



Semejanza de triángulos: un concepto para promover niveles de razonamiento geométrico

Sor Ángela Jiménez Castro

Trabajo de investigación presentado para optar al título de Magíster en Educación otorgado por la  
UdeA

Asesora

Sandra Milena Zapata, Doctora en Educación

Universidad de Antioquia  
Facultad de Educación  
Maestría en Educación metodología virtual  
Medellín, Antioquia

<b>Cita</b>	(Jiménez Castro, 2023)
<b>Referencia</b>	Jiménez Castro, S. A. (2023). <i>Semejanza de triángulos: un concepto para promover niveles de razonamiento geométrico</i> [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
<b>Estilo APA 7 (2020)</b>	



Maestría en Educación metodología virtual, Cohorte VII

Grupo de Investigación Matemática Educación y Sociedad (MES).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Jurados

Doctor Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor Rubén Darío Henao Ciro



Centro de Documentación Educación

**Repositorio Institucional:** <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - [www.udea.edu.co](http://www.udea.edu.co)

**Rector:** John Jairo Arboleda Céspedes.

**Decano/Director:** Wilson Antonio Bolívar Buriticá

**Jefe departamento:** Mauricio Múnica Gómez.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

## **Dedicatoria**

Esta tesis se la dedico especialmente a Dios y a mi familia. A Dios porque gracias a Él he podido culminar cada logro en mi proyecto de vida, me ha guiado en cada paso que doy y me ha ayudado a superar mis quebrantos de salud y obstáculos durante estos años, y a mi hermosa familia, quien siempre me han apoyado y creen en mí; a mis padres por darme la existencia y desearme siempre lo mejor; a mi amado esposo por brindarme su amor, paciencia y comprensión, por apoyarme económicamente en mis proyectos y ayudarme en los quehaceres del hogar, a mi hijo por brindarme su apoyo y palabras bonitas de aliento en medio de angustias; y a mi hija por ser tolerante al regalarme el espacio y el tiempo que ella requiere.

## Agradecimientos

Al finalizar este trabajo de posgrado aprovecho este espacio para dar mis más sinceros agradecimientos a todos los que hicieron parte en algún momento de mi proceso de formación y el desarrollo de mi investigación. Por ello, con este espacio me quedo corta en palabras para reconocer los aportes tan valiosos de las personas e instituciones que hicieron posible la culminación de tan arduo trabajo, sin ellas no hubiese sido posible.

Especialmente agradezco a la docente Dra. Sandra Milena Zapata, por ser mi asesora y su acertada orientación en mi trabajo de investigación, su oportuna participación, su apoyo y confianza han sido la clave del buen trabajo realizado, además, sus aportes y correcciones hicieron posible que hoy llegara a un buen término esta tesis.

A todos los docentes que hicieron parte de mi proceso de formación gracias por sus aportes tan valiosos, rigurosos y necesarios, por la paciencia y por compartir sus conocimientos y experiencias, estos me impulsaron a ser una mejor estudiante y poner en práctica en mi labor docente los aprendizajes adquiridos, además de continuar con mi proceso de investigación dado que en la educación es una labor de nunca terminar. En especial quiero agradecer al docente Dr. Zairo Alfonso Anillo, quien con sus consejos, orientación y aportes invaluable orientaron mi investigación, pero sobre todo debo destacar su disponibilidad, paciencia y dedicación en los procesos de formación que aportaron al trabajo realizado.

Para mis compañeras y compañeros que durante el posgrado compartieron conmigo la elaboración de trabajos durante horas, quienes a pesar de la distancia recordaban los encuentros virtuales, compartían libros virtuales y de quienes recibí su apoyo y motivación dispuestos al compartir sus conocimientos y experiencias, a todos ellos solo tengo palabras de agradecimiento.

Quiero mencionar con cariño a los estudiantes que se vincularon de manera voluntaria en la participación de esta investigación, a ellos darles mis más sinceros agradecimientos, por su entrega y dedicación en cada encuentro, quienes dieron lo mejor de cada uno y con una excelente actitud.

Un agradecimiento muy especial a la Universidad de Antioquia por brindar programas de posgrados a través de la educación virtual, oportunidad que pude aprovechar para continuar mis estudios y cumplir mis sueños, pues mi tiempo es muy reducido para desplazarme y asistir de

manera presencial a la universidad debido a mis múltiples quehaceres como esposa, madre, docente y las labores del hogar.

Por último, mi agradecimiento más profundo es para Dios por bendecirme cada día y darme todos los regalos que recibo en salud, amor, prosperidad y la bendición más grande y bonita que es mi familia. Por darme la oportunidad de cumplir con mis sueños y de manera muy especial les doy infinitas gracias a mi esposo Jorge Enrique Correa Trespalacios, mi hijo Juan Manuel Correa Jiménez y mi hija Violeta Correa Jiménez, por darme estos dos años su apoyo incondicional al estar a mi lado para compartir mi felicidad, angustias, tristezas, días enteros y desvelo en mis horas de estudio, pero sobre todo motivarme a terminar con toda la energía positiva que siempre me transmiten para culminar cada logro en mi vida.

## Tabla de contenido

<b>RESUMEN .....</b>	<b>15</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>16</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>17</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Descripción del problema .....</b>	<b>19</b>
<b>2. OBJETIVOS .....</b>	<b>29</b>
<b>2.1 Objetivo general .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2 Objetivos específicos .....</b>	<b>29</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>3. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Razonamiento geométrico en la educación matemática.....</b>	<b>31</b>
<b>3.2 El modelo educativo de van Hiele .....</b>	<b>32</b>
3.2.1 Descripción del modelo educativo de van Hiele .....	33
3.2.2 Niveles de razonamiento.....	34
3.2.3 Caracterización de los niveles.....	37

3.2.4 Descriptores .....	38
3.2.5 Fases de aprendizaje .....	39
3.2.5.1 Descriptores de fases .....	43
3.2.6 Semejanza de triángulos en los procesos de aprendizaje .....	44

## **CAPÍTULO 3**

<b>4. METODOLOGÍA .....</b>	<b>45</b>
<b>4.1 Enfoque y tipo de investigación .....</b>	<b>46</b>
<b>4.2 Método de investigación.....</b>	<b>47</b>
4.2.1 Características de los experimentos de diseño .....	48
4.2.2 Experimento de enseñanza.....	51
4.2.3 Diseño del experimento de enseñanza e instrumentos de recolección de información .....	51
4.2.4 Momentos del experimento de enseñanza .....	53
<b>4.3 Participantes .....</b>	<b>54</b>
<b>4.4 Ruta metodológica.....</b>	<b>54</b>
4.4.1 Descriptores de los niveles 2 y 3 del modelo de van Hiele .....	55
4.4.1.1 Descriptores (D) del Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).....	55
4.4.1.2 Descriptores (D) del Nivel 3. Clasificación de una figura geométrica (triángulo).....	55
4.4.2 Etapas de la ruta metodológica.....	57
4.4.2.1 Etapa 1.....	57
4.4.2.2 Etapa 2.....	57

4.4.2.3 Etapa 3.....	58
----------------------	----

## **CAPÍTULO 4**

<b>5. ANÁLISIS .....</b>	<b>59</b>
--------------------------	-----------

<b>5.1 Descripción del experimento de enseñanza .....</b>	<b>60</b>
---	-----------

<b>5.2 Análisis general del “pretest” .....</b>	<b>83</b>
---	-----------

## **CAPÍTULO 5**

<b>6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....</b>	<b>147</b>
---	------------

<b>6.1 Alcances de los estudiantes .....</b>	<b>148</b>
--	------------

<b>6.2 Consecución de los objetivos .....</b>	<b>149</b>
---	------------

<b>6.3 Limitantes de la investigación .....</b>	<b>150</b>
---	------------

<b>6.4 Futuras líneas de investigación .....</b>	<b>150</b>
--	------------

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>151</b>
--	------------

## **ANEXOS**

<b>Anexo A. Pretest: Prueba Diagnóstica .....</b>	<b>156</b>
---	------------

<b>Anexo B. Fase 1: Información. Recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás .....</b>	<b>169</b>
---	------------

<b>Anexo C. Fase 2: Orientación dirigida. Implementación de las TICS con GeoGebra .....</b>	<b>175</b>
---	------------



<b>Anexo D. Fase 3: Explicitación. Experimentemos con el teorema de Tales ...</b>	<b>180</b>
<b>Anexo E. Fase 4: Orientación libre. Resolución de problemas en contexto ...</b>	<b>185</b>
<b>Anexo F. Fase 5: Integración. Postest.....</b>	<b>187</b>

## Lista de tablas

Tabla 1: Informe prueba saber por EE en los años 2016, 2017, 2018, 2019 y 2020 .....	20
Tabla 2: Estructura recursiva de los niveles.....	35
Tabla 3: Descriptores del experimento de enseñanza .....	61
Tabla 4: Descriptores de los niveles 2 y 3 que direccionaron el “pretest” .....	63
Tabla 5: Elementos del “pretest” para clasificar $E_1$ , $E_2$ y $E_3$ en un nivel 2 del modelo de van hiele.....	66
Tabla 6: Resultado del “pretest” para clasificar $E_1$ en un nivel 2 del modelo de van hiele .....	67
Tabla 7: Resultado del “pretest” para clasificar $E_2$ en un nivel 2 del modelo de van hiele .....	68
Tabla 8: Resultado del “pretest” para clasificar $E_3$ en el nivel 2 del modelo de van hiele .....	69
Tabla 9: Elementos y actividad 8 del “pretest” para clasificar $E_1$ , $E_2$ y $E_3$ en un nivel 3 del modelo de van hiele.....	71
Tabla 10: Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar $E_1$ en un nivel 3 del modelo de van hiele.....	72
Tabla 11: Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar $E_2$ en un nivel 3 del modelo de van hiele.....	73
Tabla 12: Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar $E_3$ en un nivel 3 del modelo de van hiele.....	75
Tabla 13: Elementos y actividades 9, 10, 11 y 12 del “pretest” para clasificar $E_1$ , $E_2$ y $E_3$ en un nivel 3 del modelo de van hiele. ....	76
Tabla 14: Resultado del “pretest” para clasificar $E_1$ en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	77

Tabla 15: Resultado del “pretest” para clasificar $E_2$ en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	79
Tabla 16: Resultado del “pretest” para clasificar $E_3$ en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	81
Tabla 17: Matriz de resultados y análisis general del pretest para el nivel 2 del modelo de van hiele.....	84
Tabla 18: Matriz de resultados y análisis general del pretest para el nivel 3 del modelo de van hiele.....	86
Tabla 19: Elementos y actividades del $M_1$ : “recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás”. Fase 1: información. ....	89
Tabla 20: Resultados de $E_1$ que corresponden al $M_1$ de la fase 1: información. ....	91
Tabla 21: Resultados de $E_2$ que corresponden al $M_1$ de la fase 1: información. ....	94
Tabla 22: Resultados de $E_3$ que corresponden al $M_1$ de la fase 1: información. ....	96
Tabla 23: Matriz de la fase 1: información. ....	99
Tabla 24: Elementos y actividades del $M_2$ : “implementación de las TICS con GeoGebra”. Fase 2: orientación dirigida.....	102
Tabla 25: Resultados de $E_1$ que corresponden al $M_2$ de la fase 2: orientación dirigida.....	103
Tabla 26: Resultados de $E_2$ que corresponden al $M_2$ de la fase 2: orientación dirigida.....	105
Tabla 27: Resultados de $E_3$ que corresponden al $M_2$ de la fase 2: orientación dirigida.....	107
Tabla 28: Matriz de la fase 2: orientación dirigida .....	109
Tabla 29: Elementos y actividades del $M_3$ : “experimentemos con el teorema de tales”. Fase 3: explicitación.....	112
Tabla 30: Resultados de $E_1$ , $E_2$ y $E_3$ , que corresponden al $M_3$ de la fase 3: explicitación. ....	114

Tabla 31: Matriz para la fase 3: explicitación.....	119
Tabla 32: Elementos y actividades del M <sub>4</sub> : “resolución de problemas en contexto”. Fase 4: orientación libre. ....	122
Tabla 33: Resultados de E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> y E <sub>3</sub> , que corresponden al M <sub>4</sub> de la fase 4: orientación libre.....	123
Tabla 34: Matriz para la fase 4: orientación libre .....	129
Tabla 35: Elementos y actividades del M <sub>5</sub> : “postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración.....	131
Tabla 36: Resultado del “postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar E <sub>1</sub> en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	133
Tabla 37: Resultado del “postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar E <sub>2</sub> en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	135
Tabla 38: Resultado del “postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar E <sub>3</sub> en un nivel 3 del modelo de van hiele .....	138
Tabla 39: Matriz para la fase 5: integración.....	141
Tabla 40: Matriz que relaciona el paso por cada fase del nivel 3 en los estudiantes E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> y E <sub>3</sub> .....	143

## Lista de figuras

Figura 1: Fases de aprendizaje.....	40
Figura 2: Niveles y fases de aprendizaje del modelo de van hiele.....	44
Figura 3: Características de los experimentos de diseño.....	50

## **Siglas, acrónimos y abreviaturas**

<b>UdeA</b>	Universidad de Antioquia
<b>MEN</b>	Ministerio de Educación Nacional
<b>ICFES</b>	Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación
<b>ISCE</b>	Índice Sintético de la Calidad Educativa
<b>TICS</b>	Tecnologías de la información y la Comunicación
<b>EE</b>	Establecimiento Educativo
<b>EBC</b>	Estándares Básicos de Competencias
<b>DBA</b>	Derechos Básicos de Aprendizaje
<b>E</b>	Estudiante
<b>M</b>	Momento

## Resumen

En esta investigación se hace una reflexión sobre algunos factores que afectan la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes para la comprensión de conceptos de geometría. Para ello, se utilizó en este estudio como referente el modelo educativo de van Hiele, porque ayuda a mejorar el razonamiento y a estructurar el aprendizaje de los estudiantes en conceptos geométricos; asimismo, ayudó en el análisis de cómo se promueven los niveles de razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos en tres estudiantes de secundaria de la institución educativa Lusitania Paz de Colombia. La metodología utilizada tiene un enfoque cualitativo, pues es de corte cuasiexperimental-analítico y la recolección de los datos se hizo mediada por la observación, entrevistas, toma de notas y diarios de campo. Para dar cumplimiento a los objetivos propuestos se trazó una ruta metodológica que se desarrolló en tres etapas para guiar el trabajo de campo con la difusión e invitación a estudiantes, luego la preparación y aplicación de un experimento de enseñanza, el cual fue diseñado con descriptores para cada fase del modelo que proporcionaron el tránsito de manera secuencial al siguiente nivel, para este caso del nivel 2 al nivel 3 y la ejecución del análisis de los datos demostraron la validez y eficacia de este modelo al desarrollar en los estudiantes habilidades referentes a la visualización, el uso del lenguaje y la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos.

*Palabras clave:* van Hiele, fases de aprendizaje, experimento de enseñanza, semejanza de triángulos

## **Abstract**

In this research a reflection is made on some factors that affect teaching and learning in students for the understanding of geometry concepts. For this purpose, van Hiele's educational model was used in this study as a reference because it helps to improve reasoning and to structure the learning of students in geometric concepts, likewise, it helped in the analysis of how the levels of geometric reasoning are promoted for the understanding of concepts framed in the similarity of triangles in three high school students of the Lusitania Paz de Colombia educational institution. The methodology used has a qualitative approach as it is quasi-experimental-analytical and the data collection was mediated by observation, interviews, note taking and field diaries. In order to comply with the proposed objectives, a methodological route was traced and developed in three stages to guide the field work with the dissemination and invitation to students, then the preparation and application of a teaching experiment which was designed with descriptors for each phase of the model that provided the sequential transition to the next level, in this case from level 2 to level 3, and the execution of the data analysis demonstrated the validity and effectiveness of this model in developing in students skills related to visualization, the use of language and the understanding of concepts of similarity of triangles.

*Keywords:* van Hiele, learning phases, teaching experiment, similarity of triangles



## Introducción

Esta investigación fue producto de la reflexión que he realizado en la labor docente durante los últimos años en la institución educativa Lusitania Paz de Colombia. En esta he tenido la oportunidad de trabajar en el área de matemáticas, lo que permitió identificar algunos factores que han generado dificultades al momento de promover el razonamiento en los estudiantes de secundaria en relación con los conceptos de geometría. Así pues, se identificó cierta prevención de los estudiantes frente a esta asignatura dada la complejidad con la que se les ha presentado, a esto se suma la necesidad de consolidar saberes previos, una ausente integración de elementos de conceptualización con la visualización y fortalecimiento de competencias asociadas con propiedades características de conceptos geométricos; de igual manera, problemas de representación de figuras geométricas y la falta de comprensión del significado de sus definiciones.

En consecuencia, el presente estudio centra la atención en el componente geométrico porque este favorece la promoción del razonamiento y aporta a procesos de formación que mejoran el aprendizaje en los estudiantes. Así pues, se hizo una exhaustiva lectura de investigaciones (Aravena y Caamaño, 2013; Gualdrón, 2014; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009; Vanegas, 2019; Ávila, 2017; Giraldo, 2021) acerca del modelo educativo utilizado como referente teórico, el cual se enfocó en mejorar la comprensión de conceptos, estratificar el pensamiento de los estudiantes y promover niveles de razonamiento entre ellos. Este modelo fue el de van Hiele, pues sus componentes niveles de razonamiento, fases de aprendizaje e *insigh*, han aportado estrategias que conducen al aprendizaje de la geometría, como también a la promoción y desarrollo de la capacidad de razonamiento.

Los estudios mencionados fueron un respaldo en esta investigación, dado que tiene por objeto analizar cómo se promueven los niveles de razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos a la luz del modelo de van Hiele en estudiantes de secundaria; y para contribuir al cumplimiento de este objetivo fue necesario revisar con detenimiento los aspectos que sustentan el planteamiento del problema a partir del contexto en el que se desarrolla el estudio, los factores que han ocasionado dificultades para promover el razonamiento en los estudiantes en conceptos

relacionados con la geometría, la importancia de este componente en la educación y la revisión de evaluaciones externas en cuanto a competencias comunicativas y de razonamiento. Debido a lo anterior, surgió la siguiente pregunta como objeto de reflexión en esta investigación: ¿Cómo promover el razonamiento geométrico en los niveles del modelo de van Hiele en estudiantes de secundaria para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos?

En coherencia con anterior, el componente geométrico es de suma importancia en la educación. Esto lo sustenta el MEN (1998), al emplearlo como un instrumento que proporciona elementos para desarrollar el pensamiento espacial y presenta el modelo de van Hiele como una opción que puede orientar el currículo, pues este desarrolla procesos de nivel superior y su aplicación puede producir evolución en el razonamiento geométrico, estructurar el aprendizaje en los estudiantes y superar las dificultades mencionadas.

Es así como el modelo de van Hiele se configuró en un marco teórico para la investigación. En esta línea, componentes como los niveles de razonamiento permitieron una estratificación del pensamiento de los estudiantes participantes. Es de anotar la existencia de investigaciones (van Hiele, 1957; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009) que afirman que la mayoría de los estudiantes razonan en niveles inferiores al 3 en el marco del modelo de van Hiele, esto fue un elemento adicional que motivó esta investigación, al considerar factores necesarios para analizar cómo razonan los estudiantes y cómo se promueve dicho razonamiento en los niveles. Adicionalmente, a través de los descriptores propuestos fue posible identificar acciones que eran propias de un nivel II de razonamiento y que denotaban comprensiones asociadas con el mismo.

Una vez determinado el nivel de razonamiento para los estudiantes, se dio inicio al desarrollo de un trabajo de campo que fue mediado por un experimento de enseñanza que tuvo cinco momentos en correspondencia con las fases de aprendizaje, las cuales propendieron por lograr un progreso al nivel de razonamiento 3, en lo referido a conceptos asociados con la semejanza de triángulos y los criterios que permiten definirla. Este diseño permitió promover niveles de razonamiento en los estudiantes en procesos de construcción de conceptos geométricos.

## Capítulo 1

### 1. Planteamiento del problema

#### 1.1 Descripción del problema

La investigación parte de la reflexión que he realizado en la labor docente durante los últimos cinco años en la Institución Educativa Lusitania Paz de Colombia, establecimiento de carácter oficial ubicado en la comuna 60 en el corregimiento de San Cristóbal, que presta su servicio a más de dos mil estudiantes que pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3 desde el grado transición hasta undécimo. En esta, he tenido la oportunidad de trabajar en el área de matemáticas, y he observado dificultades presentadas por los estudiantes en relación con conceptos de geometría.

El aprendizaje de la geometría implica desarrollar habilidades y actitudes para relacionar la teoría con la práctica, y que estas, a su vez, cobren significado. En aras de propender por establecer esta relación, el MEN (2006) define las competencias en educación como “*saber hacer* en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos” (p. 12). Estas situaciones se enfocan en servir de guía para alcanzar mayores niveles y mejorar la calidad que se espera de un estudiante que ingresa al sistema educativo, del mismo modo, los estándares básicos de competencias hacen parte de los parámetros que facilitan la evaluación interna y externa utilizada para identificar si un estudiante alcanza o no la calidad establecida por ellos durante su vida escolar.

Dicho esto, a los niveles 3°, 5° de educación básica primaria, 9° de educación básica secundaria y 11° de educación media el ICFES se les hace monitoreo mediante evaluaciones externas, para calcular el Índice Sintético de la Calidad Educativa (ISCE), y verificar el porcentaje de estudiantes que alcanzan niveles satisfactorios y avanzados, esperando el aumento del porcentaje en cada aplicación.

A continuación, se relaciona la descripción que presenta el MEN (2021) en su informe de resultados históricos de las Pruebas Saber, información obtenida de cada Establecimiento Educativo (EE). En esta se relacionan los resultados según el puntaje o clasificación obtenida

de las pruebas saber 11°, a partir de una escala en la que “[...] A+ es la clasificación más alta y D la más baja” (p. 5).

**Tabla 1**

*Informe prueba Saber por EE en los años 2016, 2017, 2018, 2019 y 2020*

<b>Información del Establecimiento Educativo:</b>				
<b>Institución Educativa Lusitania Paz de Colombia</b>				
<b>Código DANE</b>	105001026573			
<b>Municipio</b>	Medellín			
<b>Secretaría de Educación</b>	Medellín			
<b>Departamento</b>	Antioquia			
<b>Clasificación del EE según Saber 11</b>				
<b>2016</b>	<b>2017</b>	<b>2018</b>	<b>2019</b>	<b>2020</b>
<b>C</b>	<b>C</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>D</b>

*Nota.* Datos tomados del Informe de resultados históricos prueba Saber MEN (2021).

Se puede apreciar, que los resultados obtenidos y relacionados en las tablas adjuntas muestran la Institución Educativa en la escala de clasificación D durante los últimos años; de la misma manera, relacionan en los resultados porcentajes con respecto a desempeños en un nivel de satisfactorio y avanzado mínimos para secundaria en el grado 9°. La reflexión desde la práctica, la observación constante y los resultados de evaluaciones externas, llevaron al presente estudio a prestar mayor atención al componente geométrico que se relaciona para el grado en cuestión y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que se enmarcan en los conceptos de geometría sobre semejanza de triángulos, los cuales podrían favorecer la promoción del razonamiento dada su importancia en niveles superiores de la educación.

Para cada nivel, los DBA permiten identificar los saberes que debe adquirir un estudiante en el área de matemáticas atendiendo a los estándares relacionados del grado. Según el MEN (2016), estos estructuran los aprendizajes entendidos como la unión de las habilidades que se movilizan de un grado a otro en función de los procesos de aprendizaje de

los estudiantes: los conocimientos. Por consiguiente, los DBA que articulan el objeto de estudio en esta investigación corresponden al grado 9°, debido a que su metodología y estrategias podrían favorecer la promoción del razonamiento, en articulación con los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, que son los que mejor describe el estándar junto a las evidencias de aprendizaje que se relacionan a continuación:

- Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.
  - Evidencias de aprendizaje
  - Reconoce regularidades en formas bidimensionales y tridimensionales.
  - Explica criterios de semejanza y congruencia a partir del teorema de Thales.
  - Compara figuras geométricas y conjetura sobre posibles regularidades.
  - Redacta y argumenta procesos llevados a cabo para resolver situaciones de semejanza y congruencia de figuras. (MEN, 2016, p. 69)

Dada la importancia y necesidad de la promoción del razonamiento geométrico (van Hiele, 1957; Fouz, 2013; Gualdrón, 2014; Jurado y Londoño, 2005; Londoño et al., 2017; Ávila, 2017), se valida en la literatura el desarrollo de diferentes investigaciones, teorías y modelos que propenden por el análisis y la comprensión de conceptos enmarcados en este campo, y que pueden estar enfocados en lo que hacen el profesor y el estudiante, tal como lo propone el modelo educativo de van Hiele, que fue diseñado para la comprensión y promoción del razonamiento asociado con conceptos de la geometría.

En relación con esta asignatura en particular, es común encontrar cierta prevención en los estudiantes, debido a que esta pertenece al área macro de las ciencias fácticas (Mesía Maraví, 2012). Por tal motivo, muchas veces el problema que los estudiantes llegan a presentar ante esta asignatura se puede deber a la complejidad que implica su naturaleza de ciencia dura, sin tomar en cuenta que esa perspectiva se termina convirtiendo en una limitante, y no en lo que debería ser: un motivo para la creación de alternativas que permitan confrontarla y aprenderla desde métodos y formas novedosas. De acuerdo con Medina et al.,

en su investigación “Factores personales que inciden en el bajo rendimiento de los estudiantes de geometría” (2017):

No obstante, los jóvenes estudiantes en pocas oportunidades están conscientes de su responsabilidad en su posible “fracaso académico” y suelen responsabilizar a la institución y a sus profesores, especialmente en cátedras como Geometría, área de la matemática que exige para su comprensión: estudio, orden, rigurosidad, y un trabajo dedicado y continuo. (párr. 22)

Con base en lo anterior, desde la experiencia personal, me fue posible sumar otros. Veamos en detalle: en primer lugar, hay problemas con la identificación de los saberes previos. Para todo docente resulta imprescindible reconocer el nivel de conocimiento previo de sus estudiantes, para así crear estrategias que les permitan ubicarse en el punto de partida especial en cuanto a los temas y las formas de enseñanza. Es claro que no habrá, debido a la multiplicidad de estudiantes que conforman un aula, un único nivel, pero sí es posible definir criterios múltiples con cierta homogeneidad en sus contenidos temáticos. Los presaberes no ayudan solo a definir estos puntos de partida, sino que también propician la sensibilización a partir del reconocimiento del estado educativo de los chicos: si sé qué saben, puedo comunicarme con ellos desde un mismo plano, cuestión que favorece a la empatía y el reconocimiento mutuo.

En segundo lugar, la no integración de elementos de conceptualización con la visualización resulta otro factor determinante, pues sabemos que por naturaleza la forma representativa y de análisis a la que propende la geometría es gráfica-abstracta y, además, numérica. Esta forma de presentarse puede resultar una limitante para la comunicación del área y la comprensión de los estudiantes, de tal manera que trabajar en conceptos lingüísticos que abonen el terreno para una proyección de contenidos más eficaz puede favorecer el proceso de aprendizaje. Los seres humanos nos comunicamos de múltiples formas, a través de lo kinésico, de lo lingüístico, de lo numérico, pero está claro que sobre todos predomina lo lingüístico; por sentido común, correos, mensajes, diálogos en reuniones, libros de textos, informes, exposiciones, disertaciones, participación en el aula, son los recursos más usados a la hora de comunicarnos. En el área de la geometría el énfasis no está en este modo de habla y escritura más generalizado y común, no es lo habitual, así que revisar las posibilidades de

conceptualización en relación con la visualización puede resultar benéfico para la socialización de los contenidos.

En tercer lugar, la falta de competencia en el análisis de propiedades, problemas en las representaciones de figuras geométricas y la falta de comprensión del significado de sus definiciones son otros de los aspectos interrelacionados y particulares que afectan las posibilidades de comprensión. Aquí hay que tomar en cuenta que el asunto no solo corresponde a los docentes, es claro que todo depende en gran medida de la voluntad de los estudiantes, pero esa voluntad es maleable ante las estrategias diseñadas, así que en ese sentido buscar posibilidades acrecienta el margen de éxito que pueda tener el proceso. De estos factores, se puede inferir otra dimensión sustancial del problema, y tiene que ver con la concepción tradicionalista de la geometría como una ciencia ubicada casi en un terreno absolutamente abstracto (Camargo y Acosta, 2012), como si no tuviera presencia en el entorno natural y real que a diario nos rodea tanto en la misma escuela como en cualquier otro lugar en el que nos encontremos.

Cada una de estas dimensiones evidencia la necesidad de prestar especial atención al componente geométrico dado los retos que ofrece en el campo de la educación matemática; asimismo, es necesario dotar de sentido su importancia dentro del entorno escolar; y también, de manera simultánea, transversalizar con otras áreas para proporcionar elementos al estudiante que le permitan su aplicabilidad para la vida diaria en distintos contextos. Esto, además de su propia justificación por el compromiso que tenemos con el saber, se sustenta en lo legislativo-educativo de los estándares básicos de competencias, en los que existe la tendencia a superar las formas tradicionales consistentes posiblemente asociadas con transmitir y memorizar contenidos, para centrarse en “[...] comprender los conocimientos y utilizarlos dentro y fuera de la escuela, de acuerdo con las exigencias de los distintos contextos” (MEN, 2006, p. 12). En relación, hay que mencionar, además, que estos estándares permiten monitorear los procesos matemáticos para evaluar los avances en cuanto a las competencias comunicativas y de razonamiento que tienen los estudiantes, y que se suman a las dificultades frente a las acciones relacionadas con la comunicación y la modelación. Dichas acciones se argumentan con el razonamiento, factor ausente en los procesos de aprendizaje matemático a los que se enfrentan los estudiantes al momento de

resolver situaciones problema en el área de matemáticas. De esta manera, la necesidad expresada en la composición conceptual de los estándares como guías del deber ser en la educación posibilitan definir qué fallas hay, qué falta, qué se necesita y qué se puede hacer para subsanar las deficiencias en la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Para ello, a continuación, se presentan aspectos fundamentales que sustentan el problema de investigación a partir del contexto en el cual se desarrolla el presente estudio, las dificultades que presentan los estudiantes en la asignatura de geometría, la importancia de la geometría en la educación matemática y la necesidad de revisar las competencias comunicativas y de razonamiento que se evalúan en la educación.

En primer lugar, las prácticas educativas deben estar acompañadas de procesos de razonamiento que lleven al estudiante a generar conocimiento de una manera autónoma y, principalmente, a “[...] promover un proceso constructivo que será distinto para cada estudiante y para cada grupo, por eso el mejor diseño será el que satisfaga las necesidades diversas de todos” (Morales, 2016, p. 22). Considero que este binomio de alternativas para la reformulación del aprendizaje de la geometría, y el razonamiento integral en torno al área puede brindar un modelo práctico para una mayor aprehensión de los contenidos geométricos.

Adicionalmente, dichas prácticas también están convocadas a incluir estrategias que permitan, desde la diversidad, orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de actividades que relacionen la nueva información con la que el estudiante ya sabe, y, por consiguiente, contribuir a promover el razonamiento; así, las clases pueden convertirse en un espacio de interacción, creatividad e innovación en el que se superen las limitaciones que se presenten y poder atender a sus intereses. Del mismo modo, para garantizar la implementación de dichas estrategias, se hizo una exhaustiva lectura de investigaciones que permitan aportar al campo de la educación matemática para generar ambientes de aprendizaje posibilitadores de la promoción del razonamiento en los estudiantes, esto con el fin de alcanzar mayores logros en su ejercicio educativo al implementar estas estrategias en el campo de la educación y su contribución al ejercicio docente.

Para el diseño e implementación de estrategias, fue necesario profundizar en aquellos factores que han generado dificultades al momento de promover el razonamiento en los



estudiantes. En primer lugar, al indagar en posibles factores que ocasionan falencias en el proceso educativo frente a los saberes previos que presentan los estudiantes, autores como Corberán et al. (1994) afirman que algunas dificultades con las que se encuentra un docente al momento de enseñar matemáticas son de tipo académico, y las metodologías implementadas por docentes en grados inferiores podrían ser algunos factores que dan lugar a obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes en secundaria, debido a que en algunas metodologías implementadas por los docentes prima la manipulación y la observación del objeto matemático en estudio y, en otros casos, la memorización de las definiciones o propiedades, dejando de lado en su mayoría la comprensión y argumentación.

En segundo lugar, se evidencia también la necesidad de integrar los elementos de conceptualización con la visualización, dado que esta integración puede facilitar la capacidad de retentiva e identificación que es natural en el estudiante al vincular los saberes con el entorno. Estaríamos entonces hablando de un aprendizaje significativo. De acuerdo con Ramírez et al. (2018): “[...] en el quehacer matemático [son] componentes clave el razonamiento, la resolución de problemas y las demostraciones” (p. 31), porque permiten desarrollar habilidades al momento de manipular el objeto matemático, modificarlo o transformarlo, además de que facilita el entendimiento al identificar los elementos característicos de las figuras geométricas y las nuevas relaciones entre estas.

En efecto, al revisar lo que se evalúa en relación con las competencias básicas, se ha evidenciado que los estudiantes presentan desempeños académicos bajos en el área de matemáticas, especialmente en las competencias comunicativas y de razonamiento. Asuntos como estos se observan en los resultados obtenidos en pruebas externas realizadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (ICFES, 2017), y que arrojaron desaciertos en las preguntas sobre competencias de resolución y razonamiento<sup>1</sup>. Estas preguntas hacen referencia a dificultades que tienen los estudiantes para hallar medidas de superficies, resolver problemas usando modelos geométricos, analizar la validez o

---

1 Información proporcionada por el MEN (2017) sobre los resultados obtenidos del establecimiento educativo Lusitania Paz de Colombia, en relación con las competencias y aprendizajes en matemáticas; pruebas que tienen como objetivo hacer énfasis en “[...] aquellos aprendizajes en los que se deben realizar acciones pedagógicas para el mejoramiento” (p. 2).

invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas, y argumentar de manera formal e informal utilizando propiedades y relaciones de figuras planas; de manera que uno de los pensamientos que amerita mayor atención, debido a los resultados, es el geométrico.

Frente a esto último, Torres y Metaute (2018) afirman que el rendimiento académico y los bajos resultados en el área de matemáticas en las pruebas saber de noveno grado, en especial en el componente geométrico, se deben a factores tales como el conferir poca o nula importancia a los conceptos relacionados con geometría, dando como resultado el privilegio al componente numérico variacional, dejando relegada la promoción del pensamiento geométrico-métrico. Así que se hizo necesario analizar qué factores generaron ese tipo de resultados. Para ello, se toman como referente los distintos niveles de razonamiento en el marco del modelo educativo de van Hiele (1957), el cual representa una estratificación del pensamiento geométrico clasificado en: nivel 1 visualización, nivel 2 análisis, nivel 3 clasificación, nivel 4 razonamiento deductivo y el nivel 5 rigor. Asimismo, se encontró también que diferentes investigaciones (Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009) exponen que la mayoría de los estudiantes razonan en los niveles 1 y 2, sin lograr progresar a un nivel 3, que sería el esperado para ellos; y lo mismo ocurre con otras investigaciones (Vargas y Gamboa 2013; Aravena y Caamaño, 2013; Ramírez et al., 2018) en las que se ponen de manifiesto dificultades en el razonamiento geométrico de los estudiantes, y que proporcionan elementos para poder caracterizar el nivel en el que se encuentran.

Como complemento, también se relacionan otras investigaciones como la de Corberán et al. (1994), en la que recogen características de algunos descriptores propios del nivel 2 de razonamiento asociados al análisis de las figuras geométricas, estos según Zapata y Sucerquia (2009) permiten identificar a partir de la actividad del estudiante el nivel de razonamiento en el cual se ubica, elementos esenciales que se toman como referentes para este nivel y la construcción de conceptos referidos a la semejanza de triángulos. El uso de estos descriptores posibilita la identificación y concreción detallada del problema, pues le dan forma conceptual y directiva a lo que falla en el proceso con los estudiantes. Tal es el caso del nivel 2 propuesto en cuestión:

### **Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).**

El estudiante en este nivel:

- Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados y sus ángulos.
- Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.
- Relaciona triángulos según sus lados y ángulos.
- Clasifica los triángulos y aún no deduce unas propiedades de otras, debido a que las percibe aisladas, y no identifica entre ellas sus relaciones.
- Realiza la inferencia de algunos elementos y propiedades característicos de los triángulos a partir de la experimentación y su generalización.
- Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.

Por consiguiente, los descriptores mencionados hicieron parte de los ejercicios realizados con los estudiantes de la Institución Educativa durante las clases, y permitieron observar que las acciones que determinaron las actividades ayudaron a adquirir información de la utilización del lenguaje geométrico para describir figuras geométricas; así como también identificar que las figuras geométricas están conformadas por partes y tienen propiedades. Esto les ayudó a ser conscientes de que no relacionan unas propiedades con otras, motivos por el cual no logran hacer clasificaciones adecuadas.

Con base en esto, considero que, en el marco de las dificultades mencionadas, se considera el razonamiento geométrico como un componente que amerita especial atención en el campo de la investigación; hecho que se sustenta además en lo expresado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus Lineamientos Curriculares de Matemáticas, principalmente al ver la necesidad de utilizar la geometría como una herramienta que “[...] constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación” (1998, p. 17). Por consiguiente, esta disciplina debería proporcionar habilidades de visualización, ayudar a razonar, permitir interpretar, argumentar y comprender

conceptos, además de establecer una relación con la realidad y estudiar las propiedades de figuras que existen en el entorno, pero estos objetivos no se alcanzan debido a la insuficiencia de las formas tradicionales de enseñanza. Igualmente, se hace necesario incorporar en la asignatura estrategias que posibiliten la solución de problemas que emergen del contexto, a partir de diversos procedimientos que motiven los procesos de aprendizaje, generen resultados positivos y movilicen el razonamiento para garantizar positivamente un cambio en los procesos académicos.

En virtud de esto, y en coherencia con distintas investigaciones (van Hiele, 1957; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009), se pone de manifiesto un reto en el campo de la investigación en educación matemática, sobre todo en cuanto a la promoción del razonamiento geométrico, toda vez que se ha documentado que la mayoría de los estudiantes razonan en niveles 1 y 2, sin lograr progresar a un nivel 3 en el marco del modelo de van Hiele.

La clasificación en los niveles de razonamiento no es ajena a la indicada por la literatura (Jurado y Londoño, 2005) para el caso de los estudiantes que hacen parte de la investigación, por lo que se evidencia que sus procesos de razonamiento se enmarcan en el nivel 2, específicamente en lo referido al concepto de triángulo y semejanza. Es así como este último se constituye en objeto de estudio para la presente investigación, que, además, está relacionado con elementos del entorno, tiene aplicaciones dinámicas que favorecen el aprendizaje y movilizan el pensamiento en aras de generar mayor comprensión y conocimiento en el área. En este sentido, y poniendo en consideración las ideas hasta ahora expuestas, la presente investigación propone la siguiente pregunta como objeto de reflexión: ¿Cómo promover el razonamiento geométrico en los niveles del modelo de van Hiele en estudiantes de secundaria para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos?

---

## 2. Objetivos

### 2.1 Objetivo general

- Analizar cómo se promueven los niveles de razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos a la luz del modelo de van Hiele en estudiantes de secundaria.

### 2.2 Objetivos específicos

- Identificar el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes en el marco del modelo de van Hiele a partir del concepto de semejanza de triángulos.
- Construir descriptores de fases para cada nivel para reconocer las acciones que realizan los estudiantes y que consolidan su progreso en los niveles de razonamiento.
- Diseñar un experimento de enseñanza que permita promover niveles de razonamiento en los estudiantes en procesos de construcción de conceptos geométricos.

## Capítulo 2

### 3. Marco teórico

En este apartado se presentan aspectos teóricos que sustentan el problema de investigación a partir del contexto en el cual se desarrolla la investigación, la importancia de la geometría en la educación matemática, la necesidad de promover las competencias comunicativas y de razonamiento que se evalúan en la educación y el modelo de van Hiele enfocado en la promoción de niveles de razonamiento geométrico que se enmarcan en los conceptos de semejanza de triángulos.

En este caso, el modelo educativo de van Hiele (1957) ofrece una caracterización para describir y clasificar los niveles en los que un estudiante puede razonar, este modelo se ajusta

a la problemática que se vive en las aulas debido a que los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas, y también cuando sus procesos memorísticos limitan el razonamiento y, por ende, su abstracción y formalización. Con base en esto, los esposos Pierre y Dina van Hiele hacen su reflexión partiendo de las dificultades en la utilización del vocabulario en geometría, enfocándose en cómo aprenden los estudiantes y cómo va evolucionando su pensamiento mediante el tránsito ordenado por los niveles descritos en su modelo.

Así, este modelo se constituye en uno de los elementos que ha sido objeto de interés en el campo de la investigación en educación matemática, toda vez que sus componentes: niveles de razonamiento, fases de aprendizaje e *insigh*, han sido utilizados en distintas investigaciones (Aravena y Caamaño, 2013; Gualdrón, 2014; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009; Vanegas, 2019; Ávila, 2017; Giraldo, 2021) para mejorar la comprensión de conceptos, estratificar el pensamiento de los estudiantes y promover sus niveles de razonamiento. Esta evolución se constituye entonces en objeto de estudio y reflexión en las investigaciones referidas y en el presente estudio. De acuerdo con Morales (2016):

En la mayoría de los colegios y escuelas donde se orienta básica primaria y educación media se le da mayor importancia a la geometría en los niveles inferiores, aunque solo a los temas que se puede demostrar con material real, además su intensidad horaria se comparte con la estadística. Se ve en la educación media grandes saltos en unidades temáticas porque el tiempo asignado es corto y se debe resumir el contenido a orientar. (p. 5)

Considera el autor que se presta mayor atención a los temas de geometría con los que se pueden hacer demostraciones o construir conceptos con material concreto, mientras que en la educación media la explicación de conceptos se hace en su mayoría de manera abstracta, y existe poca interacción con el objeto geométrico; además, no se profundiza en los temas, lo que dificulta la comprensión de los conceptos y, en efecto, su razonamiento.

De hecho, Fouz (2013) plantea que para aprender geometría se requiere, de acuerdo con van Hiele, el “lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos” (p. 68). Dos elementos importantes que hacen referencia a dos dimensiones particulares: la primera

corresponde a los niveles y a la adquisición de estos unidos al lenguaje que facilita la comprensión y dominio; y la segunda, que realiza un proceso de asimilación al nivel de su razonamiento.

Así pues, hablar del tránsito por los niveles de razonamiento implica referirse también a un progreso en el lenguaje, y este, a su vez, pone de manifiesto las acciones de los estudiantes que pueden ser caracterizadas a través de descriptores. Estos son característicos en el modelo de van Hiele (1957), y se configuran como acciones que ponen de manifiesto el razonamiento de los estudiantes, de manera que permitan una estratificación en el nivel de razonamiento. Por tanto, se asumirá la definición de Jurado y Londoño (2005) para descriptores: “se entenderá por descriptores de los niveles de van Hiele las principales características que permiten reconocer, a partir de la actividad del estudiante, cada uno de esos niveles de razonamiento matemático” (p. 8). Dichas características hacen parte de ese conjunto de condiciones necesarias y suficientes que le permitirá al estudiante saber si puede estar ubicado en un nivel determinado o no.

### **3.1 Razonamiento geométrico en la educación matemática**

El componente geométrico juega un papel esencial en el aprendizaje del estudiante y en los procesos de razonamiento, puesto que la geometría hace parte fundamental del currículo y su historia siempre ha estado atada a los procesos sociales y experimentales que forman parte del ser humano. Por ello, según el Ministerio de Educación Nacional (2004), la geometría “también ofrece amplias oportunidades de usar modelos matemáticos para comprender la actividad humana y social, dadas las estrechas relaciones con la cultura, la historia, el arte, la filosofía y la ciencia” (p. 2), oportunidades que se deben aprovechar para relacionar los conceptos abordados en el aula sobre geometría y relacionarlos con la vida cotidiana, a partir de experiencias de carácter individual o grupal que ayuden a producir diferentes niveles de conocimiento para dar solución a problemas del contexto.

Así mismo, la geometría permite desarrollar en los estudiantes habilidades de lenguaje, que según Torres y Metaute (2018) se pueden usar “para descubrir y desarrollar habilidades de comunicación que conduzcan al estudiante a interpretar, entender y comunicar información en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la

geometría” (p. 38); esto en aras de consolidar un lenguaje que le colabore en la argumentación, el sustento y la explicación del porqué del resultado obtenido. Así, según el MEN (2006), al adquirir los estudiantes un lenguaje propio de las matemáticas, tendrán la posibilidad de compartir, expresar, leer y escribir el significado de las distintas representaciones de un contenido matemático y la comprensión de este (p. 54).

Sumado a esto, van Hiele también recomienda “el uso activo del lenguaje” en la geometría porque este permite, mediante su práctica, nombrar correctamente elementos de distintas figuras y hacer relaciones entre estas; su buen uso, además, lleva a generar significados e identificar propiedades, y es así como “[...] la transformación del lenguaje posibilita la transición de la estructura contemplativa a la estructura matemática” (van Hiele, 1957, p. 107).

Del mismo modo, Ávila (2017) afirma que el progreso en el aprendizaje de la geometría y la capacidad de razonamiento “[...] van ligados a la conceptualización implícita en el lenguaje utilizado” (p. 50). De este modo, la apropiación de un lenguaje matemático le permitirá al estudiante alcanzar niveles de comprensión que le facilite justificar los procesos que realice en una actividad matemática.

De esto se deduce que el componente geométrico es un elemento que posibilita la formación en geometría del estudiante más allá de las limitantes del aula como escenario, y lo capacita para enfrentar la realidad desde un área que se cree limitada a contenidos programáticos. En palabras del MEN (2004) es necesario explorar este componente matemático dado que “no sólo se considera como una herramienta necesaria para describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar en él, sino que, como disciplina científica descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad” (MEN, 2004, p. 1). Tal aseveración pone de plano la importancia de este cambio de concepción acerca de la enseñanza de la geometría, y apoya, como base institucional y directiva, la justificación y pertinencia de esta investigación.

### **3.2 El modelo educativo de van Hiele**

Este modelo de razonamiento geométrico surge, según Jurado y Londoño (2005), por los aportes que realizaron como profesores de secundaria Pierre van Hiele y Dina van Hiele,



quienes identificaron las dificultades que presentaban los estudiantes en sus desempeños en geometría y la importancia del dominio de un vocabulario y de propiedades que requiere, para dar solución a tareas de un nivel.

La evolución del razonamiento se da entonces, según el modelo, cuando “el estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior” (Vargas y Gamboa, 2013, p. 81). Estos avances se logran mediante una secuencia de cinco fases de aprendizaje del modelo, y según Zapata y Sucerquia (2009) un estudiante debe pasar por cada una de estas adquiriendo experiencias que le ayuden a subir de nivel de razonamiento.

Además, Fouz (2013) hace énfasis en la importancia de organizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, las actividades que se diseñen, como también los materiales utilizados para ello. Asimismo, los trabajos realizados por los van Hiele sugieren que el progreso de un estudiante a un nivel siguiente depende de la enseñanza que se da, mas no de la edad o madurez. Dichos niveles se caracterizan por el grado de comprensión que tenga un estudiante de un concepto y estratifican el pensamiento del estudiante.

### ***3.2.1 Descripción del modelo educativo de van Hiele***

El modelo de van Hiele se toma como propuesta en la presente investigación porque permite promover niveles de razonamiento y estructurar el aprendizaje de los estudiantes; este modelo es utilizado en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, gracias a los aportes brindados por los esposos holandeses Dina van Hiele y Pierre van Hiele, quienes centraron su atención en los estudiantes y los problemas que se presentaban relacionados con el lenguaje geométrico, en cómo resolvían problemas concretos o los afrontaban en otros contextos, y en cómo reducían su razonamiento a procesos memorísticos que dejan de lado la comprensión, la importancia y la utilidad de las matemáticas.

Considerando lo anterior, tal modelo (1957) formula un esquema y unos principios psicológicos referidos a niveles de razonamiento, y enfoca experimentos con el propósito de elevar los niveles de pensamiento de los estudiantes. Por consiguiente, estos niveles son tomados como base para promover avances en los procesos de aprendizaje de los estudiantes,

permitiendo alcanzar un nivel de grado superior que evidencia el progreso en su capacidad de razonar matemáticamente.

Esto hace que sea necesario resaltar los demás componentes del modelo (1957), tales como las fases de aprendizaje, pues permiten el tránsito a través de los niveles de manera secuencial, y se configuran como experiencias de aprendizaje que propenden por el paso entre un nivel y el inmediatamente superior (Zapata y Sucerquia, 2009). El último componente se define como el *insight*, entendido como la percepción de estructuras, y relacionado con la actuación competente de un estudiante ante una situación desconocida; esto es, que el estudiante sepa qué hacer ante una situación nueva, cómo hacerlo y por qué hacerlo.

### **3.2.2 Niveles de razonamiento**

Con el propósito de explicar la nomenclatura seleccionada, dado que diferentes investigaciones han enunciado los niveles de diversas formas, originalmente los van Hiele enunciaron el nivel 0 o Básico y niveles I, II, III y IV, otros modificaron esta nomenclatura y la presentan en los niveles de 0 a 4 o de 1 a 5. Esto demuestra que no existe unanimidad, por lo que este estudio seleccionó la nomenclatura propuesta por el Ministerio de Educación Nacional (1998) de 1 a 5 (Nivel 1 de visualización o familiarización, Nivel 2 de análisis, Nivel 3 de ordenamiento o clasificación, Nivel 4 de razonamiento deductivo y Nivel 5 de rigor), pues más que una nomenclatura en sí, lo que interesa es lo descrito en cada nivel y cómo este orienta el currículo para que el estudiante finalmente alcance niveles superiores de razonamiento; lo anterior hace de este un modelo conveniente para el presente estudio.

El modelo de van Hiele considera la secuencialidad como un aspecto que permite una relación estrecha entre uno y otro nivel, con elementos implícitos y explícitos. La tabla 2 presenta un ejemplo de dicha secuencialidad; en ella se aprecian los niveles sofisticados de razonamiento que posee una persona, y como estos a su vez se apoyan en el nivel inmediatamente anterior; por lo tanto, no se puede pasar al siguiente nivel sin antes adquirir la capacidad del razonamiento anterior. La estructura recursiva de los niveles 1,2 y 3 obedece a las habilidades implícitas que tienen los estudiantes y su uso explícito solo lo aprende en un nivel  $N+1$ .

**Tabla 2***Estructura Recursiva de los niveles*

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

*Nota.* Datos tomados de Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. Jaime y Gutiérrez (1990).

En coherencia con lo descrito hasta ahora acerca del modelo de van Hiele (1957), el Ministerio de Educación Nacional (1998) presenta este modelo como una opción pertinente para orientar el currículo, toda vez que pretende describir cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico y cómo se estructura el aprendizaje en los estudiantes a partir de cinco niveles de razonamiento previamente mencionados, y que se definirán a continuación a la luz de lo descrito en los lineamientos curriculares (MEN, 1998).

En cuanto al **Nivel 1**, entendido como el de visualización o familiarización, el estudiante se acerca a las figuras como un hecho global, aun no se encuentra capacitado para desestructurarlas y entenderlas a través de sus partes y su relación. Se da en el caso de estudiantes que pueden reproducir con facilidad un cuadro, un triángulo, un círculo o cualquier otra figura geométrica básica, e incluso pueden recordar su nombre y relacionarlas, pero no es capaz de ir más allá, de ver entonces que el cuadrado es un tipo especial de rombo, por ejemplo. Las sigue viendo como distintas por causa de una observación plana y sin el criterio suficiente para complejizar sus observaciones. “En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de “la misma” forma”. (MEN, 1998, p. 38)

En cuanto al **Nivel 2**, ya el proceso trasciende al análisis e implica, además del reconocimiento, un conocimiento de los componentes de las figuras y de sus propiedades básicas. El procedimiento utilizado para esta comprensión se da a partir de atentas observaciones con criterio, y mediante trabajos prácticos que constan de mediciones, dibujo, construcción de modelos, entre otros. Tal como se detalla en este nivel, se pasa de la observación aislada a una observación que requiere intervención. Los ejemplos con los que el MEN ilustra esta acción son los siguientes:

El niño, por ejemplo, ve que un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son de la misma longitud, y que los lados opuestos también son de la misma longitud. Se reconoce la igualdad de los pares de lados opuestos del paralelogramo general, pero el niño es todavía incapaz de ver el rectángulo como un paralelogramo particular. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras. (1998, p. 38)

Así, si bien hay un acercamiento superior al nivel anterior, se quedan todavía en una categorización que no profundiza los conjuntos de las propiedades y las asociaciones que se puedan dar entre estos. Para trascender este límite, se hace necesario el **Nivel 3**, concebido de ordenamiento o de clasificación. En este nivel aparece ya una forma de conceptualización: relaciones y definiciones, pero que necesitan de un guía para su clarificación. Ellos llegan incluso a clasificar por jerarquías, ordenan según propiedades y, lo más importante, elaboran argumentos iniciales para respaldar sus observaciones. Es el caso de denominar a un cuadrado como un tipo de rombo que tiene algunas propiedades más. Y “comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras” (MEN, 1998, p. 39).

Para continuar, el **Nivel 4** llega ya al razonamiento deductivo; posee ya precompresiones manifiestas en el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero no hay un razonamiento abstracto concluyente, lo que hay es un entendimiento parcial del significado de las demostraciones y su rigor (MEN, 1998, p. 39)

Por último, está el **Nivel 5**, llamado también **nivel de rigor**. Lo caracteriza, como su nombre lo indica, el rigor, así como el razonamiento y la deducción. Se da un paso de lo parcial a lo más completo, y de lo informal a lo formal en cuanto al razonar sobre sistemas matemáticos. En este nivel también es posible estudiar la geometría “sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas” (MEN, 1998, p. 39).

### **3.2.3 Caracterización de los niveles**

Además, para caracterizar los niveles dados anteriormente, la investigación de Jurado y Londoño (2005) proponen la presencia de unas propiedades que se definen como se muestra a continuación:

**Propiedad 1:** (Secuencialidad fija) Un estudiante no puede estar en un nivel  $n$  sin haber superado un nivel  $n-1$ .

**Propiedad 2:** (Adyacencia).: El objeto de percepción del nivel  $n-1$  se convierte en el objeto de pensamiento de nivel  $n$ .

**Propiedad 3:** (Distinción). El nivel  $n$  requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido al nivel  $n-1$ ; esto es, la percepción de una nueva estructura.

**Propiedad 4:** (Separación). Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento.

**Propiedad 5:** (Cada nivel tiene su lenguaje). Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto de que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele, no sólo se reflejan en las formas de resolver problemas, sino que, sobre todo, se manifiestan en la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico.

**Propiedad 6:** (Consecución). El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual. (p. 12)

### **3.2.4 Descriptores**

Para cada nivel del modelo se hace necesario recurrir a descriptores, estos se definen en investigaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009) como las principales características o acciones que se reconocen con la actividad que realiza el estudiante para cada nivel.

Los descriptores que se proponen desde el diseño metodológico darán respuesta a la relación que tienen con el modelo de van Hiele y la manera cómo ayudan con el análisis y reconocimiento en el cual se ubica el estudiante en un nivel, para el presente estudio dichos descriptores estuvieron en correspondencia con el componente geométrico y se enmarcaron en conceptos de semejanza de triángulos.

Así pues, el diseño metodológico pretende mostrar una posible respuesta a la relación que tienen con el modelo de van Hiele y la manera cómo ayudan con el análisis y reconocimiento en el cual se ubica el estudiante en un nivel. Por lo anterior, se diseñaron actividades que evidenciaron el progreso en los niveles de razonamiento con la ayuda de cada una de las fases y sus respectivos descriptores, estos sirvieron de guía para avanzar en cada nivel y que el estudiante lograra establecer, justificar y aplicar criterios de semejanza entre triángulos para dar solución a situaciones problema. A continuación, se relacionan los descriptores del nivel 2 y los del nivel 3 propios del estudio:

#### **Descriptores (D) del Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).**

El estudiante en este nivel:

D<sub>1</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus ángulos.

D<sub>2</sub>: Establece características y puede describir las partes de un triángulo.

D<sub>3</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados.

D<sub>4</sub>: Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.

D<sub>5</sub>: Identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras.

D<sub>6</sub>: Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.

D<sub>7</sub>: Utiliza cálculos matemáticos para establecer proporciones entre los lados de los triángulos.

### **Descriptorios (D) del Nivel 3. Clasificación de una figura geométrica (triángulo)**

El estudiante en este nivel:

D<sub>1</sub>: Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.

D<sub>2</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.

D<sub>3</sub>: Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.

D<sub>4</sub>: Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aún no reconoce la estructura de una demostración.

D<sub>5</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.

D<sub>6</sub>: Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura.

D<sub>7</sub>: Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

D<sub>8</sub>: Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).

D<sub>9</sub>: Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Angulo, Lado).

D<sub>10</sub>: Infiere que dos triángulos son semejantes a partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).

#### ***3.2.5 Fases de aprendizaje***

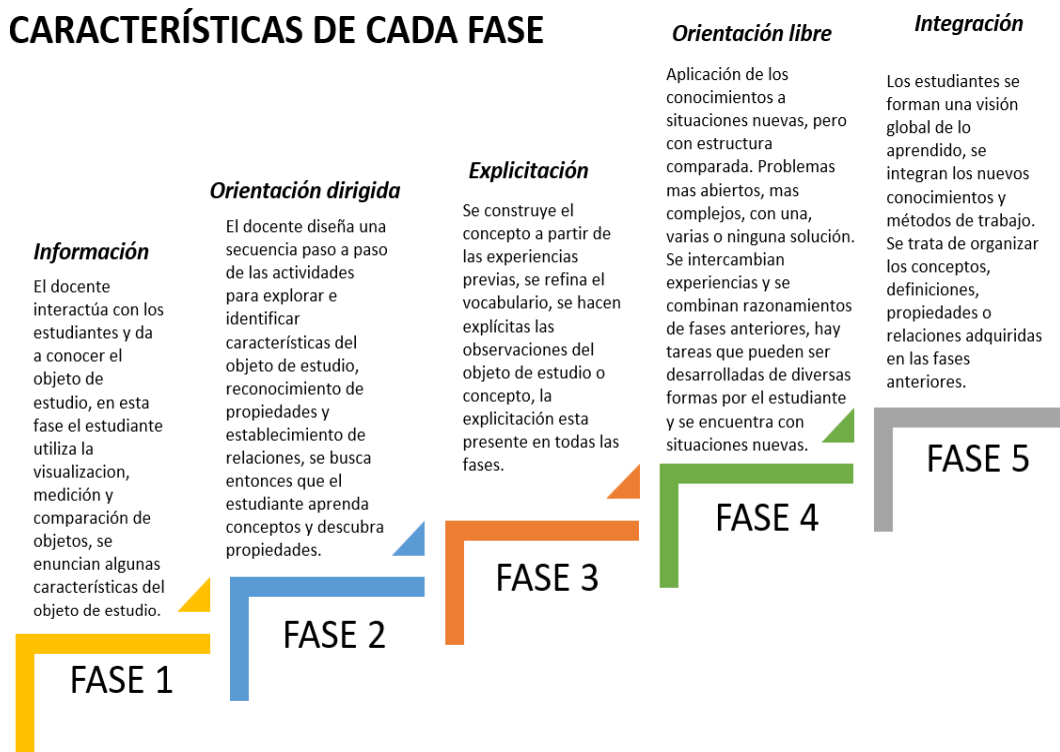
Continuando con la visión del modelo y la prescripción, se deben seguir unos pasos o fases de aprendizaje para organizar la instrucción que servirá como guía al estudiante para pasar de un nivel a otro. Estas fases contienen actividades que propenden por el progreso en

los niveles, como también “permiten establecer de manera aproximada la forma como las ideas son generadas, refinadas, entendidas y asimiladas por los estudiantes” (Zapata y Sucerquia, 2009 p. 38). A continuación, se presentan las cinco fases de aprendizaje que contempla el modelo propuesto por los van Hiele y una caracterización de estas. Cabe recordar que las fases de aprendizaje, al igual que los niveles, consideran unos descriptores de fases que dan cuenta de las acciones de un estudiante cuando realiza las actividades propuestas en cada fase.

La siguiente figura presenta una idea central de cada fase de aprendizaje que favorece el avance en los niveles de razonamiento, estas señalan cómo se debe organizar la enseñanza mediante pautas y cómo guiar y direccionar el trabajo de los estudiantes.

**Figura 1**

*Fases de aprendizaje*





---

*Nota.* La figura muestra elementos característicos de cada fase del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

El tránsito por estas fases de aprendizaje permite al estudiante desarrollar una estructura secuencial, que favorezca el progreso en los niveles de razonamiento. Esto ayuda a evidenciar el *insight* como la capacidad de resolver situaciones poco familiares, ser competente y actuar de manera intencionada ante una situación desconocida.

Dicho esto, se presenta una descripción de cada fase tomando como referente la investigación de Zapata y Sucerquia (2009), quienes mencionan los propósitos de cada una junto con sus principales características descritas a continuación:

**Fase 1: *Inquiry* (información)**

El profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio; en esta fase el profesor da a conocer el objeto de conocimiento que se estudiará, el tipo de trabajo que se realizará y da alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. Esta fase también permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes y por su nivel de razonamiento, pues es esencial saber qué grado de conocimiento tienen con respecto al concepto objeto de estudio, esto se hace prestando especial atención a las intervenciones de los estudiantes, sus interpretaciones y el uso del lenguaje. En esta fase se hacen observaciones y se aclaran dudas, usando el vocabulario y objetos de estudio relativos al tópico específico.

**Fase 2: *Directed orientation* (Orientación dirigida)**

El profesor diseña cuidadosamente una secuencia de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio y como llegan a familiarizarse con las características de las estructuras. Muchas de las actividades en esta fase son tareas paso a paso que producen una respuesta específica. Concretamente, en esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión, es por esto que las actividades deben ser especialmente diseñadas para lograr este fin, de modo que constituyan una serie de experiencias significativas

para lograr procesos de razonamiento avanzado, el cual nuevamente, será mediado y evidenciado por el lenguaje.

**Fase 3: *Expliciting* (Explicitación)**

Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna del objeto de estudio. Durante esta fase, los estudiantes comienzan a formar las relaciones del sistema estudiado, es esencial que hagan explícitas las observaciones que infieren del concepto abordado. Así mismo es importante el intercambio de experiencias, en las que se manifiesten las observaciones realizadas durante el proceso de aprendizaje, las explicaciones que surgen para comprender un concepto, y el tipo de análisis que realizan, esto exige ordenar ideas y expresarlas con claridad; es en este sentido que uno de los propósitos de esta fase apunta al refinamiento del vocabulario en correspondencia con el nuevo nivel que se trata de alcanzar, favoreciendo así la revisión del trabajo realizado y la puesta en común de conclusiones que hagan explícitos los procesos de razonamiento.

**Fase 4: *Free orientation* (Orientación libre)**

Los estudiantes, ahora encuentran tareas multipaso, que pueden ser completadas de diferentes maneras, ganando experiencia al encontrar sus propias maneras de resolverlas. Se trata de que los estudiantes apliquen, en contextos diferentes a los comúnmente utilizados, tanto los conocimientos como el lenguaje adquirido. Los problemas planteados en esta fase pueden indicar el camino a seguir, pero principalmente deben permitir que se combinen y apliquen los razonamientos realizados en fases anteriores. Es importante resaltar que dichos problemas deben representar situaciones nuevas, con varias alternativas que permitan llegar a su solución, no puede tratarse de problemas que simplemente exijan la aplicación directa de un concepto, porque en esta fase las actividades deben permitir la consolidación de los conceptos estudiados, mediante el establecimiento de las relaciones que los vincula.

**Fase 5: *Integration* (Integración)**

Los estudiantes se forman una idea general de los nuevos conocimientos; los objetos y relaciones son unificados e interiorizados dentro de un nuevo dominio de pensamiento. El profesor ayuda en este proceso, brindando conocimientos previos generales que los estudiantes se supone conocen, siendo cuidadosos de no presentar nuevas o discordantes ideas, pues se trata de fomentar procesos de comprensión de lo que ya conocen. (p. 51)

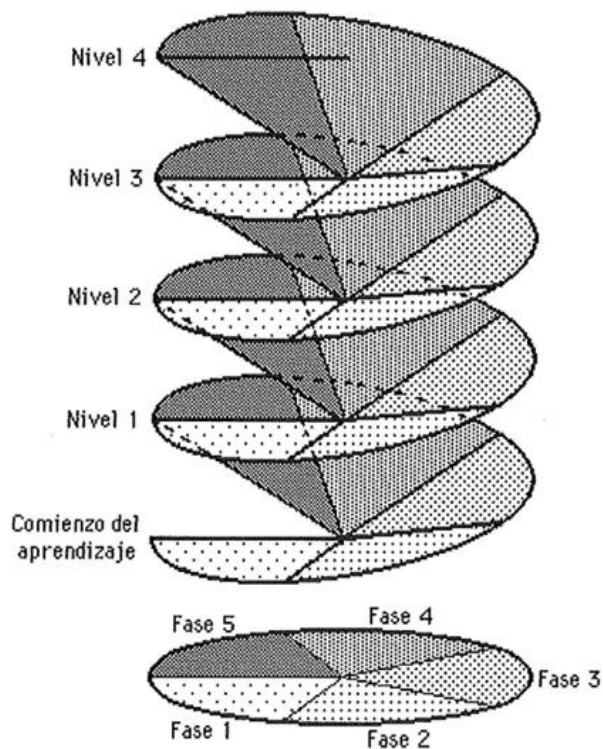
### **3.2.5.1 Descriptores de fases**

De manera similar a lo que ocurre con los niveles de razonamiento, el paso por cada una de las fases está caracterizado por un conjunto de descriptores que denotan las acciones que realiza un estudiante, dando cuenta de cómo progresa su nivel de comprensión. Para la presente investigación los descriptores de fases se configuraron a partir de las acciones desarrolladas por los estudiantes, en las cuales se puso de manifiesto la consolidación de los conceptos referidos a la semejanza de triángulos y los criterios que la determinan. En esta línea, cada fase tuvo asociados unos descriptores que estuvieron en correspondencia directa con el accionar de cada estudiante, al mismo tiempo que se enmarcaban en los descriptores propios de los niveles de razonamiento en cuestión 1 y 2. Los descriptores de fase aquí referidos se presentan de manera explícita en el capítulo 4, correspondiente al análisis, en este se construyeron unas matrices para cada fase, estas están compuestas por celdas en las que se indican las acciones realizadas por los estudiantes y que se constituyen como descriptores de fase.

A continuación, en la figura 2 se presenta un esquema del modelo de van Hiele, con cada uno de sus niveles y fases. Muestra el proceso continuo desde el Nivel 1 hasta el Nivel 4 con sus cinco fases para cada nivel:

**Figura 2**

*Niveles y fases de aprendizaje del modelo de van Hiele*



*Nota.* La figura muestra el proceso continuo de los niveles y sus fases del modelo de van Hiele. Jaime y Gutiérrez (1990).

### ***3.2.6 Semejanza de triángulos en los procesos de aprendizaje***

En el contexto de esta investigación se toma como objeto de análisis geométrico el concepto de semejanza de triángulos, definido a partir de la relación que existe entre ángulos correspondientes iguales y sus lados homólogos proporcionales. Este fue objeto de reflexión toda vez que su comprensión puede propiciar progreso en los niveles de razonamiento. Además, se analizan los criterios de semejanza y los elementos que los componen para determinar cuándo dos triángulos son semejantes. Bernal et al. (2019), en su investigación, abarca conceptos de semejanza de triángulos, así:

El criterio 1, se cumple cuando los triángulos tienen tres ángulos homólogos iguales (AAA) y de este criterio se deriva el criterio ángulo-ángulo (AA); el criterio 2, se

cumple cuando tienen los lados homólogos proporcionales (LLL) y el criterio 3, cuando tienen un ángulo igual y los lados homólogos que lo forman son proporcionales (LAL). (p. 4)

Para concluir, los aportes que brinda el modelo de van Hiele son de gran importancia en este estudio, dado que presenta componentes esenciales que han contribuido en la educación para dar respuesta a problemas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje en conceptos relacionados con la geometría, mejora el razonamiento en los estudiantes y posibilita el paso por sus niveles de aprendizaje.

A continuación, se presenta la metodología seleccionada en este estudio, su enfoque, método, participantes y ruta metodológica que facilitaron el alcance de los logros en esta investigación.

## Capítulo 3

### 4. Metodología

En este aparte se consideran todos los elementos relacionados con la aplicación de la investigación; esto es, los componentes metodológicos. En primer lugar, se hace una distinción entre tres elementos interrelacionados, pero con sentidos diferentes: metodología, método y diseño metodológico. Esta salvedad se hace con el fin de aclarar la distinción entre conceptos que pueden parecer muy similares, pero que poseen concepciones distintas. Una vez dada esta aclaración, se procede con el desarrollo de los otros factores que los componen: enfoque, tipo, técnicas, entre otros elementos que se detallan en el transcurso de este acápite.

En cuanto al primer elemento interrelacionado: la metodología, esta se entiende como “[...] el logro que orienta al estudio lógico de los métodos, lo cual implica el análisis de la lógica que los sustenta, el sentido de su efectividad y la coherencia para producir conocimiento relevante” (Aguilera, 2013, p. 89). Es decir, la metodología, más que una parte estructural y textual de la investigación, es un discurso paralelo que en esta parte específica va orientando el sentido de la escogencia del método y los elementos del diseño metodológico

–enfoque, tipo, técnicas, herramientas, etapas, categorías, entre otros– en relación con el tema a investigar.

En cuanto al segundo elemento mencionado explícitamente en ese orden en el primer párrafo –el método–, este se entiende como el medio que “permite simplificar la complejidad al seleccionar los elementos más significativos de un problema a fin de proceder a su estructuración conceptual y explicación causal” (Aguilera, 2013, p. 86). Asimismo, su importancia radica en la posibilidad de abordar coherentemente la parte de la realidad que hemos decidido investigar. El método concreta la metodología en tanto que existen diversas formas de investigar y proceder metodológicamente, pero no todas funcionan igual para todos los campos del conocimiento.

Al escoger un método, bien sea etnográfico, estudio de caso, reflexivo-documental, el investigador secciona un modo de proceder ante su objeto de estudio; y esto, a su vez, lo conduce a la necesidad de diseñar y afinar las formas específicas que se relacionan con su método. Una vez escogido el método, y el consecuente diseño esbozado en el enfoque, el tipo, la muestra, y los demás elementos que lo componen, la reflexión sobre cada una de estas partes será lo que le dé cuerpo a la metodología, y la relación de afinidad que establecen entre ellas es lo que se conoce como diseño metodológico.

De acuerdo con esto, los elementos que definen esta investigación en su quehacer metodológico son los que se enunciarán por partes a continuación.

#### **4.1 Enfoque y tipo de investigación**

De los tres enfoques que la epistemología ha definido para los procesos de investigación: cuantitativo, cualitativo y mixto, el seleccionado para este estudio es el cualitativo. Según Hernández et al. (2014), el enfoque cualitativo permite “comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto” (p. 358). Esto es, lo cualitativo busca explorar la realidad desde la relación directa entre los sujetos objeto de estudio y su medio, intentando cualificar sus experiencias de un modo sistemático y con un discurso que tiende a la interpretación y a la comprensión. En ese sentido, el investigador, desde este enfoque, será intérprete de una realidad en la que participan unos actores sociales que hacen parte de la problemática, para

comprender y profundizar en aspectos que orienten y transformen su realidad y los escenarios a los que tales actores pertenecen.

En consonancia, el tipo de investigación seleccionado es de corte cuasiexperimental-analítico en torno al aprendizaje de los estudiantes y el progreso en sus niveles de razonamiento. Tal selección se basa en la naturaleza del estudio, que consiste en la aplicación de un experimento en el que, por la condición misma del carácter y capacidades de los estudiantes, no se cuenta con un control absoluto de las variables (Castillero, 2017); y analítico porque pretende dar cuenta de las causas y efectos detectadas en el proceso (QuestioPro, 2020).

En cuanto a su modo de organización lógica, el tipo de investigación va de lo particular a lo global, y para ello se revisa cada uno de los casos en la investigación para hacer el registro acerca de cómo aprenden los estudiantes; y luego analizar los procesos de comprensión hasta determinar el fenómeno estudiado, relacionado con el paso por las fases de aprendizaje para llegar a un nivel de razonamiento superior. Lo particular son los casos; y lo general, las reflexiones últimas relacionadas con las fases en mención.

#### **4.2 Método de investigación**

El método de investigación seleccionado es el de “investigación basada en diseño”, o también conocido por su aserción original en lengua inglesa: *Design-Based Research* –de ahora en adelante IBD–. Este método, que surge a finales del siglo XX de la mano de autores como la psicóloga educativa Ann Brown y el profesor Allan Collins, se presenta como una respuesta a la necesidad de un planteamiento metodológico que relacionó la innovación, el diseño educativo y la investigación. El método, convertido luego en metodología, busca explicar el cómo, el cuándo y por qué las innovaciones educativas funcionan en la práctica (Rodríguez y Valdeoriolla, 2009). Tal como se puede observar, es una metodología enfocada en la práctica y la revisión concreta de ejercicios de enseñanza-aprendizaje, que son regulados por experimentaciones diseñadas exclusivamente para estos, y con constante monitoreo.

De acuerdo con Cobb et al. (como se cita en Rodríguez y Valdeoriolla, 2009):

Prototípicamente, el diseño de experimentos implica tanto la ingeniería de determinadas formas de aprendizaje, como el estudio sistemático de esas formas de aprendizaje en el contexto definido por los medios que las apoyan. Este contexto diseñado es objeto de pruebas y revisiones, y las iteraciones sucesivas que resultan, [sic] juegan un papel similar a la variación sistemática en los experimentos. (p. 67)

La metodología propuesta por estos autores permite el análisis sistemático de como aprenden los estudiantes y las estrategias que intervienen para la enseñanza; asimismo, estas les permiten a los estudiantes promover y mejorar el aprendizaje. La fortaleza de esta metodología radica en favorecer la construcción de conocimiento, adaptando la enseñanza en el aula a condiciones dadas de su contexto.

#### ***4.2.1 Características de los experimentos de diseño***

De manera puntual, los experimentos de diseño cuentan con características explícitas para su elaboración. Aquí se enuncian las más relevantes a la hora de tomarlas en cuenta para desarrollar el experimento:

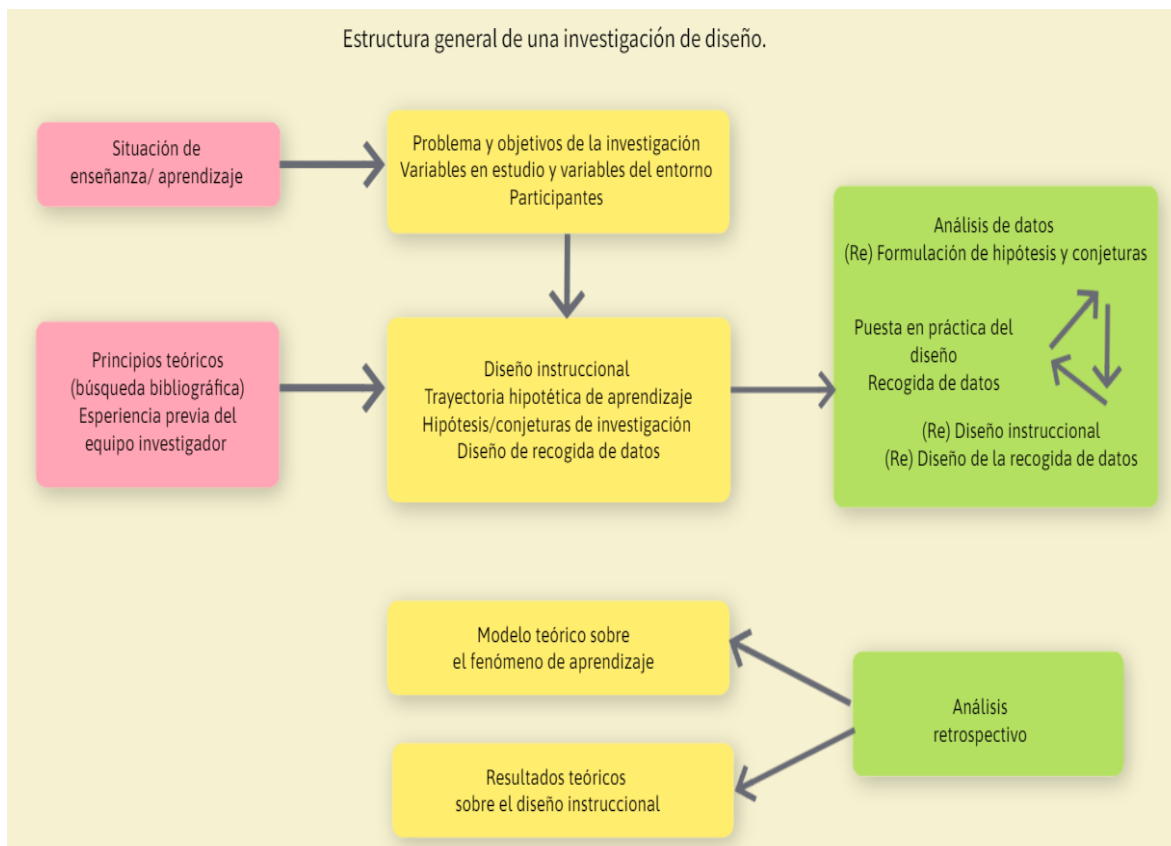
- Es un paradigma dentro del cual se pueden utilizar diferentes metodologías.
- La investigación se realiza en contextos reales donde hay un tipo de aprendizaje, cuenta con la participación de diferentes entes, como el docente y un grupo pequeño de estudiantes.
- Estos diseños desarrollan el modelo teórico, paralelo al diseño de un producto con la finalidad de resolver problemas o mejorar la educación.
- La acomodación del modelo a la realidad que se observa hace parte de la configuración del constructo teórico que se implementa en el diseño, para darle paso a interpretar los datos obtenidos durante la práctica.
- Utilizar estos diseños, permite obtener información que sirva de guía para otros estudios, asimismo, el análisis de los datos de carácter práctico se relaciona con el objetivo de promover aprendizaje en los estudiantes partícipes.
- Su contribución esta más enfocada en la formulación de modelos que en su validación.



En virtud de lo anterior, y según el camino que trazan las características, se hace posible el análisis de los niveles de razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos a la luz del modelo de van Hiele. De igual manera, con base en las tareas y los descriptores de fases para cada nivel, se abre la posibilidad de conocer las acciones que realizan los estudiantes, la construcción que logran de conceptos geométricos, y la consolidación en el progreso de los niveles de razonamiento. Todo esto enmarcado en un trabajo de campo en el que, a manera de una retroalimentación constante, se afinan los elementos del diseño según las interacciones y resultados de los participantes, a medida que se analizan y procesan los datos en términos de las características enunciadas. La figura 3 muestra una manera de entender la sistematización de la metodología, se presenta a continuación:

### **Figura 3**

*Características de los experimentos de diseño*



*Nota:* la figura muestra una estructura que describe las características de una investigación de diseño.

Fuente: Molina et al. (2011).

Las anteriores características dieron el norte a mi investigación, puesto que estos diseños no están condicionados y los trabajos que se deriven de ellos ofrecen la posibilidad de adaptarlos a secuencias de enseñanza que orienten la práctica docente a promover aprendizajes en los estudiantes en diversos contextos. Es por ello por lo que los experimentos de enseñanza se sitúan en la investigación de diseño y son muy frecuentes, pues las intervenciones están determinadas al logro de los objetivos propuestos y el investigador se involucra en el estudio. Para ello, se diseñaron actividades que contribuyeron al desarrollo y secuencia del experimento de enseñanza con las fases de aprendizaje propuestas en la investigación de Zapata y Sucerquia (2009): información, orientación dirigida, explicitación,

orientación libre, integración, correspondientes del modelo de van Hiele, hilos conductores que permitieron contribuir en la construcción de conceptos geométricos y el paso de un nivel al siguiente.

#### ***4.2.2 Experimento de enseñanza***

Para el caso del tema que nos convoca, el experimento de enseñanza cuenta con los recursos necesarios para apoyar los estudios relacionados con la educación matemática y la educación de las ciencias; se utiliza como herramienta para organizar las actividades y se caracteriza principalmente por experimentar con el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes. En ellos se establece una secuencia de episodios de enseñanza, en los que el docente investigador tiene como interés no solo que aprendan a resolver los problemas, sino que comprendan los esquemas de asimilación que poseen, y cómo estos cambian cuando hay una actividad matemática (Steffe & Tompson, 2000).

De igual manera, con la práctica nos acercamos a la forma en que los estudiantes interactúan con el conocimiento, y cómo razonan cuando no conocen la respuesta a un problema que se les plantea. Así, con base en la interacción, las acciones que realizan, los momentos y circunstancias que hacen parte del proceso de enseñanza y aprendizaje durante el experimento, es que surgen esquemas diferentes a los identificados inicialmente. La duración del experimento puede variar desde una hora hasta varios años, y el ambiente de aprendizaje puede cambiar desde habitaciones hasta lugares más amplios. En un experimento de enseñanza “el objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente” (Molina et al., 2011, p. 79); para ello, el investigador realiza una planificación para cada una de las interacciones en el aula y los hallazgos en relación con el lenguaje y acciones de los estudiantes que son utilizados para el análisis.

#### ***4.2.3 Diseño del experimento de enseñanza e instrumentos de recolección de información***

El experimento de enseñanza se desarrolló durante ocho sesiones. Primero, un pretest como prueba diagnóstica aplicada al inicio y un “postest” en la fase final del experimento;

luego, actividades diseñadas a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele y descriptores o acciones que ponen de manifiesto el razonamiento de los estudiantes; posteriormente, unas entrevistas realizadas durante los momentos de la secuencia de enseñanza, estas se definen desde el enfoque cualitativo “[...] como una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)” (Hernández et al., 2014, p. 403). Algunas entrevistas realizadas fueron estructuradas con preguntas específicas y otras semiestructuradas en las que se abordaron preguntas adicionales para precisar en conceptos, y al finalizar de cada encuentro, se dialogó al respecto sobre los aprendizajes adquiridos, las dificultades al resolver cada tarea y los avances con respecto a los contenidos trabajados; para esto, la observación, la toma de notas y los diarios de campo resultaron esenciales para llevar el monitoreo que este tipo de metodología exige.

A continuación, se describen en detalle estos últimos instrumentos: en primer lugar, la observación, pues fue permanente durante todo el trabajo de campo y en ella se vincularon todos los sentidos para escuchar, comprender y descifrar los sucesos que estuvieron presentes durante la investigación, asimismo, la observación es formativa y no se puede prescindir de ella en los estudios cualitativos porque implica según Hernández et al. (2014) “adentrarnos profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones” (p. 399).

En segundo lugar, la toma de notas permitió llevar los registros de diferentes momentos o sucesos que se presentaron durante el estudio pues según Hernández et al. (2014) estos “[...] nos ayudan contra la “mala memoria”, señalan lo importante, contienen las impresiones iniciales y las que tenemos durante la estancia en el campo, documentan la descripción del ambiente, las interacciones y experiencias” (p. 373), en estos registros se pueden incluir ideas propias, emociones, conductas y fotografías que proporcionan información para el desarrollo posterior del análisis y sus conclusiones.

En tercer lugar, el diario de campo fue un instrumento que ayudó a recolectar y sistematizar la información de los encuentros durante el trabajo de campo para posteriormente elaborar el análisis e interpretar los datos en esta investigación.

Por otra parte, los contenidos seleccionados que hacen parte del experimento pertenecen al componente geométrico sobre conceptos de semejanza de triángulos. Estos se tuvieron en cuenta dada su importancia dentro de los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los DBA, sobre todo a la hora de identificar relaciones de semejanza entre las formas geométricas (triángulos), explicar criterios de semejanza a partir de teoremas, identificar e interpretar la semejanza de dos figuras al realizar rotaciones, ampliaciones y reducciones, y resolver problemas que implican la aplicación de criterios de semejanza; los anteriores son aprendizajes estructurantes de distintos grados, pero se guarda coherencia en los elementos que permitan la aprehensión de los contenidos y promuevan el aprendizaje.

#### ***4.2.4 Momentos del experimento de enseñanza***

Para el desarrollo de los experimentos de enseñanza Molina et al. (2011), parten de tres fases o momentos definidos mediante acciones que se adaptaron a este estudio así:

- Preparación del experimento: en este se definió el problema, los objetivos, las justificaciones, y la línea de secuencia de las intervenciones de las cinco tareas que se implementaron; después se evaluaron los saberes previos de los estudiantes y se identificaron las metodologías de enseñanza más pertinentes y adecuadas para los contenidos referentes a la semejanza de triángulos en función de los objetivos. Igualmente, se diseñó la temporalidad para recoger los datos, y la descripción del resultado que se espera al promover procesos de aprendizaje.
- Experimentación y análisis preliminar: se recogieron los datos de las tareas realizadas a partir de la observación, el registro de notas y los diarios de campo para su interpretación; se identificaron los objetivos y se modificaron con justificación expresa los elementos que requirieron de ajustes. Por último, se hizo el registro de los posibles resultados que se obtienen de la intervención.
- Análisis retrospectivo de las sesiones: se organizó la información recolectada y se analizó el conjunto de todos los datos; para ello, se debió marcar distancia de los análisis preliminares y de la justificación del diseño que se realizó para cada intervención. Esta visión retrospectiva posibilitó comprender la situación

de enseñanza y aprendizaje de forma global; de igual manera, identificar una ruta conceptual con los DBA seguida por cada estudiante, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente; contrastar los resultados que se obtuvieron con los obtenidos en otros estudios, para analizar de forma descriptiva el aprendizaje de los estudiantes a lo largo del experimento de enseñanza.

### **4.3 Participantes**

Para implementar esta metodología, se realizó la invitación a estudiantes de la Institución Educativa Lusitania Paz de Colombia, perteneciente al sector público de la ciudad de Medellín, para participar de manera libre y voluntaria en un proyecto de matemáticas que permitiera promover el razonamiento geométrico; tres de ellos fueron seleccionados de acuerdo a la disposición y actitud que presentaban al momento de preguntarles de manera verbal “¿por qué querían participar?”, a lo que respondieron, según el interés manifiesto, “desarrollar aprendizajes significativos en matemáticas”. Las edades de los participantes oscilan entre los 14 y 16 años; por tal motivo, los representantes legales de cada menor firmaron un consentimiento para autorizar su participación.

### **4.4 Ruta metodológica**

Para dar respuesta a la pregunta de investigación y realizar el trabajo de campo que orienta la promoción de niveles de razonamiento geométrico, y cumplir con los objetivos propuestos, se propone una ruta metodológica que permitió identificar en qué nivel de razonamiento estaban los estudiantes, así como el progreso en las fases. Para esto, fue indispensable la construcción de descriptores para los niveles 2 y 3, de tal manera que se describió y analizó cómo los estudiantes realizaron las acciones y cómo fue su proceso de comprensión referido a conceptos de semejanza de triángulos.

De acuerdo con lo anterior, se sugieren los siguientes descriptores relacionados con el trabajo de investigación de Corberán et al. (1994), en el que se presentó una propuesta curricular para el aprendizaje de la geometría. En esta se describieron niveles basados en el modelo de van Hiele. Estos descriptores constituyeron el punto de referencia para la

construcción de los requeridos en esta investigación, en particular los correspondientes a los niveles 2 y 3, pues para el nivel 1 los estudiantes dieron cuenta de la apropiación de este.

Por lo tanto, las acciones enmarcadas en descriptores ponen de manifiesto el nivel de razonamiento de los estudiantes y guían las actividades que serán propuestas en la ruta metodológica, en la que el diseño de experimentos de enseñanza fueron protagonistas.

A continuación, se relacionan los descriptores que cumplen con uno de los objetivos específicos: el que trata sobre elaborar descriptores propios del nivel 2 y nivel 3 que den cuenta de las acciones realizadas por los estudiantes en el trabajo de campo y clasifican el nivel de aprendizaje de los estudiantes sobre conceptos de semejanza de triángulos.

#### ***4.4.1 Descriptores de los niveles 2 y 3 del modelo de van Hiele***

##### **4.4.1.1 Descriptores (D) del Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).**

El estudiante en este nivel:

- D<sub>1</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus ángulos.
- D<sub>2</sub>: Establece características y puede describir las partes de un triángulo.
- D<sub>3</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados.
- D<sub>4</sub>: Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.
- D<sub>5</sub>: Identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras.
- D<sub>6</sub>: Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.
- D<sub>7</sub>: Utiliza cálculos matemáticos para establecer proporciones entre los lados de los triángulos.

##### **4.4.1.2 Descriptores (D) del Nivel 3. Clasificación de una figura geométrica (triángulo)**

El estudiante en este nivel:

- D<sub>1</sub>: Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.
- D<sub>2</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.
- D<sub>3</sub>: Establece la razón de la proporción entre los lados de los triángulos.
- D<sub>4</sub>: Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.
- D<sub>5</sub>: Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aún no reconoce la estructura de una demostración.
- D<sub>6</sub>: Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura.
- D<sub>7</sub>: Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.
- D<sub>8</sub>: Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).
- D<sub>9</sub>: Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Angulo, Lado).
- D<sub>10</sub>: Infiere que dos triángulos son semejantes a partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).

Las acciones mencionadas hacen parte del diseño metodológico a partir de experimentos de enseñanza, y se implementaron mediante una serie de etapas que buscaron el progreso de los estudiantes hasta un nivel superior de razonamiento. En este caso, se pretendió por alcanzar un nivel 3 con los estudiantes de secundaria, puesto que el nivel 4 de deducción formal y el nivel 5 de rigor son niveles que se alcanzan en grados superiores de educación.

Con base en lo anterior, se diseñaron actividades para promover niveles de razonamiento en los estudiantes, a partir de las fases de aprendizaje, hilos conductores que permitieron contribuir en la construcción de conceptos geométricos y pasar de un nivel al siguiente. Para dar cumplimiento al objetivo anterior, se dispuso de tres etapas que hicieron parte de la ruta metodológica.



#### ***4.4.2 Etapas de la ruta metodológica***

La ruta metodológica se dividió en tres etapas que permitieron guiar el trabajo de campo a partir de la difusión e invitación a estudiantes para participar de la investigación, luego la preparación del experimento, la experimentación para promover el razonamiento de los estudiantes y la ejecución del análisis de los datos.

##### **4.4.2.1 Etapa 1.**

Se hizo la invitación a estudiantes de la institución educativa para participar de actividades enfocadas en promover niveles de razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos, se les informó qué se abordaría en este estudio, el tiempo en el cual se desarrollarían las actividades de aprendizaje, se indicaron los materiales necesarios para el trabajo de campo, y los posibles alcances al terminar la implementación del proyecto.

##### **4.4.2.2 Etapa 2.**

Se dio inicio con la elaboración y aplicación de un “pretest” o prueba diagnóstica, que proporcionó información al investigador docente para identificar qué conocimiento tienen los estudiantes sobre el tema de semejanza de triángulos, analizar sus razonamientos, e identificar en qué nivel se encontraban con respecto al modelo de van Hiele. Luego se diseñó y desarrolló un experimento de enseñanza que posibilitó orientar las actividades de los estudiantes para la construcción de conceptos sobre semejanza de triángulos, de modo que les ayudara a progresar en los niveles de razonamiento. Se continuó con la implementación de cinco momentos diseñados a partir de las fases que presenta el modelo así:

- Momento 1 ( $M_1$ ): Recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás, este primer momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 1 (información).
- Momento 2 ( $M_2$ ): Implementación de las TICS con GeoGebra, este segundo momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 2 (orientación dirigida).

- Momento 3 ( $M_3$ ): Experimentemos con el Teorema de Tales, en este tercer momento el experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 3 (explicitación).
- Momento 4( $M_4$ ): Resolución de problemas en contexto, en este cuarto momento el experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 4 (orientación libre).
- Momento 5( $M_5$ ): Aplicación de “postest” y entrevista de cierre, en este quinto momento el experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 5 (Integración).

#### 4.4.2.3 Etapa 3.

Se realizó el análisis de la información del experimento de enseñanza y se establecieron los datos o conclusiones que servirían de aporte para contribuir a investigaciones posteriores, además, las evidencias obtenidas de sus procesos de razonamiento también arrojaron información al estudio, sobre los posibles progresos en los niveles de razonamiento de los estudiantes.

De la misma manera, la información que resulta del análisis y atiende a las necesidades específicas de la investigación sirven para comprender la realidad educativa en cuanto al fenómeno de estudio, evidenciar la pertinencia de las estrategias metodológicas utilizadas y establecer la importancia en la investigación cualitativa porque esta “[...] proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas” (Hernández et al., 2014, p. 19).

Así pues, para orientar el progreso de la investigación, “se espera que el alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos” (Molina et al., 2011, p. 79). Por lo tanto, estos experimentos son generadores de cambios, y posiblemente aporten al progreso en los niveles de razonamiento.

Para concluir, es necesario tener presente que las tareas que se proponen deben promover ambientes y escenarios dinámicos que posibiliten la interacción con el objeto matemático, para ello, se utilizaron algunos recursos como las Tecnologías de la Información

y la Comunicación (TICS), que según el Ministerio de Educación Nacional (1999) proponen elementos interactivos, como software gratuitos (GeoGebra) “tecnologías basadas en medios electrónicos interactivos que tienen atributos fundamentales, que los distinguen de los medios tradicionales estáticos” (p. 24), para promover el razonamiento geométrico. Esto último, generó un interés en mi labor docente por investigar cómo se promueve el aprendizaje en los estudiantes y cómo estos razonan a la luz del modelo de van Hiele; la concreción de este estudio se visualiza en los siguientes capítulos de análisis, discusión y conclusiones, puesto que allí con mayor profundidad se analizan los aspectos mencionados y estos dan respuesta a la pregunta y el logro de los objetivos propuestos.

## Capítulo 4

### 5. Análisis

Este apartado muestra los resultados que se obtuvieron de la investigación realizada en la Institución Educativa Lusitania Paz de Colombia, perteneciente al sector público de la ciudad de Medellín, con estudiantes de secundaria (14-16 años). El problema comenzó a evidenciarse durante la práctica docente, cuando se observaron dificultades en los aprendizajes de los estudiantes frente a la asignatura de geometría, sobre todo asociados con falencias en saberes previos, la integración de elementos de conceptualización con la visualización, el análisis de propiedades, representaciones de figuras geométricas y la comprensión del significado de sus definiciones. También, se vio reflejado en dificultades que tienen los estudiantes al resolver problemas relacionados con las competencias básicas comunicativas y de razonamiento en pruebas externas que se realizan en las instituciones y en las que se hace revisión del índice de calidad.

Por lo anterior, este estudio se enfocó en los factores mencionados, en aras de mejorar procesos de razonamiento y favorecer el progreso en los niveles de van Hiele, consolidando procesos de visualización, el lenguaje y la comprensión de conceptos de semejanza de

triángulos. El modelo de van Hiele se seleccionó por ser un referente teórico que ha dado aportes a diferentes investigaciones y en diversos conceptos referidos a las matemáticas (Aravena y Caamaño, 2013; Gualdrón, 2014; Jurado y Londoño, 2005; Zapata y Sucerquia, 2009; Ávila, 2017; Giraldo, 2021) para mejorar la comprensión de conceptos, estratificar el pensamiento de los estudiantes y promover sus niveles de razonamiento.

En coherencia con lo anterior, el modelo de van Hiele (1957) proporciona elementos para caracterizar y estratificar los niveles de pensamiento en los que un estudiante puede razonar en cuanto a conceptos de geometría. Es así como los Niveles 2 y 3 fueron objeto de análisis para el presente estudio y marcaron una posible ruta para evidenciar progreso en el razonamiento, toda vez que con los estudiantes clasificados en el Nivel 2 se buscó un progreso a un nivel superior.

Entre algunos elementos que permitieron evidenciar el progreso y que son característicos del modelo, se exalta el razonamiento, la importancia del lenguaje y la comprensión de los contenidos (Fouz, 2013). Es por ello por lo que son objetos de interés para la investigación. Así pues, hablar del progreso por los niveles de razonamiento implica referirse también a un progreso en el lenguaje, y este, a su vez, pone de manifiesto las acciones de los estudiantes que pueden ser caracterizadas a través de descriptores. Estos enmarcaron el diseño del experimento propuesto en el trabajo de campo, asimismo, consolidaron su diseño con las fases que propone el modelo para los niveles de razonamiento 2 y 3 asociados al concepto de semejanza de triángulos y se implementó a partir de encuentros extra clase que duraron ocho sesiones.

### **5.1 Descripción del experimento de enseñanza**

Para este experimento, se diseñó un pretest como prueba diagnóstica, que sirvió de instrumento para clasificar a los estudiantes en un nivel del modelo de van Hiele; luego, se planificó una secuencia de actividades para cinco momentos del experimento con cada una de las fases de aprendizaje, en un primer momento se desarrolló la fase 1 de información en coherencia con la actividad de instrucción llamada “construcciones con regla y compás”; se continuó la fase 2 de orientación dirigida como un segundo momento. En esta se realizó la actividad de “implementación de las TICS con GeoGebra”; después se avanzó a un tercer

momento con la fase 3 de explicitación, se realizó un acercamiento al teorema de Tales llamada “La experimentemos con el teorema de Tales”; seguidamente, se dio lugar al cuarto momento con la fase 4 de orientación libre, a partir de “Resolución de problemas en contexto”; y se concluyó con el quinto momento de la fase 5 de integración, allí se evaluaron los avances de los estudiantes y el progreso en su nivel de razonamiento, para esta fase se realizó un “postest” y la entrevista final del experimento.

Para este experimento se diseñaron e implementaron paralelamente descriptores en cada una de las fases sobre conceptos relacionados con la semejanza de triángulos. Estos evidenciaron las acciones que los estudiantes realizaban y la evolución de su razonamiento. Posteriormente, se hicieron preguntas orientadoras tipo entrevista durante los momentos de la secuencia de enseñanza y, al finalizar de cada encuentro, se dialogó con los estudiantes respecto a los aprendizajes adquiridos, las dificultades para resolver cada actividad y los avances en la comprensión de conceptos. Esto último se da según van Hiele (1957) cuando se le presentan nuevas situaciones a las que nunca se había enfrentado en un determinado campo de la geometría y este logra llegar a conclusiones.

Lo anterior permitió realizar ajustes a las actividades y descriptores propuestos, complementar conceptos teóricos y pulir aspectos que lo requerían; para esto, la observación y la toma de notas en el diario de campo resultaron esenciales para llevar el monitoreo que este tipo de metodología exige. Los descriptores que se relacionan en la tabla 3 hicieron parte del diseño que guió este estudio y que contribuyeron en la promoción del razonamiento, allí se muestran las acciones o descriptores de los Niveles 2 y 3 que hicieron parte del experimento de enseñanza en cada una de las fases:

**Tabla 3**

*Descriptores del experimento de enseñanza*

<b>Descriptores (D) del Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).</b>	<b>Descriptores (D) del Nivel 3. Clasificación de una figura geométrica (triángulo)</b>
El estudiante en este nivel: D <sub>1</sub> : Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus ángulos.	El estudiante en este nivel: D <sub>1</sub> : Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.

<p>D<sub>2</sub>: Establece características y puede describir las partes de un triángulo.</p> <p>D<sub>3</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados.</p> <p>D<sub>4</sub>: Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.</p> <p>D<sub>5</sub>: Identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras.</p> <p>D<sub>6</sub>: Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.</p> <p>D<sub>7</sub>: Utiliza cálculos matemáticos para establecer proporciones entre los lados de los triángulos.</p>	<p>D<sub>2</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</p> <p>D<sub>3</sub>: Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.</p> <p>D<sub>4</sub>: Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aún no reconoce la estructura de una demostración.</p> <p>D<sub>5</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</p> <p>D<sub>6</sub>: Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura.</p> <p>D<sub>7</sub>: Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.</p> <p>D<sub>8</sub>: Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).</p> <p>D<sub>9</sub>: Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Ángulo, Lado).</p> <p>D<sub>10</sub>: Infiere que dos triángulos son semejantes a partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).</p>
---	---

*Nota.* Descriptores de los niveles 2 y 3 en relación con conceptos de semejanza de triángulos. Fuente: elaboración propia.

Las acciones mencionadas anteriormente se establecieron como descriptores de razonamiento asociados a los Niveles 2 y 3, algunos de estos estuvieron presentes en investigaciones como la de Corberán et al. (1994); Zapata y Sucerquia (2009); Jurado y Londoño (2005). Y para efectos del presente análisis se retomaron dichos descriptores, se realizaron adecuaciones y se construyeron otros para dar cumplimiento con los objetivos propuestos.

Algunas de estas acciones hacen parte del “pretest” que se describe a continuación. Estas estuvieron enfocadas en su diseño y aplicación como prueba diagnóstica que sirvió de instrumento para estratificar el pensamiento de los estudiantes. Inicialmente, estaba enmarcado en acciones del Nivel 2 de análisis, en el cual los estudiantes: identifican las partes que compone una figura geométrica, reconocían propiedades matemáticas aunque sus razonamientos aún están guiados por la percepción física de las figuras, realizaban mediciones en sus trabajos prácticos, hacían relaciones entre elementos básicos de las figuras, enunciaban listas de algunas de sus propiedades y las usaban de manera independiente, las anteriores acciones dieron cuenta de que sus respuestas, en ocasiones, partían de la observación y medición directa, por lo que se puede concluir que aun sus razonamientos son limitados (MEN, 1998; Zapata y Sucerquia, 2009).

En correspondencia con los descriptores para este nivel que permitieron identificar cómo razonan los estudiantes, cómo deducen propiedades a partir de la experimentación, cómo enumeran elementos característicos de los triángulos, la interpretación que tienen de algunas definiciones y propiedades geométricas de los triángulos, y las descripciones que hacen de manera informal. Aun así, con lo rastreado para el nivel 2 se adicionaron algunos descriptores del Nivel 3, estos se relacionan en la siguiente tabla 4 con el fin de identificar si alguno de los participantes se acercaba a este o daba indicios característicos de este nivel.

**Tabla 4**

*Descriptores de los Niveles 2 y 3 que direccionaron el “pretest”*

Descriptores (D) del Nivel 2. Análisis de una figura geométrica (triángulo).	Descriptores (D) del Nivel 3. Clasificación de una figura geométrica (triángulo)

<p>El estudiante en este nivel:</p> <p>D<sub>1</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus ángulos.</p> <p>D<sub>2</sub>: Establece características y puede describir las partes de un triángulo.</p> <p>D<sub>3</sub>: Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados.</p> <p>D<sub>4</sub>: Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.</p> <p>D<sub>7</sub>: Utiliza cálculos matemáticos para establecer proporciones entre los lados de los triángulos.</p>	<p>El estudiante en este nivel:</p> <p>D<sub>1</sub>: Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.</p> <p>D<sub>2</sub>: Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</p> <p>D<sub>4</sub>: Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aún no reconoce la estructura de una demostración.</p> <p>D<sub>7</sub>: Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.</p>
---	--

*Nota.* Algunos descriptores de los niveles 2 y 3 en relación con conceptos de semejanza de triángulos.  
Fuente: elaboración propia.

En esta prueba se analizó cada uno de los ítems para clasificar a los estudiantes en un nivel de acuerdo con el modelo de van Hiele (1957). Para el análisis del pretest y el experimento de enseñanza se hizo la selección de algunas actividades representativas que se describieron en tablas y matrices para la organización, síntesis y análisis de la información recolectada durante el trabajo de campo. Estas sirvieron de evidencia para mostrar los resultados, analizar como razonan los estudiantes y evidenciar el progreso en su razonamiento.

Continuando con las ideas hasta ahora expuestas, se hace una descripción del proceso mencionado así: en primer lugar, para cada uno de los apartados del presente análisis se construyeron tablas con elementos y actividades del trabajo de campo, estas hicieron parte de cada una de las fases y guiaron el análisis de los datos; luego, se presentaron los resultados más representativos de las actividades desarrolladas por los estudiantes participantes de la investigación, con su respectivo monitoreo y un análisis de los resultados; por último, con



esta información en conjunto se construyeron unas matrices que según Hernández et al. (2014)

[...] son útiles para establecer vinculaciones entre categorías o temas (o ambos). Las categorías o temas se colocan como columnas (verticales) o como renglones o filas (horizontales). En cada celda el investigador documenta si las categorías o temas se vinculan o no; y puede hacer una versión donde explique cómo y por qué se vinculan. (p. 446)

Así pues, estas matrices están compuesta por filas y columnas, estas a su vez contienen datos modificables en función de la investigación, el cruce de estas filas y columnas producen unas celdas en las que se sintetizó la información que denota una acción del estudiante (el nombre de cada estudiante se cambió por  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  para proteger su identidad, debido a que son menores de edad) que resume los resultados para cada una de las fases.

Por otra parte, las evidencias que se recolectaron de la prueba diagnóstica se relacionan en la siguiente matriz y estas arrojaron información importante de los saberes previos que tenían los estudiantes sobre conceptos relacionados con propiedades y características de los triángulos y el nivel de comprensión en cuanto a los criterios de semejanza. Durante la implementación de la actividad se dio el espacio para preguntas relacionadas con los enunciados y conceptos, esto con el fin de observar si estaban claros en cuanto a redacción y contenido o cuales no, preguntas abiertas, y cerradas de selección múltiple con única respuesta, para identificar los saberes previos, se realizaron, además, ejercicios de apareamiento para identificar las propiedades de los triángulos, se establecieron actividades para calcular razones y proporciones en triángulos, y por último, actividades de comparación de triángulos en las que se establecieron criterios de semejanza entre triángulos.

En una prueba las preguntas que se formulan a los estudiantes, según Jurado y Londoño (2005), con el propósito de “[...] determinar, si reconoce adecuadamente los conceptos y elementos básicos usados” (Jurado y Londoño, 2005, p. 87), para identificar qué saben o desconocen, saberes previos que poseen, definiciones y propiedades que utilizan sobre los triángulos y su clasificación, todo con el fin de analizar sus razonamientos y ubicarlos en un nivel del modelo.

A continuación, en la tabla 5 se relacionan los elementos más representativos que hicieron parte de la prueba diagnóstica, esta, según Jaime y Gutiérrez (1990) permiten “[...] determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así” (p. 321); en coherencia con lo anterior, analizar sus respuestas fue un proceso que sirvió de insumo para rastrear su proceso de razonamiento y clasificarlos en un nivel del modelo de van Hiele, la información que se presenta a continuación posibilitó la revisión de las respuestas dadas por los estudiantes que participaron de la investigación.

**Tabla 5**

*Elementos del “pretest” para clasificar  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en un Nivel 2 del modelo de van Hiele.*

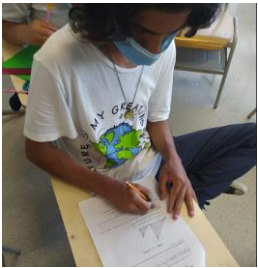
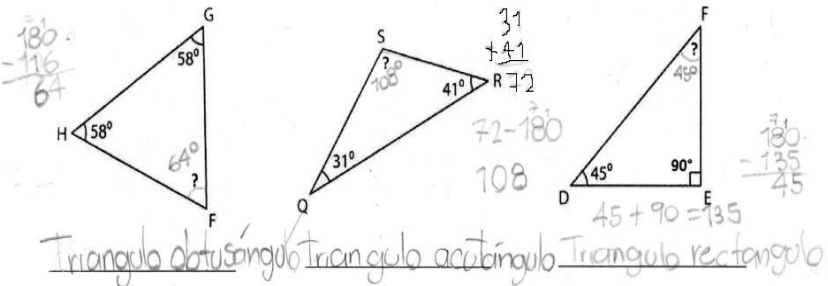
<b>Descriptores del Nivel 2</b>	D <sub>1</sub> : Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus ángulos. D <sub>2</sub> : Establece características y puede describir las partes de un triángulo. D <sub>3</sub> : Establece características de un triángulo a partir de la clasificación según sus lados. D <sub>4</sub> : Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.
<b>Conocimientos previos</b>	Se evaluaron los siguientes elementos: Identificar las clases de ángulos según su medida. Clasificar los triángulos según la medida de sus ángulos.
<b>Descripción de la actividad</b>	Se desarrolló el pretest indagando por saberes previos del estudiante, se hizo énfasis en la parte visual, se identificó que lenguaje matemático utiliza al momento de justificar un proceso y como lo hace de manera informal.
<b>Actividad propuesta</b>	Halla la medida del ángulo interno que falta y escribe el nombre que recibe el triángulo de acuerdo con la amplitud de sus ángulos internos: triángulo obtusángulo, triángulo rectángulo o triángulo acutángulo.
<b>Instrucciones de la actividad</b>	Se solicitó previamente traer a la prueba diagnóstica regla, transportador, lápiz, sacapuntas y borrador, se entregó a cada estudiante un “pretest” y se dió la orientación de realizar la actividad propuesta con el fin de identificar qué saben del objeto en estudio, además, el estudiante debía escribir en aquellos apartados donde no comprendían el enunciado una nota que indicara el porqué no realizaba dicha actividad.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” para el análisis y clasificación de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en el Nivel 2 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presentan los resultados que se relacionan en la tabla 6, 7 y 8, los cuales corresponden a las respuestas y datos recogidos durante el trabajo de campo y que dan cuenta de la información que se requiere para clasificar a los estudiantes en un nivel del modelo propuesto:

**Tabla 6**

*Resultado del “pretest” para clasificar E<sub>1</sub> en un Nivel 2 del modelo de van Hiele*


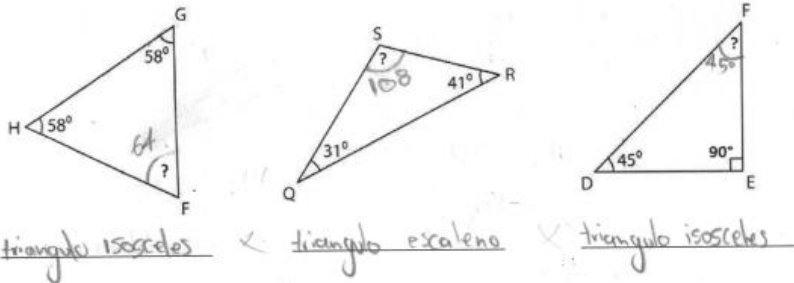
<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>En observó que el estudiante:</p> <p>Identifica las características de los triángulos.</p> <p>Identifica propiedades de los triángulos.</p> <p>Identifica las clases de ángulos según su medida.</p> <p>Clasifica los triángulos según la medida de sus lados.</p> <p>Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos.</p>
<p><b>Resultado</b></p> <p>E<sub>1</sub></p> 	<p>Identifica que las medidas de los ángulos interiores de un triángulo determinan su nombre y clasificación.</p>  <p>Realiza razonamientos al identificar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Todo triángulo tiene propiedades, en este caso la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, el estudiante deduce a partir de cálculos de suma y resta el valor que falta.</li> <li>• Según las medida de los ángulos internos de un triángulo este se clasifica así:</li> </ul> <p>Si un triángulo si tiene un ángulo de 90° es triángulo rectángulo.</p> <p>Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos es un Triángulo acutángulo.</p> <p>Si un triángulo tiene uno de sus ángulos obtuso es Triángulo obtusángulo.</p>

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de E<sub>1</sub> y análisis de sus resultados. Fuente: elaboración propia.

Al analizar los resultados de las acciones que realizó E<sub>1</sub>, se evidenció que este cumple con los descriptores propuestos para el Nivel 2. Puesto que en la teoría se demuestra que los estudiantes en este nivel analizan “[...] las relaciones entre los elementos básicos de estudio... reconocen las propiedades matemáticas de los objetos” (Zapata y Sucerquia, 2009, p.45); los elementos aquí descritos le facilitaron al estudiante poner de manifiesto la comprensión que tiene de los conceptos básicos relacionados con la clasificación y propiedades de los triángulos, acciones que lo clasifican en un Nivel 2. Siendo consecuente con la revisión de los resultados y siguiendo la dirección de los elementos de la tabla 5, se muestran las evidencias en la tabla 7 para E<sub>2</sub> extraídas del “pretest” que se le realizó:

**Tabla 7**

*Resultado del “pretest” para clasificar E<sub>2</sub> en un Nivel 2 del modelo de van Hiele*

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observó que el estudiante:</p> <p>Identifica algunos ángulos de acuerdo con su amplitud y comprende que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°.</p> <p>Describe algunas características de los triángulos de forma muy general y se enfoca en nombrarlos atendiendo a la medida de longitud de sus lados.</p> <p>Identifica que la medida de los ángulos internos tienen relación con el nombre de la medida de sus lados, pero aún no clasifica los triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos internos.</p>
<p><b>Resultado E<sub>2</sub></b></p> 	<p>El estudiante halla la medida del ángulo que falta correctamente atendiendo a la suma de los ángulos internos, pero aún no relaciona las propiedades atendiendo a sus ángulos (rectángulos, acutángulos, obtusángulos).</p>  <p>Realiza razonamientos al identificar que:</p>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Todo triángulo tiene propiedades, y la suma de los ángulos interiores de un triángulo da <math>180^\circ</math>, el estudiante halla con cálculos mentales el valor del ángulo faltante.</li> <li>• Según las medida de los ángulos del triángulo este lo relaciona con la clasificación de los lados del triángulo, pero aún no hace relaciones de clasificacion según la medida de los ángulos.</li> </ul>
--	---


*Nota.* Datos tomados del “pretest” de  $E_2$  y análisis de sus resultados. Fuente: elaboración propia.

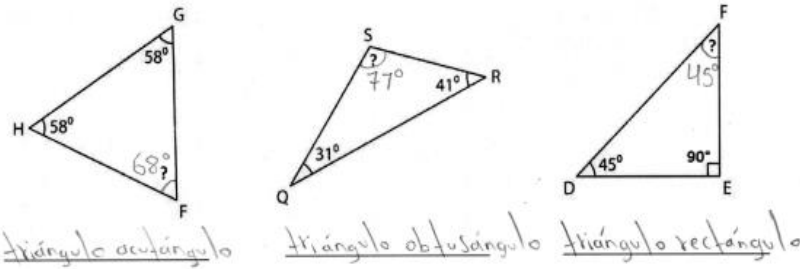
Las evidencias que se encuentran en la tabla anterior en relación con las acciones desarrolladas por  $E_2$  muestran que cumple con los descriptores propuestos para el Nivel 2. Dado que, al analizar las actividades del estudiante, este “establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación” (Vargas y Gamboa, 2013, p. 83), esto se logra ver reflejado en sus respuestas, ya que se enfoca en lo que observa al reconocer que todo triángulo posee características particulares y que tiene propiedades, pero se le dificulta relacionarlas según su clasificación. Se continuó el análisis de  $E_3$  en la tabla 8 con el propósito de identificar si este presenta alcances del mismo nivel y en relación con los elementos de la tabla 5.

**Tabla 8**

*Resultado del “pretest” para clasificar  $E_3$  en el Nivel 2 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que la estudiante: Identifica correctamente el nombre de cada ángulo de acuerdo con su amplitud. Hace mediciones utilizando el transportador para hallar la medida de los ángulos internos del triángulo. Clasifica correctamente los triángulos según la medida de sus ángulos internos.
<b>Resultado <math>E_3</math></b>	Identifica que las medidas de los ángulos interiores de un triángulo determinan su nombre y clasificación.





Realiza razonamientos al identificar que:

- Todo triángulo tiene propiedades y las enumera, pero no reconoce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ , la estudiante es mas visual y se enfoca en utilizar instrumentos de medición para validar sus resultados y calcular el valor que falta.
- Según las medida de los ángulos internos de un triángulo este se clasifica así:

Si un triángulo si tiene un ángulo de  $90^\circ$  es triángulo rectángulo.  
 Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos es un Triángulo acutángulo.  
 Si un triángulo tiene uno de sus ángulos obtuso es Triángulo obtusángulo.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de  $E_3$  y análisis de sus resultados. Fuente: elaboración propia.

La anterior acción arrojó evidencias del razonamiento que hace  $E_3$  en cuanto al reconocimiento de algunas propiedades y características de los triángulos, pues encuentra la respuesta correcta al nombre de los triángulos de acuerdo con la clasificación según la medida de los ángulos internos, esta evidencia puede darse “[...] a partir de la observación o de la manipulación. No obstante, esa capacidad es limitada, lo que se puede manifestar en clasificaciones incorrectas, ya que las propiedades aparecen como una lista, sin relación de unas con otras” (Jurado y Londoño, 2005, p. 10). Dicho esto, al manipular el objeto matemático sin relacionar las propiedades,  $E_3$  encuentra el valor de los ángulos internos de dos de los triángulos de forma errónea, lo que da validez a los aportes dados por los autores mencionados quienes afirman que en el Nivel 2 de análisis la estudiante limita su capacidad a la visualización y manipulación del objeto en estudio.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se utilizaron descriptores del Nivel 3 dentro del mismo “pretest” en relación con los conceptos de semejanza de triángulos, con el

propósito de identificar si los estudiantes partícipes de este estudio tenían alcances en procesos de formalización que tuviesen relación con este nivel. Para ello, la tabla 9 muestra algunos elementos seleccionados y actividades que hicieron parte de la prueba.

**Tabla 9**

*Elementos y actividad 8 del “pretest” para clasificar  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en un nivel 3 del modelo de van Hiele.*

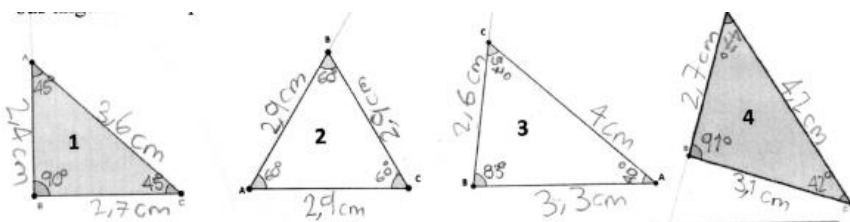
<b>Descriptor del Nivel 3</b>	D <sub>1</sub> : Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos. D <sub>2</sub> : Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.
<b>Conocimientos previos</b>	En este se evaluó el siguiente elemento: Comparar las relaciones que existen en los triángulos entre las medidas de sus lados y sus ángulos correspondientes.
<b>Descripción de la actividad</b>	Esta actividad busca identificar si el estudiante reconoce las propiedades y las relaciona entre sí y si descubre otras propiedades.
<b>Actividad propuesta</b>	8. Encuentra las medidas de los lados y de los ángulos de cada uno de los siguientes triángulos, y señala con “x” en el cuadro inferior todas las características y propiedades que posea cada uno estos.
<b>Instrucciones de la actividad</b>	Se solicitó previamente traer a la prueba diagnóstica regla, transportador, lápiz, sacapuntas y borrador, se entregó a cada estudiante un “pretest” y se dió la orientación de realizar la actividad propuesta con el fin de identificar que saben del objeto en estudio, además, el estudiante debía escribir en aquellos apartados donde no comprendían el enunciado una nota que indicara el porque no realizaba dicha actividad.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” para análisis y clasificación de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia

Es importante considerar los descriptores del Nivel 3 dentro del mismo “pretest” dado que, si en algún punto el razonamiento exhibido de un estudiante estuviese en relación con este nivel, las actividades propuestas se direccionarían en perfeccionar dicho nivel y avanzar al siguiente. Por lo anterior, las tablas 10, 11 y 12 que se relacionan a continuación, muestran las respuestas de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  que corresponden a los elementos seleccionados en la tabla 9 y que hicieron parte de la prueba en cuestión.

**Tabla 10**

Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar  $E_1$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observa que el estudiante: Identifica algunas propiedades que caracterizan los triángulos, pero no en conjunto, al momento de identificar la clasificación de los triángulos según las medidas de sus ángulos o sus lados no logra en conjunto hacer relaciones.</p>																																			
<p><b>Resultado</b> <math>E_1</math></p>	<p>Utiliza adecuadamente los instrumentos de medición para hallar los datos, logra identificar algunas propiedades pero se le dificulta hacer relaciones, solo selecciona algunos elementos que clasifican los triángulos.</p>  <table border="1" data-bbox="503 1039 1307 1228"> <thead> <tr> <th></th> <th>Equilátero</th> <th>Isósceles</th> <th>Escaleno</th> <th>Rectángulo</th> <th>Acutángulo</th> <th>Obtusángulo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table> <p>Realiza razonamientos al identificar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Todo triángulo tiene propiedades.</li> <li>• La suma de los ángulos interiores de un triángulo es <math>180^\circ</math>,</li> <li>• Según las medida de los ángulos internos de un triángulo este se clasifica así:</li> </ul> <p>Si un triángulo si tiene un ángulo de <math>90^\circ</math> es triángulo rectángulo.      Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos es un Triángulo acutángulo.      Si un triángulo tiene uno de sus ángulos obtuso es Triángulo obtusángulo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Según las medida de los lados, un triángulo se clasifica en:</li> </ul> <p>Si un triángulo si tiene todos sus lados iguales es equilátero.      Si un triángulo tiene dos de sus lados con igual medida es isósceles.      Si un triángulo tiene todos sus lados con diferente medida es escaleno.</p> <p>Se le dificulta relacionar las propiedades, nombra algunas que observa pero considera que solo puede clasificarlas de acuerdo a una sola propiedad.</p>		Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo																														
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														



*Nota.* Datos tomados del “pretest” de  $E_1$  para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

En esta actividad  $E_1$  responde aún a las acciones del Nivel 2 de análisis, dado que selecciona algunos elementos de clasificación y aún no establece relaciones entre las propiedades del objeto matemático, es por ello que sus razonamientos “se ven limitados porque las propiedades se usan de manera independiente, [mayormente] se enuncian listas de propiedades que permiten identificar los objetos geométricos, pero de estas no se determinan cuáles son suficientes y necesarias para definir un objeto” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 45), estas limitaciones las logra superar el estudiante cuando su razonamiento le permite establecer interrelaciones entre el objeto en estudio y las partes que lo conforman, toda vez que el estudiante logre completar estas acciones pasará al nivel esperado que es el siguiente. Los resultados que se relacionan en la tabla 11 pertenecen a  $E_2$ .

**Tabla 11**

*Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar  $E_2$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que el estudiante: Identifica algunas propiedades que caracterizan los triángulos, pero no en conjunto, al momento de seleccionar la clasificación de los triángulos solo clasifica los triángulos según la medida de sus lados, aún no establece relación con las medidas de sus ángulos, por lo tanto, no logra en conjunto hacer relaciones.
<b>Resultado <math>E_2</math></b>	Utiliza adecuadamente los instrumentos de medición para hallar los datos, logra identificar algunas propiedades pero se le dificulta hacer relaciones, solo selecciona algunos elementos que clasifican los triángulos de acuerdo con la medida de los lados.

	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo
1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Realiza razonamientos al identificar que:

- Todo triángulo tiene propiedades.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .
- Según las medida de los lados, un triángulo se clasifica en:

Si un triángulo si tiene todos sus lados iguales es equilátero.  
 Si un triángulo tiene dos de sus lados con igual medida es isósceles.  
 Si un triángulo tiene todos sus lados con diferente medida es escaleno.

Se le dificulta relacionar las propiedades, nombra algunas que observa pero considera que solo puede clasificarlas de acuerdo a una sola propiedad.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de E<sub>2</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

En esta actividad E<sub>2</sub> responde aún a las acciones del Nivel 2 de análisis sin mostrar cercanía con el Nivel 3; este continúa enfocado en visualizar solo la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus lados, selecciona unas propiedades y no establece las relaciones entre la clasificación según sus lados y sus ángulos, está enfocado en usar “[...] propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 309). Por lo tanto, E<sub>2</sub> no logra clasificar adecuadamente los triángulos y le da más importancia a establecer una propiedad que encontrar varias en común. Para finalizar con el análisis de este primer ítem se relaciona en la siguiente tabla 12 los resultados de E<sub>3</sub> y su análisis respectivo.

**Tabla 12**

Resultado de la actividad 8 del “pretest” para clasificar E<sub>3</sub> en un Nivel 3 del modelo de van Hiele

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observó que la estudiante: Identifica algunas propiedades que caracterizan los triángulos, pero no en conjunto, al momento de identificar la clasificación de los triángulos solo clasifica los triángulos según la medida de sus lados, aún no establece relación con las medidas de sus ángulos, por lo tanto, no logra en conjunto hacer relaciones.</p>																																			
<p><b>Resultado</b> E<sub>3</sub></p>	<p>Utiliza los instrumentos de medición para hallar los datos, logra identificar algunas propiedades pero se le dificulta hacer relaciones, solo selecciona algunos elementos que clasifican los triángulos.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Equilátero</th> <th>Isósceles</th> <th>Escaleno</th> <th>Rectángulo</th> <th>Acutángulo</th> <th>Obtusángulo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table> <p>Realiza razonamientos al identificar que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Todo triángulo tiene propiedades.</li> <li>• Según las medida de los lados, un triángulo se clasifica en: Si un triángulo si tiene todos sus lados iguales es equilátero. Si un triángulo tiene dos de sus lados con igual medida es isósceles. Si un triángulo tiene todos sus lados con diferente medida es escaleno.</li> <li>• Según las medida de los ángulos internos de un triángulo este se clasifica así: Si un triángulo si tiene un ángulo de 90° es triángulo rectángulo. Si un triángulo tiene sus tres ángulos agudos es un Triángulo acutángulo. Si un triángulo tiene uno de sus ángulos obtuso es Triángulo obtusángulo.</li> </ul> <p>Se le dificulta relacionar las propiedades, nombra algunas que observa pero considera que solo puede clasificarlas de acuerdo a una sola propiedad.</p>		Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo																														
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																														

Nota. Datos tomados del “pretest” de E<sub>3</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

En la actividad anterior  $E_3$  continuó presentando dificultades al manipular el objeto de estudio; la estudiante no tenía claridad frente a algunas propiedades y características de los triángulos, lo que denotó un resultado erróneo en uno de los triángulos al realizar mediciones de los ángulos internos, evidenciándose que “No relaciona las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades” (Jurado y Londoño, 2005, p. 10), en este nivel la estudiante es capaz de describir un triángulo, enumera algunas de sus propiedades pero aún no las relaciona, obedeciendo al Nivel 2 de análisis sin lograr mostrar elementos que evidencien estar en un Nivel 3. Adicionalmente, se seleccionaron otras actividades que hicieron parte del pretest y se relacionan en la tabla 13 pues eran evidencias que estaban directamente relacionadas con los conceptos de semejanza de triángulos e hicieron parte del Nivel 3.

**Tabla 13**

*Elementos y actividades 9, 10, 11 y 12 del “pretest” para clasificar  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en un nivel 3 del modelo de van Hiele.*

<b>Descriptor del Nivel 3</b>	D <sub>5</sub> : Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aun no reconoce la estructura de una demostración. D <sub>7</sub> : Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.
<b>Conocimientos previos</b>	En este se evalúan los siguientes elementos: Establecer razones entre las medidas de uno de sus lados y uno de sus ángulos. Establecer relaciones de semejanza entre triángulos. Aplicar los criterios de semejanza entre triángulos.
<b>Descripción de la actividad</b>	En esta actividad se buscó identificar si el estudiante comprendía conceptos de semejanza de triángulos, hacia definiciones con una estructura matemática requerida por el nivel, o utilizaba en conjunto las propiedades necesarias y suficientes para relacionarlas entre si o en su defecto realizaba demostraciones de manera informal.
<b>Actividades propuestas</b>	9. Observa los siguientes triángulos semejantes y halla las medidas pedidas. Justifica tu respuesta. 10. De los siguientes triángulos semejantes determina la razón de semejanza y justifica tu respuesta.

	<p>11. De las siguientes parejas de triángulos ¿Cuáles son semejantes entre sí?, selecciona con una x en el recuadro si son semejantes o no son semejantes y explica porque los consideras semejantes o porque no los consideras semejantes.</p> <p>12. De las siguientes parejas de triángulos semejantes. Determina que criterio LLL (lado, lado, lado), AAA (ángulo, ángulo, ángulo) o LAL (lado, ángulo, lado) asegura la semejanza de esos triángulos y escribe en el recuadro el criterio que le corresponde.</p>
<b>Instrucciones de la actividad</b>	Se solicitó previamente traer a la prueba diagnóstica regla, transportador, lápiz, sacapuntas y borrador, se entregó a cada estudiante un “pretest” y se dió la orientación de realizar la actividad propuesta con el fin de identificar que saben del objeto en estudio, además, el estudiante debía escribir en aquellos apartados donde no comprendían el enunciado una nota que indicara el porque no realizaba dicha actividad.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” para análisis y clasificación de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

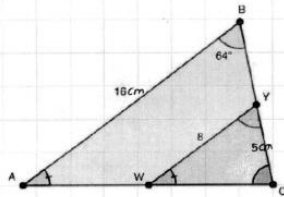
A continuación, tomando en consideración los datos de la tabla 13, se muestra en las tablas 14, 15 y 16 algunos resultados manifiestos por los estudiantes.

**Tabla 14**

*Resultado del “pretest” para clasificar  $E_1$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que el estudiante: Presentó dificultades para encontrar semejanzas en los triángulos dados, lo hizo de manera empírica utilizando la visualización y trató de justificar algunos procedimientos, pero se evidenció que no tiene claro los conceptos.
<b>Resultado <math>E_1</math></b>	<b>Actividad 9:</b>

$\triangle ABC \sim \triangle WYC$



a. Determine la medida del segmento BC: 10 cm

6

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



b. Determine la medida del ángulo WYC: 64°  
(son semejantes los dos triángulos)  
Justificación: los ángulos son iguales para estos dos lo único que cambia es su tamaño

**Actividad 11:**

<p>a.</p>	<p>¿Son semejantes?</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: <u>Ángulos igual, medidas distintas...</u> ?</p>
<p>b.</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: <u>Ángulo igual, medidas disti...</u></p>
<p>c.</p>	<p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: <u>No se</u> ?</p>
<p>d.</p>	<p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: <u>No se</u> ?</p>
<p>e.</p>	<p><input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: <u>No se</u> ?</p>

	En estas actividades $E_1$ a partir de la observación y la manipulación del objeto matemático el estudiante no logró establecer semejanzas que justificaran su respuesta, porque aún no comprende los conceptos de semejanza y no utiliza las propiedades necesarias y suficientes para relacionarlas entre sí y en su defecto aún no realizaba demostraciones.
--	---

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de  $E_1$  para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

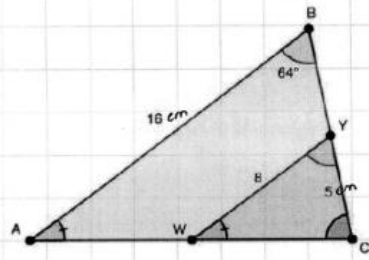
En este nivel se esperaba que  $E_1$  identificara elementos de proporcionalidad y teoremas que lo acercaran a definiciones relacionadas con conceptos de semejanza de triángulos, clasificara los triángulos al deducir sus propiedades y relacionara unas con otras. En concordancia con lo anterior, se buscaba con estos ítems identificar si su razonamiento estaba en un grado de adquisición del Nivel 3. De acuerdo con la observación y los resultados de la prueba, se concluye que  $E_1$  no logra alcanzar este nivel porque aún no se acerca a razonamientos lógicos formales ni siente la necesidad de hacerlos, y para este Nivel 3 de clasificación “El tipo de argumentación es informal (aunque correcta) y, frecuentemente, recurre a argumentos basados en la experiencia” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 47), experiencia que aún no ha adquirido  $E_1$  y se evidencia en las respuestas del “pretest”. Continuando con el análisis de los descriptores del Nivel 3, a continuación, se relacionan en la tabla 15 las evidencias de  $E_2$  en relación con acciones encaminadas a la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos.

**Tabla 15**

*Resultado del “pretest” para clasificar  $E_2$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que el estudiante: No comprende la instrucción de estos ítems y se le dificulta encontrar semejanzas en los triángulos dados, debido a que no tiene claro los conceptos y manifiesta no haber visto este tema durante su proceso académico.
<b>Resultado <math>E_2</math></b>	<b>Actividad 9:</b>

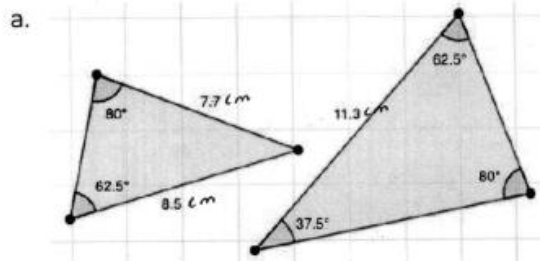
$\triangle ABC \sim \triangle WYC$



- Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_
- Determine la medida del ángulo WYC: \_\_\_\_\_

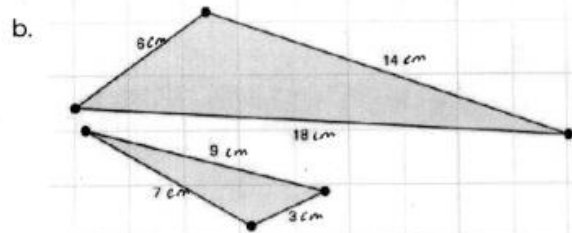
Justificación: *la verdad no he visto esto, no lo estoy comprendiendo*

**Actividad 12:**



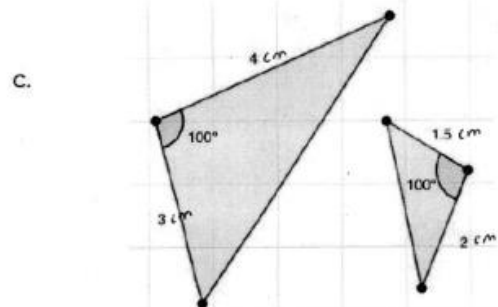
Criterio:

no se



Criterio:

no se



Criterio:

no se



	En estas actividades $E_2$ a partir de la observación y la manipulación del objeto matemático el estudiante no logra establecer semejanzas que justifiquen su respuesta, porque aún no comprende los conceptos de semejanza y no utiliza las propiedades necesarias y suficientes para relacionarlas entre sí y en su defecto aún no realizaba demostraciones.
--	--

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de  $E_2$  para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

Lo anterior arrojó resultados en los que se evidencia que  $E_2$  no mostró acciones encaminadas a cumplir con los descriptores propuestos para este nivel y no proporcionó ninguna justificación, manifiesta en sus respuestas que no comprende ni ha visto este tipo de conceptos, esto demuestra que aún no consigue acercarse a elementos característicos del Nivel 3.

Buscando recolectar y analizar las respuestas del “pretest” de los tres estudiantes que hicieron parte de la investigación, se presentan a continuación, en la tabla 16, las evidencias de la participante  $E_3$ , para verificar si razona en el Nivel 3 del modelo propuesto.

**Tabla 16**

*Resultado del “pretest” para clasificar  $E_3$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que el estudiante: No comprende la instrucción de estos ítems y se le dificulta encontrar semejanzas en los triángulos dados, debido a que no tiene claro los conceptos y manifiesta no haber visto este tema durante su proceso académico.
<b>Resultado <math>E_3</math></b>	<b>Actividad 1:</b>

$\triangle ABC \sim \triangle WYC$

a. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_

6

---

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín según Resolución 011180 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001028573 - NIT: 900932971-0

b. Determine la medida del ángulo WYC: \_\_\_\_\_ *No me acuerdo del tema*

Justificación: \_\_\_\_\_

**Actividad 2:**

$\triangle ABC \sim \triangle OMG$

a. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_

b. Determine la medida del ángulo MOG: \_\_\_\_\_ *No vi ese tema*

Justificación: \_\_\_\_\_

En estas actividades E<sub>3</sub> no logra establecer semejanzas que justifiquen su respuesta, porque aún no comprende los conceptos de semejanza y no utiliza las propiedades necesarias y suficientes para relacionarlas entre sí, y en su defecto no realizaba demostraciones.

*Nota.* Datos tomados del “pretest” de E<sub>3</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

Se concluye con  $E_3$  que la mayor dificultad en el “pretest” fue enfrentarse con actividades correspondientes al Nivel 3 “En este nivel se inician procesos de razonamiento formal, el estudiante comienza a establecer relaciones, ahora las proposiciones no se perciben aisladas, sino que se infieren los vínculos de dependencia entre unos elementos y otros” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 45). Es por ello, que  $E_3$  no cumple con este nivel y se ubica en el Nivel 2 de análisis, dado que su comprensión está en identificar conceptos básicos de los triángulos, además, necesita de la observación y manipulación para reconocer algunas de sus propiedades.

## 5.2 Análisis general del “pretest”

Esta prueba llamada “pretest” sirvió como instrumento para observar y comprobar el nivel con el que los estudiantes resolvían los ejercicios de razonamiento propuestos y el vocabulario empleado al momento de hacer definiciones, establecer características o identificar propiedades. Estas pruebas, según lo que afirman Corberán et al. (1994), al aplicarlas, permite a los docentes obtener información de los conocimientos y nivel de razonamiento de los estudiantes antes de iniciar los procesos de enseñanza del tema experimental. Dichos procesos hacen parte de las características de los experimentos de diseño que permiten acomodar un modelo a la realidad que se observa y al implementar estos diseños experimentales se configura un constructo teórico para darle paso a la interpretación de los datos que se obtengan desde la práctica.

De ahí que las acciones mencionadas se establecieron mediante cuatro descriptores ( $D_1, D_2, D_3, D_4$ ) del Nivel 2 que se relacionan en la tabla 17. En la primera columna se ubican los estudiantes ( $E_1, E_2, E_3$ ), luego el cruce de estas filas y columnas producen unas celdas en las que se sintetizó la acción del estudiante en cuanto a conceptos relacionados con la semejanza de triángulos, el lenguaje matemático utilizado para referirse a sus propiedades y las características o atributos que nombra, estos se agruparon en la tabla 17 que se relaciona a continuación:

**Tabla 17**

*Matriz de resultados y análisis general del pretest para el Nivel 2 del modelo de van Hiele*

Nivel 2	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
	<p><b>Establece características de un triángulo a partir de su clasificación según sus ángulos.</b></p>	<p><b>Establece características y puede describir las partes de un triángulo.</b></p>	<p><b>Establece características de un triángulo a partir de su clasificación según sus lados.</b></p>	<p><b>Selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.</b></p>
<p><b>E<sub>1</sub></b></p>	<p>Identifica correctamente el nombre de cada ángulo de acuerdo con su amplitud y halla la medida de los ángulos internos en un triángulo para denotarlo de acuerdo con la medida de sus ángulos internos.</p>	<p>Describe algunas características de los triángulos de forma muy general y se enfoca en la medida de longitud de sus lados.</p>	<p>Identifica claramente el nombre de los triángulos de acuerdo con las características según la longitud de sus lados.</p>	<p>Relaciona algunas propiedades que caracterizan los triángulos, a partir de la representación gráfica.</p>
<p><b>E<sub>2</sub></b></p>	<p>Identifica algunos ángulos de acuerdo con su amplitud y comprende que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°. Halla la medida del ángulo que falta, pero aún no relaciona las propiedades atendiendo a sus ángulos</p>	<p>Describe algunas características de los triángulos de forma muy general y se enfoca en la medida de longitud de sus lados.</p>	<p>Identifica claramente las características de los triángulos según la longitud de sus lados.</p>	<p>Selecciona algunas propiedades que caracterizan los triángulos, en un conjunto dado.</p>

	(rectángulos, acutángulos, obtusángulos).			
<b>E<sub>3</sub></b>	Identifica el nombre de cada ángulo de acuerdo con su amplitud. Identifica algunas propiedades de los triángulos, como su clasificación según la medida de sus lados y sus ángulos. Halla la medida de los ángulos en un triángulo utilizando instrumentos de medición y logra establecer claramente como se denotan de acuerdo con la medida de sus ángulos internos.	Establece características en los triángulos a partir de la medida de sus lados y menciona características de acuerdo con la amplitud de sus ángulos.	Describe características de los triángulos según la longitud de sus lados.	Identifica algunas propiedades de un triángulo, aún no relaciona varias propiedades entre sí.

*Nota.* Resultados y análisis general del “pretest” de los E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> para el Nivel 2 de análisis. Fuente: elaboración propia.

Como resultado de este primer análisis, los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub>, presentaron un razonamiento acorde con los descriptores correspondientes al Nivel 2, reconocen algunas propiedades de los triángulos y establecen características a partir de su clasificación según sus lados y sus ángulos, por lo tanto, identificaron claramente los elementos que integran la figura y enunciaron algunas propiedades de manera informal, sus respuestas se centraron a partir de la observación y manipulación del objeto en estudio; la forma de responder a los interrogantes, da cuenta de un tipo de razonamiento acorde con dicho nivel ya que este ofrece

“un razonamiento que podemos llamar “matemático”, pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 309). Asimismo, se observó que los estudiantes en su gran mayoría buscaron instrumentos como la regla y el transportador para realizar mediciones y justificar de manera empírica sus respuestas.

Para dar continuidad con al análisis del “pretest” se hace una matriz con las mismas características de la anterior, pero con descriptores del Nivel 3 que hicieron parte de la prueba diagnóstica, estos se agruparon en la tabla 18 que se relaciona a continuación:

**Tabla 18**

*Matriz de resultados y análisis general del pretest para el Nivel 3 del modelo de van Hiele*

Nivel 3	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>7</sub>	D <sub>5</sub>
	<b>Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.</b>	<b>Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</b>	<b>Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.</b>	<b>Comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aún no reconoce la estructura de una demostración.</b>
<b>E<sub>1</sub></b>	Identifica algunas propiedades que caracterizan los triángulos, pero no en conjunto, identifica que un triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°, pero al momento de	Se le dificulta establecer relaciones entre los triángulos de acuerdo con la clasificación de sus lados y sus ángulos.	Hace comparaciones utilizando instrumentos de medición para establecer relaciones e identifica que los ángulos en algunos triángulos tienen igual medida y hace generalizaciones que lo llevan a responder que	Observa que los ángulos en los triángulos dados tienen igual medida, pero continúa limitando su respuesta a comparar el tamaño de ambos, alejado de comprender los

	exponerle problemas que justifiquen la clasificación de los triángulos según las medidas de sus ángulos no logra en conjunto hacer relaciones.		lo único que varía es su tamaño, pero aún no comprende el significado de semejanza, ni establece relaciones de proporcionalidad.	pasos y establecer relaciones al momento de explicar porque son semejantes dos triángulos.
<b>E<sub>2</sub></b>	Identifica en los triángulos algunas características, pero de manera independiente.	Selecciona solo propiedades de los triángulos a partir de la clasificación de triángulos según la medida de sus lados, por lo que limita las respuestas dejando de lado las propiedades según la medida de sus ángulos.	El estudiante manifiesta no haber visto el tema de semejanza y mucho menos comprender el enunciado propuesto para dar respuesta a la actividad de indagación de saberes previos sobre el tema propuesto.	Identifica algunos elementos de forma oral, los enuncia, pero no da respuesta de manera escrita, no logra conectar las ideas de manera lógica y continua en la línea de no comprender lo que se debe hacer dado que no comprende el tema.
<b>E<sub>3</sub></b>	Identifica algunas propiedades que caracterizan los triángulos atendiendo a la medida de sus lados y sus ángulos.	Se le dificulta establecer relaciones entre varias propiedades.	La estudiante manifiesta no recordar el tema de semejanza y que en su trayecto por la institución no lo ha visto, por lo tanto, no comprende el enunciado, ni lo intenta realizar.	La estudiante nombra características y propiedades de forma oral e independientes, pero no comprende que pasos debe seguir para explicar dichas semejanzas establecidas en los triángulos dados.

---

*Nota.* Resultados y análisis general del “pretest” de los E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> para el Nivel 3 de clasificación. Fuente: elaboración propia.

A partir de la revisión que se hizo de las acciones que realizaron los estudiantes del Nivel 3 en la evaluación diagnóstica o “pretest”, se evidencia que los estudiantes no lograron razonamientos de este Nivel, dado que, si un estudiante se ubica en este nivel de clasificación iniciaría procesos de razonamiento formal y las definiciones que este hace evidenciarían un razonamiento que le facilitaría “establecer interrelaciones entre una figura y sus partes, así como también permite hacer clasificaciones según las propiedades analizadas, las relaciones entre los elementos básicos de estudio y el análisis de sus propiedades permiten dar definiciones verbales del concepto tratado”(Zapata y Sucerquia, 2009, p.45). Aunado a lo anterior, los estudiantes manifestaron no saber cómo justificar los ejercicios propuestos y se notó un lenguaje matemático muy limitado.

Asimismo, con los resultados que proporcionó la prueba diagnóstica, se continuó con el experimento de enseñanza en correspondencia con cada una de las fases de aprendizaje del modelo, para direccionar el progreso al siguiente nivel. Para ello, el investigador diseñó unas actividades que buscaron mejorar el razonamiento de los estudiantes para lograr una evolución en los niveles del modelo de van Hiele, asimismo mejorar la comprensión de conceptos sobre semejanza de triángulos; en este punto, según Molina et al., (2011) “Los investigadores se convierten en una parte integral del sistema que están investigando, interaccionando con él, lo que conduce a complejas relaciones que rompen la habitual distinción entre investigadores, docentes y alumnos” (p. 79). A continuación, se presentan los momentos del experimento de enseñanza diseñados a partir de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele:

**Momento 1 (M<sub>1</sub>):** este primer momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 1 (información); este momento se llamó “Recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás”, allí se dio una interacción entre el investigador docente y los estudiantes, para familiarizarlos con el objeto de estudio. Se realizó una introducción sobre el tipo de actividades que se desarrollarían durante el experimento de enseñanza, los materiales que se necesitarían para los encuentros y se indagó



sobre sus conocimientos previos a partir de la guía que se implementó, para observar cómo construían las figuras geométricas propuestas, que preguntas realizaban y como eran sus respuestas; estos aportes sirvieron para identificar el lenguaje matemático que utilizaban los estudiantes, qué sabían del objeto de estudio, y cómo utilizaban herramientas de uso para geometría como lo son el compás, la regla y el transportador.

Para iniciar esta actividad se presentó un video introductorio llamado “Matemática en lo cotidiano: triángulos” (Ciencia Educativa, 2015). Este contenía definiciones, propiedades y conceptos de clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y sus ángulos, y su relación con elementos del entorno. Estos se retomaron con el fin de repasar conceptos y acercarlos a la visualización de representaciones geométricas y sus propiedades para cognitivamente lograr el desarrollo de la fase en cuestión; luego se le entregó a cada estudiante una guía con la actividad; esta última se caracterizó por tener instrucciones paso a paso para la construcción de triángulos con regla y compás, representación gráfica que benefició a los estudiantes para visualizar y comprender cualidades que tenían los triángulos (equilátero, isósceles y escaleno) y observar que cada uno estaba dotado de propiedades.

Por lo anterior, y dada la importancia que tienen las construcciones con regla y compás y su representación visual en la geometría, se exalta lo indicado por Ramírez et al., (2018) en su investigación, donde hacen especial énfasis en que:

Los instrumentos visuales tienen valor para la enseñanza de las matemáticas y como heurísticos para los descubrimientos matemáticos; se reconoce la importancia de la visualización en el quehacer matemático como un componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y las demostraciones. (p. 31)

Asimismo, estas construcciones favorecieron cognitivamente a los estudiantes en su visualización para ampliar las definiciones, reconocer propiedades y descubrir relaciones; en la tabla 19 se relacionan los elementos y algunas actividades que guiaron esta fase.

### **Tabla 19**

*Elementos y actividades del M<sub>1</sub>: “Recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás”. Fase 1: información.*

<b>Descriptor del Nivel 2</b>	D <sub>5</sub> : Identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras. D <sub>6</sub> : Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.
<b>Conocimientos previos</b>	En este primer momento se evalúan los siguientes elementos: Identificar características de los triángulos. Identificar elementos característicos de la razón de semejanza entre triángulos. Reconocer propiedades de los triángulos. Establecer relaciones entre las propiedades de los triángulos.
<b>Descripción de la actividad</b>	La finalidad de esta actividad era acercar al estudiante a la manipulación del objeto de estudio, a partir de videos, construcciones con regla y compás de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno), y preguntas reflexivas, para que comprendieran los conceptos, definiciones y propiedades que caracterizan los triángulos, igualmente, buscaba que realizaran otra construcción con elementos de proporcionalidad para acercarlos al concepto de semejanza y descubrieran elementos nuevos que les permitiera establecer relaciones entre ambas construcciones.
<b>Actividades propuestas</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ver un video de introducción sobre el objeto de estudio. <a href="https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&amp;ab_channel=MINEDEISalvador">https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&amp;ab_channel=MINEDEISalvador</a></li> <li>2. Construcción de triángulos según la medida de sus lados: triángulo equilátero, isósceles y escaleno.</li> <li>3. Hallar las medidas de sus lados y ángulos y ubicarlos en una tabla.</li> <li>4. Realizar comparaciones de acuerdo con la medida de los lados y ángulos.</li> <li>5. Construir un triángulo equilátero que sea la mitad de la longitud de cada uno de los lados del triángulo inicial (equilátero)</li> <li>6. Hallar las medidas de los ángulos de ambos triángulos y responde las siguientes preguntas: <ol style="list-style-type: none"> <li>a. ¿Qué puedes concluir de los dos triángulos de acuerdo con la medida de sus lados?</li> <li>b. ¿Cómo son las medidas de los ángulos de ambos triángulos?</li> </ol> </li> </ol>
<b>Instrucciones de la actividad</b>	Se solicitó previamente traer para la actividad compás, regla, transportador, lápiz, sacapuntas, borrador y una hoja de color iris. Luego se dió un video introductorio sobre la clasificación de triángulos según la medida de sus lados y sus ángulos, y como estos conceptos se relacionaban con la vida diaria o en que elementos

	<p>de la cotidianidad los encontraban, y al finalizar se hizo una socialización sobre los aspectos mas importantes del video y del objeto de estudio.</p> <p>Despues de socializar se entregó a cada estudiante una guía con la orientación de la actividad para realizar, esta tenía unas instrucciones paso a paso para la construcción de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno), y unas preguntas al finalizar la actividad.</p>
--	---

*Nota.* Datos tomados del  $M_1$  que corresponden a los elementos y actividades de la fase 1: información.  
Fuente: elaboración propia.

Las actividades orientadoras propuestas en la fase 1 aportaron significativamente al direccionamiento del experimento. Con la manipulación y la visualización del objeto de estudio se facilitó la interacción entre la investigadora y los estudiantes en aras de reconocer qué saberes previos tienen, afianzar conceptos requeridos para el desarrollo del experimento y poder progresar por las fases adecuadamente. Los resultados de los estudiantes  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , se muestran a continuación, en la tabla 20.

**Tabla 20**

*Resultados de  $E_1$  que corresponden al  $M_1$  de la fase 1: información.*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	<p>Se observó que el estudiante:</p> <p>Comprendió las instrucciones de cada uno de los ítems de la guía, manipuló los instrumentos como regla, compás y transportador correctamente, en los resultados mostró evidencia al hacer mediciones y establecer relaciones, sus saberes previos le posibilitaron alcanzar los logros propuestos para la actividad dando respuesta de manera correcta a cada una de las tablas y estableciendo relaciones al identificar que los lados y ángulos de cada triángulo de acuerdo con su clasificación tenían características en común. Además, identificó propiedades e hizo conjeturas de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos, en su última construcción mostró evidencia de explorar elementos de semejanza y buscar nuevos conceptos.</p>
<b>Resultado</b>	Actividad 2:



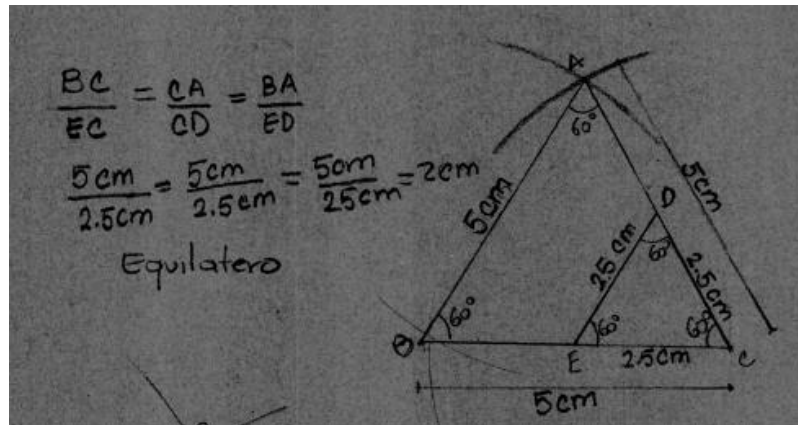
E<sub>1</sub>

Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos		
	AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB
Triángulo Equilátero	5cm	5cm	5cm	60°	60°	60°
Triángulo Isósceles	4cm	6cm	6cm	70°	70°	40°
Triángulo Escaleno	10cm	5cm	8cm	30°	51°	99°

Actividad 3:

Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos	
	Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes
Triángulo Equilátero	3	0	3	0
Triángulo Isósceles	2	1	2	1
Triángulo Escaleno	0	3	0	3

Actividad 1 y 4:



Actividad 5:

Responde:

¿Que puedes concluir de los dos triángulos de acuerdo con la medida de sus lados?

Que son semejantes, con la diferencia de que sus longitudes cambian (mitad de una o doble del otro).

¿Cómo son las medidas de los ángulos de ambos triángulos? todos los ángulos son iguales, por que apesar de su tamaño sus grados no cambian ya que un triángulo equilatero siempre consta de ángulos iguales es decir 60°. Aun- que su lados cambien de longitud siempre del mismo tamaño son los 4s para darse la condición, es decir, que se construya un triángulo equilatero.

	<p>En estas actividades E<sub>1</sub> hizo construcciones con regla y compás relacionando elementos de manera visual, característicos de la semejanza de triángulos. Este argumenta que hay relación de proporcionalidad entre triángulos comparando la longitud de sus lados y estableciendo que uno es la mitad o que el otro es el doble. Además, hace comparaciones entre triángulos de acuerdo con la medida de sus lados y la amplitud en la medida de sus ángulos, para ello hace uso del lenguaje formal al establecer relaciones de semejanza entre triángulos, enlistando algunas propiedades en las respuestas a las preguntas propuestas en la actividad.</p>
--	---


*Nota.* Datos tomados del M<sub>1</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>1</sub> de la fase 1: información. Fuente: elaboración propia.

En esta primera fase “[...] se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes” (Fouz, 2013, p. 72), allí E<sub>1</sub> se acercó a situaciones reales en las que visualmente pudo identificar características, propiedades y elementos de los triángulos, además, estableció un vínculo entre los saberes previos con los comprendidos durante el proceso de construcción y observación; este al acercarse al objeto en estudio y manipularlo le ayudo a describir su proceso apoyado en un lenguaje matemático y simbólico, pues trató de justificar lo que percibió en la construcción realizada.

Del mismo modo, las construcciones fueron un eje principal en esta actividad del experimento de enseñanza puesto que esta metodología se enfocó en la práctica, en analizar cómo comprenden los estudiantes y las estrategias que utilizan para representar y describir el objeto en estudio dentro del experimento de enseñanza. Las actividades seleccionadas en la tabla anterior fueron diseñadas teniendo en cuenta los elementos que caracterizan el modelo de van Hiele, que según Zapata y Sucerquia (2009) “[...] se enfoca a cómo se origina y cómo se modifica el conocimiento. Además, se centra en los procesos que experimenta el sujeto, quien es el encargado de construir su propio conocimiento y no los puede recibir de otro” (p. 29), teoría que caracteriza el modelo y que conlleva a un aprendizaje significativo. De igual forma se pretende hacer revisión de los otros dos estudiantes partícipes de esta primera fase para observar y analizar su paso por esta, para ello en la tabla 21 se muestra la información de E<sub>2</sub> y su proceso de razonamiento.

**Tabla 21**

*Resultados de E<sub>2</sub> que corresponden al M<sub>1</sub> de la fase 1: información.*

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observó que el estudiante:</p> <p>Comprendió las instrucciones de cada uno de los ítems de la guía, pero su dificultad radicó en la incorrecta manipulación del compás como herramienta propuesta para esta actividad. Esto se presentó debido a que el estudiante manifestó que en sus las clases de geometría no habían realizado construcciones con esta herramienta. Para ello, se le propuso realizar varias construcciones de triángulos, estas al inicio distaban de las propuestas, pero con la práctica logró fortalecer este proceso hasta desarrollar los objetivos propuestos en la guía y la correcta utilización de esta herramienta.</p> <p>Al finalizar, realizó la construcción pedida e identificó las características que tenían ambos triángulos de acuerdo con la clasificación, según la medida de sus lados y sus ángulos.</p>																																																										
<p><b>Resultado</b></p>  <p>E<sub>2</sub></p>	<p>Actividad 2:</p> <table border="1" data-bbox="581 1024 1408 1276"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Triángulos</th> <th colspan="3">Medida de los lados</th> <th colspan="3">Medida de los ángulos</th> </tr> <tr> <th>AB</th> <th>BC</th> <th>CA</th> <th>∠BAC</th> <th>∠ABC</th> <th>∠ACB</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Triángulo Equilátero</td> <td>5cm</td> <td>5cm</td> <td>5cm</td> <td>60°</td> <td>60°</td> <td>60°</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Isósceles</td> <td>4cm</td> <td>6cm</td> <td>6cm</td> <td>70°</td> <td>70°</td> <td>40°</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Escaleno</td> <td>10cm</td> <td>6cm</td> <td>8cm</td> <td>30°</td> <td>55°</td> <td>95°</td> </tr> </tbody> </table> <p>Actividad 3:</p> <table border="1" data-bbox="597 1367 1386 1675"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Triángulos</th> <th colspan="2">Cantidad de Lados</th> <th colspan="2">Cantidad de ángulos</th> </tr> <tr> <th>Iguales</th> <th>Diferentes</th> <th>Iguales</th> <th>Diferentes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Triángulo Equilátero</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Isósceles</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Escaleno</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Actividad 1 y 4:</p>	Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos			AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB	Triángulo Equilátero	5cm	5cm	5cm	60°	60°	60°	Triángulo Isósceles	4cm	6cm	6cm	70°	70°	40°	Triángulo Escaleno	10cm	6cm	8cm	30°	55°	95°	Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos		Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes	Triángulo Equilátero	3	0	3	0	Triángulo Isósceles	2	1	2	1	Triángulo Escaleno	0	3	0	3
Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos																																																							
	AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB																																																					
Triángulo Equilátero	5cm	5cm	5cm	60°	60°	60°																																																					
Triángulo Isósceles	4cm	6cm	6cm	70°	70°	40°																																																					
Triángulo Escaleno	10cm	6cm	8cm	30°	55°	95°																																																					
Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos																																																								
	Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes																																																							
Triángulo Equilátero	3	0	3	0																																																							
Triángulo Isósceles	2	1	2	1																																																							
Triángulo Escaleno	0	3	0	3																																																							

**Actividad 5:**

Responde:

¿Que puedes concluir de los dos triángulos de acuerdo con la medida de sus lados?  
los dos triángulos tienen diferentes medidas y se puede decir que sus tamaños uno es más grande y es el doble del otro por lo tanto en la medida de sus lados hay una relación.

¿Cómo son las medidas de los ángulos de ambos triángulos?  
son iguales, se midieron y las medidas dieron lo mismo por lo tanto si sus ángulos son iguales 60° son triángulos equiláteros, por lo que hay semejanza entre los dos.

Las construcciones que realizó E<sub>2</sub> con regla y compás le facilitaron visualmente realizar comparaciones de acuerdo con el tamaño de los triángulos. Ve la necesidad de validar su respuesta buscando medir tanto las longitudes de los lados como medir los ángulos internos, para llegar a una conclusión en cuanto la amplitud de sus ángulos, que ambos triángulos son iguales y sus lados tienen alguna relación, además uno es el doble del otro, elementos característicos de la semejanza de triángulos.


*Nota.* Datos tomados del M<sub>1</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>2</sub> de la fase 1: información. Fuente: elaboración propia.

En esta actividad se dio a conocer el objeto de estudio que se desarrolló durante todo el experimento de enseñanza, sus características y propiedades, a partir de la exploración de E<sub>2</sub> con material concreto y las prácticas, que desarrollaron habilidades para construir figuras geométricas (triángulos) con regla y compás; estas además, facilitaron procesos de visualización y la comprensión de elementos relacionados con la semejanza, al establecer relaciones tomando con precisión las medidas de los lados y los ángulos.

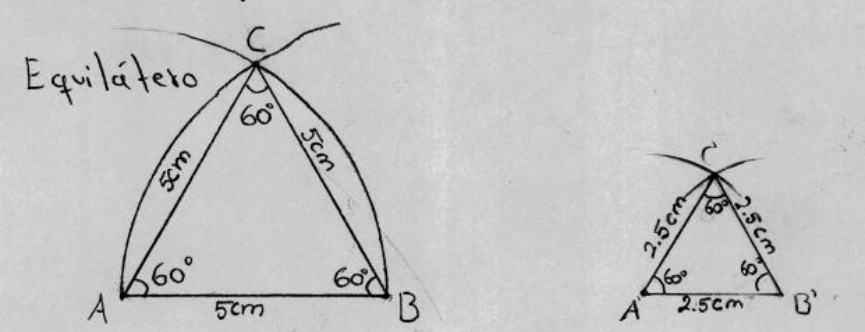
Por lo anterior, esta exploración que realizó el estudiante en esta fase 1 de información, según Jaime y Gutiérrez (1990) sirvió “[...] para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles que sepan qué tipo de trabajo van a hacer, y para que el profesor descubra que nivel de razonamiento tiene sus alumnos en el nuevo tema y que saben del mismo” (p. 333), estos elementos son bases que sirvieron como punto de partida para continuar con desarrollo del experimento de enseñanza. Asimismo, siguiendo la línea hasta ahora expuesta de la fase 1 se hizo el análisis de E<sub>3</sub> en la siguiente tabla 22

**Tabla 22**

*Resultados de E<sub>3</sub> que corresponden al M<sub>1</sub> de la fase 1: información.*

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observó que la estudiante: Comprendió las instrucciones de cada uno de los ítems de la guía, pero al igual que E<sub>2</sub> le dió dificultad la manipulación del compás y sus construcciones quedaban incorrectas, con la práctica logró acercarse a las construcciones propuestas, los demás elementos como la regla y transportador los usaba correctamente. Identificó en sus construcciones que los triángulos estaban dotados de características en función de la medida de sus lados y de sus ángulos.</p>																																																										
<p><b>Resultado</b></p>  <p>E<sub>3</sub></p>	<p>Actividad 2:</p> <table border="1" data-bbox="529 1178 1370 1423"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Triángulos</th> <th colspan="3">Medida de los lados</th> <th colspan="3">Medida de los ángulos</th> </tr> <tr> <th>AB</th> <th>BC</th> <th>CA</th> <th>∠BAC</th> <th>∠ABC</th> <th>∠ACB</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Triángulo Equilátero</td> <td>5cm</td> <td>5cm</td> <td>5cm</td> <td>60</td> <td>60</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Isósceles</td> <td>4cm</td> <td>6cm</td> <td>6cm</td> <td>70</td> <td>70</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Escaleno</td> <td>70cm</td> <td>6cm</td> <td>8cm</td> <td>30</td> <td>55</td> <td>95</td> </tr> </tbody> </table> <p>Actividad 3:</p> <table border="1" data-bbox="524 1507 1365 1829"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Triángulos</th> <th colspan="2">Cantidad de Lados</th> <th colspan="2">Cantidad de ángulos</th> </tr> <tr> <th>Iguales</th> <th>Diferentes</th> <th>Iguales</th> <th>Diferentes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Triángulo Equilátero</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Isósceles</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Triángulo Escaleno</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Actividad 1 y 4:</p>	Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos			AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB	Triángulo Equilátero	5cm	5cm	5cm	60	60	60	Triángulo Isósceles	4cm	6cm	6cm	70	70	40	Triángulo Escaleno	70cm	6cm	8cm	30	55	95	Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos		Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes	Triángulo Equilátero	3	0	3	0	Triángulo Isósceles	2	1	2	1	Triángulo Escaleno	0	3	0	3
Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos																																																							
	AB	BC	CA	∠BAC	∠ABC	∠ACB																																																					
Triángulo Equilátero	5cm	5cm	5cm	60	60	60																																																					
Triángulo Isósceles	4cm	6cm	6cm	70	70	40																																																					
Triángulo Escaleno	70cm	6cm	8cm	30	55	95																																																					
Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos																																																								
	Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes																																																							
Triángulo Equilátero	3	0	3	0																																																							
Triángulo Isósceles	2	1	2	1																																																							
Triángulo Escaleno	0	3	0	3																																																							





Actividad 5:

Responde:

¿Que puedes concluir de los dos triángulos de acuerdo con la medida de sus lados?

Aunque uno de los triángulos tenga una medida diferente en este caso la mitad no deja de ser iguales las proporciones de los lados.

¿Cómo son las medidas de los ángulos de ambos triángulos?

Son iguales ya que su medida no altera el tamaño de los ángulos, conservan los 60° cada ángulo.

En estas actividades E<sub>3</sub> hizo construcciones con regla y compás relacionando elementos de manera visual; en la actividad 4 hizo comparaciones entre ambos triángulos y relacionó la proporción de los lados al identificar que el triángulo construido varía en tamaño y que este era la mitad del triángulo inicial, e identificó una relación entre ambos triángulos, y validó sus resultados justificando que en las medidas de sus ángulos internos se conserva con el mismo valor.

*Nota.* Datos tomados del M<sub>1</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>3</sub> de la fase 1: información. Fuente: elaboración propia.

En la actividad anterior de la fase 1 se evidenció para E<sub>3</sub> un logro significativo al construir las figuras geométricas pedidas y su motivación por realizar todos los ejercicios le permitió continuar y superar los obstáculos que se le pudieron presentar, mencionó algunos elementos de semejanza, pero aún se le dificulta establecer un lenguaje matemático para justificar sus respuestas. Por lo anterior, fue necesario reforzar en esta estudiante el uso activo del lenguaje dado que este “[...] posibilita la transición de la estructura contemplativa a la estructura matemática” (van Hiele, 1957, p.107), además, requiere de un análisis minucioso

en los procesos que realicen los estudiantes para indicar con precisión en cada fase qué falta o qué elementos se deben reforzar para alcanzar un razonamiento acorde al nivel.

Pues bien, después de analizar las acciones que realizó cada estudiante en la fase 1 de información que corresponden al Nivel 2, los ítems de la guía tenían como intención la construcción de triángulos para repasar conceptos de geometría, analizar las características y propiedades de cada uno de los triángulos y así encontrar la relación entre la medida de sus lados y la medida de sus ángulos. Además, en el diseño de estas actividades, según Zapata y Sucerquia (2009) “es fundamental el papel de la instrucción y es labor del docente diseñar experiencias de aprendizaje que propugnen por el perfeccionamiento en los niveles de pensamiento” (p. 70), un direccionamiento adecuado por cada fase podría garantizar la adquisición de los razonamientos necesarios para pasar al siguiente nivel; por último se hizo una introducción a ejercicios de proporcionalidad, estos sirvieron para hacer una introducción a elementos sobre la razón de semejanza, esto con el fin de retomar las conclusiones y analizar el razonamiento de los estudiantes.

De acuerdo con lo mencionado hasta este punto, se retomaron las conclusiones para representarlas en la siguiente matriz y hacer un análisis de los resultados de los tres participantes, como se muestra en la tabla 23, en la cual se relacionan los descriptores utilizados en la primera fase correspondiente a las categorías, y la síntesis de las acciones más significativas de cada estudiante. Además, se sombrearon las casillas con cuatro colores, esto con el fin de identificar subcategorías que den cuenta de las evidencias más representativas de cada estudiante.

Se les asignó un color a las subcategorías mencionadas, para mostrar los resultados de cada estudiante en cuanto a la visualización que integra la imagen con los conceptos y sus definiciones (se representó de color azul); el fortalecimiento de relaciones al asociar conceptos previos con los nuevos (se representó de color rosa); el lenguaje matemático, que es un aspecto relevante del modelo de van Hiele pues construye, se refina y consolida con su uso adecuado (se representa de color gris) y la argumentación que representa la evolución de como explican y comprenden el objeto de estudio (se representa de color verde).

**Tabla 23**

Matriz de la fase 1: Información.

FASE 1: Información.			
Actividad de instrucción: construcciones con regla y compás			
Descriptor del Nivel 2	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
	Descriptores de fases		
<p><b>D<sub>5</sub>:</b> Identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras.</p>	<p>Al tomar las medidas establece <b>relaciones</b> identificando que los lados y ángulos de cada triángulo tienen características en común, de acuerdo con su clasificación</p> <p>Identifica propiedades y hace conjeturas de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos.</p>	<p>Identifica que existen tres clases de triángulos por sus características de acuerdo con la medida de sus lados y en función de sus ángulos.</p> <p>Hace conclusiones sobre semejanza entre triángulos haciendo <b>uso del lenguaje matemático</b>, de acuerdo con las propiedades que caracterizan los triángulos.</p>	<p>Hace mediciones y compara los lados con sus ángulos, tratando de <b>establecer relaciones</b> entre lados y ángulos.</p>
<p><b>D<sub>6</sub>:</b> Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.</p>	<p>Argumenta que hay relación de proporcionalidad entre triángulos comparando la longitud de sus lados y estableciendo que uno es la mitad o que el otro es el doble.</p> <p>Hace comparaciones entre triángulos de acuerdo con la medida de sus lados y la amplitud en la medida de sus ángulos, para ello hace</p>	<p>Hace comparaciones entre triángulos y <b>ve la necesidad de validar resultados</b>, menciona que son iguales ambos triángulos y en la construcción con regla y compás trata de justificar que sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales al establecer una relación.</p>	<p>Logra establecer que la medida de los dos triángulos varía en tamaño, su <b>visualización</b> hace parte fundamental de sus procesos, aún está inmersa en la comprensión de los conceptos, pero la medida de sus ángulos en ambos triángulos no se altera, por lo que sustenta que ambos triángulos son iguales, aún no reconoce el término de semejanza</p>

	<p><b>uso del lenguaje formal</b> al establecer relaciones de semejanza entre triángulos enlistando algunas de propiedades.</p> <p>Hace construcciones con regla y compás relacionando elementos de manera empírica y <b>visual</b>, característicos de la semejanza de triángulos.</p>		<p>Establece que las medidas son diferentes en ambos triángulos, e identifica que un triángulo es la mitad del otro.</p>
--	---	--	--

*Nota.* Datos tomados del M<sub>1</sub> para análisis de los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 1: información.  
Fuente: elaboración propia.

Este primer momento sirvió de orientación para posicionar al estudiante participante de la investigación frente al objeto de estudio, recordar las características y propiedades y repasar conceptos de clasificación de triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. La intención de este momento se centró en afianzar dichos conceptos a partir de la visualización y manipulación del objeto en estudio (triángulos), elemento clave para el aprendizaje en esta fase, que según Jaime y Gutiérrez (1990):

Se trata de una fase de toma de contacto: El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a planear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho. (p. 333)

Al terminar las actividades en esta primera fase se hizo revisión de las construcciones realizadas y las respuestas de los estudiantes, como también de notas tomadas, para determinar si las acciones que realizaron los estudiantes estuvieron en concordancia con los descriptores y así adecuarlos o mejorarlos si se requería.

**Momento 2 (M<sub>2</sub>):** este segundo momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 2 (orientación dirigida); este momento fue llamado “Implementación de las TICS con GeoGebra”, para iniciar, se hace una inducción y ejercicios de aplicación para conocer los elementos básicos del programa en la web de GeoGebra [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) este es un software libre dado que se encuentra en la internet de manera online, es de fácil acceso y es totalmente gratuito. El utilizar este software, favoreció en los estudiantes el aprendizaje de la geometría, pues su diseño posibilita realizar construcciones con regla y compás, ayuda en el proceso de visualización del objeto matemático, el MEN (1999) afirma que “Las formas de representación de un objeto matemático son inagotables y que entre más sistemas de representación se trabajen se comprenderá mejor un concepto matemático en toda su dimensión” (p. 22), aunado a lo anterior este permite manipular las figuras geométricas, arrastrar los objetos y elementos básicos de una construcción mientras se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes, además, permite observar las propiedades y hacer relaciones geométricas.

Continuando con el desarrollo de esta fase se implementaron una secuencia de actividades paso a paso guiadas en primera instancia por la docente para explicar el funcionamiento del programa y sus herramientas básicas (mueve, punto, segmento, recta, polígono, circunferencia, etc.), del mismo modo Corberán et al. (1994) afirman que en esta fase “[...] una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas” (p. 36), actitud necesaria para continuar con el desarrollo de construcciones de figuras geométricas (triángulos), con el propósito de explorar conceptos y propiedades que hacen parte de estos; comprender las definiciones que enmarcan el concepto de semejanza, y por último construir justificaciones a partir de la visualización, manipulación y análisis de las construcciones realizadas.

A continuación, se describen, en la tabla 24, algunas de las actividades que realizaron los estudiantes y se relacionan una serie de imágenes de las construcciones elaboradas por los estudiantes de acuerdo con los descriptores propuestos en esta fase y su respectivo análisis.

**Tabla 24**

*Elementos y actividades del M<sub>2</sub>: “Implementación de las TICS con GeoGebra”. Fase 2: orientación dirigida.*

<b>Descriptores del Nivel 3</b>	D <sub>1</sub> : Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos. D <sub>6</sub> : Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura
<b>Conocimientos previos</b>	En este segundo momento se evaluaron los siguientes elementos: Identificar características de los triángulos. Reconocer propiedades de los triángulos. Establecer relaciones entre las propiedades de los triángulos. Identificar elementos característicos de la razón de semejanza entre triángulos. Identificar elementos necesarios para realizar una justificación.
<b>Descripción de la actividad</b>	Para realizar esta actividad se necesitó una sala de informática, un computador por cada estudiante, hoja de actividades con instrucciones dadas y televisor para proyectar el software. Todos estos elementos los facilitó la biblioteca pública Lusitania que está ubicada cerca al colegio y con una reserva previa se separó los espacios para desarrollar esta parte del experimento.  Luego se hizo una inducción y ejercicios de aplicación para conocer la herramienta GeoGebra. Se continuó con la construcción de polígonos regulares (triángulos) utilizando el software libre online de GeoGebra, con el fin de acercar al estudiante a manipular el objeto de estudio, para arrastrar los objetos, cambiar su tamaño y verificar medidas, para observar si se modificaban o no las propiedades, se hicieron relaciones geométricas y se justificaron las semejanzas encontradas entre los triángulos construidos. Por lo anterior, se propusieron 5 actividades, la primera de inducción, la segunda de exploración, la tercera de construcción de triángulos, con esto último se le entregó a cada estudiante una guía con la orientación de la actividad para realizar, esta tenía unas instrucciones paso a paso para la construcción de triángulos (equiláteros, isósceles y escalenos), y una actividad final que recogen las actividades anteriores.
<b>Actividades propuestas</b>	Actividad 3: Con la herramienta GeoGebra construye cuatro triángulos siguiendo las instrucciones paso a paso de la guía.  Actividad 4: Completa el cuadro con la información de los triángulos construidos, observa e identifica cuales son semejantes y escribe por qué son semejantes en la justificación.

*Nota.* Datos tomados del  $M_2$  que corresponden a los elementos y actividades de la fase 2: orientación dirigida. Fuente: elaboración propia.

Las estrategias y actividades utilizadas en esta fase 2, se diseñaron con base en aportes de autores como Zapata y Sucerquia (2009) quienes afirman que:

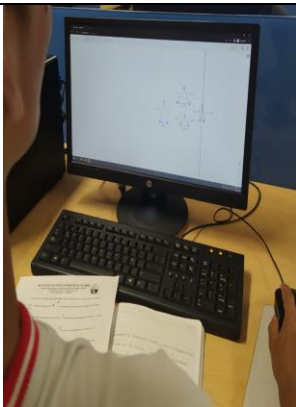
El profesor diseña cuidadosamente una secuencia de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio y como llegan a familiarizarse con las características de las estructuras. (p. 50)

Su enfoque fue a través de una secuencia de pasos con el programa GeoGebra, la guía sirvió para orientar a los estudiantes y motivarlos a establecer semejanza entre los triángulos como se muestra en los siguientes resultados (tabla 25), pues a partir de la observación y manipulación del objeto de estudio les sirvió de experiencia para comprender los conceptos y descubrir propiedades.

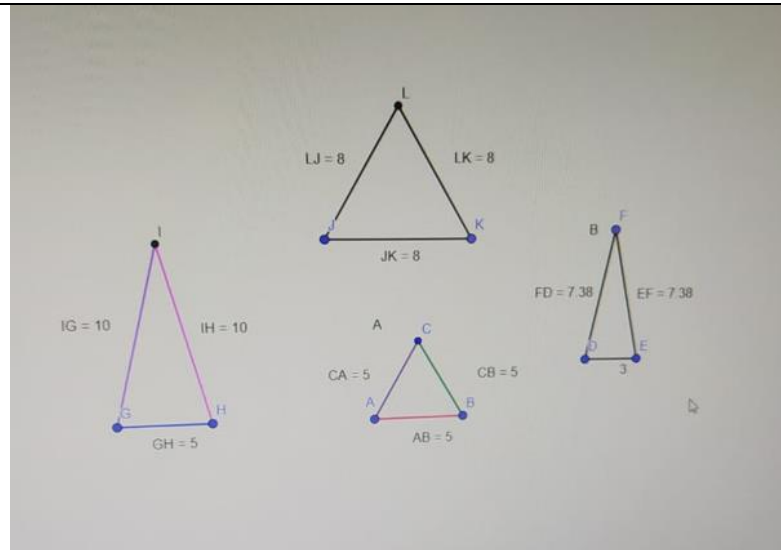
**Tabla 25**

*Resultados de  $E_1$  que corresponden al  $M_2$  de la fase 2: orientación dirigida.*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que el estudiante: comprendió las instrucciones de cada uno de los ítems de la guía, realizó las construcciones propuestas siguiendo las instrucciones paso a paso, esta herramienta le facilitó acercarse por medio de la visualización a las construcciones propuestas, e identificó en sus construcciones que los triángulos estaban dotados de propiedades, para justificar realizó una lista de propiedades, utilizó símbolos de geometría y estableció relaciones de proporcionalidad, clasificando los triángulos según la medida de sus lados y ángulos.
<b>Resultado</b>	Actividad 3:



E<sub>1</sub>



Actividad 4: de los triángulos construidos selecciona los semejantes y escribe en la justificación los argumentos del porque son semejantes.

Triángulos Semejantes	Justificación
$\Delta ABC \sim \Delta JKL$ $\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CA}{LJ}$ $\angle A = \angle J$ $\angle B = \angle K$ $\angle C = \angle L$ Triángulo equilátero	Su semejanza está en el criterio LLL por que sus lados son proporcionales entre sí y también el criterio AAA por que al ser equilátero sus ángulos son iguales de 60°.
$\Delta DEF \sim \Delta GHI$ $\frac{EF}{GH} = \frac{FD}{HI} \neq \frac{DE}{GI}$ $\frac{IH}{GI} = \frac{IG}{GI} = 1$ Triángulo isocéles	Son semejantes por que ambos tienen dos ángulos congruentes $\angle DFE \cong \angle GHI$ entre $\frac{DE}{GH} = \frac{EF}{HI}$ por que también sus lados son proporcionales, por tener estas semejanzas su criterio es LAL. También sus lados iguales y uno del lado diferente es isocéles.

Actividad 2:

¿Consideras que el uso de las TIC (ejercicios con Geogebra) mejoran la comprensión que tienes sobre la semejanza de triángulos?

Si porque me puede mostrar medidas que en trabajos físicos se omiten, al ver las propiedades que no cambian así se arrastren los objetos, poder manipular los elementos e interactuar con ellos puedo comprender mejor.

En estas actividades E<sub>1</sub> manifestó que se sentía motivado realizando construcciones con GeoGebra, dado que este programa le permitió de manera visual, hacer comparaciones entre ambos triángulos, modificar los tamaños de las construcciones, cambiar de posición las figuras geométricas e identificó que algunas propiedades no varían, por último hizo relaciones y justificó de manera fluida sus resultados.



*Nota.* Datos tomados del  $M_2$  que corresponde a los resultados de  $E_1$  de la fase 2: orientación dirigida.  
Fuente: elaboración propia.

Lo anterior mostró lo importante de la utilización de medios como GeoGebra, pues facilitaron en  $E_1$  la construcción de figuras geométricas, toda vez que este realizó descripciones, comprendió que las definiciones, características y propiedades se utilizan para justificar un proceso; adicionalmente, su razonamiento le permitió asociar las figuras geométricas con sus propiedades y su demostración empírica o informal le garantizó acercarse a un Nivel 3 puesto que según Jaime y Gutiérrez (1990) un estudiante “puede clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación” (p. 309), esto se ve de manifiesto en sus construcciones como se observa en la actividad 4 (tabla 25), pues su respuesta está en un nivel de análisis puesto que posee capacidad para argumentar y establecer conjeturas.

Asimismo, las actividades seleccionadas con el software se diseñaron “[...] de modo que constituyan una serie de experiencias significativas para lograr procesos de razonamiento avanzado, el cual nuevamente, será mediado y evidenciado por el lenguaje” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 50), para fortalecer procesos de visualización en los estudiantes, mientras que la construcción de figuras geométricas desarrollan habilidades para comprender propiedades y establecer relaciones entre los elementos característicos que compone el objeto de estudio. Estas construcciones fueron un eje principal en esta fase 2 del experimento de enseñanza puesto que con la práctica se acerca cada vez más a procesos de formalización. De igual forma se pretende hacer revisión de los otros dos estudiantes de esta primera fase para observar y analizar su paso por esta, para ello, en la tabla 26 se muestra la información de  $E_2$  y su proceso de razonamiento.

### **Tabla 26**

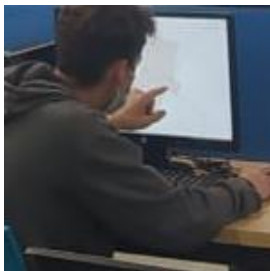
*Resultados de  $E_2$  que corresponden al  $M_2$  de la fase 2: orientación dirigida.*

**Monitoreo de la actividad**

Se observó que el estudiante:

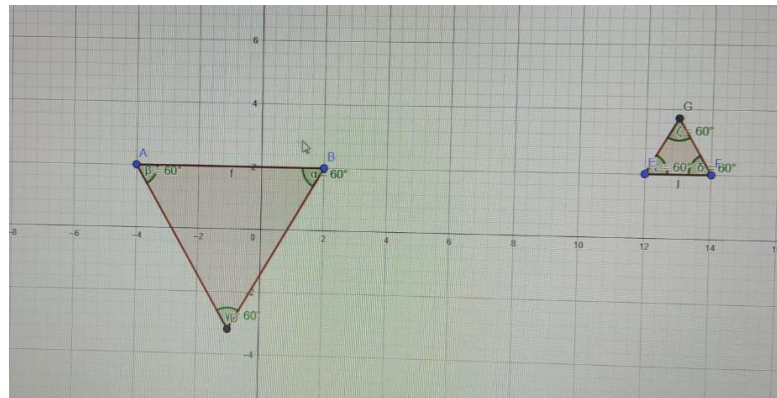
El estudiante comprendió las instrucciones de cada uno de los ítems de la guía, realizó las construcciones propuestas siguiendo las instrucciones paso a paso, con esta herramienta identificó características en sus construcciones, hizo comparaciones con las medidas de sus ángulos y estableció relaciones de proporcionalidad entre triángulos, para justificar se enfocó en las medidas tanto de los ángulos como de los lados, utilizó símbolos de geometría y estableció relaciones de igualdad y proporcionalidad, clasificando los triángulos según la medida de sus lados y ángulos.

**Resultado**



E2

**Actividad 3:**



**Actividad 4:** de los triángulos construidos selecciona los semejantes y escribe en la justificación los argumentos del porque son semejantes.

Triángulos Semejantes	Justificación
$\Delta ABC \sim \Delta JKL$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ $\overline{JK} = \overline{KL} = \overline{LJ}$ criterio $\Delta ABC \sim \Delta JKL = AAA$ y $LLL$	Angulos son iguales $\Rightarrow AAA$ $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ$ $\angle JKL = \angle KLS = \angle LJK = 60^\circ$ son triángulos equiláteros $\Rightarrow LLL$
$\Delta GHI \sim \Delta DEF$ $\overline{GI} = \overline{IH} = 10\text{cm}$ Es proporcional a con el lado $\overline{DF} = \overline{FE} = 6\text{cm}$ proporcional criterio $\Delta GHI \sim \Delta DEF = ALA$ y $AAA$	tienen 2 lados iguales y proporcionales con un angulo $\angle IGH = \angle IHG = 75.52^\circ$ Igual entre ellos $\angle FDE = \angle FED = 75.52^\circ$ son triángulos isósceles

**Actividad 2:**

¿Consideras que el uso de las TIC (ejercicios con Geogebra) mejoran la comprensión que tienes sobre la semejanza de triángulos?

Si las actividades si me facilitaban la comprensión en la semejanza de triángulos porque pude interactuar con la herramienta me permite construir y verificar que este bien hecha la construcción con la función de medir ángulos y lados.

	En las actividades E <sub>2</sub> realizó construcciones con Geogebra, dado que este software le proporcionó como herramienta hacer comparaciones, tomó medidas, identificó elementos de los triángulos y clasificó según las medidas de sus lados y sus ángulos, además, buscó la manera de justificar el por qué de un resultado y dar validez a sus respuestas con las medidas encontradas.
--	--

*Nota.* Datos tomados del M<sub>2</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>2</sub> de la fase 2: orientación dirigida.  
Fuente: elaboración propia.

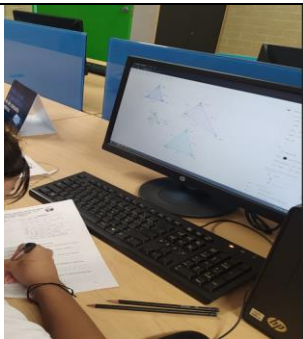
Los resultados que se obtuvieron de E<sub>2</sub> mostraron avances en sus procesos de razonamiento, ha progresado en el lenguaje y las estructuras que justifican sus respuestas están dadas por relaciones entre definiciones, conceptos y propiedades de la construcción que realizó, procesos de razonamiento que se van consolidando con las actividades propuestas dentro del experimento de enseñanza, es por ello que “concretamente, en esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 50).

Continuando con el análisis de la fase 2, en la tabla 27 se relacionan las evidencias de E<sub>3</sub> y el progreso en su razonamiento, acompañada por elementos que la motivaron a desarrollar las actividades propuestas en las fases y continuar recibiendo las orientaciones que le posibiliten comprender conceptos para alcanzar el siguiente nivel.

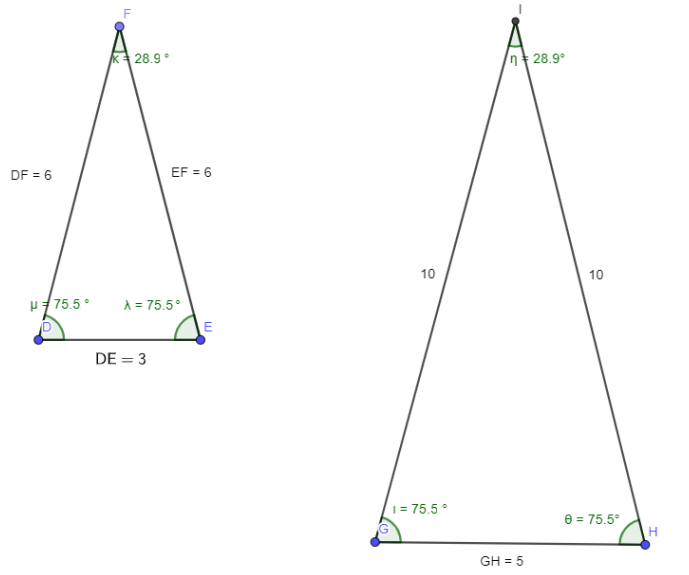
**Tabla 27**

*Resultados de E<sub>3</sub> que corresponden al M<sub>2</sub> de la fase 2: orientación dirigida.*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	Se observó que la estudiante:  Al iniciar se le dificultó a la estudiante seguir instrucciones, se le dieron recomendaciones para el manejo del software GeoGebra, realizó las construcciones propuestas con esta herramienta y por medio de la visualización comprendió la relación que tenían los triángulos de acuerdo con la clasificación de los triángulos según las medidas de sus lados, asimismo, buscó semejanzas entre ellos y las relaciones comenzaron a cobrar sentido, pero aún la visualización es fundamental en su proceso de razonamiento.
<b>Resultado</b>	Actividad 3:



E<sub>3</sub>



Actividad 4: de los triángulos construidos selecciona los semejantes y escribe en la justificación los argumentos del porque son semejantes.

Triángulos Semejantes	Justificación
$\triangle ABC \sim \triangle JKL$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} \sim \overline{JK} = \overline{KL} = \overline{LJ}$	Son semejantes ya que ambos triángulos tienen sus tres lados con una misma medida así como su nombre lo dice $\triangle$ equilateral. Criterio LLL
$\triangle DEF \sim \triangle GHI$ $\frac{\overline{HI}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{FD}}$ $\angle F = \angle I$ $\angle D = \angle G$ $\angle E = \angle H$	Son semejantes ya que ambos triángulos tienen dos de sus lados iguales y uno diferente así como su nombre lo dice $\triangle$ isósceles, también un ángulo congruente entre los lados correspondientes. Criterio LAL, LLL sus ángulos son iguales.

Actividad 2:

¿Qué tan motivado me siento al encontrar una herramienta como las TIC que me permita poner en práctica mis saberes previos sobre semejanza?

Super motivada ya que es una manera más práctica de realizar este tipo de ejercicios y poner a prueba mis saberes, también puedo jugar con las figuras mientras aprendo.

En estas actividades E<sub>3</sub> manifiesto que se sentía muy motivada porque mientras realizaba las construcciones, no lo sintió como una tarea sino como un juego y se divertía mientras aprendía, las construcciones con Geogebra le ayudaron a realizar justificaciones con algunos elementos necesarios característicos de las

	demostraciones, pues trata de hacer relaciones entre los triángulos e identifica que hay propiedades invariantes cuando arrastra los objetos, la visualización y manipulación del objeto en estudio ha sido esencial en los procesos de justificación que realiza, pues es una constante su visualización en los procesos de comprensión que desarrolla y para justificar lo hace de forma descriptiva.
--	---

*Nota.* Datos tomados del M<sub>2</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>3</sub> de la fase 2: orientación dirigida.  
Fuente: elaboración propia.

En esta fase la docente orientó el proceso de E<sub>3</sub>, ya que no comprendía al inicio las instrucciones dadas y se le dificultó seguir los pasos recomendados, durante el desarrollo de la actividad logró establecer algunas relaciones entre las construcciones realizadas de acuerdo con la clasificación según la medida de los lados, su proceso aún es descriptivo y acorde con los elementos de visualización que la caracterizan. Con las ideas hasta ahora expuestas de la fase 2, los estudiantes resuelven las actividades que se les brindan con la posibilidad de acercarse a razonamientos que le permitan acceder a un nivel superior del modelo de van Hiele, es por ello que Corberán et al. (1994) propone que las actividades “[...] estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar: No se trata de actividades o problemas abiertos o complejos, sino de unos claramente dirigidos al descubrimiento y demostración” (p. 26).

Para darle continuidad al análisis de esta segunda fase se construyó la matriz de la fase 2: orientación dirigida que incluye dos descriptores (D<sub>1</sub> y D<sub>6</sub>) que corresponden al Nivel 3 del modelo, estos permitieron al estudiante identificar propiedades características de los triángulos, hacer relaciones y justificar (comprender aún la estructura de una demostración). El resultado del análisis de las tablas anteriores se sintetiza en la siguiente matriz con los hallazgos encontrados.

**Tabla 28**

*Matriz de la fase 2: Orientación dirigida*

<p><b>FASE 2: Orientación dirigida.</b> <b>Implementación de las TICS con GeoGebra</b></p>
--

Descriptores del Nivel 3	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
	Descriptores de fases		
<p><b>D<sub>1</sub>:</b> Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.</p>	<p>Sigue instrucciones paso a paso y construye triángulos con la aplicación del software, la <b>visualización</b> fue un elemento importante en esta actividad porque le ayudó a identificar las propiedades que caracterizan el objeto de estudio.</p>	<p>Identifica características de los triángulos, hace comparaciones de las medidas de ángulos y <b>establece relaciones</b> de proporcionalidad entre triángulos.</p>	<p>Al iniciar se le dificulta seguir instrucciones, se le deben hacer recomendaciones para el manejo del software, comprende la clasificación de los triángulos según las medidas de sus lados y trata de buscar semejanzas entre ellos, las relaciones entre los triángulos comienzan a cobrar sentido, pero aún la <b>visualización</b> es fundamental en su proceso de razonamiento.</p>
<p><b>D<sub>6</sub>:</b> Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura</p>	<p>Utiliza símbolos de geometría para hacer una lista de propiedades y características de los triángulos y para justificar <b>establece relaciones</b> de proporcionalidad y clasificación según los lados y ángulos.</p>	<p>Con las herramientas que proporciona el software <b>busca justificar</b> el porqué de un resultado, identifica elementos de los triángulos tomando medidas de los lados y de los ángulos para poder clasificar los triángulos y <b>dar validez</b> a sus respuestas.</p>	<p>Utiliza en sus justificaciones algunos elementos necesarios característicos de las demostraciones, trata de hacer relaciones entre los triángulos y cuando arrastra los objetos identifica que hay propiedades invariantes, la <b>visualización</b> es una constante en los procesos de <b>comprensión</b> que desarrolla. Hace sus procesos para justificar de forma descriptiva.</p>

---

*Nota.* Datos tomados del  $M_2$  para análisis de los resultados de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  de la fase 2: orientación dirigida. Fuente: elaboración propia.

En esta fase los estudiantes exploraron el objeto de estudio con el software GeoGebra, este les brindó herramientas para familiarizarse con los conceptos objeto de estudio, visualizaron sus propiedades y descubrieron otras, comprendieron conceptos y relaciones que comenzaron a tener sentido, esto se evidenció en sus justificaciones, dado que el lenguaje se notó fluido y se vio el avance de la fase 1 a la fase 2 al resolver las actividades propuestas, es por ello por lo que Corberán et al. (1994) afirman que

Los objetivos principales de esta fase son conseguir que los estudiantes tomen contacto con los métodos de razonamiento del nivel superior de Van Hiele al que se espera que accedan y que descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, etc. del área de la Geometría que están estudiando. (p. 26)

Asimismo, es importante aclarar que en esta fase aún el acompañamiento del docente es fundamental y continuar con el direccionamiento cuando estos lo requieran para superar obstáculos que se puedan presentar.

**Momento 3 ( $M_3$ ):** este tercer momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 3 (explicitación), este momento fue llamado “Experimentemos con el teorema de Tales”; al iniciar este momento se hizo una introducción del tema por parte de la docente, se presentó un video con la historia del teorema para observar como el método utilizado por Tales de Mileto fue de gran utilidad para medir distancias y longitudes que eran inaccesibles al ser humano, un método antiguo utilizado para estimar alturas que para este caso se implementó en la actividad propuesta para calcular la altura de una pirámide construida por los estudiantes y con la proyección de su sombra y la un palillo encontraron la relación que tenían los triángulos semejantes que se formaron. Luego se hizo especial énfasis sobre el trabajo en equipo, dado que su desarrollo requirió de la ayuda entre pares, en esta fase “Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna del objeto de estudio” (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 50).

A continuación, se describen las actividades que hicieron parte de esta fase y se relacionan una serie de registros fotográficos que muestran cómo los estudiantes se interesaron por aprender a partir de la experimentación acercándolos cada vez más al objeto en estudio, así pues, van Hiele (1957) afirma que un factor que “[...] favorece la creación de la comprensión es el interés por un determinado tema. Es verdad que quizá no sea del todo necesario. Sin embargo, la falta de interés supone un serio obstáculo para alcanzar comprensión” (p. 30); es por ello que las actividades que se diseñaron para cada una de las fases del experimento de enseñanza despertaron el interés en los estudiantes por comprender los conceptos, pero en especial progresar en sus razonamientos, así lo manifestaron los estudiantes partícipes en cada uno de los encuentros que se hicieron.

Los elementos hasta ahora expuestos, favorecieron las acciones que los estudiantes realizaron para la fase 3, pues estaban relacionadas con las anteriores fases y ayudaron a explicitar el concepto de semejanza de triángulos; asimismo, las construcciones de poliedros (pirámide cuadrangular) posibilitaron simular la experiencia del teorema de Tales, lo que ayudó en el proceso de visualización del concepto de semejanza de triángulos, a continuación se seleccionaron algunas actividades del experimento que se relacionan en la tabla 29.

**Tabla 29**

*Elementos y actividades del M<sub>3</sub>: “Experimentemos con el teorema de Tales”. Fase 3: explicitación.*

<b>Descriptores del Nivel 3</b>	D <sub>4</sub> : Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar. D <sub>7</sub> : Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.
<b>Conocimientos previos</b>	En este tercer momento se evaluaron los siguientes elementos: Identificar proporciones de los segmentos. Identificar elementos característicos de la razón de semejanza entre los triángulos. Establecer relaciones entre conceptos, teoremas y procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos a partir de la enseñanza, exploración y experimentación con el teorema de Tales.
<b>Descripción de la actividad</b>	Se propusieron actividades de inducción, construcción, exploración, y por último de experimentación en relación con las fases 1 y 2. Para el desarrollo de esta actividad se



	<p>necesitaron los siguientes materiales: lápiz, borrador, regla, compás, cartulina plana, colbón, tijeras, palillos y linterna.</p> <p>Durante la primera parte de la actividad se realizó una introducción al tema del teorema de Tales por parte de la docente con un video corto de la historia del teorema; luego se da una serie de instrucciones a partir de un video paso a paso, para que los estudiantes construyeran una pirámide de base cuadrada siguiendo las instrucciones dadas, con esta construcción se les pidió encontrar la altura de esta pirámide, con los materiales propuestos, la linterna, la regla y el palillo. Se pidió también tratar de simular mediante este material concreto el teorema de Tales para hallar la altura de la pirámide construida; por último, se hizo especial énfasis en el trabajo en equipo y la importancia de la observación durante el desarrollo de esta fase.</p>
<p><b>Actividades propuestas</b></p>	<p>Actividad 4: Utilizando lápiz, cartulina plana, regla y compás y colbón, construye una pirámide cuadrangular.</p> <p>Actividad 5: Con las actividades previas realiza el siguiente experimento en equipo para hallar la altura de la pirámide que construiste.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a. Ubica una regla en la parte superior de una mesa, encima de ella ubica la pirámide de tal forma que el extremo de la regla quede debajo del centro de la pirámide y en frente de la pirámide el palillo entregado por la docente tal y como se ve en la imagen.</li>   <li>b. Con la ayuda de una linterna ubica la luz sobre la pirámide tratando de simular la luz del sol como en la imagen anterior trata de que la luz pase por la punta de la pirámide y la punta del palillo para que estos proyecten la sombra deseada.</li>   <li>c. Luego halla las siguientes medidas:             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Longitud de la sombra de la pirámide: _____</li> <li>• Longitud de la sombra del palillo: _____</li> <li>• Altura del palillo: _____</li> </ul> </li> </ol> <p>Actividad 7: con los videos observados, la explicación de la docente sobre razones y proporciones y la actividad realizada con los datos obtenidos del experimento. Responde la siguiente pregunta:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a. ¿Cuál es la altura promedio de la pirámide que construiste?</li> <li>b. ¿Crees que tiene alguna utilidad en la vida diaria este experimento?</li> </ol>

	c. ¿Qué relación de semejanza encuentras entre las medidas que hallaste con los elementos que experimentaste?
--	---

*Nota.* Datos tomados del  $M_3$  que corresponden a los elementos y actividades de la fase 3: explicitación. Fuente: elaboración propia.


La tabla anterior resume algunas de las actividades realizadas de la fase 3, pues esta fue una de las que más requirió de tiempo para que los estudiantes expresaran y ordenaran con claridad sus ideas a partir de la experimentación, observación y análisis del objeto en estudio, facilitando la comprensión, como lo mencionan Zapata y Sucerquia (2009) es allí donde “Los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna del objeto de estudio”(p. 50), de igual forma se buscó que el trabajo en equipo, el diálogo y la puesta en común de los puntos de vista que tenían los estudiantes con lo aprendido en las anteriores fases consolidaran y fortalecieran el vocabulario del nivel.

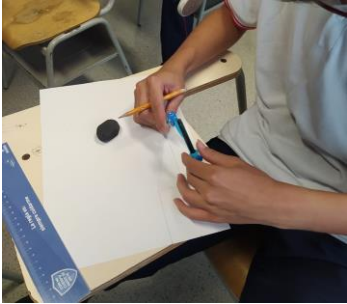

A continuación, se presentan, en la tabla 30 los resultados de la fase 3 de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  experiencia que fue producto de un trabajo en equipo, es por ello, por lo que las observaciones que se realizaron del monitoreo fueron generales para los tres participantes que experimentaron con el teorema en cuestión y que evidencian lo expuesto anteriormente, pero sus resultados se analizaron de manera independiente dado que cada uno realizó la actividad propuesta motivados por encontrar la aproximación más cercana a la altura pedida y con su propio material.

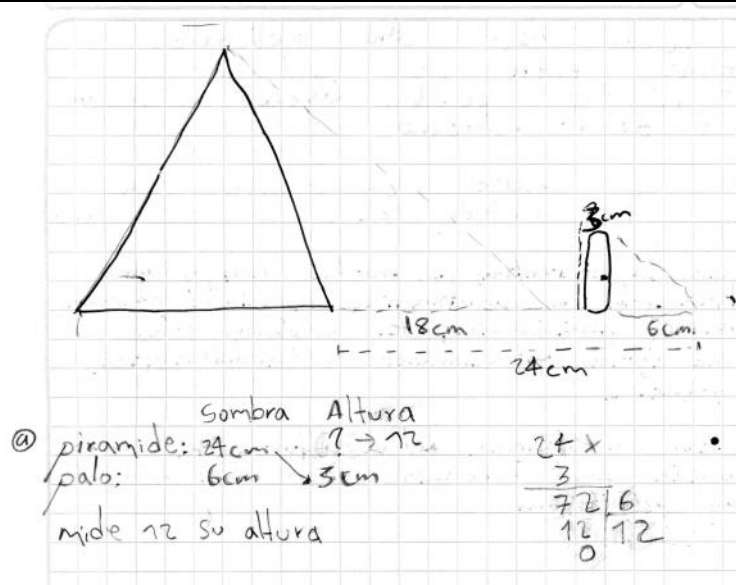
**Tabla 30**

*Resultados de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , que corresponden al  $M_3$  de la fase 3: explicitación.*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	El monitoreo de esta actividad se realizó para los tres participantes dado que el trabajo era en equipo y la observación arrojó similitudes en cuanto al comportamiento de los estudiantes para esta fase, es de aclarar que cada uno construyó su propia piramide y desarrolló el análisis de los datos de manera independiente para luego socializar sus resultados y en conjunto sacar conclusiones .
----------------------------------	--

	<p>La concentración y la autonomía al momento de construir la pirámide cuadrangular evidenció progreso en la manipulación del material concreto, puesto que las construcciones con regla y compás hicieron parte fundamental en las anteriores fases para identificar conceptos y características que hacen parte del objeto de estudio, para este caso la construcción de un poliedro que hace parte del experimento y que posee un cuadrilátero como base y sus caras laterales triangulares.</p> <p>Por otra parte, en esta fase se logró también captar la atención y generar interés en el estudiante, puesto que se evidenciaron mayores logros de los esperados, el trabajo colaborativo entre los pares fue fundamental en esta fase puesto que se empoderaron de los recursos y los materiales propuestos, les dieron un buen uso durante la manipulación puesto que se vió el interés por desarrollar la actividad, cumpliendo con la realización y culminación, desde la construcción de la pirámide hasta el desarrollo final del experimento.</p>
<p><b>Resultado</b></p> <p><b>E<sub>1</sub></b></p>	<p>Actividad 4: Construye una pirámide cuadrangular.</p> <p>Actividad 5: Con las instrucciones de la actividad realiza el experimento para hallar la altura de la pirámide que construiste.</p> <p>Las imágenes que se relacionan a continuación son fragmentos de algunas evidencias que se presentan en esta fase y que fueron realizadas por E<sub>1</sub></p>  <p>Actividad 6:</p> <p>Base 5 cm</p> <p>Pirámide sombra: 23 = <math>\frac{23\text{cm}}{10\text{cm}} = \frac{?}{5\text{cm}} = \frac{115}{10} = 11.5</math></p> <p>Base sombra: - 10</p> <p>Actividad 7:</p> <p>a. ¿Cuál es la altura promedio de la pirámide que construiste? E<sub>1</sub>: “mide 11.5 más o menos”</p> <p>b. ¿Crees que tiene alguna utilidad en la vida diaria este experimento?</p>

	<p>E<sub>1</sub>: “para medir distancias que no se puedan con instrumentos, también para comparar alturas entre objetos o cuantas veces es mas grande o mas pequeño un objeto”</p> <p>c. ¿Qué relación de semejanza encuentras entre las medidas que hallaste con los elementos que experimentaste?</p> <p>E<sub>1</sub>: “con las sombras, la [vara] y la altura de la pirámide se forman triángulos rectángulos y sus distancias, alturas y ángulos forman triángulos semejantes”</p> <p>En estas actividades E<sub>1</sub></p> <p>La observación fue constante, puesto que E<sub>1</sub> de manera experimental hace cálculos con las medidas encontró las razones de los lados correspondientes, utilizando la regla de tres, hace relaciones a partir de los elementos que descubre del teorema para establecer la razón de proporcionalidad que le permite decir si hay semejanza o no entre los dos triángulos.</p> <p>Comprende, además, las definiciones y propiedades que hacen parte de la semejanza de triángulos al identificar que los triángulos construidos son triángulos rectángulos que tienen ángulos de 90°, su <b>razonamiento</b> le permite descubrir que las sombras son la base y que son proporcionales entre sí y las relaciona, las alturas entonces las <b>relaciona</b> de igual forma buscando una razón entre la medida del palillo y la altura de la pirámide que es la incógnita como lo muestra la imagen de la actividad 6, luego, como lo anterior es una proporción, el estudiante realiza el producto de la sombra de la pirámide con la altura del palillo y divide entre la sombra del palillo, tratando de <b>justificar</b> el porqué de su resultado.</p>
<p><b>Resultado</b></p> <p><b>E<sub>2</sub></b></p>	<p>Actividad 4: Construye una pirámide cuadrangular.</p> <p>Actividad 5: Con las instrucciones de la actividad realiza el experimento para hallar la altura de la pirámide que construiste.</p> <p>Las imágenes que se relacionan a continuación son fragmentos de algunas evidencias que se presentan en esta fase y que fueron realizadas por E<sub>2</sub></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>Actividad 6:</p>



Actividad 7:

- ¿Cuál es la altura promedio de la pirámide que construiste?  
E<sub>2</sub>: “su altura mide 12 centímetros”
- ¿Crees que tiene alguna utilidad en la vida diaria este experimento?  
E<sub>2</sub>: “la verdad si, lo podemos usar para medir cosas muy altas”
- ¿Qué relación de semejanza encuentras entre las medidas que hallaste con los elementos que experimentaste?  
E<sub>2</sub>: “la semejanza la encuentras en muchas cosas, al formar triángulos con características especiales pude encontrar parecidos, similitudes y explorar con materiales me ayuda a ver características que no comprendía”

En estas actividades E<sub>2</sub> utilizó el material concreto para fortalecer la **visualización** y hacer conjeturas, este plasma el experimento de la situación problema en una hoja, para describir los elementos que observa en forma ordenada y verbal, **su lenguaje** le facilitó hacer definiciones para justificar la razón de semejanza, pues con el cálculo matemático que realizó encontró una aproximación de la altura de la pirámide e hizo una relación con el palillo que midió, para indicar que esta es cuatro veces más grande.

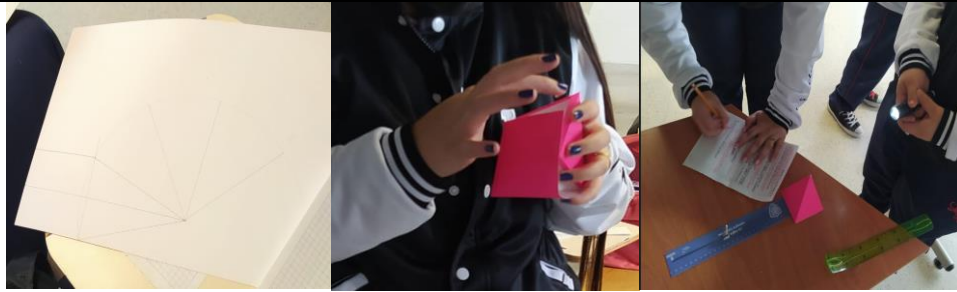
**Resultado**

Actividad 4: Construye una pirámide cuadrangular.

**E<sub>3</sub>**

Actividad 5: Con las instrucciones de la actividad realiza el experimento para hallar la altura de la pirámide que construiste.

Las imágenes que se relacionan a continuación son fragmentos de algunas evidencias que se presentan en esta fase y que fueron realizadas por E<sub>3</sub>.



Actividad 6:

Sombra  $H = 5\text{cm}$   
 $\parallel$   $P = 19\text{cm}$   
 Altura  $H = 3\text{cm}$   
 $H \rightarrow$  palito  
 $P \rightarrow$  piramide

$$\begin{array}{r} 19 \\ 3 \times \\ \hline 57 \quad | \quad 5 \\ 07 \quad | \quad 11,4 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{19}{5} = \frac{?}{3}$$

$$\frac{19 \times 3}{5} = 57 = 11,4$$

Actividad 7:

- ¿Cuál es la altura promedio de la pirámide que construiste?  
 E<sub>3</sub>: “La pirámide mide 11,4 centímetros”
- ¿Crees que tiene alguna utilidad en la vida diaria este experimento?  
 E<sub>3</sub>: “Si, ya que este nos ayuda a medir objetos los cuales no alcanzamos a medir con la ayuda de un metro u otro objeto de medición”
- ¿Qué relación de semejanza encuentras entre las medidas que hallaste con los elementos que experimentaste?  
 E<sub>3</sub>: “los dos triángulos que se forman tienen semejanza porque tienen dos rectas perpendiculares y proporcionales, estas forman ángulos de 90 grados que también serían iguales y la base la tienen en común”

En estas actividades E<sub>3</sub> estableció que los triángulos formados con los elementos del experimento son semejantes y trató de establecer definiciones enlistando las características que observaba de manera verbal e identificó que ambos triángulos tienen ángulos de 90°, hizo relaciones en cuanto a las alturas que tenían pues estableció que son perpendiculares y proporcionales; E<sub>3</sub> se acercó a la definición de semejanza tratando de describir todo lo que observaba de manera visual.

Mostró en el lenguaje matemático un avance al describir y trata de justificar con los elementos que observó, además habló de proporciones entre las alturas y su perpendicularidad y la base

	que comparten ambos triángulos, que son los otros dos catetos correspondientes, y nombra la igualdad entre los ángulos de 90° que comparten ambos catetos.
--	--

*Nota.* Datos tomados del M<sub>3</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 3: explicitación.  
Fuente: elaboración propia.

Lo que se relacionó en la anterior tabla muestra como los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> con este experimento explicitan sus razonamientos de manera verbal y escrita, intercambiaron sus experiencias al socializar con sus pares y comentaron entre ellos lo que observaron allí, se evidencia que su vocabulario va mejorando, además, establecieron que hay semejanza entre los triángulos que se formaron a partir de la experimentación, pues buscaron elementos característicos de la semejanza de triángulos para establecer relaciones entre los conceptos, propiedades y definiciones, es por ello que según van Hiele (1957) “A veces son ellos mismos los que empiezan diciendo que la semejanza se caracteriza por la igualdad de ángulos y por el hecho de que los segmentos correspondientes tienen la misma relación” (p. 114).

Así pues, los descriptores que se analizaron en correspondencia con esta fase 3 permitieron que los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> comprendieran las definiciones e identificaran elementos característicos de los triángulos para establecer semejanzas entre ellos, la tabla 31 da cuenta de los avances que presenta cada uno de los estudiantes mediante una matriz de la fase 3: explicitación, esta relaciona los descriptores (D<sub>4</sub> y D<sub>7</sub>) que corresponden al Nivel 3 del modelo, el resultado del análisis de las tablas anteriores se sintetiza en la siguiente matriz.

**Tabla 31**

*Matriz para la fase 3: Explicitación*

FASE 3: Explicitación. Experimentemos con el Teorema de Tales			
Descriptores del Nivel 3	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
	Descriptores de fases		
D <sub>4</sub> : comprende el significado de	Comprende las definiciones que hacen parte de la semejanza de	Utilizó el material concreto para fortalecer la <b>visualización</b> y hacer	Comprende que los triángulos formados con los elementos del experimento

<p>las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.</p>	<p>triángulos al identificar que los triángulos contruidos son triángulos rectángulos, su <b>razonamiento</b> le permite descubrir que las sombras son la base, busca otras definiciones tratando de <b>justificar</b> el porqué de su resultado.</p> <p>Su <b>razonamiento</b> le permite descubrir que las sombras son la base del triángulo y que son proporcionales entre sí y las <b>relaciona</b>, al igual que las alturas buscando una razón entre la medida del palillo y la altura de la pirámide que es la incógnita buscada, luego hace cálculos para <b>justificar</b> el porqué de su resultado.</p>	<p>conjeturas, recrea el experimento de la situación problema en una hoja, para describir los elementos que observa en forma ordenada y verbal y encontrar los elementos necesarios para establecer que hay semejanza.</p>	<p>son semejantes y trata de establecer definiciones enlistando las características. Muestra en el <b>lenguaje matemático</b> un avance al describir y trata de <b>justificar</b> con los elementos, propiedades o características que observa.</p>
<p><b>D7:</b> Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.</p>	<p>De manera experimental hace cálculos tratando de encontrar las razones de los lados correspondientes, hace <b>relaciones</b> a partir de los elementos que descubre del teorema para establecer la razón de proporcionalidad que le permite decir si hay semejanza o no entre los dos triángulos.</p>	<p>Su <b>lenguaje matemático</b> le permite hacer definiciones para justificar la razón de semejanza y define que la pirámide es cuatro veces más grande. Para justificar la razón de semejanza, realiza cálculos matemáticos y encuentra una proporción de la altura de la pirámide con el palillo</p>	<p>Al hablar de proporciones realiza cálculos para establecer la razón de semejanza entre las alturas de los dos triángulos y relaciona la perpendicularidad entre las dos alturas para nombrar la igualdad entre los ángulos que se forman de 90° y la base que comparten son lados correspondientes. Se</p>



		dado, define que esta es cuatro veces más grande.	limita a la búsqueda de <b>relaciones</b> de proporcionalidad, haciendo cálculos matemáticos, para encontrar relaciones entre las longitudes y distancias que ha encontrado.
--	--	---	--

*Nota.* Datos tomados del M<sub>3</sub> para análisis de los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 3: explicitación.  
Fuente: elaboración propia.

En esta fase hubo un avance a partir de la experimentación y el dialogo entre pares, el proceso de visualización y justificación de sus procesos ayudaron en la integración de los conceptos vistos en las anteriores fases al tratar de resolver la situación que se les presentó; la observación durante esta fase dio cuenta del progreso en el lenguaje aspecto importante en la investigación cualitativa que según Rodríguez y Valdeoriolla (2009) es fundamental y “se debe prestar especial atención a la función social que tiene el lenguaje para la comprensión y la construcción del “mundo” en un contexto espaciotemporal concreto” (p. 47), es así como el estudiante va construyendo de manera progresiva su lenguaje, y el investigador docente va otorgándole un valor significativo a estas construcciones y estas a su vez se van refinando con sus respuestas al describir las relaciones que encuentran entre las definiciones, conceptos y propiedades.

**Momento 4 (M<sub>4</sub>):** este cuarto momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 4 (orientación libre), este momento se nombró como “Resolución de problemas en contexto”, los estudiantes en esta fase son más autónomos para resolver las actividades propuestas, estas deben ser situaciones nuevas, con varios caminos de resolución y se demuestra la asimilación de los conceptos comprendidos durante todo el proceso, para que la experiencia ganada le permita encontrar la manera de resolver un problema y establecer relaciones. (Jaime y Gutiérrez, 1990; Zapata y Sucerquia, 2009; Aravena y Caamaño, 2013). Así pues, en la tabla 32 se muestra las acciones realizadas por los estudiantes y la descripción de las actividades propuestas para esta fase en la que se cumplió con satisfacción el desarrollo de los descriptores propuestos.

**Tabla 32**

*Elementos y actividades del M<sub>4</sub>: “Resolución de problemas en contexto”. Fase 4: orientación libre.*

<b>Descriptor del Nivel 3</b>	<p>D<sub>8</sub>: Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.</p> <p>D<sub>9</sub>: establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Ángulo, Lado).</p>
<b>Conocimientos previos</b>	<p>En este cuarto momento se evaluaron los siguientes elementos:</p> <p>Establecer relaciones entre las propiedades de los triángulos.</p> <p>Identificar elementos característicos de la razón de semejanza entre triángulos.</p> <p>Comprender que dos triángulos son semejantes si cumple con ciertos criterios.</p>
<b>Descripción de la actividad</b>	<p>Para esta actividad la docente no realizó ninguna intervención se le propone a cada estudiante resolver dos problemas de manera autónoma esto con el fin de poner en práctica los conocimientos y razonamientos adquiridos en las fases anteriores.</p> <p>La primera actividad proporciona información de dos árboles y la proyección de sus sombras, luego se pide hallar la altura del árbol más pequeño, para ello se espera que resuelva el estudiante el ejercicio propuesto con los conocimientos adquiridos en las anteriores fases sobre conceptos de semejanza y la segunda actividad propone a partir de la práctica buscar la manera de medir la altura del colegio.</p>
<b>Actividades propuestas</b>	<p><b>Actividad 1:</b> Los dos árboles proyectan sobre el suelo sus sombras que respectivamente miden 6 m y 24 m, si la altura del árbol más grande es de 20 metros.</p> <p>a. ¿cuál es la altura del árbol más pequeño?</p> <p>b. ¿Puedes establecer relaciones de semejanza entre los dos árboles?</p> <p><b>Actividad 2:</b> Utiliza diversos recursos que te ayuden para definir la altura de un lugar de difícil acceso.</p> <p>¿Te atreverías a imitar a Tales y serías capaz de calcular la altura del edificio de tu institución?</p>

--	--

**Nota.** Datos tomados del  $M_4$  que corresponden a los elementos y actividades de la fase 4: orientación libre. Fuente: elaboración propia.

Las actividades programadas en esta fase se propusieron para que los estudiantes las exploraran y ejecutaran de manera libre y voluntaria, aquí “La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado” (Vargas y Gamboa, 2013, p. 86), con los conocimientos que han adquirido y el razonamiento en los procesos que realizaron en las anteriores fases buscan una solución, esto ayudó a formar redes de relaciones entre los conceptos y procesos para consolidar los saberes que requiere el nivel y los resultados de esta fase se relacionan a continuación en la tabla 33.

**Tabla 33**

*Resultados de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , que corresponden al  $M_4$  de la fase 4: orientación libre.*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	<p>En la primera actividad se enfocaron en realizar una representación del problema con dibujos para encontrar la semejanza entre los datos como se muestra en los resultados.</p> <p>Como introducción a la segunda actividad se realizó la siguiente pregunta antes de entregarles la actividad propuesta, esto con el fin de escuchar sus opiniones y ver que reacción tomaban frente a la situación planteada:</p> <p>¿Te atreverías a imitar a Tales y serías capaz de calcular la altura del edificio de tu institución educativa?</p> <p>Las respuestas que dieron son las siguientes:</p> <p><math>E_1</math>: “sí, porque usar métodos nuevos como este, hacen que deducir una longitud no sea complicada ni difícil”</p> <p><math>E_2</math>: “yo sí me atrevo en calcular el edificio de mi institución pero no estoy seguro que sea capaz de calcularla”</p> <p><math>E_3</math>: “ sí, porque es una experiencia chevere con la que podemos aprender”</p> <p>Con las respuestas que dieron los participantes y la motivación constante por continuar desarrollando las actividades del proyecto, se les entregó una imagen del colegio para hallar su altura.</p>
----------------------------------	--

Estaban un poco preocupados con esta actividad y se les dio la libertad de encontrar la solución de forma individual o en equipo, pero se les aclaró que la justificación cada uno la diera de forma individual esto con el fin de observar como era su razonamiento.

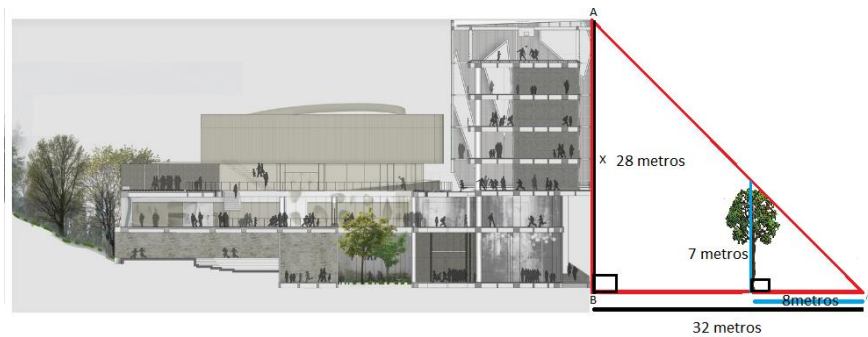
Al inicio se observaron las propuestas que dió cada uno de los estudiantes, así:

E<sub>1</sub>: “utilicemos la luz del sol, como el experimento”

E<sub>2</sub>: “mejor midamos cada piso con un metro”.

E<sub>3</sub>: “podemos hacerlo con la luz del sol y para que miremos si da, tomamos las medidas de los pisos y miramos cuál es la altura de los 7 pisos, así verificamos el resultado”

La siguiente figura muestra el resultado del trabajo en equipo que realizaron los estudiantes:

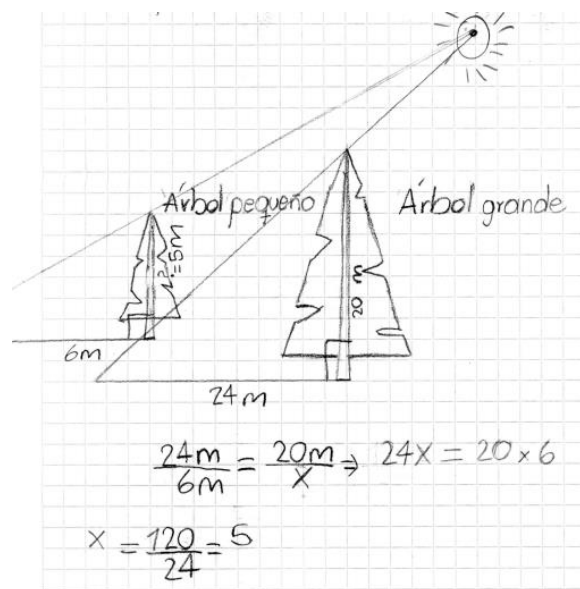


**Resultado**



E<sub>1</sub>

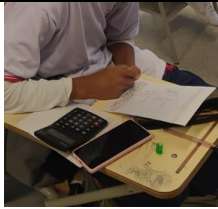
Actividad 1:



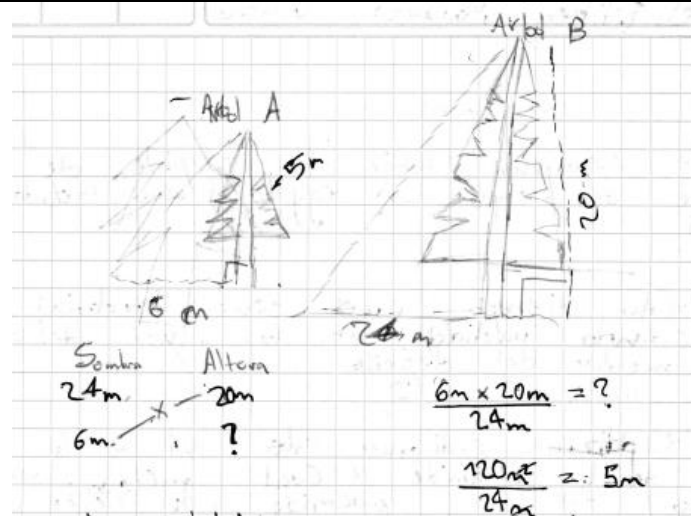
a. ¿Cuál es la altura del árbol más pequeño?

E<sub>1</sub>: “la altura es de 5m”

	<p>b. ¿Puedes establecer relaciones de semejanza entre los dos árboles?</p> <p>E<sub>1</sub>: “estos triángulos son semejantes porque se forman dos triángulos rectángulos de 90° también sus alturas son paralelas y proporcionales también las sombras son lados correspondientes y si divido la primera fracción 24/6 da 4 y si divido 20/5 da 4 el árbol es 4 veces más pequeño que el grande”</p> <p>Actividad 2:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{32m}{8m} = \frac{x}{7m}</math> <math display="block">32 \times 7 = 8x</math> <math display="block">224 = 8x</math> <math display="block">\frac{224}{8} = x = 28</math> </div> <div style="text-align: left;"> <p>Justificación:</p> <p>E<sub>1</sub>: “La altura del colegio es de 28 metros la distancia entre BC y TC son correspondientes, los ángulos son de 90° en ambos y sus alturas son correspondientes también por eso son triángulos semejantes”</p> </div> </div> <p>E<sub>1</sub> al experimentar con los conceptos comprendidos en las anteriores fases pudo enfocarse en utilizar los recursos que hasta ahora tiene para poder aventurarse a medir la institución y encontrar un valor aproximado de la altura pedida, intentó con teoremas ya trabajados y asoció los temas de las sesiones anteriores, se le presentaron obstáculos para identificar en qué momento los rayos del sol podrían estar paralelos al lugar donde estaba ubicado el árbol, aun así tomó las medidas de las sombras del árbol y del colegio con ayuda de los demás compañeros.</p> <p>Por último, estableció proporciones que le permitieron encontrar la altura más aproximada del edificio, lo que evidencia un progreso en las <b>relaciones que establece</b> para definir la semejanza y buscar <b>validar</b> sus respuestas <b>con procedimientos</b>, esto lo hace de manera experimental al hacer cálculos tratando de encontrar las razones de los lados correspondientes; adicionalmente, hace <b>relaciones</b> a partir de los elementos que descubre del teorema para establecer la razón de proporcionalidad que le permite decir si hay semejanza o no entre los dos triángulos encontrados.</p>
<p><b>Resultado</b></p>	<p>Actividad 1:</p>



E2



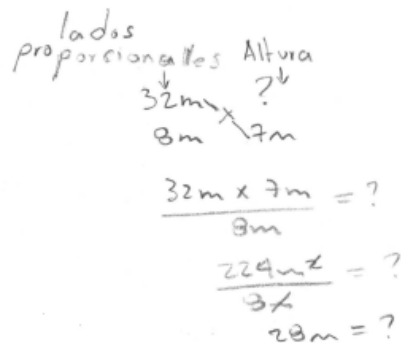
a. ¿Cuál es la altura del árbol más pequeño?

E2: “es 5m”

b. ¿Puedes establecer relaciones de semejanza entre los dos árboles?

E2: “las alturas de los dos árboles son proporcionales, sus sombras también son proporcionales, los triángulos son semejantes y ambos tienen ángulos rectos y el triángulo más pequeño es cuatro veces más pequeño al más grande”

Actividad 2:



Justificación:

E2: “El edificio de mi institución mide 28 metros, podemos usar la altura del árbol para multiplicarla por la base del triángulo mayor y se divide entre la base del triángulo más pequeño”

E2 al enfrentarse a situaciones nuevas manifestó angustia, indicó que se atrevería pero que no estaba seguro de poder hacerlo, aun así se aventuró a una situación nueva, lo que evidenció la búsqueda de relaciones para establecer semejanzas y se apoyó en el desarrollo de las anteriores fases para deducir la altura aproximada del edificio luego buscó validar la información midiendo uno de los pisos con el metro

y así estableció conjeturas que pudiesen validar el resultado encontrado, hizo uso del apoyo visual gran parte de la aplicación y buscó una unidad de medida como herramienta para dar validez a sus resultados.

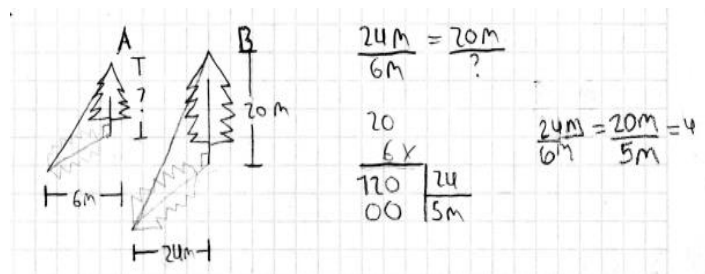
E<sub>2</sub> describe los elementos que observa en forma verbal, su lenguaje matemático le permite hacer definiciones para justificar la razón de semejanza; define las relaciones de proporción con los elementos comprendidos en las fases anteriores, establece la altura del edificio haciendo relaciones con las proporciones encontradas del primer triángulo.

**Resultado**



E<sub>3</sub>

Actividad 1:



a. ¿Cuál es la altura del árbol más pequeño?

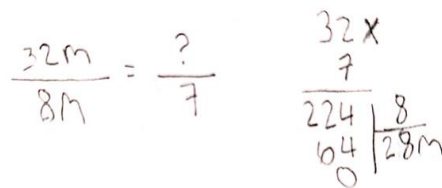
E<sub>3</sub>: “la altura es de 5 metros”

b. ¿Puedes establecer relaciones de semejanza entre los dos árboles?

E<sub>3</sub>: “los dos triángulos que se forman tienen semejanza porque tienen dos rectas paralelas y estas son perpendiculares y con estas se forman ángulos de 90 grados y su base la tienen en común son correspondientes”

Actividad 2:

Justificación:



E<sub>3</sub>: “Los dos triángulos que se forman son semejantes, tienen un lado que comparten BC con TC entonces son proporcionales y tienen ángulos correspondientes iguales y dos rectas paralelas que son AB y RT

cumplen con semejanza de triángulos y el teorema de Tales”

	<p>E<sub>3</sub> buscó establecer relaciones de proporcionalidad, haciendo cálculos matemáticos, para encontrar relaciones entre las longitudes y distancias. Justifica sus procesos para dar validez a sus respuestas. Ha desarrollado capacidad de análisis a partir de la experimentación y la manipulación del objeto de estudio, ha interiorizado la comprensión de los conceptos abordados para establecer relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos.</p> <p>Comprende y pone en práctica las definiciones de semejanza, muestra avances al describir y justificar sus procedimientos con elementos de proporcionalidad, a partir de las razones y sus lados correspondientes y comprende que los triángulos formados con los elementos del experimento son semejantes, trata de establecer las definiciones a partir de sus alturas (paralelismo), proporciones y ángulos correspondientes.</p>
--	---

*Nota.* Datos tomados del M<sub>4</sub> que corresponde a los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 4: orientación libre. Fuente: elaboración propia.

Los resultados que se relacionan en la tabla anterior de los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> hicieron parte del análisis de las actividades propuestas para la fase 4; en esta los participantes realizaron las operaciones necesarias que les permitieron resolver los problemas propuestos, de igual forma, en la práctica se evidenció lo aprendido de las anteriores fases, dado que, en sus expresiones el vocabulario se va refinando, son más estructuradas las respuestas al referirse al concepto de semejanza, las justificaciones que realizaron son argumentos válidos al relacionar las propiedades que poseen los triángulos, analizan sus ángulos y clasificaciones y encuentran la razón de semejanza al relacionar los lados homólogos entre triángulos.

Por lo anterior, las acciones que se mencionaron estuvieron en correspondencia con los descriptores (D<sub>8</sub> y D<sub>10</sub>) que hicieron parte de esta fase y afianzaron la comprensión de los conceptos de semejanza de triángulos en los estudiantes partícipes. Esta aplicabilidad en situaciones reales del contexto les va desarrollando la capacidad de análisis, y les ayuda a modificar sus razonamientos como se describen en la matriz que se muestra a continuación en la tabla 34.



**Tabla 34**

*Matriz para la fase 4: Orientación libre*

FASE 4: Orientación libre. Resolución de problemas en Contexto.			
Descriptor del Nivel 3	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
	Descriptor de fases		
<p><b>D<sub>10</sub>:</b> Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Ángulo, Lado).</p>	<p>Experimentar con los conceptos <b>comprendidos</b> le permitió enfocarse en utilizar los recursos que hasta ahora tiene para poder aventurarse a medir la institución y encontrar un valor aproximado de la altura pedida, intentó con teoremas ya trabajados, asociando los temas de las sesiones anteriores a esta, pero se presentaron obstáculos para identificar en qué momento los rayos del sol podrían estar paralelos al lugar donde estaba ubicado el árbol, aun así tomo las medidas de las sombras del árbol y del colegio con ayuda de los demás compañeros. Estableció proporciones que le permitieran encontrar la altura más aproximada del edificio, lo que evidencia un progreso en las <b>relaciones que establece</b> para definir la</p>	<p>El enfrentarse a situaciones nuevas le generó en un primer momento angustia manifestó que se atrevería pero que no estaba seguro de poder hacerlo, aun así se aventuró a una situación nueva lo que evidenció la búsqueda de relaciones para establecer semejanzas y se apoyó en el desarrollo de las anteriores fases para deducir la altura aproximada del edificio luego buscó <b>validar</b> la información midiendo uno de los pisos con el metro y así estableció conjeturas que pudiesen validar el resultado encontrado, hizo uso del apoyo <b>visual</b> y buscó una unidad de medida como herramienta para dar <b>validez</b> a sus resultados.</p>	<p>Buscó establecer <b>relaciones</b> de proporcionalidad, haciendo cálculos matemáticos, para encontrar relaciones entre las longitudes y distancias. Justifica sus procesos para dar validez a sus respuestas. Ha desarrollado capacidad de análisis a partir de la experimentación y la manipulación del objeto de estudio, ha interiorizado la comprensión de los conceptos abordados para establecer relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos.</p>

	semejanza y buscar <b>validar</b> sus respuestas <b>utilizando un lenguaje matemático y simbólico.</b>		
<b>D8:</b> Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.	De manera experimental hace cálculos tratando de encontrar las razones de los lados correspondientes, hace <b>relaciones</b> a partir de los elementos que descubre del teorema para establecer la razón de proporcionalidad que le permite decir si hay semejanza o no entre los dos triángulos encontrados.	Describe los elementos que observa en forma verbal, <b>su lenguaje matemático</b> le permite hacer definiciones para justificar la razón de semejanza y define las relaciones de proporción con los elementos comprendidos en las fases anteriores, establece la altura del edificio haciendo relaciones con las proporciones encontradas del primer triángulo.	Comprende y pone en práctica las definiciones de semejanza, muestra avances al describir y <b>justificar</b> sus procedimientos con elementos de proporcionalidad, a partir de las razones y sus lados correspondientes y comprende que los triángulos formados con los elementos del experimento son semejantes, trata de establecer las definiciones a partir de sus alturas (paralelismo), proporciones y ángulos correspondientes.

*Nota.* Datos tomados del M4 para análisis de los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 4: orientación libre. Fuente: elaboración propia.

En esta fase los estudiantes exploraron el objeto de estudio de manera libre; para ello se plantearon problemas nuevos que podían ser resueltos con diversas soluciones utilizando los conocimientos previos y adquiridos de las anteriores fases, allí se evidenció en ellos habilidades para representar los ejercicios propuestos y buscar soluciones, validar sus respuestas a partir de la práctica en contexto, por último se establecieron relaciones entre los conceptos, teoremas, definiciones, representaciones y propiedades para avanzar en las fases y alcanzar el siguiente nivel, asimismo, Ávila (2017) sugiere en su investigación que se

diseñen actividades que contengan “El uso de imágenes mentales y habilidades de visualización [pues] son componentes importantes de la actividad matemática y desarrollan los niveles básicos de razonamiento matemático” (p. 156), posibilitando una mejor forma de razonar en los estudiantes que les permita la comprensión de los conceptos del objeto de estudio.

**Momento 5 (M<sub>5</sub>):** este quinto momento del experimento estuvo en correspondencia con los descriptores de la fase 5 (integración), fue llamado “Postest: actividad de indagación y cierre”, este nombre se le dio porque se desarrolló un “postest” y una entrevista de cierre, a este se integraron algunos ítems que hicieron parte del “pretest”, esto con el fin de analizar ambos y establecer conclusiones de los resultados finales, esta fase se apoyó en teorías como la Fouz (2013) quien afirma que “en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía” (p. 73), pues actividades como las propuestas integraron los saberes que ya traían los estudiantes con los adquiridos durante las fases.

A continuación, en la tabla 35 se relacionan descriptores (D<sub>8</sub>, D<sub>9</sub> y D<sub>10</sub>) del Nivel 3 y algunas de las actividades que hicieron parte del “postest” como también algunas de las preguntas de la entrevista de cierre; esta descripción se realizó continuando con el mismo esquema de las anteriores fases para su respectivo análisis, pues las acciones realizadas por los estudiantes sirvieron de guía para evidenciar si adquirieron un dominio de razonamiento acorde al nivel.

**Tabla 35**

*Elementos y actividades del M<sub>5</sub>: “Postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración.*

<b>Descriptores del Nivel 3</b>	<p>D<sub>8</sub>: Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).</p> <p>D<sub>9</sub>: Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Ángulo, Lado).</p> <p>D<sub>10</sub>: Infiere que dos triángulos son semejantes a partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).</p>
---------------------------------	--


<b>Conocimientos previos</b>	<p>En este quinto momento se evaluaron los siguientes elementos:</p> <p>Establecer razones entre las medidas de los lados.</p> <p>Identificar elementos característicos de la razón de semejanza entre triángulos.</p> <p>Establecer relaciones de semejanza entre triángulos</p> <p>Aplicar los criterios de semejanza entre triángulos</p> <p>Identificar elementos necesarios para realizar una justificación.</p>
<b>Descripción de la actividad</b>	<p>A cada estudiante se le entregó la actividad para que la realizaran de manera individual, se les dió indicaciones sobre realizarla durante el tiempo que lo requirieran, dado que la idea era culminar todo el “postest” durante la sesión final, además, se hizo especial énfasis en justificar con mucha claridad sus respuestas para identificar si el estudiante logró los objetivos propuestos del nivel.</p>
<b>Actividades propuestas</b>	<p>A continuación se relacionan:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividades del “Postest” :</li> </ul> <p>Actividad 9: Observa los siguientes triángulos semejantes y halla las medidas pedidas. Justifica tu respuesta.</p> <p>Actividad 10: De los siguientes triángulos semejantes determina la razón de semejanza y justifica tu respuesta.</p> <p>Actividad 12: De las siguientes parejas de triángulos ¿Cuáles son semejantes entre sí?, selecciona con una x en el recuadro si son semejantes o no son semejantes y explica porque los consideras semejantes o porque no los consideras semejantes.</p> <p>Actividad 13: De las siguientes parejas de triángulos semejantes. Determina que criterio LLL (lado, lado, lado), AAA (ángulo, ángulo, ángulo) o LAL (lado, ángulo, lado) asegura la semejanza de esos triángulos y escribe en el recuadro el criterio que le corresponde.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad y preguntas de cierre:</li> </ul> <p>Actividad 2: responde las siguientes preguntas:</p> <p>e. ¿Qué dificultades te has encontrado al momento de realizar las actividades propuestas del proyecto?</p> <p>h. ¿Qué aplicabilidad para la vida le encuentras a los criterios de semejanza?</p> <p>i. ¿Consideras que has tenido avances al momento de analizar e interpretar un problema planteado?</p>

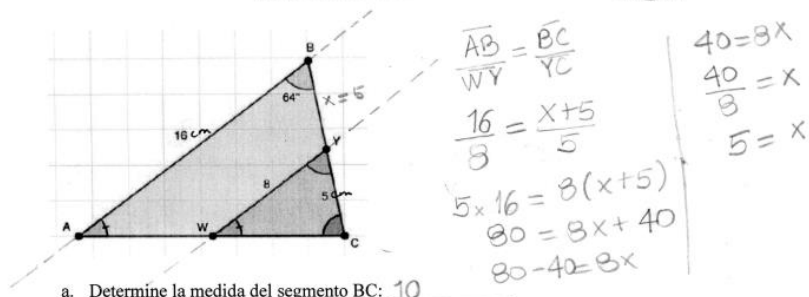
*Nota.* Datos tomados del M<sub>5</sub> que corresponden a los elementos y actividades de la fase 5: integración.  
 Fuente: elaboración propia.

Por lo anterior, los fragmentos seleccionados para el análisis de la fase 5 de integración se relacionan en las tablas 36, 37 y 38, y muestran los resultados de las actividades que desarrollaron los estudiantes, además, evidencian la integración entre la visualización de las imágenes, el lenguaje matemático y la simbología utilizada en geometría, elementos adecuados para definir los conceptos y establecer relaciones que permitan comprender la semejanza de triángulos.

**Tabla 36**

*Resultado del “Postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar  $E_1$  en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<p><b>Monitoreo de la actividad</b></p>	<p>Se observó que el estudiante:</p> <p>Comprende y realiza razonamientos al deducir que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida, además, hace justificaciones utilizando un lenguaje matemático con símbolos buscando coherencia al nombrar cada una de las características que le permiten validar la información.</p> <p>Identifica los elementos que necesita una demostración utilizando un lenguaje matemático que se acerca a elementos de demostración al establecer relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos.</p> <p>Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y en ocasiones lo infiere de manera visual, relacionando las propiedades con su clasificación para dar validez.</p>
<p><b>Resultado</b> <math>E_1</math></p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividades del “Postest”</li> </ul> <p>Actividad 9:</p>



- a. Determine la medida del segmento BC: 10  
 b. Determine la medida del ángulo WYC: 64°

Justificación:  $\overline{AB}$  y  $\overline{WY}$  sus lados son proporcionales porque sus medidas son el doble o uno es la mitad del otro. También el  $\angle ABO = \angle WYC$  y  $\angle BAC = \angle CWY$  son ángulos correspondientes porque dos paralelas la corta una secante son congruentes y son iguales sus medidas y los lados proporcionales.

Actividad 12:

<p>a.</p>	<p>¿Son semejantes?</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: Los <math>\angle ACB</math> y <math>\angle DFE</math> son congruentes. También <math>\angle BAC</math> y <math>\angle EDF</math> debido al criterio AA lo cual nos dice que al ser dos ángulos congruentes el tercero de igual forma también lo será. En este caso <math>33^\circ</math> y entonces son proporcionales. <math>\triangle ABC \sim \triangle DEF</math>. Aunque el <math>\triangle ABC</math> es la mitad del <math>\triangle DEF</math>, su semejanza es debido al criterio LLL.</p>
<p>b.</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: Los <math>\overline{CB}</math> y <math>\overline{DE}</math> son iguales que <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{DF}</math>. Son proporcionales. <math>\triangle ABC \sim \triangle DEF</math>. Aunque el <math>\triangle ABC</math> es la mitad del <math>\triangle DEF</math>, su semejanza es debido al criterio LLL.</p>
<p>c.</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: El <math>\overline{AC}</math> y <math>\overline{DF}</math>, <math>\overline{EF}</math> y <math>\overline{CB}</math>, <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{ED}</math>, son todos proporcionales y múltiplos e inversos de 2. Su criterio es LLL y entonces el <math>\triangle ABC \sim \triangle DEF</math>.</p>
<p>d.</p>	<p><input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/></p>	<p>Porque: Para que el <math>\triangle ABC</math> sea semejante con el <math>\triangle DEF</math> se tendría que cumplir ciertas condiciones como los criterios AA, LLL o LAL, pero aquí no se dan las condiciones, ya que no tienen lados proporcionales.</p>
<p>e.</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>	<p>Porque: Ambas tienen un ángulo de <math>90^\circ</math> en este caso el <math>\angle ACB \cong \angle DFE</math>, pero esta se cumple por el criterio LAL al ser proporcionales múltiplos del 3 los lados <math>\overline{AC}</math> y <math>\overline{DF}</math>, <math>\overline{CB}</math> y <math>\overline{FE}</math> y tienen un ángulo entre ellos igual.</p>

- Actividad y preguntas de cierre

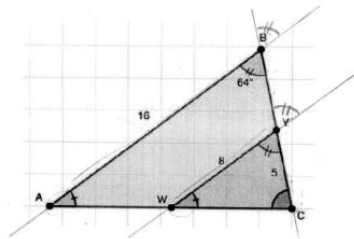
	<p>e. ¿Qué dificultades te has encontrado al momento de realizar las actividades propuestas del proyecto?</p> <p>E1: “Por no traer el material se me dificultó realizar las actividades y justificar los problemas ya que no sabía cómo expresarme”</p> <p>h. ¿Qué aplicabilidad para la vida le encuentras a los criterios de semejanza?</p> <p>E1: “Se puede aplicar para construcciones, para medir alturas, para comparar dos objetos, para hacer construcciones semejantes”</p> <p>i. ¿Consideras que has tenido avances al momento de analizar e interpretar un problema planteado?</p> <p>E1: “Si , ya para mi es mas fácil responder un problema planteado sobre geometria”</p> <p>En estas actividades E<sub>1</sub> logró establecer criterios de semejanza entre los triángulos dados y justificó su respuesta al establecer definiciones con los conceptos, propiedades y clasificaciones necesarias y suficientes para relacionarlas entre sí, además desarrolló habilidades para representar con símbolos matemáticos las definiciones dadas.</p> <p>En las respuestas del cierre el estudiante manifestó que ha avanzado en cuanto a la resolución de problemas, aunque se le presentaron dificultades para justificar.</p>
--	--

*Nota.* Datos tomados del “Postest: actividad de indagación y cierre” de E<sub>1</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

**Tabla 37**

*Resultado del “Postest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar E<sub>2</sub> en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	<p>Se observó que el estudiante:</p> <p>Deduca algunos criterios de manera visual, pero busca dar validez en sus justificaciones, utilizando unidades de medida.</p> <p>Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin comprender su estructura.</p> <p>Clasifica lógicamente los triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</p>
<b>Resultado E<sub>2</sub></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividades del “Postest”</li> </ul> <p>Actividad 9:</p>



- a. Determine la medida del segmento BC: 10cm  
 b. Determine la medida del ángulo WYC: 64°

Justificación: el segmento  $BY$  es doble de  $YC$   
 Medi el ángulo  $\angle WYC$  medio  $64^\circ$  y es semejante a  $\triangle ABC$   
 criterio AAA  
 $\angle WYC = \angle ABC$  porque son correspondiente  
 $\angle BAC = \angle WYC$  porque son correspondientes  $AB$  es proporcional a  $WY$

Actividad 12:

¿Son semejantes?

a.  $110 + 37 = 147$   
 $180 - 147 = 33$

Porque:  
 $\angle ABC = \angle DEF = 33^\circ$   
 $\angle BAC = \angle EDF = 37^\circ$   
 $\angle ACB = \angle DFE = 110^\circ$   
 criterio AAA

b.

Porque:  
 $AB \sim EF = 2.13 \sim 4.26$   
 $BC \sim ED = 3 \sim 6$   
 $AC \sim DE = 4.5 \sim 9$   
 criterio LLL  
 todos proporcionales

c.

Porque:  
 $AB \sim EF = 3.4 \sim 6.8$   
 $BC \sim ED = 2 \sim 4$   
 $CA \sim FD = 5.2 \sim 10.4$   
 criterio LLL  
 todos proporcionales

d.

Porque:  
 no tienen ningún criterio que los identifique

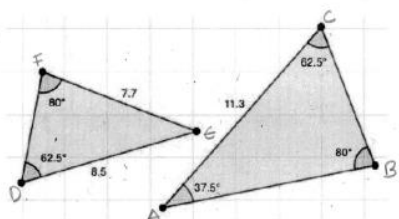
e.

Porque:  
 $AB \sim DF = 9 \sim 3$  todos proporcionales  
 $\angle ABC = \angle EDF = 90^\circ$   
 $BC \sim ED = 3 \sim 1$  todos proporcionales  
 criterio LAL



Actividad 13:

a.

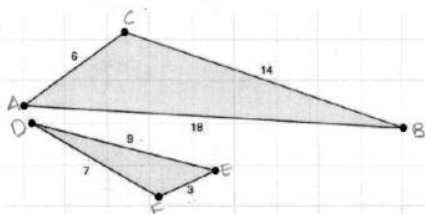


Criterio:

AAA

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle DFE \\ \angle EDF &= \angle ACB \\ \Delta ABC &\sim \Delta DEF \end{aligned}$$

b.



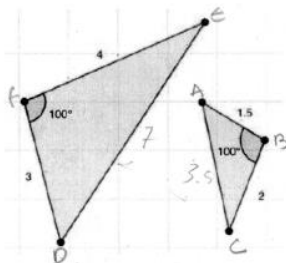
Criterio:

LLL

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{FE} = \frac{BC}{DF}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

c.



Criterio:

LLL

$$\frac{AB}{FD} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle DFE = \angle ABC$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

- Actividad y preguntas de cierre:


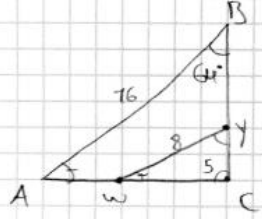
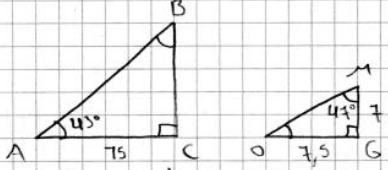
	<p>e. ¿Qué dificultades te has encontrado al momento de realizar las actividades propuestas del proyecto?</p> <p>E<sub>2</sub>: “Cuando doy las respuestas de las actividades me da dificultad explicar y las construcciones con regla y compás me parecieron difíciles”</p> <p>h. ¿Qué aplicabilidad para la vida le encuentras a los criterios de semejanza?</p> <p>E<sub>2</sub>: “para ver si un objeto es semejante con otro, para ver que hay en común, para medir alturas como lo de la pirámide”</p> <p>i. ¿Consideras que has tenido avances al momento de analizar e interpretar un problema planteado?</p> <p>E<sub>2</sub>: “la verdad sí, pero me falta más, tengo que aprender más, para analizar se necesita mucha observación y a mí me hace falta”</p> <p>En estas actividades E<sub>2</sub> logró establecer criterios de semejanza entre los triángulos dados, se enfocó en dar validez a partir de las medidas que encontraba de los lados y ángulos entre los triángulos y estableció razones de proporcionalidad. Su razonamiento le permite justificar sus respuestas a partir de la visualización al establecer definiciones y relacionar elementos de la geometría.</p> <p>En las respuestas del cierre el estudiante manifestó que ha avanzado en el análisis e interpretación de problemas, pero asume que requiere aprender más, además afirma que para analizar se requiere de observación, elemento que a él le hace falta.</p>
--	---

*Nota.* Datos tomados del “Posttest: actividad de indagación y cierre” de E<sub>2</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

**Tabla 38**

*Resultado del “Posttest: actividad de indagación y cierre”. Fase 5: integración. Para clasificar E<sub>3</sub> en un Nivel 3 del modelo de van Hiele*

<b>Monitoreo de la actividad</b>	<p>Se observó que la estudiante:</p> <p>Se acercó a elementos básicos que se necesitan en una demostración, pero aún no comprende su estructura.</p> <p>Estableció relaciones de proporcionalidad y dio cuenta de lo aprendido justificando sus procesos y utilizó símbolos, pues ha fortalecido su lenguaje matemático para dar validez a sus respuestas.</p>
----------------------------------	--

	<p>Comprendió el significado de las definiciones de semejanza de triángulos, este criterio lo infiere de manera visual y relaciona las propiedades con su clasificación para dar validez.</p>
<p><b>Resultado</b> E2</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividades del "Postest"</li> </ul> <p>Actividad 9:</p>  <p>a Determine la medida del Segmento BC: 70 cm</p> <p>b Determine la medida del ángulo WYC: 64°</p> <p><math>\overline{CY} \sim \overline{BC}</math> <math>\overline{AB} \sim \overline{WY}</math> porque son proporcionales</p> <p><math>\angle WYC \cong \angle ACB</math>, entonces ambos triángulos son semejantes</p> <p>Actividad 10:</p>  <p><math>\frac{\overline{AC}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MG}}</math></p> <p><math>\frac{75}{7.5} = \frac{x}{7}</math>    <math>\frac{105}{7.5} = \frac{14}{7.5}</math></p> <p>a Determine la medida del Segmento BC: 70 cm</p> <p>b Determine la medida del ángulo MOG: 43°</p> <p><math>\overline{AC} \sim \overline{OG}</math>: ya que son proporcionales <math>\overline{BC} \sim \overline{MG}</math>: ya que son proporcionales</p> <p><math>\angle DAC \cong \angle MOG</math> y entonces ambos triángulos son semejantes.</p> <p>Actividad 12:</p>

	<p>¿Son semejantes?</p> <p>a) <math>\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE = 110^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle FED = 37^\circ</math>          porque sus ángulos son iguales <math>\rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE = 33^\circ</math> (AAA)</p> <p>b) <math>\overline{CA} \sim \overline{EF}, \overline{CB} \sim \overline{DF}, \overline{AB} \sim \overline{DE}</math> (LLL)          porque sus lados son proporcionales</p> <p>c) <math>\overline{EF} \cong \overline{CB}, \overline{FD} \cong \overline{AC}, \overline{ED} \cong \overline{AB}</math> (LLL)          porque sus lados son proporcionales</p> <p>d) Sus lados no son proporcionales solo <math>\sphericalangle DFE = \sphericalangle ABC \cong 61^\circ</math>          pero en sus ángulos son iguales es el equívoco no que tener <math>61^\circ</math></p> <p>e) <math>\overline{AB} \sim \overline{DE}, \overline{CB} \sim \overline{DE} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{DE} \} \sphericalangle ABC = \sphericalangle EDF = 90^\circ</math> (LAL)          porque sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad y preguntas de cierre:</li> </ul> <p>e. ¿Qué dificultades te has encontrado al momento de realizar las actividades propuestas del proyecto?</p> <p>E3: “Se me ha dificultado en la parte de explicar, porque no sabía del lenguaje matemático y las actividades se me hacían algo largas o difícil de entender”</p> <p>h. ¿Qué aplicabilidad para la vida le encuentras a los criterios de semejanza?</p> <p>E3: “Se pueden aplicar en las construcciones, por lo que se deben emplear unas medidas y en ocasiones estas pueden ser iguales o semejantes”</p> <p>i. ¿Consideras que has tenido avances al momento de analizar e interpretar un problema planteado?</p> <p>E3: “Sí, ya que manejo una mejor sustentación y un mejor lenguaje matemático, mi razonamiento ha mejorado porque utilizo lo aprendido en la solución de problemas”</p> <p>En estas actividades E3 logró establecer criterios de semejanza entre triángulos, se acercó a los elementos básicos que se necesitan en una demostración, pero aún no comprende su estructura, hace definiciones relacionando las propiedades, establece relaciones de proporcionalidad e identifica conjuntos mínimos de las propiedades de los triángulos. Busca justificar lo aprendido por</p>	

	<p>medio de un lenguaje matemático básico, utilizando símbolos y explicaciones cortas.</p> <p>En las respuestas del cierre la estudiante manifestó que ha mejorado al sustentar la solución de problemas porque han mejorado sus razonamientos, debido a que este proceso ha sido una falencia en los procesos que realizó.</p>
--	---

*Nota.* Datos tomados del “Posttest: actividad de indagación y cierre” de E<sub>3</sub> para análisis y clasificación de sus resultados en el Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

Con los resultados expuestos anteriormente, los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> en esta fase 5 son conscientes del aprendizaje adquirido en las anteriores fases y también de las dificultades que tuvieron al justificar, pues los tres concuerdan en la misma respuesta; en cuanto a conceptos relacionados con la semejanza de triángulos, estos evidenciaron avances en sus razonamientos al hacer definiciones y justificar el porqué de un resultado, utilizaron un lenguaje matemático caracterizado por símbolos geométricos al hacer relaciones entre los conceptos, propiedades y definiciones, esto solo se logra con la adquisición de una estructura mental integrada, que según Zapata y Sucerquia (2009) se modifica y fortalece “[...] mediante la constitución de una red de relaciones que se empieza a crear durante el proceso de aprendizaje y que es mediada por el lenguaje a través de las actividades propuestas en cada una de las fases” (p. 52).

Por lo tanto, el experimento de enseñanza concluye con el desarrollo de esta última fase de aprendizaje y al completarla los estudiantes “[...] tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 335); razonamiento que se evidencia en el progreso del aprendizaje que tuvieron los estudiantes y los resultados que se relacionan a continuación en la tabla 39.

**Tabla 39**

*Matriz para la fase 5: Integración*

<p><b>FASE 5: Integración.</b></p> <p><b>Aplicación de “postest” y entrevista de cierre</b></p>
---

Descriptores del Nivel 3	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>
	Descriptores de fases		
<p><b>D<sub>8</sub>:</b> Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).</p>	<p>Se evidencia que comprende y realiza razonamientos al deducir que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida, <b>justifica</b> buscando coherencia al nombrar cada una de las características que le permiten <b>validar</b> la información, utilizando un <b>lenguaje matemático con símbolos para justificar</b>.</p>	<p>Este criterio lo deduce de manera visual, pero busca dar <b>validez</b> en las <b>justificaciones</b>, utilizando unidades de medida. Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin comprender su estructura. Clasifica lógicamente los triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.</p>	<p>Se acerca a elementos básicos que se necesitan en una demostración <b>justificando sus resultados</b>, pero aún no comprende su estructura. Comprende las definiciones relacionando las propiedades; su <b>lenguaje matemático</b> le permite evidenciar avances en los elementos simbólicos, pero requiere de fluidez para explicar los argumentos que justifican los procedimientos.</p>
<p><b>D<sub>9</sub>:</b> Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Ángulo, Lado).</p>	<p>Identifica los elementos que necesita una demostración utilizando un <b>lenguaje matemático</b> que se acerca a elementos de demostración al <b>establecer relaciones</b> de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos.</p>	<p>Comprende y <b>relaciona</b> elementos de la geometría para establecer razones de proporcionalidad, se enfoca en dar <b>validez</b> a partir de las medidas que encuentra de los lados entre dos triángulos y <b>revisa</b> que la medida del ángulo que los comprende sea igual.</p>	<p>Establece <b>relaciones</b> de proporcionalidad y da cuenta de lo aprendido justificando sus procesos utilizando símbolos de la geometría, ha fortalecido el <b>lenguaje matemático</b> para dar <b>validez</b> a sus respuestas.</p>
<p><b>D<sub>10</sub>:</b> Infiere que dos triángulos son semejantes a</p>	<p>Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos, este criterio lo infiere de</p>	<p>Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos,</p>	<p>Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos, este criterio lo infiere de</p>

partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).	manera <b>visual</b> y <b>relaciona</b> las propiedades con su clasificación para dar <b>validez</b> .	este criterio lo infiere de manera <b>visual</b> y <b>relaciona</b> las propiedades con su clasificación para dar <b>validez</b> .	manera <b>visual</b> y <b>relaciona</b> las propiedades con su clasificación para dar <b>validez</b> .
--	--	--	--

*Nota.* Datos tomados del M<sub>5</sub> para análisis de los resultados de E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> de la fase 5: integración.

Fuente: elaboración propia.

En esta última fase se evidenciaron en los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> logros al establecer relaciones integrando los conceptos con las imágenes y sus definiciones, desarrollaron además habilidades con respecto a la visualización al manipular y experimentar con el objeto matemático, de igual forma, consolidaron su vocabulario esto se evidenció en las justificaciones que realizaron usando un lenguaje matemático y la simbología característica de la geometría para dar validez a sus resultados. Además, los colores de la matriz para la fase 5 representaron las acciones que cada estudiante realizó y los resultados esperados al integrar las fases y adquirir nuevos conocimientos para pasar al siguiente nivel.

Con el análisis de los resultados hasta ahora expuestos durante las cinco fases se relaciona la siguiente matriz que resume los logros obtenidos por cada estudiante en función del Nivel 3, para revisar las acciones que hicieron posible este paso de un nivel al inmediatamente superior se presenta la tabla 40.

**Tabla 40**

*Matriz que relaciona el paso por cada fase del Nivel 3 en los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub>*

Estudiante /Fases de Aprendizaje	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5

<p><b>E<sub>1</sub></b></p>	<p>Hizo mediciones para clasificar los triángulos. Reconoció elementos de proporcionalidad. Realizó comparaciones con las longitudes de sus lados. Relacionó elementos de manera visual. Utilizó el lenguaje matemático para establecer relaciones entre los triángulos.</p>	<p>Siguió instrucciones para la construcción de los triángulos, esto le permitió identificar las propiedades de manera visual. Hizo listas de propiedades para justificar. Identificó elementos de proporcionalidad y clasificación.</p>	<p>Comprendió las definiciones que hacían parte del objeto en estudio, además, descubrió otras definiciones, en esta fase su razonamiento se iba fortaleciendo al tratar de justificar el porqué de un resultado y hacia relaciones entre los conceptos ya aprendidos.</p>	<p>Con las actividades propuestas en situaciones nuevas, logró establecer entre los triángulos relaciones de proporcionalidad, propiedades y clasificación. Utilizó definiciones con lenguaje matemático que lo acercaron a establecer criterios de semejanza de triángulos.</p>	<p>Su razonamiento le permitió comprender las definiciones, hacer relaciones entre los elementos característicos de los triángulos, deducir las semejanzas entre dos triángulos y justificar usando un vocabulario más refinado de las matemáticas.</p>
<p><b>E<sub>2</sub></b></p>	<p>Identificó características de los triángulos y se enfocó en la clasificación y sus propiedades para establecer conclusiones, de igual forma, ve la necesidad de validar</p>	<p>Comparó elementos característicos de la proporcionalidad, e identificó características de los triángulos que le permiten establecer relaciones.</p>	<p>Su visualización le permitió hacer explícitas las observaciones que realizar, ya identifica elementos necesarios,</p>	<p>Se apoyó en las anteriores fases y retomó los conceptos vistos, poniéndolos en práctica para enfrentarse a las situaciones nuevas propuestas en esta fase, del</p>	<p>Integró los elementos de visualización y los conceptos para construir justificaciones utilizando el lenguaje matemático apropiado, comprende lo</p>



	resultados haciendo uso del lenguaje formal.	Buscó justificar el porqué de un resultado haciendo mediciones y dar validez a los resultados.	los ordena para establecer la definición de semejanza y los relaciona con aspectos de un contexto dado, describe más fluido lo que observa por lo que su lenguaje matemático le permite justificar la razón de semejanza que encuentra.	mismo modo logró fortalecer sus conceptos y le permitió establecer relaciones para justificar sus procedimientos.	que hace y al relacionar elementos de la semejanza, con la proporcionalidad, de igual forma valida los procedimientos y los justifica.
<b>E<sub>3</sub></b>	Hizo mediciones y comparaciones para clasificar los triángulos, trató de establecer relaciones de semejanza, pero aún se enfocaba en la parte visual al comparar elementos asociados a las	Al inicio se le dificultó seguir instrucciones, pero poco a poco comenzó a comparar elementos característicos de la proporcionalidad, e identificó características de los triángulos que le	Comprendió la importancia de las definiciones de semejanza y muestra avances en su lenguaje matemático al tratar de justificar con elementos diversos	Se apoyó en las anteriores fases y buscó establecer las relaciones de proporcionalidad retomando los conceptos vistos, los puso en práctica para enfrentarse a las situaciones nuevas, del mismo modo	Su razonamiento le permitió acercarse a la comprensión de los elementos básicos de la semejanza de triángulos, sus logros le permitieron establecer relaciones entre los elementos característicos

	longitudes o amplitudes de los triángulos.	permitieron establecer relaciones. Aun la visualización en esta fase era fundamental en su proceso de razonamiento.	(cálculos matemáticos para hallar proporciones, medición de ángulos) característica s de que hacen parte del objeto en estudio	logró fortalecer elementos del lenguaje que le permitieron justificar sus procedimientos.	de los triángulos, deducir las semejanzas entre dos triángulos y justificar usando un vocabulario apropiado de las matemáticas.
--	--	---	--	---	---

*Nota.* Datos tomados del análisis de cada una de las fases para evidenciar el progreso de los E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> al Nivel 3 del modelo de van Hiele. Fuente: elaboración propia.

En relación con el nivel de razonamiento que alcanzaron los estudiantes, la matriz anterior evidenció el tránsito que realizaron los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> y E<sub>3</sub> por cada una de las fases y en ella se mostraron las habilidades de razonamiento geométrico, en cuanto a la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos que desarrollaron para pasar del Nivel 2 al Nivel 3, asimismo, se exhibieron las acciones que realizaron cada uno de los estudiantes en cada fase para posibilitar el alcance de los objetivos propuestos e iniciar procesos de clasificación y razonamiento formal.

Para concluir, este análisis permitió mostrar las bondades que tiene el modelo de van Hiele para consolidar los niveles de comprensión de los estudiantes, pues se lograron fortalecer procesos académicos y mejorar las prácticas educativas a partir de una enseñanza adecuada e instruida; adicionalmente, el experimento de enseñanza que se diseñó con las fases del modelo y se aplicó en este estudio se utilizó como herramienta para organizar las actividades que llevaron a alcanzar los logros adquiridos y ayudó a promover los niveles 2 al 3 el razonamiento geométrico en los estudiantes partícipes, de igual forma facilitó la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos, refinarlos y relacionarlos con el contexto, lo que respondió a la pregunta propuesta en este estudio.

## Capítulo 5

### 6. Discusión y Conclusiones

De acuerdo al capítulo anterior, este trabajo se centró en analizar cómo se promueve el razonamiento geométrico para la comprensión de conceptos que se enmarcan en la semejanza de triángulos en los niveles 2 al 3 del modelo de van Hiele con estudiantes de secundaria de la institución educativa Lusitania Paz de Colombia, se desarrollaron distintas actividades de geometría para cada una de las fases del modelo a partir del diseño de un experimento de enseñanza, este contenía descriptores para cada una de las fases, acciones que sirvieron para analizar como resolvían los estudiantes las actividades propuestas y el tránsito de un nivel al siguiente.

Con el fin de identificar en qué nivel del modelo de van Hiele estaban los estudiantes partícipes de la investigación se realizó un “pretest”, este fue un insumo que sirvió como instrumento de evaluación para dar respuesta a factores que han generado bajos resultados académicos en la asignatura de geometría y proporcionar información a la investigación para identificar el nivel de razonamiento que tenían los estudiantes a partir del concepto de semejanza de triángulos. Entre los hallazgos se evidenciaron dificultades en la resolución de problemas, en procesos de visualización, representación gráfica e interpretación de símbolos matemáticos y argumentación, condiciones que justificaron una clasificación de los estudiantes en un Nivel 2 del modelo.

Por lo anterior, se tuvo presente el nivel de los estudiantes para proponer una metodología en la que el docente implemente actividades con instrucciones acordes a su nivel y los materiales que se utilicen como las guías, herramientas (compás, regla, metro y transportador), software de geometría y demás elementos fortalezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje, porque de lo contrario si se enseña desde un nivel superior el estudiante no alcanzará los objetivos propuestos, como lo dijeron Jurado y Londoño (2005) en su investigación “si la enseñanza acontece en un nivel superior al del estudiante, el material no es asimilado propiamente en la memoria por un periodo largo de tiempo” (p. 4).

Se espera entonces, que los docentes cuando utilizan modelos como este le otorguen la importancia requerida, se realice una evaluación al inicio (“pretest”) y al final (“postest”) como lo propone Corberán et al. (1994) en su investigación, para analizar los resultados y el avance en su razonamiento después de realizar las actividades propuestas y contribuir a mejorar los procesos académicos; es por ello que un referente teórico como el modelo de van Hiele aporta a la comprensión y promoción del razonamiento asociado con conceptos de la geometría, lo anterior se valida a partir de la experiencia durante el trabajo de campo y los resultados obtenidos al promover el razonamiento en los estudiantes partícipes de la investigación y su tránsito del Nivel 2 al Nivel 3.

Por consiguiente, el avance que se dio al nivel inmediatamente superior fue gracias a los aportes que brinda el modelo de van Hiele y la implementación del experimento de enseñanza, el cual fue diseñado para este estudio con las cinco fases del modelo, estas son etapas por las que debe pasar el estudiante y para cumplir con los objetivos propuestos. En estas se construyeron descriptores que según Zapata y Sucerquia (2009) son un conjunto de acciones que deben cumplir los estudiantes para ubicarse en cada fase y adquirir la experiencia necesaria para transitar por cada una de ellas y a su vez le faciliten progresar al siguiente nivel. Por lo tanto, las actividades propuestas en cada encuentro y su desarrollo requirieron de dedicación, tiempo y continuidad para alcanzar los objetivos propuestos adquiriendo en los estudiantes habilidades y dominios para pasar al siguiente nivel.

### **6.1 Alcances de los estudiantes**

A través de la estrategia mencionada, se logró que los estudiantes por medio de la experimentación se motivaran a realizar diversas actividades de geometría, estas sirvieron de insumo para analizar el progreso en el razonamiento de los estudiantes, pero solo se presentaron las respuestas más representativas para cada fase, dado lo extenso de las evidencias recolectadas en el trabajo de campo; esta experiencia facilitó un acercamiento al objeto matemático, a partir de la modelación, la manipulación de material concreto e implementación de las TICS para favorecer y promover el razonamiento de los estudiantes, desarrollando en ellos habilidades de visualización, el uso del lenguaje matemático, la comprensión de conceptos de semejanza de triángulos y las relaciones entre las definiciones

y propiedades, acercándolos a procesos de argumentación para obtener mejores resultados académicos.

Asimismo, se puede concluir que esta propuesta y su diseño dio respuesta a la pregunta de investigación pues facilitó la promoción del razonamiento geométrico en los niveles del modelo de van Hiele, en los tres estudiantes participantes y sus logros mostraron los avances en la adquisición de un nuevo nivel a partir de la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos.

## **6.2 Consecución de los objetivos**

Para analizar los logros alcanzados por los estudiantes, se realizó la aplicación de un “postest” como prueba final, esta hizo parte de la última fase del experimento de enseñanza y arrojó resultados satisfactorios de los estudiantes participantes en cuanto al progreso en su razonamiento y desarrollo de habilidades características del Nivel 3, a partir de la comprensión de los conceptos teóricos de semejanza de triángulos, la resolución de problemas y su justificación, utilizaron un lenguaje más formal con símbolos característicos de la geometría considerando la relación que hacen de las figuras geométricas en este caso los triángulos con el análisis de sus propiedades y cómo estas se conectan lógicamente para establecer relaciones que justifican un problema al reconocer que unas propiedades se deducen de otras, un inicio que lleva a procesos de demostración.

Lo anterior, se evidencia en el análisis de los resultados que muestra la matriz para la fase 5 de integración (tabla 39), en esta las filas se muestran en el mismo color, dado que las acciones realizadas por cada uno de los estudiantes marcaron la ruta de los resultados esperados al integrar las fases, se observó además, su desplazamiento por estas lo que conllevó a la adquisición de nuevos conocimientos y el nivel de razonamiento que se requiere para progresar al nivel inmediatamente superior en este caso al nivel 3.

A través de este estudio, se puede dilucidar que para promover razonamiento en los niveles de van Hiele y un progreso a lo largo de los años escolares en las instituciones, se deben vincular a los docentes desde grados inferiores a procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría con estrategias que integren elementos didácticos y ayuden al desarrollo de competencias para favorecer la enseñanza. Se puede considerar entonces, que si se proponen

actividades a partir de la experimentación con instrucciones claras guiadas por el docente se garantizará la comprensión de los conceptos dado que la parte instruccional del modelo ha evidenciado avances en sus niveles y el desarrollo de habilidades y destrezas para solucionar situaciones del contexto.

### **6.3 Limitantes de la investigación**

Los limitantes más representativos que se presentaron durante el desarrollo del trabajo de campo fueron los espacios requeridos para desarrollar algunas actividades que tenían que ver con las TICS, pues el préstamo de las salas de informática en la institución eran negadas, dado que siempre estaban ocupadas con estudiantes de ambas jornadas, así que se buscó por fuera de la institución en la biblioteca pública más cercana el préstamo de estos espacios para desarrollar las actividades propuestas en el tiempo que se requería y con la secuencia requerida para cumplir con los objetivos. Otro limitante se presentó, cuando los estudiantes tuvieron que realizar las actividades de experimentación con la luz de la linterna y del sol, pues se encontraron con dificultades en cuanto a la ubicación precisa de la luz para tomar las medidas requeridas, pues esta, tenía que estar ubicada en un punto de referencia que le permitía cumplir con el logro propuesto, de igual forma para medir la altura del colegio en el que se requería la luz del sol, hubo días en que no había sol y esto dificultó hacer los cálculos correspondientes en el tiempo requerido.

### **6.4 Futuras líneas de investigación**

Para finalizar, se deja abierta a futuras investigaciones el diseño e implementación de experimentos de enseñanza con el modelo de van Hiele para cada grado escolar, comenzando desde los primeros años de escolaridad para que en la secundaria se alcancen niveles superiores en conceptos de geometría.

### Referencias Bibliográficas

- Aravena Díaz, M. y Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 179-211. <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v16n2/v16n2a2.pdf>
- Ávila, M. Z. (2017). *El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático de los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello, Hogar Santa Rosa de Lima* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga] Unab. <https://repository.unab.edu.co/handle/20.500.12749/2238>
- Congreso de la República de Colombia. (1994, 8 de febrero). Ley 115. *Por la cual se expide la Ley General de Educación*. Diario oficial 41214. [https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma\\_pdf.php?i=292](https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma_pdf.php?i=292)
- Corberán Salvador, R., Gutiérrez Rodríguez, Á., Huerta Palau, M. P., Jaime Pastor, A. Margarit Garrigues, J. B., Peñas Pascual, A. y Ruiz Pérez, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/62241/00820092000188.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Bernal, P. Osorio, D. y Toloza J. (2019). *Semejanza de Triángulos*. [Tesis de Maestría, Universidad de los Andes] <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/43775/u830960.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Camargo, Leonor, & Acosta, Martín. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. Retrieved January 09, 2023, from [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es).
- Fouz, F., (2013). Modelo de van Hiele para la Didáctica de la Geometría, p.1-16. <http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf>

- Galeano, M. E. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Universidad Eafit.
- Giraldo Muñoz, L. (2021). *Comprensión de los conceptos de puntos y rectas notables de triángulos mediante el uso de la geometría del doblado de papel enmarcada en el enfoque CPA* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia].  
[https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/25943/1/GiraldoLiset\\_2021\\_Comprensi%c3%b3nPuntosRectas.pdf](https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/25943/1/GiraldoLiset_2021_Comprensi%c3%b3nPuntosRectas.pdf)
- Gualdrón, E. (2014). Descriptores específicos de los niveles de van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica*. 20 (3), 1-13  
<https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/7686/9476>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill
- Jaime Pastor, A. y Gutiérrez Rodríguez A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. p.299 -384  
<chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgclefindmkaj/https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Jurado Hurtado, F. M. y Londoño Cano R. A. (2005). “*Diseño de una Entrevista Socrática para la Construcción del Concepto de Suma de una Serie Vía Áreas de Figuras Planas*” [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia].  
<https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7103>
- Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In: L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 27 – 49). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Maraví, R. M. (2012). Algunas reflexiones acerca de la epistemología de las ciencias fácticas naturales. *Investigación educativa*, 16(30), 123-136.
- Ministerio de Educación el Salvador (2017). *Matemática en lo cotidiano: Triángulos* [Video]. YouTube.  
[https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&ab\\_channel=MINEDEElSalvador](https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&ab_channel=MINEDEElSalvador)



- 
- Ministerio de Educación Nacional, (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional, (1999). Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas. <https://es.slideshare.net/JUSTOCHAVEZVALENZUEL/250864741-nuevastecnologiasycurriculodematematicas>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales, Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. <https://redaprende.colombiaprende.edu.co/recursos/colecciones/JZPWO3YPGHZ/50A1CZOD5QS/3494>
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. p.46-95. [http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional (2009). Por el cual se modifica la estructura del Ministerio de Educación Nacional, y se determinan las funciones de sus dependencias. DECRETO 1306 DE 2009 (abril, 17) Publicado en el Diario Oficial N. 47323. [https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma\\_pdf.php?i=67148](https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma_pdf.php?i=67148)
- Ministerio de Educación Nacional (2017). Informe por colegio 2017 – Resultados – pruebas saber 2016. [https://diae.mineduacion.gov.co/dia\\_e/siempre\\_diae/documentos/2017/Institucion\\_Educativa/105001026573.pdf](https://diae.mineduacion.gov.co/dia_e/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/105001026573.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional, (2018). Programa Nacional de analfabetismo. <https://www.mineduacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Programa-Nacional-de-Alfabetizacion/Acerca-del-Programa/354537:Que-son-los-modelos-educativos-flexibles>.
- Ministerio de Educación Nacional. (2021). Informe de resultados históricos pruebas Saber.

- chrome-  
extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://diae.mineducacion.gov.co/dia\_e/documentos/105001026573.pdf
- Londoño Cano, R. A., Jaramillo López, C. M., y Esteban Duarte, P. V. (2017). Estudio Comparativo entre el Modelo De Van-Hiele y la Teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 9(2), 121-133.  
<https://revistalogos.policia.edu.co:8443/index.php/rlct/article/view/451/pdf>
- Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2006). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Comunicación presentada en Seminario Metodologías de investigación de trabajos en curso.  
<http://funes.uniandes.edu.co/1567/>
- Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2011) Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.  
<https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824>
- Morales Mejía M. L. (2016). *Aplicación de la Geometría en el Arte, una Nueva Manera de Asociar Conceptos y Medidas*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional]. Repositorio.  
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/55934/30402933.2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Ramírez Uclés, R., Flores Martínez, P y Ramírez Uclés, I., (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 29-56. <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v21n1/2007-6819-relime-21-01-29.pdf>
- Rodríguez Gómez, D. y Valderiola Roquet, J. (2002). *Metodología de la investigación*. Panamericana.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and*

- science education*, 267-306. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.researchgate.net/profile/Patrick-Thompson-2/publication/264119299\_Teaching\_experiment\_methodology\_Underlying\_principles\_and\_essential\_elements/links/574207db08ae298602ee2870/Teaching-experiment-methodology-Underlying-principles-and-essential-elements.pdf
- Torres González, R. I. y Metaute Lara J. A., (2018). *Fortalecimiento de los Criterios de Semejanza De Triángulos Mediante la Integración de las TIC para Mejorar el Componente Geométrico*. [Tesis de Maestría, Universidad del Norte] <http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7949/131388.pdf?sequence=1>
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. [CDASSG Project, University of Chicago]. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220288.pdf>
- van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. [Tesis Doctoral, Universidad Real de Utrecht]. <https://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>
- Vargas Vargas, G. & Gamboa Araya, R., (2013) El Modelo de van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94 <https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762005.pdf>
- Zapata, S. M. y Sucerquia Vega, E. A., (2009). *Módulo de Aprendizaje para la Comprensión del Concepto de Series de Términos Positivos*. [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia] <https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7068>

## ANEXOS

### Anexo A. Pretest: Prueba Diagnóstica

#### PRETEST: PRUEBA DIAGNÓSTICA

Se indaga en los saberes previos, se hace énfasis en la parte visual y se identifican características de manera informal.

#### INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

A continuación, se relacionan los descriptores que ponen de manifiesto el nivel de razonamiento en el cual se encuentran los estudiantes y guían las actividades a desarrollar sobre conceptos de semejanza de triángulos.

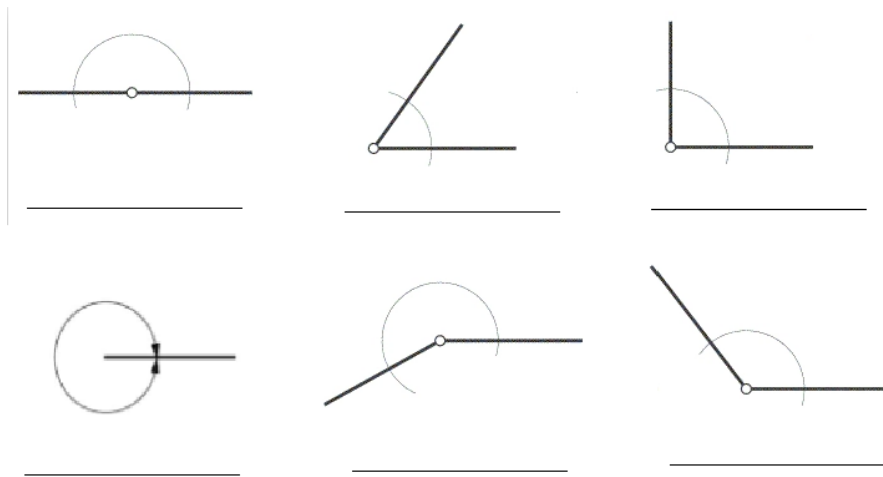
**Materiales:** hoja, lápiz, regla y transportador.

**Descriptor del nivel 2: Análisis de una figura geométrica (triángulo).**

**Descriptor 1:** Establece características de un triángulo a partir de su clasificación según sus ángulos.

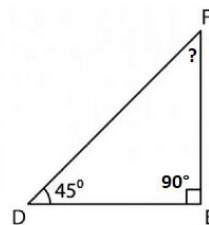
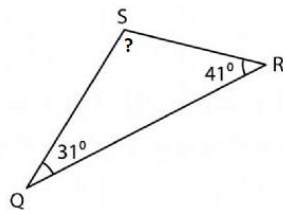
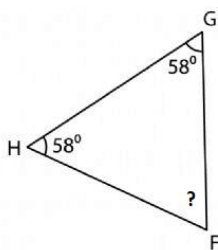
**Actividad 1:** escribe debajo de cada tipo de ángulo su nombre: agudo, obtuso, llano, recto, completo o cóncavo.

**Objetivo:** identificar las clases de ángulos según su medida



**Actividad 2:** halla la medida del ángulo interno que falta y escribe el nombre que recibe el triángulo de acuerdo con la amplitud de sus ángulos internos: triángulo obtusángulo, triángulo rectángulo o triángulo acutángulo.

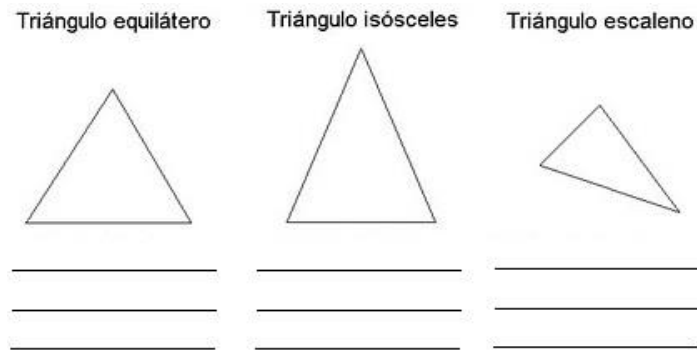
**Objetivo:** clasificar los triángulos según la medida de sus ángulos.



**Descriptor 2:** establece características y puede describir las partes de un triángulo.

**Actividad 3:** escribe debajo de cada triángulo (equilátero, isósceles y escaleno) las características que poseen.

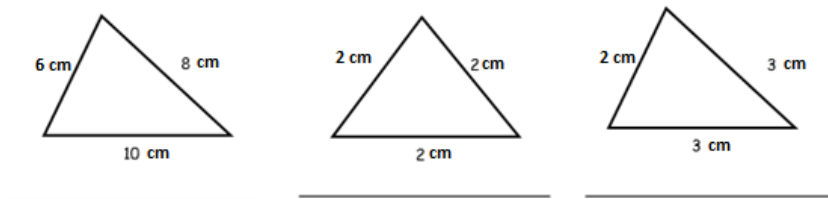
**Objetivo:** identificar las características de los triángulos.



**Descriptor 3:** establece características de un triángulo a partir de su clasificación según sus lados.

**Actividad 4:** dadas las medidas de los lados de cada triángulo coloca el nombre que recibe cada uno (triángulo isósceles, triángulo escaleno o triángulo equilátero).

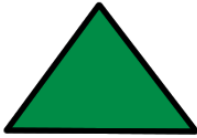
**Objetivo:** Clasificar los triángulos según la medida de sus lados.



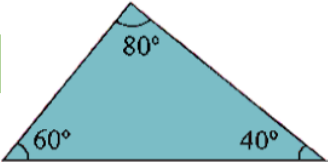
**Descriptor 4:** selecciona entre un conjunto de figuras geométricas los triángulos y menciona algunas de sus propiedades de manera informal.


**Actividad 5:** Relacione cada triángulo de la primera columna con una propiedad de la segunda columna y escribe el número 1,2,3,4,5,6 en el recuadro que le corresponda.

**Objetivo:** identificar propiedades de los triángulos.

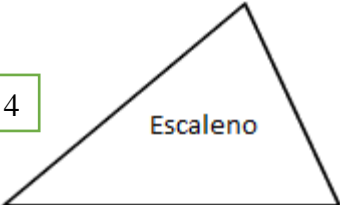
1   Tiene un ángulo recto de  $90^\circ$

Triángulo EQUILÁTERO

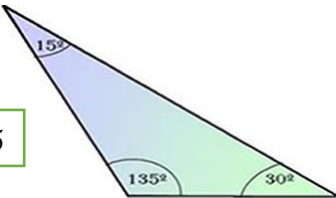
2   Dos lados iguales y uno diferente

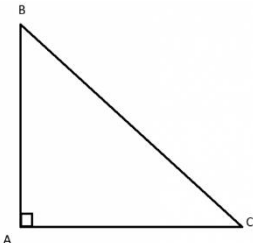
3   Tres lados iguales

Isósceles

4   Tiene un ángulo obtuso

Escaleno

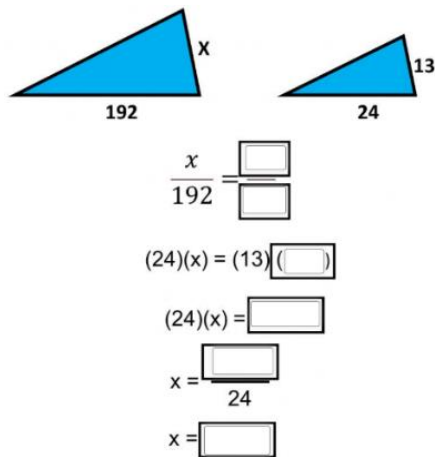
5   Tiene tres ángulos agudos

6   Tres lados diferentes

**Descriptor 7:** Utiliza cálculos matemáticos para establecer proporciones entre los lados de los triángulos.

**Actividad 6:** Halla la razón y proporción de los siguientes triángulos con los datos dados.

**Objetivo:** establecer razones entre las medidas de los lados.



**Descriptores del Nivel 3.** Clasificación de una figura geométrica (triángulo).

**Descriptor 1:** identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.

**Actividad 7:** Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F), en caso de ser falsa escribe el porqué de tu respuesta.

**Objetivo:** identificar teoremas fundamentales de los triángulos.

- a. En un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es  $90^\circ$ . ( )



b. En un triángulo la suma de las medidas de dos lados puede ser igual a la medida del otro lado. ( )

---

c. En un triángulo equilátero cada ángulo exterior mide  $120^\circ$ . ( )

---

d. Los lados de un triángulo equilátero son dos lados iguales y uno distinto. ( )

---

e. Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos agudos y otro recto. ( )

---

f. En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es de  $360^\circ$ . ( )

---

g. Un triángulo tiene tres ángulos internos obtusos. ( )

---

h. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles miden  $70^\circ$ , entonces su ángulo opuesto a la base mide  $30^\circ$  ( )

---

i. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos internos es recto. ( ).

---

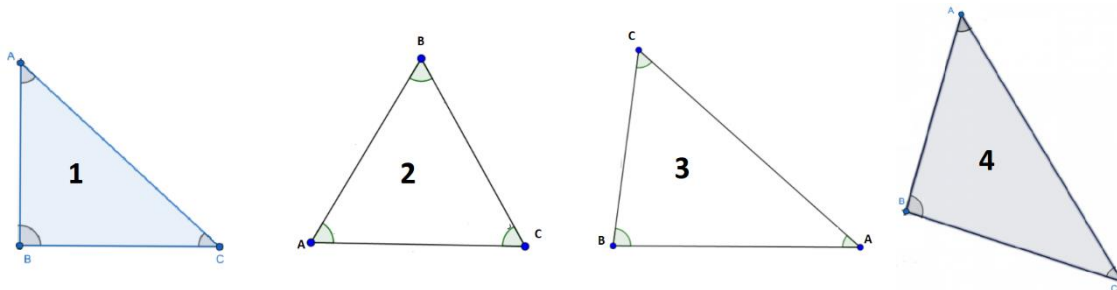
j. Si dos triángulos tienen dos de sus ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes. ( )

---

**Descriptor 2.** Clasifica lógicamente triángulos a partir de las propiedades y descubre otras propiedades de acuerdo con relaciones que conoce de manera informal.

**Actividad 8:** Encuentra las medidas de los lados y de los ángulos de cada uno de los siguientes triángulos, y señala con “x” en el cuadro inferior todas las características y propiedades que posea cada uno estos.

**Objetivo:** Comparar las relaciones que existen en los triángulos entre las medidas de sus lados y sus ángulos correspondientes.



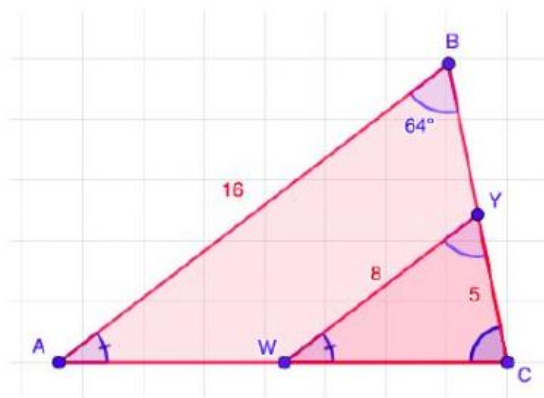
	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Descriptor 7:** Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

**Actividad 9:** Observa los siguientes triángulos semejantes y halla las medidas pedidas. Justifica tu respuesta.

**Objetivo:** establecer razones entre las medidas de uno de sus lados y uno de sus ángulos.

$$\triangle ABC \sim \triangle WYC$$



- a. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_
- b. Determine la medida del ángulo WYC: \_\_\_\_\_

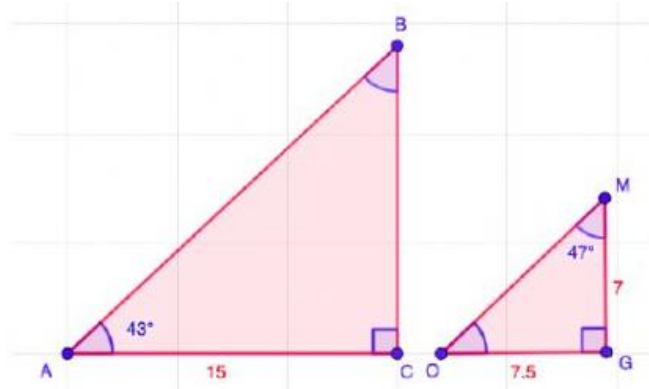
Justificación:

---

---

**Actividad 10:** De los siguientes triángulos semejantes determina la razón de semejanza y justifica tu respuesta

$$\triangle ABC \sim \triangle OMG$$



a. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_

b. Determine la medida del ángulo MOG: \_\_\_\_\_

Justificación:

---



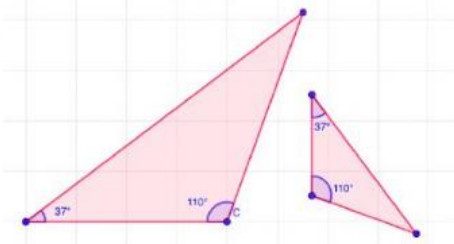
---

**Descriptor 4:** comprende los pasos de forma individual de un razonamiento, pero lo hace de manera aislada, aun no reconoce la estructura de una demostración.

**Actividad 11:** De las siguientes parejas de triángulos ¿Cuáles son semejantes entre sí?, selecciona con una x en el recuadro si son semejantes o no son semejantes y explica porque los consideras semejantes o porque no los consideras semejantes

**Objetivo:** establecer relaciones de semejanza entre triángulos

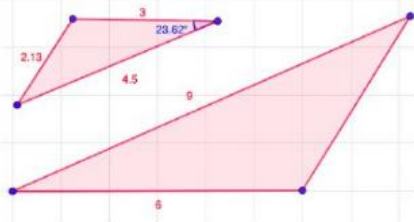
a.



¿Son semejantes?

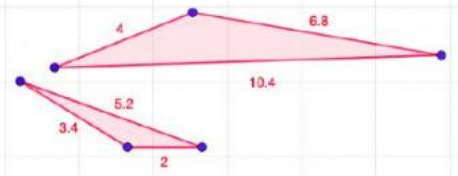
Porque:

b.



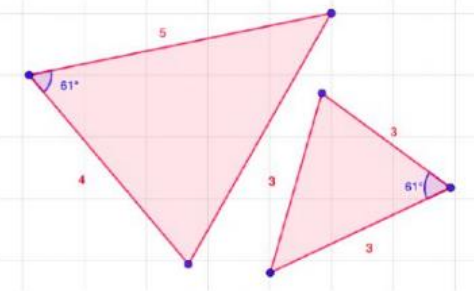
Porque:

c.



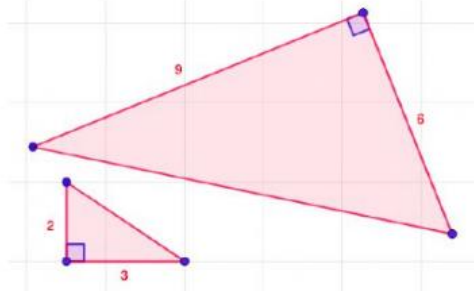
Porque:

d.



Porque:

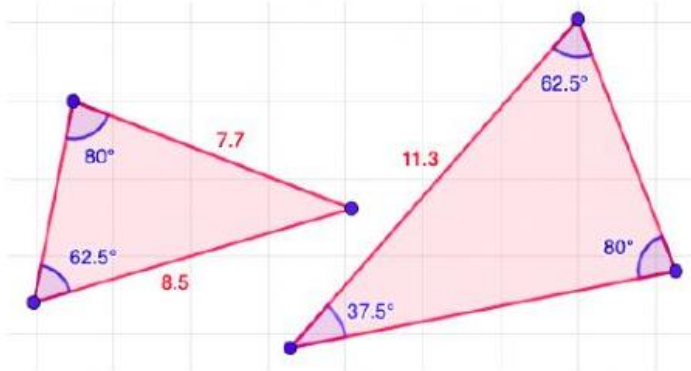
e.



Porque:

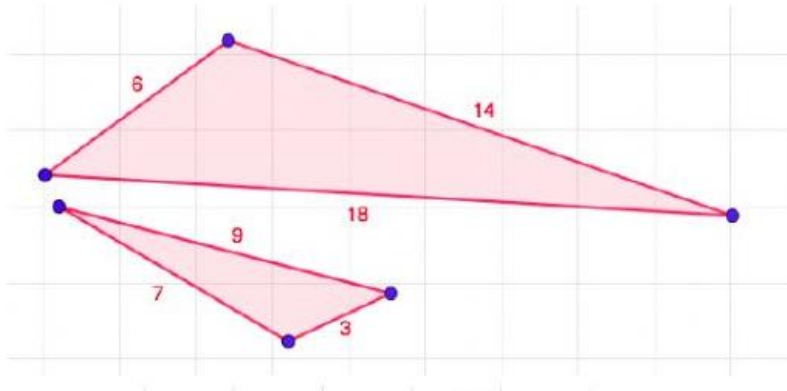
**Actividad 12:** De las siguientes parejas de triángulos semejantes. Determina que criterio LLL (lado, lado, lado), AAA (ángulo, ángulo, ángulo) o LAL (lado, ángulo, lado) asegura la semejanza de esos triángulos y escribe en el recuadro el criterio que le corresponde:

a.



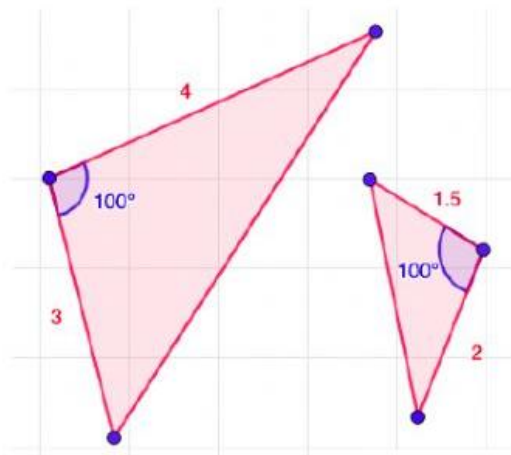
Criterio:

b.



Criterio:

c.



Criterio:

**Objetivo:** Aplicar los criterios de semejanza entre triángulos

**Actividad 13:** Selecciona la respuesta correcta para cada uno de los enunciados.

Objetivo: comprende las características necesarias para la construcción de triángulos.

- A. Se puede construir un triángulo si sus lados miden:
- a. 6cm, 2cm, 3cm
  - b. 2cm, 2cm, 2cm
  - c. 2cm, 4cm, 2cm
- B. En todo triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados debe ser
- a. Igual que el tercer lado.
  - b. Mayor que el tercer lado.
  - c. Menor que el tercer lado.
- C. Si un triángulo tiene un lado de 9cm y otro de 5cm, ¿Cuánto podrá medir el tercer lado?
- a. 6cm
  - b. 4cm
  - c. 3cm
- D. Un triángulo tiene un ángulo interno de  $80^\circ$  y otro de  $70^\circ$ . Entonces el tercero medirá:
- a.  $50^\circ$
  - b.  $90^\circ$
  - c.  $30^\circ$
- E. Un triángulo equilátero solamente puede ser
- a. Rectángulo

- b. Obtusángulo
  - c. Acutángulo
- F. ¿Cuántos triángulos isósceles que tengan un lado de 3cm y otro de 7cm puedo construir?
- a. Uno
  - b. Dos
  - c. Ninguno



## **Anexo B. Fase 1: Información. Recordemos conceptos a través de construcciones con regla y compás**

### FASE 1: INFORMACIÓN

#### RECORDEMOS CONCEPTOS A TRAVÉS DE CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

Se realizan construcciones con regla y compas para recordar conceptos, identificar características, reconocer propiedades y establecer relaciones.

#### **INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaria de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

Tiene como finalidad introducir a los estudiantes en actividades que estén relacionadas con la caracterización y clasificación de un triángulo, que será la figura fundamental para esta actividad, pues, es una figura fácil de identificar por los estudiantes; pero cuyas propiedades es necesario analizar, al finalizar se plantean preguntas para sacar conclusiones.

**Materiales:** hoja de color, lápiz, regla, transportador y compás.

**Descriptor del nivel 2:** Análisis de una figura geométrica (triángulo).

**Descriptor 5:** identifica algunas propiedades de los triángulos, sin hacer posible la relación de unas propiedades con otras.

#### **Actividad**

Esta actividad permite establecer las características que definen los triángulos. Se deben seguir instrucciones paso a paso para su respectiva construcción con regla y compás. Además, realizará al final un conversatorio con los compañeros para establecer las relaciones y

reconocer sus propiedades. Allí el investigador-docente intervendrá solo de ser necesario para recordar datos necesarios y aclarar dudas en algún planteamiento de la actividad.

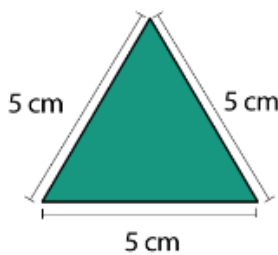
**Objetivo:** interactuar con instrumentos como la regla, el compás y el transportador, las cuales permiten a partir de la construcción de triángulos identificar, analizar y aprender los conceptos elementales de los triángulos (clasificación según la medida de sus lados y sus ángulos).

**Actividad 1:** La docente presenta un video introductorio en el cual se muestra la clasificación de triángulos según la medida de sus lados y sus ángulos, como se relacionan dichos conceptos con la vida diaria, en que los podemos encontrar y por último se dan unos tips importantes:

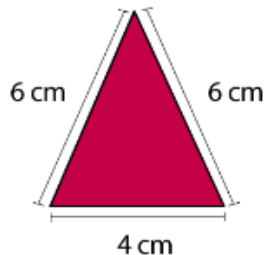
[https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&ab\\_channel=MINEDElSalvador](https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ&ab_channel=MINEDElSalvador)

Recordemos que, según la medida de sus lados los triángulos se clasifican en:

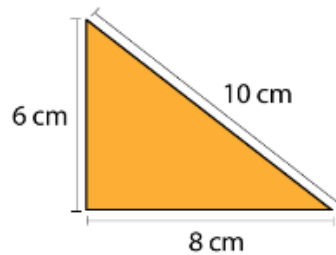
- **Triángulo equilátero:** todos sus lados tienen la misma medida.
- **Triángulo isósceles:** tiene dos lados de igual medida.
- **Triángulo escaleno:** todos sus lados tienen distintas medidas.



Triángulo equilátero



Triángulo isósceles



Triángulo escaleno

**Actividad 2:** usando los instrumentos como la regla, lápiz y compás, sigue las instrucciones y construye los triángulos pedidos.

## 1. Construcción de triángulos según la medida de sus lados:

### Triángulo equilátero

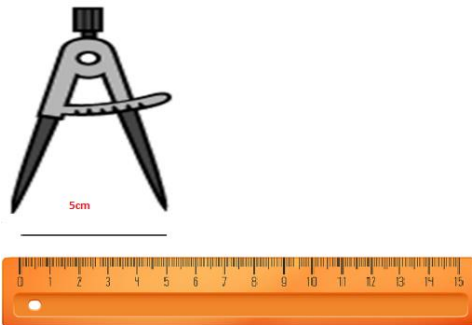
Recuerda que el triángulo equilátero es un polígono regular porque tiene sus tres lados y sus tres ángulos internos iguales.

#### 1.1. Trazo de un triángulo equilátero con regla y compás

Traza con regla un segmento base de 5 centímetros y marca sus extremos con las letras A y B, este será la base del triángulo pedido.



Abre el compás tanto como mide el segmento base AB de 5 centímetros.



Apoyando el compás con centro en A y con abertura en B, traza un arco en la parte superior del segmento base.

Apoyando el compás con centro en B y con abertura en A, traza un arco que corte al arco anterior.

Marca con la letra C el punto donde se cortan los arcos trazados. Éste será el tercer vértice del triángulo.

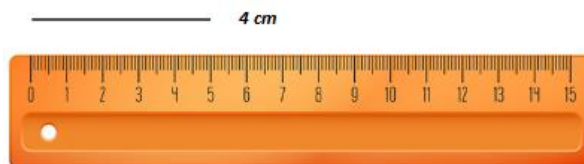
Ahora une con segmentos A con C y B con C.

### Triángulo isósceles

Recuerda que el triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales y dos ángulos correspondientes iguales.

### 1.2. Trazo de un triángulo isósceles con regla y compás

Traza con regla un segmento base de 4 centímetros y marca sus extremos con las letras A y B, este será la base del triángulo del triángulo pedido.



Apoyando el compás con centro en A y con abertura del tamaño de la segunda medida, en nuestro caso, 6 cm traza un arco en la parte superior del segmento base.

Ahora con la misma medida anterior de 6 cm, apoyando el compás con centro en B traza un arco que corte al arco anterior.

Marca con la letra C el punto donde se cortan los arcos trazados. Éste será el tercer vértice del triángulo.

Ahora une con segmentos A con C y B con C y el triángulo isósceles estará construido.

### Triángulo escaleno

Recuerda que un triángulo escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales. La suma de sus tres ángulos internos siempre es igual a  $180^\circ$ .

Puedes construir triángulos escalenos si la medida de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.

### 1.3. Trazo de un triángulo escaleno con regla y compás

Dadas las medidas de sus lados

6 cm, 8 cm y 10 cm

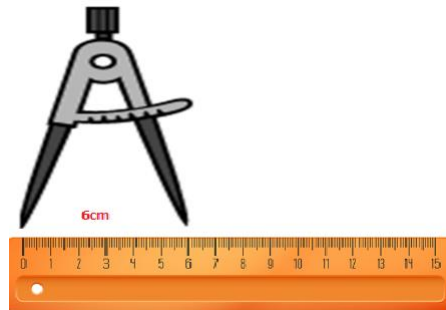
Traza con regla un segmento base de 10 centímetros y marca sus extremos con las letras A y B, este será la base del triángulo pedido la cual será la medida mayor de las tres dadas



Ahora abre el compás del tamaño de la segunda medida, en nuestro caso, 8 cm y apoyando el compás con centro en A, traza un arco en la parte superior que corte al segmento AB.



Toma tu compás nuevamente y ábrelo del tamaño de la tercera medida, la más pequeña, en nuestro caso 5 cm y apoyando el compás con centro en B, traza otro arco que corte al segmento AB y al arco trazado.



El punto donde se cortan los arcos será el tercer vértice del triángulo escaleno. Márcalo con la letra C.

Ahora une los tres puntos con segmentos A con C y B con C y el triángulo escaleno estará construido.

**Actividad 3:** después de construir triángulos anteriores, con la ayuda de la regla y transportador realiza las medidas pedidas en cada uno de los triángulos y completa siguiente cuadro:

Triángulos	Medida de los lados			Medida de los ángulos		
	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\sphericalangle BAC$	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle ACB$
Triángulo Equilátero						

Triángulo Isósceles						
Triángulo Escaleno						

**Actividad 4:** Compara los lados y los ángulos de cada uno de los triángulos y llena la siguiente tabla, donde vas a suministrar la cantidad de lados y ángulos iguales.

Triángulos	Cantidad de Lados		Cantidad de ángulos	
	Iguales	Diferentes	Iguales	Diferentes
Triángulo Equilátero				
Triángulo Isósceles				
Triángulo Escaleno				

**Descriptor 6:** Realiza transformaciones en el plano a partir de la ampliación y reducción de figuras geométricas.

**Actividad 5:** construye un triángulo equilátero que sea la mitad de la longitud de cada uno de los lados del triángulo que construiste en el punto 1.1 (Trazo de un triángulo equilátero con regla y compás), con el transportador halla la medida de los ángulos de ambos triángulos y responde las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué puedes concluir de los dos triángulos de acuerdo con la medida de sus lados?

- b. ¿Cómo son las medidas de los ángulos de ambos triángulos?

**Anexo C. Fase 2: Orientación dirigida. Implementación de las TICS con GeoGebra**

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

IMPLEMENTACIÓN DE LAS TICS CON GEOGEBRA

Se realizan construcciones mediante el uso del software online de GeoGebra, para el reconocimiento de propiedades y relaciones geométricas del teorema de Pitágoras, para aplicarlos en la justificación de semejanzas de triángulos.

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

Se hace inducción y ejercicios de aplicación para conocer los elementos básicos del programa GeoGebra.

Nombre Completo: \_\_\_\_\_

**Objetivo:** Construir polígonos regulares (triángulos) con las TICS, utilizando el software libre online de GeoGebra, el cual ofrece herramientas que favorecen el aprendizaje de la geometría, la visualización juega un papel importante, dado que este permite manipular el objeto matemático, arrastrar los objetos, cambiar su tamaño y verificar medidas, para observar si se modifican las propiedades, hacer relaciones geométricas y justificar criterios de semejanza.

**Materiales:** sala de informática, un computador por cada estudiante, hoja de actividades con instrucciones dadas y televisor para proyectar el software.

**Descriptor del nivel 3:** Clasificación de una figura geométrica (triángulo).

**Descriptor 1:** Identifica conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan los triángulos.

**Actividad 1:** se hace inducción por parte de la docente para conocer los elementos básicos del programa GeoGebra, sus iconos y para qué sirven, además, se invita a los estudiantes para que en casa exploren la herramienta con el siguiente manual:

<https://www.pinae.es/wp-content/uploads/2018/10/Iniciaci%C3%B3n-al-geogebra-5-.pdf>

**Actividad 2:** se propone en un primer momento realizar construcciones básicas de triángulos para principiantes con el siguiente enlace allí encontrará instrucciones que le permitirán explorar más a fondo la herramienta: <https://www.geogebra.org/m/ejrtuh2y#chapter/328146>

**Actividad 3:** a partir de las siguientes instrucciones construye los triángulos pedidos con la herramienta GeoGebra y al final completa el cuadro con su respectiva justificación.


Ingresa al programa GeoGebra Clásico – opción geometría:


1. Construye con GeoGebra los cuatro triángulos que se describen a continuación y determina si alguno de ellos es semejante entre sí, justifica tu respuesta:


- a. Un triángulo ABC con todos los lados de longitud 5 centímetros.

Paso 1: construir un segmento AB  con medida de longitud de 5 centímetros



Paso 2: con la opción circunferencia (centro, punto)  construir una circunferencia con centro en A y radio AB.



Paso 3: con la opción circunferencia (centro, punto)  construir una circunferencia con centro en B y radio BA.


Paso 4: Marcar con la opción punto  <sup>A</sup>, al punto de intersección donde se cortan las dos circunferencias en la parte superior al segmento AB, el punto que se denotará C.




Paso 5: Trazar los segmentos AC y BC para formar el triángulo ABC.

- b. Un triángulo DEF tal que el ángulo DEF sea igual al ángulo DFE y el lado EF= 8.



Paso 1: construir un segmento DE  con la medida del lado desigual de longitud 3 centímetros 


Paso 2: se traza la mediatriz  del segmento DE esta es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él


Paso 3: sobre la recta perpendicular se ubica un punto  en la parte superior que se denotará F.


Paso 4: Trazar los segmentos DF y FE para formar el triángulo DEF.

- c. Un triángulo GHI isósceles cuyos lados iguales miden 10 centímetros y el otro lado mide 5 centímetros.

Paso 1: construir un segmento GH  con la medida del lado desigual de longitud 5 centímetros 


Paso 2: con la opción circunferencia (centro-radio)  construir una circunferencia con centro en G y radio 10 centímetros.


Paso 3: con la opción circunferencia (centro-radio)  construir una circunferencia con centro en H y radio 10 centímetros.


Paso 4: Marcar con la opción punto , al punto de intersección donde se cortan las dos circunferencias en la parte superior al segmento GH, el punto que se denotará I.


Paso 5: Trazar los segmentos GI y HI para formar el triángulo GHI.


d. Un triángulo JKL con un lado JK = 8 centímetros equilátero y la altura de 6,93 cm

Paso 1: construir un segmento JK  con medida de longitud de 8 centímetros


 segmento de longitud dado

Paso 2: con la opción circunferencia (centro, punto)  construir una circunferencia con centro en J y radio JK.

Paso 3: con la opción circunferencia (centro, punto)  construir una circunferencia con centro en M y radio ML.

Paso 4: Marcar con la opción punto  , al punto de intersección donde se cortan las dos circunferencias en la parte superior al segmento LM, el punto que se denotará N.

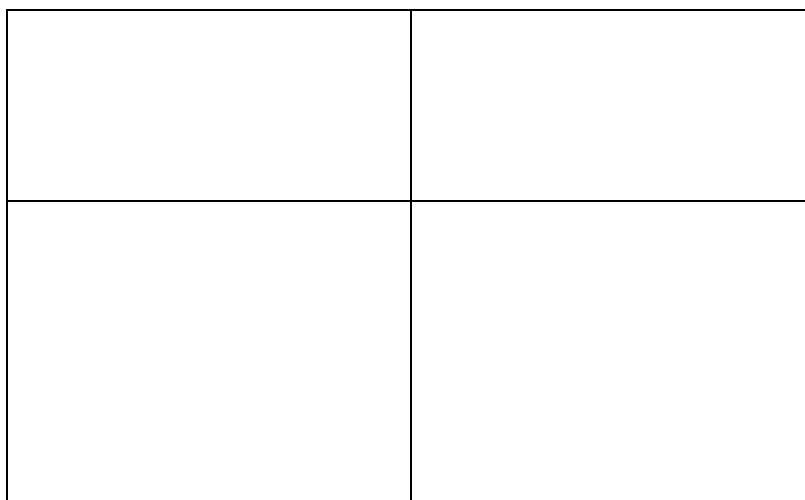
Paso 5: Trazar los segmentos AC y BC para formar el triángulo ABC.

Paso 6: se traza la mediatriz  del segmento JK esta es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a él debe medir 6,93 centímetros.

**Descriptor 6:** Identifica elementos necesarios para hacer una demostración sin llegar a comprender su estructura

**Actividad 4:** Completa el cuadro con la información de los triángulos construidos, observa e identifica cuales son semejantes y escribe por qué son semejantes en la justificación.

Triángulos Semejantes	Justificación



**Actividad 5:**

Después de realizar la actividad del primer momento responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué beneficios encuentras al construir triángulos con herramientas como GeoGebra?

---

---

2. ¿Qué tan motivado me siento al encontrar una herramienta como las TICS que me permita poner en práctica mis saberes previos sobre semejanza?

---

---

3. ¿Consideras que el uso de las TIC (ejercicios con GeoGebra) mejoran la comprensión que tienes sobre la semejanza de triángulos?

---

---

4. ¿Consideras que se debe hacer más uso de las herramientas tecnológicas en las clases de geometría para mejorar el razonamiento?

---

---

### Anexo D. Fase 3: Explicitación. Experimentemos con el teorema de Tales

#### FASE 3: EXPLICITACIÓN

#### EXPERIMENTEMOS CON EL TEOREMA DE TALES

Usando el Teorema de Tales se intercambian experiencias sobre situaciones de la vida diaria en las que se pudiese utilizar este teorema, comentan en grupo los elementos geométricos encontrados y sus propiedades.

#### INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

Esta actividad pretende mostrar como el método que utilizó Tales de Mileto tiene una gran utilidad para medir distancias y longitudes que están fuera de nuestro alcance en los elementos del entorno. Para ello, se analizará en grupo un video de la historia del teorema, se plantean preguntas relacionadas con el tema y se establecen definiciones de semejanza de triángulos

**Objetivo:** establecer relaciones entre conceptos, teoremas y procedimientos geométricos asociados a objetos geométricos a partir de la enseñanza, exploración y experimentación.

**Materiales:** lápiz, borrador, regla, compás, cartulina plana, tijeras, palillos de diferentes medidas en centímetros y linterna.

**Descriptor del nivel 3:**

**Descriptor 4:** comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.

Fase 1: información. Para esta fase se realiza una introducción al tema del teorema de tales por parte de la docente, se les da información de lo que deben realizar durante el experimento, se explica que problemas deben resolver a partir de actividades propuestas y como se utilizarán los materiales, además se hace énfasis en la importancia de la observación en estas actividades a realizar.

Actividad 1: observar la siguiente imagen y responde la pregunta.



Nota: la figura muestra la Gran pirámide de Guiza (también conocida como la pirámide de Keops o de Jufu) la más antigua de las 7 maravillas del mundo antiguo. Fuente: Wikipedia.

La enciclopedia libre (2005)

Si te pidieran saber cuál es la altura de la pirámide de Keops ¿Que método usarías?

---

**Actividad 2: Observa con atención el video que explica la historia del Teorema de Tales y da ejemplos: <https://www.youtube.com/watch?v=6nYnXeqrhKQ>**

Actividad 3: escribe que elementos geométricos se ven en la siguiente imagen:

---

---

¿Qué características en común comparten los dos polígonos que se formaron?

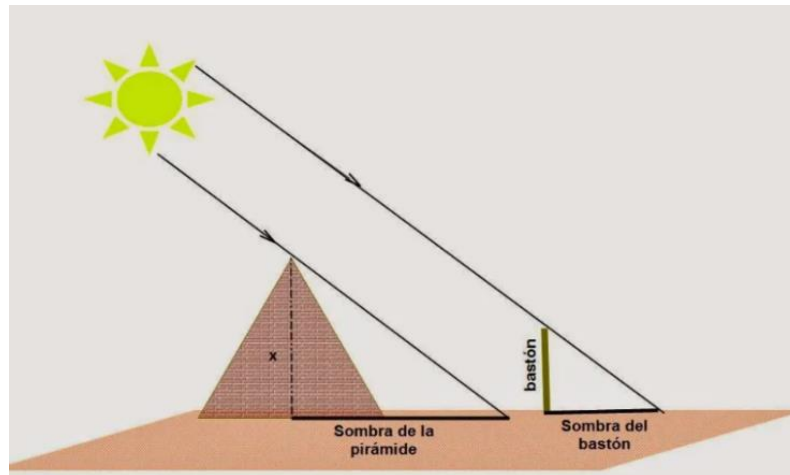


Imagen tomada de: <https://maticascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/>

Fase 2: orientación dirigida. Sigue las instrucciones presentadas en el video paso a paso, para la construcción de una pirámide de base cuadrada.

Actividad 4: Utilizando lápiz, cartulina plana, regla y compás y colbón, construye una pirámide cuadrangular.

Ver video para construir paso a paso la pirámide:

<https://www.youtube.com/watch?v=DgZLDZPMj7Y>

### Descriptor del nivel 3:

**Descriptor 7:** Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

Fase 3: con la imagen anterior, la pirámide construida, la linterna, la regla y el palillo, trata de simular mediante este material concreto el teorema de Tales.

**Actividad 5:** Con las actividades previas realiza el siguiente experimento en equipo para hallar la altura de la pirámide que construiste.

7. Ubica una regla en la parte superior de una mesa, encima de ella ubica la pirámide de tal forma que el extremo de la regla quede debajo del centro de la pirámide y en frente de la pirámide el palillo entregado por la docente tal y como se ve en la imagen.
8. Con la ayuda de una linterna ubica la luz sobre la pirámide tratando de simular la luz del sol como en la imagen anterior trata de que la luz pase por la punta de la pirámide y la punta del palillo para que estos proyecten la sombra deseada.
9. Luego halla las siguientes medidas:
  - Longitud de la sombra de la pirámide: \_\_\_\_\_
  - Longitud de la sombra del palillo: \_\_\_\_\_
  - Altura del palillo: \_\_\_\_\_

**Actividad 7:** con los videos observados, la explicación de la docente y la actividad realizada con los datos obtenidos del experimento. Responde la siguiente pregunta:

d. ¿Cuál es la altura promedio de la pirámide que construiste?

---

---

---

e. ¿Crees que tiene alguna utilidad en la vida diaria este experimento?

---

---

---

- 
- f. ¿Qué relación de semejanza encuentras entre las medidas que hallaste con los elementos que experimentaste?

---

---

---

**Actividad 8:** para finalizar y hacer un repaso de los conceptos abordados en la fase 3 y fortalecer los conceptos abordados del experimento realizado, con la herramienta GeoGebra debes ingresar a la página <https://www.geogebra.org/m/ddssegxq> para explorar el teorema de Tales y recrear de manera visual el experimento realizado.



**Anexo E. Fase 4: Orientación libre. Resolución de problemas en contexto**

FASE 4: ORIENTACION LIBRE  
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN CONTEXTO

Los conocimientos y razonamientos de las anteriores fases se ponen en práctica en esta fase en busca de la solución a las actividades propuestas, de manera autónoma y libre,

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaria de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

**Descriptor 9:** establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Angulo, Lado).

**Actividad 1:** Los dos árboles proyectan sobre el suelo sus sombras que respectivamente miden 6 m y 24 m, si la altura del árbol más grande es de 20 metros.

c. ¿Cuál es la altura del árbol más pequeño?

\_\_\_\_\_

d. ¿Puedes establecer relaciones de semejanza entre los dos árboles justifica tu respuesta?

Justificación:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Descriptor 8:** Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

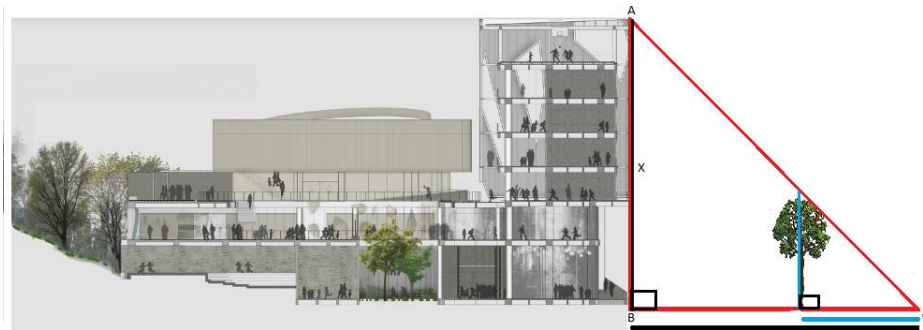
**Actividad 2:** Utiliza diversos recursos que te ayuden para definir la altura de un lugar de difícil acceso.

- b. ¿Te atreverías a imitar a Tales y serías capaz de calcular la altura del edificio de tu institución educativa?

---

---

- c. ¿Calcula la altura del edificio de tu institución educativa y justifica tu método?



*Nota.* La figura muestra Colegio Lusitania Paz de Colombia/Camilo Avallaneda en el año 2015.

Justificación:

---

---

---

---

## Anexo F. Fase 5: Integración. Postest

### FASE 5: INTEGRACIÓN

#### POSTEST

Esta prueba integra las demás fases, e indaga por el razonamiento de los estudiantes con referencia a los conceptos de semejanza de triángulos. Los estudiantes logran construir conceptos relacionados con la semejanza de triángulos y se integran nuevos conocimientos, establecen definiciones haciendo uso de la visualización y el lenguaje matemático, justifican a partir de los conceptos adquiridos y utilizan la representación de símbolos de la geometría para establecer relaciones entre propiedades.

### INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA

Institución Oficial Aprobado por la Secretaría de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0



**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

A continuación, se relacionan algunos ítems y descriptores que están en correspondencia con el nivel 3 y que hicieron parte del pretest, estos ponen de manifiesto el nivel de razonamiento adquirido para esta fase de integración y la adquisición de nuevos saberes relacionados con la semejanza de triángulos.

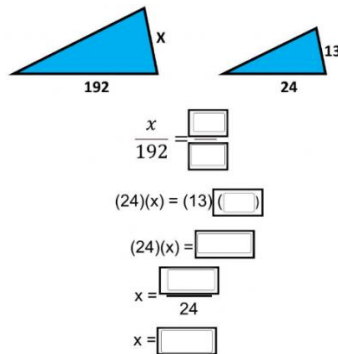
**Materiales:** hoja, lápiz, regla y transportador.

**Descriptores del Nivel 3.** Clasificación de una figura geométrica (triángulo).

**Descriptor 3:** Establece la razón de la proporción entre los lados de los triángulos.

**Actividad 8:** Halla la razón y proporción de los siguientes triángulos con los datos dados.

**Objetivo:** establecer razones entre las medidas de los lados.

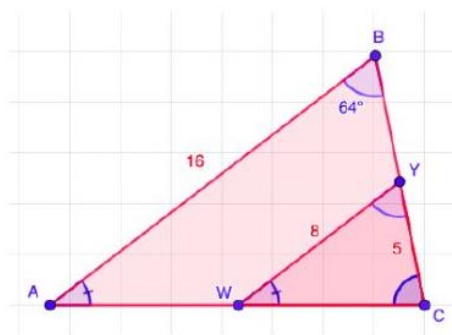


**Descriptor 7:** Comprende que dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

**Actividad 9:** Observa los siguientes triángulos semejantes y halla las medidas pedidas. Justifica tu respuesta.

**Objetivo:** establecer razones entre las medidas de uno de sus lados y uno de sus ángulos.

$$\triangle ABC \sim \triangle WYC$$



c. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_

d. Determine la medida del ángulo WYC: \_\_\_\_\_

Justificación:

---

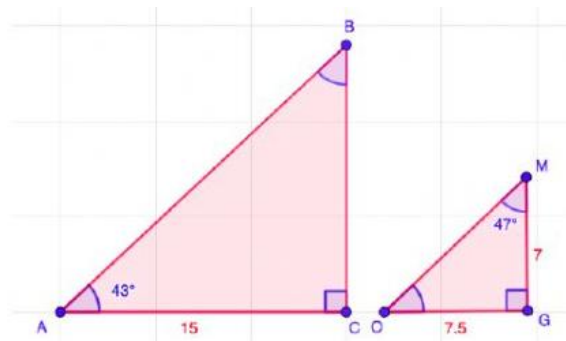


---

**Descriptor 4:** Comprende el significado de las definiciones de semejanza de triángulos y las puede modificar.

**Actividad 10:** De los siguientes triángulos semejantes determina la razón de semejanza y justifica tu respuesta

$$\triangle ABC \sim \triangle OMG$$



c. Determine la medida del segmento BC: \_\_\_\_\_

d. Determine la medida del ángulo MOG: \_\_\_\_\_

Justificación:

---



---

**Actividad 11:** Selecciona la respuesta correcta para cada uno de los enunciados.

Objetivo: comprende las características necesarias para la construcción de triángulos.

1. Se puede construir un triángulo si sus lados miden:
  - a. 6cm, 2cm, 3cm
  - b. 2cm, 2cm, 2cm
  - c. 2cm, 4cm, 2cm
  
2. En todo triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados debe ser
  - a. Igual que el tercer lado.
  - b. Mayor que el tercer lado.
  - c. Menor que el tercer lado.
  
3. Si un triángulo tiene un lado de 9cm y otro de 5cm, ¿Cuánto podrá medir el tercer lado?
  - a. 6cm
  - b. 4cm
  - c. 3cm
  
4. Un triángulo tiene un ángulo interno de  $80^\circ$  y otro de  $70^\circ$ . Entonces el tercero medirá:
  - a.  $50^\circ$
  - b.  $90^\circ$
  - c.  $30^\circ$
  
5. Un triángulo equilátero solamente puede ser
  - a. Rectángulo
  - b. Obtusángulo
  - c. Acutángulo

6. ¿Cuántos triángulos isósceles que tengan un lado de 3cm y otro de 7cm puedo construir?
- a. Uno
  - b. Dos
  - c. Ninguno

**Descriptor 8:** Deduce que un triángulo es semejante a otro si sus lados tienen igual medida (Criterio Lado, Lado, Lado).

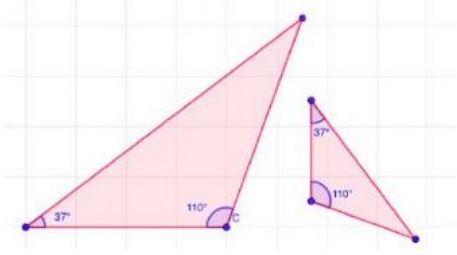
**Descriptor 9:** Establece relaciones de proporcionalidad de los lados entre dos triángulos y un ángulo igual comprendido entre ellos. (Criterio Lado, Angulo, Lado).

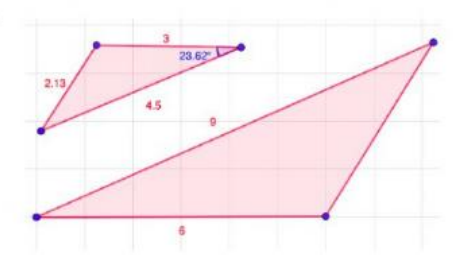
**Descriptor 10:** Infiere que dos triángulos son semejantes a partir de la medición e igualdad entre sus ángulos internos (Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo).

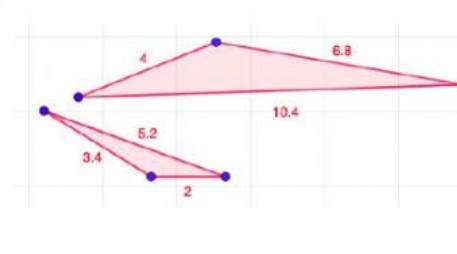
**Actividad 12:** De las siguientes parejas de triángulos ¿Cuáles son semejantes entre sí?, selecciona con una x en el recuadro si son semejantes o no son semejantes y explica porque los consideras semejantes o porque no los consideras semejantes

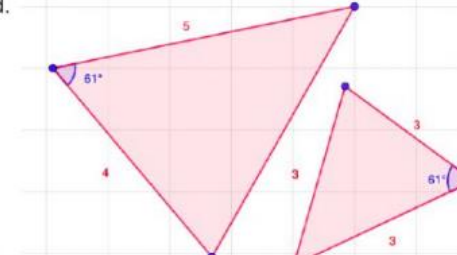
**Objetivo:** establecer relaciones de semejanza entre triángulos

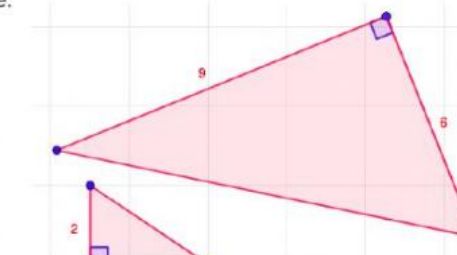
¿Son semejantes?

a.    **Porque:**

b.    **Porque:**

c.    **Porque:**

d.    **Porque:**

e.    **Porque:**



**Actividad 13:** De las siguientes parejas de triángulos semejantes. Determina que criterio LLL (lado, lado, lado), AAA (ángulo, ángulo, ángulo) o LAL (lado, ángulo, lado) asegura la semejanza de esos triángulos y escribe en el recuadro el criterio que le corresponde:

**Objetivo:** Aplicar los criterios de semejanza entre triángulos

a.

Criterio:

b.

Criterio:

c.

Criterio:

**Anexo G**

**FASE 5: INTEGRACIÓN**  
**ACTIVIDAD DE INDAGACIÓN Y CIERRE**

Se realiza la siguiente entrevista a los estudiantes al finalizar los encuentros, para conocer la opinión sobre el proyecto y como el proceso ha permitido promover el razonamiento geométrico en los niveles del modelo de van Hiele para la comprensión de conceptos enmarcados en la semejanza de triángulos.

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUSITANIA PAZ DE COLOMBIA**

Institución Oficial Aprobado por la Secretaria de Educación del Municipio de Medellín  
según Resolución 011160 del 7 de Septiembre de 2015  
DANE: 105001026573 - NIT: 900932971-0

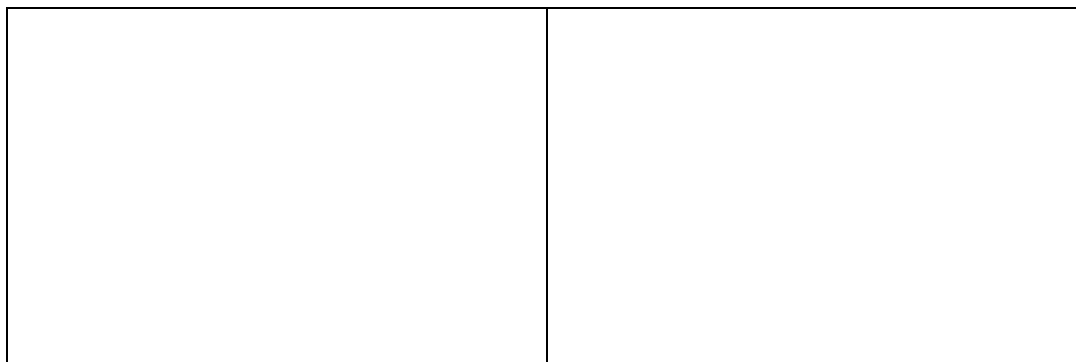


**Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

Actividad 1: Completa el siguiente cuadro comparativo con una lista de términos geométricos. En la primera columna ubicas como nombrabas o denotabas, elementos, características o definiciones de geometría sobre triángulos antes de iniciar el proyecto de investigación y en la segunda columna como los nombras o denotas al finalizar esta última sesión.

**Cuadro Comparativo**

<b>Término que utilizaba antes</b>	<b>Término que utilizo ahora</b>



Actividad 2: responde las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué perspectivas hasta ahora tienes con respecto a tu lenguaje en geometría?

---

---

- b. ¿Crees que el lenguaje matemático es necesario para mejorar los procesos académicos?

---

---

- c. ¿Crees que ha mejorado tu lenguaje matemático?

---

---

- d. ¿Cuál fue tu perspectiva al iniciar el proyecto de matemáticas?

---

---

- e. ¿Qué dificultades te has encontrado al momento de realizar las actividades propuestas del proyecto?

---

---

- f. ¿Qué beneficios has encontrado al haber participado de este proyecto?

---

---

g. ¿Puedes describir con tus palabras cada criterio de semejanza?

---

---

---

h. ¿Qué aplicabilidad para la vida le encuentras a estos criterios de semejanza?

---

---

i. ¿Consideras que has tenido avances al momento de analizar e interpretar un problema planteado?

---

---

j. ¿Cuál es tu perspectiva al finalizar este proyecto de matemáticas?  
(sugerencias, agradecimientos, entre otros)

---

---