



**Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en
Educación Primaria a través de la modelación matemática**

Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación

Asesores

Dra. (C) Mónica Marcela Parra-Zapata

Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Maestría en Educación

MATHEMA-FIEM

Medellín, Antioquia, Colombia

2023

Cita	(Zapata-Jaramillo, 2023)
Referencia	Zapata-Jaramillo, M. (2023). <i>Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática</i> [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
Estilo APA 7 (2020)	



Maestría en Educación, Cohorte XXI.

Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Corrección de estilo y normas técnicas: Sebastian Aguirre Duque, sadw621@gmail.com



Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes

Decano/Director: Wilson Antonio Bolívar Buriticá.

Jefe Departamento: Ruth Elena Quiroz Posada.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de la autora y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. La autora asume la responsabilidad por los derechos de autoría y conexos.

Agradecimientos

A quienes me acompañaron y contribuyeron en el proceso investigativo y formativo, en especial,
A Dios que siempre está de mi lado.

A mis asesores Jhony Alexander Villa-Ochoa y Mónica Marcela Parra-Zapata por sus enseñanzas
y por estar presentes en todos los momentos.

A los evaluadores por sus lecturas críticas y propositivas al trabajo de investigación.

A mis compañeros y profesores del grupo de investigación MATHEMA-FIEM y de la Línea de
Educación Matemática de la Universidad de Antioquia por los aportes continuos en el desarrollo
del trabajo de investigación.

A la Secretaría de Educación de Medellín con la beca de apoyo económico otorgada en el
Programa Maestros, Maestras y Directivos Líderes de la Calidad y la Excelencia del año 2019 y
con su programa de formación de Maestros Mova.

Al Comité para el Desarrollo de la Investigación (CODI), de la Universidad de Antioquia por el
apoyo a través del Proyecto de la convocatoria programática 2020, código 2020-34799.

A los profesores participantes por su compromiso y dedicación en cada una de las sesiones del
curso de formación continua.

A María Camila Ocampo-Arenas y Johana Parra Zapata por su acompañamiento y asistencia en
algunas de las sesiones del curso de formación continua.

A Sebastian Aguirre Duque por la corrección de estilo y normas técnicas realizadas a este
documento.

A mi familia porque con su amor y comprensión me apoyaron para alcanzar este objetivo.

Tabla de contenido

Resumen	9
Abstract	10
Introducción	11
La investigación: problema, referente conceptual y metodología.....	17
Planteamiento del problema de investigación.....	18
Las necesidades de formación expresadas por profesores de primaria que enseñan Matemáticas	19
Modelación matemática en Educación Primaria y el conocimiento especializado de los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria.....	23
Problema de investigación	30
Referente conceptual	31
La Modelación Matemática en Educación Primaria	31
El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.....	37
Metodología	42
Paradigma de investigación cualitativo	42
Implementación metodológica.....	44
Producción conjunta de registros e información.....	47
La observación participante	48
Los documentos	48
Método de análisis de información	49
Consideraciones éticas de la investigación	50
Síntesis del capítulo.....	53
Referencias Capítulo I.....	54
Artículos	61

Conocimiento especializado de la práctica matemática. Un estudio con profesores en un curso de modelación matemática para la Educación Primaria	62
Introducción	63
Referente Conceptual	65
Conocimiento de la práctica matemática (KPM) en el modelo MTSK	66
La modelación matemática en Educación Primaria como una práctica de la enseñanza de las matemáticas.....	70
Metodología	75
Herramientas teóricas para el análisis.....	75
El curso de formación continua	76
La información y su análisis	77
Resultados y discusión	80
El contexto en el subdominio de la práctica matemática.....	80
El razonamiento en las tareas de modelación matemática como una práctica matemática dentro del modelo MTSK	85
Caracterización del conocimiento especializado de la práctica matemática en la modelación matemática	87
Consideraciones finales.....	90
Referencias	91
Conocimiento especializado observado en profesores cuando diseñan ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria.....	96
Introducción	97
Modelación matemática en Educación Matemática.....	99
Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)	104
Metodología	108
El curso y los participantes	108
Datos	110

Análisis de datos	111
Resultados y discusión	115
Relación entre los contenidos matemáticos y el contexto	115
Estrategia para la enseñanza	117
Proceso de exploración del medio	118
Consideraciones finales.....	119
Referencias	121
Consideraciones finales, conclusiones y alcances de la investigación.....	127
Anexo A. Consentimiento informado	132
Anexo B. Formato Plan de clase	137

Lista de tablas

Artículo 1:

Tabla 1 Descriptores para el análisis.....	78
Tabla 2 Relaciones descriptores KPM y elementos de la modelación matemática.	79
Tabla 3 Categorías emergentes del análisis de la información.	80
Tabla 4 Propuesta de categorización para el KPM.....	89

Artículo 2:

Tabla 1 Comprensiones de la modelación matemática.	103
Tabla 2 Dominio, subdominio y categorías del MTSK.....	107
Tabla 3 Descripción de los ambientes de aprendizaje de modelación (Planes de Clase).	111
Tabla 4 Codificación comprensiones de la modelación matemática.	113
Tabla 5 Subdominios del modelo y modelación matemática.....	114

Lista de figuras

Capítulo 1:

Figura 1 Fases de investigación.	12
Figura 2 Estructura del reporte de investigación.....	14
Figura 3 Modelo MTSK.....	39
Figura 4 Código de ética en investigación de la Universidad de Antioquia.	51

Artículo 1:

Figura 1 Modelo MTSK.....	66
Figura 2 Sistema de clasificación de elementos de conocimiento relativos al KPM.....	70

Artículo 2:

Figura 1 Esquema del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas....	105
Figura 2 Comprensiones de la modelación matemática.....	112

Resumen

En este documento se presenta una investigación que indagó por las características del conocimiento especializado de un grupo de profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Los análisis surgieron del proceso investigativo llevado a cabo en el marco de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia. Se emplearon como referentes conceptuales (i) la modelación matemática en Educación Primaria, sus diferentes comprensiones en la literatura, sus tendencias en la investigación en Educación Matemática y los tipos de *tareas* de modelación matemática que se llevan a cabo en las aulas de Primaria y (ii) el modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK), en el cual se hizo énfasis en tres subdominios del modelo: el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la práctica matemática (KMP) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Estos subdominios permitieron indagar acerca de las características del conocimiento para enseñar a través de la modelación matemática que tienen los profesores. Los profesores participaron en un curso de formación continua en el que se tuvieron en cuenta algunas de las características de la modelación matemática, como los tipos de *tareas* y los ambientes propuestos en los grados de escolaridad de Primaria. Los participantes de la investigación fueron 12 profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria, en Instituciones Educativas tanto públicas como privadas de la ciudad de Medellín. Se siguió una metodología cualitativa y la información se originó en la observación participante y el análisis de los documentos creados por los profesores. El análisis de esta información se realizó por medio de un análisis temático y un análisis de contenido. Los resultados indicaron que tanto en la realización de *ambientes de aprendizaje* y *tareas* de modelación matemática, como en la realización de planes de clase con modelación matemática, los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria tienen conocimientos especializados propios. Este conocimiento especializado se caracterizó en la práctica matemática y en el diseño de *ambientes de aprendizaje* de modelación matemática. Como práctica matemática, el conocimiento se caracteriza en la modelación matemática por la relación con el contexto y los razonamientos al desarrollar *tareas*. Así, se categoriza el conocimiento en los *modos de producción del profesor*, el *profesor como resolutor de tareas* y la *enseñanza a través de la modelación matemática*. En el diseño de *ambientes de aprendizaje* de modelación matemática, este conocimiento se caracteriza en la *relación entre los contenidos matemáticos y el contexto*, las *estrategias para la enseñanza* y el *proceso de exploración del medio*.

Palabras clave: modelación matemática, Educación Primaria, conocimiento especializado del profesor.

Abstract

This document presents an investigation that inquires into the characteristics of the specialized knowledge of a group of teachers who teach mathematics in Primary Education through mathematical modelling. The analyzes arose from the investigative process carried out within the framework of the Master's Degree in Education, Mathematics Education line, of the University of Antioquia. On the research were used as conceptual references (i) mathematical modelling in Primary Education, its different understandings in the literature, its trends in research in Mathematics Education and the types of mathematical modelling *tasks* that are carried out in primary classrooms and (ii) the model of *mathematics' teacher specialized knowledge* (MTKS), where the subdomains of knowledge of the topics (KoT), knowledge of mathematical practice (KMP) and knowledge of mathematics teaching (KMT) were emphasized. These subdomains offered an opportunity to inquire about aspects of teachers' knowledge that are gained when teaching through mathematical modelling. Teachers participated in a continuous training course in which some of the characteristics of mathematical modelling were considered, such as the types of *tasks* and the environments proposed in the Primary school grades. The research participants were 12 teachers who teach mathematics in Primary Education, in both public and private Educational Institutions in the city of Medellín. A qualitative methodology was followed and the information originated from participant observation and the analysis of the documents created by the teachers. The analysis of this information was carried out through a thematic analysis and a content analysis. The results indicated that, both in carrying out *learning environments* and mathematical modelling *tasks*, as well as in carrying out lesson plans with mathematical modelling, teachers who teach mathematics in Primary Education have their own specialized knowledge. This specialized knowledge was characterized in mathematical practice and in the design of mathematical modelling *learning environments*. As a mathematical practice, knowledge is characterized in mathematical modelling by the relationship with the context and reasoning when developing *tasks*. Thus, knowledge is categorized there in the *modes of production of the teacher*, the *teacher as a solver of tasks* and *teaching through mathematical modelling*. In the design of mathematical modelling *learning environments*, this knowledge is characterized in *the relationship between mathematical content and the context*, *teaching strategies*, and *the process of exploring the environment*.

Keywords: mathematical modelling, Primary Education, Teacher Specialized Knowledge.

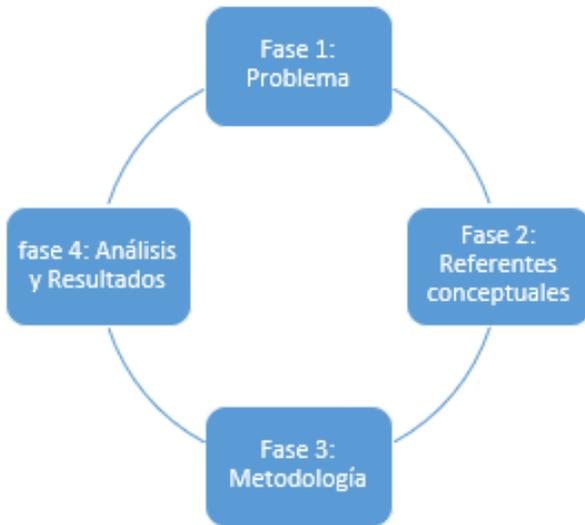
Introducción

Este documento reporta un proceso de investigación que se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En esta investigación se caracterizó el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*-MTSK (Siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática.

El proceso investigativo se desarrolló en cuatro fases de investigación (**Figura 1**). En la primera fase, se retomaron elementos empíricos y teóricos para consolidar el problema de investigación. El desarrollo de este problema llevó a la segunda fase, en la cual se conceptualizó la modelación matemática en Educación Primaria y el modelo MTSK como sustento de la investigación. Los dos elementos anteriores permitieron proponer, en la tercera fase, el desarrollo de la metodología, en la que, en vínculo con el referente conceptual, se propuso un escenario de formación continua para profesores. Finalmente, en la cuarta fase, se realizaron los análisis del proceso llevado a cabo y se caracterizó el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Las fases descritas antes no acontecieron de manera lineal y fueron un proceso de ir y venir para depurar y refinar las ideas.

Figura 1

Fases de investigación.



Fuente: elaboración propia.

Este documento de reporte de investigación se presenta en un formato *multipaper*, el cual es un diseño alternativo para la presentación de disertaciones y tesis que se ha adoptado en diferentes áreas y difiere del formato tradicional en su estructura y organización. Según Parra-Zapata (2015), el formato *multipaper* tiene varias ventajas respecto al formato tradicional de los trabajos de grado, entre ellas se encuentra la formación de los investigadores en prácticas propias de la comunidad científica; además, ofrece una mayor visibilidad de los resultados, pues el público que tiene acceso a los artículos es más amplio que el público que tiene acceso a las tesis en su diseño convencional. Los trabajos en formato *multipaper* pueden realizarse a través de varias estructuras. Al respecto, Barbosa (2015) indica el desarrollo de habilidades por parte del estudiante de maestría que se le requerirán más tarde como investigador, lo que ofrece al estudiante un trabajo anticipado de cómo hacer algo que es propio de los participantes de la comunidad científica, el autor propone la siguiente estructura de presentación: Capítulo I, donde se presentan los fundamentos teóricos, metodológicos y el problema de investigación a abordar; Capítulo II, donde

se presentan los artículos que muestran los resultados de la investigación; Capítulo III, donde se presentan las consideraciones finales, conclusiones y alcances de la investigación; y por último, el Capítulo IV, donde se presentan los anexos de la investigación. Al final de cada capítulo se presentan las referencias respectivas. Es importante aclarar que el formato *multipaper* no condiciona el desarrollo de la investigación, pues esta se desarrolla en el sentido convencional, buscando una correspondencia entre el problema, el marco/referente teórico o conceptual y la metodología. Este formato, reorganiza la manera de presentación del informe, en la cual, cada objetivo de la investigación se logra de manera autónoma, pero en interrelación con la investigación como un todo.

De acuerdo con lo anterior, este documento presenta una estructura de tres capítulos (**Figura 2**). En el primer capítulo, se contextualiza el problema de investigación a partir de las necesidades de los profesores, observadas en cursos de formación continua y de una revisión de la literatura en el campo de la modelación matemática en Educación Primaria y el Modelo del MTSK. Con base en estos dos aspectos se fundamenta el problema de investigación que orientó el desarrollo de esta investigación. Se presenta el referente conceptual que soporta los sustentos teóricos que permiten darle respuesta a la pregunta de investigación. Luego se describe la metodología que orientó el proceso investigativo.

Figura 2

Estructura del reporte de investigación.



Fuente: elaboración propia.

En el segundo capítulo se presentan dos artículos, cada uno de ellos muestra de manera independiente los resultados de cada objetivo de la investigación. Por tanto, retoma los aspectos conceptuales y metodológicos de todo el estudio, guarda coherencia interna y busca la articulación con el resto del estudio. En correspondencia con ello, se incluyen los resultados de la investigación en relación con los referentes conceptuales.

El objetivo del primer artículo es identificar cuál es el conocimiento especializado de la práctica matemática que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática. La finalidad del segundo artículo es describir el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria. Se presentan los dos artículos en un formato que sigue estándares de publicación de revistas científicas del área. Se

espera que estos dos artículos sean presentados a revistas para que, en caso de ser posible, sean publicados luego de la sustentación final de la investigación. Cada artículo tiene la siguiente estructura: resumen, introducción, referente conceptual, metodología, resultados, conclusiones y referencias, con los respectivos ajustes que se requieren en la denominación de estas secciones en cada artículo.

Dadas las características de la estructura de los artículos son inevitables, en algunos apartados, repeticiones de partes de la investigación, como la revisión de la literatura, la metodología y el contexto. Esto se hizo cuidando la manera de referenciar y evitando el autoplagio.

En el tercer capítulo se presentan las consideraciones finales de la investigación. Se utilizan los resultados de cada artículo para dar respuesta a la pregunta de investigación *¿Cuáles son las características del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática?* En este capítulo se sintetizan las ideas, se retoman los objetivos y las discusiones de los artículos presentados, se discuten las conclusiones del análisis de la información y se presentan algunas de las implicaciones de los hallazgos de la investigación en el ámbito de la modelación matemática y del MTSK en Educación Primaria.

Al final del documento se presentan, en una sección adicional, los anexos que proporcionan información extra acerca del tema de estudio.

Las referencias bibliográficas se incluyen al interior de cada capítulo.

CAPÍTULO I

La investigación: problema, referente conceptual y metodología

En este capítulo se presentan tres apartados, el problema de investigación, el referente conceptual y la metodología. Finalmente, las referencias bibliográficas que los apoyan.

En el primer apartado se formula el problema de investigación que considera tres elementos. En primer lugar, se describen las necesidades de formación de profesores de primaria que enseñan matemáticas, las cuales sustentan de manera empírica la investigación. En segundo lugar, se considera cómo la enseñanza a través de la modelación matemática en Educación Primaria podría contribuir a dar respuesta a esas necesidades. En tercer lugar, algunos elementos del modelo del MTSK que dan cuenta de conocimientos propios al enseñar con modelación matemática. Los dos últimos elementos constituyen los antecedentes a partir de los cuales se argumenta teóricamente el objeto de estudio de esta investigación.

En el segundo apartado, se profundizan los antecedentes encontrados en la literatura y se presentan como referentes conceptuales, en términos de la modelación matemática en Educación Primaria y el modelo MTSK. La modelación matemática se reconoció como estrategia metodológica y se constituyó como elemento clave en la planificación de la clase de matemáticas; a partir de ella se propiciaron experiencias y oportunidades de reflexión y análisis del rol de esta estrategia en la enseñanza de un contenido matemático. Se retomaron también elementos del modelo MTSK. Estos referentes permiten discutir acerca de la necesidad de una caracterización del MTSK para enseñar con modelación matemática en el nivel de Primaria.

En el tercer apartado, se describen la metodología que se tuvo en cuenta en el proceso investigativo. Se plantea el paradigma cualitativo según las particularidades de la investigación. También se describe el contexto en el que se llevó a cabo la generación de la información, los métodos usados y el proceso seguido para el análisis de la información.

Planteamiento del problema de investigación

El problema de investigación que se plantea surgió de la intersección entre tres elementos. El primero estuvo relacionado con observaciones realizadas en procesos formativos a profesores, a través de las cuales se pudieron identificar necesidades de formación de profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria. Estas necesidades se relacionan con una formación en la que los profesores pudieran relacionar su experiencia con su conocimiento y que, a la vez, les brindara estrategias de tipo metodológico que fueran útiles en el aula. Las necesidades de los profesores se hicieron evidentes en las evaluaciones y demás documentos remitidos a un programa de formación de profesores de la ciudad de Medellín durante los años 2018 y 2019. Detalles de este proceso se presentan más adelante.

El segundo elemento tuvo que ver con consideraciones conceptuales de la modelación matemática en Educación Primaria, la cual fue estudiada teóricamente a partir de aspectos epistemológicos y metodológicos como oportunidad para planificar las clases que imparten los profesores en el aula de Primaria. El tercer elemento fue el modelo MTSK, el cual fue útil para comprender y analizar los conocimientos observados en los profesores. El segundo y tercer elementos se presentan a continuación de manera articulada.

A partir del vínculo de estos tres componentes se sustenta el problema de investigación, para ofrecer argumentos desde la teoría que, al confrontarlos y validarlos con datos empíricos, proporcionan un nivel de comprensión acerca de las características que tiene el MTSK para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. A continuación, se desarrollarán los tres aspectos mencionados anteriormente.

Las necesidades de formación expresadas por profesores de primaria que enseñan

Matemáticas

A nivel local, desde el año 2015, la ciudad de Medellín lleva a cabo procesos de formación continua de los profesores de instituciones educativas tanto públicas como privadas, a través del programa MOVA de la Secretaría de Educación; creado como Política Pública, con el objetivo de “potenciar las capacidades reflexivas, críticas, creativas, innovadoras e investigativas de los actores responsables de la educación en la ciudad” (Acuerdo 019 del Concejo Municipal de Medellín, 2015). En este programa se ofrecen diferentes cursos de formación que son orientados por profesores de la ciudad en la figura Comisión de Servicios u otros profesores expertos o profesionales de la educación.

El programa de formación se sustenta en referentes a nivel nacional y local. A nivel nacional, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2013) centra el énfasis de la formación continua en los currículos, la profundización pedagógica y los saberes que los profesores obtienen en la práctica pedagógica de aula, en el intercambio grupal de experiencias en la escuela, donde se reflexiona e interpreta las problemáticas de la sociedad. De acuerdo con este énfasis, el propósito es propiciar ambientes que favorezcan el aprendizaje para que los profesores se apropien de los nuevos conocimientos y los vinculen con las actividades que desarrollan.

Mediante el rol de *profesora en comisión de servicios*, comisión otorgada por la Secretaría de Educación de Medellín mediante Resolución número 005509 de mayo de 2017, la autora de esta investigación participó en el diseño, ejecución y evaluación de cursos de formación continua que brinda un programa de formación a profesores de la ciudad de Medellín. La perspectiva de formación del programa plantea entre sus propósitos el fortalecimiento del análisis y la

participación crítica de los profesores, el intercambio de experiencias, metodologías y prácticas, y el reconocimiento del contexto como potenciador de la construcción de saberes.

Durante esta experiencia como profesora en comisión, se tuvieron a cargo los cursos que tenían énfasis en el saber específico de matemáticas; estos cursos eran ofrecidos mediante convocatorias abiertas y brindados por formadores contratados por el programa de formación. Se revisaron y analizaron las evaluaciones a estos cursos. Las evaluaciones realizadas fueron las de los cursos brindados en las líneas de desarrollo humano y reflexión metodológica (en matemáticas), realizadas por profesores, especialmente por profesores de Educación Primaria. Las evaluaciones se realizaron una vez finalizaban los cursos e indagaban por asuntos de la convocatoria, el contenido teórico, la estructura y las secuencias de los temas de actualidad, la metodología del profesor, los aportes y mejoras para la calidad educativa, los aportes al desarrollo profesional, aspectos administrativos y logísticos. Y se contó con el consentimiento del programa de la secretaría de educación para acceder a la información y realizar los análisis respectivos.

Entre las necesidades más recurrentes que evidencian los profesores en las evaluaciones de los cursos de formación del programa, se destaca su preocupación e interés principalmente por cuatro asuntos: (i) articular diversas áreas del conocimiento, (ii) crear estrategias metodológicas para llevar al aula, (iii) afianzar conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos y (iv) utilizar en el contexto los conocimientos matemáticos adquiridos.

La necesidad de articular diversas áreas del conocimiento se evidenció en expresiones de los profesores como “*soy profesora de Primaria, doy la mayoría de las áreas y me gustaría que den cursos en los que nos capaciten para transversalizar las matemáticas con otras áreas*”; “*que me ofrezcan cursos donde podamos ver la aplicación de las matemáticas, pues a los niños les parece aburrida la clase de matemáticas porque no le ven relación con sus vidas ni con otras áreas*”; o “*doy clases en todas las áreas en primaria, sería importante lograr unir las para*

enseñarlas y que las temáticas vistas en las materias se unifiquen y se puedan aplicar” (Documentos de evaluación de formación, 2019).

Respecto a la creación de estrategias metodológicas para llevar al aula, los profesores manifestaron expresiones como: *“me gustaría que se abrieran espacios en los que se haga énfasis en temáticas de primaria, para llevar las ideas a la escuela y aplicarlas con mis estudiantes”*; *“recibir cursos en didácticas innovadoras para enseñarle matemáticas a los niños”*; *“formación en aplicaciones de las matemáticas con TIC y en metodologías”*; *“requerimos formación constante sobre propuestas metodológicas innovadoras para trabajar con la primaria”*; *“necesitamos más espacio de ciudad y en las instituciones en los que podamos aprender nuevas estrategias para enseñar matemáticas”* (Documentos de evaluación de formación, 2019).

La necesidad de afianzar conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos, se presentó de manera recurrente durante todas las evaluaciones revisadas, en tanto que algunos de los profesores, participantes de los procesos de formación, si bien enseñaban matemáticas no eran profesores formados en esta área, donde se resalta esta necesidad en expresiones como: *“requiero profundizar los conocimientos referidos a las matemáticas, pues no es mi área de formación y solo sé lo que repaso antes de dar el tema”*; *“necesito aprender mejor los temas de matemáticas para poder enseñarlos mejor”*; *“hay temáticas del área que no manejo, entonces necesito profundizar en los temas y dominarlos muy bien”* (Documentos de evaluación de formación, 2019).

Por último, se hizo evidente la necesidad de utilizar en el contexto los conocimientos matemáticos adquiridos. Los profesores indicaban que en el proceso de enseñanza se requiere vincular, de manera directa, el contexto para promover un mayor interés en los estudiantes, lo que para ellos implica el planteamiento de situaciones problemáticas en las cuales los estudiantes se puedan involucrar activamente y puedan aplicar las matemáticas que han aprendido. Al respecto algunas expresiones fueron: *“A veces los estudiantes dicen que comprenden algo, pero no lo saben*

aplicar en un contexto, por eso necesitamos ponerles situaciones donde puedan hacer uso de los que saben”; “la idea sería que podamos partir en clase de la vida cotidiana de los estudiantes para que le vean un sentido y puedan usar más fácilmente las matemáticas” (Documentos de evaluación de formación, 2019).

De acuerdo con los asuntos evidenciados en las evaluaciones realizadas por los profesores, se pudo establecer que es necesario posibilitar diversos escenarios formativos que consideren el contexto educativo actual y los diversos aportes investigativos en el campo de las matemáticas, que les permita desarrollar habilidades para afrontar las necesidades manifestadas.

Las necesidades expresadas por los profesores se relacionan con su conocimiento del ejercicio profesional. Este conocimiento es comprendido por autores como Montero (2001) como un conjunto de información, habilidades y valores que los profesores poseen, procedentes de su participación en procesos de formación y del análisis de su experiencia práctica. En este sentido, el conocimiento no implica comprender por separado las destrezas que se circunscriben en la labor profesional, como saber matemáticas, conocer acerca del currículo y la pedagogía, sino en potencializar en conjunto estos conocimientos. Además, se asocia con asuntos prácticos que orientan el ejercicio educativo y que surge de la experiencia práctica. Por su parte Shulman (1986) propone que, para enseñar se necesita comprender aquello que se va a enseñar. A partir de esta base, entra en juego la capacidad del profesor de transformar su conocimiento del contenido en maneras que se adapten a la diversidad de los estudiantes. Según Shulman, los profesores conocen mucho más de lo que pueden articular.

Las necesidades ponen de manifiesto aspectos como el vínculo entre el contexto social y la utilización de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos; las manifestaciones de los profesores son ejemplo de sus necesidades en términos de conocimiento matemático, de las estrategias y, entre ellas, de las conexiones con situaciones prácticas en la vida de los estudiantes,

es aquí donde la modelación matemática puede cumplir un rol que posibilite atender a estas necesidades. En el siguiente apartado se ampliarán estos aspectos.

Modelación matemática en Educación Primaria y el conocimiento especializado de los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria

En la literatura internacional, la modelación matemática en Educación Primaria se plantea como una de las alternativas que tienen los profesores para implementar en sus prácticas de aula, la cual les proporciona oportunidades para colaborar con sus colegas (English, 2010), y en este sentido, se convierte en una plataforma para que se vinculen estudios y experimentos de carácter interdisciplinario en sus prácticas en el aula.

Investigaciones como las de Bahmaei (2011), English (2010) y Biembengut (2007) que realizan una descripción general de la modelación matemática como un proceso para este nivel escolar y reconocen que a partir de las experiencias con modelación matemática los estudiantes desarrollan sus habilidades de pensamiento matemático, generan herramientas conceptuales necesarias para algún propósito, construyen e interpretan situaciones matemáticas desde temprana edad, se involucran en el qué hacer científico, desarrollan competencias para modelar y aportan a la solución o posible solución de situaciones sociales comunes a todos.

Para English (2015), la modelación matemática es una “herramienta poderosa, no solo para promover la comprensión de una amplia gama de conceptos científicos por parte de los estudiantes, sino para analizar de manera crítica los problemas de su cotidianidad” (p. 102, original en inglés). La autora, además, propone que tener experiencias de modelación matemática en contextos atractivos e interdisciplinarios pueden preparar el camino para cultivar las capacidades matemáticas de los estudiantes (niños y niñas). Es así como uno de los retos para los profesores en

este nivel escolar está en reconsiderar la naturaleza de las experiencias de modelación que ofrecen a los estudiantes en los primeros años escolares.

Otros estudios internacionales indican los efectos positivos de implementar la modelación matemática en la Educación Primaria. Bonotto (2009) presenta un ejemplo con compras en el supermercado y con el modelo del horario de los trenes, donde resalta que en la Educación Primaria la modelación matemática posibilita el vínculo entre las matemáticas escolares y el mundo real, a través de situaciones relacionadas con el mundo experiencial del estudiante y en consonancia con un proceso de toma de sentido de las matemáticas escolares. Por su parte, Verschaffel (2002), en el contexto de operaciones aritméticas, enfatiza la necesidad de modelar matemáticamente en la Educación Primaria, en tanto posibilita que los estudiantes hagan uso de sus conocimientos en el mundo real y que puedan establecer juicios ante diversas situaciones por medio de las matemáticas.

Por su parte, Biembengut (2007) propone realizar un acercamiento a las experiencias de modelación matemática con los estudiantes (niños y niñas) basadas en la percepción, la comprensión y la significación, de tal manera que desde sus primeros años puedan iniciarse en la actividad científica y empiecen a explorar su mundo a través de las matemáticas. A partir de estos planteamientos, es posible colegir que uno de los retos para la formación de profesores de Educación Primaria es posibilitar espacios en los que los profesores construyan conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas y desarrollen al mismo tiempo maneras de generarlo.

Así mismo, Lesh y Doerr (2003) muestran que los estudiantes de Primaria son realmente capaces de abordar problemas de modelado y obtener resultados notables, en particular si a los profesores les gusta modelar tienen conocimiento de cómo comunicarlo en el aula y han estimulado la realización de *actividades reveladoras del pensamiento*. Estos autores resaltan también que el papel del profesor es crucial para el trabajo con la modelación matemática en el aula. De allí que se hacen fundamentales profesores preparados y convencidos para tal acción, asunto que puede

promoverse si se posibilita que los profesores experimenten y resuelvan situaciones basadas en la modelación matemática tomando ellos el rol de estudiantes.

Referente a la modelación matemática en la formación (inicial o continuada) de profesores, esta puede contribuir al fortalecimiento del conocimiento del profesor al posibilitar la relación entre una situación de su contexto social con las matemáticas. Se ha evidenciado un avance en el aprendizaje y uso de las matemáticas por parte de los estudiantes (English y Watters, 2005) y la capacidad de participar activamente en la toma de decisiones y usos con sentido de las matemáticas (Patiño et al., 2022; Parra-Zapata, 2015). En los profesores se hace posible ampliar los conceptos en cuanto a ciertos objetos matemáticos (Villa-Ochoa et al., 2022; Huincahue, 2017) y un incremento en el conocimiento en relación con la didáctica de las matemáticas (Ortiz y Mora, 2015).

A pesar de los asuntos reportados en párrafos anteriores, la literatura informa también acerca de una serie de obstáculos, limitaciones y desafíos para la implementación de la modelación matemática en el aula de la Educación Primaria y para su investigación (Borromeo-Ferri y Blum, 2013; Kaiser, 2014). Estas resaltan una gran brecha entre los asuntos teóricos de la modelación matemática y las experiencias de práctica escolar cotidianas que se realizan. Las brechas se centran principalmente en los impedimentos de los profesores para implementarla, en tanto no tienen una comprensión amplia de lo que es (Borromeo-Ferri y Blum, 2013). En las altas demandas que esta impone a los profesores, por ejemplo, cognitivas, de organización y de gestión de clase (Blum, 2011). Y en las condiciones escolares que no siempre son favorables a los profesores que buscan implementarlas (Villa-Ochoa, 2015).

Borromeo-Ferri y Blum (2013) reportan seis categorías de obstáculos: (i) obstáculos organizativos, como el tiempo necesario para tratar los problemas de modelado en el aula; (ii) obstáculos relacionados con los estudiantes, cómo las lecciones se vuelven más exigentes y menos

predecibles; (iii) obstáculos relacionados con el profesor, en tanto se necesitan competencias no matemáticas y creencias más amplias, las lecciones se vuelven más exigentes y menos predecibles, la evaluación se vuelve más compleja; (iv) obstáculos relacionados con el material o situaciones de modelación para este nivel; (v) obstáculos sistémicos, como expectativas de los padres, asociaciones científicas y otros grupos de presión, o regulaciones en los exámenes; (vi) obstáculos relacionados con la investigación, al preguntarse si existen resultados empíricos fiables como base para la enseñanza de la modelación matemática.

Los párrafos anteriores dejan en evidencia aspectos relacionados con las ventajas y los desafíos de implementar la modelación matemática en el aula. Y enuncian que, para llevarla al aula, los profesores deben tener un conocimiento de ella, de qué es, cómo hacer modelación y cómo enseñar con modelación. En este sentido se torna importante indagar con relación a los conocimientos y competencias de los profesores al hacer y enseñar con modelación matemática, que les posibilite acudir a ella para el desarrollo de sus clases.

El interés por identificar las características del conocimiento de los profesores de matemáticas, es un aspecto que tiene vigencia en la investigación en Educación Matemática desde hace más de tres décadas. Es así como en la literatura se reconocen caracterizaciones al respecto como el desarrollo del conocimiento en la enseñanza (*Knowledge Growth in Teaching*) (Shulman, 1986), el contenido del conocimiento para enseñanza de matemáticas (*Content Knowledge for Teaching of Mathematics*) (Ball et al., 2008) y el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas-MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge)* (Carrillo et al., 2013), entre otros.

El desarrollo del conocimiento en la enseñanza fue descrito por Shulman (1986) por medio de siete elementos: (i) conocimiento del contenido (SMK, siglas de Subject Matter Knowledge), (ii) conocimiento del currículo (CUK, siglas de Curricular Knowledge), (iii) conocimiento

pedagógico del contenido (PCK, siglas de Pedagogical Content Knowledge), (iv) conocimiento pedagógico general (GPK, siglas de General Pedagogical Knowledge), (v) conocimiento de los estudiantes (KL, siglas de Knowledge of Learners), (vi) conocimiento del contexto (CK, siglas de Context Knowledge), y (vii) el conocimiento de los valores, propósitos y normas de la educación (VAK, siglas de Values Knowledge).

La investigación realizada por Shulman centra la atención en el estudio del conocimiento del profesor con relación a la enseñanza del contenido de la asignatura. Shulman propuso que la categoría PCK es la que distinguía al pedagogo del especialista en el contenido, ya que este era el conocimiento específico formado en la intersección del contenido y la pedagogía. Este conocimiento, según Shulman (1986), implica la comprensión de cómo determinados temas o problemas del contenido a enseñar se organizan, representan y adaptan a los diversos intereses y habilidades de los estudiantes.

La comprensión del PCK implica un proceso de identificación de rasgos particulares que lo diferencian frente al conocimiento pedagógico general y al conocimiento matemático como tal. Shulman (1986) plantea en este sentido, que conviene especificar otros procesos que se producen y que tienen que ver fundamentalmente con la transformación del contenido en materia enseñable. La perspectiva de Shulman es referencia base en la mayoría de los trabajos relacionados con el conocimiento del profesor y considera las pretensiones de la materia que se enseña, las valoraciones que se hacen del currículo, las estrategias (uso de analogías, ejemplificación, explicaciones, demostraciones) de enseñanza, así como los avances y las dificultades comprensivas de los estudiantes.

Años más tarde Ball et al. (2008), en su propuesta de modelo de contenido del conocimiento para enseñanza de matemáticas (MKT, de sus siglas en inglés), definen seis subdominios diferentes: (i) conocimiento común del contenido (CCK, siglas de Common Content Knowledge),

(ii) conocimiento especializado del contenido (SCK, siglas de Specialized Content Knowledge), (iii) conocimiento del horizonte (Horizon Content Knowledge), (iv) conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS, siglas de Knowledge of Content and Students), (v) conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT, siglas de Knowledge of Content and Teaching) y (vi) conocimiento del contenido y el currículo (Knowledge of content and curriculum).

Los autores realizan una distinción entre el conocimiento común del contenido (CCK) y el conocimiento especializado del contenido (SCK), el primero se refiere a los conocimientos requeridos para resolver problemas matemáticos, que un matemático, un ingeniero o un sujeto con alguna preparación en matemáticas podría resolver. El segundo se refiere al conocimiento del profesor, que lo faculta para enseñar y para orientar la resolución de problemas matemáticos. Este incluye: un ordenamiento de las secuencias con las cuales podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico, el conocimiento de los errores y dificultades comunes de los estudiantes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona tal comprensión.

El modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, siglas de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo et al., 2013), brinda una comprensión de qué conoce el profesor de matemáticas, cómo conoce, qué le posibilita dicho conocimiento y qué necesita. Este modelo tiene dos dominios del conocimiento, cada uno de los cuales tiene tres subdominios y un dominio de las creencias, los cuales son: (i) el dominio del conocimiento matemático (MK, siglas de Mathematical Knowledge), (a) subdominio de conocimiento de los temas matemáticos (KoT, siglas de Knowledge of Topics), (b) subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, siglas de Knowledge of the Structure of Mathematics), (c) subdominio conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM, siglas de Knowledge of Practices in Mathematics), (ii) dominio del conocimiento pedagógico del contenido (PCK, siglas de

Pedagogical Content Knowledge), (*a*) subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, siglas de Knowledge of Mathematics Teaching), (*b*) subdominio de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, siglas de Knowledge of Features of Learning Mathematics), (*c*) subdominio de conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, siglas de Knowledge of Mathematics Learning Standards) y el (*iii*) dominio de las creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Beliefs on Maths and Beliefs On Maths Teaching on Learnig).

Para el caso de esta investigación, el modelo MTSK proporciona un sustento a partir del cual caracterizar los conocimientos de los profesores que enseñan matemáticas para enseñar con modelación matemática en Educación Primaria, este modelo se ampliará más adelante en el apartado del referente conceptual.

En esta investigación se propone que los aspectos de la modelación matemática en Educación Primaria relacionados con el MTSK están determinados, entre otros, por el conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En cuanto al conocimiento del aprendizaje de los estudiantes, este considera pues es necesario que el profesor de Educación Primaria reconozca la manera cómo aprenden los estudiantes cuando se enfrentan a experiencias de modelación matemática. Al construir sus modelos, ellos organizan, estructuran, visualizan y representan sus datos. La modelación matemática también incluye los componentes fundamentales del razonamiento inferencial (English, 2010) y los profesores deben ser conscientes de esos procesos mentales de sus estudiantes para promover su desarrollo.

Por su parte, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, se considera pues el profesor debe tener en cuenta aspectos como el contexto, el tipo de experiencias que le propone a los estudiantes (niños y niñas), y la naturaleza de las experiencias de modelación que se les ofrece.

Y el conocimiento de la práctica matemática, en tanto que los profesores de Educación Primaria deben tener claro que la modelación matemática es una manera de hacer matemáticas (Borromeo-Ferri y Blum, 2013) y que por medio de experiencias de modelación matemática pueden promover en sus estudiantes la comprensión de una amplia gama de conceptos, así como la crítica para analizar problemas en su cotidianidad.

La relación de la modelación matemática con el conocimiento, estudiada a través de los dominios y subdominios del MTSK, ofrecería elementos teóricos que permitan comprender la modelación matemática en Educación Primaria, no solo como una estrategia para la enseñanza de las matemáticas sino, también, como un componente mismo del conocimiento matemático que el profesor debería tener.

Así pues, se reconoce la necesidad de espacios en los que los profesores tengan experiencias con significado para ellos y para sus estudiantes, pero es claro que esos espacios deben tener en cuenta el nivel escolar en el que los profesores se desempeñan y sus relaciones con las matemáticas. A partir de los insumos anteriores se presenta a continuación el problema de investigación que fue abordado.

Problema de investigación

Con base en los planteamientos anteriores, el problema del que se ocupó esta investigación parte de una experiencia con formación continua de profesores y de las necesidades de formación allí expuestas por parte de los profesores de Educación Primaria que enseñan matemáticas, el interés estuvo en caracterizar el MTSK para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Esta caracterización ofrece elementos particulares como posibilidades de atención a las necesidades manifiestas.

Es así como esta investigación busca respuestas a la pregunta *¿Cuáles son las características del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática?* En correspondencia con la pregunta se propone como objetivo general: *caracterizar el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática.* Y como objetivos específicos: (i) identificar cuál es el conocimiento especializado de la práctica matemática que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática y (ii) describir el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria. Estos objetivos específicos se desarrollan en cada uno los artículos presentados.

Referente conceptual

En este apartado se presentan elementos generales del referente conceptual que da sustento a esta investigación. Este referente se compone de la conjunción entre la modelación matemática en la Educación Primaria y el modelo MTSK. Al interior de cada artículo se retoman insumos de lo aquí expuesto y se amplían otros elementos según el objetivo de cada uno.

La Modelación Matemática en Educación Primaria

En la Educación Matemática, autores como Blum et al. (2007), Kaiser y Sriraman (2006), entre otros, se han dedicado a investigar en torno a la modelación matemática. La creciente comunidad de investigadores, la conformación de reuniones periódicas y la cantidad de artículos y revistas especializadas son evidencia del creciente interés por consolidarla como dominio de investigación en esta disciplina.

Según Villa-Ochoa et al. (2022), la modelación matemática se asume en la Educación Matemática como un dominio de investigación con diversas intenciones, propósitos y perspectivas teóricas. Cada una de estas intenciones y perspectivas teóricas pueden determinar diferentes tipos de tareas y distintas maneras de implementar la modelación en el cotidiano escolar. Para los profesores, la modelación se convierte, entre otras cosas, en una oportunidad para aplicar matemática y mostrar su utilidad a los estudiantes. Estos elementos se hacen presentes en los diferentes niveles escolares.

Según investigaciones reportadas con relación a la modelación en la Educación Matemática, Villa-Ochoa (2013) mostró una diferenciación en la manera de hacer modelación cuando se tienen diferentes intenciones de fondo. Así, se pueden identificar concepciones diversas, que en algunos casos comparten elementos comunes, pero que presentan diferencias significativas en los focos y objetos de la investigación. Lo anterior permite ampliar la comprensión alrededor de la modelación matemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que los educadores matemáticos reconozcan diferentes maneras de actuar en el aula con la modelación matemática.

El autor plantea que la modelación matemática puede concebirse de distintas maneras, entre ellas: como una estrategia de los seres humanos para la explicación y producción del conocimiento, y también para el aprendizaje; como una herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas; como una competencia y una herramienta para desarrollar competencias matemáticas; y como una herramienta para posicionarse de manera crítica frente a las demandas sociales y democráticas, entre otros. Cada una de estas acepciones tiene implicaciones en las diferentes maneras de actuar al interior del aula (Villa-Ochoa, 2013).

Investigaciones como las realizadas por Ocampo-Arenas (2020); Borromeo-Ferri y Blum (2013); Parra-Zapata (2015); Dindyal (2010); Biembengut (2007) e English y Watters (2005), ponen especial interés en las experiencias con modelación matemática en los primeros grados de

escolaridad. Al respecto, centran su atención en reconocer los beneficios que la modelación matemática brinda a los estudiantes, así como en identificar las tendencias para hacer modelación matemática en el aula de Primaria, que se evidencian en la literatura y en la construcción de modelos matemáticos de diferentes tipos sobre las situaciones reales por parte de los estudiantes. De acuerdo con esto, es necesario que los profesores incorporen la modelación matemática en sus clases, sin embargo, para ello su conocimiento debe tener unas características particulares que le permitan enseñar con modelación matemática.

Es así como a partir de los trabajos anteriores se deduce y propone que una de las oportunidades que brinda la Modelación Matemática a los profesores es el desarrollo de su capacidad de relacionar un contenido matemático escolar con el contexto del estudiante, no para mostrar una aplicación, sino para que ese contenido tenga para el estudiante un sentido y construya una visión de la utilidad de las matemáticas. Así pues, analizar el tipo de conocimiento que el profesor desarrolla cuando realiza actividades de modelación matemática, genera un espacio de reflexión en la construcción del conocimiento matemático que le permite conectar el contexto con las matemáticas. De este modo ayuda a percibir que las matemáticas escolares pueden utilizarse para comprender, describir e interpretar la realidad.

Dado que los estudiantes, a temprana edad, constantemente, se hacen preguntas en torno a cuestiones que tienen a su alcance (Biembengut, 2007), la modelación matemática en Educación Primaria posibilita algunas respuestas a tales preguntas, en vista de que posibilita la construcción y la interpretación de situaciones matemáticas y brinda la posibilidad de participar e involucrarse en aspectos científicos o problemáticos de la cotidianidad. En estas situaciones, los estudiantes observan, experimentan, explican, comprenden, indagan, representan un problema y validan con las matemáticas los fenómenos a los que ellos se enfrentan (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; English, 2009; Biembengut, 2007; English y Watters, 2005).

En línea con lo anterior, el trabajo con la modelación matemática en el aula de Primaria, permite que los estudiantes avancen en la construcción de conceptos matemáticos a partir del vínculo con situaciones reales en las que se prioriza el análisis, la exploración, la comprensión y la contextualización de situaciones que les son cercanas. Así, la modelación matemática conlleva al desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes, que tienen que ver con el razonamiento, la interpretación, la argumentación y la representación de ideas, con el fin de buscar soluciones a un fenómeno que les resulte problemático o que requiera ser estudiado para plantear posibles soluciones (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Bahmaei, 2013).

Ahora, frente al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, algunas investigaciones reconocen la modelación matemática en Educación Primaria como una posibilidad que se le ofrece a los profesores para que utilicen estrategias que lleven a los estudiantes a construir conceptos matemáticos, a través del análisis, la exploración, la comprensión y la contextualización (Borromeo-Ferri y Blum, 2013; Parra-Zapata, 2015; Bahmaei, 2013). En este sentido, el profesor se convierte en un promotor de diversos ambientes en los cuales se estudian fenómenos que permiten generar preguntas, proponer conjeturas y utilizar las matemáticas para solucionar problemáticas cotidianas.

Se reporta también la importancia del papel de los estudiantes al hacer modelación matemática en la Educación Primaria, pues se posibilita que desde temprana edad negocien, discutan, escuchen a los demás y respeten sus ideas, y, por ende, que sean sujetos capaces de producir matemáticas críticamente en términos de lo que aprenden en medio del estudio de fenómenos (Borromeo-Ferri y Blum, 2013; Patiño y Galeano, 2019; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022). Es así como la modelación matemática en este nivel escolar alude a la creatividad y las vivencias de los estudiantes (niños y niñas) y se conjugan para resolver las problemáticas presentes en el aula.

La inclusión de la modelación matemática en Educación Primaria permite, también, la discusión e indagación de ideas que surgen del contexto en el cual se desenvuelven los sujetos participantes, donde el estudiante toma una postura crítica respecto a la comprensión y la transformación de su sociedad. Es decir, la modelación matemática en el aula de Primaria permite trascender las prácticas escolares centradas en la ejercitación, para dar sentido a los procedimientos y los conceptos como herramientas para ejercer la ciudadanía, la participación democrática y reconocer los roles que tienen las matemáticas en la sociedad, en las demás ciencias y en los contextos y situaciones en las cuales tiene lugar (Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022).

De acuerdo con los elementos anteriores, en esta investigación, se asume la modelación matemática como un *ambiente de aprendizaje* (Barbosa, 2001) en el que se *matematiza la realidad* (Parra-Zapata, 2015), por medio del desarrollo de *tareas* (Villa-Ochoa et al., 2017). A continuación, se desarrollan estos tres elementos.

Como *ambiente de aprendizaje*, la modelación matemática es un escenario en el cual los estudiantes investigan, por medio de las matemáticas, situaciones que surgen en la realidad. Y posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en la práctica educativa de los profesores en formación (Parra-Zapata, 2015; Barbosa, 2001). En esta perspectiva, el conocimiento matemático va más allá de la ejercitación de algoritmos y se centra en su aplicación y en cómo, a partir de su uso, se puede dar una solución a una problemática de la vida cotidiana, en donde además de lo matemático surgen conocimientos no matemáticos (Villa-Ochoa y Berrio, 2015).

La modelación matemática, vista como un *ambiente de aprendizaje* que se desarrolla a partir de una tarea, propicia la participación de los profesores y estudiantes (Biembengut, 2019; Parra-Zapata, 2015) y genera el planteamiento de preguntas, mediaciones de los discursos, trabajo en

equipo, argumentaciones, proposición de ideas y conjeturas de las mismas. Dentro de esta mirada de la modelación matemática, los sujetos inmersos en el ambiente identifican un fenómeno a ser estudiado y se plantean ideas que en algunos casos llega a convertirse en un modelo que pretende la comprensión del fenómeno mencionado y la búsqueda de posibles soluciones al mismo fenómeno (Ocampo-Arenas, 2020; Patiño y Galeano, 2019; Biembengut, 2017; English, 2015; Parra-Zapata, 2015).

Por su parte, la modelación matemática en Educación Primaria, vista como *matematización de la realidad*, se refiere a un proceso situado que va más allá de atravesar por un conjunto de ciclos y de la construcción de sistemas consistentes de ecuaciones y representaciones. Esta *matematización de la realidad*, se presenta en Parra-Zapata (2015) como un componente particular de la modelación en Educación Primaria, que obedece a un proceso de investigación científica que se relaciona con observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Este proceso no se reduce a la traducción matemática, como suelen presentarse las tareas contextualizadas en los libros de texto, sino que involucra procesos que se llevan a cabo para lograr algunos desarrollos matemáticos, máxime si se tiene en cuenta que matematizar no implica solamente cuantificar, ni el número es el referente de la matematización.

Al ser vista la modelación matemática como *matematización de la realidad*, esta se centra en el desarrollo de un interés y sensibilidad por la realidad circundante, que permite, entre otras acciones, la problematización y el cuestionamiento de asuntos inmersos en la situación y que posibilita reconocer el uso, alcance y limitaciones de los modelos en contextos particulares. En esta comprensión la modelación permite estudiar fenómenos de la vida cotidiana de los estudiantes, promueve la comunicación y la toma de decisiones en medio del trabajo en equipo y retoma aspectos matemáticos y de otras áreas del conocimiento, para así propiciar predicciones de posibles soluciones (Parra-Zapata, 2015).

Para dar cuenta de los propósitos anteriores, como *ambiente de aprendizaje* y como *matematización de la realidad*, se requieren diversas acciones de modelación matemática en el aula. Para alcanzar este propósito, se establece una comprensión de las *tareas* de modelación “como un conjunto de textos, enunciados, situaciones, orientaciones o indicaciones que se organizan para ‘dar vida’ a la modelación en la cotidianidad escolar” (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 222). Frente a ello, los autores identificaron cuatro tipos de *tareas* para desarrollar la modelación matemática. Estos tipos de *tareas* son: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (iii) modelación a través de proyecto, y (iv) uso y análisis de modelos. La caracterización realizada por los autores permite identificar el contexto y la noción de realidad que ofrece cada enunciado, el propósito orientado a la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de habilidades o competencias, así como los alcances y limitaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con esta clasificación los autores proporcionan insumos para tomar decisiones en la implementación de la modelación tanto en el ámbito escolar como en la investigación.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo del MTSK es el modelo teórico que se ha adoptado en esta investigación. Esta decisión se fundamenta en que en este modelo, la modelación matemática se ve de una manera transversal en varios de los dominios y subdominios del conocimiento; en el conocimiento de los temas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, así como en el conocimiento de la práctica matemática.

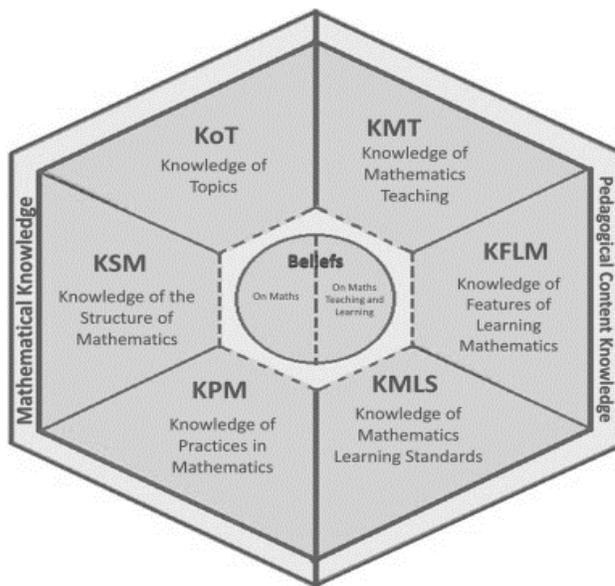
El modelo MTSK fue inicialmente planteado por Carrillo et al. (2013). Los autores se basan en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. Este modelo pone énfasis en el carácter

especializado de dicho conocimiento y abarca el conocimiento que es útil y necesario para el profesor de matemáticas y que tiene relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El MTSK es un modelo teórico que persigue propósitos analíticos. En esta perspectiva, no se pretende reflejar cómo se organiza el conocimiento del profesor de matemáticas, sino que se proporciona una herramienta útil para investigar acerca de él. El modelo permite analizar el conocimiento del profesor a través de diferentes componentes, esto se hace con el fin de comprenderlo, pero no olvida el carácter sintético e integrado del mismo. Otros aspectos más detallados de este modelo se presentarán en el segundo capítulo de este documento con el fin de que en cada artículo se logre profundizar y usarlos como herramientas analíticas para consecución de cada objetivo específico.

En el modelo MTSK, el conocimiento se divide en dos dominios de conocimiento, cada uno de ellos consta de tres subdominios (**Figura 3**). En este modelo se conserva la dicotomía establecida por Shulman y refinada por Ball y colaboradores entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido, es renombrado el primero como conocimiento matemático (MK). Asimismo, se incluye en el modelo el dominio de las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento (Carrillo et al., 2013; Carrillo-Yañez et al., 2018).

Figura 3
Modelo MTSK.



Fuente: Carrillo-Yañez et al. (2018), p. 6.

El dominio llamado conocimiento matemático (MK, siglas de Mathematical Knowledge) es el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar. Este dominio se compone de tres subdominios: (i) conocimiento de los temas matemáticos, (ii) conocimiento de la estructura de las matemáticas y (iii) conocimiento de las prácticas en matemáticas.

El conocimiento de los temas matemáticos (KoT, siglas de Knowledge of Topics) se comprende como un conocimiento fundamentado y profundo de los contenidos matemáticos. Este incluye aspectos fenomenológicos y de aplicaciones, significados, definiciones, propiedades, registros de representación, procedimientos y ejemplos que caracterizan aspectos del tema matemático abordado: Se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas que aparece en textos matemáticos.

El conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, siglas de Knowledge of the Structure of Mathematics), tiene que ver con el conocimiento de conexiones entre contenidos posteriores y anteriores que incluye el cómo se conectan internamente las matemáticas. Así, alude al conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos, ya sea del curso que imparte o con contenidos de otros cursos o niveles educativos, lo que lleva a conexiones entre temas matemáticos.

El conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM, siglas de Knowledge of Practices in Mathematics) como un conocimiento de las maneras de proceder hacia los resultados matemáticos, asociado al modo en que se explora y genera conocimiento por las matemáticas y al modo en que se establecen relaciones a partir de lo argumentativo, el razonamiento o la generalización. Incluye la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y usos del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático (como la modelación) y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. En este subdominio se deduce que existe un reconocimiento del modelar, ya que la naturaleza de la actividad de modelación es también observada en la práctica de quién hace matemática.

El dominio llamado conocimiento pedagógico del contenido (PCK, siglas de Pedagogical Content Knowledge) es un dominio característico del desarrollo profesional del profesor de matemáticas, fecundado por la necesidad de las prácticas de enseñanza que posee naturalmente la profesión y su relación con la disciplina. Está dividido en tres subdominios de conocimiento: *(i)* conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, *(ii)* conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y *(iii)* conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, siglas de Knowledge of Mathematics Teaching) integra el conocimiento de las matemáticas y su enseñanza. Sin ser conocimiento matemático en sí, el profesor requiere de este último para poder desarrollarlo. Es el conocimiento que condiciona el aprendizaje, donde se incluyen recursos, materiales, modos de representar el contenido o ejemplos adecuados según el propósito que se persiga.

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, siglas de Knowledge of Features of Learning Mathematics) es el conocimiento de cómo se aprende un contenido matemático. Está basado en las características del aprendizaje inherentes al conocimiento matemático. En este caso, no son consideradas las características del estudiante en sí mismo, sino las características del aprendizaje derivadas de su interacción con el conocimiento matemático.

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, siglas de Knowledge of Mathematics Learning Standards) incluye el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares. Este no es tan solo el conocimiento de los materiales y programas que son una herramienta para la labor del profesor de matemáticas, sino que incluye niveles de capacidad de estudiantes para entender, construir y saber matemáticas en un determinado momento escolar, lo que puede ser información extraída de fuentes de estudio o no.

El MTSK incluye las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Se considera que estas creencias permean el conocimiento que los profesores desarrollan acerca del contenido; por ello, están representadas en el centro del modelo para subrayar la reciprocidad entre las creencias y los dominios del conocimiento. Así, en el modelo se indica que la práctica del profesor en el aula está profundamente influida por lo que puede denominarse una filosofía de las matemáticas, es decir, un conjunto más o menos coherente de concepciones y creencias sobre las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se aplican (Montes y Carrillo, 2017, p. 119).

Las creencias y concepciones se tornan como un elemento que permea, condiciona y complementa el conocimiento del profesor, tanto en la forma y el contenido de este, como en el uso que da el profesor a dicho conocimiento. Las creencias engloban “las verdades incontrovertibles sostenidas por cada individuo, derivadas de la experiencia o de la fantasía, con una fuerte componente afectiva y evaluativa” (Montes y Carrillo, 2017, p. 119). Por otro lado, las concepciones son entendidas como “las estructuras subyacentes a los conceptos, teniendo una naturaleza esencialmente cognitiva” (Montes y Carrillo, 2017, p. 119). En el caso del modelo MTSK, las creencias y las concepciones son relativas a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, así como a la naturaleza de las matemáticas o a conceptos concretos.

De acuerdo con Carrillo et al. (2013) y Carrillo-Yañez et al. (2018), el carácter especializado del conocimiento del profesor se encuentra en la integración y las relaciones entre conocimientos de todos los dominios y subdominios anteriores en distintas dimensiones, lo que deriva de su labor como profesor, siendo el resultado de esta interacción de distintas maneras de conocer el contenido matemático y no del conocimiento del contenido en sí como una parte del dominio de conocimiento matemático necesario para la enseñanza.

Metodología

A continuación, se presentan el paradigma de investigación, así como el proceso de implementación metodológica, la producción conjunta de registros e información, los métodos de análisis de la información y las consideraciones éticas de la investigación.

Paradigma de investigación cualitativo

En la presente investigación se asumió el paradigma de investigación cualitativo, el cual permitió alcanzar el objetivo de caracterizar el *conocimiento especializado del profesor* para la

enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Este paradigma permitió centrarse en información que fue más allá de la cuantificación, es decir, describir las acciones, los discursos y las producciones escritas de los profesores cuando participaron de un espacio de formación acerca de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática.

De acuerdo con Denzin y Lincoln (2000), en la investigación cualitativa se da interpretación a los fenómenos de acuerdo con los conocimientos que tienen las personas implicadas. Así mismo se interpretan las manifestaciones verbales y escritas, las acciones y las reflexiones que se dieron por parte de los profesores de Educación Primaria que participaron en las sesiones del curso de formación continua.

Este paradigma fue pertinente, pues propone una manera de construcción del conocimiento, basándose en la subjetividad e intersubjetividad, en el contexto en que ocurren los fenómenos y se sirve de la descripción e interpretación para la comprensión de estos (Valles, 2003). La construcción de conocimiento en esta investigación se dio a partir de las reflexiones y comprensiones que se dieron en torno a la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación matemática en el nivel educativo de Educación Primaria.

El paradigma cualitativo involucra preguntas y procedimientos emergentes, información típicamente recopilada en el entorno de quienes participan, análisis de información que se construye inductivamente a partir de los detalles hasta los temas generales y la posibilidad de que quien investiga realice interpretaciones del significado de la información (Creswell y Creswell, 2018). Esto se evidenció en esta investigación, pues el interés primordial fue el análisis del MTSK para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Así, se realizó una interpretación de la experiencia de los profesores a través de la interacción y participación en *ambientes de aprendizaje y tareas* de modelación matemática.

Para lograr el propósito de la investigación, se ofreció y desarrolló un curso de formación de modelación matemática en Educación Primaria, más adelante se analizó y sintetizó la información en categorías descriptivas, la información obtenida a partir de las discusiones que se llevaron a cabo en las sesiones del curso de formación, así como de observaciones, asesorías, discusiones grupales y registros escritos de los profesores (lo que constituye la naturaleza de la experiencia). Finalmente, se identificaron y describieron las características del *conocimiento especializado de los profesores*, a partir de la mediación de diferentes significados aportados por ellos.

Implementación metodológica

Para el desarrollo de la implementación metodológica se contó con la participación de 12 profesores de Educación Primaria de instituciones educativas oficiales y privadas de Medellín. Todos ellos participaron de un curso de formación continua de modelación matemática en Educación Primaria, en un programa de formación continua que brindó la Secretaría de Educación de Medellín. El curso se llamó: *Enseñar matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática*.

Los cursos de formación continua brindados por el programa a los profesores de Medellín tienen una intensidad de 30 horas, los profesores asisten voluntariamente, previa inscripción mediante una convocatoria masiva. El curso se llevó a cabo bajo la modalidad de taller, en el que los profesores no tuvieron un rol pasivo ni de solo de receptores ni transmisores de conocimiento, sino que fueron constructores de experiencias que potencian y aumentan sus intereses y su conocimiento.

El curso se centra en el descubrimiento, la pregunta y la indagación, en este caso acerca de experiencias de modelación matemática en Educación Primaria, presentadas por la investigadora,

en colaboración con los asesores y con otros expertos que fueron invitados a las sesiones. Otras experiencias fueron creadas por los profesores quienes conformaron grupos para diseñar y entregar un plan de clase en el que se incluyó un *ambiente de aprendizaje* de modelación matemática que podría ser implementada en su aula.

El curso se configuró en seis sesiones de cuatro horas cada una y seis horas adicionales de asesoría. En las seis sesiones, los participantes tuvieron experiencias con *ambientes de aprendizaje* compuestos por *tareas* de modelación matemática (Villa-Ochoa et al., 2017), que estuvieron acompañadas de discusión en pequeños grupos, reflexión, participación y discusiones posteriores en plenaria.

En la primera sesión se hizo la presentación del programa de formación y del curso, posteriormente se realizó una reflexión por parte de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza en Educación Primaria, su aprendizaje y la necesidad de contar con estrategias y metodologías para su enseñanza. En la segunda sesión se realizó una tarea de modelación llamada la guía del consumidor, propuesta por Parra-Zapata (2015), en la que diseñaron una guía del consumidor para decidir qué aspectos tener en cuenta a la hora de elegir un producto. Esta *tarea* de modelación corresponde a un caso en el que quien investiga formula la situación, recoge los datos y simplifica la información (Barbosa, 2004); por su parte, los profesores participantes propusieron diferentes soluciones, al generar sus propias guías del consumidor a partir de la problematización y la investigación. El desarrollo de la tarea se acompañó de la discusión sobre la pertinencia de cada uno de los momentos propuestos y una discusión frente a lo didáctico y lo disciplinar.

En la tercera y cuarta sesión se desarrollaron dos *tareas* de modelación matemática, la primera hizo referencia al análisis de una cuenta de servicios públicos (Villa-Ochoa, 2015). Esta *tarea* es del tipo de construcción de representaciones que se enfocan principalmente en el desarrollo de estrategias de simbolización y representación de algunos fenómenos (Villa-Ochoa et al., 2017).

En el desarrollo de cada momento de la *tarea*, se priorizó la discusión por el contenido matemático implícito y la significación según el contexto de desarrollo; así como una discusión en cuanto al proceder en el aula. La segunda fue una *tarea* de análisis de modelo, en la cual los profesores reconocieron un modelo existente para el Índice de Masa Corporal (Parra-Zapata et al., 2016), se enfrentaron a la aplicación de las variables del modelo matemático, a datos de la realidad y determinaron si se ajustaba a las condiciones de la situación mediante la evaluación del mismo. Allí se centró la discusión en los requerimientos para la validación de un modelo matemático y sus posibilidades de uso y significación. Se realizó también un diálogo en torno a cómo llevar al aula este tipo de tareas y qué aspectos tener en cuenta para su desarrollo (Villa-Ochoa et al., 2022).

En la quinta sesión se analizaron cuatro *tareas* de modelación matemática. Los profesores participantes se organizaron en cuatro equipos de trabajo, al interior de cada equipo solucionaron y analizaron las posibilidades de implementación en la clase de matemáticas en Educación Primaria de una de las *tareas*. Uno de los equipos analizó la *tarea* ‘los zapatos del gigante’, la cual consistía en determinar las medidas de un gigante que pueda calzar unos zapatos cuyas medidas son dadas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). El segundo equipo analizó la *tarea* ‘Plantas vs. Zombies’ (Rangel-Iriarte, 2016) en la que se estudian las características del videojuego y se establecen, con ayuda de procedimientos matemáticos, algunas estrategias para sembrar diferentes tipos de plantas con distintas características de ataque o defensa en un jardín y así detener a la horda de zombies. Los zombies presentan diferentes atributos y habilidades. Estas *tareas* corresponden a un enunciado verbal realista y auténtico en el que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta cuantitativa que se puede resolver con la ayuda de las matemáticas (Villa-Ochoa et al., 2017).

El tercer equipo desarrolló la *tarea* ‘túneles para que pasen carros’ (Parra-Zapata y Rendón Mesa, 2016) en la que utilizaban piezas de construcción para elaborar los túneles y debían realizar

el modelo bidimensional del gráfico y los túneles, y la indicación para que otra persona construya el túnel y logre que el carro pase por él. El cuarto equipo realizó la *tarea* ‘cajas para empacar una moto’ (Rendón-Mesa, 2016) en la que construyeron, con hojas de papel, el modelo de dos cajas para empacar la moto, una donde pueda moverse libremente y otra en la que no; también se desdoblaron las cajas y se realizó su gráfica y un análisis a partir de ellas. En estas tareas se avanzó en la construcción de representaciones desde la modelación de las formas y algunos procesos de simulación.

De la segunda sesión a la quinta los profesores diseñaron planes de clase. En el marco de la estrategia de formación de la Secretaría de Educación de Medellín; estos planes se entienden como la planeación de los procedimientos y recursos que se pueden llevar a cabo en el aula para articular, integrar y construir los saberes específicos discutidos en el curso, para este caso la modelación matemática. En los planes de clase, se siguió el formato establecido por la Secretaría de Educación de Medellín, el cual se presenta en el **Anexo B**. El desarrollo de las sesiones aportó a la creación de dichos planes.

En la sexta sesión los profesores tuvieron la oportunidad de dar a conocer los planes de clase que habían diseñado, entregaron el documento con la descripción del plan de clase diseñado y obtuvieron recomendaciones frente a los mismos. En esta sesión se realizó también la evaluación y el cierre del curso de formación.

Producción conjunta de registros e información

Para el proceso de producción de la información, se utilizaron técnicas e instrumentos que, de acuerdo con los planteamientos de Aravena et al. (2006), son útiles pues permiten dar cuenta de los discursos de las personas en los que se articulan la subjetividad y el orden social. Las técnicas fueron la observación participante y el análisis de documentos, expresiones verbales y acciones.

Por su parte, los instrumentos fueron las notas de campo de la investigadora, las grabaciones de audio y video y los documentos escritos producidos por los profesores participantes.

La observación participante. Se optó por esta, ya que en el curso de formación se propició la interacción de la investigadora con los profesores participantes. Durante esta observación, la intención fue generar información que mostrara características del conocimiento de los profesores y se cumplió para ello con dos requisitos, se hizo de manera sistemática y no intrusiva.

Uno de los instrumentos para registrar esta técnica fueron las notas de campo de la investigadora. Fue necesario que fueran completas, precisas y detalladas. Dado que las notas de campo constituyen la materia prima de la investigación, se plasmaron en ellas los episodios o comportamientos que posibilitaran generar categorías, de acuerdo con el marco teórico para dar respuesta a la pregunta de investigación.

El otro instrumento con el que se registró la observación, fueron las grabaciones de audio y video que posteriormente fueron transcritas. Estas evidenciaron las conversaciones, las acciones y las discusiones generadas en el ambiente de modelación matemática.

Los documentos. Según Alves-Mazzotti y Gewandsznajder (1999), un documento es cualquier registro escrito que puede ser usado como fuente de información, que se utiliza como técnica de exploración. En esta investigación se tomaron como documentos para ser analizados, los planes de clase que los profesores participantes propusieron como producto del curso de formación en modelación matemática en Primaria. También fueron tenidos en cuenta otros documentos escritos en los cuales los profesores plasmaron sus reflexiones acerca del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, acerca de los beneficios y limitaciones de la modelación matemática en el ámbito de la Educación Primaria y acerca de las diferentes situaciones de modelación matemática trabajadas en las diferentes sesiones del curso de formación.

Método de análisis de información

Según Alves-Mazzotti y Gewandsznajder (1999), el análisis de la información se configura dentro de un proceso de reducción, focalización, organización e interpretación sobre el fenómeno que se estudia. Para dar sentido a esto, la investigación se centró en analizar las manifestaciones, verbales y escritas, las acciones que los profesores planearon realizar y las reflexiones que se dieron en las sesiones del curso de formación. Lo anterior de acuerdo con los dominios y subdominios del modelo MTSK propuesto por Carrillo et al. (2013) y a la concepción de la modelación matemática como *ambiente de aprendizaje* en el que se *matematiza la realidad* por medio del desarrollo de *tareas* (Villa-Ochoa et al., 2017; Parra-Zapata, 2015; Barbosa, 2001). Para ello se realizaron dos tipos de análisis: el análisis temático (Braun y Clarke, 2006) y el análisis de contenido (Schettini et al., 2015).

El análisis temático consistió en identificar, analizar y reportar patrones dentro de la información, relacionados con los conocimientos acerca de la modelación matemática que fueron observados en los profesores. Este se realizó a través de seis fases: (i) familiarización, (ii) codificación, (iii) desarrollo de temas, (iv) revisión, (v) definición de temas y (vi) producción del informe (Braun et al., 2019). En algunos momentos estas fases se desarrollaron de manera articulada.

El análisis de contenido es una técnica de interpretación y comprensión de textos—escritos, orales, filmados, fotográficos, discursos, documentos y transcripciones de entrevistas y observaciones, entre otros; en el que se tiene en cuenta el contexto en el que se produce tanto lo manifiesto como lo latente de los discursos (Schettini et al., 2015). En esta investigación, el análisis de contenido fue un proceso de revisión y organización de la información, en el que se generaron

las explicaciones e interpretaciones a través de descriptores relacionados con la modelación matemática y los subdominios del MTSK.

Los detalles de estos análisis se encuentran al interior de cada uno de los artículos que componen el siguiente capítulo.

Consideraciones éticas de la investigación

En esta investigación se siguieron los aspectos planteados en el código de ética en investigación de la Universidad de Antioquia (2020), los cuales se presentan en la **Figura 4**.

Figura 4
Código de ética en investigación de la Universidad de Antioquia.



Fuente: Universidad de Antioquia, 2020.

También se tomaron en cuenta las consideraciones éticas presentadas en la Declaración de Bioética y Derechos Humanos de la UNESCO (2006), a partir de la cual se extraen como principios

éticos y pautas generales para la investigación: *(i)* la validez científica; *(ii)* el respeto por la dignidad de quienes participan para evitar daños a sujetos; y *(iii)* el uso responsable de las fuentes de información.

La validez científica hace referencia al proceso mediante el cual se garantiza que los estudios propuestos son científicamente sólidos y contruidos sobre una base de conocimiento previo adecuado. Así pues, se reconocen dentro de la investigación a partir del campo de la Educación Matemática, en términos de Camargo (2021) en el proceso y en el producto. El proceso se evidencia en la información producida y los análisis realizados, que buscan la neutralidad de la información, pero sin desconocer la imposible neutralidad de la investigadora. El proceso se enmarca explícitamente en los sesgos en los que inevitablemente incurren quienes investigan. Por su parte el producto tiene la condición de ser genérico, es decir, puede aplicarse a varias situaciones porque rebasa la especificidad del caso particular y ofrecen conclusiones que van más allá de la caracterización de la situación específica (Camargo, 2021).

El respeto para la dignidad de quien participa, para evitar daños a sujetos, se refiere a la consideración de consentimientos informados y voluntarios de quienes participaron en el proceso investigativo, en este sentido, los profesores participantes estuvieron en capacidad legal para dar su consentimiento y en total libertad de escoger, sin la intervención de cualquier elemento de fuerza, fraude, engaño, coacción o algún otro factor coercitivo o coactivo y tuvieron el suficiente conocimiento y comprensión de los objetivos y características de la investigación tomando una decisión consciente de participación.

Frente a este componente Galeano (2016) expone que en la investigación cualitativa es vital proteger los derechos, los intereses, los sentimientos y la privacidad de los sujetos, las organizaciones o los grupos con los que se investiga. Así, en la presente investigación no se hizo uso de los nombres reales de los participantes, sino que se nombraron a los profesores como P1,

P2, P3, ..., Pn, con el fin de proteger su privacidad. Además, los participantes de la investigación tuvieron la oportunidad de conocer el objetivo de esta y estuvieron de acuerdo con su participación, para ello firmaron y aprobaron el consentimiento informado (**Anexo A**), el cual fue puesto en consideración por parte de la investigadora durante la primera sesión del curso.

El uso responsable de las fuentes de información se refiere al proceso de decantar la información y de emplearla para generar impacto, en ella se evaluaron características como la relevancia, la credibilidad, la temporalidad y la objetividad en vínculo directo con la validez científica (García et al., 2021).

Síntesis del capítulo

En este capítulo se expusieron las necesidades de formación de profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria. Se encontró en la modelación matemática un camino que podría contribuir a dar respuesta a esas necesidades y en el MTSK, la posibilidad de reconocer los conocimientos propios al enseñar con modelación matemática. Fue así como se presentó el referente conceptual, centrado en la modelación matemática en Educación Primaria y el modelo MTSK; ambos referentes posibilitaron asumir unas características particulares que podrían contribuir posibilidades de atención a las necesidades manifiestas. A partir del paradigma cualitativo de la investigación se propuso un curso de formación en modelación matemática para profesores que enseñan matemáticas y a partir del análisis de lo acontecido en él, fue posible caracterizar el *conocimiento especializado del profesor* para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. Este último asunto se desarrolla a continuación en los capítulos II y III.

Referencias Capítulo I

- Acuerdo N° 019 de 2015. (4 de septiembre de 2015). Por medio del cual se adopta la Política Pública de Formación de Maestros Y Maestras del Municipio De Medellín. Gaceta oficial N° 4329, 38-41.
- Alves-Mazzotti, A., y Gewandsznajder, F. (1999). O Método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. Pioneira.
- Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R. y Zúñiga J. (2006). Investigación Educativa I. Universidad Arcis.
- Bahmaei, F. (2011). Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(9), 3-13.
- Bahmaei, F. (2013). Mathematical modelling in university, advantages and challenges. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(7), 34-49.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
- Barbosa, J. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, 24, 1-15.
- Barbosa, J. (2004). *Modelagem Matemática na Sala de Aula*. En VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, Universidade federal de Pernambuco.
- Barbosa, J. (2015). Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. En B. D'Ambrósio, C. Lopes. (Eds), *Insubordinação criativa na produção científica em Educação Matemática* (pp. 347-367). Mercado das Letras.

Biembengut, M. (2007). Modelling and applications in primary education. En W. Blum, P.

Galbraith, H. Henn y M. Niss. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 451-456). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_50

Blum W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical

Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (vol 1, pp. 15-30). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in*

Mathematics Education. The 14th ICMI Study (Vol. 10). Springer.

Borromeo-Ferri, R., y Blum, W. (2013, February). *Barriers and motivations of primary teachers*

for implementing modelling in mathematics lessons. In Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.

Bonotto, C. (2009). Working towards teaching realistic mathematical modelling and problem

posing in Italian classrooms. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S.

Mukhopadhyay (Eds.). *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 297–314). Sense Publishers.

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in*

Psychology, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>.

Braun, V., Clarke, V., Hayfeld, N. y Terry, G. (2019). Thematic Analysis. En P. Liamputtong

(Ed.). *Handbook of research methods in health social sciences* (pp. 843–860). Springer

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. (2013). *Determining Specialised*

Knowledge for Mathematics Teaching. En Proceedings of Eighth CERME Congress.

Antalya, Turkey.

-
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M. y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981.
- Creswell, J. y Creswell, J. (2018) *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage.
- Denzin, N. y Lincoln. (2000). *Handbook of qualitative research*. Sage.
- Dindyal, J. (2010). Word Problems and Modelling in Primary School Mathematics. En B. Kaur y J. Dindyal (Eds.), *Mathematical Applications and Modelling* (pp. 94–111). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789814313353_0006.
- English, L y Watters, J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics education research journal*, 16(3), 58-79. <https://doi.org/10.1007/BF03217401>.
- English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM-The international journal of mathematics education*, 41(1-2), 161-181.
- English, L. (2010). Mathematical Modelling in the Primary School. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 207-214). James Cook University: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- English, L. (2015). Learning through modelling in the primary years. En N. Hoe y K. Dawn (Eds.). *Mathematical Modelling* (Vol. 8, pp. 99-124). Mathematics Education.
- Galeano, M. (2016). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Fondo editorial Universidad Eafit.
- Huinchahue, J. (2017). Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría socio epistemológica [Tesis doctoral].

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas.

Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.).

Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 396-404). Springer.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.

Lesh R. y Doerr H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En Lesh R. y Doerr H. (Eds.) *Beyond constructivism - Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

MEN, (2013). *Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política*.

Imprenta Nacional de Colombia.

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente*. Homo Sapiens.

Ocampo-Arenas, M. (2020). *Caracterización de la actividad matemática de los estudiantes de educación primaria en un ambiente de modelación matemática* [Tesis de maestría].

Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

<https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/16373>.

Ocampo-Arenas, M. y Parra-Zapata, M. (2022). Una experiencia de modelación matemática en educación primaria en un contexto de Educación Ambiental. *Uni-Pluriversidad*, 22(1), 1–16.

Parra Zapata, M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

-
- Parra-Zapata, M., Parra-Zapata, J., Ocampo-Arenas, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). El índice de masa corporal: una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92, 21-33.
- Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas En Educación*, 16(3), 1-27.
- Rangel, D. (2016). *El proceso de modelación matemática mediado por los videojuegos* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Valles, M. (2003). *Técnicas cualitativas de investigación social*. Síntesis.
- Villa-Ochoa, J. (2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. En V. Bisognin y M. Fraga Sant'Ana (Eds.). *Anais da VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática* (1-8). Centro Universitario Franciscano. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1189.5445>.
- Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16), 133-148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>.
- Villa-Ochoa, J. y Berrío, M. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. En G. Stallman, W. Blum y M. Biembengut (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241-250). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19.

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.

CAPÍTULO II

Artículos

En la investigación se caracterizó el *conocimiento especializado del profesor* para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática. En este capítulo, se presentan los resultados de la investigación en dos artículos, por lo que contienen la estructura de artículos científicos. Los dos artículos serán presentados para publicación en revistas nacionales o internacionales una vez se realice la sustentación de esta investigación e incluirán la autoría de la asesora y el asesor, pues fue un proceso de construcción y análisis colectivo.

Los artículos, que se presentan a continuación, tienen la siguiente estructura: resumen, introducción, referente conceptual, metodología, resultados, conclusiones y referencias, con los respectivos ajustes que se requieren en la denominación de estas secciones en cada artículo.

En el primer artículo se identifica cuál es conocimiento especializado de la práctica matemática que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática. En el segundo artículo se describe el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria.

Conocimiento especializado de la práctica matemática. Un estudio con profesores en un curso de modelación matemática para la Educación Primaria

Resumen. El interés por identificar las características del conocimiento de los profesores de matemáticas, es un aspecto que tiene vigencia en la investigación en Educación Matemática desde hace más de tres décadas. Es así como en la literatura se reconocen caracterizaciones al respecto. En este artículo se utiliza el análisis de contenido para identificar cuál es el conocimiento especializado de la práctica matemática, que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven *tareas* de modelación matemática. A partir del paradigma cualitativo se diseñó y se desarrolló un curso de formación de modelación matemática, en el que participaron 12 profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria. La información se recopiló en el desarrollo de dos *tareas* de modelación matemática al interior del curso y se analizó por medio del análisis de contenido. Los resultados informan que el conocimiento especializado de la práctica matemática de los profesores participantes está determinado por el contexto y por las formas de razonamiento. Así, este conocimiento tiene dos características particulares al desarrollar y proponer *tareas* de modelación matemática para el aula de Educación Primaria. Una relacionada con las habilidades para comprender e interpretar modelos matemáticos. Otra vinculada con el uso de procesos de simplificación, matematización y validación entre los modelos y la situación estudiada.

Palabras clave. modelación matemática, conocimiento especializado, práctica matemática.

Abstract. The interest in identifying the knowledge characteristics of mathematics teachers is an aspect that has been valid in Mathematics Education research for more than three decades. This is how characterizations in this regard are recognized in the literature. Content analysis is used in this paper to identify the specialized knowledge of mathematical practice that teachers who teach mathematics in Primary Education reveal when they solve mathematical modelling *tasks*. Based on the qualitative paradigm, a mathematical modelling training course was designed and developed, in which 12 teachers who teach mathematics in Primary Education participated. The information was collected in the development of two mathematical modelling *tasks* within the course and was analyzed through content analysis. The results inform that the specialized knowledge of the mathematical practice of the participating teachers is determined by the context and by the forms of reasoning. Thus, this knowledge has two particular characteristics when developing and proposing mathematical modelling *tasks* for the Primary Education classroom. One related to the abilities to understand and interpret mathematical models. Another linked to the use of simplification, mathematization and validation processes between the models and the situation studied.

Keywords. mathematical modelling, specialized knowledge, mathematical practice.

Introducción

El estudio del conocimiento de los profesores que enseñan matemáticas ha sido abordado por autores como Sullivan y Wood (2008), Hill et al. (2007), Ponte y Chapman (2006), quienes plantean distintas perspectivas a partir de las cuales se aporta evidencia empírica y teórica que permite comprender y analizar la labor del profesor como profesional de la Educación Matemática. A nivel internacional, en Educación Matemática se reconocen modelos que son referentes acerca de las caracterizaciones del conocimiento del profesor de matemática; entre ellos, el desarrollo del conocimiento en la enseñanza (Knowledge Growth in Teaching) (Shulman, 1986), el contenido del conocimiento para la enseñanza de matemáticas (Content Knowledge for Teaching of Mathematics) (Ball et al., 2008), el conocimiento didáctico matemático del profesor (Pino-Fan et al., 2015) y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas-MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo et al., 2013), entre otros.

En particular, el modelo MTSK propone el subdominio conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM, siglas de Knowledge of Practices in Mathematics) haciendo referencia a la práctica matemática. Este subdominio plantea que la práctica matemática es fundamental, puesto que analiza las maneras en las cuales el profesor comprende cómo se razona y produce en matemáticas para dar solidez a su propio conocimiento, así como para saber gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus estudiantes.

Las investigaciones acerca de la práctica matemática bajo el modelo MTSK han tomado como base de estudio aspectos ligados al cómo se piensa en matemáticas, como, por ejemplo, el conocimiento relativo a diferentes maneras de definir, argumentar, validar, justificar o demostrar en matemáticas; el conocimiento de la sintaxis matemática o el conocimiento de la modelación o matematización (Flores-Medrano y Aguilar-González, 2017).

La modelación matemática es uno de los elementos del conocimiento relativos a la práctica matemática propuestos en el subdominio. Allí, la modelación matemática es vista como una de las prácticas particulares del quehacer matemático del profesor. La modelación matemática es reconocida como una práctica (científica y matemática) y ha sido incorporada a la enseñanza de las matemáticas por la diversidad de significados que aporta (Blum et al., 1989). Sin embargo, es necesario dar cuenta de las implicaciones teóricas que conlleva su incorporación en la escuela y de los cambios que se producen en la naturaleza de las matemáticas que se aprenden (Suárez y Cordero, 2005).

La modelación matemática posibilita que los estudiantes analicen los significados, usos y propiedades de los modelos, evalúen su alcance y validez, interpreten elementos y resultados del modelo en términos de la situación real que se estudia, y lo apliquen a situaciones más allá de las matemáticas mismas (Niss y Højgaard, 2011), también se reconoce que su integración en la cotidianidad de la escuela es un desafío para los profesores (Villa-Ochoa, 2015; Niss, 2001). Estos desafíos se sustentan en la complejidad de la práctica de modelación (Niss, 2001), en el sistema de creencias de las matemáticas y su enseñanza (Kaiser y Maass, 2007) y en la manera de comprender la realidad, las necesidades de sus estudiantes y las condiciones institucionales (Villa-Ochoa, 2015).

En la Educación Primaria se encuentran investigaciones como las de Ocampo-Arenas y Parra-Zapata (2022), English (2019; 2010), Biembengut (2019; 2007), Parra-Zapata (2015) y Bahmaei (2011), que le apuntan a una descripción general del proceso de modelación matemática en este nivel escolar y reconocen que a partir de las experiencias con ella, se posibilita que los estudiantes, desde temprana edad, razonen y desarrollen habilidades de pensamiento matemático, construyan e interpreten situaciones matemáticas con una apropiación de las herramientas conceptuales. Además, le posibilita a los estudiantes involucrarse en el quehacer científico,

desarrollar competencias para modelar y aportar a la solución, o posible solución, de situaciones sociales.

De acuerdo con lo anterior, este documento busca identificar el conocimiento de la práctica matemática del profesor, relativa a la modelación matemática. En particular, se ofrece una respuesta a la pregunta *¿Cuál es el conocimiento especializado de la práctica matemática, que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática?* Para responder a esta pregunta, se analizaron dos sesiones de un curso de formación en el que participaron 12 profesores de Educación Primaria. En estas dos sesiones se propusieron dos *tareas* distintas de modelación matemática, en las cuales se pretendía que los profesores, a partir de la interpretación de una tarea inicial, realizaran procesos de simplificación, explicación, análisis y toma de decisiones frente a la tarea y frente a la enseñanza de las matemáticas a partir de *tareas* como las presentadas.

El artículo se compone de cuatro secciones adicionales. En la primera se da a conocer el referente conceptual del modelo MTSK, la modelación matemática en Educación Primaria y el conocimiento del profesor acerca de la modelación matemática. En la segunda se describe la metodología a partir de herramientas teóricas y analíticas para el análisis de la información y del curso de formación implementado. En la tercera se presentan los resultados del estudio y su discusión. En la cuarta se presentan las consideraciones finales. Por último, se presentan las referencias.

Referente Conceptual

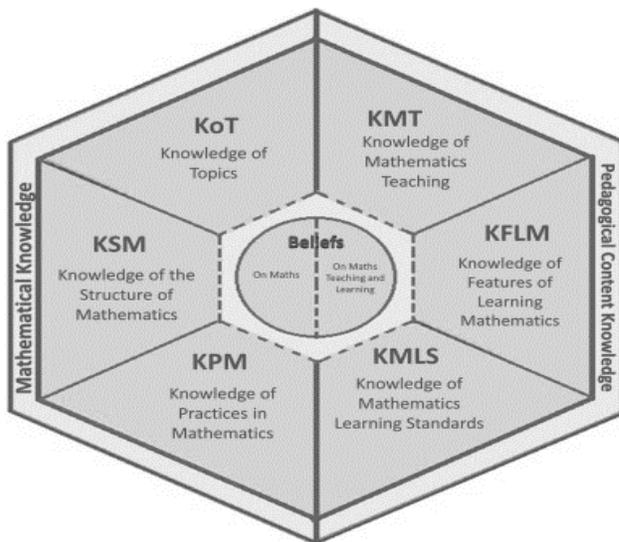
En este apartado, se presentan algunas ideas en torno al vínculo entre el modelo del MTSK, específicamente, el subdominio de la práctica matemática y la modelación matemática. El

tratamiento de estas ideas fundamenta la importancia de comprender el conocimiento de la práctica matemática del profesor, relativa a la modelación matemática en Educación Primaria.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM) en el modelo MTSK

El modelo MTSK (**Figura 1**), planteado por Carrillo et al. (2013), se basa en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas se deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. El MTSK es un modelo teórico que persigue propósitos analíticos. En esta perspectiva, no se refleja cómo se organiza el conocimiento del profesor de matemáticas, sino que se proporciona una herramienta útil para investigar acerca de él.

Figura 1
Modelo MTSK



Fuente: Carrillo-Yañez et al. (2018, p. 6).

El modelo permite analizar el conocimiento del profesor a través de dos grandes dominios: el conocimiento de las matemáticas (MK, siglas de Mathematical Knowledge) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, siglas de Pedagogical Content Knowledge). El modelo incluye,

además, un tercer dominio del conocimiento del profesor que tiene que ver con las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Beliefs on Maths and Beliefs On Maths Teaching on Learnig).

En los dos primeros dominios se proponen seis subdominios, que componen y dan sentido a la organización y el uso del conocimiento al interior del modelo: *(i)* conocimiento de los temas matemáticos (KoT, siglas de Knowledge of Topics), *(ii)* conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, siglas de Knowledge of the Structure of Mathematics), *(iii)* conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM, siglas de Knowledge of Practices in Mathematics), *(iv)* conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, siglas de Knowledge of Mathematics Teaching), *(v)* conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, siglas de Knowledge of Features of Learning Mathematics) y *(vi)* conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, siglas de Knowledge of Mathematics Learning Standards).

De manera particular, el subdominio práctica matemática (KPM) del dominio MK, del modelo MTSK, hace alusión a la práctica matemática, no la práctica de la enseñanza de la matemática, entendida esta como las formas de hacer y ejecutar en matemáticas que debe conocer el profesor de matemáticas para desarrollar su clase. Se destaca la importancia de que el profesor no solo conozca resultados matemáticos establecidos, sino, también, las maneras de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. En este sentido, el conocimiento de la práctica matemática, de acuerdo con Flores-Medrano y Aguilar-González (2017), integra no solo maneras de validar y demostrar con el uso del lenguaje formal, sino, también, procesos asociados a la resolución de problemas matemáticos, el establecimiento de modelos, la capacidad para jerarquizar y planificar rutas de solución a un problema, y la comunicación.

En la literatura, el término práctica matemática se comprende como las actividades matemáticas que se llevan a cabo en situaciones problemáticas que requieren de una matematización (Godino y Batanero, 1998) o como una actividad de los grupos humanos que considera cinco componentes: un lenguaje, un conjunto de declaraciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes y un conjunto de puntos de vista matemáticos (Kitcher, 1984).

Los autores del modelo MTSK definen una práctica matemática como “aquella actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para esta” (Flores-Medrano, 2016, p. 30). De allí que el conocimiento de la práctica matemática, por parte del profesor de matemáticas, incluye, entre otros asuntos, el conocimiento que tiene acerca de qué es demostrar, justificar, definir, modelar, deducir e inducir. Además, incluye el conocimiento de la lógica que sustenta cada una de estas prácticas, el del uso y funcionamiento de modelos, del ejemplo y contraejemplo; en resumen, se trata de un conocimiento sintáctico de cómo hacer matemáticas (Flores-Medrano, 2016).

El conocimiento de la práctica matemática está ligado al metaconocimiento matemático y al conocimiento acerca de las matemáticas, al interior de los cuales se consideran los métodos, las estructuras y la organización del conocimiento matemático. En el conocimiento de la práctica matemática que se plantea en el MTSK, se considera específicamente un énfasis en los modos de producción y en el uso de las matemáticas por parte del profesor. Así, para el estudio del conocimiento de la práctica matemática, se toman como base fenómenos de argumentación, modelación, demostración, validación y justificación matemática (Flores-Medrano, 2016).

Flores-Medrano (2015) propone una caracterización general del conocimiento de la práctica matemática a partir de las funciones, las variedades y los usos de cada práctica matemática. El autor parte de aquellas prácticas matemáticas que reconoce en las investigaciones y busca aspectos que

pudieran ser comunes y complementarios que le permiten abstraer características. Cada una de estas prácticas constituye una categoría, agrupada por similitudes, en el sistema y se nutre de las características de la práctica. Las categorías son: *(i)* demostrar, argumentar, justificar y validar; *(ii)* definir, ejemplificar, contra ejemplificar y usar heurísticos; y *(iii)* matematizar y construir modelos. En su investigación, Flores-Medrano (2016) profundiza en el análisis de las dos primeras categorías y enuncia la tercera; indica que dicha categorización no tiene el carácter de exhaustividad y que está abierta a la emergencia de nuevas categorías. Además, deja abierta la posibilidad de que estudios posteriores profundicen en el conocimiento que tiene, usa y requiere el profesor a este respecto.

Por su parte, Flores-Medrano y Aguilar-González (2017) ofrecen un sistema de categorías del conocimiento de la práctica matemática (**Figura 2**) con el cual analizar las distintas prácticas del profesor y sus relaciones con el conocimiento que las sustentan. En el esquema se identifica el sistema de categorías, subcategorías y elementos que pueden ayudar a identificar descriptores para el KPM, para organizar jerárquicamente los elementos constitutivos de las prácticas matemáticas. Estos elementos descriptores no son mutuamente excluyentes entre sí y pueden aparecer en diferentes momentos de la caracterización del conocimiento de la práctica matemática. Los autores amplían en su texto solo los descriptores dos y seis de la **Figura 2**.

Figura 2

Sistema de clasificación de elementos de conocimiento relativos al KPM

Conocimiento de la práctica matemática KPM	<i>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos</i>
	<i>Formas de validación y demostración</i>
	<i>Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal</i>
	<i>Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas</i>
	<i>Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)</i>
	<i>Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</i>

Fuente: Flores-Medrano y Aguilar-González (2017), p. 38.

Como se vio anteriormente en el modelo MTSK, al interior del KPM, en las prácticas particulares del quehacer matemático, se retoma la modelación matemática como un ejemplo de las mismas. Sin embargo, no se amplía acerca de las subcategorías y descriptores del MTSK frente a la modelación como práctica matemática y a cuándo se enfrenta a los profesores a *tareas* de modelación matemática. Además, al considerar la modelación como parte de un subdominio que no considera la práctica de la enseñanza de las matemáticas, no se asume la modelación matemática cuando se enseña a través de ella. De estos asuntos se ocupará este artículo.

La modelación matemática en Educación Primaria como una práctica de la enseñanza de las matemáticas

En el campo de la Educación Matemática, autores como Villa-Ochoa (2013), Kaiser y Sriraman (2006), entre otros, se han dedicado a investigar en torno a la modelación matemática; la creciente comunidad de investigadores, la conformación de reuniones periódicas y la cantidad de

artículos y revistas especializadas son evidencia del creciente interés por consolidarla como dominio de investigación en ese campo.

Según Villa-Ochoa et al. (2022), la modelación matemática se asume como un dominio de investigación con diversas intenciones, propósitos y perspectivas teóricas. Cada una de estas intenciones y perspectivas teóricas pueden determinar diferentes tipos de tareas y distintas maneras de implementar la modelación en el cotidiano escolar. Para los profesores, la modelación matemática se convierte, entre otras cosas, en una oportunidad para aplicar matemática y mostrar su utilidad a los estudiantes. Estos elementos se hacen presente en los diferentes niveles escolares.

La modelación matemática brinda oportunidades a los profesores frente al desarrollo de su capacidad de relacionar un contenido matemático escolar con el contexto del estudiante, no para mostrar una aplicación, sino para que ese contenido tenga para el estudiante un sentido y construya una visión de la utilidad de las matemáticas. En este sentido, analizar el tipo de conocimiento que el profesor desarrolla cuando realiza actividades de modelación matemática, genera un espacio de reflexión en la construcción del conocimiento matemático que le permite conectar el contexto de con las matemáticas.

Para llevar a cabo actividades de modelación matemática y desarrollar experiencias de enseñanza con ella, los profesores deben tener un conocimiento con características particulares. Blum (2011) se refiere a la necesidad de proporcionar a los profesores un conocimiento que les permita involucrar la modelación matemática en sus clases y promover en los estudiantes el avance en la construcción de los conceptos matemáticos a partir del análisis, exploración, comprensión y contextualización de situaciones que les son cercanas

Al respecto, Blum (2011) plantea como conocimientos necesarios para que los profesores lleven a cabo *tareas* y ambientes de modelación matemática en el aula, los siguientes: (i) conocimiento de tipos de tareas de modelación, teniendo en cuenta las demandas cognitivas de las

tareas; *(ii)* conocimiento de un amplio espectro de tareas y capacidad para diagnosticar las dificultades de los estudiantes durante los procesos de modelación; *(iii)* conocimiento de un amplio espectro de modos de intervención y habilidad para usar intervenciones apropiadas en el aula y creencias apropiadas.

Además de los anteriores, Blum (2011) también propone que el conocimiento de los profesores para enseñar con modelación matemática debe tener en cuenta una organización exigente de la enseñanza de la materia matemática (que da a los estudiantes oportunidades para adquirir competencias matemáticas y hacer conexiones dentro y fuera de las matemáticas), así como una activación cognitiva permanente de los estudiantes (mediante la estimulación cognitiva y actividades metacognitivas, fomentando la independencia de los estudiantes y el manejo de errores constructivamente) y una gestión eficaz y orientada al alumno en el aula (mediante diversos métodos flexibles, usando el tiempo de manera efectiva, separando el aprendizaje y la evaluación, entre otros).

Dado que los estudiantes a temprana edad, constantemente, se hacen preguntas en torno a cuestiones que tienen a su alcance (Biembengut, 2007), la modelación matemática en Educación Primaria posibilita algunas respuestas a tales preguntas y genera caminos hacia la construcción y la interpretación de situaciones matemáticas que brindan la posibilidad de participar e involucrarse en aspectos científicos o problemáticos de la cotidianidad. En estos aspectos, los estudiantes observan, experimentan, explican, comprenden, indagan, representan un problema y validan con las matemáticas los fenómenos a los que ellos se enfrentan (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; English, 2009; Biembengut, 2007; English y Watters, 2005).

La inclusión de la modelación matemática en la Educación Primaria también permite una mirada interdisciplinaria al conocimiento escolar y el posicionamiento crítico con relación a la comprensión y la transformación de la sociedad (Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022). Es decir,

la modelación matemática en el aula de Primaria, permite trascender las prácticas escolares centradas en la ejercitación, para dar sentido a los procedimientos y los conceptos como herramientas para ejercer la ciudadanía, la participación democrática, el diálogo de saberes y reconocer los roles que tienen las matemáticas en la sociedad, en las demás ciencias y en los contextos y situaciones en las cuales tiene lugar (Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022).

De acuerdo con los elementos anteriores, en este artículo se asume la modelación matemática como una práctica matemática y como una práctica de la enseñanza de las matemáticas, ocupándose de manera central de esta última. La modelación matemática como práctica matemática alude a una práctica científica particular del quehacer matemático. Así, la modelación matemática se asume como la actividad que consiste en representar, manipular y comunicar objetos del mundo real con contenidos matemáticos y que permiten la simulación de procesos complejos, generan hipótesis y sugieren experimentos o métodos de validación (Blum et al., 1989). En este sentido, la modelación matemática tiene sus fundamentos en la actividad científica del personal matemático que se encarga de aplicar y construir modelos para explicar fenómenos, resolver problemas de otras ciencias o para avanzar en una teoría o ciencia (Villa-Ochoa, 2009).

La modelación matemática como una práctica de la enseñanza de las matemáticas se entiende aquí como un *ambiente de aprendizaje* (Barbosa, 2001) en el que se *matematiza la realidad* (Parra-Zapata, 2015) por medio del desarrollo de *tareas* (Villa-Ochoa et al., 2017). A continuación, se desarrollan estos tres elementos.

Como *ambiente de aprendizaje*, la modelación matemática es un escenario en el cual los estudiantes investigan, por medio de las matemáticas, situaciones que surgen en la realidad. Y posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en la práctica educativa de los profesores en formación (Parra-Zapata, 2015; Barbosa, 2001). En esta perspectiva, el

conocimiento matemático va más allá de la ejercitación de algoritmos y se centra en su aplicación y en cómo, a partir de su uso, se puede dar una solución a una problemática de la vida cotidiana, en donde además de lo matemático surgen conocimientos no matemáticos (Villa-Ochoa y Berrio, 2015). La Modelación Matemática, vista como un *ambiente de aprendizaje* que se desarrolla a partir de una tarea, propicia la participación de los profesores y estudiantes (Biembengut, 2019; Parra-Zapata, 2015) y genera el planteamiento de preguntas, mediaciones de los discursos, trabajo en equipo, argumentaciones, proposición de ideas y conjeturas de las mismas.

Por su parte, la modelación matemática en Educación Primaria, vista como *matematización de la realidad* se refiere a un proceso situado que va más allá de atravesar por un conjunto de ciclos y de la construcción de sistemas consistentes de ecuaciones y representaciones. Esta *matematización de la realidad* se presenta en Parra-Zapata (2015) como un componente particular de la modelación en Educación Primaria, que obedece a un proceso de investigación científica que se relaciona con observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Este proceso no se reduce a la traducción matemática, como suelen presentarse las tareas contextualizadas en los libros de texto, sino que involucra procesos que se llevan a cabo para lograr algunos desarrollos matemáticos, para el desarrollo de habilidades matemáticas, el razonamiento matemático y la interpretación de los problemas de la realidad; máxime si se tiene en cuenta que matematizar no implica solamente cuantificar, ni el número es el referente de la matematización.

Para dar cuenta de los propósitos anteriores, como *ambiente de aprendizaje* y como *matematización de la realidad*, se requiere de diversas acciones de modelación matemática en el aula. Para alcanzar este propósito, se establece una comprensión de las *tareas* de modelación “como un conjunto de textos, enunciados, situaciones, orientaciones o indicaciones que se organizan para ‘dar vida’ a la modelación en la cotidianidad escolar” (Villa-Ochoa et al., 2017, p. 222). Frente a ello, los autores identificaron cuatro tipos de *tareas* para desarrollar la modelación matemática.

Estos tipos de *tareas* son: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (iii) modelación a través de proyecto, y (iv) uso y análisis de modelos. La caracterización realizada por los autores permite identificar el contexto y la noción de realidad que ofrece cada enunciado, el propósito orientado a la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de habilidades o competencias, así como los alcances y limitaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Metodología

En esta sección, se describen las herramientas teóricas utilizadas para el análisis de la información generada en la investigación, seguidas de una descripción del curso de formación, en términos de sus antecedentes, diseño y estructura. Finalmente, se presenta el método de análisis de la información.

Herramientas teóricas para el análisis

Dado que el objetivo fue identificar el conocimiento especializado de la práctica matemática, que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática, se propuso en un curso de formación de modelación matemática en Educación Primaria, en el que se discutieron asuntos como la *matematización de la realidad* (Parra-Zapata, 2015), el modelo matemático en Educación Primaria (Biembengut, 2007; English, 2005) y la modelación matemática como estrategia para la enseñanza en Primaria (Biembengut, 2018; 2007).

Según afirman Carrillo et al. (2013), el conocimiento que posee el profesor será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. En correspondencia a ello se usó el subdominio KPM del conocimiento de la práctica matemática del

MTSK con fines analíticos, para describir y determinar el conocimiento especializado de los profesores que se pone de manifiesto durante la participación de profesores en determinadas *tareas* de modelación matemática en Educación Primaria.

El curso de formación continua

Se desarrolló un curso de formación continua para profesores de Educación Primaria con el objetivo de brindar a los profesores experiencias de modelación matemática en Primaria y promover el desarrollo de sus propias experiencias para ser llevadas al aula. El curso hizo parte de la línea de reflexión metodológica de un programa de la Secretaría de Educación de Medellín; esta línea ofrece formación continua a los profesores, directivos docentes y agentes educativos de la ciudad. En el curso participaron de forma permanente 12 profesores de instituciones educativas públicas y privadas en Medellín-Colombia. El equipo de investigación se conformó por la investigadora principal, estudiante de Maestría en Educación, y sus dos asesores. En algunas de las *tareas* implementadas participaron asesores y expertos.

El curso tuvo una duración de 30 horas y se desarrolló en los meses de octubre y noviembre de 2019. Se dividió en seis encuentros de cuatro horas por semana y seis horas de asesoría. Se estructuró a partir de tres aspectos: primero, la vivencia por parte de los profesores de *tareas* de modelación matemática. Segundo, el análisis de *ambientes de aprendizaje* y *tareas* en el contexto de la enseñanza. Tercero, la planificación y elaboración de un plan de clase que contiene *ambientes de aprendizaje* y *tareas* de modelación matemática propias de los profesores.

Los participantes fueron 12 profesores, cuyas características fueron diversas, pues, aunque todos eran profesores que enseñan matemáticas en Primaria, pertenecían tanto a instituciones educativas públicas como privadas y su área de formación universitaria, en la mayoría de los casos, no era en matemáticas. El curso se llevó a cabo mediante talleres en donde los profesores tuvieron

experiencias con la modelación matemática, aquellos estuvieron acompañados de discusión en pequeños grupos, reflexión, participación y discusiones posteriores en plenaria.

En el marco del curso, los profesores diseñaron planes de clase en los que propusieron un *ambiente de aprendizaje* conformado por *tareas* de modelación matemática. Estos planes se entienden como la planeación de los procedimientos y recursos que se pueden llevar a cabo en el aula para articular, integrar y construir los saberes específicos discutidos en el curso, para este caso la modelación matemática. En los planes de clase se siguió el formato establecido por la Secretaría de Educación de Medellín, el cual se presenta en el **Anexo B**.

La información y su análisis

Para responder a la pregunta de investigación de este artículo, se analizaron las interacciones de los profesores con los formadores y entre ellos mismos cuando resolvieron dos *tareas* de modelación matemática a lo largo de dos de las sesiones del curso de formación (sesiones 3 y 4). La Tarea 1 fue referente al análisis de una cuenta de servicios públicos (Villa-Ochoa, 2015). La Tarea 2 se asoció al reconocimiento de un modelo existente para el Índice de Masa Corporal (Parra-Zapata et al., 2016).

De acuerdo con Villa-Ochoa et al. (2017), la Tarea 1 es del tipo de construcción de representaciones que se enfocan, principalmente, en el desarrollo de estrategias de simbolización y representación de algunos fenómenos. Por su parte, la Tarea 2 refiere al uso y análisis de modelos, en donde se hace necesaria la aplicación de las variables del modelo matemático, a datos de la realidad y determinación de ajuste a las condiciones de la situación mediante la evaluación del mismo.

Para el análisis de la información, se recurrió al análisis de contenido (Schettini et al., 2015), el cual se refiere a la interpretación y comprensión de textos: escritos, orales, filmados,

fotográficos, discursos, documentos, transcripciones de entrevistas y observaciones, es decir, todo tipo de registro. Este es un proceso iterativo de producción, preparación, de revisión y organización de la información, en ellos se tiene en cuenta el contexto en el que se produce tanto lo manifiesto como lo latente de los discursos.

El análisis de contenido de la información se dividió en dos etapas. En la primera etapa, se usaron las grabaciones de audio y video que después de ser transcritas, se tornaron en evidencias, indicios u oportunidades para indicar el *conocimiento especializado* de la práctica matemática de los profesores (Flores-Medrano, 2015; 2016), en este caso, al vivenciar las *tareas* de modelación matemática. En esta etapa también se usaron los documentos escritos denominados planes de clase, en los que los profesores propusieron un *ambiente de aprendizaje* de modelación matemática para ser llevado al aula, como producto del curso de formación. Una vez que la investigadora terminó de leer y organizar los datos, compiló una lista de descriptores relacionados con la práctica matemática y con los propósitos de los profesores para su uso durante el desarrollo de las experiencias de modelación matemática.

Esta lista de descriptores y propósitos fueron las dimensiones de análisis en esta etapa. Los descriptores empleados se presentan en la **Tabla 1**.

Tabla 1

Descriptores para el análisis.

Elementos del conocimiento relativos al KPM	
JP	Jerarquización y planificación como manera de proceder en la resolución de problemas matemáticos.
FV	Formas de validación y demostración.
PS	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.
PA	Procesos asociados a la resolución de problemas.
PP	Prácticas particulares del quehacer matemático.
CN	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

Fuente: elaboración propia.

En la segunda etapa, el análisis se centró en las relaciones entre los descriptores de la práctica matemática y los elementos constitutivos del desarrollo de las *tareas* de modelación matemática. Para ello, primero se detectó el uso o no uso de los descriptores de una práctica matemática del modelo MTSK en los momentos de las *tareas* de modelación matemática (**Tabla 2**).

Tabla 2

Relaciones descriptores KPM y elementos de la modelación matemática.

Descriptores de los elementos cuyo uso se observa en los ambientes de aprendizaje de modelación matemática	Elementos del conocimiento relativos al KPM			
Conocimiento de estrategias para construir contraejemplos, conjeturas, argumentos.	FV	PS	PP	
Conocimiento de que el trabajo con casos particulares genera ideas para la generalización.	FV	PP		
Conocimiento de cómo utilizar el lenguaje matemático adecuado en la comunicación de ideas matemáticas.	PS	PA	PP	
Conocimiento de estrategias heurísticas como diagramas para analizar y solucionar un problema.	JP	PA	PP	CN
Conocimiento de los roles de verificación y explicación.	FV	PS	PP	
Conocimiento de construcción de modelos para organizar, estructurar, generar definiciones acordes al problema presentado.	JP	PS	PP	CN

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se analizaron los documentos escritos de los planes de clase de los profesores para determinar los elementos de los demás dominios del modelo MTSK que se relacionan con el subdominio de la práctica matemática.

Con los insumos de análisis anteriores se establecieron dos categorías emergentes de análisis, relacionadas con la práctica matemática, que se describen en la Tabla 3 y se propuso una categorización para el conocimiento especializado de la práctica matemática en la categoría

modelación matemática, indicando unas subcategorías y elementos para descriptores de las mismas (Tabla 4). Esto se amplía en el siguiente apartado.

Resultados y discusión

En este apartado se presentan los principales resultados, su respectivo análisis y discusión. Inicialmente se desarrollan dos categorías, planteadas en la **Tabla 3**, relacionadas con la práctica matemática.

Tabla 3
Categorías emergentes del análisis de la información.

Categoría	Descripción
El contexto en el subdominio de la práctica matemática.	Ayuda a reconocer el papel del contexto en la comprensión e interpretación de modelos matemáticos a partir de las evidencias e indicios del conocimiento de la práctica matemática de los profesores.
El razonamiento en las tareas de modelación matemática como una práctica matemática dentro del modelo MTSK.	Permite identificar los razonamientos de tipo inductivo y de tipo deductivo realizados durante el desarrollo y análisis de las <i>tareas</i> de modelación matemática.

Fuente: elaboración propia.

El contexto en el subdominio de la práctica matemática

El conocimiento de la práctica matemática (KPM), establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción en vínculo con el escenario de su desarrollo. Allí, en la práctica matemática, el contexto se asocia a las maneras de conocer, crear o producir en matemáticas, que se configuran a partir de asuntos cercanos a las realidades o a las maneras de relacionarse con esas realidades, en

donde la realidad que se asume y las interacciones que se presentan al interior de esta, determinan maneras de establecer vínculos con las matemáticas (Marmolejo-Correa y Rendón-Mesa, 2017).

En la *Tarea 1*, del costo de la cuenta de servicios públicos, se inició con el reconocimiento de los diferentes valores y aspectos que se facturan en la cuenta de servicios públicos. En esta parte de la *tarea*, los profesores, continuamente, conjeturaron acerca de los significados de algunos valores facturados, de las unidades de medida y de la diferencia entre los valores de las facturas debido al estrato socioeconómico, al valor unitario de consumo en los diferentes municipios, entre otros. P3 reflexionó al respecto y planteó la potencialidad de hacerse ideas o imágenes mentales de lo matemático, pero también de sus significados con el mundo real y de poder comunicarlos, plantea por ejemplo: *“al revisar la cuenta debemos revisar bien los números que usamos, pero sobre todo saber expresar de qué estamos hablando; por ejemplo, el número 5 es pequeño, pero si pensamos en 5 metros cúbicos de agua sería grande”* [DOC_S3, 02/11/2019]. Al respecto, P5 manifestó: *“en la factura hay muchos números, representaciones matemáticas, para entenderlos necesitamos más información porque la empresa solo nos da totales y gráficas, pero no sabemos en sí de donde salieron ni con qué asunto de nuestro gasto se asocia* [DOC_S3, 02/11/2019].

Por lo cual se hizo necesario consultar en fuentes especializadas a partir de las tablas de precios de la empresa prestadora de servicios. Por ejemplo, luego de ver las tablas de la empresa, P1 escribió [DOC_S3, 02/11/2019]: Estrato 4.

$$\begin{aligned} Cf + C \times C (m^3) \\ = 6358 + 2595 (8) \\ = 27118 \end{aligned}$$

como posibles modelos que permiten la interpretación de los valores dados en las cuentas de servicios, comparó con las tablas ofrecidas y con las cuentas de los otros participantes. Mientras que P3 explicó a un compañero los pasos del modelo creado, para ello se expresó verbalmente al

tiempo que escribió en un papel lo que decía; indicó que *“Se determina el tipo de sector. Se toma el cargo por el consumo. Más el cargo fijo. Menos los subsidios. Este dependiendo del estrato. Y así da el valor total a pagar”* [DOC_S3, 02/11/2019].

Lo anterior ofreció una oportunidad para indagar acerca de los aspectos de conocimiento que los profesores involucran alrededor de la práctica de comunicar en matemáticas, el cual se ubica en esta investigación en el subdominio del conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Más adelante, se procedió a guiar a los profesores hacia el análisis de las variables presentes en el cobro del servicio de acueducto en la factura. Algunos de los profesores analizaron su propia factura. El profesor P3 calculó los valores de la cuenta de servicios, teniendo en cuenta las variables y características de su propia cuenta de servicios e indicó *“Yo vivo en una zona residencial. Tengo un cargo por el consumo de 2595.80 pesos. Adicional un cargo fijo de 6358.66 pesos. No tengo ningún subsidio por ser estrato 4. Ya con esos datos puedo calcular lo que debo pagar”* [DOC_S3, 02/11/2019]. A partir de ello, P3 llegó a un análisis crítico acerca del consumo responsable del agua en su hogar. P2 también comentó acerca de los beneficios de llevar este tipo de tarea al aula, indicó *“qué bueno llevar ejercicios como esos a la clase de matemáticas para reflexionar con los niños; pero también para incentivarlos a usar la calculadora, para que agilicen en la parte operativa”* [DOC_S3, 02/11/2019]. Frente a esto, P4 indicó *“sí, si hacemos estos trabajos vamos a tener estudiantes más conscientes que le van a dar sentido a los números en su vida. Me gusta lo de la calculadora pero eso después de que han comprendido la manera de realizar las operaciones”* [DOC_S3, 02/11/2019].

Después de analizar el caso personal de la relación consumo y costo, se invitó a los profesores a suponer el rol de asesores de la comunidad y que, por tanto, deberían orientar a los demás ciudadanos en la interpretación de los costos de su propia factura. El profesor P1 les indicó a sus compañeros: *“voy a elaborar una especie de esquema con unos datos fijos, seguiré el proceso*

que propusimos antes con el costo fijo, los cargos de consumo y los subsidios. Luego pondré una explicación de las maneras de realizar los procedimientos para calcular el costo de su consumo, y que cada quien ponga sus datos” [DOC_S3, 02/11/2019]; luego, P1 indicó “no debemos pensar solo en los números sino en el sentido que se les da a los números según la situación, por ejemplo con la cantidad de metros cúbicos en el caso del consumo de agua o de kilovatios por hora en el caso del consumo de energía eléctrica” [DOC_S3, 02/11/2019].

El profesor P3 reflexionó con relación al contexto que este le permitió abstraer y dejar a un lado la parte concreta de los fenómenos y quedarse con las cantidades, para así poder construir un modelo con el que pudiera explicarles a sus compañeros la manera de interpretar su propia cuenta de servicios. Esta situación sugirió la necesidad de trascender el tratamiento aritmético (personal) para construir representaciones gráficas y algebraicas de la situación. Lo cual permitiría que se comprendan los conceptos matemáticos desligados a una operación o pensados con un sentido y en un contexto.

Por su parte, en la Tarea 2, el fenómeno propuesto proviene de las ciencias naturales y es estudiado y analizado por medio de las matemáticas. La *tarea* se refiere al uso y estudio del modelo matemático del Índice de Masa Corporal (IMC) de Quetelet, (Parra-Zapata et al., 2016). En el desarrollo de esta tarea se contó con la presencia de una profesional en nutrición y dietética, quien apoyó las discusiones y las acciones llevadas a cabo por los profesores. El apoyo de la nutricionista, como experta, se torna importante en tareas de modelación matemática ya que sus aportes llevaron a los profesores a considerar diversas condiciones que se deben tener en cuenta para garantizar la solución de la problemática que se identificó (Rendón-Mesa, 2016).

La Tarea 2 del cálculo del IMC, se inició con discusiones en torno a un video que mostraba el problema de obesidad en el país y a partir de las reflexiones acerca de la manera como el IMC puede ayudar a la comprensión y solución de este problema. Al respecto, algunos profesores

establecieron la relación de tener un peso en los rangos normales con un adecuado estado de salud.

Una vez discutidos los primeros asuntos, el grupo de profesores procedió a calcular su IMC, para ello aplicaron el modelo matemático de Quetelet. Allí se consideró la importancia de reconocer el escenario de desarrollo de la situación y los elementos que la constituyen.

Aquí se reflexionó acerca a la comprensión del IMC, para qué y cómo puede ayudar en el diario vivir de los profesores. Así, se discutió, por ejemplo, que el IMC es el índice que mide la dimensión corporal, el cual indica el área ocupada por el cuerpo en el espacio. Esto llevó a los profesores a una reflexión en donde el profesor P1 hace énfasis en asuntos como *“la necesidad de usar adecuadamente los instrumentos de medida, los errores en la medición y la importancia de las unidades de medida y su significado”* [DOC_S4, 09/11/2019]. Este aspecto se asocia con el KPM de los profesores, pues denota que evidencian la realización de prácticas específicas, previas a las formales, por ejemplo, la comparación, la validación, la clasificación entre otras.

Más adelante, los profesores realizaron un análisis del modelo matemático empleado para conjeturar acerca de su interpretación. Al respecto, el profesor P3 manifestó: *“después de hacer las mediciones y el cálculo del IMC con la fórmula dada, puedo concluir que tengo sobrepeso”* [DOC_S4, 09/11/2019], al respecto, el profesor P1 le indicó que *“para poder llegar a esa conclusión, debería tener en cuenta también otros factores, no solo el peso y la altura, como por ejemplo si practicaba algún deporte y su masa muscular había afectado de alguna manera el resultado”* [DOC_S4, 09/11/2019]. Al retomar las ideas dadas por los profesores, la nutricionista clarificó que para interpretar el número obtenido al calcular el IMC, se usa una tabla de valores de clasificación proporcionada por la Organización Mundial de la Salud (OMS), que describen el IMC en la población de hombres y mujeres mayores de 18 años.

Los análisis realizados por los profesores se fundamentaron en aspectos matemáticos y nutricionales, se resalta el proceso desarrollado por el profesor P1, quien relaciona el peso y la talla

en el caso que se le pide analizar, después realiza conclusiones basado en estas dos variables; mientras que el análisis de P3 también tuvo en cuenta otros aspectos de evaluación nutricional de la persona. En este proceso, el profesor P3 realizó la interpretación de las tablas facilitadas para los análisis. Se concluye aquí que el conocimiento del profesor en torno a la práctica matemática tiene que ver con las maneras de validación usadas por ambos profesores para llegar a una conclusión con relación a su estado nutricional [DOC_S4, 09/11/2019].

Se observa que P1 y P3 evidencian su interés por comprender modelos matemáticos, asociándolos, además, con el contexto particular en el que se aplican y se destaca la importancia de hacer análisis más allá del resultado del cálculo del IMC, para asumir una posición respecto a los datos obtenidos [DOC_S4, 09/11/2019]. Frente a lo anterior, el modelo MTSK indica que es necesario que los profesores tengan un conocimiento de los temas matemáticos y de los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción. Allí, el conocimiento del profesor del contexto de desarrollo y de los temas, se asocia al conocimiento de los significados y al contenido, lo que le da sentido al fenómeno que se estudia.

En el desarrollo y comprensión de estas tareas, se afirma que el contexto favorece una comprensión más amplia de las matemáticas, pues permite reconocer los elementos dados en un modelo ya establecido o en construcción, que se somete a prueba con la realidad o que está sujeto a la consideración del alcance la situación planteada.

El razonamiento en las tareas de modelación matemática como una práctica matemática dentro del modelo MTSK

Esta categoría de análisis refleja que en las *tareas* de modelación matemática el razonamiento es una práctica matemática. La matematización desarrollada en diferentes momentos de las *tareas*, consistió en la construcción y el uso de representaciones y modelos en consideración

con el fenómeno, los proceso de validación que evalúa la correspondencia entre los modelos y la situación que se estudia (Perrenet y Zwaneveld, 2012). A partir de esta *matematización*, los profesores realizaron razonamiento, en términos de los procesos de simplificación, donde se identifican y excluyen de variables según su influencia en el objeto de estudio. Los razonamientos se evidenciaron en diferentes momentos de la implementación de las tareas.

Respecto a lo anterior, durante el análisis del precio cobrado en la factura del servicio de acueducto, en la Tarea 1, referente a los servicios públicos, P2 afirma que: *“Es necesario hacerse continuamente ideas o imágenes mentales de lo matemático, pero también de sus significados con el mundo real... por ejemplo: el número 5 es pequeño, pero si pensamos en 5 metros cúbicos de agua sería grande”* [DOC_S3, 02/11/2019]. Así mismo, P1 plantea la necesidad de *“abstraer y dejar a un lado la parte concreta de los fenómenos y quedarse con las cantidades que varían, para trabajar y operar con la parte matemática”* [DOC_S3, 02/11/2019].

Estos fragmentos son evidencia de un razonamiento inductivo usado para calcular el precio en cualquier factura de agua según el consumo y para llegar a conclusiones acerca de las magnitudes analizadas en la *tarea*. En este tipo de razonamiento se destaca la identificación de regularidades y patrones numéricos y del significado de las variables.

Fue posible identificar acciones propias de la modelación matemática que les permitieron aproximarse al fenómeno, en las cuales ellos mismos construyeron ciertos conocimientos, no solo matemáticos sino también propios del contexto del cual emerge la situación. A su vez, son indicios de conocimiento de la práctica matemática de los profesores, pues realizan procesos heurísticos para estudiar el fenómeno y buscan evidencia que permita validar o refutar las conjeturas que surgen en el proceso de solución.

En cuanto al tipo de razonamientos que se pudo observar en los procesos desarrollados por los profesores, se evidenció una limitación a razonamientos inductivos que no lograron trascender

al nivel deductivo propio de los procesos matemáticos. En este sentido, se registró como una necesidad de formación indagar por el MTSK en cuanto a los razonamientos deductivos, los procesos de justificación, conjetura y demostración, y demás procesos que permitan este tipo de razonamientos.

Caracterización del conocimiento especializado de la práctica matemática en la modelación matemática

De este proceso, reportado en las categorías anteriores, se categorizó el conocimiento especializado de la práctica matemática en la categoría modelación matemática, por medio de unas subcategorías y elementos para descriptores de las mismas (**Tabla 4**).

La modelación matemática es una práctica matemática en la que se representa, manipula y comunican objetos del mundo real con contenidos matemáticos. Así mismo, es una práctica para la enseñanza de las matemáticas en la que se propicia la participación de profesores y estudiantes a partir del planteamiento de preguntas, de mediaciones de los discursos, del trabajo en equipo, de las argumentaciones y conjeturas de las mismas. De allí se vincula la idea de que el conocimiento de la práctica es un metaconocimiento (Flores-Medrano, 2016) que le permite al profesor, entre otras cosas, juzgar la cercanía que tienen los modelos que construye para un objeto en particular. Para el caso de la categoría modelación matemática como práctica matemática, la caracterización estuvo basada en los *modos de producción del profesor*, el *profesor como resolutor de tareas* y la *enseñanza a través de la modelación matemática*.

Los *modos de producción del profesor* indican la actividad matemática del profesor al producir en y con modelación matemática. El *profesor como resolutor de tareas* se refiere a la acción y el resultado de resolver diferentes tareas de modelación matemática y la *enseñanza a*

través de la modelación matemática hace alusión a estrategias y procesos seguidos por los profesores cuando hacen uso de la modelación matemática en su enseñanza.

En los *modos de producción del profesor*, se reconocen elementos para los descriptores: exploración, uso de lenguaje y enunciados matemáticos, establecimiento de modelos, generación de argumentos, validación y comunicación. Estos descriptores pueden ser empleados por los estudiantes y los profesores para ejecutar algunos resultados matemáticos. El conocimiento del profesor le permitiría identificar entre el uso de uno u otro descriptor o combinar sus usos.

En el *profesor como resolutor de tareas*, los elementos para los descriptores son: reconocimiento y uso de contextos, comprensión de la situación, razonamientos deductivos e inductivos, usos del conocimiento, creatividad, comparación y creación, y validación. El conocimiento del profesor le dará insumos para desempeñarse como resolutor y reconocer sus alcances y limitaciones.

En la *enseñanza a través de la modelación matemática*, los descriptores propuestos son: enseñar desde lo experimental, estrategia de integración de los conocimientos, transversalizar temáticas escolares, posibilitar la observación, los conocimientos previos y la interrogación, el reconocimiento de procesos de pensamiento y el desarrollo de habilidades y actitudes. Estos dejan ver elementos centrales para considerar al implementar la modelación matemática en el aula.

Los elementos anteriores, para la práctica matemática de modelación matemática, permitieron proponer el esquema en la **Tabla 4**, a continuación, para el KPM y así ampliar los elementos teóricos propuestos en la literatura para este subdominio.

Tabla 4
Propuesta de categorización para el KPM.

Conocimiento de la Práctica Matemática		
Práctica/Categoría	Subcategoría	Elementos para descriptores
Modelación matemática	Modos de producción del profesor	Exploración
		Uso de lenguaje y enunciados matemático
		Establecimiento de modelos
		Generación de argumentos
		Validación
		Comunicación
	Profesor como resolutor de <i>tareas</i>	Reconocimiento y uso de contextos
		Comprensión de la situación
		Razonamientos deductivos e inductivos
		Usos del conocimiento
		Creatividad, comparación y creación
	Enseñanza a través de la modelación matemática	Validación
		Enseñar a partir de la experiencia y experimentación
		Estrategia de integración de los conocimientos
		Transversalizar temáticas escolares
		Posibilitar la observación, los conocimientos previos y la interrogación
Reconocimiento de procesos de pensamiento		
Desarrollo de habilidades y actitudes		

Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, a partir del análisis de las dos *tareas* en las que los profesores vivenciaron, discutieron y reflexionaron acerca del uso y estudio del modelo matemático del IMC de Quetelet, y acerca del análisis de una cuenta de servicios públicos, se reconocieron dos características del conocimiento especializado de la práctica matemática, que los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria pusieron de manifiesto al desarrollarlas.

La primera característica tiene que ver con las habilidades que son necesarias o que tienen los profesores para comprender e interpretar modelos matemáticos y la relevancia que tiene el contexto para que los profesores realicen dichas comprensiones. Durante el desarrollo de las *tareas*, se evidencia que el uso de contextos favorece la realización de prácticas específicas, previas a las formales como la comparación, la ejemplificación, la clasificación, entre otras; el uso de diversas

formas de validación usadas para llegar a una conclusión y el uso del conocimiento que tienen los profesores de los temas matemáticos y de los procedimientos.

La segunda característica, permite identificar los razonamientos de tipo inductivo realizados durante el desarrollo y análisis de las *tareas* de modelación matemática, específicamente se puede observar en los profesores la identificación de regularidades y patrones numéricos y del significado de las variables; la recurrencia al uso de procesos de simplificación, matematización, y validación para evaluar la correspondencia entre los modelos y la situación que se estudia; el uso de heurísticos para estudiar el fenómeno; y la búsqueda de evidencia que permita validar o refutar las conjeturas que van surgiendo en el proceso de solución.

Consideraciones finales

Este estudio aporta evidencia empírica en la comprensión del MTSK en la modelación matemática. De manera particular, se centra el análisis en el subdominio denominado conocimiento de la práctica matemática (KPM). A partir del análisis de dos de las *tareas* desarrolladas en el curso, en las que los profesores vivenciaron, discutieron y reflexionaron acerca del uso y estudio del modelo matemático del Índice de Masa Corporal (IMC) de Quetelet y acerca del análisis de una cuenta de servicios públicos, se pudieron reconocer dos características del conocimiento especializado de la práctica matemática, que los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria pusieron de manifiesto en un ambiente de modelación matemática.

La primera característica tiene que ver con las habilidades que son necesarias o que tienen los profesores para comprender e interpretar modelos matemáticos y la relevancia que tiene el contexto para que los profesores realicen dichas comprensiones. Durante el desarrollo de las tareas, se evidencia que el uso de contextos favorece la realización de prácticas específicas, previas a las formales como la comparación, la ejemplificación, la clasificación, entre otras; el uso de diversas

maneras de validación usadas para llegar a una conclusión y el uso del conocimiento que tienen los profesores de los temas matemáticos y de los procedimientos.

La segunda característica, permite identificar los razonamientos de tipo inductivo realizados durante el desarrollo y análisis de las *tareas* de modelación matemática, específicamente se puede observar en los profesores la identificación de regularidades y patrones numéricos y del significado de las variables; la recurrencia al uso de procesos de simplificación, matematización y validación para evaluar la correspondencia entre los modelos y la situación que se estudia; el uso de heurísticos para estudiar el fenómeno; y la búsqueda de evidencia que permita validar o refutar las conjeturas que surgen en el proceso de solución.

Referencias

- Bahmaei, F. (2011). Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(9), 3–13.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
- Barbosa, J. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, 24, 1-15
- Biembengut, M. (2007). Modelling and applications in primary education. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 451-456). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_50.
- Blum, W., Berry, J., Biehler, R., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. y Profke, L. (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Ellis Horwood Limited Publishers.

-
- Blum W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (vol 1, pp. 15-30). Springer.https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. (2013). *Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching*. En Proceedings of Eighth CERME Congress. Antalya, Turkey.
- Dindyal, J. (2010). Word Problems and Modelling in Primary School Mathematics. En B. Kaur y J. Dindyal (Eds.), *Mathematical Applications and Modelling* (pp. 94–111). World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789814313353_0006.
- English, L. y Watters, J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58–79. <https://doi.org/10.1007/BF03217401>.
- English, L. (2010). Mathematical Modelling in the Primary School. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.). *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 207-214). James Cook University: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Flores-Medrano, E. y Aguilar- González, A. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo y L. Contreras (Eds.). *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (pp 38-47). Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva
- Hill, H., Sleep, L., Lewis, J. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

-
- Kaiser, G. y Maass, K. (2007). *Modelling in Lower Secondary Classrooms — Problems and Chances*. En W. Blum, P. Galbraith, H. Hans-Wolfgang y N. Mogens (Eds.). *Modelling and Application in Mathematics Educations* (99-108). The 14th ICMI Study [International Commission in Mathematical Instruction]. Springer.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.
- Kaiser, G. (2014). *Mathematical Modelling and Applications in Education*. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396–404). Springer.
- Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMFUFA.
http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.
- Niss, M. (2001). *Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling*. En J. Matos, W. Blum, K. Houston y S. Carreira (Eds.). *Modelling and Mathematics Education. International. Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (72-89). Horwood Publishing.
- Ocampo-Arenas, M. y Parra-Zapata, M. (2022). Una experiencia de modelación matemática en educación primaria en un contexto de Educación Ambiental. *Uni-Pluriversidad*, 22(1), 1–16.
- Parra-Zapata, M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática*. [Tesis de Maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín.

-
- Parra-Zapata, M., Parra-Zapata, J., Ocampo-Arenas, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). El índice de masa corporal: una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92, 21-33.
- Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas En Educación*, 16(3), 1-27.
- Perrenet, J. y Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, 1(6), 3-21.
- Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *EURASIA. Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429–1456.
<https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>.
- Ponte, J. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Sense.
- Rendón-Mesa, P. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la Ingeniería de Diseño de Producto. Aportes de la modelación matemática [Tesis doctoral]. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1, Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Sense Publishers.

- Villa-Ochoa, J. (2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. En V. Bisognin y M. Fraga Sant'Ana (Eds.). *Anais da VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática* (1-8). Centro Universitario Franciscano. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1189.5445>.
- Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación En Educación*, 8(16), 133-148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>.
- Villa-Ochoa, J. y Berrío, M. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. En G. Stallman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241-250). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19.
- Villa-Ochoa, J.; Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.

Conocimiento especializado observado en profesores cuando diseñan ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria

Resumen. Este documento reporta las características del conocimiento especializado que pueden observarse en profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria, cuando realizan el plan de clase de un *ambiente de aprendizaje* con *tareas* de modelación matemática. La investigación se enfocó en las comprensiones de la modelación matemática en Educación Primaria y de los subdominios del modelo del conocimiento MTSK que tienen los profesores al planear *tareas* de modelación matemática. Se analizó la información extraída de seis planes de clase que desarrollaron un grupo de profesores en un curso de formación. Los resultados informan las características observables del conocimiento que tienen los profesores en sus planes de clase con modelación matemática, se tuvo en cuenta para ello las categorías que brinda el modelo MTSK para comprender y analizar esos conocimientos y las comprensiones de la modelación matemática reportadas en la literatura. Los resultados reportan que los profesores reconocieron la modelación matemática como un *ambiente de aprendizaje* en el que sus estudiantes y ellos mismos pueden desarrollar sus habilidades, sus conocimientos matemáticos y su capacidad crítica y se pudo observar en ellos un conocimiento especializado con relación a la modelación matemática en el que la reconocen como relación entre las matemáticas escolares y el contexto, como estrategia para la enseñanza y como proceso de exploración con el medio.

Palabras clave. conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), modelación matemática en Educación Primaria, creencias, tareas de modelación, planes de clase.

Abstract. This paper reports the characteristics of specialized knowledge that can be observed in teachers who teach mathematics in Primary Education, when they carry out the lesson plan of a *learning environment* with mathematical modelling *tasks*. The research focused on the understandings of mathematical modelling in Primary Education and on the subdomains of the MTSK knowledge model that teachers have when planning mathematical modelling *tasks*. The information extracted from six lesson plans developed by a group of teachers in a training course was analyzed. The results communicate the characteristics of the knowledge that teachers have in their lesson plans with mathematical modelling, taking into account the categories provided by the MTSK model to understand and analyze this knowledge and the understandings of mathematical modelling reported in the literature. The results reports that the teachers recognized mathematical modelling as a learning environment in which their students and themselves can develop their skills, their mathematical knowledge and their critical capacity and it was possible to observe in them a specialized knowledge regarding mathematical modelling. in which they recognize it as a relationship between school mathematics and the context; as a strategy for teaching and as a process of exploration with the environment.

Keywords. mathematics' teacher specialized knowledge (MTSK), mathematical modelling in Primary Education, beliefs, modeling tasks, lesson plans.

Introducción

La literatura en investigación informa las posibilidades que ofrecen los modelos, la modelación matemática y las aplicaciones en el aprendizaje de las matemáticas, en el desarrollo de competencias, disposiciones y visiones de la utilidad de las matemáticas en la sociedad (Blum et al., 2007). En los primeros niveles escolares, la modelación matemática ofrece oportunidades para que los estudiantes problematicen e indaguen acerca de las situaciones cercanas a su contexto (Scheller et al., 2017; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Tortola y Almeida, 2013).

A través de la modelación matemática se pueden configurar *ambientes de aprendizaje* que promuevan la participación de los estudiantes en el estudio y la comprensión del mundo circundante (Parra-Zapata, 2015), en la interrelación con otras áreas del currículo, que promuevan acciones para resolver problemas que circundan la escuela (Ocampo-Arenas et al., 2022). Es decir, la modelación, en los primeros grados de escolaridad, posibilita que los estudiantes (niños y niñas), por medio de sus discursos, sus gestos y sus producciones conceptuales, pongan en juego las ideas matemáticas y no matemáticas para proponer soluciones a situaciones problemáticas.

Para integrar la modelación en la Educación Primaria, los profesores que enseñan matemáticas requieren desarrollar conocimientos particulares, no solo del tipo de *tareas*, procesos y fases de la modelación, sino, también, de los ambientes, alcances, metas y aspectos curriculares y contextuales que impone la realidad escolar. Al respecto, la literatura informa que la integración de la modelación en la cotidianidad escolar es un proceso complejo, que exige altas demandas cognitivas y de organización y de gestión de clase (Blum, 2011), por las condiciones escolares que no siempre son favorables a los profesores que buscan implementarlas (Villa-Ochoa, 2015).

Aun cuando existe una amplia cantidad de investigaciones relacionadas con la modelación matemática en general y con la formación de los profesores en particular, el impacto en los

currículos a lo largo del mundo es escaso (Kaiser, 2014); por tanto, se requieren de nuevos desarrollos de la integración en el aula y el papel y los conocimientos de los profesores para lograr esa integración.

A nivel internacional, una parte de la investigación en Educación Matemática se ha preocupado por describir y comprender el pensamiento o conocimiento de los profesores de matemáticas. A partir del modelo del conocimiento del contenido para la enseñanza de Shulman (1986), otros investigadores han conceptualizado y desarrollado modelos propios. Entre ellos, el conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008); el Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (Pino-Fan et al., 2015); y el *conocimiento especializado del profesor de matemáticas*-MTSK (Siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo et al., 2013). En particular, el modelo MTSK considera la dicotomía entre el conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Asimismo, el modelo incluye el dominio de las creencias, como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento.

Con base en los elementos expuestos hasta aquí, en este artículo se ofrece una respuesta a la pregunta: *¿Cuál es el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria?* Para dar respuestas a esta pregunta de investigación, este artículo se compone de cinco apartados adicionales.

En el primer apartado se presenta el referente conceptual que apoya la modelación matemática en Educación Primaria y el modelo del MTSK. En el segundo apartado, los aspectos de la metodología que se tomaron en cuenta en el documento. En el tercer apartado, los resultados de la investigación y su discusión en torno a los conocimientos que se identificaron al planear un

ambiente de aprendizaje con tareas de modelación matemática. En el cuarto apartado, se muestran las consideraciones finales. Y, en el quinto apartado, las referencias empleadas.

Modelación matemática en Educación Matemática

La modelación matemática es un dominio de investigación en Educación Matemática (Blum et al., 2007). Al interior de este dominio, la expresión modelación matemática abarca una amplia gama de orientaciones teóricas y prácticas con relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Doerr y Pratt, 2008) y al desarrollo de competencias y metodologías para la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática. Existen diferentes aproximaciones y comprensiones de esta, sus alcances y maneras de integrarlas en la cotidianidad escolar, las cuales se derivan de los antecedentes teóricos (Villa-Ochoa et al., 2022; Kaiser, 2017) y del tipo de *tarea* de modelación, el contexto y el nivel educativo de los estudiantes (Villa-Ochoa et al., 2017).

En la diversidad de perspectivas, pueden reconocerse al menos dos enfoques. Por un lado, existe una parte importante de la investigación en modelación matemática que puede asociarse al desarrollo de competencias, conocimientos y procesos que recrean los procedimientos de la matemática aplicada a nivel profesional. Por ejemplo, en la perspectiva realista, la modelación matemática centra su atención en metas pragmáticas, entre ellos, la resolución de problemas, el desarrollo de competencias de modelación y en la comprensión de las aplicaciones de la matemática (Kaiser y Sriraman, 2006). En otro enfoque, la investigación en modelación matemática ha desarrollado comprensiones propias en el ámbito de la Educación Matemática, en las cuales ponen de relieve diferentes maneras de modelar según el nivel escolar, el ámbito vocacional/profesional y las metas pedagógicas y educativas. Por ejemplo, en la perspectiva socio-crítica, la modelación matemática se concibe como una manera de resolver problemas con las matemáticas y centra la atención en la comprensión del rol de las matemáticas en la sociedad y en

la participación democrática (Parra-Zapata, 2015; Silva y Kato, 2012; Araújo, 2009; Barbosa, 2006).

En cuanto a los usos y roles de la modelación matemática, Julie y Mudaly (2007) señalaron que un aspecto central del debate internacional, da cuenta de si la modelación matemática debe utilizarse como vehículo para el desarrollo de las matemáticas o tratarse como un contenido en sí mismo. Para las autoras, la modelación matemática como vehículo radica en que las matemáticas deben representarse en algún contexto; por tanto, el centro de la actividad escolar no está en la construcción de modelos matemáticos *per se*, sino como vía para llegar a las matemáticas a partir del uso de contextos y modelos matemáticos como mecanismo para el aprendizaje de conceptos, procedimientos y conjeturas matemáticas.

Por otro lado, la modelación matemática como contenido “conlleva a la construcción de modelos matemáticos de fenómenos naturales y sociales sin la prescripción de que ciertos conceptos matemáticos, procedimientos o similares deban ser el resultado del proceso de construcción de modelos” (Julie y Mudaly, 2007, p. 504). Las autoras agregan que la noción de *contenido* también implica el escrutinio, la disección, la crítica, la ampliación y la adaptación de los modelos existentes con el fin de llegar a comprender los mecanismos subyacentes de la construcción de modelos matemáticos y la valoración y evaluación de los modelos matemáticos construidos. Las nociones de contenido y vehículo permean otros aspectos de la modelación en el ámbito escolar. Por ejemplo, en cuanto a la presentación del problema, la autenticidad de las *tareas*, los objetivos de la clase, la evaluación y la participación de los profesores y de los estudiantes (Villa-Ochoa et al., 2022).

En la investigación del aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática, existen dos perspectivas, una epistemológica y otra psicológica (Doerr y Pratt, 2008). La primera relacionada con la naturaleza de los modelos y la modelación matemática. La segunda

vinculada a la naturaleza misma del aprendizaje de los estudiantes. Para Doerr y Pratt (2008), casi toda la investigación del aprendizaje a través de la modelación matemática se basa en alguna variación de una perspectiva epistemológica que comienza con un examen de la relación entre un mundo de la experiencia o *real* y un mundo modelo.

Al respecto, pueden encontrarse estudios fundamentados en una visión separatista de mundo *real* y el mundo del modelo. Por otro lado, existen estudios que se basan en una visión de co-construcción. Para Doerr y Pratt (2008), los estudios separatistas sugieren, además, que la modelación matemática es un proceso cíclico e iterativo. Los estudios de co-construcción reconocen que tanto las percepciones como las observaciones están fundamentadas en algunos marcos teóricos que incluyen en la estructuración de la realidad (Skovsmose, 1990). La co-construcción del mundo experimentado y del mundo modelo se pone de manifiesto en el modo en que los modelos se proyectan de nuevo en el mundo experimentado (Doerr y Pratt, 2008). Una perspectiva psicológica de la investigación en relación con los modelos y la modelación matemática, aborda más directamente las cuestiones relacionadas con la naturaleza de las actividades de los estudiantes cuando participan en tareas de modelación matemática. En esta perspectiva se encuentran estudios que cuestionan la linealidad de los ciclos de modelación matemática, la distinción entre el uso de un modelo creado por un experto y uno creado por un estudiante.

Estas perspectivas, enfoques y visiones también permean la Educación Primaria. Por un lado, existen investigaciones que se centran en el desarrollo de competencias matemáticas, en la comprensión conceptual y el desarrollo de procesos, por ejemplo, Biembengut (2007). Por otro lado, existen desarrollos que centran la mirada en la relación de los estudiantes (niños y niñas) con el entorno y el desarrollo de visiones críticas y creativas (Parra-Zapata et al., 2016; Luna et al., 2009).

En general, la literatura de investigación se ha concentrado en las oportunidades que ofrece la modelación matemática en los primeros grados de escolaridad. Por ejemplo, permite a los estudiantes intensificar y ampliar su comprensión de las matemáticas, así como aprender a observar e interpretar símbolos y significados, relacionar e integrar datos del medio, resolver y evaluar situaciones de diferentes contextos e intereses (Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022; Scheller et al., 2017; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Parra-Zapata, 2015; Dindyal, 2010; Biembengut, 2007; English y Watters, 2005).

Independiente del enfoque, tipo de *tarea* o comprensión de la modelación, la literatura sugiere que desde tempranas edades, los profesores deben promover escenarios de modelación en los que los estudiantes (niños y niñas) tengan experiencias de primera mano para usar y construir modelos y participar en ambientes en los que se reconozca el papel de las matemáticas en situaciones de la realidad extraescolar (Ocampo-Arenas y Parra-Zapata, 2022; Villa-Ochoa et al., 2019; Parra-Zapata et al., 2017; Luna et al., 2009; Biembengut, 2007).

La Tabla 1 sintetiza las principales ideas de las investigaciones revisadas en modelación matemática en la Educación primaria:

Tabla 1

Comprensiones de la modelación matemática.

Comprensión de la modelación matemática	Autores/Autoras	Características
Estrategia	Biembengut (2007, 2008, 2019)	La modelación usada como estrategia en el aula estimula fuertemente la curiosidad, la creatividad y la comprensión en los estudiantes (niños y niñas) con respecto al entorno en el que viven.
Desarrollo de Procesos	Anderson (2010); Dindyal (2010)	La modelación permite que los estudiantes (niños y niñas) analicen, conjeturen, predigan, comuniquen acerca de los modelos propuestos.
Matematización de la realidad	Parra-Zapata (2015; 2016)	Los estudiantes se plantean y abordan asuntos propios de las matemáticas que conllevan a comprenderlas como manera de entender asuntos propios de la realidad, son importantes en este proceso la exploración, la participación, la toma de decisiones y la interacción con el fenómeno.
Medio para mejorar habilidades	English (2009; 2015; 2018)	A través de la modelación se mejoran entre otras, capacidades creativas al crear e interpretar modelos, se involucra el quehacer científico y se potencian habilidades de pensamiento matemático.
Solución de situaciones reales	Luna y Alves (2007) Luna et al. (2009)	La interacción con situaciones reales producidas en el ambiente social favorece las prácticas discursivas, moviliza el conocimiento matemático y tiene un sentido para lo social.
Interacción con el medio	Higueras et al. (2011)	A través de la práctica, del trabajo con material concreto y de la interacción con el medio se posibilita la elaboración y análisis de modelos en estudiantes, principalmente de la primera infancia.

Fuente: elaboración propia.

En las investigaciones revisadas, se destaca que las potencialidades del uso de la modelación matemática en la Educación Primaria no se limitan al desarrollo de competencias matemáticas para la resolución de problemas, sino que, también, se puede favorecer las reflexiones de los estudiantes acerca del papel de los modelos matemáticos en la sociedad, lo que les permite participar y reflexionar con relación a cuestiones derivadas de la realidad vivida, así como la toma consciente de decisiones al hacer uso de las matemáticas en el contexto, es decir competencias críticas (Luna et al., 2009; Bassanezi, 2002).

Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2013) es una herramienta para analizar y describir el conocimiento del profesor (Carrillo-Yañez et al., 2018). Este modelo, inspirado en los trabajos de Ball et al. (2008) y Shulman (1986), permite explorar con detalle el conocimiento que movilizan los profesores al desarrollar cualquier actividad profesional ligada a la enseñanza de las matemáticas, como la preparación de clases, la gestión de *tareas*, la evaluación, entre otras.

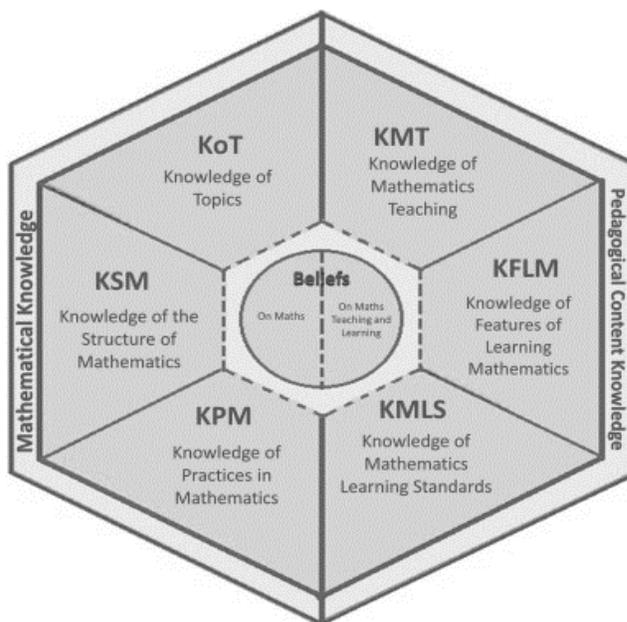
La observación y análisis de la práctica de profesores de matemáticas, ha permitido el desarrollo del modelo y el afinamiento del sistema de categorías al ser aplicado a diferentes temas matemáticos y diferentes niveles educativos. Junto con el objetivo de continuar el desarrollo del modelo, las investigaciones se han enfocado en el análisis de episodios que brinden la oportunidad de desagregar el conocimiento que se pone en juego en una acción o planeación de enseñanza, a la vez que permite reflexionar con relación a qué otros conocimientos habrían permitido al profesor una gestión diferente de la situación analizada. Así, lejos de una consideración evaluativa, el modelo MTSK se convierte en un instrumento para la comprender el conocimiento que tienen los profesores de matemáticas.

En línea con los planteamientos de Shulman (1986), el MTSK considera dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento matemático (MK, siglas de Mathematical Knowledge) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, siglas de Pedagogical Content Knowledge). El modelo asume, también, un dominio central y transversal de las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Beliefs on Maths and Beliefs On Maths Teaching on Learnig). De este último dominio no se ocupó este artículo.

Se entiende que la especificidad del conocimiento del profesor no se inscribe únicamente en el dominio matemático, sino que permea también el conocimiento didáctico del contenido. El modelo queda reflejado en la **Figura 1**, en la que las siglas se corresponden con los nombres de dominios y subdominios en inglés.

Figura 1

Esquema del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.



Fuente: Carrillo-Yañez et al. (2018), p. 6.

Así, el primero de los dominios, relativo al conocimiento matemático, contempla tres subdominios: conocimiento de los temas matemáticos (KoT, siglas de Knowledge of Topics),

conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, siglas de Knowledge of the Structure of Mathematics) y conocimiento de las prácticas en matemáticas (KPM, siglas de Knowledge of Practices in Mathematics). El segundo dominio se organiza también en tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, siglas de Knowledge of Mathematics Teaching), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, siglas de Knowledge of Features of Learning Mathematics) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, siglas de Knowledge of Mathematics Learning Standards).

La **Tabla 2** presenta los dominios descritos, cada uno de los subdominios y las categorías que se han establecido para contribuir a la conceptualización del modelo y a la comprensión de los conocimientos manifestados por los profesores.

Tabla 2
Dominio, subdominio y categorías del MTSK.

Dominio	Subdominio	Categorías
Conocimiento matemático (MK)	KoT	Fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones, procedimientos.
	KSM	Conexiones de complejización, prácticas, simplificación de contenidos transversales y auxiliares.
	KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático como validación, demostración, resolución de problemas, modelación.
	KMT	Teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales, tareas, ejemplos.
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	KFLM	Interacción de los estudiantes con el contenido matemático, dificultades asociadas al aprendizaje.
	KMLS	Contenidos matemáticos requeridos a enseñar, conocimiento de niveles de desarrollo conceptual y procedimental esperado, secuenciación de las temáticas.

Fuente: elaboración propia.

Investigaciones recientes (Padilla-Escorcía y Acevedo-Rincón, 2022; Zakaryan y Ribeiro, 2018), han documentado el uso de este modelo como herramienta analítica para comprender el conocimiento de los profesores de los temas matemáticos y prácticas como la resolución de problemas. En esta investigación se considera el modelo MTSK como una herramienta para comprender el conocimiento de los profesores en el diseño de *tareas* de modelación matemática para la enseñanza de las matemáticas, puesto que, conforme se mencionó en la sección anterior, la modelación matemática se puede concebir como práctica matemática, herramienta didáctica,

contenido y proceso (Villa-Ochoa et al., 2021; Julie y Mudaly, 2007). En ese sentido, el modelo ofrece herramientas para analizar las diferentes dimensiones del conocimiento de la modelación matemática.

Metodología

Esta investigación buscó *describir el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de ambientes de aprendizaje de modelación matemática para la Educación Primaria*. En este apartado se presentan las herramientas metodológicas que permitieron abordar este objetivo de investigación y cómo ellas dieron sentido a la investigación.

El curso y los participantes

Se desarrolló un curso presencial de formación continuada para profesores de Educación Primaria que enseñan Matemáticas. El curso tuvo como propósito ofrecer a los profesores la participación en experiencias con relación a la modelación matemática en Educación Primaria y promover el desarrollo de sus propias experiencias para ser llevadas al aula. En el curso, que hizo parte de un programa que ofrece formación continuada a los profesores de Medellín, participaron 18 profesores de instituciones educativas públicas y privadas de la ciudad. De los 18 profesores que iniciaron el curso, 12 lo completaron.

Para el desarrollo del curso se consideraron tres componentes: primero, la vivencia por parte de los profesores de *tareas* de modelación matemática; segundo análisis de situaciones y *tareas* en el contexto de la enseñanza; y, tercero, planificación y elaboración de un *ambiente de aprendizaje* con *tareas* de modelación matemática propia, mediante el diseño de un plan de clase que los profesores pudieran a futuro (posterior al curso de formación) implementar en el aula.

El curso se desarrolló en seis sesiones de cuatro horas cada una y 6 horas de asesoría. En estas sesiones, los participantes tuvieron experiencias con tareas de modelación matemática (Villa-Ochoa et al., 2017), que estuvieron acompañadas de discusión en pequeños grupos, reflexión, participación y discusiones posteriores en plenaria.

En las sesiones dos a cinco, los profesores participaron en la realización de siete *tareas* de modelación matemática. Las tres primeras, se desarrollaron con todo el grupo de profesores en pleno. Para las cuatro últimas *tareas* se organizó el grupo de profesores en cuatro equipos de trabajo, al interior de cada equipo solucionaron y analizaron las posibilidades de implementación de una *tarea* diferente.

La Tarea 1 realizada fue el análisis de una cuenta de servicios públicos (Villa-Ochoa, 2015); esta *tarea* es del tipo de construcción de representaciones que se enfocan principalmente en el desarrollo de estrategias de simbolización, y representación de algunos fenómenos (Villa-Ochoa et al., 2017). La Tarea 2 fue el Índice de Masa Corporal (Parra-Zapata et al., 2016), en la cual se abordó la aplicación de las variables del modelo matemático, a datos de la realidad y determinaron si se ajustaba a las condiciones de la situación mediante la evaluación del mismo. Allí se centró la discusión en los requerimientos para la validación de un modelo matemático y sus posibilidades de uso y significación. La Tarea 3 fue la guía del consumidor (Parra-Zapata, 2015), en la que diseñaron una guía del consumidor para decidir qué aspectos tener en cuenta a la hora de elegir un producto; esta *tarea* de modelación corresponde a un caso en el que quien investiga formula la situación, recoge los datos y simplifica la información (Barbosa, 2004).

La Tarea 4 fue los zapatos del gigante que consistía en determinar las medidas de un gigante que pueda calzar unos zapatos cuyas medidas son dadas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). La Tarea 5 fue Plantas Vs Zombies (Rangel-Iriarte, 2016), en la que se estudian las características del videojuego y se establecen, con ayuda de procedimientos matemáticos, algunas estrategias para

sembrar diferentes tipos de plantas con distintas características de ataque o defensa en un jardín. Estas tareas corresponden a un enunciado verbal realista y auténtico en el que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta cuantitativa que se puede resolver con la ayuda de las matemáticas (Villa-Ochoa et al., 2017).

La Tarea 6 fue túneles para que pasen carros (Parra-Zapata y Rendón Mesa, 2016), en la que utilizaban piezas de construcción para elaborar los túneles, debían realizar el modelo bidimensional del gráfico y los túneles, y la indicación para que otra persona construya el túnel y logre que el carro pase por él. La Tarea 7 cajas para empacar una moto (Rendón-Mesa, 2016), en la que construyeron con hojas de papel, el modelo de dos cajas para empacar la moto, una donde pueda moverse libremente y otra en la que no; también se desdoblaron las cajas y se realizó su gráfica y un análisis a partir de ellas. En estas tareas se avanzó en la construcción de representaciones desde la modelación de las formas y algunos procesos de simulación.

De la sesión dos a la cinco, los profesores diseñaron un plan de clase (CP), el cual se entiende como la planeación de los procedimientos y recursos que se pueden llevar a cabo en el aula para articular, integrar y construir los saberes específicos discutidos en el curso, para este caso la modelación matemática. En los CP se planteaban el nombre, las situaciones que originaron su diseño, el ambiente en el que la implementarían, su objetivo, las actividades a desarrollar y los recursos. Estos CP fueron presentados al grupo en la última sesión del curso.

Datos

Los datos fueron documentos escritos por parte de los profesores, videos y audios del desarrollo de la sesión y notas de observación de la investigadora en cada sesión del curso. Los archivos fueron almacenados en carpetas en Google Drive, este almacenamiento se organizó por sesiones. Los tres investigadores (estudiante y asesores) tuvieron acceso a los archivos. Para

responder a la pregunta de investigación de este artículo, se extrajo un subconjunto de los datos. Los datos extraídos contenían los registros de video y audio de las presentaciones orales de los planes por parte de los profesores y los seis documentos con los respectivos planes de clase.

En total se desarrollaron seis planes de clase. El título y el objetivo de cada plan se presenta en la **Tabla 3**.

Tabla 3

Descripción de los ambientes de aprendizaje de modelación (Planes de Clase).

N°	Nombre del plan de clase	Objetivo del plan de clase
CP1	Me divierto comprando	Fortalecer procesos de cálculo y operaciones básicas a través del contexto de la tienda escolar.
CP2	Reducción de fuentes de calor en el colegio	Desarrollar capacidades críticas y reflexivas con los estudiantes a través del mejoramiento de los espacios habitados.
CP3	C@ntar la lluvia	Desarrollar las competencias propias de las matemáticas a través de una experiencia de carácter experimental.
CP4	Construyo y pienso	Fortalecer la comprensión de figuras y cuerpos geométricos a través de experiencias.
CP5	Matemáticas aplicadas a la vida cotidiana para fortalecer capacidades adaptativas	Favorecer y promover la comprensión de conceptos matemáticos con la cotidianidad de los estudiantes.
CP6	Nos vamos de paseo al parque de las aguas	Programar y preparar acciones y situaciones necesarias de una salida pedagógica a partir del análisis matemático requerido.

Fuente: elaboración propia.

Análisis de datos

El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase, el análisis de los datos consistió en un proceso iterativo de ida y vuelta entre las concepciones de modelación matemática y los datos. A lo largo de este proceso, se siguieron las pautas del análisis temático (Braun y Clarke, 2006). Este tipo de análisis es “un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos” (Braun y Clarke, 2006, p. 79). El análisis temático se puede realizar a través de seis fases, a saber: familiarización, codificación, desarrollo de temas, revisión, definición de temas y

producción del informe (Braun et al., 2019). En algunos momentos estas fases se desarrollaron de manera articulada.

Inicialmente, se hizo una revisión de los datos recopilados, por parte de cada uno de los investigadores por separado. Posteriormente, luego de discutir acerca de la pertinencia de los mismos, se realizó un primer análisis para identificar fragmentos de datos que evidenciaran las comprensiones de los profesores de la modelación matemática. En esta fase se organizaron los datos por sesión. En la fase de codificación, se segmentaron y reorganizaron los datos por medio de códigos o categorías que sustentan el trabajo interpretativo con los datos. Este procedimiento se registró en documentos de notas de los investigadores. A manera de ejemplo, en la **Figura 2** se ofrece una organización del análisis.

Figura 2
Comprensiones de la modelación matemática.

ESTRATEGIA	COMPRENSIÓN O VISIÓN DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA
<i>Me divierto comprando</i>	A partir de la construcción y lo que plantean que los estudiantes realizan perciben a la Modelación como herramienta en doble vía, por un lado, mejorar el aprendizaje de los conceptos y por otro, mostrar su uso o aplicación. Los profesores presentan contextos simulados.
<i>Reducción de fuentes de calor en el colegio</i>	Oportunidad para refrendar las prácticas que llevan a cabo en el aula.
<i>Construyo y pienso</i>	Posibilidad de que el contenido matemático tenga conexión con la vivencia práctica.
<i>Nos vamos de paseo al parque de las aguas</i>	Encuadre o respuesta a necesidades de enseñanza del profesor, creencia o preconcepción de que se debe aprender un contenido y luego aplicarlo, aquí recurren a contextos simulados.
<i>Capacidades adaptativas</i>	La Modelación matemática es vista como herramienta para darle aplicación a un conocimiento de un concepto o tema matemático.
<i>C@ntar la lluvia</i>	Se asume la modelación como un proceso experimental a partir del cual puede seguirse el comportamiento de un fenómeno, en este caso la lluvia.

Fuente: elaboración propia.

Posterior a la codificación, se realizó una identificación de los conocimientos, la cual atendió a “una orientación inductiva, donde el investigador inicia el proceso analítico a partir de los datos, trabajando ‘de abajo hacia arriba’ para identificar significados sin importar ideas” (Braun et al., 2019, p. 853). Los fragmentos extraídos fueron analizados y discutidos entre los investigadores. Como resultado de esta discusión, se realizó una revisión, en la cual se construyó un nuevo sistema de codificación, en este caso de tres categorías, y se llevó a cabo un segundo proceso de codificación deductiva “donde el investigador aborda los datos con varias ideas, conceptos y teorías, o incluso códigos potenciales basados en ellos, que luego se exploran y etiquetan dentro del conjunto de datos” (Braun et al., 2019, p. 853). Este procedimiento se registró en un documento conjunto entre los investigadores, se siguió el modelo registrado en la **Tabla 4**:

Tabla 4
Codificación comprensiones de la modelación matemática.

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN PRIMARIA	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6
Oportunidad para relacionar los contenidos matemáticos y el contexto (contextos simulados formulados por el profesor no por los estudiantes).		X	X			X
Estrategia para la enseñanza.	X				X	
Proceso de exploración del medio.		X		X		

Fuente: elaboración propia.

En la segunda fase del análisis, se utilizó el referente conceptual del MTSK. Para ello se analizaron los CP a la luz de los subdominios KoT, KMT, KFML y KMLS y sus respectivas categorías. Esto da cuenta de elementos iniciales del conocimiento especializado de los profesores al hacer modelación matemática, la cual centró la atención en lo que los profesores enuncian como una manera de identificar estos conocimientos. En la **Tabla 5** se presenta el registro de este insumo.

Tabla 5
Subdominios del modelo y modelación matemática.

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN PRIMARIA	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6
Oportunidad para relacionar los contenidos matemáticos y el contexto (contextos simulados formulados por el profesor no por los estudiantes).	KFML		KMT KoT		KMLS	
Estrategia para la enseñanza.	KMT	KMT			KMT	
Proceso de exploración del medio.		KoT		KMT		KMT

Fuente: elaboración propia.

Más adelante, se centró la atención en las acciones que los profesores proponían en los planes de clase, el tipo de preguntas, los contextos y las problematizaciones realizadas, con las cuales se dio cuenta de los indicadores de conocimiento del profesor acerca de la modelación matemática. Este proceso siguió lo descrito en la **Figura 3**. Con base en lo anterior, se revisaron los CP a la luz de las preguntas *¿para qué fueron usados?*, *¿qué planean hacer los profesores en el aula?*, *¿qué acciones potenciales podrían promover en los estudiantes?*, *¿cómo se articularon con otros planes?* y *¿qué condiciones se tienen para su desarrollo?* Estas preguntas se formularon para comprender cómo conciben los profesores la modelación matemática en cada uno de los indicadores de los subdominios KMT, KFLM y KMLS del modelo MTSK.

Para realizar el proceso de validación, se recurrió a un proceso de triangulación entre investigadores (Janesick, 2000), el cual consistió en un análisis simultáneo y comparativo por parte de los investigadores. En el análisis simultáneo y comparativo cada investigador revisó los planes de clase por separado, luego se compararon los hallazgos de cada uno para desarrollar una comprensión más amplia y profunda de la información. La triangulación realizada permitió el enriquecimiento de una comprensión que resultó de la alimentación mutua de los acercamientos que cada uno de los investigadores tuvo con la información.

Resultados y discusión

En esta sección se presentan los resultados de los análisis de la investigación y su respectiva discusión. En ese sentido, en un primer momento se desarrollan apartados específicos para las categorías declaradas en las **Tabla 4** y **5**. En un segundo momento se analizan los CP en el marco del Modelo MTSK.

Relación entre los contenidos matemáticos y el contexto

Se pudo observar en los profesores participantes, un conocimiento de la modelación matemática como *una manera de relacionar los contenidos matemáticos con el contexto*. A partir de los documentos y de los videos de las exposiciones orales, fue posible encontrar que, tanto en los propósitos de la clase como en el tipo de actividades, los profesores evocaban la necesidad de incluir experiencias y recursos de la cotidianidad de los estudiantes. Al respecto, los registros informan la relevancia para los profesores del uso de situaciones en las que se puedan establecer relaciones entre las matemáticas y la *realidad* de los estudiantes (niños y niñas).

Por ejemplo, en el CP1 los profesores indican que *“al implementar este tipo de tareas, se lleva a los estudiantes a la comprensión de términos propios de la matemática, asociándolos a los usos que se les dan en la vida diaria”* [DOC_CP1, 23/11/2019], con esto los profesores del CP, a través de su propuesta de clase, pretendían *“que los estudiantes obtuvieran bases a través de las matemáticas para la resolución de problemas cotidianos según el contexto donde se encuentren inmersos”* [DOC_CP1, 23/11/2019]. Estos propósitos coinciden con los resultados de Alsina y Salgado (2021), quienes informaron que a partir de contextos reales, además de promover la construcción de modelos con base en los conocimientos matemáticos, se moviliza el alumnado a entender el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la cotidianidad.

En esta investigación también es posible identificar que, si bien se reconoce la importancia del contexto dentro de la actividad matemática, en algunos de los CP pueden observarse diseños en los que el profesor es el responsable de elegir el contexto, la secuencia de actividades y demás componentes de la clase. Por ejemplo, el CP3 propone la construcción de un instrumento para medir la cantidad de agua lluvia y el CP2 la experimentación para medir los niveles de calor en el colegio. Estos aspectos pueden interpretarse como un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas en la que se dispone de elementos de exploración con el medio para llegar a las posibles soluciones de la situación planteada.

En esta categoría, vale la pena resaltar que los profesores que realizaron el CP5, en la planificación de las tareas, se centraron en la articulación con las necesidades particulares de los estudiantes para permitir el desarrollo de capacidades adaptativas. En particular, este grupo de profesores declaró que la situación que generó el diseño del plan fue: *“las características asociadas al diagnóstico de los estudiantes y la necesidad de estrategias en el contexto para familiarizar a los estudiantes con las matemáticas”*. A lo largo de su plan de clase, estos profesores hicieron énfasis en que los estudiantes pudieran desarrollar *“habilidades y destrezas que les permitieran afrontar experiencias de la cotidianidad como por ejemplo la toma de decisiones”* [DOC_CP5, 23/11/2019].

De manera colectiva, la relación entre las matemáticas escolares y el contexto circuló a partir de tres ideas. Por un lado, como una manera de dar sentido a *unas matemáticas a partir de las aplicaciones*, como una vía para atender a contextos prediseñados por los profesores o como una manera de atender a las necesidades particulares de los estudiantes dentro de la clase de matemáticas.

Estrategia para la enseñanza

Esta categoría se argumenta en el conocimiento acerca de la modelación como herramienta o vehículo para el aprendizaje de las matemáticas. Se rastrearon recurrencias en los discursos y escritos de los profesores. Al respecto, se encontró que en el CP3, los profesores propusieron un *ambiente de aprendizaje con tareas* de modelación matemática para la reducción de fuentes de calor en el colegio. En su plan de clase, los profesores declararon “*algunos espacios de la Institución Educativa tienen temperaturas muy altas, lo cual genera malestar en la disposición para usarlos a ciertas horas del día, con esta situación esperamos que los estudiantes exploren, analicen y planteen posibles soluciones al problema que los afecta*” [DOC_CP3, 23/11/2019]. Más adelante, los profesores apuntan que “*a partir del uso de termómetros, aplicaciones de celular, el diálogo con personas especialistas, desarrollar capacidades críticas y reflexivas con los estudiantes a través del mejoramiento de los espacios habitados*” [DOC_CP3, 23/11/2019]. Esto puede interpretarse como un llamado a estudiar situaciones realistas (Sánchez-Barbero et al., 2019), es decir, a situaciones que de manera general busca que la resolución de problemas reales tenga sentido práctico. Este enfoque de modelación, visto a partir de la modelación matemática en Educación Primaria, puede enriquecer las competencias de resolución de problemas de los estudiantes (niños y niñas), dado que aborda los conocimientos matemáticos, los procesos, la fluidez de representación y las habilidades de comunicación que necesitan para el siglo XXI (English, 2015).

En otro plan de clase (CP2), sus integrantes señalaron que “*es importante que el estudiante se sienta involucrado en toda la ‘investigación’ mediante la observación, indagación, recolección de datos, planteando hipótesis y conclusiones etc. Y que sienta que, al solucionar el problema, se va a ver beneficiado directamente*” [DOC_CP2, 23/11/2019]. El análisis de este CP permite

concluir que, para los profesores, la modelación ofrece aspectos que van más allá de un interés y motivación por la resolución de problemas y plantean a los estudiantes en el diseño de lecciones y experiencias que les permitan posicionarse de manera crítica frente a los problemas que se plantean.

Por su parte, en CP1 y CP6 se configuran ejemplos de la perspectiva contextual de la modelación matemática, cuyo interés radica en la solución de problemas reales, preocupándose, fundamentalmente, por la relación que se da entre el sujeto y el contexto (Villa-Ochoa et al., 2021). En particular, en el caso del CP1, los profesores muestran su interés por presentarles a los estudiantes (niños y niñas) contextos, en este caso la tienda escolar. Al exponer sus propuestas, los profesores manifiestan en reiteradas ocasiones que *“a través del juego de roles, la resolución de retos y problemas específicos encontrados en la situación, los estudiantes podrán, además de desarrollar competencias matemáticas, hacer uso de esas competencias en su diario vivir”* [DOC_CP1, 23/11/2019]. En el caso de CP6, los profesores usan como pretexto *“una salida pedagógica que se da en el marco de un proyecto institucional para que los estudiantes de primaria hagan matemáticas a partir de lo que calculan pero también de lo que expresan y representan”* [DOC_CP6, 23/11/2019].

Proceso de exploración del medio

Frente a esta categoría, algunos profesores plantearon que el diseño de sus propuestas de clase les permitió considerar y validar elementos de las prácticas que ya desarrollaban en sus clases, específicamente, asuntos relacionados con la exploración del medio. Así, por ejemplo, un profesor que realizó el CP6 mencionó que en su equipo de trabajo: *“Encontramos una oportunidad para presentar un proyecto que se viene desarrollando en el colegio, denominado Ruta de la Excelencia, vemos pertinente presentarlo haciéndole algunos ajustes pues por medio de él podemos proponerle*

a los estudiantes que requieren la recopilación de información y la realización de operaciones para llegar a las conclusiones más adecuadas” [VID_CP3, 23/11/2019]. Este fragmento da cuenta de que los profesores identifican procesos necesarios, pero no suficientes al momento de hacer modelación y no consideraron algunas de sus potencialidades, por ejemplo, la posibilidad de construir diferentes modelos al discutir sus ventajas y desventajas. Este es un componente importante del proceso, ya que desarrollar un argumento para el uso de un modelo en particular es crítico y brinda oportunidades para que los estudiantes expresen sus suposiciones acerca de la situación a ser modelada (Anderson, 2010).

Otra evidencia se presenta en la descripción de uno de los profesores del plan de clase que realizaron en su grupo de trabajo:

“[...] El cambio climático por la que atraviesa el mundo fue la situación que pensamos para generar esta estrategia, [...] nos pareció buena idea porque en los grados cuarto y quinto de primaria se realizan ciertos tipos de experimentos de ciencias naturales [...] entonces nos pareció una buena idea poder llevar a cabo estos experimentos a través de un proyecto integrando las áreas de ciencias, matemáticas y español”. [VID_CP3, 23/11/2019]

En esta última evidencia, se identifica que los profesores planean una situación de modelación matemática que proporciona excelentes oportunidades para colaborar con otros profesores (English, 2010) y, en este sentido, se convierte en una plataforma para que se vinculen estudios y experimentos de carácter interdisciplinario.

Consideraciones finales

Los planes de clase planteados por los grupos de profesores participantes de la investigación se relacionaron con sus experiencias y necesidades personales. En tales planes, los profesores

reconocieron la modelación matemática como un *ambiente de aprendizaje* en el que sus estudiantes, y ellos mismos, pueden desarrollar sus habilidades, sus conocimientos matemáticos y su capacidad crítica. Además, se asociaron al dominio del conocimiento para la enseñanza acerca de cómo proceder en sus aulas cuando proyectaban implementar los planes.

La formulación de planes de clase, como los analizados en este artículo, proporcionaron a los profesores experiencias a través de las cuales identificaron maneras de matematizar fenómenos sociales, para que las matemáticas escolares y algunos fenómenos cotidianos puedan articularse a través de la modelación matemática. Así pues, una de las características del conocimiento de los profesores fue el conocimiento de la modelación matemática como relación entre las matemáticas escolares y el contexto. A pesar del alcance del desarrollo de estos planes, se encontraron limitaciones en cuanto al conocimiento producido y develado, que fueron ocasionadas por el formato en tanto este respondía a criterios específicos para la planeación, dejando de lado algunos elementos del conocimiento de profesor y de la modelación matemática.

La relación entre las matemáticas escolares y el contexto se observó en tres sentidos: (i) como una *manera de dar sentido a las matemáticas a partir de las aplicaciones*; (ii) como una *manera de atender a contextos prediseñados por los profesores*; y (iii) como una *manera de atender a las necesidades particulares de los estudiantes dentro de la clase de matemáticas*.

Otra característica del conocimiento de los profesores es el reconocimiento de la modelación matemática como estrategia para la enseñanza. Los planes de clase propuestos se convierten en evidencia del conocimiento especializado de los profesores, para quienes la modelación matemática se constituye como una oportunidad para implementar en el aula.

Por último, el conocimiento de la modelación matemática como proceso de exploración con el medio, es una característica del conocimiento de los profesores en tanto reconocen la

importancia, en la etapa de la Educación Primaria, del uso de material concreto y de la interacción con el medio para posibilitar la elaboración y análisis de modelos por parte de sus estudiantes.

Referencias

- Alsina, Á. y Salgado, M. (2022). Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿Cómo piensan y qué hacen los niños de 3 años? *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia*, 11(1), 1–38. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2022.1-38>.
- Barbosa, J. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM - Mathematics Education*, 38(3), 293–301. <https://doi.org/10.1007/BF02652812>.
- Bassanezi, R. (2002). Modelagem Matemática—Um Método Científico de Pesquisa ou uma Estratégia de Ensino e Aprendizagem?. En R. Bassanezi (Ed.). *Ensino—Aprendizagem Com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia* (pp. 15-41. Contexto.
- Biembengut, M. (2007). Modelling and applications in primary education. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 451-456). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_50.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study (Vol. 10)*. Springer.
- Blum W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (vol 1, pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3.
- Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in*

Psychology, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>.

- Braun, V., Clarke, V., Hayfield, N. y Terry, G. (2019). Thematic Analysis. En P. Liamputtong (Ed.). *Handbook of Research Methods in Health Social Sciences* (pp. 843–860). Springer.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- Dindyal, J. (2010). Word problems and modelling in primary school mathematics. En B. Kaur y J. Dindyal (Eds.). *Mathematical applications and modelling: Yearbook 2010* (pp. 94-111). World Scientific Publishing.
- Doerr, H. y Pratt, D. (2008). The learning of mathematics and mathematical modeling. In M. Heid y G. Blume (Eds.). *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses* (pp. 259–285). Information Age.
- English, L. y Watters, J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58–79.
- Hill, H., Ball, D., Schilling, S. y Hill, H. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic- Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.
<http://www.jstor.org/stable/40539304>.
- Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 503–510). Springer US.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_58.

-
- Kaiser, G. (2014). *Mathematical Modelling and Applications in Education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396–404). Springer.
- Kaiser, G. (2017). *The Teaching and Learning of Mathematical Modeling*. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). NCTM.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310.
- Luna, A., Souza, E. y Santiago, A. (2009). A modelagem matemática nas séries iniciais: o germém da criticidade. *Alexandria: Revista de Educação Em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 35–157.
- Ocampo-Arenas, M. y Parra-Zapata, M. (2022). Una experiencia de Modelación Matemática escolar en un contexto de Educación Ambiental. *Uni-Pluriversidad*, 22(1), 1–16.
- Parra Zapata, M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Parra-Zapata, M., Parra-Zapata, J., Ocampo-Arenas, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). El índice de masa corporal: una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92, 21-33.
- Parra-Zapata, M., Parra-Zapata, J. y Villa-Ochoa, J. (2017). Gasto energético en las actividades físicas. Una experiencia de modelación matemática en la perspectiva socio-crítica. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 2(1), 54–61.
- Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2015). Tendencias en investigación en modelación matemática en educación primaria. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 235–240.

-
- Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas En Educación*, 16(3), 1–27.
- Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429–1456.
<https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 14(1), 41–70.
- Ruiz Higuera, L., García, F. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6 : Educación Matemática En La Infancia*, 2(1), 95–118.
- Sánchez-Barbero, B., Calatayud, M. y Chamoso, J. (2019). Análisis de la interacción de maestros cuando resuelven problemas realistas conjuntamente con sus alumnos en aulas de primaria, teniendo en cuenta su experiencia docente. *UNIPLURIVERSIDAD*, 19(2), 40–59. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.03>.
- Scheller, M., Bonotto, D., Madruga, Z., Biembengut, M. y Sánchez, J. (2017). Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema? *Ciência & Educação (Bauru)*, 23(1), 197–217. <https://doi.org/10.1590/1516-731320170010012>.
- Shulman, L. (1986). Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Silva, C. y Kato, L. (2012). Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem

-
- Matemática na Perspectiva Sociocrítica? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(43), 817–838. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300004>.
- Tortola, E. y Almeida, L. (2013). Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 94(237), 619–642. <https://doi.org/10.1590/s2176-66812013000200014>.
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 40(2), 193–213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>.
- Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación En Educación*, 8(16), 133–148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>.
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A, y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219–251.
- Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J. y Rendón-Mesa, P. (2021). Formative Assessment of Pre-Service Teachers' Knowledge on Mathematical Modeling. *Mathematics*, 9(8), 851. <https://doi.org/10.3390/math9080851>.
- Villa-Ochoa, J., Soares, M. y Alencar, E. (2019). A modelagem matemática nos anos iniciais como perspectiva para o ensino de matemática: um panorama de publicações brasileiras em periódicos (de 2009 a 2018). *Educar Em Revista*, 35(78), 47–64. <https://doi.org/10.1590/0104-4060.68974>.

CAPÍTULO III

Consideraciones finales, conclusiones y alcances de la investigación

A partir de los elementos descritos en los capítulos I y II, la presente investigación muestra los hallazgos en torno a la caracterización del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática.

En el Capítulo I se argumentó en torno a necesidades de formación de profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria, que no necesariamente tienen formación en esta área. Se planteó la modelación matemática, con sus potencialidades y desafíos de implementación, como *ambiente de aprendizaje* que podría contribuir posibilidades de atención a las necesidades manifiestas y se mostró la contribución del modelo MTSK como modelo teórico a partir del cual se puede interpretar y caracterizar dicho conocimiento. De esta manera se estableció el problema de esta investigación que buscó respuestas a la pregunta *¿Cuáles son las características del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática?*

Los artículos producto de la investigación, presentados en el Capítulo II, mostraron los resultados en torno a características del conocimiento especializado del profesor. Los aportes de los artículos robustecen, además, aspectos propios de formación y estrategias de enseñanza de profesores de matemáticas en modelación matemática en Educación Primaria y del modelo MTSK.

El primer artículo se centró en la identificación del conocimiento especializado de la práctica matemática, que profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria ponen de manifiesto cuando resuelven tareas de modelación matemática. El análisis de dos *tareas* del curso de formación continua, permitió reconocer dos características de la práctica matemática de los profesores para enseñar en Educación Primaria cuando se abordan tareas de modelación matemática.

El contexto que presentan los ambientes de modelación favorece el desarrollo y puesta en escena del conocimiento de la práctica matemática en los profesores de Educación Primaria y el razonamiento en las tareas de modelación matemática puede ser comprendido como una práctica matemática en tanto los profesores realizan procesos inductivos y deductivos al desarrollar dichas *tareas*. La modelación matemática fue comprendida en el desarrollo del artículo, no solo como una práctica particular del quehacer matemático que tiene características particulares, sino como una práctica para la enseñanza de las matemáticas, que es asumida como un *ambiente de aprendizaje de matematización de la realidad* y desarrollo de *tareas*, que permea las demás prácticas y los demás dominios y subdominios que presenta el modelo MTSK. Producto de estos análisis, se categorizó la práctica matemática de modelación matemáticas en tres subcategorías: los *modos de producción del profesor*, el *profesor como resolutor de tareas* y la *enseñanza a través de la modelación matemática*.

En el segundo artículo se describió el conocimiento especializado del profesor que se observa en el diseño de *ambientes de aprendizaje* de modelación matemática para la Educación Primaria. Para ello se recurrió a un análisis de contenido y un análisis temático de seis planes de clase diseñados por los profesores, producto de esos análisis emergieron tres categorías que refieren al conocimiento de los profesores acerca de la modelación matemática en Educación Primaria *como oportunidad para relacionar los contenidos matemáticos y el contexto, como estrategia para la enseñanza y como proceso de exploración del medio*.

En el desarrollo de la investigación, se destacó que la participación de los profesores en las diferentes estrategias que se implementaron en el curso, como el desarrollo y análisis de *tareas* de modelación matemática, la reflexión acerca de su implementación en las aulas de Educación Primaria y la construcción de planes de clase de modelación matemática, posibilitaron no solo el análisis, sino también el desarrollo y la generación del conocimiento especializado en modelación

matemática de los profesores, al integrar esta como herramienta para la enseñanza y como objeto de estudio mismo.

La investigación, también mostró que el acompañamiento por parte de los expertos como la nutricionista y otros profesores investigadores, por medio de los talleres y las asesorías, permitió el avance en el desarrollo y en la consolidación de conocimientos propios de la modelación matemática y de su implementación por parte de los profesores.

Uno de los aportes que brinda esta investigación es una extensión del modelo MTSK cuando profesores de básica primaria generan ambientes de modelación y resuelven tareas de modelación. Así, en conjunto, las respuestas ofrecidas a las dos preguntas complementarias, de los artículos de investigación, fueron insumos para comprender las características del conocimiento especializado de los profesores y por tanto aportar una respuesta a la pregunta que, de manera global, dirigió esta investigación. En este sentido, a partir de los resultados de este estudio se concluye que las características del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática son:

i) **El reconocimiento y uso de los contextos:** se comprende como el conocimiento que los profesores tienen cuando desarrollan ambientes de aprendizaje con *tareas* concretas, con distintas soluciones, por medio de las cuales pueden organizar e interpretar información, establecer relaciones matemáticas y aplicar conocimientos y procesos matemáticos y relacionarlos ya sea con contextos cotidianos de los estudiantes o con contextos adaptados por ellos para un fin específico.

ii) **La capacidad para proponer y desarrollar ambientes de aprendizaje interdisciplinarios:** lo que implica conocimientos especializados del profesor para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, por lo que el trabajo colaborativo, la tecnología, la integración de las disciplinas científicas y la matemática, el abordar problemas reales y el modelar para

entender fenómenos, se convierten en aspectos que deben ser considerados en el desarrollo de los ambientes.

iii) **La habilidad para abordar aspectos relacionados con la enseñanza:** la modelación matemática en todos los niveles de escolaridad, en particular en Educación Primaria, requiere el conocimiento de los profesores que está enmarcado en aspectos como la gestión de aula, la orientación adecuada de las tareas, la formalización y organización de los contenidos, así como el estímulo a la creatividad.

iv) **El interés por el desarrollo de la capacidad crítica:** con la modelación matemática, los profesores evidencian conocimientos que promueven la resolución de problemas, el uso de distintos contenidos matemáticos, la relación entre ellos y la estructuración de distintas formas de razonamiento. Además, incentivan el desarrollo de habilidades asociadas con su capacidad crítica y la de sus estudiantes al favorecer las prácticas discursivas con la generación de *ambientes de aprendizaje* que movilizan el conocimiento matemático y tienen un sentido para lo social.

Aunque los ambientes de aprendizaje y las tareas con modelación matemática que los profesores desarrollaron y planearon, ofrecen información importante acerca de su conocimiento especializado, también es cierto que son limitados, ya que la investigación presentó la limitación de no observar cómo implementaban y ajustaban a las prácticas escolares dichos planes. Por lo tanto, se recomienda para ello investigaciones futuras que estudien cuáles son los conocimientos especializados de los profesores cuando enseñan con modelación matemática. Finalmente, a lo largo de esta investigación, se observó que sigue presentándose una necesidad en cuanto a la formación continua para que los profesores que enseñan matemáticas en Educación Primaria tengan las herramientas y fortalezcan su conocimiento cuando enseñan con modelación matemática.

ANEXOS

Anexo A. Consentimiento informado

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Participación en la investigación “Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática”

En caso de que el presente formulario de consentimiento contenga palabras o conceptos que usted no comprenda, por favor, pídale al investigador o a los asistentes del estudio que le expliquen todas las palabras, conceptos o información con claridad. Igualmente, puede realizar todas las preguntas que considere sean necesarias para tomar la decisión, tómese el tiempo necesario para pensar y, si es del caso, consulte a familiares, amigos o personas allegadas que le ayuden a comprender mejor las razones para aceptar su inclusión en la investigación.

Identificación de la investigadora.

Mónica Mercedes Zapata Jaramillo (principal).
Correo electrónico: mmercedes.zapata@udea.edu.co

Sitio donde se llevará a cabo el estudio.

El estudio se desarrollará en el curso de formación “Enseñar matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática” ofertado para llevarse a cabo en el centro de innovación del maestro, Secretaría de Educación de Medellín.

Entidad que respalda la investigación.

La investigación es ejecutada en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, se encuentra adscrita al grupo de investigación MATHEMA-FIEM.

Información para el participante.

Por este medio deseo solicitar su consentimiento para hacer parte de la investigación que se adelanta en la Maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, titulada “Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática”.

En el marco de esta investigación se ha propuesto y diseñado el curso de formación al cual asiste, en el cual se pretende diseñar en colectivo, situaciones que promuevan el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en Educación Primaria.

Lo anterior me permitirá caracterizar el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas que se promueve y que se evidencia en ustedes como participantes del curso (tanto al hacer parte de los ambientes propuestos, como al proponer los propios, planear la manera cómo

los llevarían a cabo en el aula y reflexionar acerca de las posibilidades y limitaciones que tiene enseñar a través de la modelación). Con lo anterior, se establecerán conclusiones en relación con su conocimiento al enseñar matemáticas a través de la modelación matemática.

No se divulgará ninguna información sobre usted a cualquier persona fuera del proceso de la investigación. Sus nombres serán reemplazados por seudónimos de tipo P1, P2, P3, ... Pn. El personal de investigación mantendrá la información confidencial y no se revelarán nombres en cualquier material o documento. Por ejemplo, cuando los resultados de la investigación se publiquen o se discutan en conferencias, no hay información incluida que puede revelar su identidad de cualquier manera. Cualquier transcripción de trabajos, audio o video serán tomados con absoluta confidencialidad.

Identificación de los riesgos o molestias y plan para minimizarlos.

Entre los riesgos del proyecto se considera la participación de los profesores asistentes al curso de formación, en tanto se hace necesario el cumplimiento de normas relacionadas con la protección de la identidad (personal e institucional), salvaguardar el buen nombre, y el buen uso de los datos y la información utilizada en el proceso. Para minimizar dicho riesgo, se respeta la identidad e integridad personal contenida en videos y fotografías según lo establecido en la normativa colombiana (p. ej. decreto 1377 de 2013). Podrían generarse riesgos psicológicos indirectos según la subjetividad de cada profesor participante. No hay un riesgo directo para los participantes al llevar a cabo los ambientes de Modelación Matemática. De igual manera, no se publicará contenido ofensivo y se evitará la identificación directa de la identidad personal.

Beneficios para el participante.

Los profesores que participen del estudio, tendrán como principal beneficio una formación académica que les permita comprender la Modelación Matemática en Educación Primaria, no solo como una estrategia para la enseñanza de las matemáticas sino también como un componente del conocimiento matemático mismo que, como profesores deben tener y promover. Se trata de constituir un espacio que les permita a los profesores indagar, experimentar, reflexionar y discernir sobre temas de trascendencia relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que les brinda la posibilidad de cualificar sus prácticas. Estos beneficios, a largo plazo, se configuran como competencias importantes para atender las demandas actuales de la sociedad. De igual manera, los resultados que se deriven del estudio brindarán información valiosa para fortalecer los procesos de formación continua de los profesores que enseñan matemáticas en las instituciones educativas de Medellín. Así como el acceso a las estrategias, los ambientes de aprendizaje y las tareas de modelación matemática empleadas en el curso de formación, las cuales poder ser usadas en las clases de los profesores de manera libre.

Procedimientos del estudio.

En consonancia con los planteamientos de lo que entendemos por conocimiento especializado de los profesores, se observarán y caracterizarán las manifestaciones verbales y escritas, las

acciones que los profesores proyectan realizar y las reflexiones que se den en las sesiones del curso de formación. Los profesores asistirán a seis sesiones de cuatro horas cada una y a seis horas de asesoría, para un total de 30 horas. Así mismo elaborarán una estrategia educativa (plan de clase) en la que proyectarán el desarrollo de un ambiente de aprendizaje con tareas de modelación matemática. El curso tiene una certificación otorgada por la Secretaría de Educación de Medellín y su programa de formación.

En ese sentido, les solicitamos su colaboración y respaldo en este ejercicio autorizando que su actividad sea registrada a través de los medios que se presentan a continuación, con el fin de que posteriormente sea analizada en función de los objetivos de la investigación.

1. __SI__ NO Audios que registran cada una de las sesiones del curso.
2. __SI__ NO Videos que registran cada una de las sesiones del curso.
3. __SI__ NO Informe de las acciones realizadas y los contenidos dispuestos en el desarrollo de las sesiones del curso.
4. __SI__ NO Diálogos, documentos y demás recursos que se utilice en las sesiones del curso.
5. __SI__ NO Fotografías.

Participación en la investigación.

En la investigación participarán profesores de instituciones educativas públicas y privadas de la ciudad de Medellín asistentes al curso de formación “Enseñar matemáticas en Educación Primaria a través de la modelación matemática” ofertado por la Secretaría de Educación de Medellín. Los profesores vinculados al curso deben cumplir con las actividades propuestas y la participación en la investigación no ofrece riesgos para la salud, la integridad física o mental de los participantes.

La participación de los profesores en la investigación será valorada y reconocida bajo la óptica del reconocimiento personal, el valor del trabajo socialmente útil y la participación en actividades colectivas de reconocimiento social. Adicionalmente, de la participación en el proyecto informamos que:

1. La participación en el proyecto es voluntaria.
2. Los profesores se pueden retirar de la investigación en cualquier momento por medio de notificación verbal, sin que eso represente un perjuicio para ellos.
3. Los profesores no tendrán incentivos económicos o algún cobro por su participación en el proyecto.
4. Si es su deseo puede estar en el curso más no ser objeto de análisis en la investigación. Esto deberá indicarlo a la investigadora.

Uso de las producciones de los profesores.

Se preservará la identidad de los participantes en el estudio a través de seudónimos y no se realizará ningún tipo de divulgación de la información recolectada que ponga en evidencia la identidad de los participantes.

La información producida será salvaguardada en medios físicos y electrónicos a los cuales tienen acceso la investigadora y sus dos asesores, y en este proceso, se cumplirá la norma colombiana al respecto (decreto 1377 de 2013). Dichas producciones serán usadas solo con fines académicos e investigativos y se evitarán sesgos y juicios de valor que afecten a los participantes. La información recolectada será archivada durante 15 años en formato digital, y será utilizada para los fines propuestos en esta investigación o para generar publicaciones académicas. Tampoco será vendida o cedida a terceras personas o entidades.

La información recolectada podrá ser utilizada en otras investigaciones en las que participe la investigadora del presente proyecto. La información será tratada de la misma manera como se utilizará en el presente proyecto, de acuerdo con la normativa vigente, y siempre garantizando la protección de los participantes.

Obligaciones del investigador.

La investigadora orientará pedagógicamente el curso de formación y realizará seguimiento de la participación y proceso educativos de los profesores participantes del curso. De igual manera, se brindarán todas las garantías posibles para el normal desarrollo y cumplimiento de los compromisos adquiridos en el curso de formación.

La información recolectada solo se utilizará para fines académicos (por ejemplo eventos, artículos, proyectos de investigación). En caso de requerir usar alguna imagen o transcripción para algún informe de investigación se hará guardando la identidad de los participantes. De igual manera, la investigadora se compromete a informar oportunamente cualquier hallazgo que pueda significar problemas o beneficios en la formación de los profesores.

Devolución de la información en la investigación.

El desarrollo de este proceso investigativo se difundirá principalmente por medio del trabajo de grado de la Maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia el cual estará disponible públicamente en el repositorio institucional, de igual manera se espera que de esta experiencia surja al menos una participación en un evento académico y/o un artículo de difusión con fines académicos. Además de esto, la investigación contempla procesos de difusión e interacción con la comunidad nacional en donde se discutan de manera continua el desarrollo del proyecto. También se realizará una puesta en común de los resultados, el día de la socialización de la investigación, invitando a los profesores participantes y con los funcionarios del programa de la Secretaría de Educación de Medellín, con el fin de mencionar aspectos que deben ser tomados en cuenta para la formación continua de los profesores.

Personas a contactar para información.

Mónica Mercedes Zapata Jaramillo

Correo electrónico: mmercedes.zapata@udea.edu.co

Aceptación de la participación.

Manifiesto que no he recibido presiones verbales, escritas y/o mímicas para participar en el estudio; que dicha decisión la tomé consciente y libremente en pleno uso de mis facultades mentales, sin encontrarme bajo efectos de medicamentos, drogas o bebidas alcohólicas. Además, me fue entregada una copia del consentimiento informado y tuve un tiempo óptimo para leerla y revisarla.

He leído y escuchado satisfactoriamente las explicaciones de la participación en esta investigación; así mismo, se me brindó copia del consentimiento informado y he tenido la oportunidad de hacer preguntas a las cuales se me han respondido satisfactoriamente, por lo que estoy de acuerdo en participar en ella y autorizo el uso de la información obtenida para los propósitos planteados en los apartados precedentes de este consentimiento.

Firma de consentimiento

Nombre:

Número de identificación:

Correo electrónico:

Tel:

Fecha:

Firma de quien gestiona el consentimiento informado

Mónica Mercedes Zapata Jaramillo

Correo electrónico: mmercedes.zapata@udea.edu.co

Anexo B. Formato Plan de clase

Este formato de plan de clase fue diseñado en la línea de reflexión metodológica del lugar en el que se llevó a cabo el curso de formación. En él se plantean aspectos generales del plan y también aspectos relacionados con su posible implementación en el aula. Se cuenta con permiso de uso para esta investigación por parte del programa de la Secretaría de Educación de Medellín.

PLAN DE CLASE	
Identificación	
Nombre del plan de clase	
Institución Educativa	
Nombre del maestro, maestra, agente educativo	
Email	
Palabras clave	
Resumen	
Descripción	
Situación que originó el diseño del plan de clase	
Ambiente en el que se implementará	
Población beneficiada	
Propósito	
Actividades que se desarrollaran en el plan de clase	
Recursos, materiales requeridos	
Referencias	