



DIDÁCTICA DE LAS  
**MATEMÁTICAS**

X CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE  
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

20, 21 y 22 de febrero de 2020

# ACTAS CIEM 2020

CONFERENCIAS

TALLERES

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS



# **X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas**

20, 21 y 22 de febrero de 2020

## **ACTAS *CIEM 2020***

Conferencias

Talleres

Reportes de Investigación

Socialización de Experiencias

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
SOBRE LA ENSEÑANZA DE  
LAS MATEMÁTICAS**



**PUCP**

*X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*

*Actas*

*CIEM 2020*

Editores: Cecilia Gaita Iparraguirre, Jesús Flores Salazar, Francisco Ugarte Guerra

Diseño de carátula: Fondo Editorial PUCP

Diagramación de interiores: Cecilia Gaita Iparraguirre

© Pontificia Universidad Católica del Perú – 2020

Avenida Universitaria 1801, Lima 32

626 2000-anexo 4197

E-mail: [irem@pucp.edu.pe](mailto:irem@pucp.edu.pe)

Dirección URL: <http://www.irem.pucp.edu.pe>

*Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.*

ISBN: 978-612-4320-38-5

Primera edición digital: julio de 2020

Producido en el Perú – Produced in Perú

## Presentación

La historia de los CIEMs se remonta 20 años atrás, entonces cuando empezó como un coloquio y desde entonces ha venido creciendo hasta convertirse en el congreso sobre enseñanza de las matemáticas más importante del Perú, prueba de ello es el interés que ha despertado en las regiones de nuestro país: así en el año 2016 el Congreso se realizó en el campus de la Universidad Nacional de Piura y, en el 2018, en la Universidad Nacional de Huancavelica, a más de 4000 msnm, el IX CIEM congregó a más de 400 personas, entre profesores e investigadores de todo el Perú y del extranjero. Hoy la Universidad Nacional del Centro del Perú, la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, la Universidad Nacional de Tumbes y la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco han manifestado su interés por ser las sedes de los siguientes CIEMs.

Para nosotros el décimo CIEM, significa además celebrar los 20 años del IREM-PUCP aunque como toda institución, nuestro instituto tiene una historia y una memoria que va más allá de su creación: debo recordar con gratitud al Dr. José Tola Pasquel, ilustre matemático e ingeniero peruano, exrector de la PUCP entre 1967 y 1989, fundador del Instituto para la promoción de la enseñanza de las matemáticas IPEN, que funcionó entre 1961 y 1968. EL IPEN fue creado con la finalidad de realizar cursos de perfeccionamiento para profesores de matemáticas de los diferentes niveles, difundir los nuevos conceptos e ideas relacionadas con la enseñanza de la matemática; auspiciar la publicación de libros de texto y colaborar con los organismos y autoridades nacionales en sus esfuerzos para promover el estudio y la enseñanza de las matemáticas. El profesor Tola Pasquel fundó además la Sociedad Matemática Peruana y el Instituto de Matemáticas (IMUNI) que funcionó entre 1960 y 1968. Luego, en 1980, siendo Rector de la PUCP, auspició la creación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Años más tarde, en 1997, el profesor César Carranza y César Camacho, discípulos de Tola Pasquel e infatigables promotores de las matemáticas en el Perú, fundaron el Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA) de la UNI: esto significó el renacimiento del IMUNI luego de 30 años. En el año 2000, el profesor Uldarico Malaspina, impulsó la creación del IREM-PUCP, lo que significó el resurgimiento del IPEN luego de 30 años.

He querido recordar de forma sucinta la historia del IREM-PUCP pues entiendo que es la manera en que puede y debe comprender una institución, pues en ella puede vislumbrarse su razón de ser, su necesidad y su misión.

Desde esa perspectiva el IREM-PUCP es una comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, estrechamente vinculados con la comunidad matemática, cuya finalidad académica es la realización de investigación al más alto nivel y, al mismo tiempo esta investigación es solo un medio para alcanzar un fin aún más alto: mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú.

Así, el CIEM debe ser entendido como un espacio de encuentro y de reflexión, que nos enriquezca a todos, profesores e investigadores, con la mirada puesta en construir un Perú con centros de investigación en matemáticas y didáctica de las matemáticas, en distintas regiones del país, que contribuyan coordinadamente con la formación continua de las siguientes generaciones de investigadores y profesores de matemáticas de todos los niveles educativos, y que de igual manera ayuden a establecer la vinculación de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas con otras ramas del saber.

El X CIEM desarrolló las siguientes áreas temáticas:

- Currículo, competencias y evaluación
- Historia y epistemología de la matemática y de la Educación Matemática
- Recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Resolución y creación de problemas
- Modelización en Educación Matemática
- Matemáticas y su integración con otras áreas.

El presente libro contiene los artículos de las propuestas aceptadas y presentadas durante el congreso:

- 12 conferencias,
- 19 talleres,
- 53 reportes de investigación
- 13 socializaciones de experiencias

Mi agradecimiento al comité organizador, liderado por Cecilia Gaita y al Comité Científico coordinado por Jesús Flores y, por supuesto a todos aquellos que hicieron posible con sus participación este congreso.

Francisco Ugarte Guerra  
Director del IREM-PUCP

## **Convocan**

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

### **Auspician:**

IREM-PUCP

Red Peruana de Universidades

### **Comité Científico**

Dra. Jesús Flores Salazar (IREM-PUCP, Perú)

Dr. Alain Kuzniak (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Avenilde Romo Vásquez (Instituto Politécnico Nacional-IPN, México)

Dr. Cerapio Quintanilla Córdor (Universidad Nacional de Huancavelica-UNH, Perú)

Dra. Cileda De Queiroz e Silva Coutinho (PUC Sao Paulo, Brasil)

Mag. Daysi Julissa García Cuéllar

Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile)

Dr. Fumikazu Saito (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Laurent Vivier (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Maria Jose Ferreira da Silva (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dra. Norma Rubio Goycochea (PUCP-Perú)

Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Uldarico Malaspina Jurado (IREM-PUCP, Perú)

### **Comité Organizador**

Dr. Francisco Ugarte Guerra (IREM-PUCP)

Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre (IREM-PUCP)

Dra. Nancy Saravia Molina (IREM-PUCP)

Mag. Cintya Gonzáles (IREM-PUCP)

Mag. Flor Carrillo Lara (IREM-PUCP)

Mag. Iris Flores Quesquén (IREM-PUCP)

# Índice General

## CONFERENCIAS PLENARIAS

- 1 Instrumentación Corporeizada: combinando diferentes puntos de vista sobre el uso de la Tecnología Digital en la Educación Matemática.  
*Paul Drijvers.* 19
- 2 Razonar con la Covariación. Un estudio sobre las Estrategias en un Curso de Formación de Futuros Profesores de Matemática.  
*Jhony Alexander Villa-Ochoa.* 44
- 3 El Papel de los Problemas de Modelación en la Enseñanza Secundaria.  
*María Trigueros Gaisman.* 56
- 4 El 'Networking' de Teorías en Educación Matemática: ¿Qué significa y Qué produce?  
*Michèle Artigue.* 72

## CONFERENCIAS PARALELAS

- 1 Indagar, crear y resolver Problemas de Matemáticas  
*Uldarico Malaspina Jurado.* 82
- 2 Geometría y Ecuaciones Cuadráticas de una Incógnita: Análisis de una Construcción  
*Maria José Ferreira da Silva.* 91
- 3 Praxeologias requeridas por la Profesion Docente  
*Michèle Artaud.* 102
- 4 Contribuição Da Didática da Matemática Na Forma Continuada de Professores que Ensinam Matemática  
*Saddo Ag Almouloud.* 103
- 5 Curiosidades Criativas Na História Do Conceito de Função: Contribuições para o Ensino  
*Iran Abreu Mendes.* 116

|   |   |     |
|---|---|-----|
| 6 | Cambios en el Espacio de Trabajo Matemático de Profesores del Liceo en el Dominio del Análisis y sus Implicancias con la Modelización<br><i>Elizabeth Montoya Delgadillo.</i> | 124 |
| 7 | Formación Docente: el caso de la proporcionalidad<br><i>Jean-Pierre Bourgade.</i>   | 132 |
| 8 | Estadística, Criticidad y Registro de Representaciones Semióticas<br><i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.</i>   | 142 |

## TALLERES

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 1  | ¿Cómo construir el concepto de Fracción a partir de sus significados?<br><i>Olimpia Castro, Sahara Doria, Rosa Lafosse, Percy Merino.</i>   | 151 |
| 2  | O Cubo Estatístico: Material para Trabalhar Variáveis Estatísticas<br><i>Irene Mauricio Cazorla, Cláudio Vitor antana.</i>  | 158 |
| 3  | Problemas de Matemática Recreativa: Resolución con TAC<br><i>Daniel Moreno Caicedo, Juddy Amparo Valderrama Moreno.</i>   | 168 |
| 4  | Aprendizaje Activo y Visualización: Representación de un Objeto Tridimensional (3d) en el Plano Bidimensional (2d), a partir de sus Proyecciones Ortogonales o Vistas Principales<br><i>Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay.</i> | 176 |
| 5  | Patrón, Sucesión y Secuencia.<br><i>Elvis Bustamante Ramos, Francisco Ugarte Guerra, Magaly Ethel Campos.</i>   | 182 |
| 6  | Propuesta de Tareas y Recursos para la Enseñanza de la Geometría<br><i>Isabel Torres Céspedes, Marisel Beteta Salas, José Carlos León Ríos.</i>   | 188 |
| 7  | Recursos Tecnológicos-Matemáticos para formar Docentes Digitales<br><i>Zenón Eulogio Morales Martínez.</i>  | 196 |
| 8  | Construindo o Pensamento Probabilístico: O Jogo Do Franc-Carreau<br><i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueired.</i>  | 206 |
| 9  | Visualización de Sólidos por Secciones Transversales usando Geogebra<br><i>Nancy Saravia Molina, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>  | 213 |
| 10 | Uso de Scripts para Crear Actividades Autoevaluables en Geogebra<br><i>Marco Gutiérrez Montenegro.</i>  | 218 |

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 11 | La Formulación de Problemas: Herramienta utilizada en el aula para el desarrollo de Habilidades Matemáticas a lo largo de la Escolaridad<br><i>Percy Merino, Olimpia Castro, Carlos Torres, Sahara Doria.</i> | 224 |
| 12 | Criação de Aplicativos Na Perspectiva Da Matemática Inclusiva<br><i>Elton de Andrade Viana, Maximiliam Albano Hermelino Ferreira, Ana Maria Antunes de Campos, Ana Lucia Manrique.</i>                        | 224 |
| 13 | Educación Financiera en la Escuela Primaria<br><i>Celso Ribeiro Campos, Andréa Pavan Perin.</i>   | 240 |
| 14 | Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría<br><i>Victor Barrial Sandoval.</i>   | 249 |
| 15 | Visualización de Cuadriláteros: Mediación del Software Geogebra<br><i>Cecilia Gómez Mendoza, Flor Isabel Carrillo Lara, Rocío Figueroa Vera, Gustavo Rodríguez T.</i>   | 260 |
| 16 | Creación de Problemas sobre Composición de Funciones usando Applets<br><i>Elton Barrantes, Maritza Luna, Marco Solorzano.</i>   | 269 |
| 17 | Resolución de Problemas Aritméticos<br><i>Ángel Homero Flores Samaniego, Isabel Torres Céspedes.</i>  | 278 |
| 18 | Conocimientos Didáctico-Matemático del Profesor de Secundaria sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales<br><i>Carlos Omar Cárdenas Estrella, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>                             | 284 |
| 19 | Una reflexión sobre el uso de la Geometría Diinámica en el Contexto Escolar<br><i>Guadalupe Morales Ramírez, Norma Rubio Goycochea.</i>   | 294 |

## REPORTES DE INVESTIGACIÓN

- 1 La Creación de Problemas en Gestión de Datos y la Formación de Profesores de Secundaria  
*Augusta Osorio Gonzales, Sara Mónica Sáenz Chaparro, Yolanda Gladys Alhuay Albites, Norma Lidia Olivares Acuña.* 302
- 2 Ensino de Matemática a Alunos com Altas Habilidades/Superdotação por Meio da Construção de Cenários Animados no Geogebra  
*Adrielei Cristine Bueno, Maria Ivete Basniak.* 312
- 3 Una investigación con enfoque en las relaciones entre los trastornos y la ansiedad matemática  
*Ana Maria Antunes de Campos, Elton de Andrade Viana, Ana Lúcia Manrique.* 322
- 4 Teorías de maestros sobre evaluación, en el área de matemática  
*Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Luís Manuel Casas García.* 331
- 5 La Creación de Problemas en la Formación de Profesores  
*Carina Saire Huamani.* 340
- 6 Una estrategia de Invención de Problemas para estimular el Desarrollo de la Competencia de Análisis Didáctico en Profesores de Matemática  
*Carlos Torres, Uldarico Malaspina.* 340
- 7 Errores que cometen los estudiantes de tercer año de Secundaria en la Resolución de Inecuaciones Lineales con una Variable  
*Rolando Ruiz Carbajal.* 358
- 8 Relación entre las Cónicas y Diseño Arquitectónico  
*Sumaya Jaimes Reátegui, Rosa Kohama Aréstegui, Darcy E. Aréstegui de Kohama.* 381
- 9 Formas e Equações: Uma Introdução Ao Estudo Das Seções Cônicas Com O Geogebra  
*André Lúcio Grande, Benedito Antonio da Silva.* 393
- 10 Formación de Profesores de Matemática. Una Revisión de Literatura Científica de los últimos 10 años  
*Flor Isabel Carrillo Lara.* 403
- 11 Espacio de Trabajo Matemático Personal: Interpretación Geométrica de la Derivada de una Función Real de Variable Real  
*Lisseth Chacón Cama, Jesús Victoria Flores Salazar.* 415

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 12 | Objeto Virtual de Aprendizaje: Una Estrategia para Desarrollar Pensamiento Algebraico<br><i>Juddy Amparo Valderrama Moreno, Solange Roa Fuentes.</i>   | 421 |
| 13 | Emociones de Profesores de Matemáticas en Formación<br><i>María S. García González, Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani.</i>   | 429 |
| 14 | La Enseñanza de Sumas con Números Naturales en la Escuela Primaria Multi - Grado<br><i>Lorena Trejo Guerrero.</i>  | 439 |
| 15 | Análise de Livro Didático: Uma Olhar para o Ensino da Linguagem Gráfica<br><i>Sidney Silva Santos, Geovane Carlos Barbosa, Nathalia Tornisiello Scarlassari, Celi Espasandin Lopes.</i>                      | 447 |
| 16 | Un Análisis Normativo Ontosemiótico de los Textos Matemáticos Escolares bajo el Enfoque de Género<br><i>Anderson D. Chavez Marcelo.</i>  | 455 |
| 17 | Álgebra nos Anos Iniciais e Finais Do Ensino Fundamental: Análise Das Expectativas Institucionais<br><i>Anderson Alves, Marlene Alves Días, Karina de Oliveira Castro, Mariana Silva Nogueira Ribeiro.</i>   | 464 |
| 18 | Análisis de las Dificultades que presentan los Estudiantes Universitarios en Matemática Básica<br><i>Roger Ivan Soto Quiroz.</i>   | 473 |
| 19 | Errores y Dificultades Relativos al Concepto de Solución de Ecuaciones Lineales<br><i>Aldrin Peña Lizano, Francisco Ugarte Guerra.</i>   | 484 |
| 20 | Dificultades en el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería<br><i>Alejandro M. Ecos Espino, Joffré Huamán Núñez, Zoraida R. Manrique Chávez.</i>                                  | 490 |
| 21 | Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de ingeniería<br><i>Violeta Lupita Bejarano Vílchez, Verónica Neira Fernández.</i> | 500 |
| 22 | El Concepto de Infinito y el Modelo de Van Hiele<br><i>Alba Soraida Gutiérrez Sierra, Rene Alejandro Londoño Cano.</i>   | 509 |

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 23 | El Dinamismo de Geogebra para explorar Aspectos Básicos de la Teoría del Caos<br><i>Viviana Angélica Costa.</i>   | 519 |
| 24 | Herramientas matemáticas para la práctica experimental en el área de física<br><i>Johel Aldo Tarazona Guillen.</i>  | 529 |
| 25 | O Professor Em Uma Aula Assente No Ensino Exploratório de Matemática<br><i>Vania Sara Doneda de Oliveira, Dalva Spiler Brandelero, Maria Ivete Basniak.</i>   | 537 |
| 26 | Instrumentación del Artefacto Simbólico Función Cuadrática<br><i>Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály André Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar.</i>  | 546 |
| 27 | Enfoque Frequentista de Probabilidades - Um Estudo À Luz Da Teoria Dos Registros de Representação Semiótica<br><i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueiredo.</i>  | 555 |
| 28 | Formación Docente en Gestión de Datos<br><i>Augusta Osorio Gonzales, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>  | 563 |
| 29 | Concepções sobre Estatística Mobilizadas por Alunos E Professores Do Ensino Médio: Um Estudo de Caso<br><i>Cassio Cristiano Giordano.</i>   | 569 |
| 30 | O Ensino Para O Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico Nos Anos Iniciais Face Às Atitudes Em Relação À Matemática E Às Crenças De Autoeficácia De Professores In-Service E Pre-Service<br><i>Roseli Regina Fernandes Santana, Nelson Antonio Pirola.</i> | 579 |
| 31 | Programa Institucional De Bolsas De Iniciação À Docência, Pibid: O Que Dizem As Escolas, A Universidade E Os Bolsistas<br><i>Maria Aparecida Silva de Souza, Saddo Ag Almouloud.</i>  | 589 |
| 32 | Propuesta De Un Perfil De Ingresante A La Carrera Profesional De Matemática De La Universidad Nacional De Piura<br><i>Gloria Solvey Crespo Guerrero.</i>  | 598 |
| 33 | El Sistema Métrico Decimal En Las Escuelas De Perú: Un Análisis Del Manual De Aritmética Práctica Del Año De 1864<br><i>Elenice de Souza Lodron Zuin.</i>   | 608 |

- 34 Elaboração De Livro Paradidático Para O Ensino De Estatística: O Trilhar De Uma Proposta Para O Nono Ano Do Ensino Fundamental  
*Anneliese de Oliveira Lozada, Ailton Paulo de Oliveira Jr.* 617
- 35 A Contribuição Da Autoscopia Na Formação Do Professor De Matemática Da Rede Estadual Do Ensino Médio No Estado Do Amazonas  
Aldemir Malveira de Oliveira, Floriano Augusto Veiga Viseu. 630
- 36 Formación Docente Que Enseña Matemáticas Desde Una Perspectiva Colaborativa  
*Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Roseli Regina Fernandes Santana, Luciane de Castro Quintiliano, Adriana de Bortoli.* 639
- 37 O Ensino E A Aprendizagem Da Matemática No Processo De Letramento Da Língua Materna: Reflexões Para A Prática Pedagógica  
*Dimas Cássio Simão.* 645
- 38 Crenças De Autoeficácia E O Ensino Da Álgebra Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental  
*Anderson Cangane Pinheiro, Nelson Antonio Pirola.* 653
- 39 La Tasa De Variación: Una Mirada Desde El Etm Personal De Estudiantes De Secundaria  
*Marco Antonio Ticse Aucahuasi, Jesús Victoria Flores Salazar, Elizabeth Montoya Delgadillo.* 662
- 40 Estudio Histórico-Epistemológico De Las Nociones Trigonométricas Seno Y Coseno  
*Gilder Samuel Vargas Vargas, Mihály Martínez-Miraval.* 671
- 41 Estudo Dos Quadriláteros: Uma Revisão Da Literatura  
*Daysi Julissa García-Cuéllar, Saddo Ag Almouloud.* 682
- 42 La Teoría Del Reflejo De V. I. Lenin En La Tradición Dialéctica De L. S. Vygotsky Y Sus Vínculos Con La Educación Matemática: Error Y Fantasía En La Enseñanza Problemática De La Geometría  
*Luis Miguel Maraví Zavaleta.* 693
- 43 La Modelación Y La Experimentación En El Estudio De Un Fenómeno Físico. Experiencias Y Reflexiones En Educación Media  
*Alexander Castrillón-Yepes, Sebastián Mejía Arango, Ana Carolina González-Grisales, Paula Andrea Rendón-Mesa.* 704

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 44 | Un Acercamiento Entre Los Recorridos De Estudio E Investigación Y Las Tareas Auténticas, Propuesta De Un Proceso De Modelización De La Función Seno<br><i>Percy Luján Rosadio, Cintya Sherley Gonzales Hernández.</i> | 714 |
| 45 | Prácticas De Enseñanza Del Proceso De Modelización Matemática En Secundaria En Bogotá, Colombia<br><i>Blanca Cecilia Fulano Vargas.</i>   | 725 |
| 46 | Descriptores De Nivel De Razonamiento De Van Hiele, Para La Comprensión De La Parábola Como Lugar Geométrico<br><i>William Eduardo Calderón Gualdrón, René Alejandro Londoño Cano.</i>                                | 735 |
| 47 | Tareas de Aprendizaje y Habilidades de Visualización a Partir del Cálculo de Volúmenes<br><i>Catalina Molano Carranza, Hildebrando Díaz Soler.</i>  | 744 |
| 48 | Usos de la Pendiente en Prácticas de Agricultura<br><i>David Esteban Espinoza, Gabriela Buendía Abalos.</i>   | 757 |
| 49 | ¿Cuáles Competencias Digitales Favorece Desarrollar El Concurso Foto gebra?<br><i>Karina Amalia Rizzo, Viviana Angélica Costa.</i>  | 767 |
| 50 | La Autorregulación como Posibilidad para Aprender Lógica Proposicional a Través del Ajedrez<br><i>Yorman Arley Isaza Agudelo, Neysy Catalina Londoño Misas, Luz Stella Mejía Aristizábal.</i>                         | 777 |
| 51 | Textos Literarios para El Aprendizaje de la Matemática<br><i>Ingrid Maritza Aquino Palacios, Marta Celinda Ríos Zea.</i>  | 784 |
| 52 | Análisis Praxeológico de la Integral Definida en Libros de Texto de Ingeniería<br><i>Walter Orlando Gonzales Caicedo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>  | 792 |
| 53 | Análisis Económico Institucional sobre la Enseñanza de Vectores<br><i>Maritza Luna Valenzuela, Saddo Ag Almouloud, Francisco Javier Ugarte Guerra.</i>  | 804 |

## SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

- 1 Experiencia de Investigación Formativa en la Asignatura de Matemática Financiera  
*David Esteban Espinoza.* 817
- 2 Errores de Estudiantes en la Modelización de una Situación Cotidiana que Involucra a la Función Lineal y Cuadrática  
*Magaly Ethel Campos Motta, Elvis Bustamante Ramos.* 822
- 3 Sequências de Ensino para Promover o Letramento Estatístico  
*Irene Mauricio Cazorla, Miriam Cardoso Utsumi.* 828
- 4 Análisis de Actividades para la Enseñanza de la Gestión de Datos  
*Percy Callinapa Supo, Eliana Inca Choquepata, Elsa Macedo Anaya.* 839
- 5 La Situación Significativa en la Competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre  
*Giovanna Vicky Gonzales Oporto, Sebastiana Nancy Sacasqui Aguilar.* 848
- 6 Experiencia de la Competencia, "Resuelve Problemas de Forma, Movimiento y Localización" en el Último Puente Inca de Queswachaka  
*Franklin Taipe Florez, Julio Cesar Condori Huillca, Doris Castro Huamani Willi Taipe Florez.* 856
- 7 El Uso de la Regleta de Cuisenaire en el Aula  
*Elizabeth de Lourdes Caudana.* 866
- 8 Educação Estatística Em Um Ambiente de Modelagem Matemática: Uma Ótica Inclusiva Na Educação Infantil  
*Roseli Rosalino Dias da Silva Angelino, Ana Paula Gonçalves Pita, Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki, Andréa Pavan Perin.* 872
- 9 Usando El Ciclo Ppdac para el Análisis Didáctico de una Situación Problema de Secundaria  
*Augusta Osorio Gonzales, Gladys Flores Cuevas, Juliana Pérez Taxi.* 880
- 10 A Constituição Da Matemática Na Proposta Curricular Da Rede Pública Municipal De Educação De São Luís  
*Waléria de Jesus Barbosa Soares, Carlos André Bogéa Pereira.* 888
- 11 Vibraciones y Ondas con Mathematica  
*Roy Sánchez Gutiérrez.* 896

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 12 | Aprendiendo a Entender La Noción de Límite de una Función<br><i>Judith Catherine Chávez Salinas.</i>  | 904 |
| 13 | O Laboratório de Educação Matemática e Inclusão Na Formação Inicial<br>Do Professor de Matemática<br><i>Karem Keyth de Oliveira Marinho, Elielson Ribeiro de Sales.</i> | 910 |

## EL CONCEPTO DE INFINITO Y EL MODELO DE VAN HIELE

**Alba Soraida Gutiérrez Sierra\***

**Rene Alejandro Londoño Cano\*\***

albasoraidagutierrez@gmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá\*

Universidad de Antioquia, Colombia \*\*

### Resumen

*Se pretende mostrar avances de la investigación en curso, "Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele". Para poder dar cuenta de la descripción de la comprensión se considera apropiado y adecuado utilizar el Modelo de van Hiele. La metodología de esta investigación está orientada bajo un enfoque mixto, utilizando como herramienta para la recolección de la información la entrevista semiestructurada de carácter socrático; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento, permitiendo describir la comprensión de los estudiantes en relación al concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real. Esta interacción permite comprender algunos procesos cognitivos de los estudiantes en el momento de razonar.*

**Palabras clave:** infinito, descriptores, comprensión, razonamiento, van Hiele.

### Introducción

La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función. Una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.).

De acuerdo a lo anterior, el presente reporte de investigación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad, para abordar esta problemática se utiliza modelo de Van Hiele, el cual permite describir y

explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

En efecto, al realizar un gran recorrido y análisis en la revisión bibliográfica se pudo evidenciar como algunos objetos matemáticos a la hora de ser enseñados generan ciertas dificultades de comprensión y aprendizaje, en ocasiones esto se atribuye al nivel del lenguaje utilizado por parte del maestro, puesto que éste no está en el mismo nivel de lenguaje de los educandos, esto van Hiele (1957) lo denomina propiedad de separación, sumado a ello la escases de estrategias o formalidad conceptual en el momento de la enseñanza, sobre el asunto es importante indagar acerca de cómo suceden ciertos procesos internos de aprendizaje; por lo anterior, el Modelo van Hiele admite de forma pertinente y adecuada describir la comprensión y establecer el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes frente al concepto de infinito; este modelo ha sido implementado en diversas experiencias educativas, respaldado en las últimas dos décadas por investigaciones a nivel de programas de maestría y doctorado, como: estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van-Hiele (Esteban, 2003). Relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Londoño, Jaramillo y Esteban, 2017) la comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, (Rendón & Londoño, 2011), relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele, entre otros, con los cuales se amplió el fundamento teórico para consolidar las bases que soportaron la investigación.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, una de las tareas de la educación es resignificar la cultura hacia la matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en la realidad y en solucionar problemas de la vida real; pues el pensamiento matemático "se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas" (Cantoral y otros, 2005, p.19).

### **Problema de investigación**

Sobre la enseñanza y comprensión del infinito han detectado diversas dificultades, cabe resaltar que los docentes tienen dificultades no solamente en el conflicto originado en la adquisición y comprensión de este concepto por parte de los estudiantes, sino también, en las estrategias que se utilizan para lograr la transposición adecuada del conocimiento enseñable; por su parte la concepción del infinito, no parece regida por el sentido común, pues contradice ideas evidentes e intuitivas, como el axioma griego indica, "El todo es mayor que las partes".

De igual manera, en el aula se encuentran situaciones similares, los estudiantes tienen controversias como que el infinito es una cantidad que aparece en muchas operaciones, pero que al mismo tiempo se requiere de una respuesta exacta, es decir se tiene la idea que el infinito no se puede contar y no se sabe cómo expresarlo matemáticamente, por lo general esta cantidad se relaciona con fenómenos de la existencia y más allá de la misma; es usual que al preguntar ¿qué piensan sobre el infinito?, los estudiantes respondan: el número infinito es como querer contar las estrellas del cielo o los granos de arena, lo relacionan con algo ilimitado o muy grande, lo que deja a la vista que la concepción sobre el infinito se relaciona con la intuición, donde según Cornu (1981) esto hace referencia al "modelo espontáneo" en donde se sabe que este concepto trasciende más allá.

Lo que se evidencia es que el infinito desde su aparición en filosofía y en matemáticas estaba

ligado a una idea intuitiva sobre la posibilidad de ir más lejos, que no hay límite, el pensar que a cada número siempre se le puede añadir el siguiente de, proporciona una idea intuitiva de que los números no tienen límite, siempre se puede construir otro número mayor, el problema surgió cuando cara a contradicciones era necesario concebir otros tipos de infinito.

Así mismo, el infinito asociado al conteo, producto de una extrapolación de la experiencia sensible con colecciones finitas de objetos, se manifiesta en los niños desde pequeños cuando son capaces de advertir que las reglas de las operaciones elementales son aplicables y válidas para todos los números, o que hay eventos cíclicos como la sucesión del día y la noche que se repiten indefinidamente sin que parezcan tener fin.

Frente a lo anteriormente expuesto, cuando los estudiantes comprenden el concepto del infinito solamente desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, se generan una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que ellos no pueden establecer la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos formales. En consecuencia, Dolores & Valero (2004), afirman que el no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, hace que emerjan consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones.

En consecuencia, surgen algunos interrogantes a partir de las premisas anteriormente expuestas:

¿Tienen los docentes la suficiente claridad del término infinito para ofrecer una explicación adecuada de esta noción? ¿en qué momento de su formación se debe situar al estudiante frente al concepto matemático de infinito actual?; es por ello que a través del planteamiento y ejecución de los objetivos la investigación pretende dar solución a la problemática puesta en conocimiento.

### **Aspectos teóricos**

El infinito, está asociado a la idea de totalidad en acto, o infinito actual el concepto de infinito como unidad (infinito actual); mientras que, si el infinito se usa solo como adjetivo, será difícil de tratar como sustantivo, de este modo se refuerza la visión potencial dejando de lado la actual; otro ejemplo si por infinito se entiende algo muy grande, ese algo será transformado en un número natural con evidentes contradicciones, incluso si el concepto de infinito se entiende como ilimitado, resultara difícil admitir más adelante a un objeto limitado pero infinito, como el conjunto ordenado de puntos de un segmento, finalmente, si el infinito se equipara con lo indefinido, adquiere un significado negativo o evasivo (Aponte, 2014).

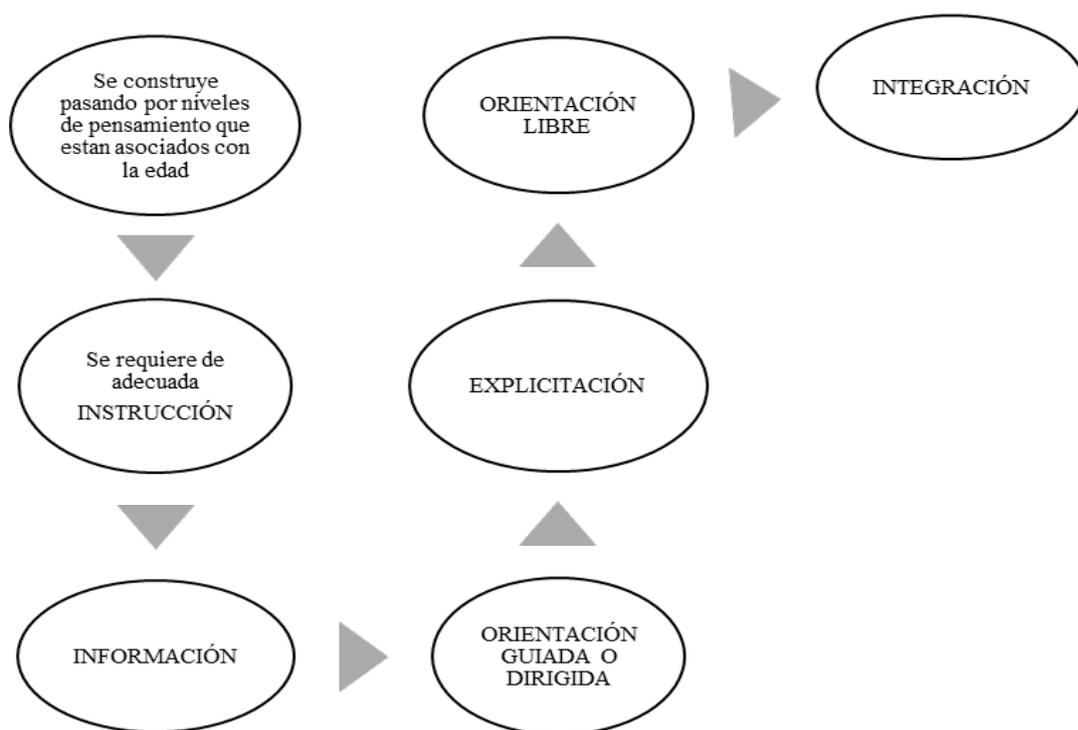
No obstante, estos errores se asocian también a la forma como el docente presenta una situación problema en la clase para la comprensión del infinito; existe un largo camino de estudiosos, científicos y genios que han dedicado varios años en romper los paradigmas que se han afrontado respecto a este concepto; desde Platón y Pitágoras el infinito era apeirón, inconcebible, el caos, el infinito carecía de medida. La voz «apeirón» tal como la emplea Anaximandro, significa «sin fin» o «sin límite», suele traducirse como «lo infinito», «lo indefinido», «lo ilimitado» (Ortiz, 1994; 59).

Si bien es cierto, la contradicción fue base para limar estas concepciones, la idea de infinito generó un revuelo a lo que se conocía como las ciencias exactas, pues con la aparición del

infinito se abrieron caminos a la existencia ineludible de lo ilimitado, por su parte, Aristóteles intentó explicar qué pasaba con los números denominados infinitos a través de dos representaciones, el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial donde se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, concebir una expresión que se divide sucesiva e interminablemente, el segundo, el infinito como una totalidad completa concebida en la actualidad. Esta última noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría.

En consecuencia, el proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de tal forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz (Londoño2017) ; asimismo, El modelo van Hiele ha sido considerado pertinente en diferentes investigaciones para describir el razonamiento de un estudiante en conceptos de objetos matemáticos que sirven como guía para diseñar la instrucción a la que se debe exponer un estudiante en apoyo al progreso del nivel en el que se encuentra para avanzar al siguiente nivel.

En relación con las implicaciones anteriores, El modelo de van Hiele permite el desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas, como se muestra en la siguiente figura.



*Figura 13. Modelo Van Hiele*

Fuente Gamboa & Vargas (2013).

De acuerdo con Jaramillo & Duarte (2006), el modelo Van Hiele está compuesto por la percepción, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, van Hiele propone cinco niveles de razonamiento, los cuales se exponen a continuación con algunas de sus

características:

Nivel 0 predescriptivo. Se perciben y describen características teniendo en cuenta conocimientos previos

Nivel 1 de reconocimiento visual. Se reconocen mediante la observación las propiedades, aunque no se hacen relaciones entre sí.

Nivel 2. Análisis. Se establece una razón comparando, identificando propiedades y reconociendo relaciones.

Nivel 3. Clasificación o de relaciones. Se emplean propiedades para deducir utilizando el razonamiento formal

Nivel 4. Deducción formal. Se establecen similitudes y diferencias entre estructuras a partir de propiedades definidas.

En cuanto a las propiedades de los niveles y sus características se pueden mencionar:

**Secuencialidad fija:** un estudiante no puede estar en un nivel  $n$  de van Hiele sin haber superado el nivel  $n - 1$  ya que los niveles de razonamiento son jerárquicos.

**Adyacencia.** Los objetos o conceptos que para los estudiantes son implícitos en el nivel anterior se vuelven explícitos en el nivel siguiente.

**Distinción.** El nivel siguiente permite estructurar y mejorar la comprensión de los conceptos trabajados durante el nivel anterior

**Separación.** Para que dos personas puedan entenderse entre sí en relación con un concepto matemático, deben estar en un mismo nivel de razonamiento

**Cada nivel tiene su propio lenguaje.** Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje específico, pues no solo la capacidad de razonamiento se refleja en la forma de resolver problemas, sino también en la forma de expresarse y en el significado que se da o puede darse al vocabulario específico de cada nivel.

**Consecución.** El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual (Ibarra, 2014)

Aspectos Metodológicos.

A partir de los objetivos a alcanzar y las preguntas que se pretende encontrar respuesta, la investigación tiene un alcance descriptivo de carácter mixto. En la metodología mixta se combinan técnicas, métodos, aproximaciones dentro de la misma investigación como lo establece Johnson & Onwuegbuzie (2004), de esta manera se fortalece el estudio haciendo uso de narraciones, verbalizaciones de los actores objeto de estudio y datos numéricos. Los estudios mixtos permiten obtener una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos facilitando el fortalecimiento de conocimientos teóricos.

De esta manera el trabajo se orienta a describir a través del modelo de van Hiele como los estudiantes comprenden el infinito y la relación que se establece entre este objeto matemático y las funciones de variable Real, para ello se diseña un guion de entrevista semi estructurada de carácter Socrático que podar ubicar a los estudiantes en uno de los niveles de razonamiento que contempla el modelo.

Dentro de las técnicas utilizadas para la recolección de la información se desarrolló la entrevista semiestructurada de carácter socrático; se propusieron inicialmente varios descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel, aunque hay que aclarar que solo se trabajaron los cuatro primeros niveles, pues van Hiele considera que el nivel cinco es de un rigor teórico demasiado elaborado, durante el proceso de verificación y refinamiento de los descriptores, se demostró si estos cumplían y correspondían a cada nivel de razonamiento, y luego se describió la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, y el concepto de función de variable real. Esta interacción permite, según Sandoval (2002) poder comprender la realidad tanto en su lógica interna como en su especificidad.

La aplicación de la entrevista socrática enmarcada en el modelo de van Hiele propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando. El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

#### Resultados Obtenidos

En este apartado se mostrará avance en los resultados de acuerdo a algunos descriptores preliminares para cada nivel, así como las preguntas correspondientes.

*En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens específicamente para los niveles 0 a III:*

*Nivel 0, **predescriptivo***

*Nivel I, **de reconocimiento visual***

*Nivel II, **de análisis***

*Nivel III, **de clasificación, de relación.***

Para que se pueda establecer una clasificación en niveles dentro del modelo de van Hiele, los descriptores de los niveles por verificar deben cumplir con unas propiedades específicas, por su parte Usiskin (1982) las enuncia de la siguiente manera: Secuencialidad fija, Adyacencia, Distinción, Separación, es importante recordar que cada nivel tiene su lenguaje.

#### **Nivel 0. (Predescriptivo)**

- *Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos*
- *Reconoce que los números reales están compuestos por distintos subconjuntos numéricos.*

#### **Preguntas**

En la siguiente figura ubica dos puntos cualesquiera  $C$  y  $D$  entre los puntos  $A$  y  $B$



¿En cuántas partes quedo dividido el trazo  $A-B$ ?

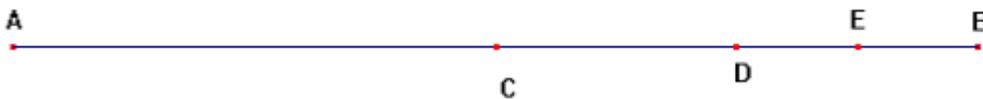
Indica un nombre para el trazo que une los puntos  $A-B$  y cada uno de los trazos que se formaron cuando se ubicaron los puntos  $C$  y  $D$ .

Nivel I. (Visual)

- Identifica de forma visual segmentos de línea e infiere que a partir de ellos se puede establecer un intervalo o subconjunto numérico en los reales.
- Determina un intervalo de números reales como un subconjunto del conjunto de todos los reales.

### Preguntas

Daniela recorre en su bicicleta desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  para esto tiene que pasar por el punto  $C$ , siendo  $C$  el punto medio entre  $A$  y  $B$ , luego por el punto  $E$ , que es el punto medio entre  $D$  y  $B$ ; así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante, siguiendo este proceso es posible que Daniela llegue al punto  $B$  con su bicicleta.



Recorrido de Daniela

Si cada punto que utilizo Daniela para hacer el recorrido de  $A-B$  le corresponde un número real, cuantos números reales se pueden ubicar en dicho recorrido.

Nivel II (De análisis).

- Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.
- Tiene claro que los reales están compuestos por infinitos subconjuntos propios infinitamente divisibles.

### Preguntas

Toma el intervalo real cerrado  $[3,4]$



3

4

Ubica el punto medio entre 3 y 4 e indica el valor correspondiente.

Luego a partir del nuevo valor encontrado y el número 4 encontrar el punto medio entre ellos dos. Realiza este proceso tres veces más, ubicando siempre el punto medio.

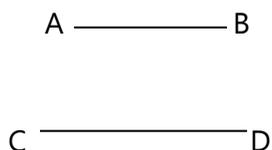
Al realizar el proceso de ubicar el punto medio entre el valor encontrado y el número 4 por muchas veces, indica la cantidad de números que hay entre el punto medio inicial y cuatro.

¿cuántos números reales hay entre tres y cuatro?

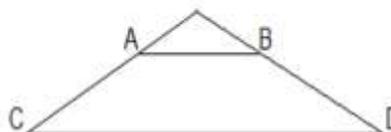
### Nivel III (De clasificación o relación).

- Afirma que a cada intervalo de números reales le corresponde la misma cantidad de números reales que cualquier otro intervalo subconjunto de la inicial.
- Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.

### Preguntas.



Considere los segmentos \_\_\_ y \_\_\_ de la figura N°



¿Cuál de los dos segmentos tiene más, igual o menos puntos?

Al observar el segmento A-B y el segmento C-D se puede indicar ¿cuál de los dos segmentos tiene mayor cantidad de puntos.

## Referencias

- Aponte. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio Histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación matemática.* . Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía : Maestría en Educación énfasis en Educación Matemáticas.
- Attorps, I. B. (2016). *Generating the patterns of variation with GeoGebra: the case of polynomial approximations. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 47(1), 45-57. DOI:10.1080/0020739X.2015.104696.*
- Cantoral, R. y. (2005). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* México.: Editorial Trillas.
- Cornu. (1981). *Apprentissage de la notion de limite :modèlesspontané et modèlespropes. ProceedingsPME-V, . Grenoble, France, : Vol. I, p. 322-326.*
- Cornu. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Tesis de doctorado de tercer ciclo. Universit`e de Grenoble.
- Dolores, Valero. (2004). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar.* . Epsilon, Thales, 58, 20(1), 45 73.
- Esteban, P. (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele. Valencia. 2003. Tesis doctoral publicada. Valencia.* España : Universidad Politécnica de Valencia.
- Gamboa, y Vargas. (2013). *El Modelo Van Hiele y la enseñanza de la Geometría . UNiciencias, vol2, número 1.*
- Ibarra. (2014). *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele.* Antioquia: Universidad de Antioquia. Maestría en Educación.
- Jaramillo y Duarte. (2006). *Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiel.*
- Johnson y Onwuegbuzie. (2004). *Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come .* Los métodos de investigación mixtos: un paradigma de investigación cuyo tiempo ha llegado]. Educational Researcher, 33(7), 14-26. .
- Jurado y Londoño. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", . Colciencias 1115.*
- Llorens. (1995). *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales.* . Valencia, España.
- Londoño. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y Tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* . Medellín: Doctorado tesis, Universidad de Antioquia.

- Londoño, Jaramillo y Esteban. (2017). *Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnología. Policía Nacional, volumen 9 nro 2.*
- Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Tesis doctorado en educación.
- Rendón y Londoño. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Antioquia. Trabajo de investigación de Maestría.* Disponible en [http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%](http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%99)
- Sandoval. (2002). *Investigación Cualitativa.* . Recuperado de <http://contrasentido.yukei.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf>.
- Schwarzenberge, y Tall. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits.* . Mathematics Teaching, 82,44–49.
- Usiskin. (1982). *Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry.CRRSSG Report.* Estados Unidos: Universidad de Chicago.
- Van Hiele. (1957). *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis de doctorado.* . Universidad de Valencia. España: Disponible en <https://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>.