



DIDÁCTICA DE LAS
MATEMÁTICAS

X CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

20, 21 y 22 de febrero de 2020

ACTAS CIEM 2020

CONFERENCIAS

TALLERES

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS

X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

20, 21 y 22 de febrero de 2020

ACTAS *CIEM 2020*

Conferencias

Talleres

Reportes de Investigación

Socialización de Experiencias

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN
SOBRE LA ENSEÑANZA DE
LAS MATEMÁTICAS**



PUCP

X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

Actas

CIEM 2020

Editores: Cecilia Gaita Iparraguirre, Jesús Flores Salazar, Francisco Ugarte Guerra

Diseño de carátula: Fondo Editorial PUCP

Diagramación de interiores: Cecilia Gaita Iparraguirre

© Pontificia Universidad Católica del Perú – 2020

Avenida Universitaria 1801, Lima 32

626 2000-anexo 4197

E-mail: irem@pucp.edu.pe

Dirección URL: <http://www.irem.pucp.edu.pe>

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: 978-612-4320-38-5

Primera edición digital: julio de 2020

Producido en el Perú – Produced in Perú

Presentación

La historia de los CIEMs se remonta 20 años atrás, entonces cuando empezó como un coloquio y desde entonces ha venido creciendo hasta convertirse en el congreso sobre enseñanza de las matemáticas más importante del Perú, prueba de ello es el interés que ha despertado en las regiones de nuestro país: así en el año 2016 el Congreso se realizó en el campus de la Universidad Nacional de Piura y, en el 2018, en la Universidad Nacional de Huancavelica, a más de 4000 msnm, el IX CIEM congregó a más de 400 personas, entre profesores e investigadores de todo el Perú y del extranjero. Hoy la Universidad Nacional del Centro del Perú, la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, la Universidad Nacional de Tumbes y la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco han manifestado su interés por ser las sedes de los siguientes CIEMs.

Para nosotros el décimo CIEM, significa además celebrar los 20 años del IREM-PUCP aunque como toda institución, nuestro instituto tiene una historia y una memoria que va más allá de su creación: debo recordar con gratitud al Dr. José Tola Pasquel, ilustre matemático e ingeniero peruano, exrector de la PUCP entre 1967 y 1989, fundador del Instituto para la promoción de la enseñanza de las matemáticas IPEN, que funcionó entre 1961 y 1968. EL IPEN fue creado con la finalidad de realizar cursos de perfeccionamiento para profesores de matemáticas de los diferentes niveles, difundir los nuevos conceptos e ideas relacionadas con la enseñanza de la matemática; auspiciar la publicación de libros de texto y colaborar con los organismos y autoridades nacionales en sus esfuerzos para promover el estudio y la enseñanza de las matemáticas. El profesor Tola Pasquel fundó además la Sociedad Matemática Peruana y el Instituto de Matemáticas (IMUNI) que funcionó entre 1960 y 1968. Luego, en 1980, siendo Rector de la PUCP, auspició la creación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Años más tarde, en 1997, el profesor César Carranza y César Camacho, discípulos de Tola Pasquel e infatigables promotores de las matemáticas en el Perú, fundaron el Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA) de la UNI: esto significó el renacimiento del IMUNI luego de 30 años. En el año 2000, el profesor Uldarico Malaspina, impulsó la creación del IREM-PUCP, lo que significó el resurgimiento del IPEN luego de 30 años.

He querido recordar de forma sucinta la historia del IREM-PUCP pues entiendo que es la manera en que puede y debe comprender una institución, pues en ella puede vislumbrarse su razón de ser, su necesidad y su misión.

Desde esa perspectiva el IREM-PUCP es una comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, estrechamente vinculados con la comunidad matemática, cuya finalidad académica es la realización de investigación al más alto nivel y, al mismo tiempo esta investigación es solo un medio para alcanzar un fin aún más alto: mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú.

Así, el CIEM debe ser entendido como un espacio de encuentro y de reflexión, que nos enriquezca a todos, profesores e investigadores, con la mirada puesta en construir un Perú con centros de investigación en matemáticas y didáctica de las matemáticas, en distintas regiones del país, que contribuyan coordinadamente con la formación continua de las siguientes generaciones de investigadores y profesores de matemáticas de todos los niveles educativos, y que de igual manera ayuden a establecer la vinculación de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas con otras ramas del saber.

El X CIEM desarrolló las siguientes áreas temáticas:

- Currículo, competencias y evaluación
- Historia y epistemología de la matemática y de la Educación Matemática
- Recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Resolución y creación de problemas
- Modelización en Educación Matemática
- Matemáticas y su integración con otras áreas.

El presente libro contiene los artículos de las propuestas aceptadas y presentadas durante el congreso:

- 12 conferencias,
- 19 talleres,
- 53 reportes de investigación
- 13 socializaciones de experiencias

Mi agradecimiento al comité organizador, liderado por Cecilia Gaita y al Comité Científico coordinado por Jesús Flores y, por supuesto a todos aquellos que hicieron posible con sus participación este congreso.

Francisco Ugarte Guerra
Director del IREM-PUCP

Convocan

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

Auspician:

IREM-PUCP

Red Peruana de Universidades

Comité Científico

Dra. Jesús Flores Salazar (IREM-PUCP, Perú)

Dr. Alain Kuzniak (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Avenilde Romo Vásquez (Instituto Politécnico Nacional-IPN, México)

Dr. Cerapio Quintanilla Córdor (Universidad Nacional de Huancavelica-UNH, Perú)

Dra. Cileda De Queiroz e Silva Coutinho (PUC Sao Paulo, Brasil)

Mag. Daysi Julissa García Cuéllar

Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile)

Dr. Fumikazu Saito (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Laurent Vivier (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Maria Jose Ferreira da Silva (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dra. Norma Rubio Goycochea (PUCP-Perú)

Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Uldarico Malaspina Jurado (IREM-PUCP, Perú)

Comité Organizador

Dr. Francisco Ugarte Guerra (IREM-PUCP)

Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre (IREM-PUCP)

Dra. Nancy Saravia Molina (IREM-PUCP)

Mag. Cintya Gonzáles (IREM-PUCP)

Mag. Flor Carrillo Lara (IREM-PUCP)

Mag. Iris Flores Quesquén (IREM-PUCP)

Índice General

CONFERENCIAS PLENARIAS

- 1 Instrumentación Corporeizada: combinando diferentes puntos de vista sobre el uso de la Tecnología Digital en la Educación Matemática.
Paul Drijvers. 19
- 2 Razonar con la Covariación. Un estudio sobre las Estrategias en un Curso de Formación de Futuros Profesores de Matemática.
Jhony Alexander Villa-Ochoa. 44
- 3 El Papel de los Problemas de Modelación en la Enseñanza Secundaria.
María Trigueros Gaisman. 56
- 4 El 'Networking' de Teorías en Educación Matemática: ¿Qué significa y Qué produce?
Michèle Artigue. 72

CONFERENCIAS PARALELAS

- 1 Indagar, crear y resolver Problemas de Matemáticas
Uldarico Malaspina Jurado. 82
- 2 Geometría y Ecuaciones Cuadráticas de una Incógnita: Análisis de una Construcción
Maria José Ferreira da Silva. 91
- 3 Praxeologias requeridas por la Profesion Docente
Michèle Artaud. 102
- 4 Contribuição Da Didática da Matemática Na Forma Continuada de Professores que Ensinam Matemática
Saddo Ag Almouloud. 103
- 5 Curiosidades Criativas Na História Do Conceito de Função: Contribuições para o Ensino
Iran Abreu Mendes. 116

6	Cambios en el Espacio de Trabajo Matemático de Profesores del Liceo en el Dominio del Análisis y sus Implicancias con la Modelización <i>Elizabeth Montoya Delgadillo.</i>	124
7	Formación Docente: el caso de la proporcionalidad <i>Jean-Pierre Bourgade.</i>	132
8	Estadística, Criticidad y Registro de Representaciones Semióticas <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.</i>	142

TALLERES

1	¿Cómo construir el concepto de Fracción a partir de sus significados? <i>Olimpia Castro, Sahara Doria, Rosa Lafosse, Percy Merino.</i>	151
2	O Cubo Estatístico: Material para Trabalhar Variáveis Estatísticas <i>Irene Mauricio Cazorla, Cláudio Vitor antana.</i>	158
3	Problemas de Matemática Recreativa: Resolución con TAC <i>Daniel Moreno Caicedo, Juddy Amparo Valderrama Moreno.</i>	168
4	Aprendizaje Activo y Visualización: Representación de un Objeto Tridimensional (3d) en el Plano Bidimensional (2d), a partir de sus Proyecciones Ortogonales o Vistas Principales <i>Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay.</i>	176
5	Patrón, Sucesión y Secuencia. <i>Elvis Bustamante Ramos, Francisco Ugarte Guerra, Magaly Ethel Campos.</i>	182
6	Propuesta de Tareas y Recursos para la Enseñanza de la Geometría <i>Isabel Torres Céspedes, Marisel Beteta Salas, José Carlos León Ríos.</i>	188
7	Recursos Tecnológicos-Matemáticos para formar Docentes Digitales <i>Zenón Eulogio Morales Martínez.</i>	196
8	Construindo o Pensamento Probabilístico: O Jogo Do Franc-Carreau <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueired.</i>	206
9	Visualización de Sólidos por Secciones Transversales usando Geogebra <i>Nancy Saravia Molina, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	213
10	Uso de Scripts para Crear Actividades Autoevaluables en Geogebra <i>Marco Gutiérrez Montenegro.</i>	218

11	La Formulación de Problemas: Herramienta utilizada en el aula para el desarrollo de Habilidades Matemáticas a lo largo de la Escolaridad <i>Percy Merino, Olimpia Castro, Carlos Torres, Sahara Doria.</i>	224
12	Criação de Aplicativos Na Perspectiva Da Matemática Inclusiva <i>Elton de Andrade Viana, Maximiliani Albano Hermelino Ferreira, Ana Maria Antunes de Campos, Ana Lucia Manrique.</i>	224
13	Educación Financiera en la Escuela Primaria <i>Celso Ribeiro Campos, Andréa Pavan Perin.</i>	240
14	Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría <i>Victor Barrial Sandoval.</i>	249
15	Visualización de Cuadriláteros: Mediación del Software Geogebra <i>Cecilia Gómez Mendoza, Flor Isabel Carrillo Lara, Rocío Figueroa Vera, Gustavo Rodríguez T.</i>	260
16	Creación de Problemas sobre Composición de Funciones usando Applets <i>Elton Barrantes, Maritza Luna, Marco Solorzano.</i>	269
17	Resolución de Problemas Aritméticos <i>Ángel Homero Flores Samaniego, Isabel Torres Céspedes.</i>	278
18	Conocimientos Didáctico-Matemático del Profesor de Secundaria sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales <i>Carlos Omar Cárdenas Estrella, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	284
19	Una reflexión sobre el uso de la Geometría Dinámica en el Contexto Escolar <i>Guadalupe Morales Ramírez, Norma Rubio Goycochea.</i>	294

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

- 1 La Creación de Problemas en Gestión de Datos y la Formación de Profesores de Secundaria
Augusta Osorio Gonzales, Sara Mónica Sáenz Chaparro, Yolanda Gladys Alhuay Albites, Norma Lidia Olivares Acuña. 302
- 2 Ensino de Matemática a Alunos com Altas Habilidades/Superdotação por Meio da Construção de Cenários Animados no Geogebra
Adrielei Cristine Bueno, Maria Ivete Basniak. 312
- 3 Una investigación con enfoque en las relaciones entre los trastornos y la ansiedad matemática
Ana Maria Antunes de Campos, Elton de Andrade Viana, Ana Lúcia Manrique. 322
- 4 Teorías de maestros sobre evaluación, en el área de matemática
Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Luis Manuel Casas García. 331
- 5 La Creación de Problemas en la Formación de Profesores
Carina Saire Huamani. 340
- 6 Una estrategia de Invención de Problemas para estimular el Desarrollo de la Competencia de Análisis Didáctico en Profesores de Matemática
Carlos Torres, Uldarico Malaspina. 340
- 7 Errores que cometen los estudiantes de tercer año de Secundaria en la Resolución de Inecuaciones Lineales con una Variable
Rolando Ruiz Carbajal. 358
- 8 Relación entre las Cónicas y Diseño Arquitectónico
Sumaya Jaimes Reátegui, Rosa Kohama Aréstegui, Darcy E. Aréstegui de Kohama. 381
- 9 Formas e Equações: Uma Introdução Ao Estudo Das Seções Cônicas Com O Geogebra
André Lúcio Grande, Benedito Antonio da Silva. 393
- 10 Formación de Profesores de Matemática. Una Revisión de Literatura Científica de los últimos 10 años
Flor Isabel Carrillo Lara. 403
- 11 Espacio de Trabajo Matemático Personal: Interpretación Geométrica de la Derivada de una Función Real de Variable Real
Lisseth Chacón Cama, Jesús Victoria Flores Salazar. 415

12	Objeto Virtual de Aprendizaje: Una Estrategia para Desarrollar Pensamiento Algebraico <i>Juddy Amparo Valderrama Moreno, Solange Roa Fuentes.</i>	421
13	Emociones de Profesores de Matemáticas en Formación <i>María S. García González, Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani.</i>	429
14	La Enseñanza de Sumas con Números Naturales en la Escuela Primaria Multi - Grado <i>Lorena Trejo Guerrero.</i>	439
15	Análise de Livro Didático: Uma Olhar para o Ensino da Linguagem Gráfica <i>Sidney Silva Santos, Geovane Carlos Barbosa, Nathalia Tornisiello Scarlassari, Celi Espasandin Lopes.</i>	447
16	Un Análisis Normativo Ontosemiótico de los Textos Matemáticos Escolares bajo el Enfoque de Género <i>Anderson D. Chavez Marcelo.</i>	455
17	Álgebra nos Anos Iniciais e Finais Do Ensino Fundamental: Análise Das Expectativas Institucionais <i>Anderson Alves, Marlene Alves Días, Karina de Oliveira Castro, Mariana Silva Nogueira Ribeiro.</i>	464
18	Análisis de las Dificultades que presentan los Estudiantes Universitarios en Matemática Básica <i>Roger Ivan Soto Quiroz.</i>	473
19	Errores y Dificultades Relativos al Concepto de Solución de Ecuaciones Lineales <i>Aldrin Peña Lizano, Francisco Ugarte Guerra.</i>	484
20	Dificultades en el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería <i>Alejandro M. Ecos Espino, Joffré Huamán Núñez, Zoraida R. Manrique Chávez.</i>	490
21	Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de ingeniería <i>Violeta Lupita Bejarano Vílchez, Verónica Neira Fernández.</i>	500
22	El Concepto de Infinito y el Modelo de Van Hiele <i>Alba Soraida Gutiérrez Sierra, Rene Alejandro Londoño Cano.</i>	509

23	El Dinamismo de Geogebra para explorar Aspectos Básicos de la Teoría del Caos <i>Viviana Angélica Costa.</i>	519
24	Herramientas matemáticas para la práctica experimental en el área de física <i>Johel Aldo Tarazona Guillen.</i>	529
25	O Professor Em Uma Aula Assente No Ensino Exploratório de Matemática <i>Vania Sara Doneda de Oliveira, Dalva Spiler Brandelero, Maria Ivete Basniak.</i>	537
26	Instrumentación del Artefacto Simbólico Función Cuadrática <i>Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály André Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar.</i>	546
27	Enfoque Frequentista de Probabilidades - Um Estudo À Luz Da Teoria Dos Registros de Representação Semiótica <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueiredo.</i>	555
28	Formación Docente en Gestión de Datos <i>Augusta Osorio Gonzales, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	563
29	Concepções sobre Estatística Mobilizadas por Alunos E Professores Do Ensino Médio: Um Estudo de Caso <i>Cassio Cristiano Giordano.</i>	569
30	O Ensino Para O Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico Nos Anos Iniciais Face Às Atitudes Em Relação À Matemática E Às Crenças De Autoeficácia De Professores In-Service E Pre-Service <i>Roseli Regina Fernandes Santana, Nelson Antonio Pirola.</i>	579
31	Programa Institucional De Bolsas De Iniciação À Docência, Pibid: O Que Dizem As Escolas, A Universidade E Os Bolsistas <i>Maria Aparecida Silva de Souza, Saddo Ag Almouloud.</i>	589
32	Propuesta De Un Perfil De Ingresante A La Carrera Profesional De Matemática De La Universidad Nacional De Piura <i>Gloria Solvey Crespo Guerrero.</i>	598
33	El Sistema Métrico Decimal En Las Escuelas De Perú: Un Análisis Del Manual De Aritmética Práctica Del Año De 1864 <i>Elenice de Souza Lodron Zuin.</i>	608

- 34 Elaboração De Livro Paradidático Para O Ensino De Estatística: O Trilhar De Uma Proposta Para O Nono Ano Do Ensino Fundamental
Anneliese de Oliveira Lozada, Ailton Paulo de Oliveira Jr. 617
- 35 A Contribuição Da Autoscopia Na Formação Do Professor De Matemática Da Rede Estadual Do Ensino Médio No Estado Do Amazonas
Aldemir Malveira de Oliveira, Floriano Augusto Veiga Viseu. 630
- 36 Formación Docente Que Enseña Matemáticas Desde Una Perspectiva Colaborativa
Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Roseli Regina Fernandes Santana, Luciane de Castro Quintiliano, Adriana de Bortoli. 639
- 37 O Ensino E A Aprendizagem Da Matemática No Processo De Letramento Da Língua Materna: Reflexões Para A Prática Pedagógica
Dimas Cássio Simão. 645
- 38 Crenças De Autoeficácia E O Ensino Da Álgebra Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental
Anderson Cangane Pinheiro, Nelson Antonio Pirola. 653
- 39 La Tasa De Variación: Una Mirada Desde El Etm Personal De Estudiantes De Secundaria
Marco Antonio Ticse Aucahuasi, Jesús Victoria Flores Salazar, Elizabeth Montoya Delgadillo. 662
- 40 Estudio Histórico-Epistemológico De Las Nociones Trigonométricas Seno Y Coseno
Gilder Samuel Vargas Vargas, Mihály Martínez-Miraval. 671
- 41 Estudo Dos Quadriláteros: Uma Revisão Da Literatura
Daysi Julissa García-Cuéllar, Saddo Ag Almouloud. 682
- 42 La Teoría Del Reflejo De V. I. Lenin En La Tradición Dialéctica De L. S. Vygotsky Y Sus Vínculos Con La Educación Matemática: Error Y Fantasía En La Enseñanza Problemática De La Geometría
Luis Miguel Maraví Zavaleta. 693
- 43 La Modelación Y La Experimentación En El Estudio De Un Fenómeno Físico. Experiencias Y Reflexiones En Educación Media
Alexander Castrillón-Yepes, Sebastián Mejía Arango, Ana Carolina González-Grisales, Paula Andrea Rendón-Mesa. 704

44	Un Acercamiento Entre Los Recorridos De Estudio E Investigación Y Las Tareas Auténticas, Propuesta De Un Proceso De Modelización De La Función Seno <i>Percy Luján Rosadio, Cintya Sherley Gonzales Hernández.</i>	714
45	Prácticas De Enseñanza Del Proceso De Modelización Matemática En Secundaria En Bogotá, Colombia <i>Blanca Cecilia Fulano Vargas.</i>	725
46	Descriptores De Nivel De Razonamiento De Van Hiele, Para La Comprensión De La Parábola Como Lugar Geométrico <i>William Eduardo Calderón Gualdrón, René Alejandro Londoño Cano.</i>	735
47	Tareas de Aprendizaje y Habilidades de Visualización a Partir del Cálculo de Volúmenes <i>Catalina Molano Carranza, Hildebrando Díaz Soler.</i>	744
48	Usos de la Pendiente en Prácticas de Agricultura <i>David Esteban Espinoza, Gabriela Buendía Abalos.</i>	757
49	¿Cuáles Competencias Digitales Favorece Desarrollar El Concurso Foto gebra? <i>Karina Amalia Rizzo, Viviana Angélica Costa.</i>	767
50	La Autorregulación como Posibilidad para Aprender Lógica Proposicional a Través del Ajedrez <i>Yorman Arley Isaza Agudelo, Neysy Catalina Londoño Misas, Luz Stella Mejía Aristizábal.</i>	777
51	Textos Literarios para El Aprendizaje de la Matemática <i>Ingrid Maritza Aquino Palacios, Marta Celinda Ríos Zea.</i>	784
52	Análisis Praxeológico de la Integral Definida en Libros de Texto de Ingeniería <i>Walter Orlando Gonzales Caicedo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	792
53	Análisis Económico Institucional sobre la Enseñanza de Vectores <i>Maritza Luna Valenzuela, Saddo Ag Almouloud, Francisco Javier Ugarte Guerra.</i>	804

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

1	Experiencia de Investigación Formativa en la Asignatura de Matemática Financiera <i>David Esteban Espinoza.</i>	817
2	Errores de Estudiantes en la Modelización de una Situación Cotidiana que Involucra a la Función Lineal y Cuadrática <i>Magaly Ethel Campos Motta, Elvis Bustamante Ramos.</i>	822
3	Sequências de Ensino para Promover o Letramento Estatístico <i>Irene Mauricio Cazorla, Miriam Cardoso Utsumi.</i>	828
4	Análisis de Actividades para la Enseñanza de la Gestión de Datos <i>Percy Callinapa Supo, Eliana Inca Choquepata, Elsa Macedo Anaya.</i>	839
5	La Situación Significativa en la Competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre <i>Giovanna Vicky Gonzales Oporto, Sebastiana Nancy Sacasqui Aguilar.</i>	848
6	Experiencia de la Competencia, "Resuelve Problemas de Forma, Movimiento y Localización" en el Último Puente Inca de Queswachaka <i>Franklin Taipe Florez, Julio Cesar Condori Huillca, Doris Castro Huamani Willi Taipe Florez.</i>	856
7	El Uso de la Regleta de Cuisenaire en el Aula <i>Elizabeth de Lourdes Caudana.</i>	866
8	Educação Estatística Em Um Ambiente de Modelagem Matemática: Uma Ótica Inclusiva Na Educação Infantil <i>Roseli Rosalino Dias da Silva Angelino, Ana Paula Gonçalves Pita, Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki, Andréa Pavan Perin.</i>	872
9	Usando El Ciclo Ppdac para el Análisis Didáctico de una Situación Problema de Secundaria <i>Augusta Osorio Gonzales, Gladys Flores Cuevas, Juliana Pérez Taxi.</i>	880
10	A Constituição Da Matemática Na Proposta Curricular Da Rede Pública Municipal De Educação De São Luís <i>Waléria de Jesus Barbosa Soares, Carlos André Bogéa Pereira.</i>	888
11	Vibraciones y Ondas con Mathematica <i>Roy Sánchez Gutiérrez.</i>	896

12	Aprendiendo a Entender La Noción de Límite de una Función <i>Judith Catherine Chávez Salinas.</i>	904
13	O Laboratório de Educação Matemática e Inclusão Na Formação Inicial Do Professor de Matemática <i>Karem Keyth de Oliveira Marinho, Elielson Ribeiro de Sales.</i>	910

DESCRIPTORES DE NIVEL DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE, PARA LA COMPRESIÓN DE LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

William Eduardo Calderón Gualdrón*

René Alejandro Londoño Cano**

williameduardoc@hotmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología UMECIT, Panamá*

Universidad de Antioquia, Colombia**

Resumen

En este reporte de investigación se presentan los resultados preliminares de una investigación doctoral que estudia como comprenden los estudiantes de últimos cursos de educación media y primeros semestres de universidad el concepto de parábola como lugar geométrico a la luz del modelo de van Hiele. En una primera etapa se elaboran unos descriptores hipotéticos los cuales se van refinando a medida que se aplica un diseño de entrevista socrática mediada por el software GeoGebra. Estudios previos han utilizado el modelo de van Hiele y la entrevista socrática como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, si a estos dos elementos le sumamos el software de geometría dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual se analizará y promoverá el objeto de estudio (la comprensión) y el objeto matemático de estudio (La parábola como lugar geométrico).

Palabras clave: *Parábola, descriptores, van Hiele*

Introducción

En el diseño curricular de los cursos de matemáticas de la educación secundaria, se introduce la geometría analítica con conceptos algebraicos que permiten resolver problemas de distancia entre puntos y puntos medios; de esta manera se presenta la relación entre el álgebra y la geometría por primera vez. Seguidamente, se introduce la recta y, luego, las secciones cónicas. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) del sistema educativo colombiano hacen referencia a las secciones cónicas en cuatro de los estándares asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos de décimo grado (estudiantes entre 15 y 17 años), a saber:

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, los estudiantes de primer año de universidad presentan dificultades en la comprensión de las secciones cónicas, situación que ha sido documentada por investigadores como Just y Carpenter (1985), Gómez y Carulla (2000), Santa y Jaramillo (2007), Santa (2011), López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013), Ruiz (2013), Lara (2016), quienes aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones de las cónicas, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis; lo anterior conlleva a dificultades en relación a la representación algebraica y geométrica, impidiendo su comprensión como lugar geométrico.

Lo anterior señala la necesidad de contribuir con elementos que le permitan a los profesores mejorar el proceso de enseñanza de las cónicas, en específico, de la parábola como lugar geométrico. En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de la problemática de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad.

El modelo de van Hiele y la entrevista socrática han sido validados en investigaciones como Llorens (1994), Campillo (1998), Jaramillo (2000), Esteban (2000), De la Torre (2000), Navarro (2002), Londoño (2011) y Prat (2015) como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, no sólo con las preguntas que se formulan, sino también, con sus propias respuestas.

Si al modelo de van Hiele y a la entrevista de carácter socrático le sumamos los aportes que realiza la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, en este caso el software de geometría dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual esperamos analizar y promover el objeto matemático de estudio, que en nuestro caso es la parábola como lugar geométrico, además de crear un sendero para nuevas investigaciones con esta estrategia.

Este estudio pretende que la entrevista socrática dinámica, vista como la entrevista realizada mediante un software de geometría dinámica, pueda convertirse en una estrategia para los profesores de matemáticas, ya que, mediante las actividades propuestas en ella, se orienta sobre cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes a través de un software de geometría dinámica, para presentarles nuevos conceptos, de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los mismos.

Además, se pretende transformar la manera en que el entrevistado interactúa con el entrevistador cuando se realiza un diálogo de entrevista socrática, al proporcionarle al primero nuevas herramientas en las que puede dotar de movimiento las situaciones que se le presentan, dándole a la entrevista una cualidad en la que mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el estudiante logre deducir resultados y propiedades hasta llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Problema de investigación y aspectos teóricos y metodológicos

La parábola como lugar geométrico

Charles H. Lehmann (1990) define una parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta. El punto fijo F se llama foco y la recta fija L se llama directriz de la parábola.

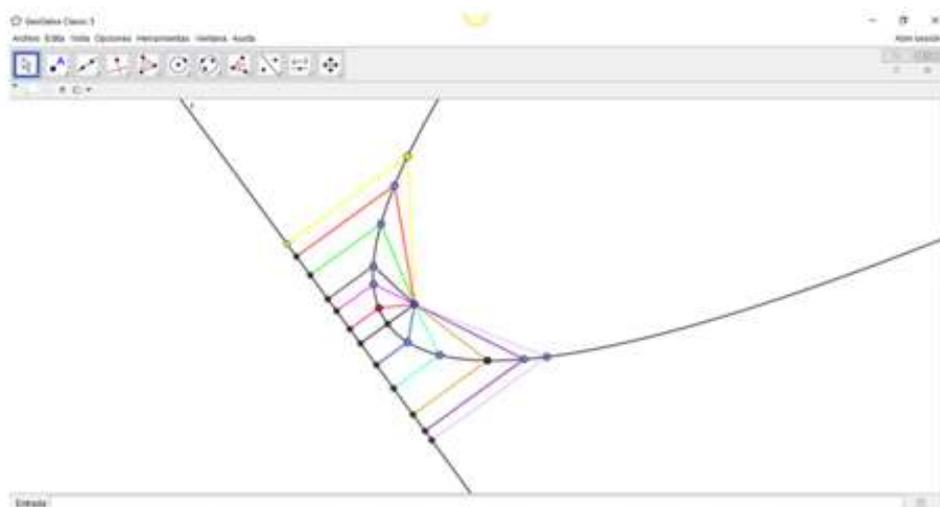


Figura 1 la parábola como lugar geométrico

El modelo de van Hiele

Muchos autores han buscado una definición precisa del término "comprensión", Brownell y Sims (1946) afirman: "Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de "comprender" o "comprensión" (p. 163). En este sentido Pierre van Hiele (1957) se refiere a la comprensión así:

Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si..." y a continuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones (p. 4)

Desde la difusión inicial de los trabajos de van Hiele, a mediados de los 70's, han sido numerosos los investigadores que han trabajado con el modelo de van Hiele, aspecto que es afirmado por Jurado y Londoño (2005), quienes, además, señalan que el común denominador es la insistencia en aplicarlo a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales o medios, hecho que no opaca el esfuerzo de investigadores como Dreyfus y Thompson (1985), De la Torre (2000), Londoño (2011), Fiallo (2011 y 2018), por extenderlo a la Aritmética, el Análisis Matemático, la Trigonometría y el Cálculo Diferencial.

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de Van Hiele es

Una excelente guía para los profesores pues (...) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes (pp. 302-303).

Pierre van Hiele y Dina van Hiele Geldof, como profesores de matemáticas, idearon una forma que pudiera mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes en geometría pues, a partir de sus observaciones y reflexiones en el aula, notaron que, a diferencia de Piaget, los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad que se mire esto; para ellos "cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento" (Jurado y Londoño, 2005, p. 7).

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de van Hiele está formado por dos partes:

a) la primera llamada "niveles de razonamiento" que identifica una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno, la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo. Para reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su actividad matemática, los van Hiele diseñaron unos descriptores, los cuales tienen unas propiedades específicas (secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, cada nivel tiene su lenguaje y consecución).

b) La segunda parte llamada "fases de aprendizaje", orientada a los profesores, les brinda directrices para ayudarlos a encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento

Un tercer elemento es considerado por Jurado y Londoño (2005) y Londoño (2011): la percepción-Insight (algunos autores la traducen como "comprensión"), aunque Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que este es el fin del modelo.

La entrevista socrática

El diálogo como elemento importante en la educación matemática es entendido desde los Diálogos de Platón en el capítulo titulado "Menon" (el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado), cuyos coloquios se caracterizan por su alto grado de indagación y análisis, lo cual supone un

compromiso con el intelecto. De la Torre (2003) describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en el Menón, señala además que:

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada (p. 102).

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

La entrevista socrática [...] ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele [...] (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82).

Londoño (2011) emplea la entrevista socrática con una doble intención: a) que el profesor reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, esto con el propósito de que forje la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; b) que le permita al entrevistado (el estudiante) progresar en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La entrevista socrática diseñada en el estudio de Londoño le permite la detección de los niveles de comprensión de tres estudiantes en el marco de la teoría de Piere y Kieren a partir de descriptores diseñados para cada nivel, los cuales se obtuvieron durante la aplicación de las entrevistas socráticas.

La red de relaciones interviene durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía, pero el refinamiento y evolución de su comprensión depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza gradual que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así conseguir el nivel de comprensión deseado.

El autor enfatiza en las conclusiones de su estudio la importancia de que en la entrevista socrática se generen preguntas que entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión, pero que a la vez desencadene que lo saquen de la confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

De manera que, dado que el modelo de van Hiele prueba la existencia de niveles de razonamiento, en este estudio usamos el método socrático para examinar el razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Asimismo, para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que van Hiele considera son importantes tener presentes en una clase donde se trabaje con el método socrático,

según De la Torre (2003, p. 103), a saber:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.
- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.
- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.
- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto.

Van Hiele (1986) insiste en estas premisas pues "es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento" (Londoño, 2010, p. 27).

El software de geometría dinámica (SGD)

Peña (2010) resalta que los softwares de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de movimiento a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que "La utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión" (p. 166).

Es así como Fiallo (2000) plantea en su tesis doctoral el diseño de una unidad de enseñanza de trigonometría fusionando el modelo de Van Hiele y Cabri Geometre como herramienta didáctica. El autor concluye que el software de geometría dinámica (SGD) motiva a los estudiantes a saber por qué son verdaderos los conceptos y propiedades estudiados ya que, además, les proporciona conocimientos necesarios para que formulen razonamientos y demostraciones sobre ellos.

En relación a las cónicas y los SGD, Gaita y Ortega (2014), además de trabajar con construcciones de regla y compás relacionadas con la noción de lugar geométrico con estudiantes de arquitectura, incluye en su estudio algunas actividades con el uso de GeoGebra. Las autoras señalan que la propuesta está organizada "En base a condiciones geométricas que establezcan relaciones de la distancia entre tres puntos, de modo que la modificación de determinados parámetros en el enunciado generaba un cambio en la estrategia de solución" (p. 1136). La introducción del lugar geométrico a través de situaciones en el marco geométrico favoreció que los estudiantes adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto.

Los investigadores López-Mesa, Aldana-Bermúdez y Alonso-Arboleda (2013) también emplearon GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de

Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destaca que las TIC logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

[...] El medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen y fuera de este; estableció relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio.

En lo actitudinal, los autores reportan que los estudiantes están más receptivos y animados al desarrollo de las actividades; durante la actividad matemática, ellos formulan como hipótesis y conjeturas, utilizan un lenguaje matemático adecuado, entre otras.

Hallazgos

A partir de los razonamientos de los estudiantes, sobre la parábola como lugar geométrico se pudo detectar características que permiten ubicar a cualquier estudiante en uno de los niveles de razonamiento; a estas características se les llama descriptores, y van a indicar las actividades sobre el objeto matemático de estudio mencionando anteriormente que pueden realizar los estudiantes cuando se encuentran en un determinado nivel.

En un primer momento, van Hiele enumeró cinco niveles diferentes (Nivel 0 básico o predescriptivo y niveles I, II, III y IV). Jaime y Gutiérrez (1990) distinguen cuatro niveles: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal). Nosotros vamos a utilizar la nomenclatura descrita por van Hiele, la cual fue pieza clave en las investigaciones de autores como: Londoño (2011), Santa (2011), Prat (2015), quienes presentan los siguientes niveles: Nivel 0, predescriptivo; nivel I, de reconocimiento visual; nivel II, de análisis; nivel III, de clasificación y relación; nivel IV, de deducción formal.

Estos autores hacen referencia a que el último nivel el de deducción formal presenta dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico.

Descriptores de nivel de razonamiento(DNR)

NIVEL 0 (básico o predescriptivo)

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales, por lo tanto, no es utilizado el software GeoGebra.

El estudiante ubicado en este nivel:

- **DNR.** Reconoce objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.

- **DNR. Reconoce** algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta llamada D.

- **DNR.** Reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

- **DNR.** Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.

Referencias

De la Torre, A. (2000). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24, pp. 99-121.

Dreyfus, T., y Thompson, P. W. (1985). Microworlds and van Hiele levels. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 5-11). Utrecht, The Netherlands: University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis doctoral. España: Universitat de València.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

- Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9, pp. 65–84. Recuperado de <https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf>
- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Just, M. y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 137-172.
- Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica*. Tesis de maestría no publicada. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis doctoral no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.
- López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*, 18(2): 74-79.
- MEN, (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. [Versión en línea]. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-16042_archivo_pdf2.pdf
- Santa, Z. y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. En: X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.
- Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) *La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online*.
- Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Platón, (1996). Menón. En Platón, Diálogos. México. Porrúa.
- Ruiz, J. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la Institución Educativa Luis López de Mesa del Municipio De Medellín*. Tesis de posgrado no publicada. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- UNESCO. (1998). *Informe Mundial sobre la Educación*. Editorial Santillana/Ediciones UNESCO. Madrid. España.
- Van-Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.