ya que de acuerdo el cumplimiento de los descriptores clasificados por nivel, por complementariedad y por concepto, permiten rastrear la evolución de la comprensión de cada estudiante a través de las categorías y subcategorías.

4.4.6.3. Descripción de la evolución de la comprensión del concepto del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

En este apartado, el análisis de la información recolectada en el episodio 4, permite detallar la ruta conceptual seguida por los estudiantes en su proceso de comprensión del concepto de ecuación diferencial de primer orden. En esta dirección, se observó que la comprensión de Ana y Antonio se dio primero actuando y luego expresando, así entonces, según sus respuestas a la pregunta 6 en sus literales b y c; ambos alcanzan el nivel 4 de comprensión, cabe aclarar que Ana, según el cumplimiento de los respectivos descriptores, evidencia su paso por los cuatro niveles, mientras que Antonio presenta un salto del nivel 2 al nivel cuatro. Las Tablas 36, 37, 38 y 39 ilustran los respectivos procesos de comprensión. Además, las Figuras115, 116, 117, 118 y 119, muestran un esquema aproximado del proceso de comprensión de los estudiantes.

Tabla 36.

Evidencia de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Ana relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

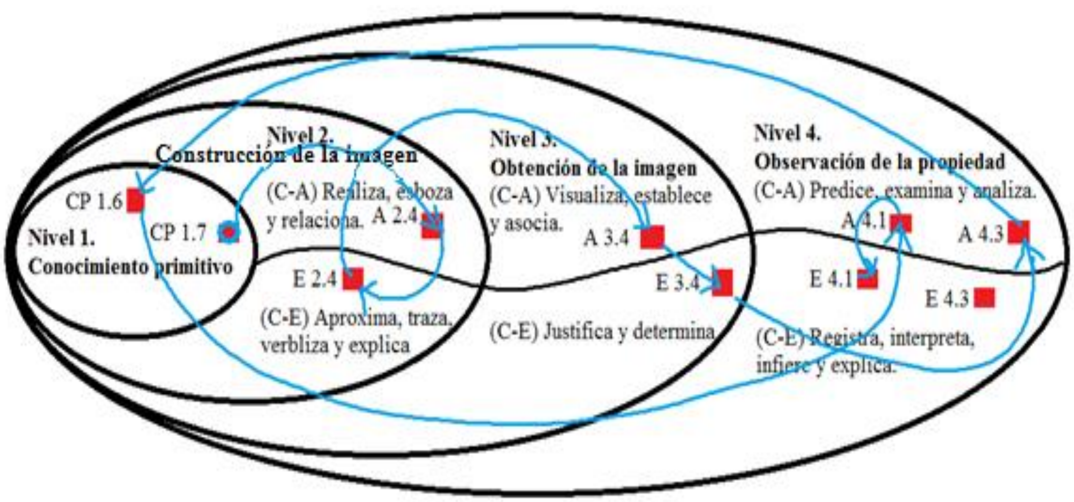
Nombre				**Pedro**											
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
4	6	A	Razón de cambio			R		CP 1.7							CP
		B	Parábola, plano			R			A 2.4	E 2.4	A 3.4	E 3.4			N2-N3
		C	Pendiente, ecuación diferencial	A	M	R			A 2.4	E 2.4	A 3.4	E 3.4	A 4.3	E 4.3	N2-N3-N4
	7	A	Variables			R		CP 1.7							CP
		B	Condiciones iniciales	A	M	R		CP 1.6							CP
		C	Ecuación diferencial.	A		R							A 4.4	E 4.4	N4
		D	Derivada, ecuaciones diferenciales.	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
		E	Ecuación diferencial			R							A 4.3		N3
		F	Graficar							A 2.4	E 2.4				N2

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

Asimismo, el análisis relacionado con la evolución de la comprensión en mostrado en la tabla anterior y permitió realizar una correlación entre las respuestas de las preguntas 6 y 7. Considerando la tabla anterior, la Figura 115 es un esquema aproximado del proceso de comprensión exhibido por Ana a través de los niveles en correspondencia con el cumplimiento de los respectivos descriptores.

Figura 110.

Esquema aproximado del proceso de comprensión de Ana sobre el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.



Fuente: Construcción propia con base en los datos recolectados en la Tabla 36.

Descriptores empleados en la Figura 115.

- CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
- CP 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
- A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
- E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.

- A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
- E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
- A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
- E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
- A 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones
- E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
- A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
- E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Tabla 35.

Evidencia de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Antonio relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

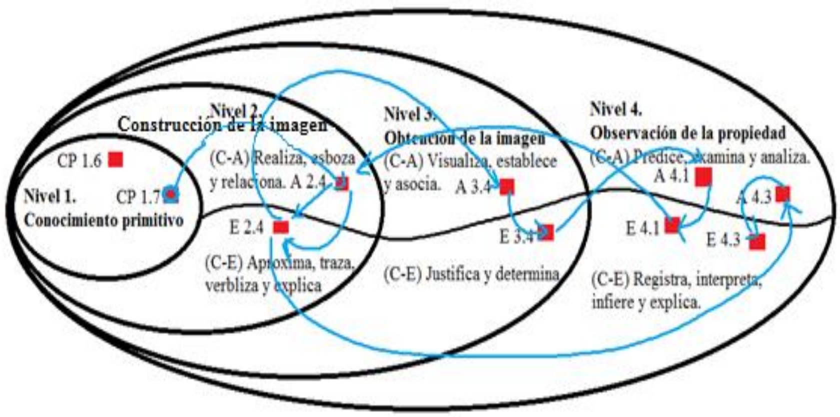
Nombre				Pedro											
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
4	6	A	Razón de cambio			R		CP 1.7							CP
		B	Parábola, plano			R			A 2.4	E 2.4	A 3.4	E 3.4			N2-N3
		C	Pendiente, ecuación diferencial	A	M	R			A 2.4	E 2.4			A 4.4	E 4.4	N2-N3-N4
	7	A	Variables			R		CP 1.7							CP
		B	Condiciones iniciales	A	M	R		CP 1.6							CP
		C	Ecuación diferencial.	A		R							A 4.1	E 4.1	N4
		D	Derivada, ecuaciones diferenciales.	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
		E	Ecuación diferencial			R							A 4.3		N3
		F	Graficar							A 2.4	E 2.4				N2

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada**.**

La Figura 116 ilustra un esquema del proceso de comprensión exhibido por Antonio en correspondencia con los descriptores señalados y momentos de *folding back* realizados en cada uno de los respectivos niveles de comprensión.

Figura 111.

Caracterización del posible progreso de la comprensión de Antonio sobre la ecuación diferencial lineal de primer orden



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 36.

Descriptores empleados en la Figura 116.

- CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
- CP 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
- A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
- E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
- A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
- E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.

- A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
- E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
- A 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones
- E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
- A 4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
- E 4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Por su parte, Juan y Pedro exhiben comprensión actuando y expresando, de acuerdo a las respuestas a la pregunta 6 en su literal a; manifiestan conocimiento primitivo, posteriormente en el b, exhiben nivel de comprensión 2, dado que las respuestas satisfacen los descriptores A.2.4 para la complementariedad de la acción y E.2.4 para la complementariedad de la expresión; asimismo en el c, exhiben nivel 4 de comprensión, dado que cumple con los descriptores A 4.3 para la acción y E 4.3 para la expresión, lo que pone de manifiesto la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos, mencionada por Pirie y Kieren.

Por otro lado, Juan y Pedro evidenciaron conocimiento primitivo con el análisis de la pregunta 7 en los literales a y b, ya que satisfacen los descriptores CP 1.6 y CP 1.7; asimismo, en el c, manifiestan nivel 4, dado que la respuesta cumple los descriptores A 4.4 para la complementariedad de la acción y E 4.4 para la complementariedad de la expresión; en este contexto, se puede decir que ambos estudiantes manifiestan un avance del nivel 1 al nivel cuatro sin trasegar el 2 y el 3. Las Tablas 37 y 38 ilustran los descriptores cumplidos en correspondencia con las respuestas manifestadas por los estudiantes.

Tabla 36.

***Evidencia de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Juan relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden*.**

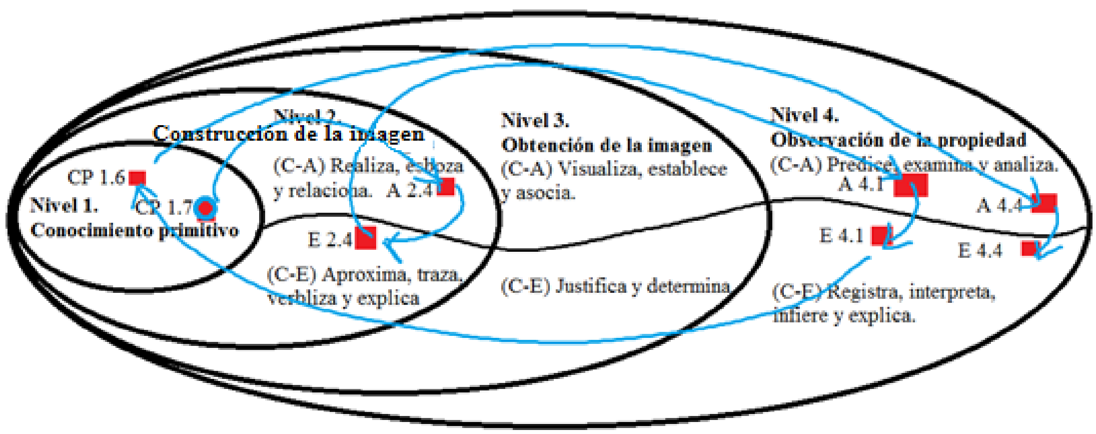
Nombre				**Juan**											
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
4	6	A	Razón de cambio			R		CP 1.7							CP
		B	Parábola, plano			R			A 2.4	E 2.4					N2
		C	Pendiente, ecuación diferencial	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
	7	A	Variables			R		CP 1.7							CP
		B	Condiciones iniciales	A	M	R		CP 1.6							CP
		C	Ecuación diferencial.	A		R							A 4.4	E 4.4	N4
		D	Derivada, ecuaciones diferenciales.	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
		E	Ecuación diferencial	A		R							A 4.3		N4
		F	Graficar				G								

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

Teniendo en cuenta la información ilustrada en las Tablas 39 y 40, se construye un esquema aproximado del proceso de comprensión de Juan y Pedro. Las Figuras 117 y 118, ilustran respectivamente el cumplimiento de los descriptores establecidos para cada nivel y el respectivo redoblamiento realizado.

Figura 112.

Caracterización del posible progreso de la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden Juan.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 37.

Descriptores empleados en la Figura 117

- CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
- CP 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
- A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
- E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
- A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
- E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.

- A 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones
- E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones
- ante situaciones dadas.

Tabla 37.

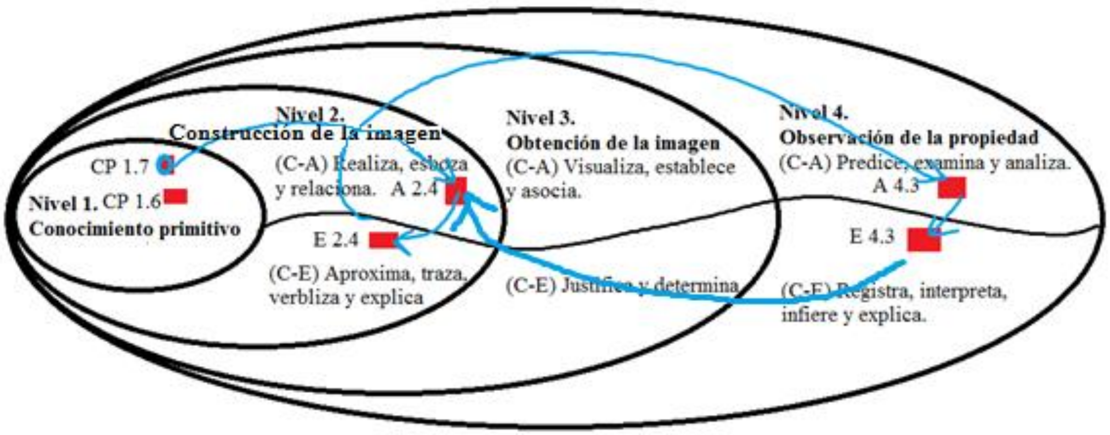
Evidencia de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Pedro relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

Nombre				**Juan**											
Epi	Pre		Concepto	Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
				Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
4	6	A	Razón de cambio			R		CP 1.7							CP
		B	Parábola, plano			R			A 2.4	E 2.4					N2
		C	Pendiente, ecuación diferencial	A	M	R							A 4.3	E 4.3	N4
	7	A	Variables			R		CP 1.7							CP
		B	Condiciones iniciales	A	M	R		CP 1.6							CP
		C	Ecuación diferencial.	A		R							A 4.4	E 4.4	N4
		D	Derivada, ecuaciones diferenciales.	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
		E	Ecuación diferencial	A		R							A 4.3	E 4.3	N4
		F	Graficar												

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

Figura 113.

Caracterización del progreso de comprensión de Pedro relacionada con ecuación diferencial lineal de primer orden.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 38.

Descriptores empleados en la Figura 118.

- CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
- CP 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
- A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
- E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
- A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones con una ecuación diferencial dada.
- E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas manifestaciones en una ecuación diferencial.
- A 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones

- E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.

De igual manera, según las respuestas de Diana a cada una de las situaciones planteadas en los literales de la pregunta seis, la Tabla 39 ilustra su proceso de comprensión en correspondencia con el cumplimiento de los descriptores de cada uno de los niveles.

Tabla 38.

Evidencias de conceptos, evolución de la comprensión y nivel de comprensión de Diana relacionado con el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

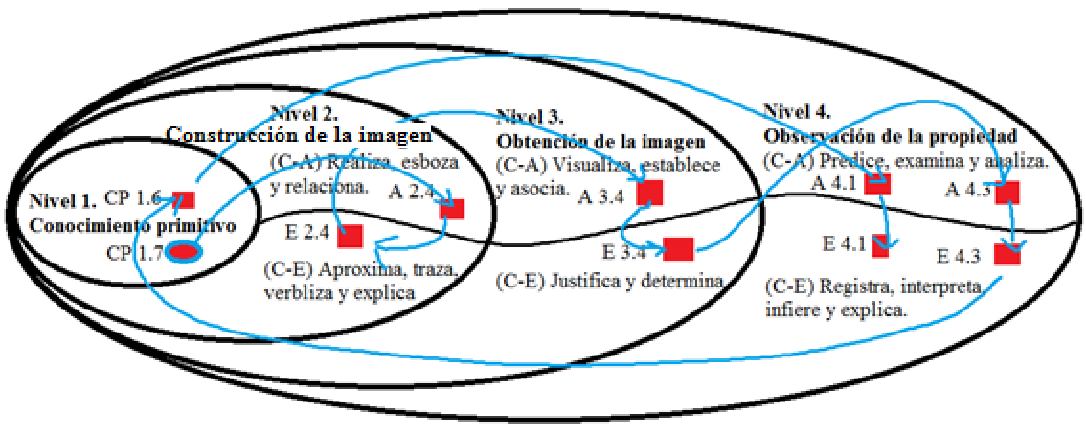
Nombre				Diana											
				Procesos				Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Obs
Epi	Pre		Concepto	Alg (A)	Mec (M)	Raz (R)	Grá (G)		C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E	
4	6	A	Razón de cambio			R		CP 1.7							CP
		B	Parábola, plano			R			A 2.4	E 2.4					N2
		C	Pendiente, ecuación diferencial	A	M	R							A 4.3	E 4.3	N4
	7	A	Variables			R		CP 1.7							CP
		B	Condiciones iniciales	A	M	R		CP 1.6							CP
		C	Ecuación diferencial.	A		R							A 4.4	E 4.4	N4
		D	Derivada, ecuaciones diferenciales.	A	M	R							A 4.1	E 4.1	N4
		E	Ecuación diferencial	A		R							A 4.1	E 4.1	N4
		F	Graficar				G						A 2.4	E 2.4	N2

Fuente: Creación propia con base en la información recolectada.

La Figura 119 ilustra un esquema aproximado del proceso de comprensión de Diana a través de los niveles, en correspondencia con los descriptores cumplidos y el proceso de *folding back* realizado.

Figura 114.

Caracterización del progreso de la comprensión de Diana sobre ecuación diferencial lineal de primer orden.



Fuente: Construcción propia con los datos recolectados en la Tabla 39.

Descriptores empleados en la Figura 119.

- CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada.
- CP 1.7. Reconoce una razón de cambio en una ecuación diferencial.
- A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
- E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
- 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones
- E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.

Cabe anotar que Antonio, Diana, Juan y Pedro exhibieron evolución del nivel 1 al 4, sin trasegar por el nivel 3 de comprensión, según el análisis de sus respectivas respuestas, mientras que Ana evoluciona en su comprensión sin presentar salto alguno.

4.4.6.4.Análisis del nivel de comprensión del concepto de ecuaciones diferenciales.

Para analizar el nivel de comprensión alcanzado por cada estudiante en el cuarto episodio, se tuvo en cuenta el análisis de la información recolectada, a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión y los momentos de *folding back*, aspectos que precisan el camino seguido por cada estudiante en la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

Adicional a lo anterior, muestran la ruta conceptual seguida, primero para comprender los conceptos involucrados en cada episodio y segundo para comprender en forma general el concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden; dicha ruta se evidenció en el análisis de las respuestas de los estudiantes; en este sentido, se identificó un conjunto de conceptos que reunidos, organizados y direccionados en el razonamiento de los estudiantes, permitieron alcanzar de cierta manera la comprensión del concepto involucrado en forma particular en el cuarto episodio.

En este sentido, groso modo, la ruta conceptual que se evidenció en el proceso de comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden, mostró que los estudiantes indagaron por los conceptos de razón de cambio aplicado en la pregunta 6 a, razón de cambio; en 6 b, pendiente de una recta tangente a una curva; en 6 c, relación entre la pendiente y una ecuación diferencial; 7a, variables involucradas; 7b, condiciones iniciales en una situación planteada; 7c, expresión matemática de una ecuación diferencial; 7d, relación entre una derivada y una ecuación diferencial; 7e, solución de una ecuación diferencial; 7f, representación gráfica de la solución de una ecuación diferencial.

Finalmente, se presenta la Tabla 40 en la cual se ilustra una clasificación de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, estableciendo una correspondencia con los descriptores en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

De igual modo se muestran las las Tablas 41, 42 y 43 en las cuales se caracterizan los niveles de comprensión para los episodios dos, tres y cuatro, respectivamente.

Tabla 39.

Codificación de descriptores por nivel.

Etiqueta del nivel	No	Complementariedad	Comprensión del concepto de razón de cambio Descriptor
Conocimiento primitivo	N1		CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
			CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
Construcción de la imagen	N2	C-A	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
			A 2.5. Reconoce los cambios de posiciones de puntos como posibles rectas secantes.
		C-E	E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
			E 2.5. Verbaliza los cambios de posición de los puntos como posibles rectas secantes.
Obtención de la imagen	N3	C-A	A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
		C-E	E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
Observación de la propiedad	N4	C-A	A 4.5. Examina qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		C-E	E4.5. Infiere qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
Etiqueta del nivel	**No**	**Complementariedad**	**Comprensión del concepto de antiderivada.** **Descriptor**
Conocimiento primitivo	N1		CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
Construcción de la imagen	N2	C-A	A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.

		C-E	E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
Obtención de la imagen	N3	C-A	A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
		C-E	E 3.3. Determina la antiderivada de una región limitada por funciones en un intervalo.
Observación de la propiedad	N4	C-A	A 4.2. Examina qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
		C-E	E 4.2. Interpreta qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
Etiqueta del nivel	**No**	**Complementariedad**	**Comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.** **Descriptor**
Conocimiento primitivo	N1		CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada
Construcción de la imagen	N2	C-A	A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
		C-E	E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
Obtención de la imagen	N3	C-A	A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
		C-E	E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
Observación de la propiedad	N4	C-A	A4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
		C-E	E4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.

Fuente: Construcción propia con base en las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren.

Tabla 40.

Caracterización de los niveles de comprensión para el episodio dos.

Ana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
2	1	a	Recta	CP1.1 CP1.2						
		b	Limite y derivada				A3.2	E3.2		
		c	Función		A2.1	E2.1				
		d	Pendiente			E2.1				
		e	Pendiente				A3.1	E3.1		
		f	Pendiente				A3.1	E3.1		
	2	a	Recta secante		A2.5		A3.5			
		b	Punto		A2.5		A3.5			
		c	Aproximación			E2.6				
		d	Rectas				A3.6			
		e	Rectas				A3.5			
		f	Rectas							
	3	a	Secante		A2.5		A3.6			
		b	Infinito		A2.6					
		c	Infinito		A2.5					
		d	Recta		A2.5					
		e	Variación, intervalo, recta tangente				A3.5			
		f	Recta tengente		A2.1					
		q	Recta tengente				A3.6	E3.6		
		h	Razón de cambio promedio e instantánea						A4.5	E4.5
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE

Avance nivel dos a nivel tres preguntas 2 a y b

Presenta continuidad la C-A en el nivel dos, con las preguntas 3 a, b, c y d.

Antonio

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-
2	1	a	Recta	CP1.1CP1.2						
		b	Limite y derivada				A3.1	E3.1		
		c	Función		A2.1	E2.1				
		d	Pendiente		A2.1	E2.1				
		e	Pendiente				A3.1	E3.1		
		f	Pendiente							
	2	a	Recta secante		A2.5		A3.5			
		b	Punto		A2.5		A3.5			
		c	Aproximación			E2.6				
		d	Rectas				A3.6			
		e	Rectas			E2.5				
		f	Rectas							
	3	a	Secante				A 3.6			
		b	Infinito		A2.6					
		c	Infinito		A2.5					
		d	Recta		A2.5					
		e	Variación, intervalo, recta tangente			E 2.1	A 3.1			
		f	Recta tengente		A 2.5					
		q	Recta tengente				A 3.5	E 3.5		
		h	Razón de cambio promedio e instantánea							
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE

Avance del nivel dos al nivel tres

Presenta continuidad en la complementariedad de la Acción preguta 3 b, c, d y e

Diana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-
2	1	a	Recta	CP1.1CP1.2						
		b	Limite y derivada				A3.1	E3.1		
		c	Función		A2.1	E2.1				
		d	Pendiente		A2.1	E2.1				
		e	Pendiente				A3.1	E3.1		
		f	Pendiente							
	2	a	Recta secante		A 2.5					
		b	Punto		A2.5		A3.5			
		c	Aproximación			E2.6				
		d	Rectas				A3.6			
		e	Rectas			E2.5				
		f	Rectas							
	3	a	Secante		A2.2		A3.6			
		b	Infinito		A2.6					
		c	Infinito							
		d	Recta							
		e	Variación, intervalo, recta tangente				A3.1	E3.1		
		f	Recta tengente		A2.1					
		q	Recta tengente				A3.6	E3.6		
		h	Razón de cambio promedio e instantánea						A4.5	
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE

Avance nivel dos a nivel tres en las preguntas 3 e, f

Juan

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-
2	1	a	Recta	CP1.1CP1.2						
		b	Limite y derivada				A3.1	E3.1		
		c	Función							
		d	Pendiente					E3.1	A4.5	
		e	Pendiente							
		f	Pendiente							
	2	a	Recta secante							
		b	Punto			E2.2	A3.2			
		c	Aproximación		A2.1					
		d	Rectas			A3.1	E3.1			
		e	Rectas					A 3.1		
		f	Rectas							
	3	a	Secante							
		b	Infinito		A.2.6	E2.6				
		c	Infinito		I					
		d	Recta		A2.5					
		e	Variación, intervalo, recta tangente							
		f	Recta tengente							
		q	Recta tengente							
		h	Razón de cambio promedio e instantánea							
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE

No presenta avances significativos con los aspectos

Pedro

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
2	1	a	Recta	CP1.1 CP1.2						
		b	Limite y derivada	CP1.5				E3.1		
		c	Función		A 2.5					
		d	Pendiente		A 2.1					
		e	Pendiente		A 3.1					
		f	Pendiente		A 3.1					
	2	a	Recta secante		I	I	I	I		
		b	Punto		A2.5		A3.5			
		c	Aproximación			E 2.6				
		d	Rectas		A 3.6					
		e	Rectas		A 3.6					
		f	Rectas		A 3.5					
	3	a	Secante		A2.5		A3.6			
		b	Infinito		A.2.6					
		c	Infinito		A 2.6					
		d	Recta		A 2.5					
		e	Variación, intervalo, recta tangente				A 3.5			
		f	Recta tengente			E 2.1	A3.1			
		q	Recta tengente				A3.6	E3.6		
		h	Razón de cambio promedio e instantánea							
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE

Presenta continuidad en la complementariedad de la Acción

	Avance en la comprensión
	Sucesión de complementariedad

Fuente: Creación propia con base en la información analizada.

Tabla 41.

Caracterización de los niveles de comprensión para el episodio tres.

Episodio 3 — Nombre: Ana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
3	4	a	Área		A 2.3	E 2.3	A 3.3	E3.3		
		b	Área		A 2.3	E 2.3				
		c	Área		A 2.3	E 2.3				
	5	a	Antiderivada, razón de cambio y una pendiente	CP 1.4						
		b	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		c	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		d	Antiderivada						A 4.2	E 4.2
		e	Ecuación diferencial						A 4.2	E 4.2
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance nivel dos a nivel tres						

Episodio 3 — Nombre: Antonio

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
3	4	a	Área		A 2.3					
		b	Área		A 2.3					
		c	Área		A 2.3					
	5	a	Antiderivada, razón de cambio y una pendiente	CP 1.4						
		b	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		c	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		d	Antiderivada							
		e	Ecuación diferencial			E2.5				
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Nivel dos ce comprensión						

Episodio 3 — Nombre: Diana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
3	4	a	Área		A 2.3	E 2.3				
		b	Área		A 2.3	E 2.3				
		c	Área		A 2.3	E 2.3				
	5	a	Antiderivada, razón de cambio y una pendiente	CP 1.4						
		b	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		c	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		d	Antiderivada						A 4.2	E 4.2
		e	Ecuación diferencial						A 4.2	E 4.2
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance del nivel dos al cuatro						

Episodio 3 — Nombre: Juan

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
3	4	a	Área		A 2.3	E 2.3				
		b	Área		A 2.3	E 2.3				
		c	Área		A 2.3	E 2.3				
	5	a	Antiderivada, razón de cambio y una pendiente	CP 1.4						
		b	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		c	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		d	Antiderivada						A 4.2	E 4.2
		e	Ecuación diferencial						A 4.2	
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance del nivel dos al cuatro						

Episodio 3 — Nombre: Pedro

Episodio	Pregunta		Concepto	N1 CP	N2 C-A	N2 C-E	N3 C-A	N3 C-E	N4 C-A	N4 C-E
3	4	a	Área		A 2.3					
		b	Área		A 2.3					
		c	Área		A 2.3					
	5	a	Antiderivada, razón de cambio y una pendiente	CP 1.4						
		b	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		c	Antiderivada		A 2.7	E 2.7				
		d	Antiderivada						A 4.2	E 4.2
		e	Ecuación diferencial						A 4.2	E 4.2
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance del nivel dos al cuatro						

Avance en la comprensión	Sucesión de complementariedad

Fuente: Creación propia con base en la información analizada.

Tabla 42

Caracterización de los niveles de comprensión para el episodio cuatro.

Episodio 4 — Ana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1	N2		N3		N4	
				CP	C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E
4	6	a	Razón de cambio	CP1.7						
		b	Rectas tangente		A 2.4	E 2.4	A3.4	E3.4		
		c	Pendiente						A 4.3	E 4.3
	7	a	Variables	CP 1.7						
		b	Condiciones iniciales	CP 1.6						
		c	Ecuación diferencial						A 4.4	E 4.4
		d	Derivada						A 4.1	
		e	Ecuación diferencial						A 4.1	
		f	Ecuación diferencial		A 2.4	E 2.4				
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance nivel dos a nivel al cuatro						

Episodio 4 — Antonio

Episodio	Pregunta		Concepto	N1	N2		N3		N4	
				CP	C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E
4	6	a	Razón de cambio	CP1.7						
		b	Rectas tangente		A 2.4	E 2.4				
		c	Pendiente						A 4.3	E 4.3
	7	a	Variables	CP 1.7						
		b	Condiciones iniciales	CP 1.6						
		c	Ecuación diferencial						A 4.4	E 4.4
		d	Derivada						A 4.1	
		e	Ecuación diferencial						A 4.1	
		f	Ecuación diferencial		A 2.4					
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance del nivel dos al nivel cuatro						

Episodio 4 — Diana

Episodio	Pregunta		Concepto	N1	N2		N3		N4	
				CP	C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E
4	6	a	Razón de cambio	CP1.7						
		b	Rectas tangente		A 2.4	E 2.4				
		c	Pendiente						A 4.3	E 4.3
	7	a	Variables	CP 1.7						
		b	Condiciones iniciales	CP 1.6						
		c	Ecuación diferencial						A 4.4	E 4.4
		d	Derivada						A 4.1	
		e	Ecuación diferencial						A 4.1	
		f	Ecuación diferencial		A 2.4					
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Avance del nivel dos al nivel cuatro						

Episodio 4 — Juan

Episodio	Pregunta		Concepto	N1	N2		N3		N4	
				CP	C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E
4	6	a	Razón de cambio	CP1.7						
		b	Rectas tangente		A 2.4	E 2.4				
		c	Pendiente						A 4.3	E 4.3
	7	a	Variables	CP 1.7						
		b	Condiciones iniciales	CP 1.6						
		c	Ecuación diferencial						A 4.4	E 4.4
		d	Derivada						A 4.1	
		e	Ecuación diferencial						A 4.1	
		f	Ecuación diferencial							
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Nivel cuatro						

Episodio 4 — Pedro

Episodio	Pregunta		Concepto	N1	N2		N3		N4	
				CP	C-A	C-E	C-A	C-E	C-A	C-E
4	6	a	Razón de cambio	CP1.7						
		b	Rectas tangente		A 2.4	E 2.4				
		c	Pendiente						A 4.3	E 4.3
	7	a	Variables	CP 1.7						
		b	Condiciones iniciales	CP 1.6						
		c	Ecuación diferencial						A 4.4	E 4.4
		d	Derivada						A 4.1	
		e	Ecuación diferencial						A 4.1	
		f	Ecuación diferencial							
				CP	CA	CE	CA	CE	CA	CE
				Nivel cuatro						

Avance en la comprensión

Fuente: Creación propia con base en la información analizada.

4.4.7. Socialización de la entrevista

En la sociabilización de la entrevista con los estudiantes, después de analizar sus respuestas, se realizó una explicación de manera informal relacionada con cada pregunta planteada en el transcurso de la misma, realizando las correspondientes aclaraciones, entre ellas:

Por ejemplo, con respecto a la expresión algebraica $\frac{dh}{dt} = kh$, se les mencionó, entre otros aspectos, que es una ecuación diferencial de primer orden que puede modelar un fenómeno y que esta involucra conceptos tales como razón de cambio instantánea en correspondencia con una función lineal y que para su solución es necesario reconocer la antiderivada de la función o que existe un método denominado separación de variables para hacer uso de un proceso de integración y así resolver dicha ecuación.

Asimismo, se mostró la utilidad del aporte de información, específicamente el relacionado con las condiciones iniciales en el marco de la situación planteada, es decir:

$H(0) = 300.000\ habitantes$, número de habitantes en $t = 0$ años

$H(6) = 900.000\ habitantes$, número de habitantes transcurrido 6 años

Adicional a lo anterior, se mostró la manera en la cual se hallaba la función $h(t) = ce^{kt}$ por el método de separación de variables, así como la manera en la que se empleaban las condiciones iniciales propuestas, por lo que se obtuvo la expresión de la forma $H(t) = 300e^{0.183t}$, la cual indica que la población va creciendo con respecto al tiempo, y a su vez, su crecimiento es de carácter exponencial; finalmente, se mostró una figura que representaba la solución de la ecuación diferencial.

En este contexto, se les preguntó a los estudiantes ¿Qué opinión tienes acerca de la entrevista?, ¿Qué dificultades tuviste al abordar las preguntas de la entrevista? Con respecto a la primera pregunta, los estudiantes manifestaron algunos comentarios tal como se puede apreciar a continuación.

¿Qué opinión tienen acerca del experimento y de los episodios?

*Estudiante***:** “fue una experiencia nueva, una forma de abordar las ecuaciones diferenciales de una manera diferente”

Estudiante: “me faltó más tiempo en cada episodio”

Estudiante: “fue todo un reto, una experiencia que me gustaría repetir”

Estudiante: “en algunas preguntas se hizo lo que se pudo”

Estudiante: “lo más complicado al final fue la interpretación.”

Estudiante: “se necesitan de otros conceptos para interpretar una solución mediante una gráfica”

Estudiante: “cada examen ayuda a fortalecer los vacíos en los conceptos que allí se utilizan”

Estudiante: “sería bueno colocar más ejercicios”

Estudiante: “Hace falta este tipo de introducción para ecuaciones, que nos permite recordar los conceptos que necesitamos”

Estudiante: “Es un instrumento que abre muchas expectativas para el curso”

Al respecto del segundo interrogante ¿Qué dificultades tuvieron al resolver cada pregunta de la entrevista? los estudiantes manifestaron algunas opiniones, entre ellas:

Estudiante: “se debe usar muchos conceptos y, además, relacionarlos, uno no se imagina que todos esos conceptos se deben relacionarse para solucionar una ecuación diferencial, porque uno los ve de manera independiente”

Estudiante: “A veces me perdía porque veía los conceptos de manera individual”

Estudiante: “Tuve dificultades para interpretar la solución de la ecuación diferencial”

Estudiante: “se me hizo difícil ver que las rectas secantes podían llegar a una sola recta y que esta era la recta tangente a la curva en un punto”

Estudiante: “Para mí tratar de ver la diferencia entre la razón de cambio promedio y la instantánea en la gráfica que proponían en la pregunta”

Se puede apreciar en las distintas manifestaciones de los estudiantes, las dificultades y fortalezas que presentaron cuando abordaron la entrevista para la compresión de conceptos matemáticos y la manera cómo pueden relacionarlos para obtener las respectivas respuestas.

5. Conclusiones

Se inicia este último capítulo de la investigación, recordando la hipótesis que emerge en el marco del experimento de enseñanza llevado a cabo: ¿será posible que a través de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, se pueda analizar y describir la evolución de la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial en un nivel determinado?

Es la hipótesis la que permite, de un lado, rediseñar y confirmar de manera permanente la ruta metodológica trazada en función de los aciertos y desaciertos a través de las fases propuestas en el experimento de enseñanza, de otro, estructurar desde una visión general el entramado epistemológico, teórico y metodológico con la ayuda de los objetivos trazados, (general y específico), los instrumentos construidos y la información recolectada y analizada.

De acuerdo a lo anterior, es posible afirmar que la hipótesis se valida, bajo la consecución de los siguientes hechos que permiten establecer la sinergia conjeturada inicialmente entre las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren como soporte teórico para la comprensión matemática, y la metodología de experimentos de enseñanza como mecanismo para analizar y describir la comprensión de los objetos matemáticos en cuestión:

- Posibilidad de establecer los conceptos generatrices involucrados en los procesos de resolución de una ecuación diferencial, a saber: razón de cambio, derivada y antiderivada, y los demás conceptos que subyacen a ellos.
- Establecer la regularidad de los procesos algebraicos, mecánicos, de razonamiento (o analíticos) y gráficos que permitieran reflejar o visualizar las acciones y las expresiones en cada uno de los niveles de comprensión abordados, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.
- Tales regularidades dan lugar a los descriptores de las complementariedades de la acción y la expresión como mecanismo esencial y constitutivo de nuevo conocimiento en el campo de la Educación Matemática, para describir y analizar cómo se da el proceso de comprensión de los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, a través de instrumentos adecuados.

Así las cosas, en el capítulo cuatro se recolectó la información necesaria de los episodios 2, 3 y 4, en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren (1994), con el objeto de analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial, haciendo uso del análisis retrospectivo de la información como herramienta metodológica, según lo señalado por Molina (2011). De esta manera, se logra identificar la ruta conceptual seguida por el grupo de estudiantes en el proceso de comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en cada situación planteada de la entrevista.

Con el análisis del episodio 1 fue posible refinar la entrevista, teniendo en cuenta lo manifestado por Molina (2011), quien explicita que el análisis retrospectivo de la información debe distanciarse del análisis preliminar. Cabe señalar también que el análisis de las respuestas permitió refinar tanto los descriptores para cada nivel de comprensión como para cada episodio, toda vez que se avanzaba en el desarrollo de los mismos. Se resalta que los análisis de los episodios 2, 3 y 4 permitieron hallar información selecta relacionada directamente con la pregunta de investigación y con el alcance del objetivo propuesto, lo que sirvió como insumo para las conclusiones del estudio que se llevó a cabo.

Por otro lado, las situaciones presentadas se propusieron de manera que permitieran estimular procesos de *folding back* en los estudiantes, y a su vez, generar, entre otros, reflexiones, distinciones escritas, verbales o gráficas, para dar lugar a la comprensión de los conceptos involucrados en cada situación planteada, según el nivel de comprensión. El análisis de las respuestas de los estudiantes a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión de Pirie y Kieren, a través de los descriptores propuestos para cada pregunta, permitió evidenciar los procesos de comprensión de los estudiantes frente a los distintos conceptos matemáticos, notando que algunos avanzaron en su comprensión, mientras que otros permanecieron en un nivel determinado.

En el experimento de enseñanza, el análisis de la información tanto a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión como del análisis retrospectivo de la información de los episodios 2, 3 y 4, mostraron que las diferentes situaciones planteadas en la entrevista estimularon a los estudiantes para rastrear información relacionada con los conceptos de razón de cambio promedio, secante, razón de cambio instantánea, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, para los cuales se apoyaron en los conceptos de recta secante, recta tangente y límite, entre otros.

En concordancia con lo anterior, los estudiantes establecieron en cierto modo una correspondencia entre los conceptos función, pendiente, tangente y razón de cambio promedio, para relacionarla con el concepto de derivada en un punto, lo cual está en la línea de lo manifestado por Sánchez, García y Llinares (2008). Además, se pudo evidenciar los descriptores relacionados con cada situación, de acuerdo a las respuestas brindadas por los estudiantes Ana, Antonio, Diana y Pedro en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.

Por otro lado, en cierta manera se observó una similitud en las acciones y las expresiones manifestadas por los estudiantes en sus respuestas, de acuerdo a la concepción operacional y estructural propuesta por Sfard (2001), dado que las acciones en el contexto de las complementariedades se consideran como actividades mentales o física que denotan una comprensión previa del estudiante sobre un concepto, mientras que, para lo operacional, los estudiantes realizan procesos y usan algoritmos que posibilitan evidenciar comprensión. Una sinergia entre estas dos concepciones podría considerarse en el marco de las complementariedades de la acción de la teoría de Pirie y Kieren (1994), como una estructura cognitiva que da muestra del tipo de compresión previa alcanzada por un estudiante sobre un concepto.

Las complementariedades de la expresión en el marco de la teoría en cuestión, permiteron visualizar la forma como los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Pedro y Juan analizaron y articularon la comprensión inicial de los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, en correspondencia con los conceptos involucrados en cada situación planteada. Esto puede relacionarse con la concepción estructural propuesta por Sfard (2001), dado que las relaciones matemáticas establecidas por ellos, funcionaron como objetos matemáticos abstractos para describir y representar las situaciones planteadas en cada enunciado, y de esta manera establecer relaciones entre estas concepciones.

Adicional a lo anterior, en este capítulo se hace referencia a la pregunta de investigación, al alcance del objetivo propuesto en el estudio, se explicitan algunas dificultades presentadas en el desarrollo de la investigación, se mencionan algunos aportes al campo de la Educación Matemática y a posibles líneas de investigación, además de proponer algunas recomendaciones.

5.1. Respuesta a la pregunta de investigación

La investigación se centró en la pregunta ¿Cómo es la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial? Para dar respuesta, en primer lugar se indagó en bases de datos por una literatura que permitiera establecer un referente teórico y el diseño de un conjunto de descriptores enmarcados en las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, que permiten emprender la ruta metodológica para la descripción de la comprensión; luego, se procede a elegir una metodología pertinente que valide el estudio, encontrando razones epistemológicas para centrar la atención en la metodología de diseño de experimentos, conformada por tres fases y un análisis de la información recolectada, de lo que se derivaron elementos de juicio relevantes para responder la pregunta de investigación.

Al indagar por la manera cómo comprenden los estudiantes, se hace necesario precisar un marco teórico que permita analizar el progreso de la comprensión al interior de la investigación, por lo que se adoptó la teoría para el crecimiento de la comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren (1994) como marco teórico relevante, con especial interés en las complementariedades de la acción y la expresión, característica relevante de la teoría. La sistematización de la información recolectada, permitió estructurar unidades de análisis que, al codificarlas, posibilitaron conformar categorías, con las cuales se pudo discernir los elementos que le aportaron información pertinente al análisis. Asimismo, las interacciones e intervenciones realizadas al interior del experimento formaron parte de los elementos que se tuvieron en cuenta para dar una respuesta acorde a la información analizada.

5.2. Alcance del objetivo propuesto en la investigación

Se consideraron relevantes para alcanzar el objetivo del estudio, entre otros aspectos, los siguientes: 1) El análisis de las complementariedades de la acción y la expresión en los niveles 2 a 4 de la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren, a través de una propuesta inicial o preliminar de descriptores, en concordancia con cada uno de los cuatro niveles; y 2) El análisis retrospectivo de la información a través de una entrevista previamente diseñada, para analizar la comprensión de los conceptos matemáticos en procesos de resolución de una ecuación diferencial, entre ellos, los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden.

En este sentido, la entrevista a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, permitió esclarecer cómo se daba el proceso de comprensión en los estudiantes, teniendo en cuenta los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, y centrando la atención en los *folding back* que emergieron en el trabajo de campo.

En esta perspectiva, se observó que los estudiantes en el primer nivel de comprensión, denominado conocimiento primitivo, presentaban ideas de algunos conceptos que permitieron identificar característica, diferencias y similitudes entre ellos. Asimismo, se evidenció en el segundo nivel que los estudiantes realizaron representaciones mentales o físicas de los conceptos involucrados en cada situación planteada, permitiéndole esbozar ideas de un nuevo concepto; por ejemplo, al representar gráficamente un haz de rectas secantes para tratar de comprender el límite de rectas secantes como la recta tangente a través del concepto de razón de cambio; estos aspectos posibilitaron construir en cierto modo imágenes mentales o escritas, apreciadas desde una componente visual geométrica, con el fin de que pudieran emerger nuevos conceptos para alimentar la red conceptual (Pirie y Kieren, 2006).

De igual modo, en el nivel tres se percibió que los estudiantes orientaron sus procesos mentales hacia la clasificación, identificación e interrelación de las características de los conceptos tratados en cada episodio; por ejemplo: al tratar de relacionar una región acotada por una función en un intervalo con el concepto de área.

En el cuarto nivel de comprensión, denominado observación de la propiedad, los estudiantes manipularon, combinaron y explicaron la manera en que relacionaban los conceptos que allí se involucraban, haciendo uso de razonamientos plausibles que permitían al investigador realizar los respectivos análisis; para estos efectos, ellos cuestionaron sus propios conocimientos y comprensión para expresarlos en forma general, hecho que se evidenció cuando trataron de explicar la relación entre el concepto de derivada y de ecuación diferencial, usando la expresión $\frac{dH}{dt} = kH$.

Así entonces, los destellos de comprensión exhibidos por los estudiantes en los diferentes niveles analizados en esta investigación, permitieron dilucidar la forma en la que evolucionaban en la comprensión de los conceptos involucrados, avanzando de un nivel a otro, cuando trataban de resolver las situaciones planteadas en cada episodio. En cuanto a los objetivos específicos planteados, tenemos que:

Primer objetivo específico: Indagar por las dificultades que exhiben los estudiantes para la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada, ecuación diferencial lineal de primer orden y los conceptos subyacentes a ellos.

Al respecto, se puede afirmar que este objetivo se alcanzó, dado que al analizar las respuestas de los estudiantes en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión y del análisis retrospectivo de la información a la luz de las acciones a seguir en un experimento de enseñanza, se pudieron visibilizar los momentos de compresión de los conceptos involucrados y las dificultades presentadas al momento de abordar una situación planteada; en este sentido, se observó que los estudiantes exhibieron dificultades para:

– Relacionar algunos conceptos involucrados en una situación planteada, lo cual se evidenció al tratar de relacionar el concepto de razón de cambio promedio con la razón de cambio instantánea, aspectos manifestados en las respuestas de Ana, Antonio y Diana en la pregunta 1, literal f.

- Relacionar los conceptos de rectas tangentes y rectas secantes a través de la razón de cambio, la cual se evidenció en las respuestas aportadas por Ana, Juan y Antonio en la pregunta 2, literales e y f.
- Interpretar una ecuación diferencial como razón de cambio, lo que se percibió en las respuestas de Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro, en la pregunta 6, literal a.
- Representar gráficamente trozos de rectas tangentes a una curva en una misma abscisa, lo que se evidenció en las respuestas de Juan y Pedro, en la pregunta 6, literal c.
- Representar e interpretar gráficamente la solución de la ecuación diferencial, teniendo en cuenta las condiciones dadas; este tipo de dificultad se evidenció en las respuestas de Pedro y Juan en la pregunta 7, literal f.

Cabe aclarar que estas dificultades estuvieron relacionadas en cierta manera con los momentos de comprensión experimentados por los estudiantes al abordar las diferentes situaciones planteadas, dado que ellos, posiblemente, exhibieron conocimientos primitivos, pero no hallaron la manera de conectarlos entre sí, es decir, no lograron enlazar este conocimiento con los conceptos involucrados en cada situación planteada.

En el marco de la teoría en cuestión, podemos considerar que este tipo de razonamientos de carácter aislado es equiparable al nivel de comprensión 1, y aunque el objetivo de este estudio no es medir o analizar el nivel de dificultad presentado por los estudiantes en cada nivel de comprensión, vale la pena señalar el tipo de dificultad exhibida por ellos y la manera paralela que se da con la comprensión de cada concepto involucrado, ya que puede estar ligada al redoblamiento o *folding back* realizados por el estudiante para comprender otros conceptos matemáticos. Asimismo, a los estudiantes en ocasiones se les dificultó la comprensión de otros conceptos dotados de una componente visual geométrica, lo que podemos considerar, corresponden a razonamientos propios del nivel 2 de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren, lo que derivó en tropiezos para materializar un concepto a través de una imagen, bien sea física o mental.

Por otro lado, las acciones realizadas anteriormente por los estudiantes para discernir características, similitudes y diferencias entre las representaciones mentales de los conceptos, dieron cuenta de ciertas limitaciones para representarlas, lo que disipó la idea de generar imágenes que estuvieran asociadas a la situación planteada, en este ámbito, los estudiantes posiblemente realizaron razonamientos en el contexto de la presente teoría en el nivel 3 de comprensión, aludiendo a las dificultades que afloraron en ellos que no les permitieron de paso ampliar su red de conocimiento matemático (Pirie y Kieren, 1992).

En este orden de ideas, al no poder ampliar su conocimiento, los estudiantes exhibieron desconexiones entre los conceptos involucrados en cada situación, por lo que emergen dificultades para expresar de manera general las consideraciones relacionadas con la figura, bien sea mental o física, que surge de su pensamiento.

Por otra parte, el alcance del siguiente objetivo específico planteado es:

Segundo objetivo específico: Elaborar descriptores que permitan analizar la comprensión de los estudiantes en el proceso de resolución de una ecuación diferencial.

Este objetivo fue alcanzado, dado que los descriptores surgen como un mecanismo útil para determinar si un estudiante se encuentra razonando en un nivel de comprensión al interior de la teoría en cuestión, como lo manifiesta Londoño (2011). Los descriptores en esta investigación fueron producto del análisis de la información recolectada en el primer episodio; de las dificultades exhibidas; de la experticia de los investigadores en la enseñanza de los conceptos involucrados en cursos regulares de cálculo diferencial, integral y ecuaciones diferenciales; y de las reflexiones al interior de las reuniones entre el profesor de la asignatura y los investigadores.

Bajo estas premisas, se generó una primera versión de los descriptores, los cuales en un primer análisis mostraron algunas dificultades tales como: poca fluidez, ambigüedad y falta de especificidad en torno a los conceptos que se analizaban en cada situación planteada en la entrevista, además, algunos términos empleados en los descriptores no resultaban familiares, lo que impidió hacer una sinergia entre las preguntas de la entrevista, las respuestas de los estudiantes y los descriptores propuestos. Es importante mencionar que, para refinarlos, se realizaron reuniones de manera continua, toda vez que se quería obtener una versión mejorada de los mismos.

En los debates al interior de las reuniones, se consolidaron descriptores que indagaron por la comprensión de los conceptos en el sentido propuesto por Pirie y Kieren (1994), es decir, primero actuando y luego expresando, que permitieron analizar la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada para el episodio 2, antiderivada para el episodio 3 y ecuación diferencial lineal de primer orden en el episodio 4.

En este contexto, el análisis de las respuestas de los estudiantes en correspondencia con los descriptores propuestos, permitió evidenciar de alguna manera el nivel de comprensión de cada estudiante, el tipo de complementariedad alcanzada acorde a la respuesta a cada pregunta de la entrevista, el crecimiento de la comprensión, y la permanencia o no en un determinado nivel. Además, permitió visualizar la trazabilidad de los conceptos a través de las categorías y subcategorías, para lo cual se logró visualizar una reorganización de los descriptores por concepto; en este sentido, se observó la correspondencia entre los descriptores, las categorías y las subcategorías.

El alcance para el siguiente objetivo específico es:

Tercer objetivo específico: Describir los niveles de comprensión exhibidos por los estudiantes en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, en un proceso de resolución de una ecuación diferencial.

Al respecto, la consecución de este objetivo específico está estrechamente relacionado con el análisis de los episodios 2, 3 y 4, registrados en el capítulo 4. En este contexto, la entrevista, los descriptores propuestos a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión y el análisis de estos episodios, permitieron analizar la evolución o crecimiento de la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados en cada situación planteada y el nivel de comprensión alcanzado. Cabe señalar que en el episodio 2 se analizó la comprensión de los conceptos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea y derivada, en el episodio 3 se investigó por la comprensión del concepto antiderivada y en el episodio 4 se indagó por la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden.

Al respecto, el análisis de la información del episodio 2 mostró que Ana y Antonio exhibieron conocimiento primitivo y manifestaron un nivel de comprensión 2 con respecto al concepto de razón de cambio promedio; para el concepto de razón de cambio instantánea, mostraron un avance del nivel 2 al 3, y de igual manera, en el concepto de derivada los estudiantes exhibieron un avance en la comprensión del nivel 2 al 3.

Asimismo, Diana, Juan y Pedro, recorrieron los niveles 2 y 3 de comprensión para el concepto de razón de cambio promedio, mientras que para el concepto de razón de cambio instantánea, Diana avanzó del nivel 2 al 4, con lo cual se comprueba que la comprensión no se da de manera lineal, en los términos de Pirie y Kieren (1994); por su parte, Juan y Pedro recorrieron los niveles 3 y 4 de comprensión para el concepto de derivada; Diana y Pedro, evidencian avance del nivel 2 al 3, mientras que Juan sólo exhibe nivel 2. La información anterior se resume en la Tabla 41, en la cual los descriptores que aparecen en color azul muestran avance en la comprensión y los que aparecen en color rojo manifiesta continuidad en una complementariedad, bien sea de la acción o de la expresión.

En el episodio 3 se analizó la comprensión del concepto de antiderivada, lo que reveló que Ana, Diana y Pedro recorrieron los niveles 2 y 4 de comprensión, con lo cual se evidencia nuevamente la no linealidad de la comprensión de los conceptos matemáticos; por su parte, Juan recorre los niveles 3 y 4 de comprensión; Antonio solo alcanza nivel 2. La información anterior se resume en la Tabla 42. En el episodio 4 se indagó por la comprensión del concepto de ecuación diferencial. El análisis de los datos mostró que Ana alcanzó nivel 4 de comprensión recorriendo los niveles 2 y 3, lo que claramente es un avance en la comprensión del concepto involucrado; por su parte, Antonio y Diana recorrieron los niveles 2 y 4, con lo cual se evidencia nuevamente la no linealidad de la comprensión de conceptos matemáticos; para el caso de Juan y Pedro, se destaca un salto de nivel, logrando el nivel 4 de comprensión, lo que se ilustra en la Tabla 43.

5.3.La entrevista

El análisis de los episodios 2, 3 y 4 en los que se indagó por la comprensión de conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, mostró que los conceptos antes mencionados son transversales en los niveles de comprensión de la teoría Pirie y Kieren (1994), dado que cada descriptor formulado para las preguntas de la entrevista se puede localizar por concepto, por nivel de comprensión y por complementariedad de la acción o de la expresión. Lo anterior muestra claramente una relación entre las categorías y subcategorías señaladas anteriormente, por lo que al analizar respuestas de los estudiantes y haciendo la verificación de que cumplen con los respectivos descriptores de los niveles de comprensión a través de las complementariedades de la acción o expresión con respecto a cada concepto, se pudo constatar la característica transversal de los conceptos. Aunque no es objetivo de la investigación, se resalta lo observado en el desarrollo del trabajo de campo y en el análisis de las respuestas de los estudiantes, dando lugar a la determinación de la ruta conceptual seguida por cada estudiante.

A continuación, grosso modo, se explicita la manera en la cual los conceptos exhiben su transversalidad en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión; en este orden de ideas, los estudiantes Ana, Antonio, Diana, Juan y Pedro cumplieron los descriptores de nivel 1 (CP1.1; CP1.5; CP1.7) los cuales se ubicaron en las preguntas 1. literal a, b y c; de nivel 2 (A2.1 y E2.1) ubicados en la pregunta 1, literal c, y pregunta 3, literal a; de nivel 3 (A3.1 y E3.1) ubicados en la pregunta 1, literal c; y de nivel 4 (A4.5 y E4.5), ubicados en la pregunta 1, literales d, e y h; las Tablas 23 a 28 ilustran el análisis retrospectivo de la información relacionada con el segundo episodio.

Adicional a los descriptores anteriores, para el concepto de derivada, los estudiantes cumplieron los descriptores CP 1.2, CP 1.7; A2.1; E2.1; A3.2; E 3.2; A4.1; E4.1, correspondientes a las preguntas: 1, literal a; 2, literales a, d y c. En este orden de ideas, se observó que solo la estudiante Ana mostró la transversalidad del concepto de derivada.

Con respecto al concepto de antiderivada, los estudiantes cumplieron los descriptores CP1.4, ubicado en la pregunta 5, literal a; A2.3, E2.3, A2.7, E2.7, ubicados en la pregunta 1, literales a, b y c; A3.3, E3.3, ubicados en las preguntas 1, literal a y b; A4.2 y E4.2, ubicados en la pregunta 5 literales d y c. Los estudiantes mencionados, también evidenciaron la transversalidad del concepto en cuestión, lo que se ilustra en las Tablas 31 a 35.

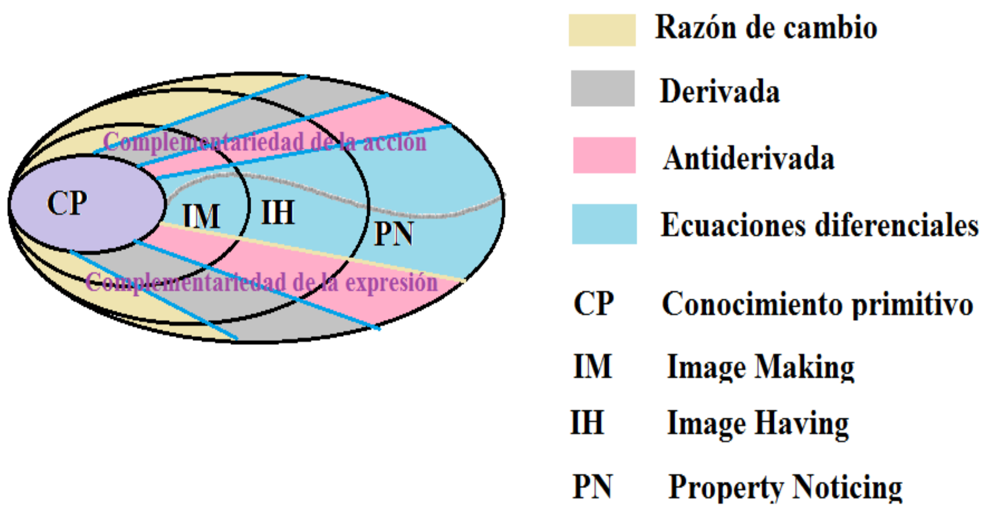
<u>Las Tablas 36 a 39, por su parte, ilustran información al respecto de la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden, relacionado</u> con el cumplimiento de los descriptores, evidenciando la transversalidad del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden. Los descriptores correspondientes son CP1.6; CP1.6;

A2.4; E 2.4; A3.4 E3.4; A4.1y E4.1, los cuales se localizaron en las preguntas 6, literales a, b y c; y la pregunta 7, literales a, d y e; cabe mencionar que todos los estudiantes, excepto Diana, mostraron la transversalidad del concepto en cuestión.

La Figura 121 exhibe de manera adecuada la transversalidad de los conceptos mencionados anteriormente; en ella, cada color representa un concepto. Se puede apreciar que los óvalos están separados en dos partes (a partir del nivel 2), en la superior se ubica la complementariedad de la acción y en la inferior la complementariedad de la expresión, además, los conceptos se encuentran localizados tanto en las complementariedades como en cada nivel.

Figura 115.

Transversalidad de los conceptos razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuaciones diferenciales en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión.



Fuente: Creación propia con base al análisis de los resultados.

5.4. Análisis retrospectivo de la información

El análisis retrospectivo de los datos recolectados en los episodios 2, 3 y 4 mostró una ruta conceptual seguida por cada estudiante para comprender los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden, los cuales fueron relevantes en el proceso de análisis para cada estudiante. Se debe precisar que a través del análisis retrospectivo, se evidenció qué conceptos requería cada estudiante en el nivel primitivo para la compresión de los mencionados anteriormente, así entonces, para el episodio 2, en el cual se analizó la comprensión de los conceptos razón de cambio y derivada, los estudiantes emplearon para tal fin los conceptos: punto, función, recta secante, recta tangente, pendiente, derivada, aproximación, infinito, variación, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea.

Por otra parte, en el episodio 3 se analizó la comprensión del concepto de antiderivada; en él, los estudiantes requirieron de los conceptos de: razón de cambio, área y antiderivada; de igual manera, el episodio 4 indagó por la comprensión del concepto de ecuación diferencial lineal de primer orden, para este efecto, los estudiantes emplearon los conceptos de razón de cambio, pendiente, variable, condición inicial y ecuaciones diferenciales; es importante mencionar que el análisis retrospectivo del episodio 2 está ilustrado en las Tablas 22 a 26, el del episodio 3 está ilustrado en las Tablas 29 a 33 y el del episodio 4 en las Tablas 36 a 40.

5.5. Dificultades presentadas en el desarrollo del estudio

El desarrollo de la investigación suscitó algunas dificultades, en la medida que se avanzaba, las cuales en cierta manera dieron la posibilidad de tomar decisiones para cambiar y refinar cada componente del estudio. A continuación, grosso modo, se mencionan algunas de ellas.

La información recolectada a través de la entrevista en los cuatro episodios fue amplia para cada pregunta, por lo que se tomaron decisiones para elaborar el informe de la investigación en relación con los datos a tener en cuenta para este efecto; aunque el proceso no fue fácil, el riesgo que representaba excluir información de relevancia en un análisis podría conllevar a incurrir en una segmentación o sesgo de información, lo que ocasionaría no responder la pregunta de investigación y no alcanzar el objetivo propuesto.

Además, la elección de la información implicó analizar qué tan adecuado era organizar la información desde lo general a lo particular o viceversa, en nuestro contexto, analizar este escenario fue un reto, ya que en reuniones entre el profesor de la asignatura y el investigador, se observó que los estudiantes orientaban sus respuestas en este sentido, es decir, primero buscaban una estructura matemática general y luego se remitían a lo específico, lo que permitió orientar la entrevista en el sentido señalado anteriormente.

En este orden de ideas, el análisis de la comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial fue un reto, ya que algunos estudiantes realizaron procesos algebraicos de manera mecánica para dar solución a una situación planteada, lo que ponía en duda la comprensión de los mismos, sin embargo, al analizar la información a través de los descriptores a la luz de las complementariedades de la acción y la expresión, en el marco de los experimentos de enseñanza, se pudo precisar la caracterización de la comprensión exhibida por los estudiantes sobre los conceptos involucrados, además del nivel alcanzado por ellos.

Por otra parte, en el proceso de organizar, clasificar y codificar los datos recolectados en los episodios del experimento se tuvo contratiempos, ya que el volumen de información era amplia y compleja, y fue difícil determinar la manera precisa para clasificarla y codificarla de modo que facilitara analizar la comprensión de los conceptos involucrados; tal dificultad se pudo superar al formular las categorías y subcategorías.

Analizar el nivel de comprensión que alcanzó cada estudiante tuvo muchas bifurcaciones, sin embargo, se precisó de un mecanismo nombrado por Londoño (2011) como descriptores que permitieran analizar la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos involucrados, los cuales se organizaron en tablas, bajo la premisa que cada descriptor colocado allí debería estar estrechamente ligado y claramente diferenciado de las premisas del modelo de Pirie y Kieren, estableciendo cierta prioridad en el análisis de las complementariedades de la acción y la expresión.

En este sentido, el análisis mostró las dificultades que exhibían los estudiantes para abordar y modelar las situaciones planteadas, lo cual está en correspondencia con lo manifestado por Dolores (2010), además, las complementariedades de la acción y la expresión permitieron evidenciar las dificultades que enfrentaron los estudiantes para trasformar los enunciados de las situaciones planteadas en expresiones matemáticas, concordando con lo planteado por Rodríguez, Ponce y Pérez (2016); lo anterior se evidenció en las respuestas de los estudiantes Diana, Pedro y Juan a las peguntas uno, dos y siete de la entrevista.

Por otro lado, se logró observar en cada respuesta de los estudiantes la manera en que ellos reorganizaban sus conocimientos para establecer relaciones entre los conceptos que poseían y los involucrados en el enunciado, evidenciando así la reorganización de estructuras cognitivas manifestadas en la definición de la teoría de Pirie y Kieren (1994) y en concordancia con lo manifestado por Gallardo (2004), quien expresó que la comprensión es un proceso en desarrollo que permite analizar y reorganizar nuevas conexiones.

Sin ser lo último, la investigación tuvo dificultades para discernir un marco teórico que permitiera analizar la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos, en particular, los subyacentes a las ecuaciones diferenciales, además, para satisfacer la necesidad de analizar la comprensión en términos de las acciones y posteriormente de expresiones; en este sentido, la teoría de Pirie y Kieren (1994) fue pertinente porque aportó elementos de juicio que guardaban una estrecha relación con el objetivo de la investigación.

5.6. Aportes al campo de la Educación Matemática

Los desarrollos de investigaciones en diferentes contextos educativos urgen de la necesidad de propuestas metodológicas que permitan la comprensión de conceptos matemáticos sin descuidar el formalismo matemático y fortalezcan los procesos cualitativos propios de la investigación en el campo de la Educación Matemática.

Al respecto, se mencionarán algunos aportes que esta investigación puede hacer en este campo: por un lado, la contribución en el campo teórico, el cual se evidencia al dar una respuesta a la pregunta de investigación y la consecución del objetivo planteado, a través del análisis de la información recolectada en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, por otro lado, la articulación de las complementariedades de la acción y la expresión en los cuatro niveles de la teoría en cuestión, permitiendo visualizar el nivel alcanzado por cada estudiante; para este efecto, los descriptores cumplieron un papel relevante para mostrar el nivel de comprensión que alcanzó cada estudiante.

Adicionalmente, otra contribución desde el aspecto metodológico, se evidenció al articular las acciones a realizar en un experimento de enseñanza acuñadas por Molina (2011), con las cuales se visualizó la ruta conceptual empleada por los estudiantes para comprender los conceptos involucrados en cada situación planteada. Además, la investigación mostró una interpretación de los datos direccionada, por un lado, en el marco de la complementariedades de la acción y la expresión, por otro, con la acciones a seguir a la luz de lo declarado por Molina (2011), lo cual evidenció un diálogo entre ambas teorías relacionadas con la comprensión de conceptos matemáticos y la ruta conceptual seguida por los estudiantes, respectivamente; así, el análisis de la información recolectada permitió dar respuesta a la pregunta de investigación y la consecución del objetivo planteado.

Por otra parte, otro posible aporte estaría relacionado con el diseño de la entrevista para efectos del desarrollo de la investigación, que puede funcionar como una estrategia metodológica que permita orientar la comprensión de conceptos matemáticos, no solo a las ecuaciones diferenciales, sino, a otros conceptos de la matemática en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión. Finalmente, se podría pensar como una alternativa metodológica para abordar procesos de comprensión de conceptos matemáticos en la resolución de problemas de cálculo diferencial, cálculo integral, geometría y álgebra lineal, entre otras, en el marco de las complementariedades de la acción y la expresión, mediada por los experimentos de enseñanza.

5.7. Posibles líneas de investigación

La recomendación de líneas de estudio a futuro, dado el presente trabajo de investigación, se listan a continuación:

Indagar por procesos de resolución de una ecuación diferencial de orden mayor a uno, aplicados en diferentes contextos que posibiliten la comprensión de conceptos matemáticos para resolver situaciones en otros campos de la ciencia.

Indagar por cómo las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, mediante los experimentos de enseñanza, podrían incursionar en otras áreas de la matemática, de modo que aporten una manera novedosa para comprender conceptos matemáticos en diferentes situaciones planteadas.

Determinar cómo el diseño del experimento de enseñanza de la presente investigación, y en particular, de cada episodio que lo compone, podría servir como base para una estructura que oriente otras investigaciones, teniendo en cuenta el refinamiento y adaptación en otros campos y contextos, de modo que posibilite ampliar la manera en la cual los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos en el campo de la Educación Matemática.

Considerar explorar, mediante el uso de asistentes matemáticos de uso libre en la red, otras relaciones entre las complementariedades de la acción y la expresión, en procesos de resolución de problemas de otras áreas de la matemática, que permitan documentar diferentes diseños o adaptaciones que posibiliten la comprensión de conceptos matemáticos del cálculo diferencial, cálculo integral, entre otros.

5.8. Recomendaciones

La teoría de Pirie y Kieren (1994) contribuye con un modelo de comprensión de conceptos matemáticos (Londoño,2011), compuesto por ocho niveles de comprensión y cuatro características, con los cuales se puede analizar el proceso de comprensión seguido por los estudiantes cuando abordan el estudio de un concepto matemático. En esta investigación se empleó una de sus características denominada complementariedad de la acción y la expresión, que es mediada por los experimentos de enseñanza, para analizar el proceso de comprensión seguido por un estudiante al resolver una ecuación diferencial de primer orden, en la que están involucrados entre otros, los conceptos razón de cambio, derivada, y antiderivada.

El análisis de los resultados mostró la complejidad que los estudiantes exhibieron para comprender los conceptos matemáticos antes mencionados, que a su vez, se representaron en tablas y gráficas; en esta última, se observaron procesos de *folding back* que permitieron evidenciar a través de los descriptores, la manera cómo los estudiantes en sus respuestas manifiestan su actuación y luego su expresión para comprender los conceptos matemáticos involucrados en cada pregunta de la entrevista, en correspondencia con lo propuesto por Pirie y Kieren en su teoría, por lo que algunos estudiantes mostraron avances y otros permanencia en cada nivel de comprensión.

Asimismo, los hallazgos de la investigación permitieron confirmar la pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren (1994) para el estudio realizado y, proponer las complementariedades de la acción y la expresión mediadas por los experimentos de enseñanza, como perspectiva didáctica que se puede emplear en futuras investigaciones para analizar la comprensión de los estudiantes cuando abordan el estudio de conceptos matemáticos, por lo que se constituye en un aporte teórico que fortalece y amplía el campo de acción de la teoría en cuestión.

Por otro lado, los conceptos razón de cambio, función, rectas tangentes, rectas secantes, derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden están estrechamente relacionados, pero claramente diferenciados, sin embargo, los estudiantes al momento de abordarlos en un proceso de resolución de una ecuación diferencial presentan dificultades para relacionaros, lo que les generó dificultades para hallar su solución e interpretarla en diferentes sistemas de representación; de igual manera, ocurren dificultades al emplear en ordenadores programas como DESMOS que facilitan el proceso algebraico y su representación gráfica.

Por lo anterior y de acuerdo con la experiencia y los resultados obtenidos en la investigación, se propone para la comprensión de conceptos matemáticos en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, implementar como estrategia didáctica las complementariedades de la acción y la expresión mediadas por los experimentos de enseñanza, por un lado, con preguntas cuyo sentido inicialmente sea de lo general a lo particular asociada con gráficos que ilustren dicho planteamiento, posteriormente, proponer preguntas en casos específicos con ilustraciones gráficas que permitan visualizar dichas situaciones planteadas , con las cuales los estudiantes confronten y relacionen los conceptos involucrados y así puedan alcanzar un avanzado nivel de comprensión, por otro, el estudio señala la necesidad de plantear situaciones en las que se puedan emplear softwares y programas matemáticos que faciliten el proceso algebraico y gráfico, de modo que les permita a los estudiantes explorar las posibles relaciones entre los conceptos involucrados y centren su atención en su comprensión e interpretación.

Adicional a lo anterior, se hace necesario diseñar experimentos de enseñanza que consideren procesos de comprensión, de modo que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales sea pertinente y logre los objetivos de aprendizaje propuestos, lo cual puede evidenciarse cuando se analiza el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes frente a los conceptos matemáticos abordados, así como la ruta conceptual seguida por ellos para tal fin.

Sin ser lo último y teniendo en cuenta la importancia del área de las ecuaciones en los programas de ciencias e ingenierías, se hace necesario complementar los estudios teóricos en Educación Matemática con los softwares matemáticos de uso libre para abordar modelos matemáticos que faciliten el análisis de la comprensión de los conceptos involucrados en la solución de las ecuaciones diferenciales asociadas a los fenómenos físicos o naturales.

Por otra parte, dada la experiencia en la presente investigación se sugiere: Desarrollar un estudio considerando pocos estudiantes, dado que facilita la sistematización de la información recolectada y el análisis cualitativo de las variables a tener en cuenta para alcanzar el objetivo planteado.

Generar espacios que permitan aplicar diseños de experimentos de enseñanza en los que se involucren las complementariedades de la acción y la expresión de la teoría de Pirie y Kieren, de modo que permitan la reflexión de manera continua sobre la comprensión de los conceptos matemáticos.

6. Referencias bibliográficas

Barab, S., y Squire, K. (2004). Design Based research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.

Barros, A., Bosco, J., y De Mirande, D. (2014). A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. . *Educ. Matem. Pesq., São Paulo*, V.16(2), pp. 323-348.

Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, R. (1998). Differential equations. *Boston Brooks/Cole*.

Caicedo, E. (2017). Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales desde un enfoque cualitativo. *Acta Simposio de Matemática y Educación Matemática*, V. 4(2), pp. 1-86.

Camacho, M, Perdomo, J, y Santos Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de ecuación diferencial ordinaria: Un estudio exploratorio , en camacho, M., Bolea, P., Flores, P., Gómez, B., Murillo, J. y González, M. T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenefife*, pp. 87-106.

Camacho, M., Depool, R., y Garbin, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática* , V. 20(3), diciembre de 2008, pp. 33-57.

Camacho, M., Perdomo, J., y Santos Trigo, M. (2009). Revisiting university students´ knowledge that involves basic differential equation questions. PNA, 3(3), pp. 123-1333.

Cervantes, J., Ordoñez, J., y Morales, A. (2020). Los argumentos de los estudiantes universitarios en la soluciòn de problemas sobre ecuaciones diferenciales oridinarias. *Innovaciòn Educativa*, vol. 82, pp. 1665-2673.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A. E Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (eds.). (L. E. Associates, Ed.) *Handbook of design research mathods in education. innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Research*, V. 32(1). pp. 9-13.

Codes, M., Delgado, M., González, M., y Monterrubio, M. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica desde el modelo de Pirie y Kieren. *Investigación y experiencias didácticas*, pp. 135-154.

Collective, D. (. (2002). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*. V. 32(1), pp. 5-8.

Collins, J. D. y Bielaczyc, K. (2004). Design reserach: Theorical and methodological issues. *Journal of the learning Science* , V. 13(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodolog. En Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Cornejo, M., Villalobos, E., Tabares, J., y Soledad, J. (2013). El uso de geogebra en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, aplicaciones en el de vaciado de tanques. *Pistas Educativas Año XXXIII*, pp. 214-237.

Creswell, J. (2017). *Qualitative inquiry and reseach design. Documento en proceso de construcción traducción del libro original en inglés producto de la línea de investigación en juventud.*

Delgado, L., González, M., y Monterrubio, M. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, pp. 135-154.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. EL futuro del cálculo infinetesimal. *(Actas de ICME-8 Sevilla) Grupo Editorial Iberoamericano. México D. F.*, Cap V, pp. 155-181.

Dolores, C.; Chi, A. G.; Carnul, E. R.; Cantú, C. A. y Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las reperesntaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. V. 18, pp 41-57.

Dolores, C., García, J., y Gaálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar . *Educación Matemática*, Vol. 29(2), pp.125-158.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. *Advanced Mathematical thinking*, Dordrecht: Kluwer, pp. 95-123.

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y análitico.

Dullius, M., Araujo, I., y Veit, E. (2011). Teaching and learning of differential equation with graphical, numerical and analytical approach. *Bolema, Rio Claro (SP)*, V. 24(38), pp. 17 - 42 .

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Registro Semiótico y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Duzenli, N., y Balut, S. (2018). A new form of understanding maps: Multiple representations with Pirie y Kieren model of understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education* , pp. 1-21.

Gallardo Romero, J. (2004). Diagnóstico y evaluaión de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la comprensión de números naturales. (Tesis doctoral). España: Universidad de Málaga. Recuperado de: de: http://funes.uniandes.edu.co/625/.

Godino, DJ, Batanero, C., y Font, V. (2017). Perspectiva ontosemiótica de la compeencia y comprensión Matemática. Recuperado de: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/competencia.pdf].

Ghosh Hajra, S. (2013). Teaching Experiment And its role in teaching. University of Georgia. Departament of Mathematics Educations, Gerogia: Atheus.

Guerrero, C., y Camacho, M. (2010). Dificultades de los estudiantes en interpretación de euaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema . *Enseñanza de la ciencias*, pp. 341-352.

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M., y Ariza Nieves, L. M. (2017). dentificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. . *Rev. Cient. Gen. José María Córdova*, V. 15(20), pp. 137-153. DOI: [http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170].

Gülkilik, H., Hüseyin, H., y Yürük, N. (2015). Examining students mathematical understanding of geometric transformation using the Pirie y Kieren model. *Educational Sciences: Theory y Practice*, pp. 1-18.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C, y Baptista L. (2006). *Metodología de la investigación.* Mexico: MacGraw-Hill.

Kelly, A. E., Baek, J. Y., Lesh, R. A., y Bannan-Ritland, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science*, pp.3-18. Nueva York: Routledge.

Kelly, A. E., y Lesh, R. A. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Kent, P. and R. Noss (2003). *Mathematics in the University Education of Engineers* (A report to The Ove Arup Foundation). London.

Kent, P. N. R. (2001). *Finding a role for technology in service mathematics for engineers and scientists. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. D. Holton. Dordrecht, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Londoño, R. (2011). La relación inversa entre la cuadrátura y tangentes en el modelo de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia: Departamento de Eduación Matemática. Universidad de Antioquia. Recuperado de: [tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/ReneLondoño_2011_teoriapirie].

Luna, J., Ruiz, O., Loera, E., Barron, J., y Salazar, M. (2013). Comprensión del concepto de derivada como razón de cambio . *Culcyt/ Matemática Educativa*, pp. 1-14.

Manu, S. (2005). Mathematical understanding and Tongan bilingual students language swithing: Is there a relationship? (Unpublished PhD Thesis), The University of British Columbia, Vancouver, B. C. Canada. Recuperado de: [https://circle.ubc.ca/handle/2429/16985].

Martins, M. (2013). Integración e interactividad en libros de textos y objetos digitales de ecuaciones diferenciales. Tesis Doctoral. Buenos Aires. Escuela de Educación. Universidad de San Andrés. Recuperado de: [http://repositorio.udesa.edu.ar/jspui/bitstream/10908/10985/1/%5BP%5D%5BW%5D%20D.%20Edu.%20%20Martins%2C%20Marcela.pdf].

Meel, D. (2003). Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pierie and Kieren´s Model of the Grwth of Mathematical Understnding and APOE theory. *CBMS Issues in Matehematics Education*, V. 12, pp. 132-181.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Sea, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the Inteernational Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 pp. 265-272. Seoul, Korea

Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñana. *Enseñanza de las Ciencias*, V. 29(1), pp. 75-88.

Mora, C., Urquiza, R., y Vásquez, E. (2017). Multimedia educativa para las Ecuaciones diferenciales ordinarias un mediode enseñanza. *Taller internacional de cibernética aplicada*, 1-12.

Morales, Y., y Salas, O. (2010). Introducciòn de la tecnología para la enseñanza y aprendiaje de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias . *Cuaderno de Investigaciòn y Formación en Educación Matemática*, No 6. pp- 155-172.

Miles, M, y Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis: An exponencial sourcebook. Second Edition.* SAGE publication. International Educational and professional London New-Delhi Publisher: Thausand Oaks.

Nápoles, J., y Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales contadas por sus libros de texto . *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas* , pp. 33-57.

Nápoles Valdés, J. E., González, A., Brundo, J. M, Genes, F., y Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para las ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias . Acta Scientiae, pp. 6. 41-59.

Nillas, L. A. (2010). Characterizing preservice teachers' mathematical uderstanding of algebraic relationships. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–24. Recuperado de: [http://www.cimt.plymouth.ac.uk/ journal/nillas.pdf].

Olmedo, N., y Galindez, M. (2014). Algunas concepciones de alumnos que ingresan a la F.A.C.E.N. acerca del estudio de las ecuaciones . *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología* , V. 5(2), pp. 109.

Pensado, M., Ramirez, Y., y Gonz+añez, O. (2017). La formación integral de los estudiantes universitarios; una perspectiva del análisis de sus áreas de interés, pp. 12-17

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of mathematics* , V. 9(3), pp. 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1991). Folfing back: Dynamics in the growth of mathematical understanding. *Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference*. *Assissi*, *Italy*.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). 'Creating constructivist environments and constructing creative mathematics', special edition, en: von Glasersfeld (ed.). *Educational Studies in Mathematics*, V. 23(5), pp. 505-528.

Pirie, S., y Kieren, T. (1994). Growth in the mathematical understanding how can we characterise it and how we represent it? *Educational Students in Mathematical*, pp. 165-190.

Pirie, S., y Kieren, T. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of nymber. *Journal of Mathematical Behavior*, V. 25(3), pp. 185-195.

Porres, M, Pecharromán, C, y Ortega, T. (2017). Aportaciones de DERIVE y del cálculo mental al aprendizaje de la integral . PNA, V. 11(2), pp. 125-153.

Portillo, H, Avila, M, Cruz, M, y López, C. (2019). Geogebra y problemas de optimización . *Cultura científica y tecnología*, pp. 5-11.

Rasmussen, C. (2001). New directions equations differential a framework for interpreting student´s understandings and difficulties. *Journal Mathematical Behavior*, pp. 55-87.

Rasmussen, C., y Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal Mathematical Behavior*, pp. 189-194.

Rodriguez Rivero, L, Ponce Valdés, Y., y Pérez González, I. (2016). La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica. *Unión*, No. 47, pp. 176-191. Recuperado de: [http://www.https://www.researchgate.net/publication/321342839_La_comprension_matematica_de_las_funciones_en_interdisciplinariedad_con_la_Fisica_a_traves_de_problemas_de_la_vida_practica/link/5a1dd41d0f7e9b9d5effae1].

Rodríguez, G. R., y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el pproceso de la modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME.Revista latinoamerica de investigación en matemática educativa* , V. 19(1), pp. 99-124.

Sazhin, S. S. (1998). Teaching Mathematics to Engineering Students. *The International Journal of Engineering Education*, V. 14(2), pp. 145-152

Sánchez , G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigacion en didáctica de la matemática . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, V. 11(2), pp. 267-296.

Saparwadi, L., Sa`dijah, C., Rahman, A., y Daniel, T. (2019). Reversible Thinking Ability in calculus Learn-ing using Maple Software: A case Study of Mathematics

Education Student. *International Journal of Recent Technology and Engineering (*IJRTE*)Volume- 8*, *Issue-1C2*, pp. 695-700.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. . *Educational Studies in Mathematics*, V. 22(1), pp. 1-36. DOI: [10.1007/BF00302715].

Sfard, A. (2001). There is more to discourse then meets the ears: Loking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematical* V. *46*, pp. 13-57.

Sealey, V, y Flores, A. (2005). "Entender la derivada" si se puede, en F. Hitt y J. C.Cortés (Eds.), Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculoy su enseñanza, . *Editorial Morevallado, Morelia*, Michoacan, México, pp. 175-196.

Shavelson, R. J., Phillips, D., Towne, L., y Feue. (2002). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, V. 32(1), pp. 25-28.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, V. 10(3), pp. 24-36

Soares, D., y Borba, M. (2014). The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. *ZDM – Mathematics Education*, V. 46(4), pp. 575-587. DOI: 10.1007/s11858-013-0568-5.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, pp. 267-306. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. *España: Ediciones Morata*.

Swidan, O, y Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological enviroment. *ZDM Mathematical Education* , V. 46(1), pp. 517-531. DOI: [10.1007/s11858-014-0583-1].

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp. 151-169.

Thompson , P. W, y Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson y Rasmussen (Eds.). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, pp. 117-131. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Turégano, P. (2006). Una Interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos* (21), pp. 35-48.

Van Hielen, P. (1957). El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral. Recuperado de: http://www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf.

Vasilachis de Gialdino, I., Ameigeiras, A., Chernobilsky, L., Giménez, V., Mallimaci, F., Mendiazábal, N., y Soneira, A. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Villa Ochoa, J. (2011). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis de la teoría de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia Recuperado de: [ayura.udea.edu.co:808].

Von, G. E. (1987). The construction of Knowledge, Sea side. Intersystems Publications.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema Boletín de Educaçao Matemática*, pp. 449-468.

West, B., Strogatz, S., McDill, J., y Cantwel, J. (1996). Letrative differential equations. Reading, *MA:Addsin -Wesley*.

Weurlander, M., Cronhjort, M., y Filipsson, L. (2017). Engineering Students' Experiences of Interactive Teaching in Calculus. *Higher Education Research y Development*, 36(4), pp. 852-865, DOI: [10.1080/07294360.2016.1238880].

Anexos

Anexo 1. *Entrevista episodio uno*

Profesor: ____Fecha: ______________

Tiempo: 2 horas

Temas: Comprensión de conceptos matemáticos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

Objetivo: Analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial.

A continuación, se presentan varios enunciados que tú podrás resolver.

1. Escribe una expresión algebraica para el siguiente enunciado. La rapidez de y con respecto a t es proporcional a y.

2. ¿Qué significado tienen los siguientes valores: Si $t = 0$ entonces $y(0) = 100$ en la función solución?

3. En la siguiente expresión identifica la variable independiente y la variable dependiente $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}y$

4. En el enunciado: la razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a y. Cuando $x = 0y = 6$; cuando $x = 4y = 15$.

¿Cuál es el valor de y cuando $x = 8$?

a. Escribe una expresión algebraica que represente lo descrito en el enunciado.
b. Puedes identificar la variable independiente y dependiente en el enunciado del problema.
c. Identifica los valores iniciales en el enunciado de un problema.
d. Hallar la antiderivada de la expresión dada.
e. En la función solución, a través de qué método, concepto puedes hallar el tiempo (t).
f. ¿En la función solución, a través de qué método concepto puedes hallar la constante de proporcionalidad?
g. Aplica las condiciones iniciales en la función solución, ¿gráficamente qué significan?

Representa gráficamente la función solución del problema.

Anexo 2. *Entrevista relacionada con los conceptos de razón de cambio y derivada, antiderivada y ecuación diferencial lineal de primer orden.*

Estudiante: _______________________________________Fecha: _______________

Usa la siguiente información según la situación planteada.

APORTE DE INFORMACIÓN:

- Cambio en los valores de y (ordenadas): hace referencia a la diferencia entre dos cantidades representadas en el eje Y, se simboliza por Δy y se calcula aplicando $\Delta y = y_f - y_i$, se considera un incremento en y, donde:
  y_f: *valor final considerado, ubicado en el eje* Y

  y_i: *valor inicial considerado, ubicado en el eje* Y

- Cambio en los valores de x (abscisas): hace referencia a la diferencia entre dos cantidades representadas en el eje X, se simboliza por Δx y se calcula aplicando $\Delta x = x_f - x_i$, se considera un incremento en x, donde:

  x_f: *valor final considerado ubicado en el eje* X

  x_i: *valor inicial considrado ubicado en el eje* X.

- Razón de cambio promedio (tasa de variación promedio): hace referencia al cociente entre el cambio de los valores de y (ordenadas) sobre el cambio de los valores de x (abscisas), se representa por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

- Razón de cambio instantánea (tasa de variación instantánea): se refiere al límite del cociente entre el cambio promedio, cuando el cambio de los valores de x tiende a cero, es decir:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Recta secante: es una recta que corta a una curva en dos puntos distintos, su pendiente se simboliza por m_{sec} y se calcula mediante la razón de cambio promedio, así:

  $m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$.

- Recta tangente: es la recta estabilizadora de un haz de secantes en un punto fijo, se simboliza por m_{tan} y se calcula mediante el límite de la razón de cambio promedio, así:
  $$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1. Dada la gráfica de la función lineal $y = mx + b$

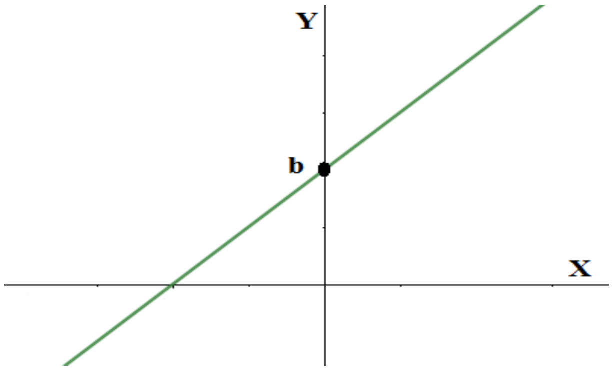


Figura 1.

Responde cada pregunta, según la Figura 1.

a. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = mx + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?
b. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = mx + b$ y su derivada en cualquier punto?
c. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio en cualquier intervalo y la razón de cambio instantánea en cualquier punto de la función $f(x) = mx + b$?
d. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = x$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo?
e. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = x$ y su derivada en cualquier punto?
f. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio en cualquier intervalo y la razón de cambio instantánea en cualquier punto de la función $f(x) = x$?

2. Dada los puntos P y Q sobre la curva:

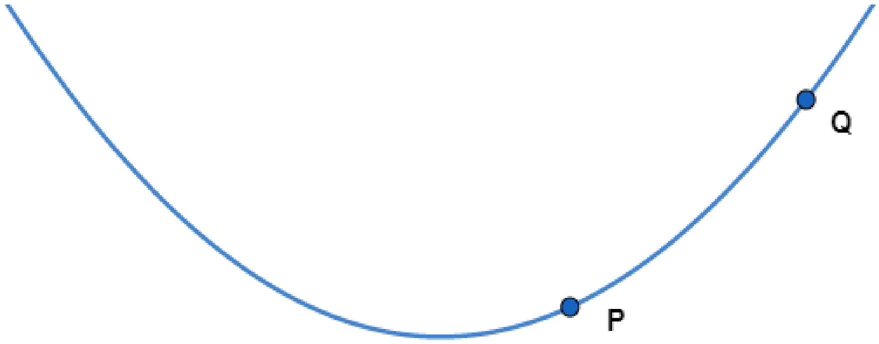


Figura 2.

Responde cada pregunta, según la Figura 2.

a. Traza una recta que pase por los puntos P y Q ¿Cómo se denomina esta recta?
b. ¿Cuántos puntos hay sobre la curva entre P y Q?
c. Al desplazar sobre la curva el punto Q hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P?
d. Al desplazar Q hacia P y tomando el punto P fijo ¿Cuántas rectas sobre la curva podemos trazar entre P y Q?
e. ¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más a P? ¿Es posible trazar una última recta?
f. Traza la recta cuando Q coincide con P ¿Cómo se denomina esta recta?

3. Dada la gráfica de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$

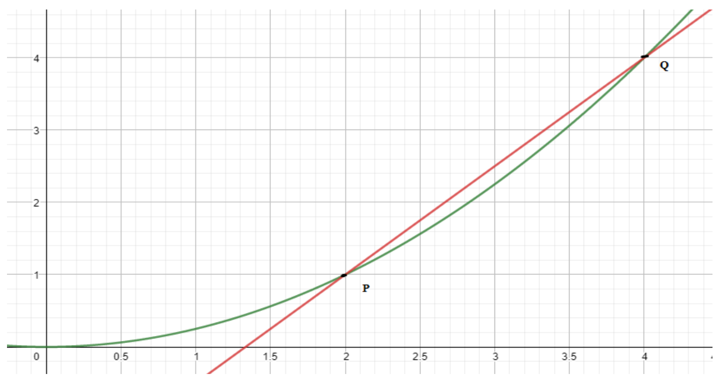


Figura 3.

Responde cada pregunta, según la Figura 3.

a. ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo $[2,4]$?
b. ¿Cuántos puntos hay sobre la curva de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$?
c. Al desplazar el punto Q sobre la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P?
d. ¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más al punto fijo P? ¿Es posible trazar una última recta?
e. ¿Cómo varían los valores de la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$en el intervalo $[2,4]$?
f. Traza la recta que pasa por P cuando Q coincide con P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?
g. Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función?

h. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$ y la razón de cambio instantánea en $x = 2$?

4. Dada la gráfica de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$

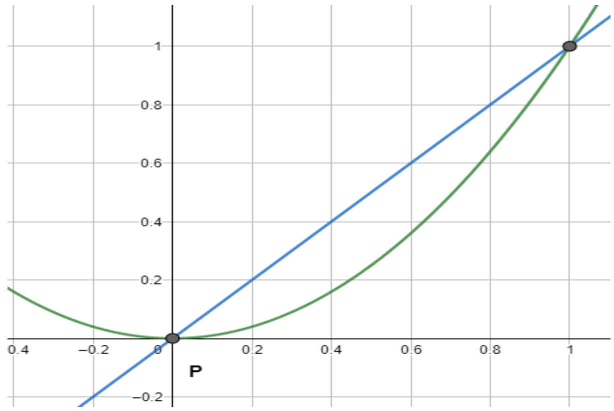


Figura 4.

Responde cada pregunta, según la Figura 4.

a. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área?
b. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$ y el eje x en el intevalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área?
c. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intevalo $[0,1]$ ¿cuál es su área

5. Escribe la antiderivada correspondiente para cada función.

a. $\frac{dy}{dx} = m$ ________________________
b. $f(x) = x^2$ ________________________
c. $g(x) = \sqrt[2]{x}$ ________________________
d. $\frac{dH}{dt} = kH$ ________________________
e. $xdx + ydy = 0$ ________________________

APORTE DE INFORMACIÓN:

A continuación, se brinda una información que puedes emplear según corresponda en la situación planteada:

- Ecuación diferencial: es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

- Solución general de una ecuación diferencial: es una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial.
- Solución particular de una ecuación diferencial: es una función que satisface la ecuación diferencial y para por un punto dado.

6. Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$, su respectiva solución general está dada por la expresión $y = x^2 + C$.

a. ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?
b. Traza las gráficas de $y = x^2 + C$ en el plano xy para los siguientes valores de $C = \{-2, -1, 0\ 1{,}2\}$ (A2.4) ¿Cuántas gráficas más puedes trazar?
c. Representa gráficamente trozos de rectas tangentes a las curvas trazadas para un mismo valor de x elegido. ¿Cómo son sus pendientes? ¿Qué relación tienen esas pendientes con la ecuación diferencial dada?

APORTE DE INFORMACIÓN:

A continuación, se brinda una información que puedes emplear según corresponda en la situación planteada:

- $H(t)$: Número de habitantes presentes en un tiempo cualquiera.
- $\frac{dH}{dt} = kH$: Crecimiento de habitantes directamente proporcional al número presente de habitantes en un tiempo t, con $k \in \boldsymbol{R}$.
- $H(0) = H_0$: Número de habitantes inicial en un tiempo $t = 0\ años$(llamada condición inicial).
- $H(t)$: Número de habitantes en un tiempo t.

7. La ciudad R tiene un crecimiento de habitantes directamente proporcional al número presente en un tiempo cualquiera. Se sabe que el número de habitantes inicial es de 300 mil y al cabo de 6 años es de 900 mil.

Responde las siguientes preguntas, según corresponda.

a. Identifica las variables que están involucradas en la situación planteada.
b. Identifica las condiciones iniciales propuestas en la situación planteada.
c. Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada.
d. ¿Qué relación observas entre el concepto de derivada y la ecuación diferencial planteada por ti?
e. Halla la solución general de la ecuación diferencial planteada e interpreta su solución. Representa e interpreta gráficamente la solución de la ecuación diferencial teniendo en cuenta las condiciones dadas.

Anexo 3. *Descriptores en el marco de la complementariedad de la acción y la expresión.*

Nivel	Nombre	Complementariedad		Descriptor
1	Conocimiento primitivo			CP 1.1 Reconoce las razones de cambio promedio e instantánea involucradas en una situación.
				CP 1.2. Identifica la pendiente de una recta secante y la pendiente de una recta tangente a una curva.
				CP 1.3. Distingue las variables que intervienen en una situación de tasa de variación.
				CP 1.4. Reconoce la antiderivada como un operador inverso a la derivada.
				CP 1.5. Identifica la tasa de cambio como un cociente entre incrementos de variables.
				CP1.6. Identifica las condiciones iniciales en una situación planteada-.
2	Construcción de la imagen	Acción	Creación de la imagen	A 2.1. Realiza trazos o gráficos que permiten diferenciar una razón de cambio promedio de una instantánea.
				A 2.2. Esboza gráficamente una recta tangente como la derivada de una función en un punto.
				A 2.3. Aproxima el área de una región limitada por funciones en un intervalo.
				A 2.4. Traza una familia de curvas como una representación de la solución general de una ecuación diferencial.
		Expresión	Análisis de la imagen	E 2.1. Verbaliza diferencias entre una razón de cambio promedio y una razón de cambio instantánea.
				E 2.2. Explicita el significado de la derivada de una función en un punto.
				E 2.3. Describe el área de una región limitada por curvas en un intervalo como una antiderivada.
				E 2.4. Describe una familia de curvas como una representación de una solución general de una ecuación diferencial.
3	Obtención de la imagen	Acción	Comprensión de la imagen	A 3.1. Establece diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
				A 3.2. Relaciona la pendiente de una función en un punto con el concepto de derivada.
				A 3.3. Asocia el área de una región limitada por funciones en un intervalo con la correspondiente antiderivada.
				A 3.4. Asocia pendientes de rectas tangentes en una misma abscisa de una familia de curvas con una ecuación diferencial.
		Expresión	Análisis de la imagen	E 3.1. Justifica diferencias entre una razón de cambio promedio y una instantánea.
				E 3.2. Justifica el concepto de derivada como una pendiente de una función en un punto.
				E 3.3. Determina la antiderivada de una región limitada por funciones en un intervalo.
				E 3.4. Determina una familia de curvas a partir de una ecuación diferencial.
4	Observación de la propiedad	Acción	Análisis de la propiedad	A 4.1. Examina qué tipos de relaciones existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones en situaciones dadas.
				A 4.2. Examina qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
				A 4.3 Analiza las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
				A4.4. Examina la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
				A 4.5. Examina qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.
		Expresión	Registro de la propiedad	E 4.1. Interpreta los tipos de relaciones que existen entre la derivada y sus diversas interpretaciones en situaciones dadas.
				E 4.2. Interpreta qué tipo relaciones existen entre la antiderivada y sus diferentes interpretaciones.
				E 4.3. Explica las soluciones de ecuaciones diferenciales en sus diversas manifestaciones ante situaciones dadas.
				E4.4. Infiere las características de la ecuación diferencial que corresponde a la situación planteada.
				E4.5. Infiere qué tipo de relaciones hay entre la razón de cambio promedio e instantánea con sus múltiples interpretaciones.

Anexo 4. *Intencionalidad de la entrevista*

Estudiante: ______________________________________Fecha: _______________

Usa la siguiente información según la situación planteada.

APORTE DE INFORMACIÓN:

- Cambio en los valores de y (ordenadas): hace referencia a la diferencia entre dos cantidades representadas en el eje Y, se simboliza por Δy y se calcula aplicando $\Delta y = y_f - y_i$, se considera un incremento en y, donde:
  y_f: $valor\ final\ considerado, ubicado\ en\ el\ eje\ Y$

  y_i: $valor\ inicial\ considerado, ubicado\ en\ el\ eje\ Y$

- Cambio en los valores de x (abscisas): hace referencia a la diferencia entre dos cantidades representadas en el eje X, se simboliza por Δx y se calcula aplicando $\Delta x = x_f - x_i$, se considera un incremento en x, donde:
  x_f: $valor\ final\ considerado\ ubicado\ en\ el\ eje\ X$

  x_i: $valor\ inicial\ considrado\ ubicado\ en\ el\ eje\ X$.

- Razón de cambio promedio (tasa de variación promedio): hace referencia al cociente entre el cambio de los valores de y (ordenadas) sobre el cambio de los valores de x (abscisas), se representa por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

- Razón de cambio instantánea (tasa de variación instantánea): se refiere al límite del cociente entre el cambio promedio, cuando el cambio de los valores de x tiende a cero, es decir:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Recta secante: es una recta que corta a una curva en dos puntos distintos, su pendiente se simboliza por m_{sec} y se calcula mediante la razón de cambio promedio, así:
  $m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$.

- Recta tangente: es la recta estabilizadora de un haz de secantes en un punto fijo, se simboliza por m_{tan} y se calcula mediante el límite de la razón de cambio promedio, así:

$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1. Dada la gráfica de la función lineal $y = mx + b$

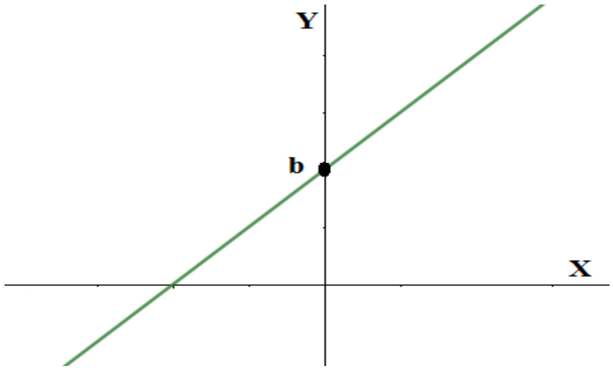


Figura 1.

Responde cada pregunta, según la Figura 1.

g. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = \ mx \ + b$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo? (CP1.1), (CP1.2)
h. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = \ mx \ + b$ y su derivada en cualquier punto? (CP1.1), (CP1.2)
i. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio en cualquier intervalo y la razón de cambio instantánea en cualquier punto de la función $f(x) = \ mx \ + b$? (CP1.5) (A3.1), (E 2.1) y (E 3.1)
j. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta $y = \ x$ y su razón de cambio promedio en cualquier intervalo? (A 3.1) (E 3.1) (A 4.5) (E 4.5)
k. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la función $f(x) = \ x$ y su derivada en cualquier punto? (A 3.2) (E 3.2) (E 2.2) (A 2.2)
l. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio en cualquier intervalo y la razón de cambio instantánea en cualquier punto de la función $f(x) = \ x$? (A 3.1), (E3.1), (A 4.5), (E 4.5)

2. Dada los puntos P y Q sobre la curva:

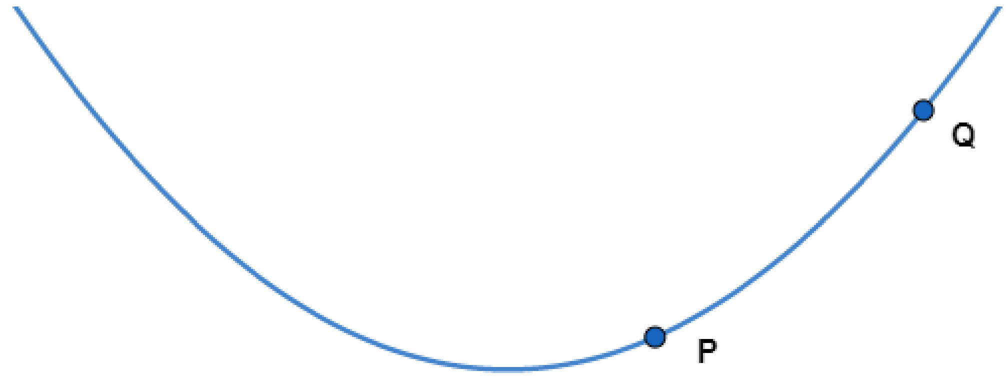


Figura 2.

Responde cada pregunta, según la Figura 2.

g. Traza una recta que pase por los puntos P y Q ¿Cómo se denomina esta recta? (A 2.5) (E 2.5) (A 3.5) (E 3.5)
h. ¿Cuántos puntos hay sobre la curva entre P y Q?
i. Al desplazar sobre la curva el punto Q hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P? (A 2.5) y (E 2.6)
j. Al desplazar Q hacia P y tomando el punto P fijo ¿Cuántas rectas sobre la curva podemos trazar entre P y Q? (A 2.5) y (E 2.5)
k. ¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más a P? ¿Es posible trazar una última recta? (A 2.5) (E 2.5) (A 3.5) (E 3.5)
l. Traza la recta cuando Q coincide con P ¿Cómo se denomina esta recta? (A2.5), (E 2.5), (A 3.5), (E 3.5), (E 4.6), (A 4,6)

3. Dada la gráfica de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$

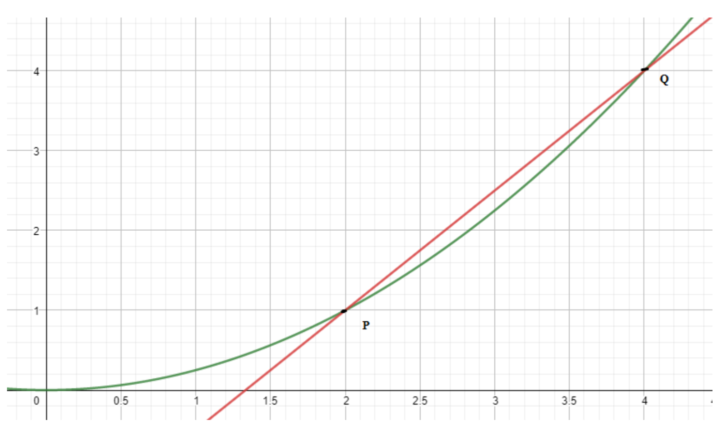


Figura 3.

Responde cada pregunta, según la Figura 3.

i. ¿Cómo se denomina a la recta que pasa por los puntos P y Q de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$?¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función en el intervalo $[2,4]$? (A 2.5), (E 2.5), (A 3.1), (E3.1)

j. ¿Cuántos puntos hay sobre la curva de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$? (A 2.6)

k. Al desplazar el punto Q sobre la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ hacia P ¿Qué tanto se puede aproximar Q hacia P? (E 2.6)

l. ¿Cuántas rectas podemos trazar cuando Q se aproxima cada vez más y más al punto fijo P? ¿Es posible trazar una última recta? (A 2.5) y (E 2.5)

m. ¿Cómo varían los valores de la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$?(A 3.1) (E 3.1), (A 4.5) (E 4.5)

n. Traza la recta que pasa por P cuando Q coincide con P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$? (A2.1), (A2.5)

o. Determina la razón de cambio instantánea de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el punto P ¿Cómo se denomina esta recta con respecto a la función? (A3.6), (E3.6)

p. ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio promedio de la función $g(x) = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo $[2,4]$ y la razón de cambio instantánea en $x = 2$? (A4.5), (E 4.5)

4. Dada la gráfica de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$

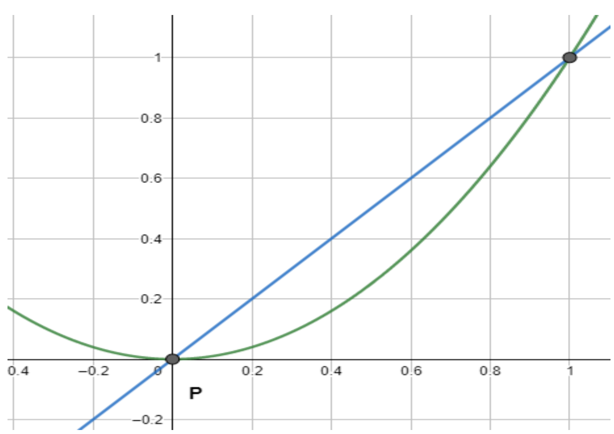


Figura 4.

Responde cada pregunta, según la Figura 4.

d. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x$ y el eje x en el intevalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área? (A2.3), (E2.3), (A3.3), (E3.3)
e. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$ y el eje x en el intevalo $[0,1]$ ¿Cuál es su área? (A3.3), (E3.3)
f. ¿De qué manera hallarías el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x \;\; y \;\; g(x) = x^2$ en el intevalo $[0,1]$ ¿cuál es su área (E3.3)

5. Escribe la antiderivada correspondiente para cada función.
f. $\frac{dy}{dx} = m$ ______________________(CP1.4)
g. $f(x) = x^2$ ______________________ (A 2.7)
h. $g(x) = \sqrt[2]{x}$ ______________________ (E 2.7)
i. $\frac{dH}{dt} = kH$ ______________________ (A 4.2)
j. $xdx + ydy = 0$ ______________________ (A 3.7)

APORTE DE INFORMACIÓN:

A continuación, se brinda una información que puedes emplear según corresponda en la situación planteada:

- Ecuación diferencial: es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.
- Solución general de una ecuación diferencial: es una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial.
- Solución particular de una ecuación diferencial: es una función que satisface la ecuación diferencial y para por un punto dado.

6. Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$, su respectiva solución general está dada por la expresión $y = x^2 + C$.
d. ¿Cómo puedes interpretar la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$? (CP 1.7)
e. Traza las gráficas de $y = x^2 + C$ en el plano xy para los siguientes valores de $C = \{-2, -1, 0\ 1{,}2\}$ (A2.4) ¿Cuántas gráficas más puedes trazar? (A 2,4) (E2.4) (A 3.4) (E 3.4)
f. Representa gráficamente trozos de rectas tangentes a las curvas trazadas para un mismo valor de x elegido. ¿Cómo son sus pendientes? ¿Qué relación tienen esas pendientes con la ecuación diferencial dada? (A4.3) (E4.3), (A2.1)

APORTE DE INFORMACIÓN:

A continuación, se brinda una información que puedes emplear según corresponda en la situación planteada:

- $H(t)$: Número de habitantes presentes en un tiempo cualquiera.
- $\frac{dH}{dt} = kH$: Crecimiento de habitantes directamente proporcional al número presente de habitantes en un tiempo t, con $k \in \boldsymbol{R}$.
- $H(0) = H_0$: Número de habitantes inicial en un tiempo $t = 0$ $años$(llamada condición inicial).
- $H(t)$: Número de habitantes en un tiempo t.

7. La ciudad R tiene un crecimiento de habitantes directamente proporcional al número presente en un tiempo cualquiera. Se sabe que el número de habitantes inicial es de 300 mil y al cabo de 6 años es de 900 mil.

Responde las siguientes preguntas, según corresponda.

f. Identifica las variables que están involucradas en la situación planteada. (CP1.3)
g. Identifica las condiciones iniciales propuestas en la situación planteada. (CP1.6)
h. Escribe una ecuación diferencial que represente la situación planteada. (A4.1), (E4.1)
i. ¿Qué relación observas entre el concepto de derivada y la ecuación diferencial planteada por ti? (A4.4); (E4.4)
j. Halla la solución general de la ecuación diferencial planteada e interpreta su solución. (E4.3)
k. Representa e interpreta gráficamente la solución de la ecuación diferencial teniendo en cuenta las condiciones dadas. (A2.4), (E2.4)