TRIÁNGULOS DE AUSLANDER-REITEN SOBRE LA CATEGORÍA ESTABLE DE MÓDULOS FINITAMENTE GENERADOS SOBRE UN ÁLGEBRA REPETITIVA

Por

Yohny Calderón Henao

Tesis presentada en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de
Ph.D en Matemáticas

Director de Tesis: Ph.D. Hernán Giraldo
Profesor Titular Universidad de Antioquia
Co-Director de Tesis: Ph.D. José Alberto Vélez Marulanda
Profesor Asociado Valdosta State University

Durante la elaboración de este trabajo, el autor recibió apoyo de Colciencias

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Medellín, Colombia

2020

Dedicado a
mi esposa Falconery León
mis padres Iván y Lucila .

Tabla de contenido

Agradecimientos

En el presente trabajo agradezco a Dios por ser mi guía y mi fortaleza en el transcurso de mi vida, brindándome paciencia y sabiduría para culminar con éxito mis metas propuestas.

Agradezco a mi esposa Falconery León y a mis padres José Iván y María Lucila por ser mi pilar fundamental y haberme apoyado incondicionalmente, pese a las adversidades e inconvenientes que se presentaron.

Agradezco a mi director de tesis Ph.D Hernán Giraldo y mi co-director Ph.D José Alberto Vélez Marulanda quienes con su experiencia, conocimiento y motivación me orientaron la investigación, al profesor Ph.D Raymundo Bautista por compartir sus conocimientos en la realización de este proyecto, al profesor Ph.D Raúl Velásquez por apoyarme en la ultima opción que tenia para aprobar el examen de lengua extranjera y a todos los profesores que han aportado su conocimiento en el transcurso de mi vida académica.

Agradezco al instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia por permitirme formarme en su claustro y finalmente quiero agradecer a Colciencias por su apoyo financiero durante mis estudios de doctorado (convocatoria 727 de 2015).

Resumen

Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado, Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita y $\widehat{\Lambda}$ la álgebra repetitiva de Λ. Para $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$, la categoría estable de los $\widehat{\Lambda}$-módulos finitamente generados, probamos que un morfismo irreducible dado tiene una y solo una de las siguientes tres formas canónicas: (i) todos los homomorfismos componentes son monomorfismos escindidos; (ii) todos son epimorfismos escindidos; (iii) existe exactamente un homomorfismo componente irreducible. Utilizamos este hecho para describir la forma de los triángulos de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Demostramos que un triángulo de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ es inducido por una sucesión de Auslander-Reiten en la categoría de los $\widehat{\Lambda}$-módulos (a izquierda) finitamente generado.

Introducción

Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Denotamos por Λ-mod a la categoría abeliana de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados, y por $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ a la categoría derivada acotada de Λ, la cual es una categoría triangulada [19]. Sea $\widehat{\Lambda}$ la $\Bbbk$-álgebra repetitiva de Λ (ver §2.1), denotamos por $\widehat{\Lambda}$-mod a la categoría abeliana de los $\widehat{\Lambda}$-módulos a izquierda finitamente generados y por $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ su categoría estable. Se sigue de [11, Chap. II, §2.2] que $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ también es una categoría triangulada. Debido a un resultado fundamental de D. Happel, existe un funtor exacto, fiel y pleno $\mu : \mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod}) \to \widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$, entre categorías trianguladas, tal que μ extiende al funtor identidad sobre Λ-mod, donde Λ-mod es embebido en $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ (respectivamente en $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$) como complejos (respectivamente módulos) concentrados en el grado cero. Más aun, μ es una equivalencia si, y solamente si, Λ tiene dimensión global finita [12, §2.3]. Este resultado sirve para describir los objetos indescomponibles y los correspondientes morfismos en $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ vía $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$. Sin embargo, este funtor μ es bastante difícil de describirlo explícitamente (ver [4]). En [13], D. Happel, B. Keller y I. Reiten investigaron la relación entre $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ y $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ desde varios puntos de vista, para álgebras de dimensión global infinita. Por otro lado, fue probado por D. Hughes y J. Waschbüsch en [14, §2.5] que $\widehat{\Lambda}$-mod tiene sucesiones de Auslander-Reiten y por D. Happel en [11] que $\widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ tiene triángulos de Auslander-Reiten.

Por lo tanto, es una tarea natural investigar el comportamiento de las sucesiones y triángulos de Auslander-Reiten que involucran $\widehat{\Lambda}$-módulos a izquierda finitamente generados, lo que a su vez se eleva a investigar el comportamiento de los homomorfismos irreducibles entre los $\widehat{\Lambda}$-módulos izquierda. Esta investigación se abordó en un entorno más general para categorías aditivas por M. J. Souto Salorio y R. Bautista en [5, §2].

Recientemente H. Giraldo investigó en [9] el comportamiento de los homomorfismos irreducibles entre objetos en $\widehat{\Lambda}$-mod. Esta investigación fue motivada por un trabajo hecho entre H. Giraldo junto con H. Merklen sobre el comportamiento de los homomorfismos irreducibles entre objetos en $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ (ver [10]), el cual ha sido utilizado recientemente por E. Ribeiro Alvares, S. M. Fernandes y H. Giraldo en [16] para investigar la forma de los triángulos de Auslander-Reiten en $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$.

El objetivo de esta tesis es investigar la forma de los triángulos de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ y demostrar que el resultado principal en [16] también vale en la categoría $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Nuestra principal motivación es que los objetos y los homomorfismo en $\widehat{\Lambda}$-mod son más fáciles de entender que en $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$. Nuestros principales resultados son el teorema 3.2.3, el cual extiende el teorema 26 en [9] para $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$, y el teorema 3.3.1, el cual extiende el teorema principal de [16, §4.1] para $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. En el teorema 3.2.3, probamos que un homomorfismo irreducible en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ tiene una y solo una de las siguientes tres formas canónicas: (i) todos los homomorfismos componentes son monomorfismos escindidos; (ii) todos los homomorfismos componentes son epimorfismos escindidos; (iii) existe exactamente un homomorfismo componente irreducible. Por otro lado, en el teorema 3.3.1 nosotros describimos la forma de los homomorfismos irreducibles que están en un triángulo de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Para lograr nuestro objetivo, nosotros usamos el hecho que todo triángulo de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ es inducido por una sucesión de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-mod (ver teorema 2.4.1).

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1 daremos los conceptos básicos que se requieren para entender los triángulos de Auslander Reiten. En el capítulo 2 se dan los conceptos generales de una álgebra repetitiva. Por medio repetitivo, del siguiente derrotero: en la sección §2.1 daremos la definición de la $\Bbbk$-álgebra repetitiva $\widehat{\Lambda}$ y mostraremos algunos resultados básicos concernientes a la categoría $\widehat{\Lambda}$-mod y $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. También repasamos los resultados de [9] concernientes a los homomorfismos irreducibles $\widehat{\Lambda}$-mod. En la sección §2.3 se demuestra que la categoría $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ tiene triángulos de Auslander-Reiten, además se demuestra el teorema 2.4.1, el cual afirma que todo triángulo de auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ es inducido por una sucesión de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-mod.

En el Capítulo 3, estudiamos las formas de los homomorfismos que están sobre una sucesión exacta corta, demostrando los Lemas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4 y 3.1.5, los cuales son fundamentales para la demostración de uno de los resultados principales de esta tesis, el Teorema 3.3.1. En en la sección §3.2 damos las definiciones de establemente smonic, establemente sepic y establemente sirreducible en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. En la sección §3.3 se demuestra el Teorema principal de la tesis y se dan ejemplos de $\Bbbk$-álgebras de dimensión global finita e infinita que verifican los resultados del teorema 3.3.1. Finalmente, en el Apéndice damos los principales teoremas y definiciones que se requieren para entender los ejemplos.

El lector debe estar familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de Representaciones de Álgebras, para mayor detalle ver [3], [17], [1] y [11].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Morfismos irreducibles

Definición 1.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva (ver [20], [15] y [2]).*

*(a) Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ es un **monomorfismo escindido**, si existe $g : Y \longrightarrow X$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.*

*(b) Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ es un **epimorfismo escindido**, si existe $g : Y \longrightarrow X$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

*(c) Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es un **irreducible** si f no es un monomorfismo escindido, no es un epimorfismo escindido y si $f = v \circ u$, para morfismos $u : X \longrightarrow Z$ y $v : Z \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, entonces u es un monomorfismo escindido o v es un epimorfismo escindido.*

Definición 1.1.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt y $f : Z \longrightarrow W$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Decimos que f es un **morfismo radical** si para todo monomorfismo escindido $\sigma : Z_1 \longrightarrow Z$ y para todo epimorfismo escindido $\beta : W \longrightarrow W_1$ la composición $\beta \circ f \circ \sigma$ no es un isomorfismo [5].*

Teorema 1.1.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo radical en $\mathcal{C}$.*

(i) Si f es irreducible y $s : W \longrightarrow X$ es un monomorfismo escindido no nulo en $\mathcal{C}$, entonces $f \circ s : W \longrightarrow Y$ es un homomorfismo irreducible en $\mathcal{C}$.

(ii) *Si f es irreducible y $t : Y \longrightarrow Z$ es un epimorfismo escindido no nulo en $\mathcal{C}$, entonces $t \circ f : X \longrightarrow Z$ es un homomorfismo irreducible no nulo en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Ver [5, §2, Proposición 2.18]. □

1.2 Categorías trianguladas

Definición 1.2.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un automorfismo.*

(i) *Consideremos sextuplas (X, Y, Z, u, v, w) de objetos y morfismos en $\mathcal{C}$, determinadas como sigue*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX\cdot$$

(ii) *Un **morfismo** entre dos sextuplas (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') es una terna (f, g, h) tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{C}$ es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' . \end{tikzcd}$$

*Un morfismo (f, g, h) de sextuplas es llamado **isomorfismo** si f, g y h son isomorfismos en $\mathcal{C}$.*

*Denotamos el conjunto de las sextuplas por $\mathcal{T}$, los elementos de $\mathcal{T}$ son llamados de **triángulos***

Definición 1.2.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un automorfismo. Un conjunto $\mathcal{T}$ de sextuplas de $\mathcal{C}$ es una **triangulación** de $\mathcal{C}$ si cumple los siguientes axiomas (ver [20, §10.2] y [11, §1.1]).*

(TR1) (i) *Toda sextupla isomorfa a un triángulo también es un triángulo.*

(ii) *Para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ existe un triángulo (X, Y, Z, f, v, w).*

(iii) Para todo objeto X en $\mathcal{C}$, la sextupla $(X, X, 0, \mathrm{id}_X, 0, 0)$ es un triángulo.

(TR2) Si (X, Y, Z, u, v, w) es un triángulo, entonces $(Y, Z, T\,X, v, w, -T\,u)$ es un triángulo.

(TR3) Dados dos triángulos (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') y morfismos $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ tales que $g \circ u = u' \circ f$, existe $h : Z \to Z'$ tal que (f, g, h) es un morfismo entre los dos triángulos. Esto es,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\exists h"'] & T\,X \arrow[d, "T\,f"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T\,X' .
\end{tikzcd}
$$

(TR4) (Axioma del octaedro) Considere los triángulos (X, Y, Z', u, i, i'), (Y, Z, X', v, j, j') y $(X, Z, Y', v \circ u, k, k')$. Entonces existen morfismos $f : Z' \to Y'$ y $g : Y' \to X'$ tales que el siguiente diagrama conmuta y $(Z', Y', X', f, g, (T\,i) \circ j')$ es un triángulo.

$$
\begin{tikzcd}
T^{-1}\,Y' \arrow[r, "T^{-1}\,k'"] \arrow[d, "T^{-1}\,g"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[d, "v \circ u"] & & \\
T^{-1}\,X' \arrow[r, "T^{-1}\,j'"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & T\,Y \arrow[d, "T\,i"] \\
& Z' \arrow[r, dashed, "\exists f"'] \arrow[d, "i'"] & Y' \arrow[r, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "k'"] & X' \arrow[r, "(T\,i) \circ j'"] & T\,Z' \\
& T\,X \arrow[r, "\mathrm{id}_{T\,X}"] & T\,X & &
\end{tikzcd}
$$

La tripleta $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva, T un automorfismo y $\mathcal{T}$ una triangulación es llamada **categoría triangulada**.

Definición 1.2.3. *Sean $= (\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ y $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$ dos categorías trianguladas.*

(i) *Un funtor aditivo* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *es* ***exacto*** *si existe un isomorfismo natural* $\alpha : T \circ F \to F \circ T'$ *tal que: si* (X, Y, Z, u, v, w) *es un triángulo en* $\mathcal{C}$*, entonces* $(F\,X, F\,Y, F\,Z, F\,u, F\,v, \alpha_X(Fw))$ *es un triángulo en* $\mathcal{C}'$.

(ii) *Un funtor aditivo* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *es una equivalencia triangulada si* F *es un exacto y y a su vez,* F *una equivalencia de categorías.*

Definición 1.2.4. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada,* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana y* $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *un funtor aditivo.* H *es un* ***funtor covariante cohomológico****, si para cada triángulo* (X, Y, Z, u, v, w) *en* $\mathcal{C}$*, se tiene la sucesión exacta larga en* $\mathcal{A}$

$$\cdots \longrightarrow H(T^i(X)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^{i+1}(X)) \longrightarrow \cdots$$

El funtor aditivo $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ *es un* ***funtor contravariante cohomológico****, si para cada triángulo* (X, Y, Z, u, v, w) *en* $\mathcal{C}$*, se tiene la sucesión exacta larga en* $\mathcal{A}$

$$\cdots \longrightarrow H(T^{i+1}(X)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(X)) \longrightarrow \cdots$$

Proposición 1.2.5. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada,* (X, Y, Z, u, v, w) *un triángulo y* M *un objeto en* $\mathcal{C}$*. Entonces*

(i) $v \circ u = w \circ v = 0$;

(ii) $Hom_{\mathcal{C}}(M, -)$ *y* $Hom_{\mathcal{C}}(-, M)$ *son funtores cohomológicos;*

(iii) *sea* (f, g, h) *un morfismo entre dos triángulos. Si* f *y* g *son isomorfismos, entonces* h *es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [11, §1.2, pág. 4] □

Lema 1.2.6. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada y* (X, Y, Z, u, v, w) *un triángulo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $w = 0$.

(ii) u *es un monomorfismo escindido.*

(iii) v *es un epimorfismo escindido.*

*Demostración.*Ver [11, §1.3 pág. 7]. □

1.3 Triángulos de Auslander-Reiten

En esta sección, asumiremos que $\mathcal{C}$ es una $\Bbbk$-categoría triangulada tal que $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es de dimensión finita como $\Bbbk$-espacio vectorial, para todo par de objetos X y Y en $\mathcal{C}$, y que el anillo de endomorfismos de todo objeto indescomponible en $\mathcal{C}$ es local. Así $\mathcal{C}$ es una categoría de Krull-Schmidt (ver [17, §2.2]).

Definición 1.3.1. *Un triángulo* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *en* $\mathcal{C}$ *es un* ***triángulo de Auslander-Reiten*** *(ver [11]) si cumple las siguientes condiciones.*

(AR1) X *y* Z *son objetos indescomponibles.*

(AR2) $w \neq 0$.

(AR3) Para cada morfismo $f : W \longrightarrow Z$ *que no es un epimorfismo escindido, entonces existe* $f' : W \longrightarrow Y$ *tal que* $v \circ f' = f$.

Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ *tiene triángulos de Auslander-Reiten, si para todo objeto indescomponible* Z *en* $\mathcal{C}$*, existe un triángulo satisfaciendo las condiciones anteriores.*

Lema 1.3.2. *Sea* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *un triángulo de Auslander-Reiten en* $\mathcal{C}$*. Si* $f : X \longrightarrow W$ *no es un monomorfismo escindido, entonces existe* $f' : Y \longrightarrow W$ *tal que* $f' \circ u = f$.

Demostración. Ver [11, pág. 31]. $\square$

Proposición 1.3.3. *Sea* η : $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *un triángulo de Auslander-Reiten en* $\mathcal{C}$ *. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(i) El objeto Z *determina de manera única, hasta isomorfismos de triángulos, a* η.

(ii) u *y* v *son morfismos irreducibles.*

(iii) Si $f : Z_1 \longrightarrow Z$ *es irreducible, entonces existe un monomorfismo escindido* $f' : Z_1 \longrightarrow Y$ *tal que* $v \circ f' = f$.

(iv) Si $f : X \longrightarrow X_1$ *es irreducible, entonces existe un epimorfismo escindido* $f' : Y \longrightarrow X_1$ *tal que* $f' \circ u = f$.

Demostración. Ver [11, pág. 33]. □

Definición 1.3.4. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada. Un morfismo* $u : X \longrightarrow Y$ *en* $\mathcal{C}$ *es un* ***morfismo fuente*** *si cumple las siguientes condiciones.*

(i) u *no es un monomorfismo escindido.*

(ii) Si $f : X \longrightarrow M$ *no es un monomorfismo escindido, entonces existe* $f' : Y \longrightarrow M$ *tal que* $f = f' \circ u$.

(iii) Si $g : Y \longrightarrow Y$ *es un morfismo tal que* $u = g \circ u$, *entonces* g *es un automorfismo.*

Definición 1.3.5. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada. Un morfismo* $v : Y \longrightarrow Z$ *en* $\mathcal{C}$ *es un* ***morfismo pozo*** *si cumple las siguientes condiciones.*

(i) v *no es un epimorfismo escindido.*

(ii) Si $f : M \longrightarrow Z$ *no es un epimorfismo escindido, entonces existe* $f' : M \longrightarrow Y$ *tal que* $f = v \circ f'$.

(iii) Si $g : Y \longrightarrow Y$ *es un morfismo tal que* $v = v \circ g$, *entonces* g *es un automorfismo.*

Observación 1.3.6. *Los morfismos* $u : X \longrightarrow Y$ *(respectivamente* $v : Y \longrightarrow Z$ *) son también conocido con el nombre de* ***morfismo minimal casi-escindido a izquierda*** (respectivamente ***morfismo minimal casi-escindido a derecha***).

Proposición 1.3.7. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría triangulada. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(i) Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *es un triángulo de Auslander-Reiten en* $\mathcal{C}$, *entonces* u *es un morfismo fuente y* v *es un morfismo pozo.*

(ii) *Si* $u : X \longrightarrow Y$ *es un morfismo fuente en* $\mathcal{C}$*, entonces el triángulo* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *, obtenido por el axioma (TR1)(ii) dado en 1.2.2, es un triángulo de Auslander-Reiten en* $\mathcal{C}$*.*

(iii) *Si* $v : Y \longrightarrow Z$ *es un morfismo pozo en* $\mathcal{C}$*, entonces el triángulo* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *, obtenido a partir de los axiomas (TR1)(ii) y (TR2) dados en 1.2.2, es un triángulo de Auslander-Reiten en* $\mathcal{C}$*.*

Demostración. Ver [11, pág. 35-36]. $\square$

Capítulo 2

Álgebra repetitiva

2.1 Definición de álgebra repetitiva

Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y Λ una $\Bbbk$-álgebra básica de dimensión finita. Denotamos por Λ-mod a la categoría de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados, y por $D(-) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-, \Bbbk)$ a la dualidad estándar sobre Λ-mod. En particular, $Q := D(\Lambda)$ es un Λ-bimódulo, y un cogenerador inyectivo minimal en Λ-mod.

Definición 2.1.1. *La* $\Bbbk$***-álgebra repetitiva*** $\widehat{\Lambda}$ *de* Λ*, definida por D. Hughes y J. Waschbüsch en [14], es el* $\Bbbk$*-espacio vectorial*

$$\widehat{\Lambda} = (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Lambda) \oplus (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Q).$$

junto con el producto que definiremos en lo que sigue.

Denotamos por $\hat{a} = (a_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *a los elementos de* $\widehat{\Lambda}$*, donde* $a_i \in \Lambda$ *y* $\varphi_i \in Q$ *y casi todos los* a_i *y* φ_i *son ceros. La multiplicación esta definida por:*

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = (a_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \cdot (b_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (a_i b_i, a_{i+1}\psi_i + \varphi_i b_i)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Una interpretación de $\widehat{\Lambda}$ *es como la* $\Bbbk$*-álgebra de matrices infinitas (ver [11] y [14])*

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ \ddots & a_{i-1} & & & & \\ & \varphi_{i-1} & a_i & & & \\ & & \varphi_i & a_{i+1} & & \\ & & & \varphi_{i+1} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix},$$

donde solo un número finito de entradas son diferentes de cero. La multiplicación es inducida por los Λ*-isomorfismos canónicos* $\Lambda \otimes_\Lambda Q \to Q$, $Q \otimes_\Lambda \Lambda \to Q$ *y el* Λ*-homomorfismo cero* $0 : Q \otimes_\Lambda Q \to 0$.

Observación 2.1.2. *Si* $\Lambda \neq 0$ *entonces* $\widehat{\Lambda}$ *es una* $\Bbbk$*-álgebra sin unidad, de dimensión infinita como* $\Bbbk$*-espacio vectorial y* $\widehat{\Lambda}^2 = \widehat{\Lambda}$.

Definición 2.1.3. *Un* $\widehat{\Lambda}$-***módulo a izquierda*** *es una familia* $\widehat{M} = (M_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, *donde los* M_i *son* Λ*-módulos a izquierda y los* $f_i : Q \otimes_\Lambda M_i \longrightarrow M_{i+1}$ *son* Λ*-homomorfismos tales que* $f_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes f_i) = 0$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Un $\widehat{\Lambda}$-módulo $\widehat{M}$ lo podemos representar de la siguiente forma

$$\cdots \rightsquigarrow M_i \overset{f_i}{\rightsquigarrow} M_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\rightsquigarrow} M_{i+2} \rightsquigarrow \cdots .$$

Definición 2.1.4. *Un* $\widehat{\Lambda}$-***homomorfismo*** $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ *entre* $\widehat{\Lambda}$*-módulos es una familia* $\widehat{h} = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, *de* $h_i : M_i \longrightarrow M'_i$ Λ*-homomorfismos, para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *tales que el siguiente diagrama conmuta para todo* $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} Q \otimes_\Lambda M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q \otimes h_i"'] & M_{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"] \\ Q \otimes_\Lambda M'_i \arrow[r, "f'_i"'] & M'_{i+1}. \end{tikzcd}$$

El $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo* $\widehat{h}$, *lo podemos representar de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, squiggly] & M_i \arrow[r, squiggly, "f_i"] \arrow[d, "h_i"] & M_{i+1} \arrow[r, squiggly, "f_{i+1}"] \arrow[d, "h_{i+1}"] & M_{i+2} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i+2}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, squiggly] & M'_i \arrow[r, squiggly, "f'_i"] & M'_{i+1} \arrow[r, squiggly, "f'_{i+1}"] & M'_{i+2} \arrow[r, squiggly] & \cdots . \end{tikzcd}$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, el Λ-homomorfismos h_i se le conoce como ***homomorfismos componentes*** *de $\widehat{h}$.*

Definición 2.1.5. *Denotamos por $\widehat{\Lambda}$-**Mod** a la categoría de los $\widehat{\Lambda}$-módulos a izquierda $\widehat{M} = (M_i, f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que M_i es un Λ-módulo a izquierda de dimensión finita como $\Bbbk$-espacio vectorial, para todo $i \in \mathbb{Z}$; y por $\widehat{\Lambda}$-**mod** a la sub-categoría plena de $\widehat{\Lambda}$-mod tal que $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ tiene dimensión finita como $\Bbbk$-espacio vectorial.*

Definición 2.1.6. *Dados los $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ y $\widehat{h'} : \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M''}$, se define la composición $\widehat{h'} \circ \widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M''}$ como $\widehat{h'} \circ \widehat{h} = (h'_i \circ h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.*

Lema 2.1.7. *Si $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo, entonces $\widehat{K} = (\operatorname{Ker} h_i, \widetilde{f}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo tal que el $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{\iota} : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{M}$ es el kernel de $\widehat{h}$, donde $\widehat{\iota} = (\iota_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\iota_i : \operatorname{Ker} h_i \hookrightarrow M_i$ son las inclusiones de Λ-módulos.*

Demostración. Sea $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ consideremos la inclusión $\iota_i : \operatorname{Ker} h_i \hookrightarrow M_i$ que es el kernel de h_i. Para $i \in \mathbb{Z}$, definamos $\widetilde{f}_i : Q \otimes_\Lambda \operatorname{Ker} h_i \to \operatorname{Ker} h_{i+1}$, como $\widetilde{f}_i(q \otimes x) := f_i(q \otimes x)$, para todo $q \in Q$ y para todo $x \in \operatorname{Ker} h_i$. Veamos que $\widetilde{f}_i$ esta bien definida. Esto es, para $\phi \otimes x$ en $Q \otimes_\Lambda \operatorname{Ker} h_i$ tenemos

$$\begin{aligned} h_{i+1} \circ \widetilde{f}_i(\phi \otimes x) &= h_{i+1} \circ f_i(\phi \otimes x) \\ &= f'_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h_i)(\phi \otimes x), \text{ por la definición 2.1.3} \\ &= f'_i(\phi \otimes h_i(x)) \\ &= f'_i(\phi \otimes 0), \quad x \in \operatorname{Ker} h_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia $\widetilde{f}_i(\phi \otimes x) \in \operatorname{Ker} h_{i+1}$ y por aditividad tenemos que $\operatorname{Im} \widetilde{f}_i \subseteq \operatorname{Ker} h_{i+1}$, de donde se sigue que $\widetilde{f}_i$ está bien definida. Además, $\widetilde{f}_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \widetilde{f}_i) = f_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes f_i) = 0$, de este modo $\widehat{K} = (\operatorname{Ker} h_i, \widetilde{f}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo. Ahora para demostrar que la familia $\widehat{\iota} = (\iota_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo, resta probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_\Lambda \operatorname{Ker} h_i \arrow[r, "\widetilde{f}_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q \otimes \iota_i"'] & \operatorname{Ker} h_{i+1} \arrow[d, "\iota_{i+1}"] \\
Q \otimes_\Lambda M_i \arrow[r, "f_i"] & M_{i+1}.
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $i \in \mathbb{Z}$ Para $\phi \otimes x \in Q \otimes_\Lambda \operatorname{Ker} h_i$, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
f_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \iota_i)(\phi \otimes x) &= f_i(\phi \otimes \iota_i(x)) \\
&= f_i(\phi \otimes x), \text{pues } \iota_i(x) = x \\
&= \widetilde{f}_i(\phi \otimes x) \\
&= \iota_{i+1} \circ \widetilde{f}_i(\phi \otimes x).
\end{aligned}$$

Por aditividad tenemos que $f_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \iota_i) = \iota_{i+1} \circ \widetilde{f}_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Utilizando la definición 2.1.4, concluimos que $\widehat{\iota}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo.

Finalmente, veamos que $\widehat{\iota}$ es el kernel de $\widehat{h}$. Para eso necesitamos dos condiciones:

(a) La composición es cero, esto es, $\widehat{h} \circ \widehat{\iota} = (h_i \circ i_i)_{i \in \mathbb{Z}} = 0$.

(b) Sea $\widehat{h}' : \widehat{M''} \longrightarrow \widehat{M}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{h} \circ \widehat{h}' = 0$. Veamos que existe un único $\widehat{h}'' : \widehat{M''} \to \widehat{K}$ $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{\iota} \circ \widehat{h}'' = \widehat{h}'$. Tenemos que $0 = \widehat{h} \circ \widehat{h}' = (h_i \circ h'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Por lo tanto, $h_i \circ h'_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, dado que ι_i es el kernel de h_i, existe un único $h''_i : M''_i \to \operatorname{Ker} h_i$ tal que $\iota_i \circ h''_i = h'_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\widehat{h}'' = (h''_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo, para esto consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_\Lambda \operatorname{Ker} h_i \arrow[rr, dashed, "\widetilde{f}_i"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_Q \otimes \iota_i"'] & & \operatorname{Ker} h_{i+1} \arrow[dd, "\iota_{i+1}"] & \\
& Q \otimes_\Lambda M''_i \arrow[ul, dashed, "\mathrm{id}_Q \otimes h''_i"'] \arrow[rr, dashed, "f''_i"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_Q \otimes h'_i"] & & M''_{i+1} \arrow[ul, dashed, "h''_{i+1}"'] \arrow[dl, "h'_{i+1}"] \\
Q \otimes_\Lambda M_i \arrow[rr, "f_i"] & & M_{i+1} . &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\widehat{h}'$ y $\widehat{\iota}$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iota_{i+1} \circ h''_{i+1} \circ f''_i &= h'_{i+1} \circ f''_i \\
&= f_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h'_i) \\
&= f_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \iota_i) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i) \\
&= \iota_{i+1} \circ \widetilde{f}_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i).
\end{aligned}$$

Dado que ι_{i+1} es un Λ-monomorfismo, entonces $h''_{i+1} \circ f''_i = \widetilde{f}_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Concluimos que $\widehat{h}''$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo y además, $\widehat{\iota} \circ \widehat{h}'' = (\iota_i \circ h''_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (h'_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \widehat{h}'$.

□

Corolario 2.1.8. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo. Entonces* $\widehat{h}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-monomorfismo si, y solo si,* $h_i : M_i \longrightarrow M'_i$ *es un* Λ*-monomorfismo para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Lema 2.1.9. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo. Entonces, existen* $\widehat{C} = (\operatorname{Coker} h_i, \overline{f'}_i)$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-módulo y* $\widehat{\pi} = (\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo tales que* $\widehat{\pi} : \widehat{M}' \twoheadrightarrow \widehat{C}$ *es el cokernel de* $\widehat{h}$.

Demostración. Sea $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, consideremos $\pi_i : M'_i \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} h_i$ que es el cokernel de h_i. Tenemos que el funtor producto tensorial es exacto a derecha, esto es, preserva Λ-epimorfismos. De donde $\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i : Q \otimes_\Lambda M'_i \twoheadrightarrow Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i$ es un Λ-epimorfismo.

Ahora Λ-homomorfismo $\overline{f'}_i : Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i \to \operatorname{Coker} h_{i+1}$ es definido por: si $x \in Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i$, existe $y \in Q \otimes_\Lambda M'_i$ tal que $(\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)(y) = x$, luego $\overline{f'}_i(x) := \pi_{i+1} \circ f'_i(y)$. Veamos es bien definida. Para esto utilizamos el siguiente diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_\Lambda M_i \arrow[r, "\mathrm{id}_Q \otimes h_i"] \arrow[d, "f_i"] & Q \otimes_\Lambda M'_i \arrow[r, two heads, "\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i"] \arrow[d, "f'_i"] & Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i \arrow[d, "\overline{f'_i}"] \\
M_{i+1} \arrow[r, "h_{i+1}"] & M'_{i+1} \arrow[r, two heads, "\pi_{i+1}"] & \operatorname{Coker} h_{i+1}
\end{tikzcd}.$$

Si $x \in Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i$ y $y_1, y_2 \in Q \otimes_\Lambda M'_i$ son tales que $(\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)(y_1) = (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)(y_2) = x$. Entonces $\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i(y_1 - y_2) = 0$. Por lo tanto, existe $m \in Q \otimes_\Lambda M_i$ tal que $(\mathrm{id}_Q \otimes h_i)(m) = y_1 - y_2$. Ya que el primer cuadrado en el diagrama es conmutativo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\pi_{i+1} \circ h_{i+1} \circ f_i(m) &= \pi_{i+1} \circ f'_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes_\Lambda h_i)(m), \\
0 &= \pi_{i+1} \circ f'_i(y_1 - y_2), \\
\pi_{i+1} \circ f'_i(y_1) &= \pi_{i+1} \circ f'_i(y_2).
\end{aligned}$$

Concluimos que $\overline{f'_i}$ esta bien definida. Por otro lado, cumple $\overline{f'}_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i) = \pi_{i+1} \circ f'_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, lo cual demuestra que $\widehat{\pi} = (\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo.

Veamos ahora que $\widehat{C} = (\operatorname{Coker} h_i, \overline{f'}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo a izquierda, esto es, veamos que $\overline{f'}_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \overline{f'}_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Tenemos $\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i$ es un Λ-epimorfismo, por lo tanto $\mathrm{id}_Q \otimes (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i) : Q \otimes_\Lambda (Q \otimes_\Lambda M'_i) \to Q \otimes_\Lambda (Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i)$ es un Λ-epimorfismo. Así,

$$\begin{aligned}
\overline{f'}_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \overline{f'}_i) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)) &= \overline{f'}_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_{i+1}) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes f'_i) \\
&= \pi_{i+2} \circ f'_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes f'_i) \\
&= \pi_{i+2} \circ 0 \\
&= 0 \\
&= 0 \circ (\mathrm{id}_Q \otimes (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)).
\end{aligned}$$

Esto es, $\mathrm{id}_Q \otimes (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i)$ es un Λ-epimorfismo, por lo tanto $\overline{f'}_{i+1} \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \overline{f'}_i) = 0$.

Finalmente, veamos que $\widehat{\pi}$ es el cokernel de $\widehat{h}$.

(a) Lo primero es claro, pues $\widehat{\pi} \circ \widehat{h} = (\pi_i \circ h_i)_{i \in \mathbb{Z}} = 0$.

(b) Sea $\widehat{h}' : \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M''}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{h}' \circ \widehat{h} = 0$. Veamos que $\widehat{h}'$ factoriza por $\widehat{\pi}$. Tenemos $0 = \widehat{h}' \circ \widehat{h} = (h'_i \circ h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ por lo tanto $h'_i \circ h_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Dado que π_i es el cokernel de h_i, entonces existe un único $h''_i : \operatorname{Coker} h_i \longrightarrow M''_i$ tal que $h''_i \circ \pi_i = h'_i$. Veamos que $\widehat{h}'' = (h''_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo. Para esto, vamos a considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_\Lambda M'_i \arrow[rr, "f'_i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_Q \otimes h'_i"'] & & M'_{i+1} \arrow[dr, "\pi_{i+1}"] \arrow[dd, "h'_{i+1}"] & \\
& Q \otimes_\Lambda \operatorname{Coker} h_i \arrow[rr, dashed, "\overline{f'}_i"] \arrow[dl, dashed, "\mathrm{id}_Q \otimes h''_i"] & & \operatorname{Coker} h_{i+1} \arrow[dl, dashed, "h''_{i+1}"] \\
Q \otimes_\Lambda M''_i \arrow[rr, dashed, "f''_i"'] & & M''_{i+1} \, . &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\widehat{h}'$ y $\widehat{\pi}$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
f''_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i) &= f''_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i \circ \pi_i) \\
&= f''_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h'_i) \\
&= h'_{i+1} \circ f'_i \\
&= h''_{i+1} \circ \pi_{i+1} \circ f'_i \\
&= h''_{i+1} \circ \overline{f'}_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \pi_i).
\end{aligned}$$

Así tenemos $f''_i \circ (\mathrm{id}_Q \otimes h''_i) = h''_{i+1} \circ \overline{f'}_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, y concluimos que $\widehat{h}'' = (h''_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo. Además, $\widehat{h}'' \circ \widehat{\pi} = (h''_i \circ \pi_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (h'_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \widehat{h}'$.

Por lo anterior se tiene que $\widehat{\pi}$ es el cokernel de $\widehat{h}$. $\square$

Corolario 2.1.10. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo. Entonces* $\widehat{h}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-epimorfismo si, y solo si,* $h_i : M_i \longrightarrow M'_i$ *es un* Λ*-epimorfismo para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

Corolario 2.1.11. *Si* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-isomorfismo, entonces* $h_i : M_i \longrightarrow M'_i$ *es un* Λ*-isomorfismo para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

Corolario 2.1.12. *La categoría* $\widehat{\Lambda}$-mod *es abeliana.*

Proposición 2.1.13. *La categoría* $\hat{\Lambda}$-mod *tiene sucesiones de Auslander-Reiten.*

Demostración. Ver [14, Lema 2.5]. $\square$

Lema 2.1.14. *Dada la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M''} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

en $\widehat{\Lambda}$-mod*. Entonces,* $0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{h_i} M'_i \xrightarrow{h'_i} M''_i \longrightarrow 0$ *es una sucesión es exacta corta en* Λ-mod*, para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos que (2.1) es una sucesión exacta corta. Por lo tanto, $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo y $\widehat{h}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. Luego por los corolarios 2.1.8 y 2.1.10, tenemos que $h_i : M_i \longrightarrow M'_i$ es un Λ-monomorfismo y $h'_i : M'_i \longrightarrow M''_i$ es un Λ-epimorfismo, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Además, ya que $\operatorname{Im} \widehat{h} = \operatorname{Ker} \widehat{h}'$, se sigue por el lema 2.1.7, que $\operatorname{Ker}\widehat{h}' = (\operatorname{Ker} h_i, \widetilde{f'_i})$. Por otro lado, $\operatorname{Im} \widehat{h}' = (\operatorname{Im} h_i, f'_{i|Q\otimes_\Lambda \operatorname{Im} h'_i})$. Así, por el corolario 2.1, tenemos que $\operatorname{Im} h_i = \operatorname{Ker} h'_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$,probando la conclusión deseada. $\square$

Teorema 2.1.15. *La categoría* $\widehat{\Lambda}$-mod *es de Frobenius.*

Demostración. Ver [11, Lema 2.2]. $\square$

Observación 2.1.16. *(a) En [11] se tiene que los* $\widehat{\Lambda}$*-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles* $\widehat{P}$ *son de la siguiente forma*

$$\cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \overset{\varphi_I}{\rightsquigarrow} I \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \cdots \tag{2.2}$$

Donde I *es un* Λ*-módulo inyectivo indescomponible,* $Hom_\Lambda(Q, I)$ *es un* Λ*-módulo proyectivo indescomponible y* $\varphi_I : Q \otimes_\Lambda \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \longrightarrow I$ *es un* Λ*-isomorfismo canónico.*

(b) En [9, ejemplo 43], se define el radical de un $\widehat{\Lambda}$*-módulo proyectivo e inyectivo indescomponible y el* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo irreducible entre* $\operatorname{rad} \widehat{P}$ *y* $\widehat{P}$*, el cual lo podemos ver de la siguiente forma*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\operatorname{rad} \widehat{P}: & \cdots \rightsquigarrow & 0 & \rightsquigarrow & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) & \overset{\psi_I}{\rightsquigarrow} & I & \rightsquigarrow & 0 & \rightsquigarrow \cdots \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \iota_{\operatorname{rad} \widehat{P}}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_I} & & \Big\downarrow & \\
\widehat{P}: & \cdots \rightsquigarrow & 0 & \rightsquigarrow & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) & \overset{\varphi_I}{\rightsquigarrow} & I & \rightsquigarrow & 0 & \rightsquigarrow \cdots
\end{array} \tag{2.3}$$

donde $\iota : \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)$ *es la inclusión natural del radical de* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)$ *en* $\widehat{P}$ *y* $\psi_I = \varphi_I \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \iota)$.

(c) En el mismo ejemplo se define un $\widehat{\pi} : \widehat{P} \longrightarrow \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}$ *que es un* $\widehat{\Lambda}$-*epimorfismo irreducible de la siguiente manera*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{P}: \arrow[d, "\widehat{\pi}_{\widehat{P}}"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\varphi_I"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)}"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}: & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\chi_I"] & I/\operatorname{soc} I \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

donde $\pi : I \longrightarrow I/\operatorname{soc} I$ *es la proyección canónica y* $\chi_I = \pi \circ \varphi_I$.

2.2 La categoría estable

Sea $\widehat{\Lambda}$-mod, la categoría de los $\widehat{\Lambda}$-módulos a izquierda finitamente generados. Denotamos por $\mathcal{P}(\widehat{M}, \widehat{M'})$ al subgrupo de $\operatorname{Hom}_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{M}, \widehat{M'})$ formado por todos los $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ tales que se factorizan a través de un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo-inyectivo.

La categoría de módulos **estable** $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ tiene, por definición, los mismos objetos que $\widehat{\Lambda}$-mod, y morfismos dados por los cocientes

$$\underline{\operatorname{Hom}}_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{M}, \widehat{M'}) := \frac{\operatorname{Hom}_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{M}, \widehat{M'})}{\mathcal{P}(\widehat{M}, \widehat{M'})}.$$

Si $\widehat{h}$ es un homomorfismo en $\widehat{\Lambda}$-mod, denotamos por $\underline{\widehat{h}}$, su clase como morfismo en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ y es llamado la **clase estable** de $\widehat{h}$ en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$.

Definición 2.2.1. *Dada una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M''} \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

en la categoría $\widehat{\Lambda}$-mod, *esta induce el siguiente diagrama conmutativo en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{M}}"'] & \widehat{M'} \arrow[r, "\widehat{h}'"] \arrow[d, "\widehat{f}"'] & \widehat{M''} \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{h}''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\iota_{\widehat{M}}"] & I(\widehat{M}) \arrow[r, "\widehat{\pi}_{\widehat{M}}"] & \Omega^{-1}\widehat{M} \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-monomorfismo,* $I(\widehat{M})$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*- módulo inyectivo y* $\Omega^{-1}\widehat{M} = \operatorname{Coker}\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ *es la cosizigia de* $\widehat{M}$*.*

Se define $\widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M}'' \xrightarrow{\widehat{h}''} \Omega^{-1}\widehat{M}$ *como un triángulo estándar en* $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$*, este es llamado* ***triángulo inducido*** *por la sucesión exacta corta (2.5). El* $\widehat{\Lambda}$*-módulo* $\Omega^{-1}\widehat{M}$ *no depende de la elección del* $\widehat{\Lambda}$*-módulo inyectivo* $I(\widehat{M})$ *(ver [11, pág. 10] y [7, pág. 60]) y* $\Omega^{-1} : \widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}} \to \widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ *es un automorfismo (ver [11, pág. 13] y [7, pág. 70]).*

Proposición 2.2.2. *La categoría* $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ *es triangulada.*

Demostración. Ver [11, pág. 62] y [7, pág. 70-104]. □

Teorema 2.2.3. *Existe un funtor* $\Bbbk$*-lineal y exacto* $\mu : \mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod}) \to \widehat{\Lambda}\text{-}\underline{\text{mod}}$ *de categorías trianguladas. Este funtor* μ *es fiel y pleno tal que* $\mu_{\Lambda\text{-mod}} = \mathrm{id}_{\Lambda\text{-mod}}$*. Más aun,* μ *es una equivalencia triangulada si, y solo si,* Λ *es de dimensión global finita.*

Demostración. Ver [11, pág. 74]. □

Definición 2.2.4. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo.*

(a) $\widehat{h}$ *es llamado* ***smonic****, si todas las componentes* h_i *son* Λ*-monomorfismos escindidos, para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

(b) $\widehat{h}$ *es llamado* ***sepic****, si todas las componentes* h_i *son* Λ*-epimorfismos escindidos, para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

(c) $\widehat{h}$ *es llamado* ***sirreducible****, si existe un único* $i_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* h_{i_0} *es un* Λ*-homomorfismo irreducible,* h_i *es un* Λ*-epimorfismo escindido para todo* $i < i_0$*, y* h_i *es un* Λ*-monomorfismo escindido para todo* $i > i_0$*.*

Observación 2.2.5. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo.*

(i) Si $\widehat{h}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-monomorfismo escindido, entonces* $\widehat{h}$ *es smonic.*

(ii) Si $\widehat{h}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-epimorfismo escindido, entonces* $\widehat{h}$ *es sepic.*

Teorema 2.2.6 (Giraldo. H., [9], Teorema 26)**.** *Sean Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, $\widehat{\Lambda}$ su respectiva $\Bbbk$-álgebra repetitiva y $\widehat{h}:\widehat{M}\longrightarrow\widehat{M'}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo irreducible. Entonces, $\widehat{h}$ tiene una y solo una de las siguientes formas:*

(i) $\widehat{h}$ es smonic;

(ii) $\widehat{h}$ es sepic;

(iii) $\widehat{h}$ es sirreducible.

Teorema 2.2.7. *Sea $\widehat{h}:\widehat{M}\longrightarrow\widehat{M'}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{M}$ y $\widehat{M'}$ no tienen sumandos directos proyectivos no nulos, y sea $\underline{\widehat{h}}$ la clase estable en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Entonces*

(i) $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido si, y solo si, $\underline{\widehat{h}}$ es un monomorfismo escindido;

(ii) $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido si, y solo si, $\underline{\widehat{h}}$ es un epimorfismo escindido.

Demostración. Ver [9, Proposición 41]. □

Teorema 2.2.8. *Sea $\widehat{h}:\widehat{M}\longrightarrow\widehat{M'}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{M}$ y $\widehat{M'}$ no tienen sumandos directos proyectivos no nulos, y sea $\underline{\widehat{h}}$ la clase estable en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Entonces, $\widehat{h}$ es irreducible si, y solo si, $\underline{\widehat{h}}$ es irreducible.*

Demostración. Ver [9, Proposición 42]. □

Observación 2.2.9. *Si $\widehat{M}$ y $\widehat{M'}$ son $\widehat{\Lambda}$-módulos a izquierda indescomponibles, entonces $\widehat{h}:\widehat{M}\longrightarrow\widehat{M'}$ es irreducible en $\widehat{\Lambda}$-mod si, y solo si, $\widehat{h}\in\operatorname{rad}(\widehat{M},\widehat{M'})/\operatorname{rad}^2(\widehat{M},\widehat{M'})$, donde $\operatorname{rad}(\widehat{M},\widehat{M'})$ es el $\Bbbk$-espacio vectorial de los $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos de $\widehat{M}$ para $\widehat{M'}$ que no son invertibles y $\operatorname{rad}^2(\widehat{M},\widehat{M'})$ es el $\Bbbk$-espacio vectorial de los $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos de la forma $\widehat{h}'\circ\widehat{h}''$ tal que $\widehat{h}'':\widehat{M}\to\widehat{M''}\in\operatorname{rad}(\widehat{M},\widehat{M''})$ y $\widehat{h}':\widehat{M''}\to\widehat{M'}\in\operatorname{rad}(\widehat{M''},\widehat{M'})$, para algún $\widehat{\Lambda}$-módulo a izquierda $\widehat{M''}$. Así, tenemos*

$$\operatorname{Irr}(\widehat{M},\widehat{M'})=\operatorname{rad}(\widehat{M},\widehat{M'})/\operatorname{rad}^2(\widehat{M},\widehat{M'}).$$

En particular, se tiene que $\operatorname{Irr}(\widehat{M}, \widehat{M}')$ *también es un* $\Bbbk$- *espacio vectorial. Por otra parte, si* $\widehat{M} = \bigoplus_{j=1}^{n} \widehat{M}_j$, *y* $\widehat{M}' = \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k$ *son sumas directas de* $\widehat{\Lambda}$*-módulos a izquierda indescomponibles, entonces* $\widehat{h} = (\widehat{h}_{kj})_{mn} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *está en* $\operatorname{rad}(\widehat{M}, \widehat{M}')$ *si, y solo si, el* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo* $\widehat{h}_{kj} : \widehat{M}_j \longrightarrow \widehat{M}'_k$ *está en el* $\operatorname{rad}(\widehat{M}_j, \widehat{M}'_k)$ *para todo* $j = 1, \cdots, n$ *y para todo* $k = 1, \cdots, m$*. Para más detalles, ver [17, §2.2] y [1, Lema 3.4, apéndice A.3].*

Lema 2.2.10. *Sea* $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo irreducible en* $\widehat{\Lambda}$-mod.

(i) Si $\widehat{M}$ *es indescomponible y* $\widehat{M}' = \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k$ *es una suma directa de* $\widehat{\Lambda}$*-módulos a izquierda indescomponibles, entonces para todo* $1 \leq k \leq m$*, el* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo inducido* $\widehat{h}_k : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'_k$ *de* $\widehat{\Lambda}$*-módulos es irreducible.*

(ii) Si $\widehat{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \widehat{M}_i$ *es una suma directa de* $\widehat{\Lambda}$*-módulos a izquierda indescomponibles y* $\widehat{M}'$ *es indescomponible, entonces para todo* $1 \leq i \leq n$*, el* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo inducido* $\widehat{h}_i : \widehat{M}_i \to \widehat{M}'$ *de* $\widehat{\Lambda}$*-módulos es irreducible.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{h} = (\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_m)^t : \widehat{M} \to \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo irreducible. Veamos que $\widehat{h}_k$ está en el $\operatorname{rad}(\widehat{M}, \widehat{M}'_k)$ para todo $k = 1, \cdots, m$. Supongamos que existe $1 \leq s \leq m$ tal que $\widehat{h}_s$ no está en el $\operatorname{rad}(\widehat{M}, \widehat{M}'_s)$, por lo tanto $\widehat{h}_s$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo. De donde existe $\widehat{h}_s^{-1} : \widehat{M}'_s \longrightarrow \widehat{M}$ tal que $\widehat{h}_s^{-1} \circ \widehat{h}_s = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$. Definamos $\widehat{h}' : \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k \longrightarrow \widehat{M}$ dado por $\widehat{h}' = (0, 0, \cdots, 0, \widehat{h}_s^{-1}, 0, \cdots, 0)$, donde $\widehat{h}_s^{-1}$ está en la posición s. En consecuencia, tenemos $\widehat{h}' \circ \widehat{h} = \mathrm{id}_{\widehat{M}}$, esto es, $\widehat{h}$ es $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido, lo cual es una contradicción, pues $\widehat{h}$ es irreducible. Así, concluimos que, $\widehat{h}_k$ está en el $\operatorname{rad}(\widehat{M}, \widehat{M}'_k)$ para todo $k = 1, \cdots, m$. Así, por la observación 2.2.9, se tiene $\widehat{h} \in \operatorname{rad}(\widehat{M}, \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k)$.

Sean $1 \leq s \leq m$ y $\widehat{\pi}_s : \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k \longrightarrow \widehat{M}'_s$ la proyección natural. Tenemos que $\widehat{h}_s = \widehat{\pi}_s \circ \widehat{h}$, así por el teorema 1.1.3 (ii) (ver [5, §2, Proposición 2.18]), se sigue que $\widehat{h}_s$ es irreducible.

La demostración de (ii) es similar a la anterior. □

Corolario 2.2.11. *Sean* $\widehat{h}, \widehat{h}' : \widehat{M} \to \widehat{M}'$ $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismos con* $\widehat{M}$ *o* $\widehat{M}'$ *indescomponibles y ambos sin sumandos directos proyectivos no nulos. Si* $\underline{\widehat{h}} = \underline{\widehat{h}}'$ *y* $\underline{\widehat{h}}$ *es un homomorfismo irreducible, entonces* $\widehat{h} = \widehat{h}'$*.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\widehat{M}$ es indescomponible y que $\widehat{M}' = \bigoplus_{k=1}^{m} \widehat{M}'_k$ es suma directa de $\widehat{\Lambda}$-módulos indescomponibles. De esta manera, los $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos $\widehat{h}$ y $\widehat{h}'$ pueden ser descritos por $\widehat{h} = (\widehat{h}_1, \widehat{h}_2, \cdots, \widehat{h}_m)^t$ y $\widehat{h}' = (\widehat{h}'_1, \widehat{h}'_2, \cdots, \widehat{h}'_m)^t$, donde para cada $1 \leq k \leq m$, $\widehat{h}_k, \widehat{h}'_k : \widehat{M} \to \widehat{M}'_k$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos. De la hipótesis tenemos $\underline{\widehat{h}} = \underline{\widehat{h}'}$. Por lo tanto, del teorema 2.2.8, se sigue que $\widehat{h}$ y $\widehat{h}'$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos irreducibles. Además, $\widehat{h} - \widehat{h}' = \widehat{v} \circ \widehat{u}$ donde $\widehat{u} : \widehat{M} \to \widehat{P}$ y $\widehat{v} : \widehat{P} \to \widehat{M}'$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos y $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo. Por consiguiente, para cada $1 \leq k \leq m$ existe $\widehat{v}_k : \widehat{P} \to \widehat{M}'_k$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{h}_k - \widehat{h}'_k = \widehat{v}_k \circ \widehat{u}$.

Supongamos que $\widehat{h} \neq \widehat{h}'$, luego se sigue que existe $k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\widehat{h}_{k_0} - \widehat{h}'_{k_0} = \widehat{v}_{k_0} \circ \widehat{u} \neq 0$. Dado que $\widehat{h}$ y $\widehat{h}'$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos irreducibles, del lema 2.2.10 (i), se tiene que $\widehat{h}_{k_0}$ y $\widehat{h}'_{k_0}$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos irreducibles, esto es, $\widehat{h}_{k_0}, \widehat{h}'_{k_0} \in \mathrm{Irr}(\widehat{M}, \widehat{M}'_{k_0})$. Además, tenemos que $\mathrm{Irr}(\widehat{M}, \widehat{M}'_{k_0})$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial, entonces $\widehat{v}_{k_0} \circ \widehat{u} = \widehat{h}_{k_0} - \widehat{h}'_{k_0} \in \mathrm{Irr}(\widehat{M}, \widehat{M}'_{k_0})$, de donde $\widehat{v}_{k_0} \circ \widehat{u} \in \mathrm{Irr}(\widehat{M}, \widehat{M}'_{k_0})$, es decir, $\widehat{v}_{k_0} \circ \widehat{u}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo irreducible. Por lo tanto, $\widehat{v}_{k_0}$ es $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido o $\widehat{u}$ es $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido. Si $\widehat{v}_{k_0}$ es $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido, entonces $\widehat{P} = \widehat{M}'_{k_0} \oplus \widehat{M}''$; así $\widehat{M}'_{k_0}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo. Contradicción, pues $\widehat{M}'$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos. Ahora, si $\widehat{u}$ es $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido, entonces $\widehat{P}_{k_0} = \widehat{M} \oplus \widehat{M}'''$. Así $\widehat{M}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo. Lo que es una Contradicción, ya que $\widehat{M}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo no proyectivo. Concluimos que $\widehat{h} = \widehat{h}'$. $\square$

2.3 Triángulos de Auslander-Reiten en la categoría estable

Teorema 2.3.1. *La categoría $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ tiene triángulos de Auslander-Reiten.*

Demostración. Sea $\widehat{M}''$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo indescomponible no proyectivo. Entonces, por la proposición 2.1.13, existe una sucesión de Auslander-Reiten terminando en $\widehat{M}''$ de la siguiente forma:

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M}'' \longrightarrow 0\,, \tag{2.6}$$

donde $\widehat{M}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo indescomponible no inyectivo. Sea $\widehat{\iota}_{\widehat{M}} : \widehat{M} \longrightarrow I(\widehat{M})$ la envolvente inyectiva de $\widehat{M}$. Tenemos que $\widehat{h}$ es un

$\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, por lo tanto, existe $\widehat{u} : \widehat{M}' \longrightarrow I(\widehat{M})$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{u} \circ \widehat{h} = \widehat{\iota}_{\widehat{M}}$. Por la propiedad universal del cokernel de $\widehat{h}$, podemos completar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{M}}"'] & \widehat{M}' \arrow[r, "\widehat{h}'"] \arrow[d, "\widehat{u}"'] & \widehat{M}'' \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{h}''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\iota}_{\widehat{M}}"] & I(\widehat{M}) \arrow[r, "\widehat{\pi}_{\widehat{M}}"] & \Omega^{-1}\widehat{M} \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

De la definición 2.2.1 se tiene el siguiente triángulo estándar en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$

$$\widehat{M} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} M' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}'}} \widehat{M}'' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}. \tag{2.7}$$

Veamos que el triángulo (2.7) es de Auslander-Reiten.

(a) Tenemos que $\widehat{M}$ y $\widehat{M}''$ son $\widehat{\Lambda}$-módulos indescomponibles no proyectivos. Por lo tanto, son indescomponibles no nulos en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$.

(b) $\underline{\widehat{h}}'' \neq 0$. Supongamos $\underline{\widehat{h}}'' = 0$. Entonces existen $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo y $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos $\widehat{\alpha}_1 : \widehat{M}'' \longrightarrow \widehat{P}$ y $\widehat{\alpha}_2 : \widehat{P} \longrightarrow \Omega^{-1}\,\widehat{M}$ tal que $\widehat{h}'' = \widehat{\alpha}_2 \circ \widehat{\alpha}_1$. Por otro lado, $\widehat{\pi}_{\widehat{M}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo, por lo tanto, existe $\widehat{\alpha}_3 : \widehat{P} \longrightarrow I(\widehat{M})$ tal que $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\alpha}_3$. Sea $\widehat{\lambda} = \widehat{\alpha}_3 \circ \widehat{\alpha}_1$, de donde $\widehat{h}'' = \widehat{\alpha}_2 \circ \widehat{\alpha}_1 = \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\alpha}_3 \circ \widehat{\alpha}_1 = \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\lambda}$. Tenemos el siguiente diagrama con cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{M}}"'] & \widehat{M}' \arrow[r, "\widehat{h}'"] \arrow[d, "\widehat{u}"'] & \widehat{M}'' \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{h}''"] \arrow[dl, "\widehat{\lambda}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\iota}_{\widehat{M}}"'] & I(\widehat{M}) \arrow[r, "\widehat{\pi}_{\widehat{M}}"'] & \Omega^{-1}\,\widehat{M} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Así tenemos, las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ (\lambda \circ \widehat{h}' - \widehat{u}) &= \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \lambda \circ \widehat{h}' - \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \widehat{u} \\
&= \widehat{h}'' \circ \widehat{h}' - \widehat{\pi}_{\widehat{M}} \circ \widehat{u} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ es el kernel de $\widehat{\pi}_{\widehat{M}}$, existe un único $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{\beta} : \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M}$ tal que $\widehat{\iota}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\beta} = \widehat{\lambda} \circ \widehat{h}' - \widehat{u}$.

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\iota}_{\widehat{M}} \circ (\mathrm{id}_{\widehat{M}} + \widehat{\beta} \circ \widehat{h}) & = & \widehat{\iota}_{\widehat{M}} + \widehat{\iota}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\beta} \circ \widehat{h} \\ & = & \widehat{\iota}_{\widehat{M}} + (\widehat{\lambda} \circ \widehat{h}' - \widehat{u}) \circ \widehat{h} \\ & = & \widehat{\iota}_{\widehat{M}} + \widehat{\lambda} \circ \widehat{h}' \circ \widehat{h} - \widehat{u} \circ \widehat{h} \\ & = & \widehat{\iota}_{\widehat{M}} - \widehat{\iota}_{\widehat{M}} \\ & = & 0. \end{array}$$

Dado que $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, se tiene que $\mathrm{id}_{\widehat{M}} = (-\widehat{\beta}) \circ \widehat{h}$. Así concluimos que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido y esto contradice la irreducibilidad de $\widehat{h}$ ya que $\widehat{h}$ está en la sucesión de Auslander-Reiten (2.6).

(c) Sea $\underline{\widehat{\delta}} : \widehat{M'''} \longrightarrow \widehat{M''}$ un homomorfismo tal que no es epimorfismo escindido.

Tenemos dos casos $\widehat{M'''}$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos ó $\widehat{M'''}$ tiene sumandos directos proyectivos no nulos.

Si $\widehat{M'''}$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos, entonces utilizando el teorema 2.2.7 (ii), $\widehat{\delta} : \widehat{M'''} \longrightarrow \widehat{M''}$ no es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido. Tenemos que (2.6) es una sucesión de Auslander-Reiten, por lo que existe $\widehat{s} : \widehat{M'''} \longrightarrow \widehat{M'}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo tal que $\widehat{\delta} = \widehat{h}' \circ \widehat{s}$. Así, ase sigue $\underline{\widehat{\delta}} = \underline{\widehat{h}'} \circ \underline{\widehat{s}}$.

Si $\widehat{M'''}$ tiene sumandos directos proyectivos no nulos, entonces $\widehat{M'''} = \widehat{M''''} \oplus \widehat{P'}$ donde $\widehat{M''''}$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{P'}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo no nulo. Así $\widehat{\delta} = (\widehat{\delta}'_1, \widehat{\delta}'_2)$ donde $\widehat{\delta}'_1 : \widehat{M''''} \longrightarrow \widehat{M''}$ y $\widehat{\delta}'_2 : \widehat{P'} \longrightarrow \widehat{M''}$ y $\underline{\widehat{\delta}} = \underline{\widehat{\delta}'_1}$. Por lo tanto $\underline{\widehat{\delta}'_1}$ no es un epimorfismo escindido; de lo cual se sigue, por el teorema 2.2.7 (ii), que $\widehat{\delta}'_1$ no es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido. Dado que (2.6) es una sucesión de Auslander-Reiten, existe $\widehat{t} : \widehat{M''''} \longrightarrow \widehat{M'}$ tal que $\widehat{\delta}'_1 = \widehat{h}' \circ \widehat{t}$, de donde tenemos $\underline{\widehat{\delta}} = \underline{\widehat{\delta}'_1} = \underline{\widehat{h}'} \circ \underline{\widehat{t}}$.

De los items anteriores, concluimos que $\widehat{M} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M'} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}'}} \widehat{M''} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}''}} \Omega^{-1}\widehat{M}$ es un triángulo de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$.

□

Corolario 2.3.2. *Si* $0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M}'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod*, entonces el triángulo inducido* $\widehat{M} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}'' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\widehat{M}$ *es un triángulo de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$*. Además,* $\underline{\widehat{h}}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo fuente y* $\underline{\widehat{h}}'$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-homomorfismo pozo.*

2.4 Caracterización de los triángulos de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$

La idea principal de la demostración de este teorema se obtuvo en una visita, al profesor Raymundo Bautista Ramos, en la universidad Nacional Autónoma de México, Sede Morelia.

Teorema 2.4.1. *Dado un triángulo de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\mathrm{mod}}$*,*

$$\widehat{M} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}'' \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\widehat{M}\,, \tag{2.8}$$

donde $\widehat{M}$*,* $\widehat{M}'$ *y* $\widehat{M}''$ *son* $\widehat{\Lambda}$*-módulos sin sumandos directos proyectivos no nulos, existe una sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\alpha})^t} \widehat{M}' \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}'_1,\widehat{\beta})} \widehat{M}'' \longrightarrow 0\,, \tag{2.9}$$

con $\widehat{P}$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-módulo proyectivo tal que el triángulo inducido, por la sucesión exacta corta (2.9), es isomorfo al triángulo (2.8) y* $\underline{\widehat{h}}'$ *es igual a* $\underline{\widehat{h}'_1}$ *salvo isomorfismo. Además, Si* $\widehat{P} \neq 0$*, entonces* $\widehat{P}$ *es indescomponible,* $\widehat{M} \cong \mathrm{rad}\,\widehat{P}$ *y* $\widehat{M}'' \cong \widehat{P}/\mathrm{soc}\,\widehat{P}$*.*

Demostración. Dado el triángulo de Auslander-Reiten (2.8), se tiene que el homomorfismo $\underline{\widehat{h}} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ es irreducible y no es un monomorfismo escindido. Por lo tanto, de los teoremas 2.2.7 (i) y 2.2.8, tenemos que $\widehat{h} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo irreducible y no es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido.

Además, se tiene que $\widehat{M}$ es indescomponible no inyectivo, en consecuencia existe una sucesión de Auslander-Reiten empezando en $\widehat{M}$

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\alpha})^t} \widehat{M'} \oplus \widehat{M'''} \xrightarrow{(\widehat{h}'_1,\widehat{\beta})} \widehat{M''_1} \longrightarrow 0\,. \tag{2.10}$$

Así, tenemos el triángulo de Auslander-Reiten inducido por (2.10)

$$\widehat{M} \xrightarrow{\underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha})}^t} \widehat{M'} \oplus \widehat{M'''} \xrightarrow{\underline{(\widehat{h}'_1,\widehat{\beta})}} \widehat{M''_1} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}''_1}} \Omega^{-1}\,\widehat{M}\,\cdot \tag{2.11}$$

Veamos que $\widehat{M'''}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo. Supongamos $\widehat{M'''} = \widehat{M''''} \oplus \widehat{P}$, donde $\widehat{M''''}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo sin sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo. Por lo tanto, el $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{\alpha}$ lo podemos determinar por $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2)^t$ donde $\widehat{\alpha}_1 : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M''''}$ y $\widehat{\alpha}_2 : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{P}$ son $\widehat{\Lambda}$-homomorfismos. Así, por el corolario 2.3.2, tenemos $\underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha})}^t = \underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha}_1)}^t$ es un morfismo fuente; como $\underline{\widehat{h}}$ no es monomorfismo escindido, existe un homomorfismo $\underline{\widehat{\Gamma}} : \widehat{M'} \oplus \widehat{M''''} \longrightarrow \widehat{M'}$ tal que $\underline{\widehat{h}} = \underline{\widehat{\Gamma}} \circ \underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha}_1)}^t$. Por otro lado, $\underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha}_1)}^t$ no es un monomorfismo escindido y $\underline{\widehat{h}}$ es un homomorfismo fuente, por lo que existe un homomorfismo $\underline{\widehat{\Psi}} : \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M'} \oplus \widehat{M''''}$ tal que $\underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha}_1)}^t = \underline{\widehat{\Psi}} \circ \underline{\widehat{h}}$. Así

$$\begin{aligned} \underline{\widehat{h}} &= \underline{\widehat{\Gamma}} \circ \underline{(\widehat{h},\widehat{\alpha}_1)}^t \\ &= \underline{\widehat{\Gamma}} \circ (\underline{\widehat{\Psi}} \circ \underline{\widehat{h}}) \\ &= (\underline{\widehat{\Gamma}} \circ \underline{\widehat{\Psi}}) \circ \underline{\widehat{h}}, \end{aligned}$$

y como $\underline{\widehat{h}}$ es un homomorfismo fuente, se tiene que $\underline{\widehat{\Gamma}} \circ \underline{\widehat{\Psi}}$ es un automorfismo. De igual forma, se tiene que $\underline{\widehat{\Psi}} \circ \underline{\widehat{\Gamma}}$ es un automorfismo. De las dos afirmaciones anteriores, tenemos que $\widehat{M'} \cong \widehat{M'} \oplus \widehat{M''''}$ en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$. Dado que $\widehat{M'}$ y $\widehat{M''''}$ no tienen sumandos directos proyectivos no nulos entonces $\widehat{M'} \cong \widehat{M'} \oplus \widehat{M''''}$ en $\widehat{\Lambda}$-mod, lo cual implica $\widehat{M''''} = 0$. Concluimos así $\widehat{M'''} = \widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo y $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}_1$. Por lo tanto, el triángulo (2.11) tiene la forma.

$$\widehat{M} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M'} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}'_1}} \widehat{M''_1} \xrightarrow{\underline{\widehat{h}''_1}} \Omega^{-1}\,\widehat{M}\,\cdot \tag{2.12}$$

Así, tenemos el siguiente diagrama con el primer cuadrado conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M} \arrow[r, "\underline{\widehat{h}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{M}}"] & \widehat{M}' \arrow[r, "\underline{\widehat{h}}'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{M}'}"] & \widehat{M}'' \arrow[r, "\underline{\widehat{h}}''"] & \Omega^{-1}\widehat{M} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\Omega^{-1}\widehat{M}}"] \\
\widehat{M} \arrow[r, "\underline{\widehat{h}}"] & \widehat{M}' \arrow[r, "\underline{\widehat{h}_1}'"] & \widehat{M}_1'' \arrow[r, "\underline{\widehat{h}_1}''"] & \Omega^{-1}\widehat{M}
\end{tikzcd}.$$

Por la definición 1.2.2 (TR3), existe $\underline{\widehat{\theta}} : \widehat{M}'' \longrightarrow \widehat{M}_1''$ tal que $\underline{\widehat{h}}'' = \underline{\widehat{h}_1}'' \circ \underline{\widehat{\theta}}$ y $\underline{\widehat{h}_1}' = \underline{\widehat{\theta}} \circ \underline{\widehat{h}}'$. También de los axiomas de triángulo $\widehat{\theta}$ es un isomorfismo y se tiene que los triángulos (2.8) y (2.12) son isomorfos y $\underline{\widehat{h}}'$ y $\underline{\widehat{h}_1}'$ son iguales a menos de isomorfismo.

Ahora, supongamos que $\widehat{P} \neq 0$. Tenemos que $\widehat{\alpha} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo irreducible. En consecuencia, se tiene que $\widehat{\alpha}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo o un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. Veamos que $\widehat{\alpha}$ no es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. Supongamos que $\widehat{\alpha}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. Dado que $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo, se tiene que $\widehat{\alpha}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido; por consiguiente $\widehat{M} \cong \widehat{P} \oplus \widehat{X}$, lo cual es una contradicción, pues $\widehat{M}$ es indescomponible sin sumandos directos proyectivos no nulos. Por lo tanto $\widehat{\alpha}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo.

Sea $\widehat{\iota}_{\widehat{M}} : \widehat{M} \longrightarrow I(\widehat{M})$ una envolvente inyectiva de $\widehat{M}$. Dado que $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo y $\widehat{\Lambda}$-mod es una categoría de Frobenius, se tiene que $\widehat{P}$ también es un $\widehat{\Lambda}$-módulo inyectivo. Además, $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, por lo tanto, existe un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{\delta} : I(\widehat{M}) \longrightarrow \widehat{P}$ tal que $\widehat{\alpha} = \widehat{\delta} \circ \widehat{\iota}_{\widehat{M}}$. El $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ no es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido, de tal modo que $\widehat{\delta}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido, pues $\widehat{\alpha}$ es irreducible. Por otro lado, $\widehat{\alpha}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo y $\widehat{\iota}_{\widehat{M}}$ es envolvente inyectiva, de manera que $\widehat{\delta}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo. Concluimos así que $\widehat{\delta}$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo y $\widehat{\alpha}$ es una envolvente inyectiva de $\widehat{M}$.

Veamos que $\widehat{P} \neq 0$ es indescomponible. Supongamos $\widehat{P} = \widehat{P}' \oplus \widehat{P}''$, con $\widehat{P}' \neq 0$ y $\widehat{P}'' \neq 0$, debido a lo cual $\operatorname{Im}\widehat{\alpha} = (\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \cap \widehat{P}') \oplus (\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \cap \widehat{P}'')$. Como $\widehat{\alpha} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{P}$ es una envolvente inyectiva, se sigue que $\widehat{P}$ es una extensión esencial de $\operatorname{Im}\widehat{\alpha}$. Por lo tanto $\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \cap \widehat{P}' \neq 0$ y $\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \cap \widehat{P}'' \neq 0$. Por otro lado $\widehat{\alpha}$ es $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, por esta razón $\widehat{M} \cong \operatorname{Im}\widehat{\alpha} = (\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \cap \widehat{P}') \oplus (\operatorname{Im}\alpha \cap \widehat{P}'')$, lo cual es una contradicción pues $\widehat{M}$ es indescomponible. De donde concluimos que $\widehat{P}$ es indescomponible.

Veamos que $\widehat{M} \cong \operatorname{rad}\widehat{P}$, donde $\operatorname{rad}\widehat{P}$ es el radical de $\widehat{P}$.

Sea $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} : \operatorname{rad}\widehat{P} \longrightarrow \widehat{P}$ el $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo natural, el cual es irreducible y es un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo casi-escindido a derecha. Tenemos que $\widehat{\alpha} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{P}$ es irreducible, por lo tanto, $\widehat{\alpha}$ no es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido. Así, existe un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo escindido $\widehat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \operatorname{rad}\widehat{P}$ tal que $\widehat{\alpha} = \widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} \circ \widehat{f}$. Dado que $\operatorname{rad}\widehat{P}$ es el único sub-módulo maximal de $\widehat{P}$, se tiene que $\operatorname{Im}\widehat{\alpha} \subseteq \operatorname{rad}\widehat{P}$, dicha inclusión induce el siguiente $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo $\widehat{\iota}_{\widehat{P}} : \widehat{P}/\operatorname{rad}\widehat{P} \longrightarrow \widehat{P}/\operatorname{Im}\widehat{\alpha}$ definido por $\widehat{\iota}_{\widehat{P}}(x + \operatorname{rad}\widehat{P}) = x + \operatorname{Im}\widehat{\alpha}$. A partir del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{rad}\widehat{P} \arrow[r, "\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}"] & \widehat{P} \arrow[r, "\pi_{\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}}"] \arrow[d, "\operatorname{id}_{\widehat{P}}"] & \widehat{P}/\operatorname{rad}\widehat{P} \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\iota}_{\widehat{P}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r, "\widehat{\alpha}"] & \widehat{P} \arrow[r, "\widehat{\pi}_{\widehat{\alpha}}"] & \widehat{P}/\operatorname{Im}\alpha \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

vemos que el cuadrado conmuta. En efecto,

$$\begin{aligned}
\widehat{\iota}_{\widehat{P}} \circ \widehat{\pi}_{\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}}(x) &= \widehat{\iota}_{\widehat{P}}(x + \operatorname{rad}\widehat{P}) \\
&= x + \operatorname{Im}\widehat{\alpha} \\
&= \widehat{\pi}_{\widehat{\alpha}}(x).
\end{aligned}$$

Así $\widehat{\pi}_{\widehat{\alpha}} \circ \widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} = \widehat{\iota}_{\widehat{P}} \circ \widehat{\pi}_{\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}} \circ \widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} = 0$. Por lo tanto, de la propiedad universal del kernel de $\widehat{\pi}_{\widehat{\alpha}}$, existe un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{g} : \operatorname{rad}\widehat{P} \longrightarrow \widehat{M}$ tal que $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} = \widehat{\alpha} \circ \widehat{g}$. Luego $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} = \widehat{\alpha} \circ \widehat{g} = \widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} \circ \widehat{f} \circ \widehat{g}$. Así, del hecho que $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, se sigue $\operatorname{id}_{\operatorname{rad}\widehat{P}} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$. Por lo tanto, $\widehat{f}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo escindido y concluimos que $\widehat{f}$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo. En otras palabras, $\widehat{M} \cong \operatorname{rad}\widehat{P}$.

La demostración de $\widehat{M''} \cong \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}$ se hace de forma dual. □

Corolario 2.4.2. *Dada la sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}, \widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t} \widehat{M'} \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}', \widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P} \longrightarrow 0,$$

con $\widehat{M'}$ *sin sumandos directos proyectivos no nulos,* $\widehat{P}$ *un* $\widehat{\Lambda}$*-módulo proyectivo indescomponible no nulo definido en (2.2),* $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}$ *definida en (2.3) y* $\widehat{\pi}_{\widehat{P}}$ *definido en (2.4), entonces* *(i)* $\widehat{h}$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-epimorfismo y* $\widehat{h}'$ *es un* $\widehat{\Lambda}$*-monomorfismo;*

(ii) si $\widehat{M'} = (M'_i, f'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$*, entonces existe* $i_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $M'_i = 0$ *para todo* $i \neq i_0, i_0 + 1$.

Demostración. La demostración de (i) es inmediata del hecho que $\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo y $\widehat{\pi}_{\widehat{P}}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo.

(ii) Sea $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible como en (2.2), esto es, $\widehat{P}$ tiene la siguiente forma:

$$\widehat{P}: \qquad \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \overset{\varphi_I}{\rightsquigarrow} I \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \cdots,$$

donde los términos no cero están en los posiciones i_0 y i_0+1, para algún $i_0 \in \mathbb{Z}$. Además, de la observación 2.1.16 (b), se sigue que el $\operatorname{rad}\widehat{P}$ es

$$\operatorname{rad}\widehat{P}: \qquad \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \overset{\psi_I}{\rightsquigarrow} I \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \cdots,$$

donde las entradas no cero están en las posiciones i_0 y $i_0 + 1$, respectivamente. Así, el $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{h}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{rad}\widehat{P}: \arrow[d, "\widehat{h}"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i_0-1}"] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \arrow[r, squiggly, "\psi_I"] \arrow[d, "h_{i_0}"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i_0+1}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i_0+2}"] & \cdots \\
\widehat{M'}: & \cdots \arrow[r, squiggly] & M'_{i_0-1} \arrow[r, squiggly, "f'_{i_0-1}"] & M'_{i_0} \arrow[r, squiggly, "f'_{i_0}"] & M'_{i_0+1} \arrow[r, squiggly, "f'_{i_0+1}"] & M'_{k+2} \arrow[r, squiggly] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Por el ítem (i), tenemos que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. En consecuencia, h_i es un Λ-epimorfismo, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\widehat{M'_i} = 0$, para todo $i \neq i_0, i_0 + 1$. □

Capítulo 3

Forma de los morfismos en las sucesiones y triángulos de Auslander-Reiten

3.1 Smonic, sepic y sirreducible en sucesiones exactas cortas

Lema 3.1.1. *Dada una sucesión exacta corta en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M''} \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

las siguientes condiciones se satisfacen.

(i) Si $\widehat{h}$ *es smonic, entonces* $\widehat{h}'$ *es sepic.*

(ii) Si (3.1) es una sucesión de Auslander-Reiten y $\widehat{h}$ *es sirreducible, entonces* $\widehat{h}'$ *sirreducible.*

Demostración. (i) Supongamos que (3.1) es una sucesión exacta corta y $\widehat{h}$ es smonic. Por la definición 2.2.4 y el lema 2.1.14, tenemos que para todo $i \in \mathbb{Z}$ la sucesión exacta de Λ-módulos $0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{h_i} M_i' \xrightarrow{h_i'} M_i'' \longrightarrow 0$ es escindida. De donde concluimos que h_i' es un Λ-epimorfismo escindido, para todo $i \in \mathbb{Z}$, esto es, $\widehat{h}'$ es sepic.

(ii) Supongamos que (3.1) es una sucesión de Auslander-Reiten y $\widehat{h}$ es sirreducible. Por el lema 2.1.14 y la definición 2.2.4 (c), tenemos que existe un único $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que h_{i_0} es un Λ-homomorfismo irreducible y

$$0 \longrightarrow M_{i_0} \xrightarrow{h_{i_0}} M'_{i_0} \xrightarrow{h'_{i_0}} M''_{i_0} \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

es una sucesión exacta corta de Λ-módulos. Dado que (3.1) es una sucesión de Auslander-Reiten, el $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo $\widehat{h}'$ es irreducible. Así, por el teorema 2.2.6, tenemos que $\widehat{h}'$ tiene una y solo una de las siguientes tres formas:

(a) $\widehat{h}'$ es smonic;

(b) $\widehat{h}'$ es sepic;

(c) $\widehat{h}'$ es sirreducible.

Si $\widehat{h}'$ es smonic, entonces h'_{i_0} es un Λ-monomorfismo escindido, por lo tanto, de (3.2) se sigue h'_{i_0} es un Λ-isomorfismo. Así, de (3.2) tenemos $h_{i_0} = 0$, lo cual es una contradicción pues h_{i_0} es un homomorfismo irreducible.

Si $\widehat{h}'$ es sepic, tenemos que h'_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido, por tanto la sucesión (3.2) es escindida; esto es, h_{i_0} es un Λ-monomorfismo escindido, lo cual contradice el hecho de ser irreducible.

De lo anterior, se concluye que $\widehat{h}'$ es sirreducible. $\square$

Lema 3.1.2. *Consideremos una sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t} \widehat{M'} \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P} \longrightarrow 0\,, \tag{3.3}$$

con $\widehat{M'}$ sin sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible (ver observación 2.2). Si $\widehat{h}$ es sepic, entonces $\widehat{h}'$ es sirreducible.

Demostración. Dado que $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible, como en (2.2), es de la siguiente forma

$$\cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \overset{\varphi_I}{\rightsquigarrow} I \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \cdots\,,$$

donde los términos no cero están en las posiciones i_0 y i_0+1, para algún $i_0 \in \mathbb{Z}$, I es un Λ-módulo inyectivo indescomponible y φ_I es el Λ-isomorfismo canónico (ver observación 2.1.16 (a)). Por el corolario 2.4.2 y por la observación 2.1.16, tenemos que la sucesión de Auslander-Reiten la podemos ver de la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\operatorname{rad}\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\psi_I"] \arrow[d, "(h_{i_0},\iota)^t"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(h_{i_0+1},\operatorname{id}_I)^t"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M'}\oplus\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & M'_{i_0}\oplus\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\vartheta_{i_0}"] \arrow[d, "(h'_{i_0},\operatorname{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)})"] & M'_{i_0+1}\oplus I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(h'_{i_0+1},\pi_I)"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}: \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\chi_I"] \arrow[d] & I/\operatorname{soc} I \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
0 & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

donde las entradas no cero están en los grados i_0 y i_0+1, $\psi_I = \varphi_I \circ (\operatorname{id}_Q \otimes \iota)$, $\vartheta_{i_0} = \begin{pmatrix} f'_{i_0} & 0 \\ 0 & \varphi_I \end{pmatrix}$, $\chi_I = \pi \circ \varphi_I$ y $\widehat{M'} = (M'_i, f'_i)$. Del lema 2.1.14, tenemos $(h'_{i_0}, \operatorname{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)}) \circ (h_{i_0}, \iota)^t = 0$ y $(h'_{i_0+1}, \pi_I) \circ (h_{i_0+1}, \operatorname{id}_I)^t = 0$. Por lo que

$$\iota = -h'_{i_0} \circ h_{i_0}, \tag{3.4}$$

$$\pi_I = -h'_{i_0+1} \circ h_{i_0+1}. \tag{3.5}$$

Tenemos que ι es un Λ-monomorfismo. Por lo tanto, de la ecuación (3.4), se sigue que h_{i_0} es un Λ-monomorfismo. Además, $\widehat{h}$ es sepic; en consecuencia h_{i_0} es un Λ-epimorfismo. Concluimos h_{i_0} es un Λ-isomorfismo. De la ecuación (3.4) y del hecho que ι es un Λ-monomorfismo irreducible, se obtiene que h'_{i_0} es irreducible. Por hipótesis, tenemos que $\widehat{h}$ es sepic, lo cual implica que h_{i_0+1} es un Λ-epimorfismo escindido, debido a lo cual $I = M'_{i_0+1} \oplus \operatorname{Ker} h_{i_0+1}$.

Supongamos que $\operatorname{Ker} h_{i_0+1} = 0$. Por esta razón h_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo. Por el corolario 2.4.2 (i), tenemos que $\widehat{h}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, por consiguiente h'_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo. Por lo tanto $\pi_I = -h'_{i_0+1} \circ h_{i_0+1}$ es un Λ-monomorfismo. Así, tenemos que π_I es un Λ-isomorfismo, lo que contradice la irreducibilidad de homomorfismo π_I. Concluimos $\operatorname{Ker} h_{i_0+1} \neq 0$. Ahora bien, tenemos que I es un Λ-módulo indescomponible. Luego $M'_{i_0+1} = 0$, $h_{i_0+1} = 0$, $h'_{i_0+1} = 0$ y $\pi_I = 0$. Así I es un

Λ-módulo inyectivo simple indescomponible y h'_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo escindido. Concluimos que $\widehat{h}'$ es sirreducible y la sucesión exacta corta tiene la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\operatorname{rad}\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\psi_I"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)},\iota)^t"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\mathrm{id}_I"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M'}\oplus\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)\oplus\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly, "\vartheta'_{i_0}"] \arrow[d, "(-\iota,\mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)})"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}: \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
0 & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

□

Observación 3.1.3. *Dada la sucesión de Auslander-Reiten (3.3), con $\widehat{h}$ sepic, $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible, I un Λ-módulo indescomponible inyectivo asociado al módulo $\widehat{P}$ como en (2.2), del lema 3.1.2, se tiene que I es un Λ-módulo simple.*

Lema 3.1.4. *Consideremos una sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t} \widehat{M'}\oplus\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P} \longrightarrow 0,$$

con $\widehat{M'}$ sin sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible (2.2) donde $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)$ en $\widehat{P}$ es un Λ-módulo proyectivo indescomponible simple. Si $\widehat{h}$ es sirreducible, entonces $\widehat{h}'$ es smonic.

Demostración. Sea $\widehat{h}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo sirreducible y la sucesión de

Auslander-Reiten

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots \\
\operatorname{rad}\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t"] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & \operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[d, "(h_{i_0},\iota)^t"] \arrow[r, rightsquigarrow, "\psi_I"] & I \arrow[d, "(h_{i_0+1},\mathrm{id}_I)^t"] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots \\
\widehat{M'}\oplus\widehat{P}: \arrow[d, "(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})"] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M'_{i_0}\oplus\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[d, "(h'_{i_0},\mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)})"] \arrow[r, rightsquigarrow, "\vartheta_{i_0}"] & M'_{i_0+1}\oplus I \arrow[d, "(h'_{i_0+1},\pi_I)"] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots \\
\widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P}: \arrow[d] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I) \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow, "\chi_I"] & I/\operatorname{soc} I \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[d] \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots \\
0 & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots .
\end{tikzcd}
$$

Tenemos por hipótesis que $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)$ es un Λ-módulo proyectivo indescomponible simple. Entonces $\operatorname{rad}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)=0$. Por el corolario 2.4.2, $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo, y en consecuencia $h_{i_0}=0$ y $M'_{i_0}=0$. Así tenemos que $h'_{i_0}=0$ es un Λ-monomorfismo escindido. Dado que $\widehat{h}$ es sirreducible, h_{i_0+1} es irreducible. Por otra parte, $\pi_I=-h'_{i_0+1}\circ h_{i_0+1}$ con π_I y h_{i_0+1} Λ-homomorfismos irreducibles. En consecuencia, h'_{i_0+1} es un Λ-epimorfismo escindido, de manera que h'_{i_0+1} es un Λ-epimorfismo. Por el corolario 2.4.2, tenemos que $\widehat{h}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, por esta razón h'_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo, y en consecuencia, h'_{i_0+1} es un Λ-isomorfismo. Concluimos que $\widehat{h}'$ es smonic. $\square$

Lema 3.1.5. *Consideremos una sucesión de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\iota}_{\operatorname{rad}\widehat{P}})^t} \widehat{M'}\oplus\widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}',\widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc}\widehat{P} \longrightarrow 0,$$

con $\widehat{M'}$ sin sumandos directos proyectivos no mulos y $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible (ver 2.2), donde $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)$ *en $\widehat{P}$ es un Λ-módulo proyectivo indescomponible no simple. Si $\widehat{h}$ es sirreducible, entonces $\widehat{h}'$ es sirreducible.*

Demostración. Sea $\widehat{h}$ un $\widehat{\Lambda}$-homomorfismo sirreducible y la sucesión exacta de

Auslander-Reiten

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\operatorname{rad} \widehat{P} : \arrow[d, "(\widehat{h}, \widehat{\iota}_{\operatorname{rad} \widehat{P}})^t"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{rad} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \arrow[r, squiggly, "\psi_I"] \arrow[d, "(h_{i_0}, \iota)^t"] & I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(h_{i_0+1}, \mathrm{id}_I)^t"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M'} \oplus \widehat{P} : \arrow[d, "(\widehat{h}', \widehat{\pi}_{\widehat{P}})"] & \cdots \arrow[r, squiggly] & M'_{i_0} \oplus \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \arrow[r, squiggly, "\vartheta_{i_0}"] \arrow[d, "(h'_{i_0}, \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_\Lambda(Q,I)})"] & M'_{i_0+1} \oplus I \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(h'_{i_0+1}, \pi_I)"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{P}/\operatorname{soc} \widehat{P} : \arrow[d] & \cdots \arrow[r, squiggly] & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q, I) \arrow[r, squiggly, "\chi_I"] \arrow[d] & I/\operatorname{soc} I \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
0 & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Tenemos, por el lema 2.1.14, lo siguiente

$$\iota = -h'_{i_0} \circ h_{i_0}, \tag{3.6}$$

$$\pi_I = -h'_{i_0+1} \circ h_{i_0+1}. \tag{3.7}$$

De la ecuación (3.7), se tiene que π_I es un Λ-epimorfismo. Por lo tanto h'_{i_0+1} un Λ-epimorfismo. Además, por el corolario 2.4.2, $\widehat{h}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, en consecuencia h'_{i_0} y h'_{i_0+1} son Λ-monomorfismos. Concluimos así que h'_{i_0+1} es un Λ-isomorfismo.

Dado que $\widehat{h}$ es sirreducible, se tienen dos casos: h_{i_0} es irreducible y h_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo escindido ó bien h_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido y h_{i_0+1} es irreducible.

Supongamos que h_{i_0} es irreducible y h_{i_0+1} es un Λ-monomorfismo escindido. Dado que ι es irreducible, de la ecuación (3.6), se sigue que h'_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido. En consecuencia h'_{i_0} es un Λ-epimorfismo. De donde, h'_{i_0} es un Λ-isomorfismo; lo cual implica que $\widehat{h}'$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo. Esto contradice el hecho que $\widehat{h}'$ es irreducible.

Así solo se dará el segundo caso, esto es, h_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido y h_{i_0+1} es irreducible.

De la ecuación (3.6), se tiene que h'_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido o bien que h_{i_0} es un Λ-monomorfismo escindido. Si h'_{i_0} es un Λ-epimorfismo escindido, se llega a la contradicción anterior. Así que h_{i_0} es un Λ-monomorfismo escindido, y en consecuencia, h_{i_0} es un Λ-isomorfismo. Por lo tanto, de la ecuación (3.6), se sigue que h'_{i_0} es irreducible.

De lo anterior, tenemos que h'_{i_0} es irreducible y h'_{i_0+1} es un Λ-isomorfismo, por lo tanto $\widehat{h}'$ es sirreducible. $\square$

3.2 Establemente smonic, establemente sepic y establemente sirreducible en la categoría estable

Definición 3.2.1. *Sea $\underline{\widehat{h}} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ un homomorfismo irreducible en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$, con $\widehat{M}$ y $\widehat{M'}$ $\widehat{\Lambda}$-módulos sin sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{M}$ o $\widehat{M'}$ indescomponible.*

*(a) Decimos que $\underline{\widehat{h}}$ **establemente smonic**, si $\widehat{h}$ es smonic.*

*(b) Decimos que $\underline{\widehat{h}}$ **establemente sepic**, si $\widehat{h}$ es sepic.*

*(c) Decimos que $\underline{\widehat{h}}$ **establemente sirreducible**, si $\widehat{h}$ es sirreducible.*

Observación 3.2.2. *La buena definición está dada por el corolario 2.2.11.*

Teorema 3.2.3. *Sea $\underline{\widehat{h}} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ un homomorfismo irreducible en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$, con $\widehat{M}$ y $\widehat{M'}$ $\widehat{\Lambda}$-módulos sin sumandos directos proyectivos no nulos y $\widehat{M}$ o $\widehat{M'}$ indescomponible. Entonces $\underline{\widehat{h}}$ tiene una y solo una de las siguientes formas*

(i) $\underline{\widehat{h}}$ es establemente smonic;

(ii) $\underline{\widehat{h}}$ establemente sepic;

(iii) $\underline{\widehat{h}}$ establemente sirreducible.

Demostración. La demostración se puede hacer de forma inmediata utilizando la definición 3.2.1 y el teorema 2.2.6. $\square$

3.3 Forma de los morfismos en un triángulo de Auslander-Reiten

Los resultados presentados en el siguiente teorema, fueron probados en [16] por E. Ribeiro, S. Fernandes y H.Giraldo para la categoría derivada.

Teorema 3.3.1. *Sean* $\widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M''} \xrightarrow{\widehat{h}''} \Omega^{-1}\widehat{M}$ *un triángulo de Auslander-Reiten en* $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ *y* $\widehat{M}$, $\widehat{M'}$ *y* $\widehat{M''}$ $\widehat{\Lambda}$*-módulos sin sumandos directos proyectivos no nulos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(i) Si $\underline{\widehat{h}}$ *es establemente smonic, entonces* $\underline{\widehat{h}}'$ *es establemente sepic.*

(ii) Si $\underline{\widehat{h}}$ *es establemente sepic, entonces* $\underline{\widehat{h}}'$ *es establemente sirreducible.*

(iii) Si $\underline{\widehat{h}}$ *es establemente sirreducible, entonces* $\underline{\widehat{h}}'$ *es establemente smonic o es establemente sirreducible.*

Demostración. Dado el triángulo de Auslander-Reiten en $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$

$$\widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{h}'} \widehat{M''} \xrightarrow{\widehat{h}''} \Omega^{-1}\widehat{M}, \tag{3.8}$$

por el teorema 2.4.1, existe una sucesión de Auslander-Reiten de la siguiente forma en $\widehat{\Lambda}$-mod

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{(\widehat{h},\widehat{\alpha})^t} \widehat{M'} \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}'_1,\widehat{\beta})} \widehat{M''} \longrightarrow 0\,, \tag{3.9}$$

con $\widehat{P}$ un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo tal que, el triángulo inducido por la sucesión exacta corta (3.9) es isomorfo al triángulo de Auslander-Reiten (3.8) y $\underline{h}'$ es igual a $\underline{h_1}'$ salvo isomorfismo. Por lo tanto, basta probar las respectivas propiedades para $\underline{\widehat{h}_1}'$.

(i) Supongamos que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente smonic. De la definición 3.2.1 (a), se sigue que $\widehat{h}$ es smonic. En consecuencia, $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo y $\widehat{P} = 0$. En efecto, si $\widehat{P} \neq 0$, entonces $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo proyectivo indescomponible, en consecuencia, por el corolario 2.4.2 (i), se tiene que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo. Así, $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo, contradicción pues $\widehat{h}$ es irreducible (por el teorema 2.2.8) ya que $\underline{\widehat{h}}$ es irreducible.

Así, tenemos que la sucesión de Auslander-Reiten (3.9) es de la forma

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{h}'_1} \widehat{M}'' \longrightarrow 0.$$

Como $\widehat{h}$ es smonic, por el lema 3.1.1 (i), se tiene que $\widehat{h}'_1$ es sepic; y por la definición 3.2.1 (b), se tiene que $\underline{\widehat{h}_1}'$ es establemente sepic.

(ii) Supongamos que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sepic. Por la definición 3.2.1(b), $\widehat{h}$ es sepic; de donde, $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-epimorfismo y $\widehat{P}$ es indescomponible. En efecto, si $\widehat{P} = 0$, la sucesión de Auslander-Reiten (3.9), se tiene que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-monomorfismo, de modo que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo. Además, se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es irreducible con $\widehat{M}$ y $\widehat{M}'$ sin sumandos directos proyectivos no nulos. Entonces, por el teorema 2.2.8, se concluye que $\widehat{h}$ es irreducible, esto contradice el hecho que $\widehat{h}$ es un $\widehat{\Lambda}$-isomorfismo. Por lo tanto, la sucesión de Auslander-Reiten (3.9) tiene la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}, \widehat{\iota}_{\operatorname{rad} \widehat{P}})^t} \widehat{M}' \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}'_1, \widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc} \widehat{P} \longrightarrow 0\,.$$

Dado que $\widehat{h}$ es sepic, por el lema 3.1.2, tenemos que $\widehat{h}'_1$ es sirreducible. Luego, por la definición 3.2.1 (c), se concluye que $\underline{\widehat{h}'_1}$ es establemente sirreducible.

(iii) Supongamos que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sirreducible. Luego, por la definición 3.2.1 (c), $\widehat{h}$ es sirreducible.

- Si en la sucesión de Auslander-Reiten (3.9) se tiene que $\widehat{P} = 0$, la sucesión (3.9) es de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{h}} \widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{h}'_1} \widehat{M}'' \longrightarrow 0.$$

Dado que $\widehat{h}$ es sirreducible, por el lema 3.1.1 (ii), se tiene $\widehat{h}'_1$ es sirreducible; en consecuencia, $\underline{\widehat{h}'_1}$ es establemente sirreducible.

- Si en la sucesión de Auslander-Reiten (3.9) se tiene $\widehat{P} \neq 0$, por el teorema 2.4.1, tenemos que $\widehat{P}$ es un $\widehat{\Lambda}$-módulo indescomponible y la sucesión de Auslander-Reiten (3.9) es de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}, \widehat{\iota}_{\operatorname{rad} \widehat{P}})^t} \widehat{M}' \oplus \widehat{P} \xrightarrow{(\widehat{h}'_1, \widehat{\pi}_{\widehat{P}})} \widehat{P}/\operatorname{soc} \widehat{P} \longrightarrow 0\,.$$

Dado que $\widehat{P}$ es indescomponible, $\widehat{P}$ tiene la siguiente forma

$$\cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Q,I) \overset{\varphi_I}{\rightsquigarrow} I \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \cdots ,$$

donde I es un Λ-módulo inyectivo indescomponible, $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q,I)$ es un Λ-módulo proyectivo indescomponible y las entradas no ceros están en las posiciones i_0 y i_0+1, respectivamente (ver [11, pág 62]).

Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q,I)$ es un Λ-módulo proyectivo simple, entonces por el lema 3.1.4, tenemos $\widehat{h}'_1$ es smonic, por esta razón, $\underline{\widehat{h}'_1}$ es establemente smonic.

Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q,I)$ un Λ-módulo proyectivo no simple, por el lema 3.1.5, obtenemos que $\widehat{h}'_1$ es sirreducible, de manera que $\underline{\widehat{h}'_1}$ es establemente sirreducible. De los casos anteriores, concluimos que $\underline{\widehat{h}'_1}$ es establemente smonic o establemente sirreducible.

□

3.4 Carcaj de la álgebra repetitiva

Sea $Q=(Q_0,Q_1)$ un carcaj conexo. Dados p y p' dos caminos en Q, decimos que p' es un **sub-camino** de p si existen p_1 y p_2 caminos en Q tales que $p=p_1p'p_2$. El conjunto de todos los caminos de Q es denotado por $\mathscr{P}(Q)$. Una **relación cero o relación monomial** en Q es una relación (ver 4.4.1) de la forma p donde p es un camino de longitud mayor o igual a 2 en Q (ver [18]). Una **relación de conmutatividad** es una relación de la forma $v-u$ donde v y u son dos caminos diferentes de longitud mayor o igual a 2 que empiezan y terminan en los mismos vértices.

Sean Q un carcaj y ρ un conjunto de relaciones en Q, las cuales son relaciones monomiales o relaciones de conmutatividad. Dos caminos p_1 y p_2 en Q son equivalentes si $p_1=p'up''$ y $p_2=p'vp''$, donde $v-u$ o bien $u-v$ es una relación de conmutatividad en ρ. Esto genera una relación de equivalencia sobre $\mathscr{P}(Q)$. La clase de equivalencia de $p\in\mathscr{P}(Q)$ es denotada por $\bar{p}$. Un camino p en Q se dice que es un camino en (Q,ρ) si p no tiene sub-caminos en ρ. Se puede ver que el conjunto $\{\bar{p}\mid p \text{ es un camino en } (Q,\rho)\}$ es una base para $kQ/<\rho>$. Un camino $\alpha_1\cdots\alpha_i$ de longitud mayor o igual a uno en

(Q, ρ) se dice qu es **maximal** si $\beta\alpha_1 \cdots \alpha_i$ y $\alpha_1 \cdots \alpha_i\delta$ son caminos ceros en (Q, ρ), para todo β con $e(\beta) = s(\alpha_1)$; y para todo δ, con $e(\alpha_i) = s(\delta)$. Si Q_0 tiene un único vértice a y Q_1 es vacío, diremos que el camino trivial $\mathbb{1}_a$ es maximal. Se define $\mathscr{M}(Q, \rho) = \{\bar{p} \mid p \text{ es un camino maximal en } (Q, \rho)\}$. Decimos que (Q, ρ) es **localmente acotado** si cada flecha en Q pertenece a un camino maximal en (Q, ρ).

3.5 Definición del carcaj repetitivo $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$

Sean Q un carcaj y ρ un conjunto de relaciones en Q, las cuales son relaciones cero o relaciones de conmutatividad tal que (Q, ρ) es localmente acotado. Vamos a construir el **carcaj repetitivo** $\widehat{Q} = (\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1)$ siguiendo los ideas y definiciones en [18] de la siguiente forma.

Definición 3.5.1. *i) Para $i \in \mathbb{Z}$, tomamos una copia $Q[i]$ de Q, definida por: cada vértice a en Q_0, define un vértice $a[i]$ en $Q[i]$, para todo $i \in \mathbb{Z}$; y cada flecha $\beta : a \to b$ en Q_1, define una flecha $\beta[i] : a[i] \longrightarrow b[i]$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

*ii) Para todo $\bar{p} \in \mathscr{M}(Q, \rho)$, se define una flecha $\hat{\bar{p}}[i] : b[i] \longrightarrow a[i-1]$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, donde $s(p) = a$ y $e(p) = b$. Estás flechas son llamadas **flechas de conexión**.*

El carcaj resultante es denotado por $\widehat{Q} = (\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1)$. Note que $\widehat{Q}$ depende de Q, y del conjunto de relaciones ρ.

*Si p es un camino en Q, denotamos por $p[i]$ al correspondiente camino en $Q[i]$. Sea $p = p_1p_2$ un camino maximal en (Q, ρ). Decimos que $p_2[i]\,\hat{\bar{p}}[i]\,p_1[i-1]$ es un **camino completo** en $\widehat{Q}$. En lo que sigue, vamos a definir $\widehat{\rho}$ el conjunto de relaciones para el carcaj repetitivo $\widehat{Q}$:*

(R1) sean p, p_1 y p_2 caminos en Q. Si $p \in \rho$ (respectivamente $p_1 - p_2 \in \rho$), entonces $p[i] \in \widehat{\rho}$ (respectivamente $p_1[i] - p_2[i] \in \widehat{\rho}$); para todo $i \in \mathbb{Z}$;

(R2) sea p un camino el cual contiene una flecha de conexión. Si p no es un sub-camino de un camino completo entonces $p \in \widehat{\rho}$;

(R3) sean $p = p_1p_2p_3$ y $q = q_1q_2q_3$ caminos maximales en (Q, ρ) con $p_2 = q_2$. Entonces, $p_3\,[i]\,\hat{\hat{p}}\,[i]\,p_1\,[i-1] - q_3\,[i]\,\hat{\hat{q}}\,[i]\,q_1\,[i-1] \in \widehat{\rho}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.5.2. *Sea p un camino en Q. Entonces la clase de equivalencia $\overline{p\,[i]}$ de $p\,[i]$ en $\mathscr{P}(\widehat{Q})$ depende solo de $\bar{p}$ la clase de equivalencia de p en $\mathscr{P}(Q)$. Así, podemos denotar a $\overline{p\,[i]}$ por $\overline{p}\,[i]$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 3.5.3. *Sean Q un carcaj finito, ρ un conjunto de relaciones para Q las cuales son relaciones cero o relaciones de conmutatividad tal que (Q, ρ) es localmente acotado. Entonces $\Bbbk\widehat{Q}/ < \widehat{\rho} >$ es la $\Bbbk$-álgebra repetitiva de $\Bbbk Q/ < \rho >$.*

Demostración. Ver [18, pág. 428]. □

Proposición 3.5.4. *Sea Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Entonces Λ es gentil (ver [18, §4]) si, y solo si, $\widehat{\Lambda}$ es especial biserial (ver [18, §4]).*

Demostración. Ver [18, pág. 429]. □

3.6 Ejemplos

Ejemplo 3.6.1. Sean Q el carcaj : $\underset{1}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \underset{2}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \underset{3}{\bullet}$ y $\Lambda = \Bbbk Q$ la $\Bbbk$-álgebra hereditaria. Dado que Λ tiene dimensión global menor o igual a 1, se sabe que la categoría derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda\text{-mod})$ y $\widehat{\Lambda}$-mod son equivalentes como categorías trianguladas (ver teorema 2.2.3).

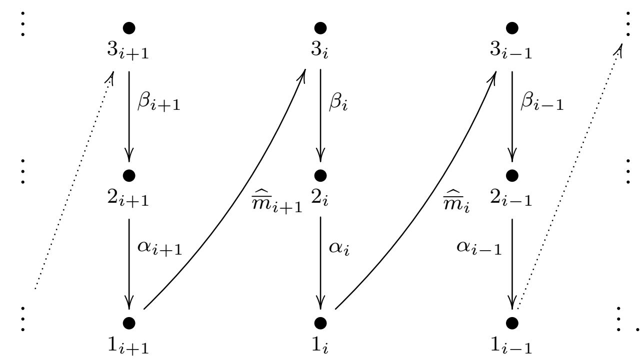
El carcaj de Auslander-Reiten de Λ-mod está dada en la figura 3.1.

$$\begin{tikzcd}
 & & M[\beta\alpha] \arrow[dr, "f_5"] & & \\
 & M[\alpha] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "f_3"] & & M[\beta] \arrow[ll, dashed] \arrow[dr, "f_6"] & \\
M[\mathbb{1}_1] \arrow[ur, "f_1"] & & M[\mathbb{1}_2] \arrow[ll, dashed] \arrow[ur, "f_4"] & & M[\mathbb{1}_3] \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1: El carcaj de Auslander-Reiten de Λ-mod.

El carcaj Q tiene un único camino maximal $m = \beta\alpha$. Por lo tanto, $\widehat{Q}$ va ha tener una única flecha de conexión $\widehat{\overline{m}}_i : 1_i \longrightarrow 3_{i-1}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ (ver 3.5.1 (ii)).

Por lo que el carcaj $\widehat{Q}$ es:



El conjunto de relaciones en el carcaj repetitivo $\widehat{Q}$ es

$$\widehat{\rho} = \left\{ \beta_i\alpha_i\widehat{\overline{m}}_i\beta_{i-1}, \alpha_i\widehat{\overline{m}}_i\beta_{i-1}\alpha_{i-1}, \widehat{\overline{m}}_{i+1}\beta_i\alpha_i\widehat{\overline{m}}_i \,/\, i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De donde la $\Bbbk$-álgebra repetitiva es $\widehat{\Lambda} = \Bbbk\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}$, el ideal $\widehat{\mathcal{I}}$ es generado por $\widehat{\rho}$. Además $\widehat{\Lambda}$ es especial biserial (ver proposición 3.5.4), por lo tanto, los $\widehat{\Lambda}$-módulos proyectivos-inyectivos indescomponibles están dados por

$$\widehat{P}_{1_i} = \widehat{M}[\widehat{\overline{m}}_i\beta_{i-1}\alpha_{i-1}],\ \widehat{P}_{2_i} = \widehat{M}[\alpha_i\widehat{\overline{m}}_i\beta_{i-1}] \text{ y } \widehat{P}_{3_i} = \widehat{M}[\beta_i\alpha_i\widehat{\overline{m}}_i].$$

El carcaj de Auslander-Reiten de $\widehat{\Lambda}$-<u>mod</u> está en la figura 3.2. En este carcaj tenemos los cuatro casos del teorema 3.3.1.

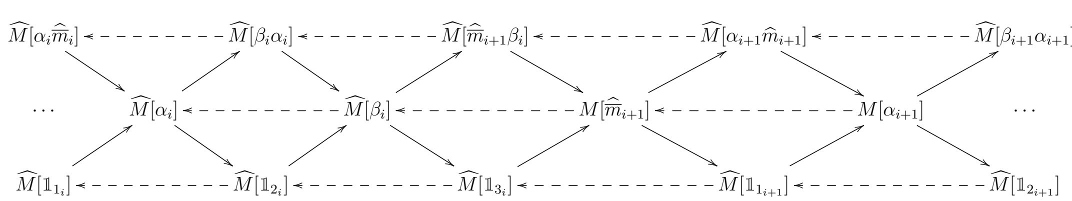


Figura 3.2: El carcaj de Auslander-Reiten de la categoría estable

(i) En la figura 3.2 tenemos el triángulo de Auslander-Reiten

$$\widehat{M}[\mathbb{1}_{3_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}[\widehat{\widehat{m}}_{i+1}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i+1}}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}[\mathbb{1}_{3_i}],$$

en el cual se cumple que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente smonic y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sepic

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M}[\mathbb{1}_{3_i}] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_3]}"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\widehat{\widehat{m}}_{i+1}] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, rightsquigarrow, "f_6\circ f_5"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_1]}"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i+1}}] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "f_2\circ f_1"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
M[\beta_{i+1}\alpha_{i+1}] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\beta\alpha] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots\ .
\end{tikzcd}$$

(ii) Dado el triángulo $\widehat{M}[\alpha_i\widehat{\widehat{m}}_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}[\alpha_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[\beta_i\alpha_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}[\alpha_i\widehat{\widehat{m}}_i]$ de Auslander-Reiten, se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sepic y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sirreducible

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M}[\alpha_i\widehat{\widehat{m}}_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\alpha] \arrow[r, rightsquigarrow, "f_6"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\alpha]}"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\alpha_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\alpha] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "f_2"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\beta_i\alpha_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\beta\alpha] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "f_6\circ f_5"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
M[\mathbb{1}_{3_i}] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_{3_i}] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots\ .
\end{tikzcd}$$

Note que el Λ-homomorfismo f_2 es irreducible, ver figura 3.1.

(iii) El triángulo de Auslander-Reiten

$$\widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}[\alpha_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}],$$

satisface que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sirreducible y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sirreducible

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\alpha_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\alpha] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f_3"] & {} \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f_4"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\widehat{\overline{m}}_{i+1}\beta_i] & \cdots \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] & M[\beta] \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Los Λ-homomorfismos f_1 , f_3 y f_4 son irreducibles, ver figura 3.1.

(iv) En el triángulo de Auslander-Reiten

$$\widehat{M}[\beta_i\alpha_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}[\beta_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[\widehat{\overline{m}}_{i+1}\beta_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}[\beta_i\alpha_i],$$

tenemos que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sirreducible y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente smonic

$$\begin{tikzcd}
\widehat{M}[\beta_i\alpha_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\beta\alpha] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f_5"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\beta_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\beta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\beta]}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\widehat{M}[\widehat{\overline{m}}_{i+1}\beta_i] \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly, "f_5"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_1]}"] & M[\beta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\mathbb{1}_{1_{i+1}}] & \cdots \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

donde el Λ-homomorfismo f_5 es irreducible ver figura 3.1.

Ejemplo 3.6.2. Sea $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ la $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita como $\Bbbk$-espacio vectorial, donde el carcaj Q está dada por $Q:=$ $\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, bend left, "b"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$ y el ideal $\mathcal{I}$ es generado por $\rho = \{a^2, bc, cb\}$. Note que Λ es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión global infinita, pues $M[b]$ tiene dimensión proyectiva infinita. El camino maximal en (Q, ρ) es $m = cab$. Por la definición 3.5.1 (ii) tenemos, para cada $i \in \mathbb{Z}$, la flecha de conexión $\widehat{\widehat{m}}_i : 2_i \longrightarrow 2_{i-1}$. Por lo tanto el carcaj repetitivo $\widehat{Q}$ es

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \\
1_{i+1} \arrow[loop left, "a_{i+1}"] \arrow[r, bend left, "b_{i+1}"] & 2_{i+1} \arrow[l, bend left, "c_{i+1}"] \arrow[d, "\widehat{\widehat{m}}_{i+1}"] \\
1_i \arrow[loop left, "a_i"] \arrow[r, bend left, "b_i"] & 2_i \arrow[l, bend left, "c_i"] \arrow[d, "\widehat{\widehat{m}}_i"] \\
1_{i-1} \arrow[loop left, "a_{i-1}"] \arrow[r, bend left, "b_{i-1}"] & 2_{i-1} \arrow[l, bend left, "c_{i-1}"] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Para calcular los caminos completos en $\widehat{Q}$, vamos a utilizar la definición 3.5.1.

(i) Para $m = c \circ ab$, lo cual implica que $\gamma_i = a_i b_i \widehat{\widehat{m}}_i c_{i-1}$ es un camino completo en $\widehat{Q}$.

(ii) Para la descomposición $m = ca \circ b$, se tiene que $\zeta_i = b_i \widehat{\widehat{m}}_i c_{i-1} a_{i-1}$ es un camino completo en $\widehat{Q}$.

(iii) Dado que $m = \mathbb{1}_2 \circ cab$, un camino completo en $\widehat{Q}$ es $\eta_i = c_i a_i b_i \widehat{\widehat{m}}_i$.

(iv) Para la descomposición $m = cab \circ \mathbb{1}_2$, se tiene el camino completo $\chi_i = \widehat{\widehat{m}}_i c_{i-1} a_{i-1} b_{i-1}$ en $\widehat{Q}$.

El conjunto de relaciones $\widehat{\rho}$ en $\widehat{Q}$ está dado por:

(i) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene $a_i^2,\ b_i c_i,\ c_i b_i \in \widehat{\rho}$.

(ii) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\gamma_i a_{i-1},\ c_i \gamma_i,\ a_i \zeta_i,\ \lambda_i \eta_i,\ \zeta_i b_{i-1},\ \widehat{\widehat{m}}_{i+1} \eta_i,\ \eta_i c_{i-1},\ b_i \chi_i, \chi_i \widehat{\widehat{m}}_{i-1} \in \widehat{\rho}$.

(iii) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tienen las relaciones de conmutatividad $\gamma_i - \zeta_i$, $\eta_i - \chi_i \in \widehat{\rho}$ en $\widehat{Q}$.

Sea $\widehat{\mathcal{I}} =< \widehat{\rho} >$ y $\widehat{\Lambda} = \Bbbk\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}$,la cual es una $\Bbbk$-álgebra especial biserial (ver proposición 3.5.4). Las series radicales de los $\widehat{\Lambda}$-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles están dadas por:

$$
\widehat{P}_{\mathbb{1}_{1_i}} = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d] \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] \arrow[d] \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] \arrow[dr] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i-1}}] \arrow[dl] \\ & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i-1}}] & \end{tikzcd}
\qquad
\widehat{P}_{\mathbb{1}_{2_i}} = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] \arrow[d] \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i-1}}] \arrow[d] \\ \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[dr] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i-1}}] \arrow[dl] \\ & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] & \end{tikzcd} .
$$

Sean $d_i = a_ib_i\widehat{\widehat{m}}_i$ y $e_i = d_ib_{i-1}^{-1}$. Una componente del carcaj de Auslander-Reiten estable de $\widehat{\Lambda}$-mod es la figura 3.3.

En la categoría estable $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ solamente se dan dos casos del teorema 3.3.1, estos dos casos se logran ver en la componente estable dada en la figura 3.3.

(i) En el triángulo $\widehat{M}[d_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} \widehat{M}[e_id_{i-1}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[d_{i-1}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\widehat{M}[d_i]$ de Auslander-Reiten se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente irreducible y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente irreducible. Reemplazando d_i y e_i en el triángulo anterior, el triángulo de Auslander-Reiten tiene la siguiente forma

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{M}[a_ib_i\widehat{\widehat{m}}_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & {} \arrow[r, squiggly] & M[ab] \arrow[r, squiggly, "f_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[ab]}"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i+1}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "0"] & {} \\
\widehat{M}[a_ib_i\widehat{\widehat{m}}_ib_{i-1}^{-1}a_{i-1}b_{i-1}\widehat{\widehat{m}}_{i-1}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & {} \arrow[r, squiggly] & M[ab] \arrow[r, squiggly, "f_i'"] \arrow[d, "0"] & M[b^{-1}ab] \arrow[r, squiggly, "f_{i+1}'"] \arrow[d, "h_{i+1}'"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_2]}"] & {} \\
\widehat{M}[a_{i-1}b_{i-1}\widehat{\widehat{m}}_{i-1}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & {} \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "0"] & M[ab] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i+1}''"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "0"] & {} \\
\widehat{M}[\widehat{\widehat{m}}_ic_{i-1}a_{i-1}] : & {} \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] & M[ca] \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & {}
\end{tikzcd} .
$$

Los Λ-homomorfismos h_{i+1} y h'_{i+1} son homomorfismos canónicos. Por lo tanto de la proposición 4.8.3 tenemos que son irreducibles.

(ii) En el triángulo de Auslander-Reiten

$$\widehat{M}[e_id_{i-1}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[d_{i-1}] \oplus \widehat{M}[e_ie_{i-1}d_{i-2}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} \widehat{M}[e_{i-1}d_{i-2}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\,\widehat{M}[e_id_{i-1}],$$

se tiene $\underline{\widehat{h}}$ es establemente smonic y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sepic

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, rightsquigarrow] & M[ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[ab]}"] & M[b^{-1}ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{M[b^{-1}ab]},0)^t"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_2]},0)^t"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & {} \\
{} \arrow[r, rightsquigarrow] & M[ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & M[b^{-1}ab] \oplus M[ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "(0,\mathrm{id}_{M[ab]})"] & M[\mathbb{1}_2] \oplus M[b^{-1}ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "(0,\mathrm{id}_{M[b^{-1}ab]})"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_2]}"] & {} \\
{} \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & M[ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "h''_{i+1}"] & M[b^{-1}ab] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "h''_{i+2}"] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & {} \\
{} \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] & m[cac^{-1}] \arrow[r, rightsquigarrow] & M[ca] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & {}
\end{tikzcd}.$$

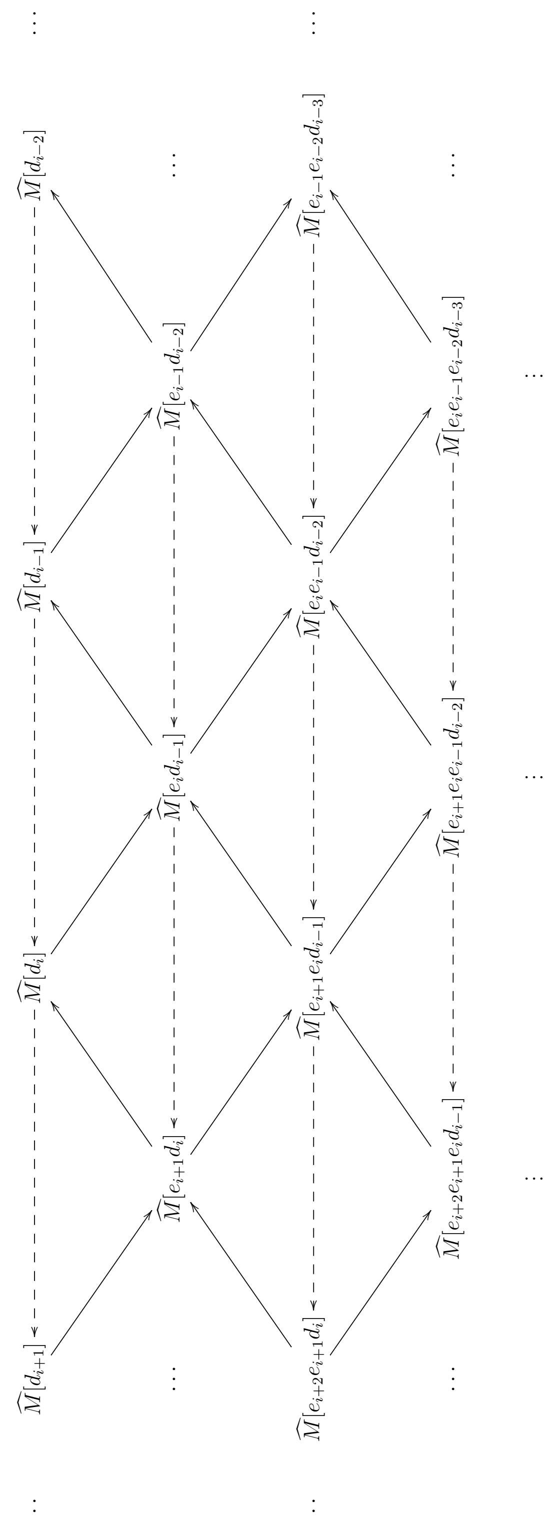


Figura 3.3: Una componente del carcaj de Auslander-Reiten estable de $\widehat{\Lambda}$-mod.

Ejemplo 3.6.3. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \underset{3}{\bullet} \arrow[d, "\alpha"] \\
\underset{4}{\bullet} \arrow[loop left, "\lambda"] \arrow[r, "\beta"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[d, "\theta"] \\
& \underset{1}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Sean $\rho = \{\alpha\theta, \lambda^2\}$, $\mathcal{I}$ el ideal generado por ρ y $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, la cual es una $\Bbbk$-álgebra gentil de dimensión global infinita, pues la dimensión proyectiva de $M[\beta\theta]$ es infinita. Los caminos maximales en (Q, ρ) son $\mathscr{M} = \left\{\overline{\alpha}, \overline{\lambda\beta\theta}\right\}$. Para $\overline{\alpha}$, por la definición 3.5.1 (ii), tenemos la flecha de conexión $\widehat{\overline{\alpha}}_i : \underset{2_i}{\bullet} \longrightarrow \underset{3_{i-1}}{\bullet}$ y para $\overline{q} = \overline{\lambda\beta\theta}$ tenemos la flecha de conexión $\widehat{\overline{q}}_i : \underset{1_i}{\bullet} \longrightarrow \underset{4_{i-1}}{\bullet}$. Así el carcaj $\widehat{Q}$ tiene la siguiente forma.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & \underset{3_{i+1}}{\bullet} \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & & \underset{3_i}{\bullet} \arrow[d, "\alpha_i"] & & \underset{3_{i-1}}{\bullet} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \\
& \underset{4_{i+1}}{\bullet} \arrow[loop left, "\lambda_{i+1}"] \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & \underset{2_{i+1}}{\bullet} \arrow[d, "\theta_{i+1}"] \arrow[urr, bend left, "\widehat{\overline{\alpha}}_{i+1}"] & \underset{4_i}{\bullet} \arrow[loop left, "\lambda_i"] \arrow[r, "\beta_i"] & \underset{2_i}{\bullet} \arrow[d, "\theta_i"] \arrow[urr, bend left, "\widehat{\overline{\alpha}}_i"] & \underset{4_{i-1}}{\bullet} \arrow[loop left, "\lambda_{i-1}"] \arrow[r, "\beta_{i-1}"] & \underset{2_{i-1}}{\bullet} \arrow[d, "\theta_{i-1}"] & \\
\cdots & & \underset{1_{i+1}}{\bullet} \arrow[ur, bend right, "\widehat{\overline{q}}_{i+1}"'] & & \underset{1_i}{\bullet} \arrow[ur, bend right, "\widehat{\overline{q}}_i"'] & & \underset{1_{i-1}}{\bullet} & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Ahora, veamos cuales son los caminos completos en $\widehat{Q}$.

(i) Para $\alpha = \alpha \circ \mathbb{1}_2$, lo cual implica que $\gamma_i = \widehat{\overline{\alpha}}_i \alpha_{i-1}$ es un camino completo en $\widehat{Q}$.

(ii) Para $\alpha = \mathbb{1}_3 \circ \alpha$, se tiene que $\zeta_i = \alpha_i \widehat{\overline{\alpha}}_i$ es un camino completo en $\widehat{Q}$.

(iii) Para $q = \lambda \circ \beta\theta$, un camino completo en $\widehat{Q}$ es $\eta_i = \beta_i \theta_i \widehat{\overline{q}}_i \lambda_{i-1}$.

(iv) El camino maximal $q = \lambda\beta \circ \theta$ induce el camino completo $\chi_i = \theta_i \widehat{\overline{q}}_i \lambda_{i-1} \beta_{i-1}$ en $\widehat{Q}$.

(v) Para $q = \mathbb{1}_4 \circ \lambda\beta\theta$, se tiene el camino completo $\xi_i = \lambda_i\beta_i\theta_i\widehat{\overline{q}}_i$ en $\widehat{Q}$.

(vi) Dado $q = \lambda\beta\theta \circ \mathbb{1}_1$, tenemos que $\kappa_i = \widehat{\overline{q}}_i\lambda_{i-1}\beta_{i-1}\theta_{i-1}$ es un camino completo en $\widehat{Q}$.

El conjunto de relaciones, $\widehat{\rho}$ en $\widehat{Q}$, esta dado por:

(i) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene $\alpha_i\theta_i,\ \lambda_i^2 \in \widehat{\rho}$.

(ii) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene $\beta_i\widehat{\overline{\alpha}}_i,\ \widehat{\overline{q}}_i\beta_{i-1},\ \alpha_i\gamma_i,\ \gamma_i\widehat{\overline{\alpha}}_{i-1},\ \lambda_i\eta_i,\ \eta_i\beta_{i-1},\ \chi_i\theta_{i-1},\ \kappa_i\widehat{\overline{q}}_{i-1} \in \widehat{\rho}$.

(iii) Para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tienen las relaciones de conmutatividad $\eta_i - \xi_i,\ \gamma_i - \chi_i \in \widehat{\rho}$ en $\widehat{Q}$.

Sean $\widehat{I} =< \widehat{\rho} >$ y $\widehat{\Lambda} = \Bbbk\widehat{Q}/\widehat{I}$, la cual es una $\Bbbk$-álgebra especial biserial ver proposición 3.5.4 y $\widehat{\Lambda}$-mod es una categoría de Frobenius.

Las series radicales de los $\widehat{\Lambda}$-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles están dadas por.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] \arrow[d] \\
\widehat{P}_{1_i} = & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] \arrow[d] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] \arrow[d] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_{i-1}}]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] & & \\
\widehat{P}_{2_i} = & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{3_{i-1}}] \arrow[ddl] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] \arrow[dr] & & \\
 & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_{i-1}}] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{3_i}] \arrow[d] \\
\widehat{P}_{3_i} = & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{3_{i-1}}]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_i}] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d] \\
\widehat{P}_{4_i} = & \widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}] \arrow[d] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[d] \\
 & \widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}] \arrow[dr] & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] \arrow[dl] \\
 & & \widehat{M}[\mathbb{1}_{4_{i-1}}] &
\end{tikzcd}
$$

Una componente del carcaj de Auslander-Reiten de $\widehat{\Lambda}$-$\underline{\text{mod}}$ se puede ver en la figura 3.4.

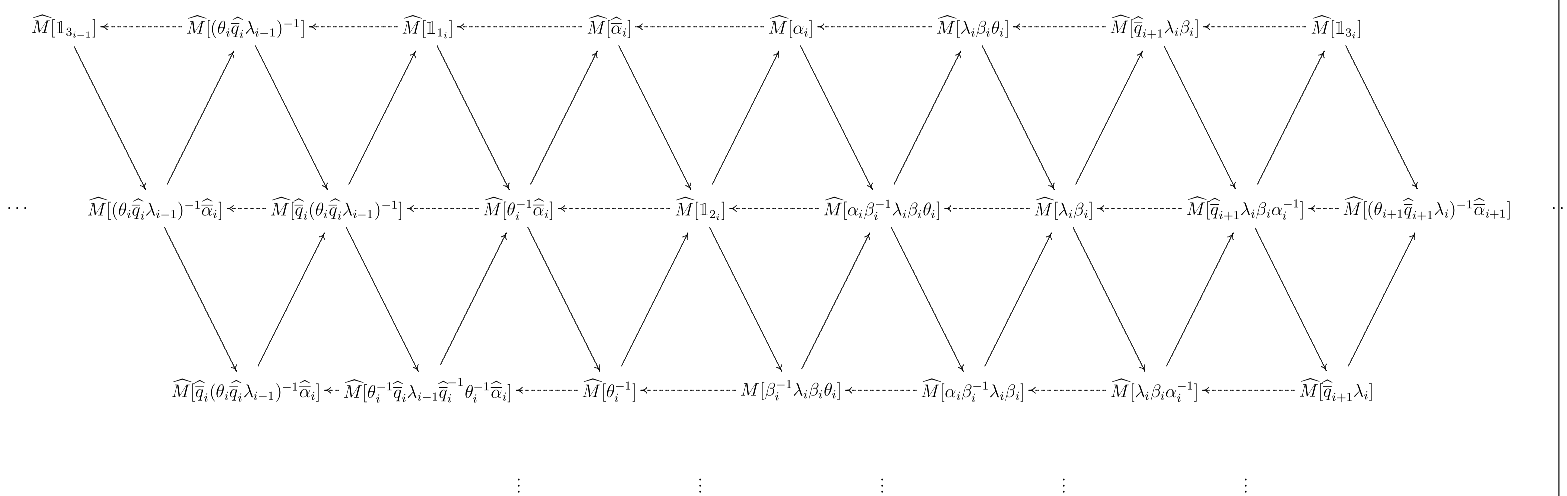


Figura 3.4: La componente del carcaj de Auslander-Reiten estable de $\widehat{\Lambda}$-mod conteniendo los $\widehat{\Lambda}$-módulos simples $\widehat{M}[\mathbb{1}_{1_i}]$, $\widehat{M}[\mathbb{1}_{2_i}]$ y $\widehat{M}[\mathbb{1}_{3_i}]$ con $i \in \mathbb{Z}$.

Veamos que los siguientes triángulos de Auslander-Reiten tienen las formas dada en el teorema 3.3.1.

(i) En el triángulo

$$M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \oplus M[\theta_i^{-1}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} M[\mathbb{1}_{2_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1} M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i],$$

se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente smonic y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sepic

$$\begin{tikzcd}
M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\theta] \arrow[r, rightsquigarrow, "f_i"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{M[\theta]}, 0)^t"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_3]}"] & \cdots \\
M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \oplus M[\theta_i^{-1}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\theta] \oplus M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow, "{(f_i, 0)}"] \arrow[d, "{(0, \mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_2]})}"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
M[\mathbb{1}_{2_i}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\Omega^{-1} M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\lambda\beta\alpha^{-1}] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Tenemos que$M[\theta]$ es un Λ-módulo proyectivo indescomponible. Por lo tanto $Q \otimes_\Lambda M[\theta] \cong M[\lambda\beta\alpha^{-1}]$ es un Λ-módulo inyectivo indescomponible, así el Λ-homomorfismo $f_i : Q \otimes_\Lambda M[\theta] \longrightarrow M[\mathbb{1}_3]$ es el Λ-homomorfismo canónico de $M[\lambda\beta\alpha^{-1}]$ para $M[\mathbb{1}_3]$.

(ii) En el triángulo $M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} M[\mathbb{1}_{2_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} M[\alpha_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1} M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i]$, se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sepic y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sirreducible

$$\begin{tikzcd}
M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_2]}"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
M[\mathbb{1}_{2_i}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "h'_{i_0}"] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
M[\alpha_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & M[\alpha] \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d] & \cdots \\
\Omega^{-1} M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & 0 \arrow[r, rightsquigarrow] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

donde $h'_{i_0} : M[\mathbb{1}_2] \longrightarrow M[\alpha]$ es un Λ-homomorfismo canónico. Por lo tanto, por la proposición 4.8.3, se tiene que h_{i_0} es un Λ-homomorfismo irreducible.

(iii) En el triángulo

$$M[\lambda_i\beta_i\theta_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} M[\lambda_i\beta_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} M[\widehat{\overline{q}}_{i+1}\lambda_i\beta_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\, M[\lambda_i\beta_i\theta_i]\ ,$$

se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sirreducible y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente smonic

$$\begin{tikzcd}
M[\lambda_i\beta_i\theta_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\lambda\beta\theta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i_0+1}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\lambda_i\beta_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "0"] & M[\lambda\beta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\lambda\beta]}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\widehat{\overline{q}}_{i+1}\lambda_i\beta_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\lambda\beta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\Omega^{-1}\, M[\lambda_i\beta_i\theta_i] : & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots\ ,
\end{tikzcd}$$

donde $h_{i_0+1} : M[\lambda\beta\theta] \longrightarrow M[\lambda\beta]$ es el Λ-homomorfismo canónico. Por lo tanto, por la proposición 4.8.3, se tiene que h_{i_0+1} es un Λ-homomorfismo irreducible.

(iv) En el triángulo $M[\mathbb{1}_{1_i}] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}} M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}'} M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] \xrightarrow{\underline{\widehat{h}}''} \Omega^{-1}\, M[\mathbb{1}_{1_i}]$, se tiene que $\underline{\widehat{h}}$ es establemente sirreducible y $\underline{\widehat{h}}'$ es establemente sirreducible

$$\begin{tikzcd}
M[\mathbb{1}_{1_i}] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h_{i_0}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\theta_i^{-1}\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}'"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\theta] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "h'_{i_0}"] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M[\mathbb{1}_3]}"] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
M[\widehat{\widehat{\alpha}}_i] : \arrow[d, "\underline{\widehat{h}}''"'] & \cdots \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_2] \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & M[\mathbb{1}_3] \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & 0 \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \cdots \\
\Omega^{-1}\, M[\mathbb{1}_{1_i}] : & 0 \arrow[r, squiggly] & M[\mathbb{1}_1] \arrow[r, squiggly] & M[(\lambda\beta)^{-1}] \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & 0 \arrow[r, squiggly] & \cdots\ ,
\end{tikzcd}$$

donde $h_{i_0} : \widehat{M}[\mathbb{1}_1] \longrightarrow M[\theta]$ y $h'_{i_0} : M[\theta] \longrightarrow M[\mathbb{1}_2]$ son Λ-homomorfismos canónicos. Así, por la proposición 4.8.3, tenemos que son Λ-homomorfismos irreducibles.

Capítulo 4

Apéndice

4.1 Álgebra básica

Definición 4.1.1. *Sean $\Bbbk$ un cuerpo y Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Decimos que Λ es* ***básica****, si $\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ como Λ-módulo a izquierda, donde los P_i son Λ-módulos proyectivos a izquierda indescomponibles no isomorfos dos a dos. Si $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado, se sabe que Λ es básica si, y solamente si, todo Λ-módulo simple tiene dimensión uno como $\Bbbk$-espacio vectorial.*

Teorema 4.1.2. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Dos $\Bbbk$-álgebras básicas son isomorfas si y solamente si son Morita equivalentes [8].*

Demostración. Ver [8, Lema I.2.6]. □

Teorema 4.1.3. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Si Λ es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, entonces existe una única $\Bbbk$-álgebra básica Λ_0 (salvo isomorfismo) tal que Λ y Λ_0 son morita equivalentes. Al álgebra Λ_0 se le conoce como la álgebra básica de Λ.*

Demostración. Ver [8, Cor. I.2.7]. □

4.2 Carcaj y representaciones

Definición 4.2.1. *(i) Un* ***carcaj*** *es un grafo dirigido $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$, donde Q_0 es el conjunto de vértices, Q_1 es el conjunto de flechas, y s, e*

son funciones de Q_1 en Q_0 definidas de la siguiente manera: para toda fecha $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ es el vértice donde comienza la fecha α y $e(\alpha)$ es el vértice donde termina la fecha α.

(ii) Supongamos que $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ es un carcaj y $\Bbbk$ un cuerpo. Una representación ν del carcaj Q sobre $\Bbbk$ esta dada por $(V_v, \phi_v)_{v \in Q_0}$, donde para cada vértice $v \in Q_0$ tenemos el $\Bbbk$-espacio vectorial V_v y para una fecha $v \xrightarrow{\alpha} u$, existe $\phi_\alpha : V_v \to V_u$ una transformación lineal.

Sean $\nu = (V_v, \phi_v)_{v \in Q_0}$ y $\nu' = (V'_v, \phi'_v)_{v \in Q_0}$ dos representaciones de Q sobre $\Bbbk$. Un morfismo $\eta : \nu \to \nu'$ es definido por $\eta = (\eta_v)_{v \in Q_0}$, donde $\eta_v : V_v \to V'_v$ es una transformación $\Bbbk$-lineal tal que, para cada fecha $v \xrightarrow{\alpha} u$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V_v \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\eta_v"'] & V_u \arrow[d, "\eta_u"] \\ V'_v \arrow[r, "\phi'_\alpha"] & V'_u \end{tikzcd},$$

esto es, $\eta_u \circ \phi_\alpha = \phi'_\alpha \circ \eta_v$. Denotamos por $Rep_k(Q)$ la a categoría de todas las representaciones de Q sobre $\Bbbk$.

4.3 Álgebra de caminos de un carcaj

Definición 4.3.1. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj y sean $v, u \in Q_0$. Un **camino** de longitud $l \geq 1$ de v en u es de la forma $(v|\alpha_1 \cdots \alpha_l|u)$, con α_r fechas en Q_1 satisfaciendo $e(\alpha_r) = s(\alpha_{r+1})$ para todo $r \in \{1, 2, 3, \cdots, l-1\}$. También se define, para cada vértice $v \in Q_0$, un camino de longitud cero (de v en v) el cual se le dice **camino trivial** y es denotado por $\mathbb{1}_v$. Un camino de longitud $l > 0$ es llamado un **ciclo** si es de la forma $(v|\alpha_1 \cdots \alpha_l|v)$, es decir, empieza y termina en el mismo vértice, un ciclo de longitud 1 es llamado **lazo**. Un carcaj es **acíclico** si no tiene ciclos.*

*La $\Bbbk$-**álgebra de caminos** $\Bbbk Q$ de Q es definida como el $\Bbbk$-espacio vectorial, con base el conjunto de todos los caminos en Q. El producto de dos caminos es la yuxtaposición de ellos, si existe, y cero en cualquier otro caso.*

De esta manera, obtenemos una $\Bbbk$-álgebra asociativa, la cual tiene una identidad si, y solamente si, Q_0 es finito. Si Q_0 es finito, el elemento identidad esta dado por $\sum\limits_{v \in Q_0} \mathbb{1}_v$.

Notemos que la $\Bbbk$-álgebra de caminos $\Bbbk Q$ es de dimensión finita sobre $\Bbbk$ si, y solamente si, Q_0 es finito y no tiene ciclos. Denotamos por J el ideal de $\Bbbk Q$ generado por todas las fechas en Q. Entonces J^n es el ideal de $\Bbbk Q$ generado por todos los caminos de longitud mayor o igual a n. Denotamos por $\Bbbk Q$-mod a la categoría de todos los $\Bbbk Q$-módulos finitamente generados.

Definición 4.3.2. *Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj finito y $\Lambda = \Bbbk Q$ e $\mathcal{I}$ un ideal bilatero de Λ. Decimos que $\mathcal{I}$ es un **ideal admisible** si existe $m \in \mathbb{Z}$ mayor o igual a dos tal que*

$$J^m \subseteq \mathcal{I} \subset J^2$$

4.4 Carcaj con relaciones

Definición 4.4.1. *Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj y $\Bbbk$ un cuerpo.*

*(i) Sean $v, u \in Q_0$. Una **relación** θ sobre Q es un elemento $\theta = \sum c_w w \in kQ$, donde los w son caminos en Q de longitud mayor o igual a 2 tales que $s(w) = v$ y $t(w) = u$ y $c_w \in \Bbbk$. Si $\{\theta_t\}_t$ es un conjunto de relaciones sobre Q, entonces $(Q, \{\theta_t\}_t)$ es llamado **Carcaj con relaciones**.*

(ii) Si $w = (v|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|u)$ es un camino en Q y $\nu = (V_v, \phi_\alpha)$ es una representación de Q sobre $\Bbbk$, entonces w actúa sobre ν vía la transformación lineal $w(\nu) = \phi_{\alpha_l} \circ \cdots \circ \phi_{\alpha_1}$. En general, para una relación $\rho = \sum c_n w_n$ donde $c_n \in \Bbbk$ y cada w_n es un camino en Q, definimos $\rho(\nu) = \sum c_n w_n(\nu)$.

(iii) Dado un carcaj con relaciones $(Q, \{\theta_t\}_t)$ y una representación $\nu = (V_i, \phi_\alpha)$ de Q sobre $\Bbbk$, ν es una representación de $(Q, \{\theta_t\}_t)$ si para todo t se tiene que $\theta_t(\nu) = 0$. Denotamos por $Rep_{\Bbbk}(Q, \{\theta_t\}_t)$ a la categoría de todas las representaciones del carcaj con relaciones $(Q, \{\theta_t\}_t)$ sobre $\Bbbk$.

Teorema 4.4.2. *Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj, $\Bbbk$ un cuerpo y $(Q, \{\theta_t\}_t)$ el carcaj con relaciones.*

(i) Las categorías $Rep_{\Bbbk}(Q)$ *y* $\Bbbk Q$*-módulos son equivalentes.*

(ii) Las categorías $Rep_{\Bbbk}(Q, \{\theta_t\}_t)$ *y* $\Bbbk Q/\mathcal{I}$-mod *son equivalentes, donde* $\mathcal{I}$ *es el ideal de* $\Bbbk Q$ *generado por* $\{\theta_t\}_t$.

Demostración. Ver [3, Teorema. III.1.5, Proposición. III.1.7]. □

Teorema 4.4.3 (Gabriel)**.** *Sea* $\Bbbk$ *un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, toda* $\Bbbk$*-álgebra básica de dimensión finita es de la forma* $\Bbbk Q/\mathcal{I}$*, para un único carcaj* Q *y algún ideal* $\mathcal{I}$ *tal que* $J^n \subseteq \mathcal{I} \subseteq J^2$ *con* $n \geq 2$.

Demostración. Ver [3, Corolario. III.1.10]. □

4.5 Sucesiones de Auslander-Reiten y carcaj de Auslander-Reiten

Sea Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo $\Bbbk$.

Definición 4.5.1. *Una sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *no escindida de* Λ*-módulos finitamente generados, con* M *y* N *indescomponibles, es una* ***sucesión de Auslander-Reiten*** *si para todo* Λ*-módulo* M' *finitamente generado y para todo* Λ*-homomorfismo* $h : M \longrightarrow M'$*, el cual no es monomorfismo escindido, existe un* Λ*-homomorfismo* $h' : L \longrightarrow M'$ *tal que* $h' \circ f = h$.

Teorema 4.5.2. *(i) Si* N *es un* Λ*-módulo indescomponible no proyectivo, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten terminando en* N.

(ii) Si M *es un* Λ*-módulo indescomponible no inyectivo, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten empezando en* M.

Demostración. Ver [3, Teorema. V.1.15]. □

Definición 4.5.3. *Si* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *es una sucesión de Auslander-Reiten, se define* $\tau N = M$ *y decimos que* τN *es el* ***trasladado de Auslander*** *de* N*. De manera similar, se define* $\tau^{-1} M = N$.

Teorema 4.5.4. *Si la $\Bbbk$-álgebra Λ es simétrica, entonces $\tau N \cong \Omega^2 N$ como Λ-módulo.*

Demostración. Ver [3, Teorema, V.1.15 y Proposición IV.3.8]. □

Teorema 4.5.5. *Sea* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *una sucesión de Auslander-Reiten.*

(i) Los Λ-homomorfismos irreducibles, empezando en M son de la forma $f' : M \longrightarrow L'$ donde L' es un sumando directo de L diferente de cero, esto es, $L = L' \oplus L''$ y $f = (f', f'')^t$, para algún $f'' : M \longrightarrow L''$.

(ii) Los Λ-homomorfismos irreducibles, terminando en N son de la forma $g' : L' \longrightarrow N$ donde L' es un sumando directo de L diferente de cero, es decir, $L = L' \oplus L''$ y $g = (g', g'')$, para algún $g'' : L'' \longrightarrow N$.

Demostración. Ver [3, Teorema 5.3]. □

Definición 4.5.6. *Sea Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. el* ***carcaj de Auslander-Reiten*** *de Λ denotado por $\Gamma(\Lambda)$, se define como el carcaj cuyos vértices son las clases de isomorfismos de los Λ-módulos indescomponibles, además, el número de fechas $[M] \to [N]$ en $\Gamma(\Lambda)$ es igual a la dimensión como $\Bbbk$-espacio vectorial de los homomorfismo irreducibles de M para N. Más precisamente, si N es un Λ-módulo indescomponible no proyectivo, la $\Bbbk$-dimensión del espacio de los homomorfismos irreducibles de M para N es igual a la multiplicidad de M como sumando directo de E, donde $0 \longrightarrow \tau N \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es la sucesión de Auslander-Reiten terminando en N. Del mismo modo, si M es indescomponible no inyectivo, entonces la $\Bbbk$-dimensión del espacio de los homomorfismos irreducibles de M para N es igual a la multiplicidad de N como sumando directo de E', donde $0 \longrightarrow M \longrightarrow E' \longrightarrow \tau^{-1} M \longrightarrow 0$ es la sucesión de Auslander-Reiten empezando en M.*

Si N es proyectivo indescomponible, entonces la $\Bbbk$-dimensión del espacio de los homomorfismos irreducibles de M para N es igual a la multiplicidad de M como un sumando directo de $\operatorname{rad} N$. Si M es inyectivo indescomponible, entonces la $\Bbbk$-dimensión del espacio de homomorfismos irreducibles de M para

N es igual a la multiplicidad de N como un sumando directo de $M/\operatorname{soc} M$. El carcaj de Auslander-Reiten estable denotada por $\Gamma_S(\Lambda)$ es obtenida de $\Gamma(\Lambda)$ removiendo todos los Λ-módulos proyectivos P, todos los Λ-módulos inyectivos I y para todo $i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $[\tau^{-i} P]$ y $[\tau^i I]$ y todas las fechas adyacentes. En particular, cuando la $\Bbbk$-álgebra sea auto-inyectiva, removemos solo los vértices $[P]$ para P proyectivo y las fechas adyacentes.

4.6 Álgebra especial biserial

Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente y Λ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita.

Definición 4.6.1. *La $\Bbbk$-álgebra Λ es **especial biserial** si es una $\Bbbk$-álgebra básica de la forma $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj finito y $\mathcal{I}$ es un ideal admisible (ver definición 4.3.2). El cual cumple las siguientes condiciones:*

(S1) Para todo vértice $v \in Q_0$ existen a lo sumo dos fechas empezando en v y existen a lo sumo dos fechas terminando en v.

(S2) Para toda fecha $\beta \in Q_1$ existe a lo sumo una fecha $\delta \in Q_1$ con $s(\beta) = e(\delta)$ tal que $\delta\beta \notin \mathcal{I}$ y existe a lo sumo una fecha $\alpha \in Q_1$ $e(\beta) = s(\alpha)$ tal que $\beta\alpha \notin \mathcal{I}$.

Definición 4.6.2. *Sea $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra especial biserial. Decimos que Λ es una **álgebra de cadena**, si el ideal $\mathcal{I}$ es generado por relaciones cero de longitud mayor o igual a 2.*

Definición 4.6.3. *Sea $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra de cadena. Decimos que Λ es **gentil** si cumple las siguientes condiciones.*

(G1) El ideal $\mathcal{I}$ es generado por relaciones ceros de longitud dos.

(G2) Para toda fecha $\beta \in Q_1$ existe a lo sumo una fecha $\delta \in Q_1$ con $s(\beta) = e(\delta)$ tal que $\delta\beta \in \mathcal{I}$ y existe a lo sumo una fecha $\alpha \in Q_1$ $e(\beta) = s(\alpha)$ tal que $\beta\alpha \in \mathcal{I}$.

4.7 Módulos cadena

Definición 4.7.1. *Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $\Lambda = kQ/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra de cadena básica.*

*(i) Dada β una fecha en Q, denotamos por β^{-1} la fecha inversa de β, donde $s(\beta^{-1}) = e(\beta)$ y $e(\beta^{-1}) = s(\beta)$ y escribimos $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$. Una **palabra** de longitud $n \geq 1$ es una secuencia $w_1 \cdots w_n$, donde los w_i son fechas o fechas inversas donde $s(w_{i+1}) = e(w_i)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, $s(w_1 \cdots w_n) = s(w_1)$ y $e(w_1 \cdots w_n) = e(w_n)$. Se define la inversa de una palabra de la siguiente forma $(w_1 \cdots w_n)^{-1} = w_n^{-1} \cdots w_1^{-1}$.*

*Una **rotación** de una palabra $w = w_1 \cdots w_n$ es una palabra $w_{i+1} \cdots w_n w_1 \cdots w_i$ para $1 \leq i \leq n$. Si v es un vértice de Q, se define la palabra vacía $\mathbb{1}_v$ de longitud cero con $e(\mathbb{1}_v) = t(\mathbb{1}_v) = v$ y $(\mathbb{1}_v)^{-1} = \mathbb{1}_v$. En el conjunto de todas las palabras definimos la relación de equivalencia $\sim$, la cual identifica w con w^{-1}.*

*(ii) Una **cadena** es un representante w, de una clase de equivalencia bajo la relación $\sim$, donde $w = \mathbb{1}_v$ para v un vértice de Q o $w = w_1 \cdots w_n$ con $n \geq 1$ y $w_i \neq w_{i+1}^{-1}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n-1$ y los sub-caminos de w o los inversos de sub-caminos no están en $\mathcal{I}$.*

Definición 4.7.2. *Para cada cadena w, definimos al $\Lambda-$módulo $M[w]$, el cual llamamos **módulo cadena**. Sea $w = w_1 \cdots w_n$ una cadena de longitud $n > 0$. Definamos la siguiente función $t : \{0, 1, \cdots, n\} \to Q_0$ dada por:*

$$t(x) = \begin{cases} s(w_1), & si\ x = 0, \\ e(w_x), & si\ x \neq 0. \end{cases}$$

Para $u \in Q_0$, definamos $\mathcal{I}_u = \{x \in \{0, 1, 2, ..., n\} / t(x) = u\}$. De esta forma definimos $M[w] = (M_v, \phi_\beta)$ donde $M_v = \bigoplus\limits_{x \in \mathcal{I}_v} K_x$ y cada K_x es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión 1. Para una flecha $\beta \in Q_1$, definimos $\phi_\beta : M_{s(\beta)} \to M_{e(\beta)}$ como una matriz de $|\mathcal{I}_{e(\beta)}| \times |\mathcal{I}_{s(\beta)}|$, con entradas dadas por:

$$(\phi_\beta)_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ j = i + 1\ y\ w_j = \beta, \\ 1 & si\ i = j + 1\ y\ w_i = \beta^{-1}, \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

4.8 Garfio y co-garfio

Definición 4.8.1. *Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $\Lambda = kQ/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra de cadena básica y w una cadena.*

*(i) Decimos que w **comienza en una cumbre** si no existe $\alpha \in Q_1$ tal que $w\alpha$ es cadena.*

*(ii) Decimos que w **comienza en un abismo** si no existe $\alpha \in Q_1$ tal que $w\alpha^{-1}$ es cadena.*

*(iii) Decimos que w **termina en un abismo** si no existe $\alpha \in Q_1$ tal que αw es cadena.*

*(iv) Decimos que w **termina en una cumbre** si no existe $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha^{-1}w$ es cadena.*

(v) Supongamos que $w = w_1 \cdots w_n$. Diremos que w es una cadena directa si todos los w_i son fechas, es una cadena inversa si todos los w_i^{-1} son fechas. Decimos que w es una cadena maximal directa si es una cadena directa y para todo fecha α en Q se tiene $\alpha w \in \mathcal{I}$.

Definición 4.8.2. *Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra de cadena básica y w una cadena.*

*(i) Supongamos que w no comienza en una cumbre, que existe una fecha β en Q tal que $w\beta$ es una cadena. Entonces existe una única cadena maximal directa D tal que $w_h = w\beta D^{-1}$ es una cadena comenzando en un abismo. w_h es llamado **garfio a derecha** de w.*

*(ii) Supongamos w no termina en una cumbre, que existe una fecha β en Q tal que $\beta^{-1}w$ es una cadena. Entonces existe una única cadena maximal directa D tal que ${}_hw = D\beta^{-1}w$ es una cadena terminando en un abismo. ${}_hw$ es llamado **garfio a izquierda** de w.*

*(iii) Supongamos que w no comienza en un abismo,que existe una fecha γ en Q tal que $w\gamma^{-1}$ es una cadena. Entonces existe una única cadena maximal directa D tal que $w_c = w\gamma^{-1}D$ es una cadena empezando en un cumbre. w_c es llamado **co-garfio a derecha** de w.*

*(iv) Supongamos que w no comienza en un abismo, que existe una fecha β en Q tal que βw es una cadena. Entonces existe una única cadena maximal directa tal que ${}_c w = D^{-1}\beta w$ es una cadena terminando en una cumbre. ${}_c w$ es llamado **co-garfio a izquierda** de w.*

Proposición 4.8.3. *Si $\Lambda = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ una $\Bbbk$-álgebra de cadena básica y w una cadena, entonces los Λ-homomorfismos canónicos $M[w] \longrightarrow M[w_h]$, $M[w] \longrightarrow M[{}_h w]$, $M[w_c] \longrightarrow M[w]$ y $M[{}_c w] \longrightarrow M[w]$ son irreducibles.*

Demostración. Ver [6, Lemas en las pág. 166, 168 y 169]. ☐

A continuación, vamos a determinar las sucesiones de Auslander-Reiten que contienen módulos cadena. En primer lugar consideraremos aquellas con un solo término en el medio.

Definición 4.8.4. *Definamos las siguientes sucesiones exactas, que llamaremos **sucesiones exactas canónicas**:*

(i) Para toda fecha δ en Q, existen C y D cadenas maximales directas tales que $B = C^{-1}\delta D^{-1}$ comienza en un abismo y termina en una cumbre, $N(\delta) = M[B]$ es indescomponible ver [6, pág. 170], $U(\delta) = M[C^{-1}]$, $V(\delta) = M[D^{-1}]$ y la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow U(\delta) \longrightarrow N(\delta) \longrightarrow V(\delta) \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten.

Supongamos que w es una cadena tal que $M[w]$ no es un Λ-módulo inyectivo y para todo fecha δ en Q se cumple que $M[w]$ no es isomorfo a $U(\delta)$.

(ii) Supongamos que w es una cadena que no comienza y no termina en cumbre. Entonces ${}_h w$, w_h y ${}_h w_h$ están definidos. Tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M[w] \longrightarrow M[{}_h w] \oplus M[w_h] \longrightarrow M[{}_h w_h] \longrightarrow 0.$$

(iii) Supongamos que w es una cadena que no comienza en cumbre pero termina en cumbre, así w_h está definida. Dado que w no es inversa(de otra forma $M[w]$ es de la forma $U(\delta)$), entonces podemos escribir a $w =_c D$

para alguna cadena D que no comienza en cumbre. Así también esta definido D_h, y existe la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M[w] \longrightarrow M[D] \oplus M[w_h] \longrightarrow M[D_h] \longrightarrow 0.$$

(iv) *Supongamos que w comienza en una cumbre, pero no termina en una cumbre. Similarmente podemos escribir $w = D_c$ para alguna cadena D, tenemos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M[w] \longrightarrow M[{}_hw] \oplus M[D] \longrightarrow M[{}_hD] \longrightarrow 0.$$

(v) *Supongamos que w comienza y termina en una cumbre. Dado que $M[w]$ no es inyectivo, w no es de la forma $w = w_1w_2$ con w_1 inverso y w_2 directo, esto es, w es de la forma $w =_c D_c$ para alguna cadena D. Tenemos la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M[w] \longrightarrow M[D_c] \oplus M[{}_cD] \longrightarrow M[D] \longrightarrow 0\cdot$$

Teorema 4.8.5. *Las sucesiones exactas canónicas son las sucesiones de Auslander-Reiten conteniendo los módulos cadena.*

Demostración. Ver [6, pág. 172]. □

Bibliografía

[1] I. Assem, I. Simson, and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 1, London Mathematical Society Student Texts, no. 65, Cambridge University Press, 2006.

[2] I. Assem and A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type* $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, Math. Z. **195** (1987), 269–290.

[3] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 36, Cambridge University Press, 1995.

[4] M. Barot and O. Mendoza, *An explicit construction for the Happel functor*, Colloq. Math. **104** (2006), 141–149.

[5] R. Bautista and M. J. Souto Salorio, *Irreducible morphisms in the bounded derived category*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 866–884.

[6] M. C. R. Butler and C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Algebra **15** (1987), 145–179.

[7] A. Cobá, *Categoría de frobenius como categoría triangulada*, Tesis de maestría Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[8] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, vol. I, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[9] H. Giraldo, *Irreducible Morphisms Between Modules over a Repetitive Algebras*, Algebr. Represent. Theory **21(4),** (2018), 683–702.

[10] H. Giraldo and H. Merklen, *Irreducible morphisms of categories of complexes*, J. Algebra **321** (2009), no. 10, 2716 – 2736.

[11] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, no. 119, Cambridge University Press, 1988.

[12] ______, *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), no. 3, 641–648.

[13] D. Happel, B. Keller, and I. Reiten, *Bounded derived categories and repetitive algebras*, J. Algebra **319** (2008), no. 4, 1611–1635.

[14] D. Hughes and J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. Lond. Math. Soc. **3** (1983), no. 2, 347–364.

[15] S. MacLane, *Homology*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1963.

[16] E. Ribeiro Alvares, S. M. Fernandes, and H. Giraldo, *Shapes of Auslander-Reiten triangles*, Algebr. Represent. Theory (2019).

[17] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1099, Springer-Verlag, 1984.

[18] J. Schröer, *On the quiver with relations of a repetitive algebra*, Arch. Math. **72** (1999), no. 6, 426–432.

[19] J. Verdier, *Catégories dérivées, état 0*, Cohomologie Etale: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2 (P. Deligne, ed.), Lecture Notes in Mathematics, no. 569, Springer-Verlag, 1977, pp. 262–311.

[20] C.A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 38, Cambridge University Press, 1994.