



**Modelo Epistemológico de Referencia que integra la Educación STEAM en el
estudio de la geometría espacial en el grado séptimo**

Alexánder Álvarez Colorado
Camilo Montoya Puerta
Santiago Herrera Giraldo

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesoras
María Camila Ocampo Arenas, Magíster (MSc) en Educación
María Denis Vanegas Vasco, Magíster (MSc) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Medellín, Antioquia, Colombia
2023

Cita	(Álvarez, A. Montoya-Puerta, C. y Herrera, S. 2023)
Referencia	Álvarez, A., Montoya-Puerta, C., y Herrera, S. (2023). <i>Modelo Epistemológico de Referencia que integra la Educación STEAM en el estudio de la geometría espacial en el grado séptimo</i> [Trabajo de grado] Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
Estilo APA 7 (2020)	



Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Coordinador de prácticas: Gilberto de Jesús Obando Zapata



Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

Repositorio Institucional: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Dedicatoria

A nuestras familias, que nos acompañaron durante este largo proceso y supieron comprender las ausencias y desvelos constantes.

A nuestros amigos, que nos apoyaron en los altibajos y nos alegraron con sus bromas y ánimos para seguir adelante.

A nuestras asesoras, María Camila y María Denis por sus conocimientos, su dedicación, su cariño y su confianza en nuestro proceso.

También, a todas las personas que nos acompañaron en este proceso y aportaron de alguna manera en la realización de esta investigación.

Alexánder

A Milio, mi niño adorado; a Santiago, mi querido hermano y, a mi valiente madre, Diana. A mis incondicionales, Yonatan, María Camila, Mónica, Milena, Aura y Karen. Sin ustedes no habría sido posible llegar hasta aquí.

Santiago

A mis padres, Alberto y Herminia por su acompañamiento durante mi carrera y su apoyo incondicional en las decisiones que tomé a lo largo de esta. A mis hermanas Evelin y Natalia, por sus buenos deseos, los consejos y los regaños que no faltaron. Por último, a mis buenos amigos Yimi y John, que siempre estuvieron dispuestos a escucharme y apoyarme en los momentos buenos y malos.

Camilo

A mamá, por su inolvidable amor, sus regaños y sus palabras que me brindan esperanza. A Isa, mi hermana y a mis muchachos que siempre están, que nunca se van ni en mis días buenos y ni en los malos.

Agradecimientos

A la Universidad de Antioquia, por habernos formado desde su diversidad y compromiso con la sociedad.

Al grupo de Investigación MATHEMA-FIEM por brindarnos apoyo y recursos en la realización de este trabajo de grado.

Al semillero de investigación MATHEMA, que nos brindó un sinnúmero de espacios para discutir los aspectos relacionados con este trabajo.

A cada uno de nosotros, por los sacrificios, las traspasadas, por el trabajo duro, por siempre creer en las risas y en el constante apoyo para superar las dificultades.

A Sebastian Aguirre Duque haber aportado y acompañado en el proceso de corrección de estilo y escritura de esta investigación.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Resumen	10
Abstract	11
PREFACIO	12
INTRODUCCIÓN	14
CAPÍTULO PRIMERO: EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN.....	15
<i>1.1 El problema de investigación</i>	15
1.1.1 El ensimismamiento de las matemáticas escolares	15
1.1.1.1 El caso particular de la geometría espacial en el orden local.....	16
1.1.2 La Educación STEAM y la necesidad de vincular las diferentes disciplinas en el estudio de las matemáticas	20
1.1.3 Posibilidades de la enseñanza de la geometría espacial a través de la articulación TAD-STEAM	20
1.1.4 Diseño de la Casa Museo de la cultura Envigadeña	22
1.1.5 Panorama investigativo respecto al estudio de la geometría espacial	24
1.1.6 Pregunta de Investigación.....	25
1.1.7 Objetivos de la Investigación	25
1.1.8 Alcances de la investigación y aportes al campo de la didáctica de las matemáticas	25
<i>1.2. Marco teórico</i>	26
1.2.1 Un derrotero acerca de la Teoría Antropológica de la Didáctica.....	26
1.2.1.1 La didáctica de las matemáticas	27
1.2.1.2 La transposición didáctica	28
1.2.1.3 Praxeologías matemáticas y didácticas	30
1.2.1.4 Problemas didácticos: un asunto institucional.....	32

1.2.1.5 Los Modelos Epistemológicos de Referencia	33
1.2.1.6 Actividad de Estudio e Investigación	35
1.2.2 Educación STEAM.....	35
1.2.3 Integración TAD – STEAM	38
<i>1.3. Marco metodológico.....</i>	<i>40</i>
1.3.1 Enfoque y paradigma investigativo	40
1.3.2 Ruta metodológica.....	41
1.3.2.1 Un análisis económico-institucional del estudio de la geometría espacial en Colombia.....	41
1.3.2.2 Elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia	42
1.3.2.3 Implementación de una AEI	42
1.3.2.4 Desing Thinking y el Aprendizaje Cooperativo	44
1.3.3 Descripción de la población.....	45
1.3.4 Consideraciones éticas.....	45
CAPÍTULO SEGUNDO: LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	47
<i>2.1. El análisis económico-institucional del estudio de la Geometría Espacial.....</i>	<i>47</i>
2.1.1 Estudio de la geometría espacial en una institución educativa del municipio de Envigado	48
<i>2.2. Un MER en torno al diseño de la Casa Museo de la Cultura Envigadeña.....</i>	<i>55</i>
2.2.1 Determinación de poliedros a partir de otros poliedros.....	56
2.2.2 Determinación de polígonos a partir del truncamiento de poliedros	61
2.3. Una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) en torno al diseño de la Casa Museo de la Cultura Envigadeña.	71
CAPÍTULO TERCERO: CONCLUSIONES	90
REFERENCIAS.....	93

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fase tres: Implementación del modelo en forma de una AEI.	43
Tabla 2. Referencias al estudio de la geometría espacial en los ciclos de educación secundaria, tomadas de los EBCM.	49
Tabla 3. Referencias al estudio de la geometría espacial en los grados de educación secundaria, tomadas de los DBA.	50
Tabla 4. Poliedros generados a partir de los poliedros platónicos.	58
Tabla 5. Poliedros generados por el truncamiento de tipo I.	65
Tabla 6. Poliedros generados por el truncamiento de tipo II.	65
Tabla 7. Cuestiones asociadas a las disciplinas de la Educación STEAM derivadas de la pregunta generatriz.	69
Tabla 8. Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría? – Pretest.	71
Tabla 9. Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría espacial? – Pretest.	72
Tabla 10. Respuesta a la pregunta ¿Con que elementos de tu entorno asocias la geometría espacial? – Pretest.	73
Tabla 11. Concepción de los estudiantes acerca de la relación entre la geometría espacial y la Educación STEAM – pretest.	74
Tabla 12. Diseño de las obras de arte realizadas por los estudiantes.	79
Tabla 13. Modelos de la Casa Museo elaborados por los estudiantes.	80
Tabla 14. Preguntas construidas por los estudiantes por cada disciplina de la Educación STEAM.	83
Tabla 15. Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría? - Postest.	85
Tabla 16. Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría espacial? - Postest.	86
Tabla 17 Respuesta a la pregunta ¿Con que elementos de tu entorno asocias la geometría espacial? -Postest.	88
Tabla 18. Concepción de los estudiantes acerca de la relación entre la geometría espacial y la Educación STEAM- Postest.	88

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 <i>Fragmento de un diario de campo.</i>	17
Figura 2 <i>Limitaciones en el material educativo.</i>	19
Figura 3 <i>Propuesta de investigación.</i>	23
Figura 4 <i>Proceso de transposición didáctica.</i>	30
Figura 5 <i>Niveles de codeterminación didáctica.</i>	33
Figura 6 <i>Instrumento de priorización de ideas por disciplina STEAM.</i>	45
Figura 7 <i>Apartado «para contextualizar», tomado del libro de texto.</i>	52
Figura 8 <i>Apartado «para practicar», tomado del libro de texto.</i>	53
Figura 9 <i>Clasificación de los cuerpos geométricos.</i>	54
Figura 10 <i>Representación de la víbora de pestañas usando rombododecaedros.</i>	57
Figura 11 <i>Construcción del dodecaedro.</i>	59
Figura 12 <i>Estructura del triacontaedro rómbico formado a partir de un dodecaedro y un icosaedro.</i>	60
Figura 13 <i>Pilar de la estructura de la Casa Museo Envigadeña.</i>	60
Figura 14 <i>Truncamiento de tipo I y II en el cubo.</i>	63
Figura 15 <i>Diseño del estómago de la escultura Monumento a la fecundidad.</i>	64
Figura 16 <i>Tipos de truncamiento en un prisma triangular.</i>	67
Figura 17 <i>Pie del monumento a la fecundidad.</i>	67
Figura 18 <i>Clase de geometría espacial.</i>	76
Figura 19 <i>Truncamiento de una pirámide por parte de un estudiante.</i>	77
Figura 20 <i>Praxeologías alrededor de la construcción del diseño de un modelo de una obra de arte.</i>	78
Figura 21 <i>Praxeologías alrededor de la construcción del diseño de la Casa Museo.</i>	82

Siglas, acrónimos y abreviaturas

TAD	Teoría Antropológica de lo Didáctico
STEAM	Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas
TD	Transposición Didáctica
MER	Modelo Epistemológico de Referencia
MEN	Ministerio de Educación Nacional
OM	Organización Matemática
OS	Organización Científica
OT	Organización Tecnológica
OE	Organización Ingenieril
OA	Organización Artística
OD	Organización Didáctica
AEI	Actividad de Estudio e Investigación

Resumen

La integración entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y la Educación STEAM, se ha configurado como una línea de investigación internacional vigente, por ello, se ha reconocido la necesidad de profundizar en la construcción de propuestas que aporten a su consolidación. En esta investigación nos proponemos evaluar el impacto de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI), que a su vez se deriva de un MER que integra la Educación STEAM en el estudio de la geometría espacial de los estudiantes de séptimo grado de una institución educativa en el municipio de Envigado. Como situación que moviliza dicho MER proponemos la construcción de la Casa Museo de la Cultura envigadeña, la cual permite superar algunas restricciones presentes en el estudio de las matemáticas; a saber, el ensimismamiento de las matemáticas escolares y la desconexión entre el estudio de la geometría 2D y 3D. La metodología de esta investigación es propia de la TAD, en general, esta presenta un enfoque cualitativo bajo un paradigma hermenéutico. Los resultados permiten, por un lado, conectar el estudio de la geometría espacial con las demás disciplinas de la Educación STEAM y, por otro lado, asociar las razones de ser del estudio de la geometría espacial a la determinación de los sólidos.

Palabras clave: Educación STEAM, Modelo Epistemológico de Referencia, Geometría espacial, Determinación de sólidos.

Abstract

The integration between the Anthropological Theory of Didactics (TAD) and STEAM Education has been shaping up as a current international research line. Therefore, there is a recognized need to delve deeper into the development of proposals contributing to its consolidation. In this research, we aim to assess the impact of implementing a Reference Epistemological Model (MER), within the framework of TAD, which integrates STEAM Education into the study of spatial geometry for seventh-grade students at an educational institution in the municipality of Envigado. As a motivating factor for this MER, we propose the desing of the Envigado Culture Museum House, which allows us to overcome certain constraints in the study of mathematics, namely, the insularity of school mathematics and the disconnection between the study of 2D and 3D geometry. The methodology of this research is consistent with TAD, generally adopting a qualitative approach within a hermeneutic paradigm. The results, on the one hand, facilitate the connection of the study of spatial geometry with other disciplines within STEAM Education, and, on the other hand, associate the reasons for studying spatial geometry in school with the determination of solids.

Keywords: STEAM Education, Reference Epismological Model, Spatial geometric, determination of solids.

PREFACIO

«El fin último en la escuela debe ser aumentar el instinto. La conciencia razonable es epifenómeno»,
Fernando González.

Melquíades —personaje célebre de la novela cumbre de Gabriel García Márquez, *Cien años de Soledad*¹— encarna fielmente la figura del maestro. Es un gitano de barba montaraz, de complexión corpulenta y manos de gorrión, cuya sabiduría superó en demasía a los hombres de su época y cuya esmerada dedicación pedagógica y asombrosa claridad didáctica, le llevaría a transformar la visión de los habitantes de Macondo —escenario donde transcurre la novela—. El esmero investigativo que infundió en la remota y mágica población de Macondo con la creación del laboratorio de alquimia habría de ejercer una influencia determinante en el futuro de la aldea.

José Arcadio Buendía, a quién Melquíades hubo de transmitirle aquella fascinación por los inventos y la ciencia, planteó asombrosas conjeturas en aquel lugar por el resto de su vida. Una vez trató de utilizar el sistema de un péndulo para crear una máquina que le permitiera volar por los aires como un cóndor. Aunque fracasó, este hecho no nubló su laboriosa dedicación por *cuestionar el mundo*. José Arcadio Buendía habría de heredar también la dedicación pedagógica y la claridad didáctica del gitano. Fue así como heredó en sus hijos la pasión por la ciencia. El primero, Aureliano, aprendió rápidamente y con una adelantada habilidad para su edad el secreto de los metales; mientras que el segundo, José Arcadio, permaneció desinteresado y terminó por abandonar tiempo después aquellas aventuras imaginativas.

Permítasenos imaginar que el conocimiento impartido por José Arcadio Buendía a sus hijos no era el de la alquimia sino el de las matemáticas ¿Qué sería del joven José Arcadio si hubiese descubierto el sentido del estudio de las matemáticas? ¿Qué posibles características podría tener este estudio con sentido? ¿Dicho estudio tiene que ver con el de otras disciplinas científicas? ¿Y el desinterés de José Arcadio tiene alguna motivación didáctica? Estas son algunas cuestiones que emergen al poner la vista en el proceso de estudio de las matemáticas. Un reclamo persistente en el subtexto de la novela consiste en que solo José Arcadio y otros pocos personajes más pueden encontrar un sentido a sus aventuras y pasión desbordada. ¿Podría este hecho ser análogo a los apasionados por las matemáticas?

El realismo mágico con el que García Márquez presenta estos personajes en su novela nos permite entrever lo que deseamos plantear en tan apretujadas líneas: se trata, de un lado, de la actitud científica del didacta y del maestro de matemáticas —no entraremos a discutir si el maestro

¹ García, G. (1967). *Cien años de soledad*. Sudamericana de Buenos Aires.

es un investigador en sí mismo, sin embargo, consideramos que sería la actitud ideal de este profesional ante el mundo—. Esta actitud no es otra que la del *cuestionamiento del mundo*. Y, por otro lado, se trata de poner en el panorama del maestro al estudiante desinteresado, aquel que no encuentra un sentido a los conocimientos matemáticos, y que aun con la pasión desbordada de los maestros para que los aprenda no logra encontrar un significado para llevar a cabo su estudio. En esta medida, cobra relevancia preguntarse acerca de cómo encontrar el sentido del estudio de las matemáticas y si este puede estar relacionado con el vínculo entre la ciencia, el diseño, la tecnología y los inventos, tal y como lo hace José Arcadio Buendía.

Para finalizar, diremos que la sociedad en general, y en particular la colombiana, necesita una manera diferente de enseñar matemáticas. Una que haga hincapié en el porqué del estudio de los conocimientos matemáticos y que llegue de manera más íntima a los estudiantes que no encuentran alguna relación entre las cuestiones matemáticas y el mundo. Una manera que lleve a los estudiantes a problematizar y cuestionar el mundo; en la que se enfrenten a preguntas para las que no tienen una respuesta inmediata. Para lograr esto, tendremos que reformular nuestra experiencia didáctica, epistemológica y pedagógica en relación con la enseñanza de las matemáticas, crear modelos de enseñanza y reformular otros. Este es un camino largo, nuestra disciplina es joven, pero tiene una complexión marchita, de robustez. ¡Atención a lo que viene!

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de grado presentamos los resultados de una investigación para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. En este proponemos un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) —enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)— que integra la Educación STEAM (por sus siglas en inglés, Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics), en el que se desarrollan, en particular, los aspectos relacionados con el estudio de la geometría espacial. En este sentido, pretendemos brindar algunas *razones de ser* al estudio de la geometría en la escuela secundaria en Colombia. El interés por plantear este modelo epistemológico alternativo nace de nuestras prácticas pedagógicas², nuestras vivencias en el sistema escolar y de nuestros intereses en la didáctica de las matemáticas.

Así pues, en el primer capítulo presentamos el problema, su justificación, la importancia y la pertinencia de esta investigación para el campo de la didáctica de las matemáticas, además, mostramos algunos de los aspectos teóricos que forman parte de la TAD: la transposición didáctica, los niveles de codeterminación didáctica, las praxeologías matemáticas y didácticas, los MER y la Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Estos aspectos son fundamentales para la configuración de esta investigación. De igual manera, enunciamos algunos desarrollos teóricos en relación con la Educación STEAM y su integración con la TAD. Por último, exponemos la metodología con la que llevamos a cabo la elaboración de esta investigación.

En el segundo capítulo, presentamos los resultados de este proceso investigativo. En primer lugar, exponemos explícitamente un MER que integra la Educación STEAM en la situación del diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña, en el que desarrollamos, en particular, los aspectos vinculados al estudio de la geometría espacial. En segundo lugar, presentamos una AEI —que se deriva del MER construido— implementada con los estudiantes de séptimo grado de una institución educativa en el municipio de Envigado, Antioquia.

Para finalizar, en el tercer capítulo proponemos algunas conclusiones derivadas de esta investigación. Entre ellas se encuentran las que se obtienen del análisis del MER y su implementación, así como los limitantes y algunas oportunidades y perspectivas investigativas que quedan abiertas a partir de esta investigación para el campo de estudio de la geometría espacial en la escuela y, en general, para el campo de la didáctica de las matemáticas con relación al vínculo Educación STEAM-TAD.

² La Práctica Pedagógica en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia consiste en una actividad de investigación formativa desarrollada por el estudiante cada semestre, con la intención de experimentar un conocimiento situado a partir de la identificación y aporte a la solución de problemas que se encuentran en los contextos educativo, artístico, cultural y social.

CAPÍTULO PRIMERO: EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN

«La formulación clara y precisa del problema es la mitad de su solución»,
John Dewey.

1.1 El problema de investigación

En este apartado presentamos el problema de investigación, el cual está relacionado con el estudio aislado de las matemáticas y, en particular, el de la geometría espacial en una institución educativa del municipio de Envigado, Antioquia. En este sentido, a partir del marco de la TAD, algunos autores reportan los beneficios que trae consigo el estudio interdisciplinar de las matemáticas (Terradellas, 2011; Topphol, 2018; Chevallard et al., 2020; Lombard et al., 2023). No obstante, existen pocos estudios con esta intención. Como respuesta a ello, la Educación STEAM emerge como una alternativa interdisciplinaria, la cual presenta el objetivo de cultivar un entorno educativo donde se promuevan habilidades vitales para afrontar desafíos del mundo real, incluyendo la innovación, la creatividad, el pensamiento crítico y el trabajo colaborativo. Como consecuencia, y debido a la atención que han tenido las propuestas que relacionan la Educación STEAM con la TAD, profundizaremos en el estudio de la geometría espacial de manera interdisciplinar.

1.1.1 El ensimismamiento de las matemáticas escolares

Desde finales del siglo XIX, la comunidad matemática se distanció progresivamente del mundo físico. A medida que se desarrollaban los estudios matemáticos se fueron separando del ámbito de las aplicaciones en otras disciplinas científicas (Kline, 2000). En consecuencia, al estar aisladas de los dominios de las aplicaciones, las matemáticas limitaron su propio campo a su estudio en sí mismo.

Uno de los escenarios en los que se ha manifestado la separación de las matemáticas y las demás disciplinas científicas es en la enseñanza escolar, en donde ha predominado un enfoque teórico por encima de su versión aplicada (Chevallard, 2013). Es así como las matemáticas escolares padecen una especie de *ensimismamiento* en el que se propone su estudio de manera aislada de las demás disciplinas escolares³. Como resultado, la enseñanza y aprendizaje de las

³ Hacemos referencia a las matemáticas y demás disciplinas como *escolares* por su diferenciación de los campos profesionales. En adelante, permítasenos el abuso en la notación evitando usar dicho adjetivo.

ciencias naturales, las ciencias sociales, las matemáticas y las demás disciplinas, se abordan de manera separada en la escuela.

El *ensimismamiento* es una consecuencia del fenómeno de la autosuficiencia de las matemáticas (Barquero et al., 2014) que, a su vez, está enmarcado en *el paradigma de visita de las obras* (Chevallard, 2013). En este paradigma didáctico los saberes matemáticos son expuestos como obras de arte en un museo, allí son admirados y venerados por los estudiantes, aunque estos no sepan las razones que motivan llevar a cabo su estudio. Es decir, el estudio de las cuestiones matemáticas se presenta de una manera autoritaria y los estudiantes no saben el *por qué* y el *para qué* estudiarlas. Si seguimos con la analogía, en este museo el pabellón de las matemáticas y el pabellón de las ciencias, las artes, y las demás disciplinas se encuentran aislados.

Por otra parte, y a propósito del desinterés de José Arcadio, planteado en el prefacio de esta investigación, consideramos —valiéndonos de la suposición de que está estudiando matemáticas— que este se debe en gran medida a la manera en la que su padre organiza los conocimientos y su estudio. En otras palabras, el cómo se presentan las cuestiones en el paradigma de la visita de las obras ocasiona el desinterés de los estudiantes (Chevallard, 2013). De hecho, esta presentación aislada de las cuestiones ha ocasionado que se piense que las clases de matemáticas no tienen nada que ver con el resto de las disciplinas; en esta medida, no responden ni al sentido de su estudio ni a los contextos de los estudiantes⁴.

Es así como en el paradigma de la visita de las obras, es común que los profesores no se planteen cuestiones fundamentales como ¿Qué es la geometría espacial? ¿Por qué hacerse la pregunta, *qué es geometría espacial?* ¿Y en la actualidad, qué motiva el estudio de la geometría espacial? Este aspecto trae consigo consecuencias como que el profesor de matemáticas, en su calidad de agente en una determinada institución escolar, crea o suponga implícitamente que *sabe qué es la geometría espacial y cómo llevar a cabo su estudio* sin cuestionárselo (Chevallard, s.f.). Esta falta de cuestionamiento implica que la responsabilidad sobre lo que se enseña y cómo se organiza su estudio, recaiga por ejemplo en los libros de texto, que por supuesto, no son entelequias ni libros sagrados y con frecuencia presentan limitaciones.

1.1.1.1 El caso particular de la geometría espacial en el orden local

A pesar de que en la institución educativa donde se realizó esta investigación se implementan proyectos transversales que implican el trabajo conjunto de los estudiantes en

⁴ El contexto al cual nos referimos aquí hace alusión a las actividades humanas que son propias de nuestra civilización, como la tarea de realizar un mueble o tomar el tren.

diferentes disciplinas, se observa una falta de reconocimiento por parte de los estudiantes del vínculo entre estas disciplinas y las matemáticas (ver figura 1).

Figura 1

Fragmento de un diario de campo.

Los estudiantes en este trimestre están trabajando en un proyecto transversal el cual se desprende de una salida pedagógica que hicieron al municipio de Cisneros. En este proyecto deben crear una aplicación móvil integrando las diferentes disciplinas como las ciencias, las artes, las matemáticas, entre otras. Al preguntar por este proyecto, los estudiantes manifiestan que debe realizar tareas por separado en cada materia. A continuación, se muestra lo que deben realizar en matemáticas, lo cual refleja una desconexión con las disciplinas.

1. Escriban al frente de cada fila los lugares que escogieron con sus respectivos precios, para ofrecer a las personas que van a utilizar la aplicación.

Sitios turísticos	
Hoteles	
Restaurantes	
Desplazamientos	
Otros	

2. Describa un plan que ofrezca descuentos en la plataforma, con base en unas condiciones que deben plantear.
3. De cuántas maneras diferentes puede escoger una persona un sitio turístico un hospedaje y un restaurante, de los planteados en el punto 1.
4. Describa el algoritmo utilizará para el desarrollo de la aplicación.

Fuente: *Diario de campo, 20 de septiembre del 2022.*

En esta medida, los estudiantes desarrollan en cada proyecto los compromisos establecidos de manera aislada sin entablar vínculos entre las disciplinas. Así, estos realizan por un lado las tareas propuestas en artística y por otro, las de matemáticas, sin que haya elementos articuladores entre dichas tareas. Esto mismo suele ocurrir con las tareas en el resto de las disciplinas escolares. Preguntas como ¿Y esto qué tiene que ver con las matemáticas?, ¿Cómo es posible que se estudien estas cosas en la clase de matemática? son frecuentes cuando los estudiantes se enfrentan a estas

experiencias en las que deben trabajar en proyectos transversales. Un ejemplo ilustrativo se refleja en un diálogo extraído de los diarios de campo del jueves 22 de septiembre del 2022:

Profesor (P): ¿Cómo van con el proyecto?

Estudiante cero (E0): Míster, yo no sé para qué nos ponen hacer eso en matemáticas, vea que lo del algoritmo lo vamos a hacer en tecnología.

P: ¿Y eso no tiene que ver con matemáticas?

E0: Míster no, en matemáticas debería ser lo de los números y ya.

En lo que respecta específicamente a la geometría espacial, los estudiantes a menudo no logran percibir la conexión que existe entre esta disciplina y las demás. En consecuencia, tienden a considerar que su estudio se justifica como un fin en sí mismo o simplemente como una obligación escolar. Cuando exploramos esta situación en el contexto de algunos proyectos educativos transversales, los estudiantes expresaron que no veían ninguna relación entre lo que aprendían en artística, ciencias sociales y español y lo que estudiaban en geometría espacial, en el área de matemáticas, como se muestra en el siguiente diálogo obtenido de los diarios de campo del martes 4 de octubre del 2022:

Profesor (P): ¿Ustedes en el proyecto qué hicieron en matemáticas?

Estudiante uno (E1): Identificamos algunas figuras.

P: ¿Y en español?

E2: Pues... Hicimos un escrito.

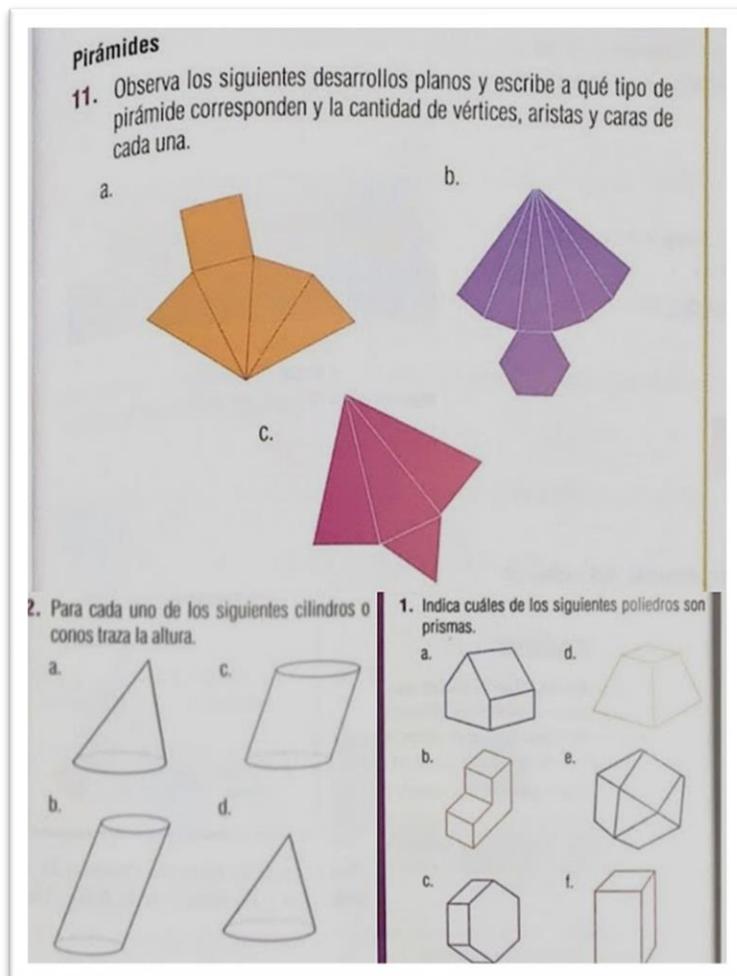
P: ¿Un escrito de las figuras... [Interrumpe un estudiante]

E1: no, eran cosas separadas y también con sociales, y así...

Por otro lado, a pesar de que los Documentos Orientadores del currículo en Colombia (MEN, 1998; 2006; 2016) han incorporado asuntos como la visualización, el estudio geométrico con el uso de tecnologías y la integración del espacio con disciplinas como el arte y la arquitectura; al analizar el libro de texto *Herramientas Digitales Para el Aprendizaje Secuencias Matemáticas 7* (Castela, 2017) – el cual es un material de apoyo utilizado en la institución y que retomaremos más adelante en el análisis económico institucional – se evidencia que el enfoque hacia el estudio de la geometría espacial sigue siendo aislado, fragmentado y desconectado de estas prácticas interdisciplinarias. Estos documentos se centran en representaciones planas en particular, sin considerar objetos tridimensionales ni el contexto para establecer relaciones con los cuerpos geométricos. Además, no se fomenta la conexión con la resolución de problemas que establezca vínculos con otras disciplinas, lo que restringe el estudio de la geometría espacial a lo que propone el libro de texto (ver figura 2).

Figura 2

Limitaciones en el material educativo.



Fuente: Adaptado de Castela (2017).

En adición a lo anterior, se presenta el hecho de que los estudiantes dotan con características planas a las figuras espaciales. Así, cuando les mostramos cuerpos como prismas o pirámides, mencionaron que eran *cuadrados*, *rectángulos* y *triángulos* (Sesión 1, 13 de marzo del 2023). A esto, se suma la preocupación de que los estudiantes podrían no reconocer que, al estudiar los sólidos, surgen nuevos objetos geométricos que no se pueden abordar únicamente con figuras planas. Por ejemplo, los ángulos diedros o la noción de volumen.

Hasta este punto, hemos analizado el problema del *ensimismamiento* de las matemáticas y, en particular, resaltamos el caso de la geometría espacial en la institución escolar en la que se desarrolla esta investigación. Ahora, veremos cómo a partir del punto de vista de algunos autores, es necesario llevar a cabo el estudio interdisciplinar de las

matemáticas, y en particular, de la geometría espacial, que es entendida como la «ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico» (Guillén, 2010, p.2).

1.1.2 La Educación STEAM y la necesidad de vincular las diferentes disciplinas en el estudio de las matemáticas

A pesar del *ensimismamiento* de las matemáticas, algunos autores en el marco de la TAD han destacado los beneficios de promover su estudio interdisciplinar. Entre estos, se encuentra la resolución de problemas, la contextualización de los conocimientos, la conexión entre las diferentes disciplinas, la motivación y el trabajo colaborativo de los estudiantes (Terradellas, 2011; Topphol, 2018; Chevallard et al., 2020; Lombard et al., 2023). Sin embargo, son escasas las investigaciones que se han realizado con la intención de promover este estudio interdisciplinar de las matemáticas (Llanos et al., 2019).

Esta relación interdisciplinaria entre las matemáticas y otras disciplinas es, además de necesaria, posible debido a que las matemáticas no suponen un fin en sí mismo. Por el contrario, las matemáticas se presentan como un instrumento que usan el resto de las disciplinas para expresar relaciones, leyes, modelos y para analizar situaciones. De la misma manera, las demás disciplinas aportan a las matemáticas un campo amplio para su aplicación (Sandía et al., 2014).

Un intento reciente por construir lazos interdisciplinarios entre las matemáticas y otras disciplinas es la Educación STEAM, la cual es entendida como la articulación entre la ciencia y la tecnología interpretadas a través de la ingeniería y las artes, con base en el lenguaje de las matemáticas (Yakman, 2008). La Educación STEAM permite la formación de un conocimiento integral, complejo e interdisciplinar que promueve habilidades como el pensamiento crítico, creativo, reflexivo, lógico y la innovación y el trabajo colaborativo (Celis et al., 2021). De acuerdo con esta perspectiva, los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas y crean modelos en los que indagan acerca de las posibles soluciones a los desafíos que les rodean. Esto proporciona una visión amplia que permite fomentar el empleo de diferentes métodos tanto fuera como dentro del aula para investigar, modelar y explicar el mundo (Stroud y Baines, 2019).

1.1.3 Posibilidades de la enseñanza de la geometría espacial a través de la articulación TAD-STEAM

En algunas investigaciones se reporta que el desarrollo de las habilidades espaciales se presenta como un factor determinante en la alfabetización en las disciplinas de la Educación STEAM (Kiernan et al., 2021; Taylor et al., 2013, Uttal et al., 2012). Es así como situaciones que

vinculan el desarrollo de estas habilidades, tales como el cambio de algunos fenómenos físicos en el tiempo, la quiralidad de las moléculas, las transformaciones de las capas de la tierra, el modelado de un envase, entre otras, son situaciones potenciales para llevar a cabo procesos en la Educación STEAM.

La geometría espacial, debido a que ofrece una amplia gama de situaciones que promueven las habilidades espaciales, las cuales involucran las formas, las ubicaciones y las relaciones con el mundo, se presenta como un campo potencial para la integración de las disciplinas de la Educación STEAM (Labrigui-Rubio, 2022; Cadena-Blanco, 2022). Por ello, al estudiar la geometría espacial dentro del marco de la Educación STEAM los estudiantes tienen la oportunidad de incluir conceptos y habilidades de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y el arte. Además, la creatividad artística se fusiona con la geometría espacial al explorar formas y estructuras.

En la perspectiva de la práctica docente, la elección de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se revela como crucial por diversas razones fundamentales. La TAD ofrece un sólido marco teórico que se sustenta en el análisis profundo de las prácticas y praxeologías matemáticas. Este enfoque integral considera el contexto social y cultural en el que se desenvuelven tanto los estudiantes como los docentes. Al comprender las complejidades y desafíos que los estudiantes enfrentan al aprender matemáticas en su entorno específico, se pueden desarrollar estrategias pedagógicas ajustadas y efectivas para superar estas dificultades.

En adición a esta comprensión contextual, la TAD subraya la importancia del proceso de la transposición didáctica. Este proceso se refiere a la transformación de los conocimientos matemáticos en conocimientos escolares, lo requiere de una adaptación contextualizada de los contenidos matemáticos para satisfacer las necesidades y características individuales de los estudiantes (Chevallard et al., 2000). En este sentido, la TAD proporciona a los docentes herramientas y conceptos específicos para analizar y reflexionar en relación con esta transposición. Al dotar a los educadores de esta capacidad de análisis, la TAD les brinda un marco que potencia tomar decisiones fundamentadas basadas en una comprensión profunda de cómo los estudiantes aprenden y cómo los conocimientos matemáticos pueden ser efectivamente transmitidos en el contexto escolar.

En esta medida, la geometría espacial desempeña un papel clave en la creación y diseño de productos y prototipos tridimensionales en campos como la arquitectura, donde se necesita la habilidad para concebir y planificar estructuras. En la ingeniería y los procesos industriales de diseño, donde es crucial que estas estructuras cumplan con propiedades específicas. Así como en el arte, donde las ideas matemáticas y los procesos técnicos que consideran las propiedades de las figuras pueden tener una influencia significativa. Por ello, la geometría espacial puede proporcionar a los estudiantes una comprensión profunda de las formas y las estructuras en el

espacio tridimensional, lo que les permitiría visualizar y manipular algunos objetos en un entorno real (Cadena-Blanco et al., 2022).

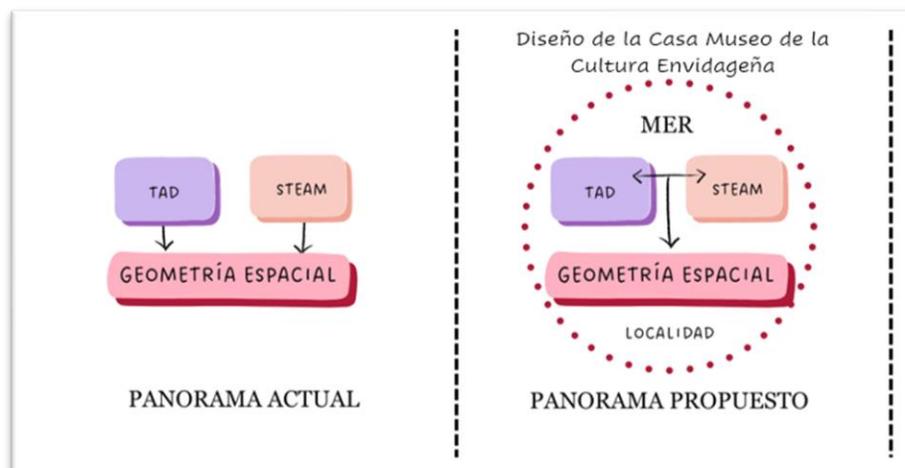
Así, la comunidad de investigadores en Educación Matemática ha demostrado un particular interés en propuestas que vinculan tres campos específicos: i) la Educación STEAM y la geometría espacial (Mulero, 2021; Cadena-Blanco, 2022; Sánchez, 2022); ii) la TAD y la geometría espacial (Torrubia-Barroso, 2019; Rojas et al., 2021a; 2021b; 2023); y iii) la relación emergente entre la TAD y la Educación STEAM (Leal et al., 2021; Costa et al., 2019; Escobar et al., 2022). No obstante, los estudios que abordan la posible conexión entre TAD y Educación STEAM en contextos centrados en la geometría espacial han sido poco abordados.

De acuerdo con los planteamientos anteriores, proponemos formular un MER —el cual se entiende como una hipótesis didáctica y modelo alternativo, que tiene un carácter provisional y es relativo a la institución se desarrolle (Fonseca et al., 2014)—, que integre la Educación STEAM como punto de partida y analizar, desde esta perspectiva, cómo puede desarrollarse el estudio de la geometría espacial. Esta formulación no solo se presenta como pertinente sino también como necesaria, puesto que, para plantear un problema didáctico en términos de la TAD, es indispensable fundarlo en su dimensión epistemológica (Gascón, 2011).

1.1.4 Diseño de la Casa Museo de la cultura envigadeña

Dentro de las posibilidades de la enseñanza de la geometría espacial encontramos que en el municipio de Envigado la cultura y el arte son un elemento esencial de la idiosincrasia de sus habitantes. No obstante, todos los escenarios donde reposan esculturas u obras de los principales artistas se encuentran separados. En esta medida, proponemos como situación que moviliza este MER la configuración y el diseño de algunos elementos de un espacio que está enfocado al cuidado, la preservación y la difusión del patrimonio artístico y cultural del municipio: la Casa Museo de la Cultura envigadeña (ver la figura 3).

Figura 3
Propuesta de investigación.



Esta situación permite la convergencia de las diferentes disciplinas de la Educación STEAM, debido a su potencial para presentar situaciones espaciales, tanto en la configuración y el diseño de los espacios, como en el cuidado y la preservación del patrimonio artístico de la región. Además, es importante resaltar que al hablar de la cultura de Envigado también se habla de la cultura del Área metropolitana del Valle de Aburrá, puesto que la configuración de este municipio siempre ha estado unida al desarrollo de Medellín y los demás municipios que componen esta urbe.

Por último, es importante mencionar que esta propuesta está enmarcada en el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chellavard, 2013) que tiene como objetivo:

[...] crear un nuevo ethos cognitivo en el cual, cuando surge alguna cuestión Q, x [algún estudiante] la tome en cuenta y, cuando sea posible, empiece su estudio con el objetivo de aportarle una respuesta valiosa R, en muchos casos con alguna ayuda de algún y [profesor].
(p. 168)

Es decir, que cualquiera que desee emprender la tarea de aprender alguna cuestión, no rehúya o evite su estudio; por el contrario, se enfrente a esta y trate de aportarle una respuesta valiosa. En otras palabras, en este nuevo paradigma los estudiantes no se oponen al estudio de una cuestión que no tiene una solución inmediata, principio que es denominado como *Herbartiano* (Chevallard, 2013). Esta actitud es propia del quehacer del científico, que se enfrenta frecuentemente a cuestiones *problemáticas* y *abiertas*, en las que con frecuencia debe solucionar en comunidad y, en muchas ocasiones, acudiendo a profesionales de otras áreas del conocimiento.

A continuación, exploraremos algunos de los resultados más significativos obtenidos durante una revisión de la literatura que llevamos a cabo como parte de esta investigación, la cual contribuyó en la configuración del problema de investigación. La versión completa de esta revisión de literatura la presentamos en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XVII CIAEM) celebrada en Lima, Perú, 2023.

1.1.5 Panorama investigativo respecto al estudio de la geometría espacial

Con la intención de profundizar en los desarrollos investigativos alrededor de la geometría espacial, la TAD y la educación STEAM, realizamos una revisión sistemática de la literatura que tuvo como objetivo principal indagar acerca de cómo se ha abordado el estudio de los cuerpos geométricos en el panorama investigativo de las Didácticas de las Matemáticas en el ámbito local e internacional. Como principales resultados se encuentra la tendencia a emplear las TIC en el estudio de la geometría espacial y la ausencia de investigaciones que enlacen la Educación STEAM y la TAD en el estudio de la geometría espacial, en particular en lo que se refiere a la elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia. De esta manera, la integración TAD-STEAM se constituye en un campo abierto para la investigación en Didáctica de las matemáticas (Álvarez et al., 2022).

En suma, Rojas et al. (2021a) proponen avances sustanciales en el estudio de los cuerpos geométricos, relacionándolo con la modelización espacio-geométrica. En esta investigación a través de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), proponen a los estudiantes la construcción de un envase de un perfume como la situación espacial que moviliza su estudio. Al finalizar, los autores presentan la pertinencia de la elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia acerca del estudio de la geometría espacial.

En esta perspectiva, el panorama hallado en esta revisión de la literatura revela la diversidad de enfoques teóricos y metodológicos que existen en relación con la investigación de los cuerpos geométricos. Se evidencia una tendencia creciente a incorporar herramientas tecnológicas como la Realidad Aumentada, la impresión 3D, *software* de geometría dinámica, así como enfoques basados en STEAM y modelación en el campo de la geometría espacial (*ibid.*, 2022). Asimismo, observamos un notable interés en los enfoques basados en la Educación STEAM y la modelación en el ámbito de la geometría espacial.

1.1.6 Pregunta de Investigación

De esta manera, planteamos la pregunta de investigación: ***¿Cómo un Modelo Epistemológico de Referencia que integra la Educación STEAM aporta al estudio de la geometría espacial en el grado séptimo en una institución educativa del municipio de Envigado?***

1.1.7 Objetivos de la Investigación

Dicho lo anterior, demarcada la problemática y la pregunta de investigación, nos proponemos abarcar el siguiente objetivo general: ***evaluar el impacto de la implementación de una AEI derivada de un MER que integra la Educación STEAM en el estudio de la geometría espacial para los estudiantes de séptimo grado de una institución educativa en el municipio de Envigado.*** Sumado a este, proponemos los siguientes objetivos específicos:

1. Indagar acerca del estudio de la geometría espacial en Colombia.
2. Diseñar un MER que integre la Educación STEAM, profundizando principalmente en los aspectos geométricos como la determinación de poliedros a partir de otros poliedros y la determinación de polígonos a partir del truncamiento de poliedros.
3. Analizar la incidencia de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI), que parte de un MER que hemos diseñado, al integrar la Educación STEAM en el estudio de la geometría espacial en el grado séptimo.

A continuación, describimos la manera en la que llevamos a cabo estos objetivos específicos: el primero lo desarrollamos por medio de un análisis económico-institucional del estudio de la geometría en Colombia. El segundo, lo abordamos en el diseño del *MER*. Por último, el tercer objetivo lo tratamos a partir de la implementación de la AEI derivada del *MER*.

1.1.8 Alcances de la investigación y aportes al campo de la didáctica de las matemáticas

Tal y como lo hace José Arcadio Buendía, quién pretende *contagiar el amor* por la geometría espacial a sus hijos, existen profesores que muestran una pasión desbordada por las matemáticas y tratan de influirla en sus estudiantes. Aunque este aspecto goza de una inocencia implícita, no podemos cubrir el hecho de que se cree que las razones de ser para emprender el estudio de las matemáticas están justificadas por generar dichos sentimientos, o por estar *en todas partes*, como suele responderse ante el frecuente cuestionamiento: *¿Para qué me sirven las matemáticas?* A nuestro modo de ver, dichas razones de ser se encuentran en el estudio integrado de las diferentes disciplinas escolares y el abordaje de diversas situaciones problemáticas.

En esta medida, nuestra investigación genera aportes significativos a la didáctica de las matemáticas desde un punto de vista local, debido a la delimitación epistemológica que pretendemos realizar y las posibilidades investigativas en la integración Educación STEAM-TAD en el estudio de la geometría espacial.

1.2. Marco teórico

«Si he logrado ver más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes», Isaac Newton.

En este apartado abordamos los aportes y las reflexiones teóricas que fundamentan nuestra investigación; estas son el andamio y el soporte que han podido recorrer algunos investigadores de la didáctica de las matemáticas y la Educación STEAM. En particular, destacamos las ideas de autores como Chevallard (2002), Gascón (2014), Yakman (2008) y Martín-Páez (2019), entre otros, cuyas contribuciones han permitido el avance y la consolidación de estas disciplinas. Por tanto, consideramos importante revisar y analizar dichos aportes teóricos para construir una perspectiva crítica y fundamentada que posibilite el desarrollo de esta investigación.

1.2.1 Un derrotero acerca de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Chevallard et al. (2000), en su libro *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, abordan los diálogos de un reportaje realizado por una periodista acerca de la enseñanza de las matemáticas. ¿Qué significa ser matemático? ¿Por qué hay que estudiar matemáticas? ¿Qué significa hacer matemáticas? y ¿A qué se debe la resistencia generalizada de los estudiantes por el estudio de las matemáticas? Estas son algunas de las cuestiones que se tratan en aquellas páginas. En este libro se reportan diálogos entre una profesora y un estudiante acerca de la resistencia que tienen los estudiantes «a hacer de matemáticos»; es decir, a hacerse cargo de la validez de la actividad matemática que llevan a cabo en la escuela, aspecto que frecuentemente suelen dejar a cargo de sus profesores.

En relación con este fenómeno didáctico existe una responsabilidad institucional en cuanto a la organización didáctica y curricular de los conocimientos matemáticos, especialmente en lo referente a la consideración y problematización de los aspectos matemáticos en los procesos de estudio. Infortunadamente, estos aspectos son a menudo pasados por alto, lo que ha llevado a considerar que los asuntos didácticos están relacionados únicamente con cuestiones pedagógicas y psicológicas y no con los aspectos matemáticos (Chevallard et al., 2000).

Esta responsabilidad institucional, si bien deja de lado aspectos psicológicos, sociales, culturales y pedagógicos particulares no desconoce su existencia; en efecto, habrá un estudiante a quién no le interesará en absoluto aprender matemáticas, otro al cual, por más que se le trate de convencer, no encontrará ninguna utilidad a las matemáticas que se estudian en la escuela, sin embargo, puede haber uno que se apasione por el estudio de las matemáticas.

En los siguientes apartados plantaremos los aspectos fundamentales en el estudio de las matemáticas escolares, así como las consideraciones didácticas y metodológicas relacionadas con la TAD.

1.2.1.1 La didáctica de las matemáticas

Cuando alguien emprende el vínculo al cual llamaremos *estudio* con alguna obra humana, en muchos casos con ayuda de alguien más, diremos que se gestan uno o varios procesos didácticos. Es en este sentido que lo didáctico es todo lo referente al estudio y los fenómenos didácticos son aquellos que emergen de cualquier proceso de estudio, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las obras humanas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear nuevas obras (Chevallard et al., 2000).

De forma ligeramente simplificada, se puede decir que [lo didáctico] se compone de una serie heterogénea de situaciones sociales en las que alguna persona hace algo –o incluso manifiesta una intención de hacerlo– con el fin de que alguna persona pueda “estudiar” –y “aprender” – algo. Este algo que va a ser estudiado (y aprendido) se conoce como la apuesta didáctica de la situación. (Chevallard, 2013, p. 162)

El principal objetivo del estudio es el aprendizaje y la enseñanza. No obstante, este no es el único medio para lograr un aprendizaje, puesto que existen de igual manera procesos no escolarizados y no institucionalizados que promueven un aprendizaje. De esta forma, por ejemplo, el matemático como profesional científico puede llevar un proceso de estudio al indagar por una cuestión matemática; de la misma manera, cualquier persona, así como un tendero o un obrero también la puede llevar a cabo, la diferencia radicaría en las herramientas que utilizan para su desarrollo.

En ese sentido, los procesos de estudio son inherentes a la condición humana; es así como todas las actividades humanas suscitan procesos didácticos. Este hecho constituye un aspecto antropológico. Cuando las obras de los procesos didácticos corresponden a las matemáticas, vemos emerger el campo científico de la didáctica de las matemáticas, el cual tiene como objetivo proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades que se presentan en los procesos de estudio con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.)

que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar estas (Chevallard et al., 2000).

Es evidente que los procesos de estudio pueden ser realizados individualmente; no obstante, debido a la naturaleza humana de dichos procesos, con frecuencia requieren de un esfuerzo colectivo y social para llevarlos a cabo. Como en cualquier asociación humana se instauran acuerdos explícitos e implícitos que establecen las maneras de funcionamiento y las responsabilidades asociadas para garantizar su correcto desempeño. En el contexto de los procesos didácticos, estos acuerdos se conocen como *contratos didácticos*, y suelen ser mayoritariamente implícitos (Aznárez, 2018).

Tradicionalmente, el contrato didáctico en la escuela contiene una cláusula que asegura que cuando un profesor plantea un problema a sus alumnos, este se encuentra bien planteado y el estudiante dispone de todas las herramientas para resolverlo (Chevallard et al., 2000). Tanto es así, que el profesor es en buena medida el que posee las respuestas a las cuestiones, y cualquier aspecto que se salga de su control es percibido como peligroso para el proceso didáctico.

A continuación, veremos cómo los saberes matemáticos se ven transformados para ser abordados en un proceso de estudio.

1.2.1.2 La transposición didáctica

La teoría de la transposición didáctica (TD) formula que toda práctica de enseñanza requiere realizar una deformación de su objeto de enseñanza; lo que quiere decir que para que un saber pueda ser enseñado requiere de una transformación abstraída por la enseñanza. La TD fue formulada en primera instancia por Verret (1975) y fue retomada por Chevallard (1985), quien realizó una aproximación antropológica de los saberes, al considerar que estos se presentan como respuestas a preguntas validadas por la sociedad (Mendoza, 2005). Todo proyecto de enseñanza se manifiesta entonces como una creación didáctica que parte del *saber sabio* y se manifiesta como el saber deformado didácticamente. A propósito de la TD, Chevallard (1997) menciona que:

Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber por enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que se hace con un objeto de saber por enseñar para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. (p. 39)

De esta manera, la TD considera varios tipos de saber, estos son: el saber sabio, que se refiere al conocimiento dispuesto por la comunidad científica y es propuesto por la institución

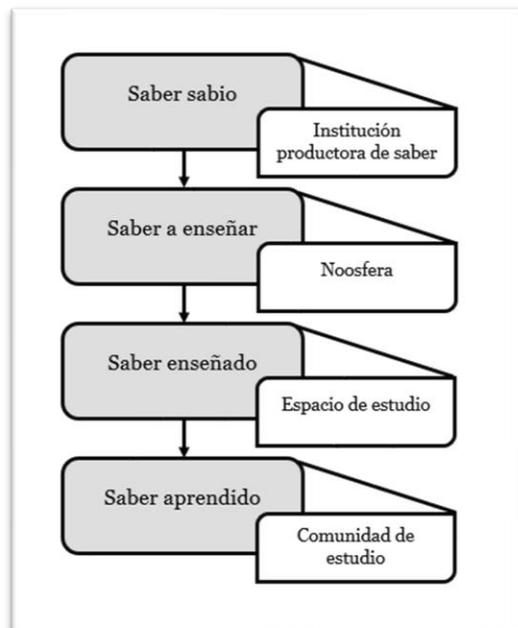
productora del saber; el saber por enseñar, que es el saber adaptado y seleccionado para ser enseñado en el contexto escolar y las demandas del contexto educativo, que es propuesto por la noosfera⁵; el saber enseñado, que es el conjunto de conocimientos que se transmiten en cierta institución, y es dispuesto por el espacio de estudio; por último, el saber aprendido, que es el conocimiento que los estudiantes han reconstruido y se encuentra en la comunidad de estudio. Este saber aprendido no siempre corresponde necesariamente con el saber enseñado, puesto que los estudiantes elaboran y reinterpretan el saber de acuerdo con sus necesidades (Chevallard, 1991).

La formulación de la TD estuvo motivada por la consideración de los saberes y la relación de los estudiantes y los profesores con estos. Este hecho es de especial importancia debido a que, desde el punto de vista clásico de la didáctica, se han problematizado, principalmente, aspectos psicopedagógicos, ignorando los relacionados con los saberes (Mendoza, 2005). En el caso específico de la didáctica de las matemáticas, dejar de lado los aspectos matemáticos ocasiona, por ejemplo, pasar desapercibidos aspectos como las técnicas que emplean los estudiantes en la solución de un tipo de cuestión matemática y las tecnologías que soportan estas técnicas. A propósito de esto, Chevallard et al. (2000) mencionan que:

Esta postura, propia de lo que hemos denominado el “punto de vista clásico” en didáctica de las matemáticas ignora la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación a las instituciones didácticas, suponiendo implícitamente que dicha adaptación sólo puede consistir en una *imitación* más o menos fiel de las obras matemáticas tal y como fueron producidas. Las variaciones posibles se refieren, de nuevo, a las diferentes maneras de *seleccionar, organizar y presentar* algunos elementos de la obra matemática original previamente definidos y, por tanto, tienen un carácter más psicopedagógico que genuinamente matemático. (p. 143) (ver figura 4).

⁵ La noosfera es la esfera de la sociedad encargada de la selección de los aspectos a estudiar en la escuela. En este sentido, el sujeto de la noosfera es a su vez autor de libros de texto, de planes de estudio, de documentos curriculares, de textos de formación del profesorado, entre otros.

Figura 4
Proceso de transposición didáctica.



Es así como considerar los aspectos del proceso de la TD amplía significativamente el objeto de estudio de la didáctica desde su punto de vista clásico. Cuestionamientos en torno a qué se enseña y cómo se organiza su estudio empiezan a cobrar relevancia en el campo de la didáctica de las matemáticas. En el siguiente apartado, presentamos la estructura de los saberes a enseñar, que son denominadas praxeologías y las condiciones institucionales para llevar a cabo su estudio.

1.2.1.3 Praxeologías matemáticas y didácticas

Problematizar los saberes, a partir de un punto de vista antropológico, implica considerar las preguntas que dieron y dan emergencia a dicho saber y las posibles respuestas que brindó y brinda la sociedad y la comunidad científica a estas preguntas. En todo caso, nos remite a indagar acerca de las razones de ser de dichos saberes. Cuando alguien emprende un proceso de estudio —un proceso didáctico— en relación con un saber, debe emprender a su vez la solución de una tarea τ que lo redirecciona a determinadas preguntas, en las que se ven implicados ciertos tipos de técnicas, tecnologías y teorías; es decir, cada saber está circunscrito en una unidad praxeológica.

En este sentido, las praxeologías gozan de una doble constitución: *la praxis* o práctica — que está constituida por tareas y técnicas— referidas al saber-hacer, y *el logos* o saber —que está

constituido por tecnologías y teorías— referidas al saber, que permiten justificar y entender lo que se hace en los procesos de estudio (Chevallard et al., 2000). En este sentido, la didáctica en términos de praxeologías se configura como: «[...] la ciencia de la difusión social de las praxeologías (o de las entidades praxeológicas). En otras palabras, la didáctica es la ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión institucional de las entidades praxeológicas» (Chevallard, 2017, p. 1).

La TAD presenta la siguiente estructura heurística para describir estas praxeologías: $[\tau/\hat{\theta}/\theta/\Theta]$, donde τ es la tarea por realizar, $\hat{\theta}$ es la técnica de τ , θ la tecnología de $\hat{\theta}$ y Θ es la teoría de θ . Estas praxeologías se subdividen en dos bloques: el bloque práctico - técnico: $[\tau/\hat{\theta}]$ que está vinculado con el saber -hacer y el bloque tecnológico- teórico: $[\theta/\Theta]$ que está relacionado con el saber. Existen diversos tipos de praxeologías, a saber, las puntuales, locales, regionales, y globales.

Estas praxeologías son puntuales cuando se centran en un único tipo de tareas, generalmente asociadas a un pequeño conjunto de técnicas como: resolver ecuaciones de primer grado, simplificar fracciones, calcular el perímetro de una circunferencia o hallar la derivada de una función elemental. Cuando los bloques prácticos se articulan en torno a un discurso tecnológico común, pasamos a tener praxeologías locales, como serían los “temas” en que estructuramos la enseñanza: las funciones afines, la divisibilidad, la semejanza de figuras, etc. Y si las praxeologías locales se estructuran en base a una teoría, conforman praxeologías regionales que, en el caso de la matemática escolar, se designan generalmente como “bloques temáticos” o “sectores”: las funciones, la estadística, la geometría, etc. (Bosch et al., 2009)

Las técnicas ($\hat{\theta}$), por su lado, son maneras de hacer, en el caso de los procesos didácticos son relativas a los ambientes de enseñanza y aprendizaje: un libro puede contener determinada técnica para graficar, por ejemplo, una circunferencia; asimismo, una institución puede fomentar en sus estudiantes determinadas técnicas y lo mismo ocurre con cada profesor. En general, las praxeologías son relativas a las instituciones en las que se desarrollan. Un aspecto importante que se resalta en el marco de la TAD es la motivación constante de llevar a los estudiantes a descubrir los límites de dichas técnicas establecidas, con el fin de crear o descubrir otras (Chevallard et al., 2000).

Tecnología (θ) significa, en su literalidad «discurso razonado (*logos*) sobre una técnica ($\hat{\theta}$)» (Ibid. p. 237). Las tecnologías tienen un carácter justificativo y permiten entender las técnicas. Debido a las condiciones de relatividad que hemos considerado, en determinadas ocasiones lo que es relacionado con una tecnología en una institución puede ser una técnica en

otra. Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras es usado como una técnica al hallar la magnitud de un vector en la geometría vectorial en el curso de Cálculo Vectorial del programa de Ingeniería en Sistemas de la Universidad de Antioquia. En contraste con esto, en el curso de Fundamentos de Matemáticas, en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, este teorema es visto como una tecnología para justificar la técnica de la identidad fundamental de la trigonometría: $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$, en la simplificación de expresiones trigonométricas.

Una teoría (Θ), por su parte, es el discurso razonado de las tecnologías; es decir, la justificación de las tecnologías. En este esquema que hemos formulado hasta ahora: la conjunción entre la *praxis* y el *logos*, que toma forma en praxeología, tiene implícita una doble dependencia, pues no hay una praxis sin logos y de la misma forma, no hay un logos sin una praxis (Chevallard et al., 2000). En el caso de la didáctica de las matemáticas existen dos tipos de praxeologías fundamentales, las matemáticas y las didácticas, que respectivamente son organizaciones matemáticas (OM) y organizaciones didácticas (OD).

En resumen, cuando un ser humano emprende el enrevesado trayecto de estudiar una obra, esta redirecciona a su vez un conjunto de preguntas —sus razones de ser—, para las que la obra en sí misma es la respuesta. La forma de estas respuestas está dada en términos de una doble cara, *praxis* y *logos* (praxeologías) y que, en el caso de la didáctica de las matemáticas constituye una organización ya sea matemática (OM) o didáctica (OD). En esta medida, para reestructurar una OM se requiere elaborar una nueva praxeología, la cual responda a un tipo determinado de problemas, que contenga unas tareas, una cierta cantidad de técnicas, las tecnologías que las explican y la teoría que las fundamenta.

Para finalizar, diremos que de la misma manera como se requieren técnicas matemáticas, tecnologías y teorías matemáticas a la hora de emprender el estudio de alguna cuestión, se requieren técnicas didácticas, tecnologías y teorías didácticas. En lo sucesivo, «lo didáctico es inseparable de lo matemático» (Chevallard et al., 2000, p. 251).

1.2.1.4 Problemas didácticos: un asunto institucional

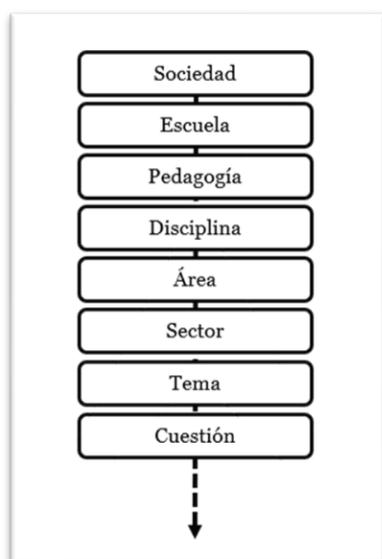
Chevallard (2002) propone unos niveles en los cuales se pone de manifiesto la relación de doble vía entre las OM y las OD, y en la que se presentan diferentes tipos de restricciones en el proceso de estudio, en los que, además, se manifiesta una codependencia y están estructurados de un nivel general a uno más particular (ver figura 5). A propósito de estos, Gascón (2003) menciona que:

La estructuración de las OM en cada nivel de la jerarquía condiciona las formas posibles de organizar su estudio y, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos

didácticos existentes en cada nivel determinan, en gran parte, el tipo de las OM que será posible reconstruir (estudiar) en dicha institución escolar. (p. 25)

Figura 5

Niveles de codeterminación didáctica.



De acuerdo con Gascón (2011), los niveles de codeterminación didáctica redirigen a la dimensión ecológica de un problema didáctico, dicha dimensión gira en torno a la cuestión de «¿por qué las cosas (las OM y las OD) son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para que fuese de otra forma dentro del universo de lo posible?» (p. 217). En este sentido, cada nivel contribuye a determinar la ecología de las OM y las OD a través de los puntos de apoyo que permite, y las limitaciones que impone (Chevallard, 2002). Es por esto, que en los procesos de reconstrucción de las organizaciones praxeológicas es preciso considerar las restricciones y condiciones referentes a dichas praxeologías en todos los niveles de codeterminación.

1.2.1.5 Los Modelos Epistemológicos de Referencia

Al ampliar el campo de estudio de la didáctica de las matemáticas y al considerar los saberes —las praxeologías didácticas y las matemáticas— y su interacción en una determinada institución —niveles de codeterminación didáctica—, emergen tres dimensiones de los problemas didácticos: la primera, es la epistemológica, la cual hace referencia al cómo se conciben los saberes o, en otras palabras, se refiere a la génesis y el desarrollo de las praxeologías. La segunda, es la

dimensión económico-institucional, que tiene en cuenta los sistemas de reglas, principios e interacciones entre las OM y las OD en un nivel institucional. Por último, la tercera es la dimensión ecológica, que indaga por las razones detrás de las condiciones y restricciones de las praxeologías, así como de las posibles maneras de superarlas (Gascón, 2011).

La dimensión epistemológica es esencial en la constitución de los problemas didácticos y es abarcada por medio del desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER). Este es un modelo alternativo, provisional y relativo a las instituciones en las que conviven. En esta medida, los MER son un modelo teórico básico para los investigadores, que se emplea para analizar la transición, evolución y transposición de saberes propuestos en diferentes instituciones (García et al., 2015). A propósito de los MER, Fonseca et al. (2014) resaltan que:

Es importante subrayar que estos deben considerarse como una hipótesis provisional a contrastar experimentalmente y, por lo tanto, susceptible de ser modificado y revisado constantemente. En otras palabras, son una hipótesis científica que debemos poner a prueba en la contingencia [institucional]. (p. 291)

Además del carácter provisional, estos presentan una función *fenomenotécnica* —en el sentido bachelariano del término—; es decir, manifiestan la característica propia de las ciencias sociales de producir fenómenos que sirvan para comprender la realidad histórica que se estudia (Gascón, 2014). Esta función es fundamental a la hora de desmarcarse de los sistemas epistemológicos dominantes en las diferentes instituciones y es el principal síntoma del carácter emancipador de los MER. En este sentido, los MER permiten construir y difundir una construcción praxeológica alternativa a la dominante en una institución determinada. A propósito de esta emancipación, Gascón (2014) menciona que:

En efecto, para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. En esto consiste la emancipación epistemológica, mientras que la emancipación institucional hace referencia a la necesidad del didacta (y de la ciencia didáctica) de liberarse de las dependencias que acarrearán la posición de “profesor”(sujeto de cierta institución escolar), la de “noosferiano” (sujeto de la noosfera, esto es, autor de libros de texto, de planes de estudio, de documentos curriculares, de textos de formación del profesorado, etc.) e, incluso, la de «matemático guardián de la ortodoxia» (sujeto de la institución productora y conservadora del saber). (p. 100)

De esta manera, la emancipación epistemológica está enmarcada en un proceso mayor: el de la emancipación institucional, en donde el didacta debe desprenderse de los códigos institucionales, didácticos, pedagógicos y hasta en cierto punto culturales, para poder construir

una alternativa praxeológica. Desmarcarse no significa ignorar o soslayar estos procesos, puesto que para romper con la didáctica clásica es necesario realizar un análisis exhaustivo de lo que «se ha hecho», y así, tomar un punto de vista referencial y construir un objeto propio de estudio integrado al saber matemático. En esta medida, los MER son instrumentos que nos permiten identificar fenómenos didácticos en los contextos educativos (Bustamante, 2017) al «[...] estudiar el saber matemático antes de que sufra transformaciones para ser enseñando en el seno de una institución» (Roa et al., 2017, p. 8).

1.2.1.6 Actividad de Estudio e Investigación

Las Actividades de Estudio e Investigación (AEI), las cuales son una OD, donde se propone a los estudiantes la reconstrucción de una OM local. Para lograrlo, se parte de una pregunta generadora Q_0 que conduce a la elaboración de una respuesta R que engloba los elementos fundamentales de la OM original. En este sentido, las AEI representan un proceso educativo con un propósito práctico, ya que se establece el requisito de que R incluya los principales componentes de una OM previamente definida por la institución (Corica y Marín, 2014).

En otras palabras, una AEI conduce a la implementación de una OM predefinida en un MER, lo que resulta en la puesta en marcha de los dispositivos didácticos generados por dicha construcción. Se basa por tanto en el estudio de preguntas complejas, dinámicas y fructíferas alrededor de dicha OM que propicien en los estudiantes la motivación para seguir aprendiendo y fomentando un proceso de investigación en el que puedan explorar, formular conjeturas y validar sus hallazgos.

Hasta este punto, hemos analizado en detalle los aspectos teóricos relativos a la TAD. Ahora, avanzaremos en la descripción de los principales fundamentos teóricos alrededor de la Educación STEAM que, en principio, nos permitirán plantear la relación entre la TAD y este enfoque.

1.2.2 Educación STEAM

Los orígenes de la educación STEAM se remontan a la década de los noventa en los Estados Unidos. Allí, la Fundación Nacional para la Ciencia acuñó el acrónimo STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), que en su traducción al español significa ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, con el objetivo de generar inversión y recursos para la formación y promoción profesional de estas disciplinas. Su desarrollo se dio en el contexto de la guerra fría, por lo que en sus inicios buscaba el crecimiento económico y la obtención de una superioridad bélica a través de las profesiones asociadas al STEM (Santillán et al., 2020).

Apoyado en el discurso de que es necesario un conocimiento integrado que prepare a los estudiantes para la comprensión y solución de problemáticas complejas del mundo contemporáneo (Chesky et al., 2015), el STEM trajo consigo diversos cambios curriculares en la educación básica en países como Estados Unidos y Corea del Sur, en donde se vio la necesidad de plantear aspectos de la tecnología y la ingeniería en los currículos (Moore et al., 2014).

En Iberoamérica, la Educación STEM se ha consolidado en los diferentes sistemas de enseñanza e investigación, tanto en la educación formal como en la informal (Zapata y Carmona-Mesa, 2021). De esta manera, la Educación STEM se introdujo en la práctica educativa como una alternativa a la educación basada en la trasmisión pasiva de conocimientos fragmentados y centrada en la solución de los problemas actuales. No obstante, es importante destacar que la Educación STEAM no ha estado exenta de críticas, entre las cuales se argumenta que este enfoque guía la educación por el camino de la instrumentalización de los conocimientos y la formación para el trabajo (Chesky et al., 2015).

En el año 2007 se incorpora el arte a las otras disciplinas, formando así el acrónimo STEAM [La cual adoptaremos en esta investigación] (Perignat et al., 2019). La razón detrás de esta incorporación en la educación radica en la creencia en que puede proporcionar un contexto social y creativo, el cual fomenta el desarrollo de habilidades científicas, técnicas y matemáticas (Ge et al., 2015). Es importante señalar que esta inclusión de las artes consideró, a parte de las bellas artes, campos como la sociología, la psicología, la historia, la filosofía e incluso, paradójicamente, la educación (Zeidler, 2016).

Autores como Chesky et al. (2015) argumentan que la inclusión de las artes diluye el enfoque STEM y lo desvía de sus objetivos originales. Otros autores sostienen que la inclusión del arte es necesaria para proporcionar una visión holística del mundo y para fomentar el pensamiento crítico y creativo (Yakman, 2008). En este sentido, es importante que la Educación STEAM se desarrolle de manera reflexiva y crítica, teniendo en cuenta las distintas perspectivas y argumentos que se han planteado sobre este enfoque.

Al margen de esto, en algunas revisiones de literatura se reporta la falta de consenso acerca de la fundamentación de la Educación STEAM (Martín-Páez et al., 2019; Ortiz et al., 2021), es así como existen diferentes interpretaciones alrededor de esta, tanto a nivel de integración de las disciplinas, como lo que se entiende por Educación STEAM. El problema de la definición de la Educación STEAM depende del —variable— punto de vista de los investigadores (Hasanah, 2020). Una de las consecuencias de esta falta de consenso es que el profesorado no sabe qué implica generar una educación a partir de este enfoque (Margot et al., 2019).

Además, la falta de consenso acerca de la fundamentación de la Educación STEAM puede dificultar la implementación de este enfoque en las aulas (*Ibid.*). Esto se debe a que, sin un marco

teórico claro, los docentes pueden tener dificultades para diseñar y llevar a cabo actividades que integren de manera efectiva las diferentes disciplinas de la Educación STEAM.

Así pues, para abordar esta dificultad, es importante que los docentes tengan una comprensión profunda de los diferentes enfoques epistemológicos y filosóficos que subyacen a la Educación STEAM. También, es relevante que estos tengan acceso a recursos y formación que les permitan desarrollar las habilidades y competencias necesarias para implementar este enfoque en las aulas. En este sentido, la investigación en la Educación STEAM puede contribuir a promover el consenso sobre su fundamentación y a promover recursos y formación para los docentes.

En este panorama ha sido recurrente el uso indiscriminado del indicativo STEM/STEAM para referirse a cualquier novedad en educación y a cualquier manera de integración disciplinar, aunque en algunas investigaciones STEAM parece tratarse de casos profundamente disimiles (Sanders, 2008). Asimismo, existe un sinnúmero de formas para referirse a esta por sus siglas: STEM, STEAM, STEM+A, STEAM + H, y por su perspectiva: enfoque STEM, metodología STEM, Educación STEAM (Martín-Páez, 2019) y diferentes maneras de asumirse como perspectiva educativa: STEM como disciplina, STEM como instrucción, STEM como campo y STEM como carrera (Hasanah, 2020).

De acuerdo con los planteamientos anteriores, en esta propuesta investigativa entenderemos la perspectiva del enfoque educativo de la Educación STEAM como la articulación entre la ciencia y la tecnología, interpretadas a través de la ingeniería y las artes, con base en el lenguaje de las matemáticas (Yakman, 2008). La fundamentación epistemológica de la Educación STEAM está ligada a una visión interdisciplinar de los saberes, lo que conlleva a que las experiencias bajo este enfoque deban realizarse por medio de la inclusión de problemáticas sociales, ambientales, políticas, culturales, entre otras, dejando de lado las perspectivas puramente disciplinares. Asumimos por tanto los planteamientos presentados para su configuración teórica (Quigley et al., 2017); así, la Educación STEAM:

- i.** Considera la integración del arte en un sentido amplio (*liberal arts*) evitando su empleo de una manera reduccionista.
- ii.** Lleva a los estudiantes a que reconozcan que los problemas están conectados con su realidad y a darle una solución creativa.
- iii.** Hace énfasis en la formación en el desarrollo de competencias integrales para la acción en sociedad (lo que cabe mencionar, que refiere a una dimensión antropológica).

A continuación, describimos algunas de las motivaciones para realizar la integración entre la TAD y la Educación STEAM. Esta integración está fundamentada por la naturaleza del Enfoque de la Educación STEAM que reside en la interdisciplinariedad y la metodología propuesta por la TAD.

1.2.3 Integración TAD – STEAM

En principio, podría pensarse que los enfoques TAD y Educación STEAM no tienen nada que ver, puesto que la TAD se enfoca en comprender el proceso de aprendizaje como un fenómeno social y cultural que se desarrolla en contextos específicos (Castela, 2017) y la Educación STEAM integra las disciplinas que componen su sigla para fomentar el pensamiento crítico y la resolución de problemas de manera creativa (Barra, 2019). Sin embargo, ambas perspectivas presentan algunos potenciales puntos en común. A continuación, presentamos algunos aspectos que permiten su integración, así como las motivaciones e implicaciones que se tienen al realizarla.

En primer lugar, es preciso indagar en la interdisciplinariedad, la cual es el corazón epistemológico de la Educación STEAM. Este término rodea una complejidad de la misma proporción al de la Educación STEAM, puesto que es usada en una multitud de contextos de manera indiscriminada: epistemológicos, mediáticos, pedagógicos, empresariales y tecnológicos; no existe un consenso acerca de las implicaciones de su uso.

En contraste con lo anterior, se presenta una propuesta de tres alusiones raizalmente emparentadas, las cuales sitúan la interdisciplinariedad relacionada con el grado de integración de las disciplinas. Estas son la multi o pluridisciplinariedad, que se refiere a la coordinación de diferentes disciplinas; la interdisciplinariedad, que presenta la convergencia de diferentes procesos y perspectivas de las disciplinas; y la transdisciplinariedad, que hace alusión a la fusión o combinación de las disciplinas (Pombo, 2013).

En particular, la interdisciplinariedad se define como la colaboración y el diálogo entre disciplinas para enfrentar problemas complejos desde múltiples perspectivas. En esta, se busca superar los límites de una sola disciplina y combinar conocimientos, métodos y enfoques de diferentes campos para obtener una comprensión más completa y profunda de un tema o problema en particular (*Ibid.*, 2013).

La interdisciplinariedad está relacionada con el paradigma del cuestionamiento del mundo, propuesto en el marco de la TAD, puesto que en este paradigma se busca promover el aprendizaje y fomentar una actitud receptiva hacia el planteamiento de preguntas sin respuesta y problemas sin resolver, en donde las disciplinas se estudian con la intención de encontrar una respuesta valiosa. Además, en el paradigma del cuestionamiento del mundo, se busca crear un nuevo *ethos* cognitivo en el cual las personas no se opongan sistemáticamente a enfrentar situaciones desconocidas y estén dispuestas a aprender y resolver problemas (Chevallard, 2013).

En segundo lugar, el hecho de que la Educación STEAM no se comprenda desde su fundamentación como una metodología, permite entablar vínculos procedimentales en términos del carácter antropológico del estudio de los saberes desde la TAD. De esta manera, la Educación STEAM, por medio de la ruta metodológica, que consiste en partir de cuestiones lo

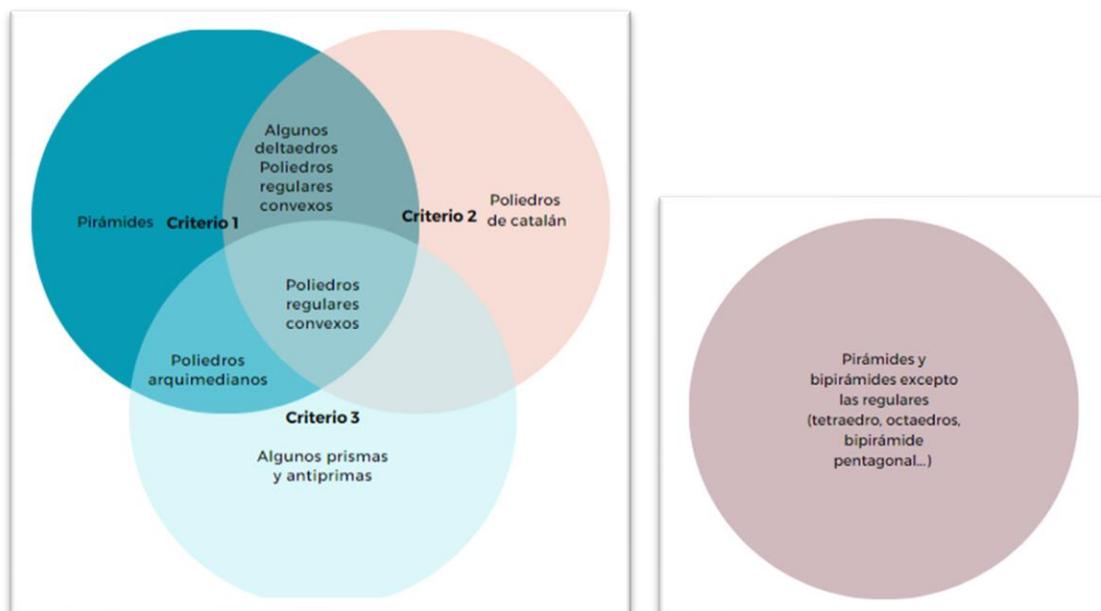
suficientemente amplias y ricas para dotar de sentido el estudio de los conocimientos, adquiere relevancia. Conviene, en estos términos, asimilar el hecho de que el estudio de las matemáticas no se justifica así mismo y ampliarlo al dominio de las otras disciplinas, en correspondencia, se afirma que ningún saber enseñado se autoriza a sí mismo (Chevallard, 1994).

1.2.4 *Noción de geometría espacial*

La geometría espacial es entendida como la ciencia del espacio (Guillén, 2010), en particular, los sólidos geométricos se dividen en dos familias, los poliedros y los cuerpos redondos. Para clasificar los cuerpos redondos se consideran los criterios de convexidad, que comprende los cilindros, conos, esferas, paraboloides y elipsoides; y el de concavidad, que comprende los hiperboloides y los toroides. En relación a la clasificación de los poliedros, se toman en cuenta los planteamientos de Guillén (2005) acerca de las clasificaciones ingenuas de poliedros. Así, se tienen en cuenta los criterios 1. Poliedros de cara regular, 2. Poliedros de cara igual (en forma), 3. Poliedros de vértices del mismo orden (ver figura 6). Mientras que los cuerpos redondos se dividen en convexos, que comprenden cilindros, conos, esferas, paraboloides y elipsoides, y los cóncavos, que comprenden los toroides y los hiperboloides (Guillén, 1991).

Figura 6

Clasificación de los poliedros a partir de los planteamientos de Guillén (2005).



1.3. Marco metodológico

«La investigación sin método es como un barco sin timón, es posible que llegues a algún lugar, pero es poco probable que sea el destino que esperas», Edwin Hubble.

En este apartado planteamos los principales aspectos que fundamentan nuestra perspectiva metodológica. Los cuales incluyen el enfoque, el paradigma, los instrumentos de recolección de la información, la descripción de la población, las consideraciones éticas, y por último, los aspectos metodológicos relacionados con el enfoque teórico que hemos relacionado. Estas son las principales bases para el desarrollo e implementación de la investigación; aspectos como la precisión, la rigurosidad y la coherencia son importantes para su construcción.

1.3.1 Enfoque y paradigma investigativo

El enfoque metodológico que orienta esta investigación es el cualitativo, este, según Bejarano (2016), se utiliza para comprender y explorar fenómenos desde la perspectiva de los participantes teniendo en cuenta el ambiente y el contexto que los rodea. Este enfoque se enmarca en el paradigma hermenéutico, el cual de acuerdo con Arráez et al. (2006), se basa en la comprensión del significado de la experiencia humana y su interpretación, lo que implica para los investigadores analizar el contenido social de las actitudes y acciones que se estudian. Además, este enfoque destaca la importancia del diálogo entre los investigadores y los participantes, lo que permite una mayor comprensión de las perspectivas y significados que se estudian (Espinosa et al., 2011). En conjunto, estos elementos conforman una perspectiva metodológica rigurosa y valiosa para aquellos estudios que buscan comprender la experiencia humana y sus significados (Castaño et al., 2002).

Dichos planteamientos son pertinentes en esta investigación, ya que los MER son construcciones relativas a los sujetos e instituciones en las cuales se fundan (Gascón, 2014). En este sentido, los saberes, las perspectivas y las concepciones que habitan en ellos posibilitan la determinación de los aspectos que consideramos en la construcción de este modelo. Al comprender estas perspectivas y ponerlas en diálogo con un análisis económico-institucional, podemos obtener una comprensión de las organizaciones matemáticas y didácticas que están presentes en la institución constituida por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y el libro de texto Castela (2017) que es utilizado en la institución en la cual se desarrolla esta propuesta, los cuales consideramos para crear y proponer un nuevo modelo praxeológico.

Asimismo, implementamos la técnica de investigación participante, la cual, de acuerdo con la perspectiva de Alban et al. (2020), permite la adquisición de conocimientos y generar soluciones concretas a problemáticas que consideran los investigadores en el momento que deciden plantear una pregunta para aportar alguna alternativa de mejora o transformación. Reason (2006) argumenta a favor de esta técnica que permite involucrar a los estudiantes de manera activa en el proceso, ya que posibilita que se sientan comprometidos con el trabajo realizado.

En particular, la técnica de investigación participante nos permite tener una mirada amplia y diversa, lo que contribuye a obtener resultados significativos y aplicables en la práctica; y, en esta medida, nos permite llevar a los estudiantes a que participen de manera activa y encuentren un sentido al estudio realizado.

1.3.2 Ruta metodológica

Con base en lo anterior, presentamos a continuación la ruta metodológica de nuestra investigación, la cual consta de tres fases: la primera, se refiere a un análisis de las praxeologías locales que habitan en una institución educativa del municipio de Envigado en relación con los saberes vinculados a la geometría espacial (en forma de un análisis económico-institucional); la segunda, a la construcción de unas praxeologías alternativas (en forma de un MER); y, la tercera, a la implementación de esta propuesta teórica por medio de una AEI en la institución en la que desarrolla esta propuesta.

1.3.2.1 Un análisis económico-institucional del estudio de la geometría espacial en Colombia

En la primera fase realizamos un análisis económico-institucional acerca del estudio de la geometría espacial en la institución educativa en la que se lleva a cabo esta investigación. Para ello, utilizamos el método del análisis textual que, según Krippendorff (2004), comprende un conjunto de técnicas que implican una lectura sistemática de los textos, imágenes y material simbólico presentes en un material documental. Este análisis nos permite validar los mensajes extraídos de los textos y adoptar una perspectiva distinta a la del autor o autores del texto.

Desde esta perspectiva, se realiza un análisis de las Organizaciones Matemáticas y las Organizaciones Didácticas alrededor de la geometría espacial presentes en los documentos curriculares (MEN, 1998; 2006; 2016) y el libro de texto *Herramientas Digitales Para el Aprendizaje. Secuencias Matemáticas 7* (Castela, 2017), que como se mencionó antes, es un material de apoyo en la institución educativa en la que se lleva a cabo esta propuesta.

1.3.2.2 Elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia

En la segunda fase, al margen del análisis económico-institucional realizado, desarrollamos la construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia. En lo sucesivo, realizamos dicha construcción a partir de las siguientes acciones:

1. Proponer una pregunta generatriz Q_0 lo suficientemente rica, que permita el estudio de las diferentes disciplinas STEAM, en el contexto de la construcción de la Casa museo de la Cultura.
2. Desarrollar algunas de las praxeologías asociadas a esta pregunta generatriz.

Un aspecto por considerar al margen de la construcción que hemos desarrollado en el marco teórico surge del vínculo con la Educación STEAM. En este aspecto no solo consideramos las Praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM); también, las praxeologías asociadas a cada una de las disciplinas STEAM. Es decir, las Organizaciones Científicas (OS), las Organizaciones Tecnológicas (OT), las Organizaciones Ingenieriles (OE), las Organizaciones Artísticas (OA) y, finalmente, las OM.

1.3.2.3 Implementación de una AEI

La tercera fase, que comprende a su vez seis momentos, consiste en la puesta en marcha del MER en una institución educativa del municipio de Envigado, expresada en términos de una AEI. En esta perspectiva, se analizan las producciones y los aprendizajes movilizados por los estudiantes cuando se enfrentan al modelo y a los aspectos que se presentan. Estos apuntan al objetivo general de nuestra investigación.

El primer momento inicia con la aplicación de un pretest que busca conocer los saberes previos y las concepciones epistemológicas que tienen los estudiantes en relación con la geometría plana y la geometría espacial. Este se lleva a cabo por 5 preguntas, las cuatro primeras, consisten en indagar acerca de las percepciones de los estudiantes respecto a la geometría, la geometría espacial, la relación de la geometría espacial con las figuras de su entorno y los cuerpos geométricos, y la quinta consiste en conocer cómo los estudiantes relacionan el estudio de la geometría espacial con las diferentes disciplinas de la Educación STEAM.

En el segundo momento, procedemos a organizar a los estudiantes por equipos de trabajo, donde les asignamos roles de investigación con la intención de que cada integrante cumpla una función de acuerdo con sus habilidades. Posterior a esto, proponemos la pregunta generatriz que está enfocada en el diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña. Cada equipo de trabajo está encargado de una acción en particular: **i)** diseñar una estructura que sirva como instalación para la casa museo y, **ii)** seleccionar y situar en la casa algunos artistas locales y algunas de sus estructuras réplicas.

En el tercer momento, los estudiantes se enfrentan a la situación planteada por medio de nuevas preguntas; de las cuales se profundiza en las que permiten generar diálogos entre la geometría espacial y las demás disciplinas de la Educación STEAM. En la medida en que surgen los asuntos relativos a la geometría espacial, se desarrollan sesiones de clase donde se consideran conceptos clave para brindar herramientas en busca de una respuesta R_0 óptima de la pregunta generatriz.

En el cuarto momento, los estudiantes realizan un modelo para la situación planteada en el grupo de trabajo. En esta emplean los aprendizajes con relación a la geometría espacial, derivados de las preguntas y las discusiones en los espacios de clase. Asimismo, esperamos que durante la construcción y perfilamiento del modelo, surjan nuevas preguntas alrededor del estudio de la geometría espacial integrada a las demás disciplinas de la Educación STEAM.

En el quinto momento, implementamos el pretest inicial, presentado ahora como un postest. Cabe resaltar que, la intención del pretest y el postest no es *medir* la evolución del proceso de aprendizaje de los estudiantes, sino indagar acerca de las transformaciones en las concepciones de los estudiantes cuando estudian geometría espacial durante la investigación, por lo que su diálogo con los demás instrumentos de análisis de la información es de gran importancia.

En el sexto y último momento, se lleva a cabo el análisis de la información recopilada en la investigación. En este sentido, los instrumentos de recopilación de la información que empleamos son las bitácoras y las grabaciones de clase, las cuales nos permiten investigar las cuestiones que surgieron durante la implementación de la estrategia, así como evaluar las estrategias utilizadas por los estudiantes y la evolución de las concepciones y comprensiones de la geometría espacial por parte de los estudiantes (ver tabla 1).

Tabla 1.

Fase tres: implementación del modelo en forma de una AEI.

Momento	Enunciado
1	Presentamos el pretest.
2	Introducimos la pregunta generatriz y definimos los grupos de trabajo (A, B y C, en el diseño de las obras de arte; y D, E, F, para el diseño de la Casa Museo).
3	Desarrollamos el proceso de estudio alrededor de las preguntas generadas por los estudiantes.
4	Los estudiantes presentan nuevas preguntas y formas de plantear el estudio de la geometría espacial integrada a las diferentes disciplinas de la Educación STEAM al enfrentarse a la pregunta generatriz.
5	Presentamos el postest.
6	Analizamos la información.

1.3.2.4 Desing Thinking y el Aprendizaje Cooperativo

De acuerdo con los planteamientos anteriores, presentamos el uso de la metodología *Desing Thinking* y el Aprendizaje Cooperativo en el desarrollo de la implementación de la AEI. La metodología *Desing Thinking* es una estrategia de solución de problemas centrada en el estudiante, que se enfoca en el diseño de soluciones creativas e innovadoras (Gonen et al., 2009). Lo que proporciona un marco de acción que valora elementos como la planificación de ideas, la implementación de prototipos, la cocreación y la puesta a prueba de las soluciones a las situaciones planteadas.

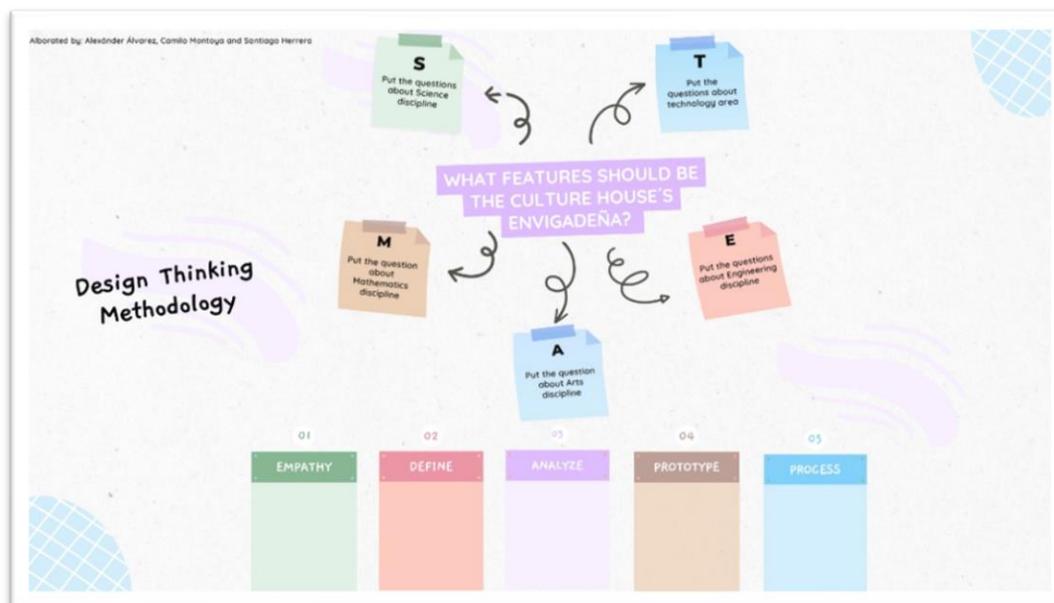
Esta metodología consta de cinco etapas: la primera, «empatizar», en la cual se busca comprender las necesidades y problemas de los estudiantes a través de la observación y la interacción; en la segunda, «definir», se define el problema y las necesidades de los estudiantes en relación con él; la tercera, «idear», se centra en la generación de ideas creativas que aporten a la solución del problema; la cuarta, «prototipar», implica la creación de modelos o prototipos de posibles soluciones; y por último, la quinta, «testear», se enfoca en probar y evaluar las posibles soluciones obtenidas en la etapa anterior, durante esta etapa se realiza una retroalimentación y se mejoran los prototipos obtenidos (Razzouk et al., 2012).

En esta dirección, en la propuesta de solución los estudiantes emplean estrategias eficaces e innovadoras, en las que priorizan las preguntas más relevantes y que tienen un impacto efectivo para dar solución a la pregunta generatriz. Al momento de diseñar la propuesta, idean un prototipo de solución empleando un instrumento de priorización de ideas (ver figura 6), el cual es revisado y contrastado con el análisis de la información y las cualidades del modelo, lo que permite la identificación de limitaciones y opciones de mejora, esto contrastado con los objetivos iniciales.

Por otra parte, el aprendizaje cooperativo, según Slavin (2015), se define como una metodología de enseñanza en la que los estudiantes trabajan en grupo para alcanzar objetivos de aprendizaje comunes. En esta línea, esta metodología de cooperación se basa en la idea de que los estudiantes pueden aprender mejor cuando trabajan juntos, comparten conocimientos y habilidades, y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje.

Es así como el aprendizaje cooperativo se presenta como un elemento importante en el desarrollo de la implementación, puesto que los estudiantes trabajan de manera grupal a través de los roles definidos de acuerdo con sus habilidades e intereses. Esta visión de trabajo concuerda con los planteamientos de cocreación presentes en el *Desing thinking*, por lo que estas dos apuestas metodológicas se complementan para generar resultados exitosos y beneficiosos para los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemáticas.

Figura 6
Instrumento de priorización de ideas por disciplina STEAM.



1.3.3 Descripción de la población

Esta investigación fue llevada a cabo en un colegio bilingüe —en el que se habla inglés y español— de carácter privado, ubicado en el municipio de Envigado, al sur del Área Metropolitana del Valle de Aburrá. Actualmente, la institución cuenta con una población de 1365 estudiantes de acuerdo con el último censo realizado en el año 2019. El 64,6% reside en Envigado, el 33,8% habita en el Poblado, mientras que el 1,6% restante habita en Itagüí, Sabaneta, La Estrella y Caldas. El 98% de los estudiantes de dicha institución se encuentra en el nivel socioeconómico medio-alto y alto.

Los participantes de la investigación son 27 estudiantes de grado séptimo, debido a que la geometría espacial —dentro de las dinámicas curriculares de esta institución— se estudia en mayor profundidad en este nivel educativo. Estos son seleccionados mediante una muestra intencional o de conveniencia que, según Creswell (2014), es un tipo de muestra no probabilística que se utiliza cuando los participantes son seleccionados por su conveniencia o disponibilidad para participar en el estudio o a conveniencia del investigador.

1.3.4 Consideraciones éticas

Por último, es relevante destacar que la investigación científica es una herramienta poderosa para generar conocimiento y soluciones en diversos campos (Eslava, 2018), en la que su éxito depende en gran medida de la integridad, el bienestar y respeto por los derechos de los

participantes (Escalante et al., 2020). En esta dirección, presentamos a continuación las consideraciones éticas que hemos tenido en cuenta a la hora de realizar esta investigación, las cuales están basadas en los lineamientos éticos de la Universidad de Antioquia y la institución educativa en la cual se implementó esta propuesta de investigación.

Como primer hecho a resaltar, tuvimos en cuenta las consideraciones éticas necesarias para garantizar la protección de los derechos de los participantes y la validez de los resultados obtenidos. De esta manera, inicialmente, informamos y presentamos los consentimientos de participación al colegio y a las familias. En estos, se explicó en qué consiste el trabajo que realizamos con los estudiantes, el objetivo de la investigación, los riesgos y beneficios de la participación en el estudio, así como los derechos y responsabilidades que adquirirían los estudiantes al participar en esta. Posteriormente, presentamos los consentimientos a los estudiantes, y les explicamos que la participación en la investigación era de libre elección y en cualquier momento podían desistir de ella.

Como segundo hecho a resaltar, nos comprometimos a garantizar el proceso investigativo con responsabilidad, transparencia y veracidad, y en la misma medida, velar por cuidar la privacidad y confidencialidad de los participantes. Así, los datos recopilados fueron manejados de manera confidencial; solo nosotros —los investigadores— tenemos acceso a ellos y se utilizan únicamente con fines investigativos. Reiteramos el derecho de los participantes a retirar su consentimiento en cualquier momento de la investigación sin consecuencia alguna.

Finalmente, es importante destacar que mantuvimos un respeto por la propiedad intelectual de los autores e investigadores a quienes referenciamos en este trabajo de grado. En este sentido, la integridad de las fuentes citadas refuerza la validez y la confiabilidad de nuestro ejercicio investigativo y garantiza a la comunidad y a los lectores la fiabilidad de la información.

CAPÍTULO SEGUNDO: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

*«La tarea no es tanto ver lo que nadie ha visto, sino pensar lo que nadie ha pensado sobre aquello que todo el mundo ve»,
Arthur Schopenhauer.*

2.1. El análisis económico-institucional del estudio de la Geometría Espacial

Existe un episodio particularmente interesante en la historia de las matemáticas y su enseñanza en Colombia, en el que parte de la élite científica del país manifestó un rechazo frente a las geometrías no euclidianas. El principal representante de este movimiento pro-euclídeo fue Julio Garavito Armero, el ingeniero colombiano más influyente del siglo XX. Este hecho tuvo grandes impactos en el desarrollo de la ciencia en el país y, en particular, en el de las matemáticas y su enseñanza, puesto que uno de los roles más importantes en la trayectoria intelectual de Garavito —y de otros miembros de la élite científica— fue el de la docencia y, en esta medida, jugó un papel determinante como impulsor de las políticas educativas que guiaron la enseñanza de las matemáticas durante las primeras décadas del siglo XX (Pérez, 2016).

El episodio que hemos mencionado muestra algunos síntomas epistemológicos que afectaron la enseñanza de la geometría en el país a lo largo del siglo XX. Dichos síntomas consisten en la tendencia ecléctica presente en la élite científica en la que el realismo, el racionalismo, el empirismo, el kantismo y, más adelante, el positivismo lógico, impidieron la aceptación de innovaciones teóricas que pudieran negar la unicidad de los espacios euclídeos dentro del paradigma de las matemáticas de la época (Martínez-Chavanz, 2005).

En la década de los 60, algunos de estos síntomas epistemológicos volvieron bajo la reforma de las matemáticas modernas, donde se consideró que las matemáticas debían liberarse de toda huella intuitiva, o empírica, y fundamentarse en una lógica racional absoluta (Camargo et al., 2012). *¡Muera Euclides!* Es la irónica frase que se asociaba a este movimiento reformista, que se caracterizó por la expulsión del estudio de la geometría de los contextos escolares, evocando las formas y sus propiedades físicas, y en su lugar se enfocó en los conjuntos, la axiomatización y la estructura algebraica de las figuras. De modo que, el atemperado positivismo lógico y el racionalismo ortodoxo acabó por acentuarse en los espacios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En contraste con lo anterior, tras consolidarse la comunidad de profesores de matemáticas en el país y formularse sucesivas reformas curriculares (MEN, 1982; 1998; 2006), el panorama del estudio de la geometría espacial comenzó a mostrarse diferente. Aspectos como la visualización,

el estudio de la geometría mediante tecnologías, la exploración del espacio y la conformación de comunidades de estudio e investigación como el Encuentro Sobre Geometría y sus Aplicaciones de la Universidad Pedagógica Nacional, celebrado desde 1989, provocaron que el estudio de la geometría diera un giro hacia las innovaciones teóricas, postulándose en algunos casos como eje articulador de las experiencias en la clase de matemáticas (Gómez, 2018).

Así, el estudio de la geometría se presenta como un campo donde confluyen diversas perspectivas, actuales y pasadas, donde se presentan tensiones y desafíos a nivel didáctico y práctico. Por este motivo, afirmar la existencia de una tendencia epistemológica dominante en el estudio de la geometría por parte de los profesores de matemáticas en Colombia, es un acto temerario. No obstante, en el marco de la TAD, en la configuración de un problema didáctico se hace necesario realizar un análisis económico institucional en relación con los saberes a estudiar, es decir, un análisis de las praxeologías que habitan en una determinada institución (Gascón, 2011).

En vista de lo anterior, presentamos un análisis económico-institucional enfocado en la estructura del estudio de la geometría espacial en Colombia. Nos centramos específicamente en los documentos de orientación curricular Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), Estándares Básicos en Competencias (MEN, 2006) y Derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2017), y en el libro de texto *Herramientas Digitales Para el Aprendizaje. Secuencias Matemáticas 7* (Castela, 2017), que se utiliza en la institución educativa donde se desarrolla esta propuesta investigativa.

2.1.1 Estudio de la geometría espacial en una institución educativa del municipio de Envigado

El estudio de la geometría espacial adquiere un importante lugar en el currículo de matemáticas en Colombia. Allí, se sugiere que los estudiantes representen el espacio bidimensional a través de experiencias desde lo tridimensional, además de acercarse de una manera activa al estudio del espacio (MEN, 1998). A continuación, realizamos un análisis, que no es exhaustivo, pero que puede servir en principio para dar cuenta del estado del estudio de la geometría espacial en el país.

En los Lineamientos Curriculares de Colombia (Lineamientos) se propone el estudio del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, partiendo de la necesidad de recuperar el sentido intuitivo de las matemáticas. A partir de este documento se propone que el pensamiento espacial es esencial para resolver problemas en otras disciplinas como la arquitectura, la ingeniería, la aeronáutica, o la física. En esta línea, la concepción de espacio está influenciada por las características cognitivas individuales de cada estudiante, así como su entorno físico, cultural y

social, por lo que se debe favorecer la interacción con el entorno para actuar y argumentar sobre el espacio (MEN, 1998).

En Los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (EBCM), en concordancia con los Lineamientos, se asocia el estudio de los pensamientos matemáticos al ser matemáticamente competente. Esto quiere decir que se insta a llevar a cabo procesos en donde los estudiantes adquieran habilidades y conocimientos que les permitan enfrentar situaciones y resolver problemas matemáticos de manera efectiva (MEN, 2006). A continuación, detallamos las referencias que hacen los EBCM al estudio de la geometría espacial en los ciclos de secundaria (ver tabla 2).

Tabla 2.

Referencias al estudio de la geometría espacial en los ciclos de educación secundaria, tomadas de los EBCM.

Ciclo escolar	Estándar	Observaciones
3 (6° y 7°)	<ul style="list-style-type: none"> • Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. • Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. 	Ambos estándares son generales y no presentan relaciones explícitas de cómo guiar el proceso de estudio de la geometría espacial.
4 y 5 (8°, 9°, 10° y 11°)	-----	En estos ciclos no existe una referencia explícita hacia el estudio de la geometría espacial.

De acuerdo con la tabla anterior, pese a la importancia que se otorga al estudio de la geometría espacial en el currículo de matemáticas, no existe una referencia explícita alrededor de ella en el ciclo 4 y 5 —que comprende los grados de octavo a undécimo—. Mientras que, cuando esta referencia se manifiesta, que es el caso del ciclo 3 —que comprende los grados de sexto y séptimo—, se presenta de forma generalizada, lo que implica que no haya una propuesta específica que guíe el estudio de la geometría espacial.

Por otra parte, en los Derechos Básicos de Aprendizaje V2 (DBA) que se propone didactizar los documentos curriculares de los Lineamientos y los EBCM, se presentan algunas evidencias de aprendizaje y ejemplos concretos (MEN, 2016). A continuación, detallamos estos elementos referidos al estudio de la geometría espacial en la educación secundaria (ver tabla 3).

Tabla 3.

Referencias al estudio de la geometría espacial en los grados de educación secundaria, tomadas de los DBA.

Grado	DBA	Observaciones
6	<ul style="list-style-type: none"> Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados. Utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos. 	<p>Pese a que en los ejemplos se consideran elementos de la vida cotidiana como los diferentes tipos de envases, en estos DBA no hay una referencia al sentido (intra y extramatemáticas) de realizar el desarrollo plano de estos envases.</p>
7	<ul style="list-style-type: none"> Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones. 	<p>Para este DBA, se propone en el ejemplo representar las diferentes vistas de un envase tridimensional. Esta tarea podría profundizarse y posibilitar el estudio de las figuras planas. Aspecto que no es sugerido.</p>
8	<ul style="list-style-type: none"> Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras ciencias. 	<p>En relación con el primer DBA en el ejemplo se sugiere rellenar una tabla con los valores del volumen y el área de una caja dadas las medidas de las aristas. Esta tarea es de ejecución inmediata, puesto que basta con sustituir en las fórmulas de área y volumen para obtener el resultado.</p> <p>Para el segundo, se propone la medición del volumen de una figura irregular empleando el principio de Arquímedes. Aunque se hace mención de la posibilidad de relacionar este DBA con otras ciencias, no se explicita cuáles ni de qué forma se propone esta relación.</p>
9	<ul style="list-style-type: none"> Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, 	<p>En el primer DBA, en el ejemplo se propone estimar y comparar la capacidad entre un cono y un cilindro con igual altura y misma base. Es</p>

	<p>cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos. 	<p>valioso el intento de profundizar en la relación de las capacidades, por ejemplo, en la posibilidad de deducir el modelo del volumen de un cono; no obstante, la tarea es general y no describe la manera en cómo hacerlo.</p> <p>Para el segundo, se mencionan las formas tridimensionales, pero en el ejemplo solo se desarrollan las bidimensionales. En tal caso, no se relaciona geometría 2D con la 3D.</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> • Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones. 	<p>En el ejemplo presente en el DBA se menciona el lugar geométrico limitado al plano cartesiano, aspecto que omite los lugares geométricos en el espacio.</p>
11	<ul style="list-style-type: none"> • Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos. 	<p>En relación con este SBA en el ejemplo se propone tomar imágenes circulares (espirales, entre otras) presentes en la naturaleza y realizar su representación en el plano. Esta tarea es de fácil solución, puesto que basta dibujar la figura en un plano, no se explicita en ella la relación entre los diferentes sistemas de coordenadas ni el sentido o la ventaja de usar uno u otro.</p>

De acuerdo con la tabla anterior, el estudio de la geometría espacial tal y como se propone en el currículo de matemáticas, no responde a un qué ni a un para qué; es decir, no manifiesta sus razones de ser, ni al sentido —intra y extramatemáticas— de llevar a cabo su estudio. Además, las tareas propuestas son generales y de ejecución inmediata. En esta medida, no representa un problema para los estudiantes. Tampoco existe una clara relación en las propuestas que relacionan la geometría bidimensional y tridimensional, así como entre las matemáticas y las otras disciplinas.

Estos aspectos son importantes puesto que, desde la perspectiva ofrecida por la TAD, se considera que los profesores, los investigadores o los estudiantes, cuando llevan a cabo un proceso de estudio deberían cuestionarse sobre el saber, en otras palabras, deberían indagar acerca de sus razones de ser (Rojas et al., 2022). En esta dirección, con el ánimo de configurar el escenario epistemológico objeto de esta investigación, planteamos, a continuación, el análisis de las OM propuestas en el libro de texto *Herramientas Digitales Para el Aprendizaje Secuencias Matemáticas 7* (HDM7), que es implementado en la institución educativa en la cual se desarrolla esta propuesta.

En el libro de texto HDM7 (Castela, 2017), en el capítulo 10: cuerpos geométricos y sus magnitudes, se presentan los temas de manera descriptiva y, junto con ellos, un apartado denominado *para contextualizar* (ver figura 7). En este apartado se presentan elementos en relación con la configuración espacial de algunos objetos desde el punto de vista de la historia y la cultura.

Figura 7

Apartado para contextualizar, tomado del libro de texto.

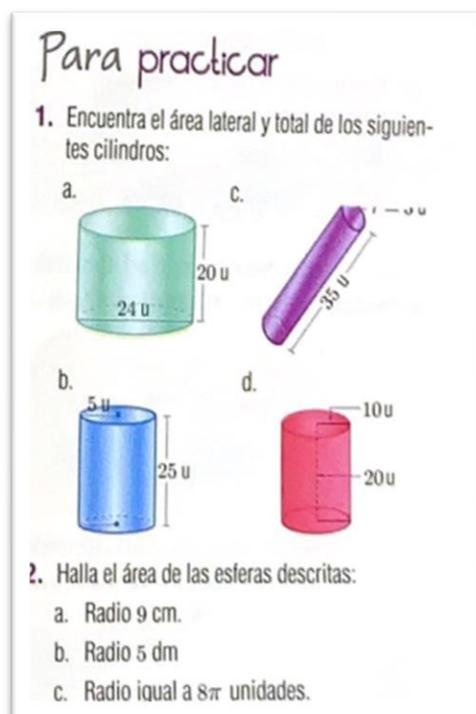


Fuente: (Castela, 2017).

También hay un apartado denominado *para practicar* (ver figura 8), donde se presentan tareas para que los estudiantes apliquen los conocimientos que han adquirido durante el estudio de la unidad, acompañadas de imágenes y opciones de respuesta múltiple.

Figura 8

Apartado para practicar, tomado del libro de texto.



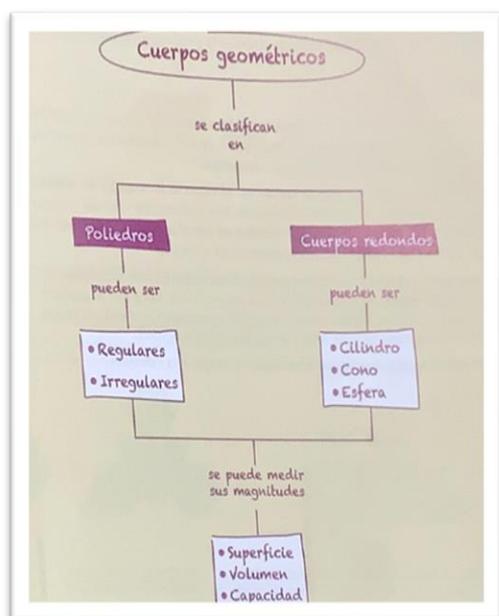
Fuente: (Castela, 2017).

En relación con los aspectos tecnológico-teóricos, el libro de texto presenta una clasificación de los cuerpos geométricos, dividida en dos: poliedros y cuerpos redondos. Los primeros se subdividen en regulares e irregulares, los cuales se definen como figuras formadas por polígonos; y los segundos en cilindros, conos y esferas, los cuales se definen como figuras generadas por superficies de revolución. En esta clasificación, no existen, por ejemplo, los cuerpos geométricos que están compuestos de poliedros y cuerpos redondos, y en definitiva es general, por lo que comprende una diferenciación entre los sólidos arquimedianos y los de catalán (ver figura 9).

Sumado a esto, en esta clasificación se hace énfasis en las descripciones de los objetos. Esta manera de clasificar y presentar los cuerpos geométricos no hace alusión a las propiedades de estos, por el contrario, se presenta como una nomenclatura. Por este motivo, la clasificación no

está articulada al problema de la determinación de los cuerpos geométricos (Zuluaga et al., 2022). En esta dirección, no existe una sugerencia para que los estudiantes elaboren sus propias técnicas o empleen unas diferentes a las propuestas por el libro para desarrollar las tareas sugeridas.

Figura 9
Clasificación de los cuerpos geométricos.



Fuente: (Castela, 2017).

En resumen, en relación con las OM y las OD propuestas tanto en el currículo de matemáticas, como en el libro de texto usado en la institución educativa en la que se desarrolla esta propuesta, se resalta que:

- i.** Pese a la importancia que se otorga al estudio de la geometría espacial en el currículo de matemáticas, no existe una referencia explícita alrededor de este y cuando esta referencia se manifiesta, se presenta de forma generalizada, lo que implica que no hay una propuesta específica que guíe el estudio de la geometría espacial.
- ii.** Carece de razones de ser —intra y extramatemáticas— para llevar a cabo el estudio de la geometría espacial, lo que ocasiona que la sugerencia de llevar a cabo su estudio no vaya más allá de su estudio por sí mismo.
- iii.** Las tareas propuestas son generales y de ejecución inmediata, por lo que no representan un problema para los estudiantes.
- iv.** No hay una relación clara entre la geometría bidimensional y la tridimensional.

- v. No presenta sugerencias para desarrollar el estudio de la geometría espacial con relación a otras disciplinas, pese a la importancia manifiesta de entablar estos vínculos disciplinares.
- vi. Las técnicas que se sugieren para resolver las tareas son dadas de antemano, por lo que estas tareas no son realmente problemáticas (Chevallard, 2013).
- vii. El discurso tecnológico que justifica las técnicas no está articulado a la determinación de los cuerpos geométricos y tampoco hace énfasis en las propiedades de las figuras.

Hasta este punto, hemos analizado la propuesta del estudio de la geometría espacial en las instituciones MEN y el libro de texto HDM7. Ahora, avanzaremos hacia la sección dedicada al desarrollo de un MER que integra la Educación STEAM, en la que se desarrollan en particular los asuntos alternativos a las praxeologías halladas.

2.2. Un MER en torno al diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña

Medellín es una colcha de retazos del ayer y del ahora. En la capital y sus municipios colindantes, entre los que se encuentra Envigado, se ha instaurado un sentimiento de novedad y capitalización; hubo entonces, con la promesa de renovación, una arremetida contra los edificios y arquitecturas emblemáticas de la ciudad: el teatro de Junín, la Torre de telégrafos y el Banco Republicano, fueron algunas obras que sucumbieron al sacrificio de este sentimiento de renovación.

En la actualidad, si algo es común a los municipios paisas⁶, es el aprecio por el patrimonio artístico y cultural. Los esfuerzos por preservar algunas de las obras que no perecieron ante los aires de novedad es una constante en estos municipios: La Casa Gardeliana, La catedral metropolitana, la Casa Museo Pedro Nel Gómez y la Casa Museo Otraparte, son muestra de ello.

En este sentido, como situación que moviliza este modelo epistemológico, se propone el diseño de la Casa Museo de la cultura envigadeña. El empleo de la conjugación de los sustantivos *casa y museo* que haremos no hace referencia a la preservación de un lugar en sí mismo como forma de mantener el patrimonio y legado de un personaje en específico; sino, más bien, hace referencia a su sentido nostálgico: una casa que sirve de museo y que sirve de encuentro entre el ayer y el ahora de las personas, los diferentes artistas y los aspectos significativos de la cultura envigadeña, y en general, de la cultura paisa. En adelante, empleamos las organizaciones

⁶ Se denomina paisas a las personas originarias de la región de Antioquia, que se encuentra en el noreste de Colombia; en ocasiones, también se incluyen personas de regiones como Caldas, Tolima y Risaralda.

disciplinarias relativas a cada disciplina de la Educación STEAM⁷. En lo sucesivo, proponemos la pregunta generatriz que busca guiar el proceso de estudio: Q_0 : **¿Qué características deben considerarse para el diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña?**

La consideración de esta pregunta posibilita el estudio de las disciplinas de la Educación STEAM, puesto que, al cuestionarse por *las características* relacionadas con el diseño de una casa museo, se pueden plantear interrogantes como **a.** ¿Por qué es importante construir una casa museo? **b.** ¿Qué forma puede tener la estructura de una casa museo? **c.** ¿Qué se necesita para construir una casa museo? **d.** ¿Qué obras y de cuáles artistas deben estar en esta casa? Desde un punto de vista formal, esta pregunta generatriz podría considerarse que está formulada de manera imprecisa; no obstante, consideramos que para la realización del MER este hecho constituye una ventaja, puesto que el carácter abierto de Q_0 puede conducir al análisis de diversas características vinculadas con diferentes esferas del conocimiento.

A continuación, desarrollamos en profundidad los aspectos asociados a los numerales **b** y **d.** En particular, los vinculados a la geometría espacial en el diseño de una sección de la Casa Museo y el diseño de dos obras que se incluyen en esta. Para lograrlo, empleamos el software de modelado 3D Tinkercad, el cual permite crear con precisión modelos espaciales partiendo de la geometría de los sólidos. Es importante recordar que los MER son hipótesis didácticas y se formulan a priori, en este sentido, están sujetos a modificaciones y transformaciones propias de los fenómenos locales (Gascón, 20014).

2.2.1 Determinación de poliedros a partir de otros poliedros

Dentro del conjunto que conforma la Casa Museo, las columnas emergen como elementos esenciales. En el ámbito de la arquitectura, las columnas desempeñan un papel dual, ya que no solo sostienen las cargas de una estructura, sino que también se erigen como elementos ornamentales de gran relevancia. Las columnas del corredor de la Casa Museo están adornadas con las esculturas de algunos de los animales típicos del bosque húmedo de Envigado; este elemento brinda la impresión estética de estar al aire libre. Q_{a1} : ¿Cuál es el concepto o la idea central que quiero transmitir con estas esculturas? Es una primera pregunta que surge en este contexto, y vinculada a esta pregunta se encuentra la tarea t_{s1} que consiste en reconocer la fauna que habita en el municipio, y junto con esta la pregunta Q_{s1} : ¿Cuáles de estas especies están en vía de extinción? Que a su vez están asociadas a nuevas tareas.

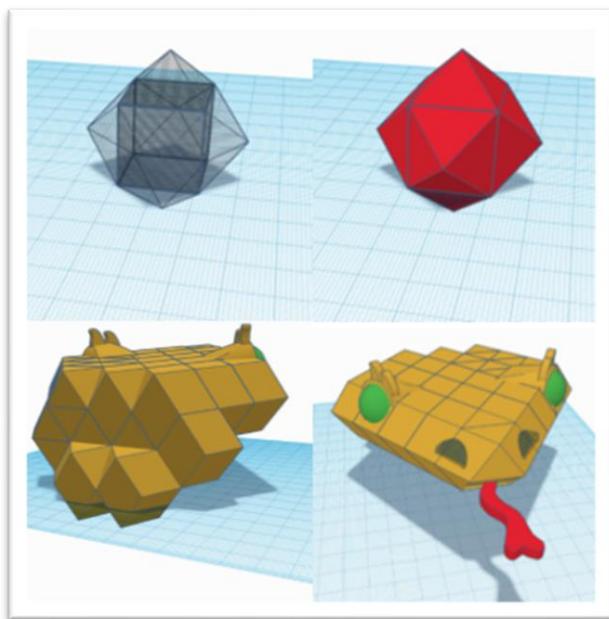
⁷ Así, cada unidad praxeológica asociada a una disciplina lleva en el subíndice la disciplina de la cual proviene, por ejemplo, las praxeologías asociadas a las ciencias son $[T_s/\hat{\theta}_s/\theta_s/\theta_s]$.

Al tratar de darle respuesta a algunas de estas cuestiones, descubrimos la víbora de pestañas, por su taxón *Bothriechis schlegelii*. Dicha serpiente hará parte de una columna como elemento ornamental. En esta dirección, la serpiente y en general cualquier tipo de objeto en el espacio sensible puede ser representado por medio de cuerpos geométricos; en efecto, al considerar el espacio sensible como susceptible de ser modelado geoméricamente, se amplía y enriquece nuestro entendimiento de dicho espacio (Houdement, 2019). Por ello, existe una relación directa entre el espacio sensible y el estudio de la geometría. Así, surge la cuestión Q_{m1} : ¿Cómo puede realizarse el modelo espacial de un animal a partir de poliedros? Y vinculada a esta Q_{t1} : ¿Qué software permite realizar este modelo?

Una posible tarea asociada con estas cuestiones consiste en la construcción del modelo de la víbora de pestañas. Esta tarea puede ser realizada por en el software dinámico 3D Tinkercad, el cual permite crear con precisión modelos espaciales partiendo de la geometría de los sólidos. Este hecho deriva en la técnica \hat{o}_{m1} , que se basa en la combinación de diversos poliedros que se construyen a partir de un poliedro inicial (en el caso de la víbora, un cubo), junto con una serie de pirámides rectas dispuestas sobre las caras laterales. A su vez, las bases de estas pirámides están formadas por las caras del poliedro inicial y su ápice está contenido en la recta perpendicular que pasa por el centro geométrico de la base de la pirámide (en el caso de la víbora estos poliedros configuran un rombododecaedro, como se ilustra en la figura 10).

Figura 10

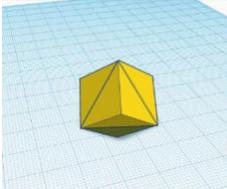
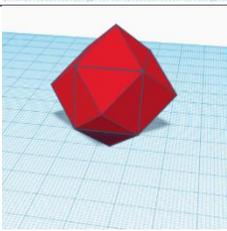
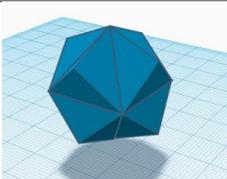
Representación de la víbora de pestañas usando rombododecaedros.



En particular, en el rombododecaedro, los vértices del cubo (8) y los ápices de las pirámides se convierten en nuevos vértices (6), uno por cada cara del cubo. Las caras de algunas pirámides se solapan, quedando sobre el mismo plano, lo que permite que se formen 6 vértices de orden 4 y 8 vértices de orden 3, por lo que las propiedades de los cuerpos originales se mantienen en la resultante. Este planteamiento permite que emerja la pregunta Q_{m2} : ¿todos los poliedros que se generan con la técnica \hat{o}_{m1} conservan las propiedades de los poliedros constitutivos?

Dar respuesta a estas preguntas posibilita la ampliación del universo de figuras que se pueden construir a partir de la técnica \hat{o}_{m1} . Al explorar dichas cuestiones, para el tetraedro y el cubo, algunas de las aristas de las pirámides se solapan sobre el mismo plano, mientras que, en el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, estas aristas forman poliedros estrellados (ver tabla 4). Los poliedros estrellados han sido empleados ampliamente en la arquitectura y la ingeniería, por ejemplo, el arquitecto Antoni Gaudí, para diseñar el templo de la Sagrada Familia empleó los poliedros estrellados de Kepler; la Estrella de la Mañana que representa la virgen es un caso particular (Alsina, 2016). Asociada a estos planteamientos surge la cuestión Q_{e1} : ¿qué función estructural puede cumplir un poliedro estrellado en una construcción?

Tabla 4.
Poliedros generados a partir de los poliedros platónicos.

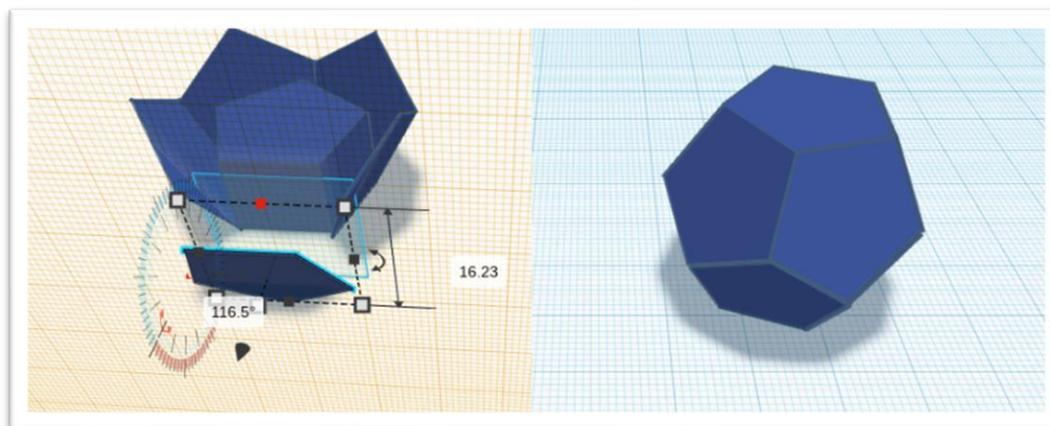
Poliedros generados con técnica \hat{o}_{m1}	Gráfico
Cubo = tetraedro + 4 pirámides	
Rombododecaedro = cubo + 6 pirámides	
Octaedro estrellado = octaedros + 8 pirámides	

Al continuar el proceso de estudio, se presentan los asuntos relativos a la tarea τ_{m2} que consiste en la determinación de los poliedros a partir de otros poliedros. Este planteamiento está

en línea con la propuesta de Rojas et al. (2022), en la cual presentan una de las razones de ser para el estudio de la geometría en relación con la determinación de los sólidos geométricos. Q_{m3} : ¿Cuáles son las características que influyen en la determinación de un poliedro a partir de otro poliedro? y Q_{m4} ¿existe otra forma de determinar un poliedro?, son cuestiones que se derivan de esta tarea.

En línea con esto, cuando intentamos construir el triacontaedro rómbico en Tinkercad, aparece una barrera: al contrario del icosaedro, el dodecaedro no está predefinido en las herramientas del software, por lo que para construir este sólido es necesario, en primer lugar, determinar el dodecaedro, lo que constituye la tarea τ_{m3} . Una manera de hacerlo resulta al emplear la técnica \hat{o}_{m2} , que consiste en generar prismas de base pentagonal de grosor ínfimo (que se construyen seleccionando el grosor más pequeño posible por el software) y unirlos teniendo en cuenta que el ángulo diedro del dodecaedro es $\alpha = 116,5650^\circ$, para luego ensamblar las caras haciendo rotaciones de 108° para hacer coincidir las aristas de las caras (ver figura 11).

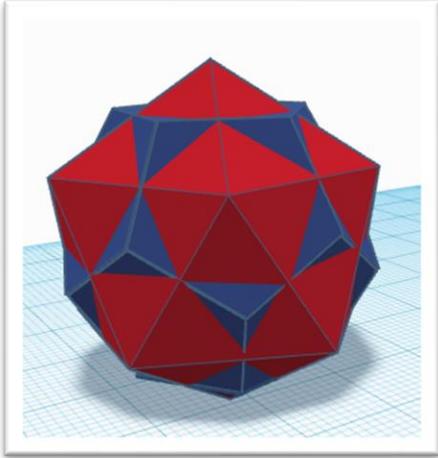
Figura 11
Construcción del dodecaedro.



Para formar el triacontaedro rómbico, se requiere que el icosaedro y el dodecaedro estén a la misma escala. Así, los ejes de simetría entre ambos poliedros deben ser ortogonales y las aristas del icosaedro de orden 5 deben coincidir con los pentágonos del dodecaedro y, las aristas de orden 3 del dodecaedro deben coincidir con los triángulos del icosaedro (ver figura 12). Todos estos elementos hacen parte de la justificación de \hat{o}_{m2} , es decir, de su tecnología θ_{m2} . Por último, se unen los vértices para formar los rombos característicos del triacontaedro.

Figura 1

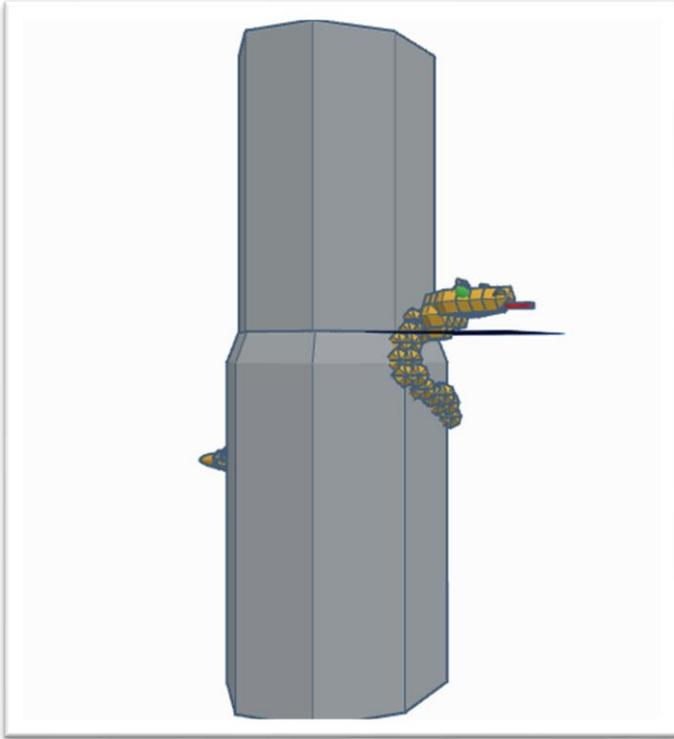
Estructura del triacontaedro rómbico formado a partir de un dodecaedro y un icosaedro.



Hasta ahora, los poliedros que hemos explorado por medio del proceso de determinación nos han permitido estudiar no solo los asuntos relativos a la geometría espacial, sino también se han abordado aspectos relacionados con la arquitectura, la fauna de Envigado y algunos elementos estéticos. En este sentido, los poliedros se emplearon así: los rombododecaedros formaron la cabeza de la víbora de pestañas; el octaedro estrellado y el triacontaedro rómbico se emplearon en el cuerpo de la serpiente para dar la impresión de poseer un cuerpo escamado, además, el pilar de la Casa Museo está formado por dos prismas y una pirámide octogonal (ver figura 13). Esta forma de afrontar el estudio de la geometría espacial relacionado con otras disciplinas está en concordancia con los planteamientos de Guillén (1997), quien dice que para el estudio de la geometría espacial se requiere un gran empleo de la imaginación.

Figura 23

Pilar de la estructura de la Casa Museo envigadeña.



Al momento de realizar el diseño del pilar, es importante plantear algunas preguntas relativas a su mejoramiento. En este sentido, surgen cuestiones y tareas asociadas como Q_{a2} : ¿Cómo afectará la ubicación y el entorno la percepción de la obra? Q_{a3} : ¿Qué elementos estéticos pueden acompañar el pilar y la serpiente? Q_{e2} : Si los pilares son estructurales, ¿cómo se pueden distribuir por el espacio? Y Q_{e3} : ¿Qué otros tipos de pilares pueden emplearse para la construcción de esta sección de la casa?

2.2.2 Determinación de polígonos a partir del truncamiento de poliedros

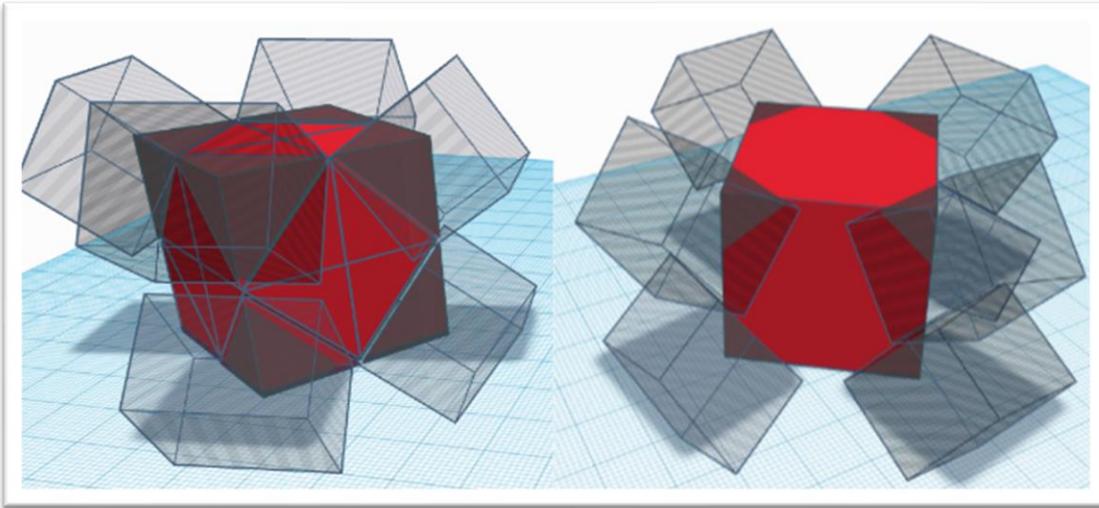
Al intentar seleccionar algunas de las obras que podrían formar parte de la Casa Museo, surge la tarea τ_{s1} que consiste en indagar por los artistas más influyentes de Antioquia, en particular, aquellos originarios de Envigado. Una obra destacada es el *Monumento a la fecundidad*, creada por Salvador Arango. En 1975, esta escultura fue donada por el Club Rotario de Envigado con la intención de conmemorar el bicentenario del municipio. La obra representa a una mujer embarazada sentada en una postura que transmite la idea de profunda concentración y reflexión. Los materiales que la componen son principalmente el bronce fundido y el concreto, los cuales configuran su forma poliédrica. En este sentido, surge la cuestión de Q_{a4} : ¿Cuál fue la intención del artista y qué quiso plasmar en su obra?

En la actualidad, esta escultura se encuentra ubicada en un parque público, por lo que la forma más eficiente de disponer de ella para ubicarla en la casa museo es realizando una réplica. De esta manera, surge la cuestión Q_{m5} : ¿Cómo puede realizarse el modelo espacial de una réplica de una escultura empleando cuerpos geométricos?

Una posible tarea que surge cuando indagamos por esta cuestión, es el diseño del modelo a escala del monumento a la fecundidad, este implica la puesta en marcha de algunos saberes con las razones y proporciones. También, al abordar esta tarea lleva a realizar procesos de visualización e imaginación de los objetos a modelar, estos procesos son un recurso valioso que permite desarrollar el pensamiento espacial y, en particular, contribuye a mejorar la intuición, la comprensión de los contenidos matemáticos y los contenidos en otras áreas de las ciencias (Molano, 2019). Una manera de determinar los cuerpos que modelan estos objetos puede realizarse empleando la técnica $\hat{\delta}_{m3}$, que consiste en el truncamiento de cuerpos geométricos.

Así bien, este proceso de diseño de la escultura permite el surgimiento de cuestiones relativas a Q_{m6} : ¿Cómo se obtienen poliedros regulares mediante el proceso de truncamiento?, que a su vez permiten llevar a cabo la tarea τ_{e4} , vinculada al prototipado de réplicas, con el fin de ajustar los parámetros requeridos para el diseño. Para responder a esta pregunta se hace necesario considerar los diferentes tipos de truncamiento. Guillén (1997), propone dos tipos de truncamiento: el truncamiento de tipo I, que se realiza mediante cortes de tal forma que sean paralelos al plano y que pasen por los puntos medios de las aristas que convergen en los vértices, mientras que el truncamiento de tipo II se desarrolla a través de cortes de tal manera que sean paralelos al plano y que estén a cierta distancia de los puntos medios de las aristas que convergen en los vértices (ver figura 14).

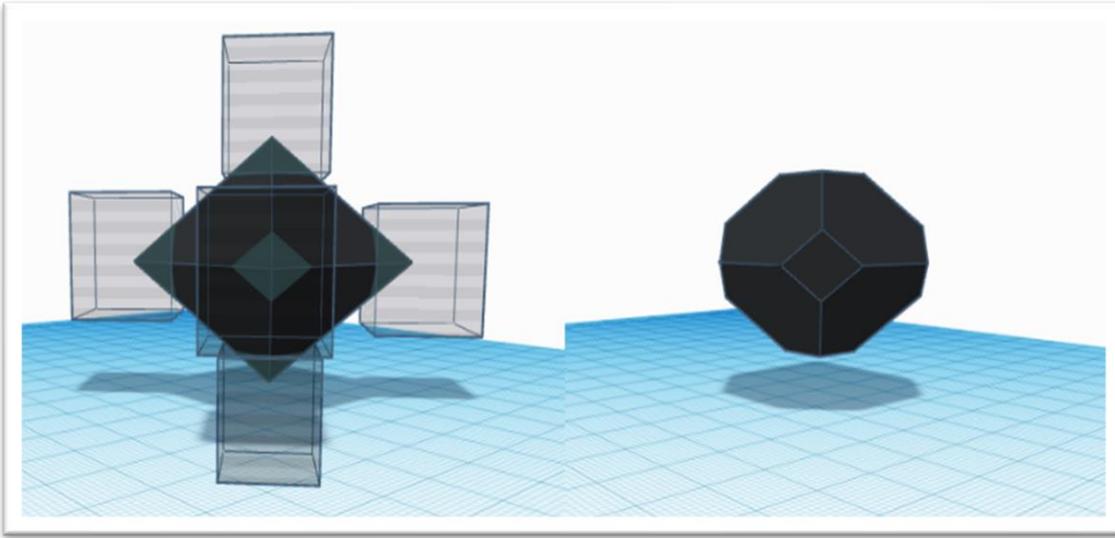
Figura 14
Truncamiento de tipo I y II en el cubo.



Estos dos tipos de truncamiento, que componen la técnica \hat{o}_{m4} , permiten generar nuevos poliedros a partir de otros poliedros, por ejemplo, al truncar los poliedros regulares convexos con el tipo I se generan: a partir del tetraedro, el octaedro; cuando se trunca el cubo o el octaedro se genera el cuboctaedro y truncando el dodecaedro o el icosaedro se genera el icosidodecaedro. Por otro lado, los poliedros generados al truncar con el tipo II son el tetraedro truncado, el hexaedro truncado, el octaedro truncado, dodecaedro y el icosaedro truncado. Al llevar a cabo el diseño del monumento se emplean estos tipos de truncamiento, por ejemplo, al modelar el estómago se utiliza el octaedro truncado (ver figura 15). A este paso, se hace evidente, por ejemplo, la necesidad de tener una habilidad desarrollada en el empleo del software. Por esta razón, es importante tomar en cuenta la tarea τ_{t1} , que implica analizar tanto las limitaciones como las potencialidades de Tinkercad.

Figura 15

Diseño del estómago de la escultura Monumento a la fecundidad.



Al usar la técnica $\hat{\delta}_{m5}$ se generan con los cortes diferentes tipos de polígonos, dando paso a la conexión entre la geometría plana y la geometría espacial. En este sentido, surge la tarea τ_{m4} , que consiste en determinar polígonos a partir de poliedros, y junto con esta Q_{m7} : ¿Qué poliedro permite generar un polígono regular? La respuesta a esta pregunta no está dada de antemano, por lo que requeriría del principio herbartiano enmarcado en el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013).

Al margen de estas cuestiones, surge la tarea τ_{m5} , la cual consiste en obtener el número de artistas y vértices de un poliedro resultante de un truncamiento. Una posible manera de enfrentar esta cuestión es mediante la aplicación de la técnica $\hat{\delta}_{m5}$. Al aplicar el truncamiento de tipo I a un cubo, se obtienen 12 vértices, 8 triángulos equiláteros y 6 cuadrados en las caras, resultando el cuboctaedro, que tiene un total de 14 caras. En relación con las aristas, por cada vértice del cubo se obtienen 3 aristas, las cuales coinciden con el orden de los vértices del cubo, para así obtener un total de 24 aristas. En cuanto a la cantidad de vértices, se tiene que cada arista del poliedro inicial se convierte en un vértice; así, en total se tendrían 12 de estos (ver tabla 5). Un proceso similar puede observarse al realizar el truncamiento de tipo II (ver tabla 6).

Tabla 5.
Poliedros generados por el truncamiento de tipo I.

Poliedro inicial	Poliedro generado	Polígonos generados	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro	Octaedro	8 triángulos equiláteros	8	12	6
Cubo - Octaedro	Cuboctaedro	6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros	14	24	12
Dodecaedro - Icosaedro	Icosidodecaedro	12 pentágonos equiláteros y 20 triángulos equiláteros	32	60	30

Ahora bien, si pensamos en el truncamiento de tipo II en poliedros regulares, es posible conocer el número de caras, vértices y aristas que forman el nuevo poliedro. Respecto al número de aristas, se determinan al considerar los lados de cada uno de los 8 triángulos equiláteros formados por los cortes de tipo II, estos forman 24 aristas y se conservan las del poliedro inicial; es decir, las 12 aristas del cubo más 24 obtenidas de los triángulos equiláteros para un total de 36 aristas. Al analizar esto, es posible establecer una relación entre el número de lados de cada cara y el número de aristas debido al truncamiento de tipo II. Donde tanto i como j son el número de lados de los polígonos obtenidos al desarrollar el truncamiento de tipo II, C_i y C_j representan la cantidad de polígonos con i y j lados respectivamente, C_i la siguiente expresión que permite calcular la cantidad de aristas del poliedro resultante:

$$A = \frac{iC_i + jC_j}{2}$$

Tabla 6.
Poliedros generados por el truncamiento de tipo II.

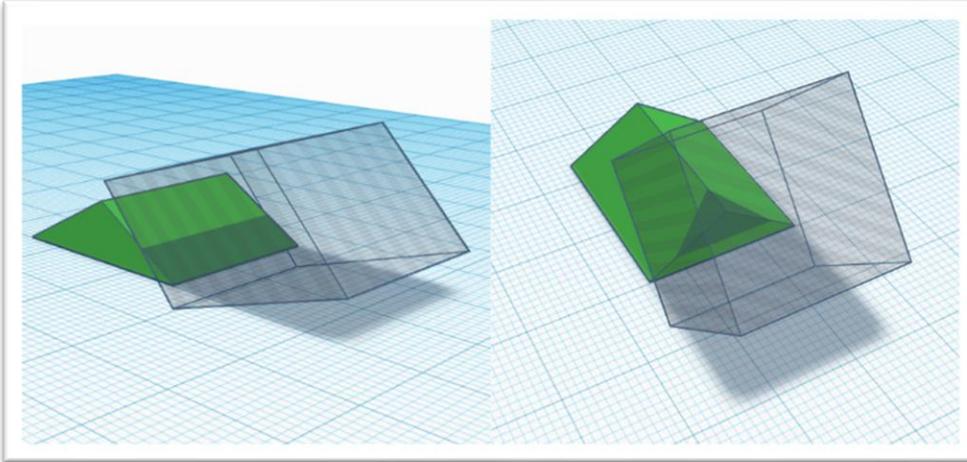
Poliedro inicial	Poliedro generado truncamiento tipo II	Polígonos generados	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro	Tetraedro-Truncado	4 hexágonos y 4 triángulos equiláteros.	8	18	12

Cubo	Cubo- Truncado	6 octágonos y 8 triángulos equiláteros.	14	36	24
Octaedro	Octaedro- Truncado	8 hexágonos 6 cuadrados.	14	36	24
Dodecaedro	Dodecaedro- Truncado	12 decágonos y 20 triángulos equiláteros.	32	90	60
Icosaedro	Icosaedro- Truncado	20 hexágonos y 12 pentágonos	32	90	60

Por otro lado, realizar diferentes tipos de truncamiento (no necesariamente los de tipo I y II) permite el estudio de los polígonos asociados a los ejes de simetría de los poliedros, por ejemplo, al explorar los diferentes truncamientos paralelos sobre un prisma triangular se generan diferentes secuencias: **i)** al realizar los cortes paralelos a las caras laterales se generan secuencias de rectángulos de diferente tamaño y **ii)** al emplear cortes de forma transversal, manteniendo la altura, se generan secuencias de triángulos y trapecios (ver figura 16). En consecuencia, surge la tarea τ_{m6} , que consiste en hallar los ejes de simetría de un poliedro a partir de la secuencia de polígonos formados por sus truncamientos, por ejemplo, al truncar un cubo se pueden hallar estos ejes respecto a los polígonos que se generan con los cortes: triángulo-pentágono-triángulo genera el eje simetría formado por la línea que une los centros de los vértices opuestos.

Figura 16

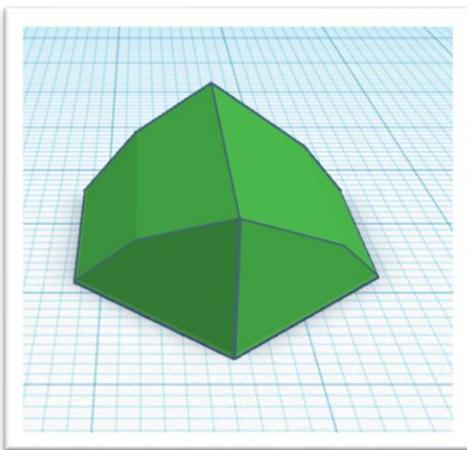
Tipos de truncamiento en un prisma triangular.



Enfrentar estas tareas τ_{m7} y τ_{m8} permite mejorar el proceso de modelado de la obra *Monumento a la fecundidad*, puesto que para realizar sus partes se requiere considerar, por un lado, los diferentes cortes y truncamientos de los cuerpos disponibles en el software para obtener otros más complejas, y, por otro lado, el valor de visualizar, imaginar y determinar con antelación los tipos de figuras que se presentan al truncar diferentes cuerpos para usarlas de una manera más eficaz en la configuración del modelo. Por ejemplo, al realizar el pie de la mujer, se realizaron varios truncamientos sobre un prisma de base triangular (ver figura 17).

Figura 17

Pie del monumento a la fecundidad.



En resumen, el proceso de estudio al considerar los aspectos relativos a la forma ha permitido estudiar elementos relacionados con la fauna presente en el municipio de Envigado y

sus alrededores, la estética y el arte, el sentido de las obras de arte, la configuración espacial, el truncamiento de poliedros, las simetrías, la determinación de polígonos, la determinación de poliedros, el diseño y el estudio de las estructuras. En la tabla 7 se muestran algunas organizaciones disciplinares derivadas de esta pregunta generatriz.

Tabla 7.

Cuestiones asociadas a las disciplinas de la Educación STEAM derivadas de la pregunta generatriz.

Disciplina STEAM	Organizaciones disciplinares
<p>Ciencia <i>OS</i></p>	<p>τ_{s1} indagar por la fauna que habita el municipio. τ_{s2} Investigar cómo se clasifican las especies. τ_{s3} examinar qué elementos son característicos de su hábitat. τ_{s4} indagar por las especies que están en vía de extinción. τ_{s5} indagar acerca de los espacios protegidos del municipio de Envigado. τ_{s6} indagar acerca de cuidado ambiental en el municipio.</p>
<p>Tecnología <i>OT</i></p>	<p>τ_{t1} indagar por los tipos software de diseño y modelado. τ_{t2} Indagar acerca de la posibilidad de llevar a cabo esta tarea en el software de GeoGebra. τ_{t3} Analizar las limitaciones y potencialidades del software Tinkercad que te permitan migrar a otro, o terminar el proyecto en este.</p>
<p>Artes <i>OA</i></p>	<p>τ_{e1} Indagar acerca de la función estructural puede cumplir un poliedro estrellado en una construcción. τ_{e2} Diseñar un mapa de la Casa y rastrea como pueden distribuirse los pilares estructurales en una Casa. τ_{e3} Hacer un diseño de otras opciones de pilares que cumplan con las funciones esperadas. τ_{e4} Prototipar réplicas de las obras con el fin de ajustar los parámetros requeridos para el diseño.</p>
<p>Ingeniería <i>OE</i></p>	<p>τ_{a1} ¿Cuál es el concepto o la idea central que quiero transmitir con esta escultura? τ_{a2} Indagar acerca del impacto que tiene la ubicación de la obra en su percepción. τ_{a3} ¿Qué elementos estéticos pueden acompañar el pilar y la serpiente? τ_{a4} Indagar acerca de la intención que tuvo Salvador Arango al realizar el monumento a la fecundidad (o cualquier otra obra considerada).</p>
<p>Matemáticas <i>OM</i></p>	<p>τ_{m1} realizar el modelo de animal a partir de poliedros. τ_{m2} determinar un poliedro a partir de otro poliedro. τ_{m3} determinar un poliedro a partir de sus propiedades intrafigurales. τ_{m4} realizar un modelo de una obra de arte empleando cuerpos geométricos. τ_{m5} determinar un poliedro a partir del truncamiento de otro poliedro. τ_{m6} Determinar un polígono a partir de un poliedro.</p>

τ_{m7} Truncar un poliedro de tal forma que se genere un polígono regular.

τ_{m8} Obtener el número de aristas y vértices de un poliedro resultante de un truncamiento.

τ_{m9} Hallar los ejes de simetría de un poliedro a partir de la secuencia de polígonos formados por sus truncamientos.

2.3. Una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) en torno al diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña.

Para el desarrollo de esta AEI, propusimos a los estudiantes un pretest con el propósito de explorar dos aspectos fundamentales. Por un lado, el primero se refiere a sus saberes previos relacionados con la geometría espacial y las concepciones que tienen acerca de la geometría espacial y el mundo que les rodea. Por otro lado, el segundo aspecto, trata de las percepciones de los estudiantes acerca del proceso de estudio de la geometría espacial y su relación con las disciplinas de la Educación STEAM.

En relación con el primer aspecto, realizamos tres preguntas: **i)** ¿Qué entiendes por geometría? **ii)** ¿Qué entiendes por geometría espacial? y **iii)** ¿Con qué elementos de tu entorno relacionas la geometría espacial? En cuanto a la pregunta i), las respuestas de los estudiantes giraron en torno a la geometría plana. De esta manera, mencionaron figuras geométricas como los cuadrados, triángulos, círculos y rectángulos; también, algunos se refirieron a los cálculos y las operaciones como *complicadas*. Además, pocos estudiantes relacionaron el estudio de la geometría con la geometría 2D y 3D (ver tabla 8).

Tabla 8.

Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría? – Pretest.

Respuestas de los estudiantes ⁸		
La geometría trata de símbolos como cuadrados, círculos, triángulos, etc. Y se trabaja con ellos. Se trabaja con figuras geométricas.	La geometría es el área que investiga los cuerpos y figuras de 2 y 3 dimensiones.	Son figuras planas que tienen vértices y aristas. [Dibuja un triángulo y con una flecha señala el vértice y la arista].
Calcular cuadrados.	Una forma de hacer operaciones.	Figuras geométricas. [Dibuja un triángulo, un cuadrado y un círculo]
Figuras geométricas en operaciones matemáticas.	La geometría es la representación de medidas geométricas.	Operaciones con figuras geométricas.
Cuadrado. 1 figuras.	Son figuras. Figuras geométricas, triángulos, cuadrados, vértice, arista.	Son figuras perfectas. Figuras geométricas 3D y en 2D.
Figuras geométricas.	La geometría es la ciencia que representa las figuras geométricas.	La ciencia que estudia las figuras geométricas.

⁸ Las respuestas que mostramos respetan la escritura y ortografía de los estudiantes. Debido a la poca legibilidad de algunas de estas respuestas decidimos transcribirlas.

Geometría es creo que cuadrados, rectángulos. Cosas así.	Las figuras geométricas relacionadas con la matemática.	Figuras geométricas y cálculos complicados.
Es como las figuras cuadrado, círculos, etc. Todo con eso.	Las figuras geométricas, pero con más matemáticas.	El estudio de las figuras planas.
Figuras planas geométricas.	Una palabra que dice que sirve para medir.	Cohetes, todo lo de la nasa, planetas, estrellas, cometas, etc.

Respecto a la pregunta ii), muchos de los estudiantes relacionaron el *espacio* con el universo. Además, algunas de las respuestas no fueron más allá de decir que se trata de las figuras geométricas del espacio; no hicieron, en este sentido, alusiones a las propiedades de las figuras. También, algunos estudiantes expresaron que no sabían lo que es la geometría espacial y manifestaron confusión (ver tabla 9).

Tabla 9.

Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría espacial? – Pretest.

Respuestas de los estudiantes		
Las medidas de los planetas.	El estudio de los astros espaciales mediante los sistemas métricos, como cuanto mide el sol etc.	medición o estudio del espacio o cosas en él.
Figuras en las cuales hay un espacio.	Son las figuras del espacio.	Figuras del espacio.
geometría más avanzada.	geometría que se usa en el espacio.	El espacio entre figuras o números.
Figuras geométricas astronautas (dibujó un cohete)	Entiendo o llego a tener la idea de que esto se trata sobre el volumen área y perímetro de cualquier figura geométrica y a la vez está compuesta; no se si mi respuesta sea verídica.	Las figuras que existen.
Las figuras del espacio.	No tengo ni idea la verdad.	El estudio del espacio en figuras geométricas.
Son problemas con figuras que se utilizan para la nasa o en el espacio exterior.	La geometría que usaban los astronautas.	El uso de las figuras geométricas en el espacio.
Estrellas figuras espaciales.	Es algo sobre las formas y medidas del espacio.	Es la matemática que estudia el espacio y sus operaciones matemáticas.
Figuras en un plano.	El espacio que ocupa una figura o su volumen.	Planetas geométricos.
Son las medidas necesarias para los objetos del espacio.	Las figuras de un espacio.	Geometría del espacio y todas las formas del espacio.

Al plantear la pregunta iii), obtuvimos diversas respuestas de los estudiantes. Algunos de ellos respondieron que se asociaba *con todo*, mientras que otros identificaron objetos en el salón,

como mesas, lápices y sillas. Además, algunos estudiantes relacionaron la geometría espacial con los astros y los planetas. Sin embargo, hubo quienes expresaron incertidumbre e incluso sostuvieron que no encontraban relación alguna, entre la geometría espacial y los objetos de su entorno (ver tabla 10).

Tabla 10.

Respuesta a la pregunta ¿Con que elementos de tu entorno asocias la geometría espacial? – Pretest.

Respuestas de los estudiantes		
Según mi percepción de lo que es la geometría espacial la podría relacionar con mi escritorio, lápiz, edificios...	Yo creo que con telescopios o algo así.	Con las estrellas con las esferas con el color azul.
La tierra su masa, gravedad, etc.	Mapamundi.	Con mesas, cuadro, papeles, lápices, etc.
Todo.	Nada.	Todo.
Todo.	Con cohetes, estrellas, etc.	No se.
Lo asocio con figuras las cuales son iguales a las figuras geométricas de distintas magnitudes.	Cajas contenedores etc.	Con casi todo porque el balón un ovaló, triángulos y otras cosas.
Cajas, mesas, sillas, pelotas, etc.	Con casi todo.	Lo puedo asociar con figuras geométricas redondas, cuadradas triángulos.
La cabeza de maxi.	Con muchas cosas que tengan algo que ver con algo espacial.	Todo.
Cajas, pelotas, celulares y botellas.	Con absolutamente todo.	Lo que esta alrededor de uno.
Un microondas y una lampara.	Los objetos de la casa.	Los planetas, estrellas, todo lo relacionado con el espacio figuras geométricas y todo lo que nos rodea.

Por otro lado, para indagar por el segundo aspecto que aborda la relación entre la geometría espacial y las demás disciplinas de la Educación STEAM, colocamos carteles en las paredes del aula que presentaba las opciones *Sí*, *No*, y *Duda*. A medida que los estudiantes respondían una serie de preguntas se desplazaban hacia estas opciones. Como resultado, ellos consideraron que la geometría espacial no está relacionada con el arte y la tecnología, mientras que con la ciencia y la ingeniería esta relación es clara (ver tabla 11).

Tabla 11.

Concepción de los estudiantes acerca de la relación entre la geometría espacial y la Educación STEAM – pretest.

N.º	PREGUNTAS	SÍ	NO	DUDA
1	¿La geometría espacial tiene que ver con el arte?	2	25	0
2	¿La geometría espacial tiene que ver con la ciencia?	21	4	2
3	¿La geometría espacial tiene que ver con la tecnología?	3	14	10
4	¿La geometría espacial tiene que ver con la Ingeniería?	18	6	3

Después de indagar por estas concepciones iniciales, organizamos a los estudiantes aleatoriamente en grupos de trabajo y presentamos la pertinencia de crear una Casa Museo de la Cultura envigadeña. A partir de esto, presentamos la pregunta generatriz a los estudiantes Q_0 : *¿Cuáles son las características que debe contemplar la Casa Museo de la Cultura envigadeña?* Así, les pedimos que trataran de dar una solución a esta pregunta; al poco tiempo, se percataron que para dar una respuesta debían abarcar una variedad considerable de conocimientos.

- Estudiante uno (E1): Míster, aparte de Débora Arango, no pudimos encontrar más artistas de Envigado. Mire [señala su computadora].
- Profesor (P): ¿En qué página estás buscando? [El profesor se da cuenta de que la búsqueda que realizan es superficial].
- E2: encontramos en esta página a Salvador Arango, pero él es de Itagüí.
- P: ¿Y en un museo de la cultura de Envigado no puede haber un artista de Itagüí?
- E1: yo creo que sí, porque Itagüí queda muy cerquita.
- E2: Míster, yo creo que tenemos la misma cultura, o una muy parecida. La paisa.

Estos fragmentos de conversación nos muestran la resistencia generalizada de los estudiantes al indagar por las respuestas que no están preestablecidas, aspecto que está en correspondencia con el carácter *fenomenotécnico* del MER (Gascón, 2014). También, se muestra el reconocimiento de los estudiantes de que los habitantes de los municipios cercanos a Envigado parecen tener la misma cultura: *la paisa*. Como consecuencia, también decidieron incluir dentro de la casa artistas paisas.

Por otro lado, otros estudiantes se preguntaron por los aspectos relacionados al diseño de la casa. En sus discusiones mencionaron elementos como el lugar donde debería estar ubicada,

además de la configuración espacial que debía tener la estructura. Ahora, mostramos una conversación con un grupo de estudiantes:

- Estudiante 3 (E3): Míster, nosotros estamos mirando lo de la Casa, y a mí me gustaría que estuviera ubicada donde está el City Plaza (un centro comercial de la zona).
- Profesor (P): ¿Por qué consideras que ese sería un buen lugar?
- E3: porque el sector es bonito y es muy verde.
- E4: a mí me gustaría más que quedara cerca al parque principal. Porque es más accesible... Es más central. Entonces todos pueden llegar más fácil.
- P: ¿Y qué han pensado de la forma de la Casa?
- E3: yo quiero que tenga forma de banana: que sea una banana museo.
- E4: a mí me gustaría que tuviera un aspecto bonito, con figuras en el frente y que tenga dos pisos. ¡Aaah! Y también decoraciones con comida típica.

A este punto, los estudiantes empezaron a indagar por los aspectos que consideraban importantes y que debía tener la casa, como símbolos de la cultura paísa y algunos elementos distinguidos del municipio de Envigado: un carriel, arepas, empanadas, y algunos animales como, el puma, el olinguito, el zorro perro y la víbora de pestañas.

En consecuencia, asignamos a los estudiantes la tarea de diseñar la Casa Museo, además de crear el modelo de una obra de arte que formaría parte de la colección de la casa. Los estudiantes reconocieron que las obras podrían ser modeladas utilizando cuerpos geométricos, por lo que decidieron embarcarse en el estudio de la geometría espacial para llevar a cabo la tarea. Por lo cual realizamos una clase de cuerpos geométricos. (ver figura 18).

En el transcurso de la clase discutimos los conceptos de poliedros regulares e irregulares. Los estudiantes participaron activamente al describir las diferencias entre estos tipos de poliedros. Al presentar los poliedros regulares los estudiantes se hicieron preguntas como: *¿Y sólo son 5 poliedros regulares? ¿No hay más?* Así, los estudiantes empezaron a dialogar acerca de las propiedades de los poliedros como se muestra en el siguiente diálogo:

- Profesor (P): ¿El tetraedro cuántas caras tiene?
- Estudiante 6 (E6): doce, tetra de treinta y dos. No, no sé. Tres...
- P: ¿Será que con tres caras podemos formar un poliedro?
- Estudiantes (E): Sí, [los estudiantes empezaron a dar números al azar].
- P: uno, dos, tres, cuatro [El profesor toma un tetraedro y empieza a contar sus caras]
- E: Míster, pero ¿si la base es un cuadrado?

- P: ya no va a tener ese mismo número de caras, además, no sería un poliedro regular.
- E: ahhhhh, isííííí!

Figura 18

Clase de geometría espacial.



Nota: Fotografía tomada en la clase de cuerpos geométricos (Sesión 14 de marzo de 2023).

En esta misma clase, luego de explorar los conceptos geométricos, destacamos la aplicación práctica de los poliedros en la vida cotidiana y en la construcción de estructuras y formas en el entorno, como por ejemplo la arquitectura de las iglesias del municipio, la estructura del colegio y las obras presentes en los parques del municipio. Algunos estudiantes reconocieron la relevancia de comprender la relación entre la geometría espacial y las disciplinas de la Educación STEAM, como se muestra en el siguiente diálogo:

- Estudiante 7 (E7): ¿Míster y los prismas para qué me sirven?
- Profesor (P): Chicos, si ustedes se ponen a ver muchas de las estructuras y formas que encontramos en nuestro espacio se asemejan a los poliedros, por ejemplo, la forma de este salón es ¿un poliedro es regular o irregular?
- E7: Míster, irregular.
- P: ¿Por qué?

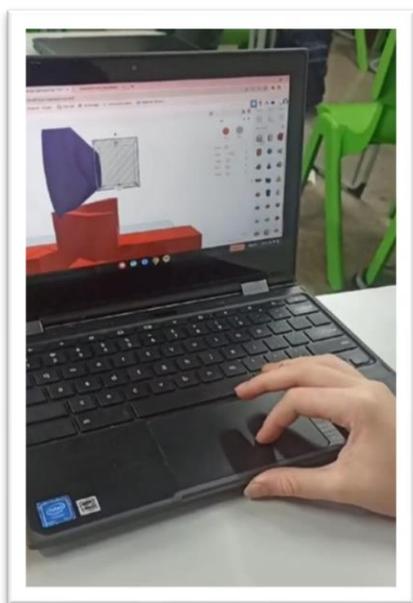
- E7: Por eso. [Señala el tablero donde hay dibujado un prisma rectangular]
- E8: es que es un paralelogramo.
- E7: es que tiene forma de paralelepípedo.
- P: muy bien chicos.
- E9: los obreros, los arquitectos, los ingenieros y los diseñadores de espacios, entre otros, tienen que conocer los cuerpos geométricos para poder realizar sus obras por eso son importantes.

Luego, los estudiantes comenzaron la tarea de realizar el diseño de la Casa Museo o las obras de arte. En el desarrollo de esta tarea los estudiantes exploraron el software Tinkercad. Una técnica que surgió en la realización de esta tarea fue la determinación de poliedros a partir del truncamiento de unos iniciales (ver figura 19). El siguiente diálogo muestra el razonamiento de los estudiantes:

- Profesor (P): ¿Cómo generaste esa figura?
- Estudiante 7 (E7): Puse esta figura (señala una pirámide), la puse así, las agrupé y la corté con esta otra figura (truncó la figura).
- P: ¿Qué figura se generó?
- E7: esta (señala con el dedo), no sé cómo llamarla.
- P: bueno, has descubierto el truncamiento de poliedros. ¿Cómo nos puede servir esto para diseñar la obra?
- E7: eem, para crear figuras que no están diseñadas en Tinkercad.

Figura 3

Truncamiento de una pirámide por parte de un estudiante.



Nota: tomada de la clase (sesión 23 de abril de 2023).

Asimismo, el diseño de las obras estuvo influenciado por diferentes tareas referentes a las disciplinas de la Educación STEAM. En relación con el arte, los estudiantes indagaron acerca de las técnicas que emplearon los artistas para desarrollar las obras y, unida a esta, algunas de las técnicas que se usan en el arte contemporáneo. En particular, indagaron acerca del arte figurativo y el arte geométrico conceptual de Salvador Arango, así como las ideas detrás de sus esculturas, por ejemplo, el monumento a la fecundidad. Al trincar las figuras, los estudiantes partieron de cubos, pirámides de diferente base, los prismas y los octaedros, generando pirámides truncadas, el octaedro truncado y primas oblicuos (ver tabla 12).

Por otro lado, en cuanto a las ciencias, los estudiantes investigaron por los tipos materiales y sus propiedades como la resistencia a la intemperie y su impacto ambiental, además de los procesos de restauración que se emplean para conservar los diferentes de obras. Asimismo, se preguntaron por los elementos característicos de la cultura paisa, así como la historia de los personajes y las tradiciones típicas de envigado.

Respecto a la tecnología y la ingeniería, los estudiantes exploraron herramientas como Tinkercad y Minecraft y sus limitaciones para desarrollar los prototipos de las obras de arte y así mejorarlas recursivamente. De esta manera, la reconstrucción de estas praxeologías (OS, OT, OE, OA, OM) conduce a una diversidad de perspectivas que facilitan el enfoque de la situación, tal como lo propone Pombo (2013) en el contexto de la interdisciplinariedad (consultar figura 20).

Figura 20

Praxeologías alrededor de la construcción del diseño de un modelo de una obra de arte.

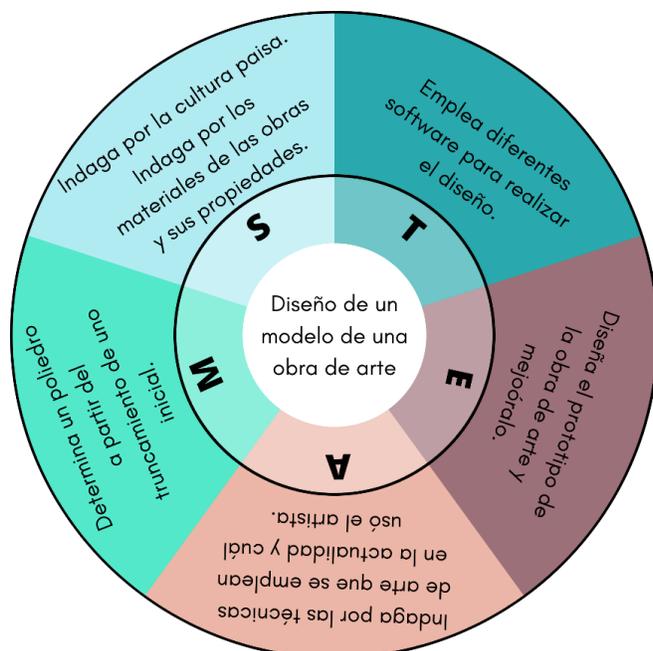
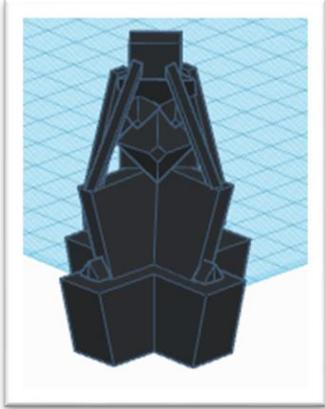
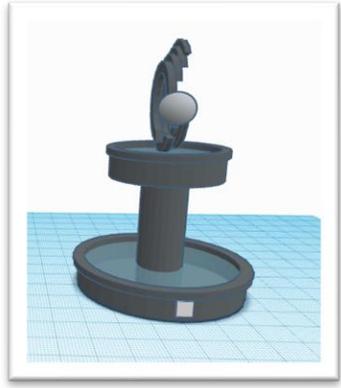
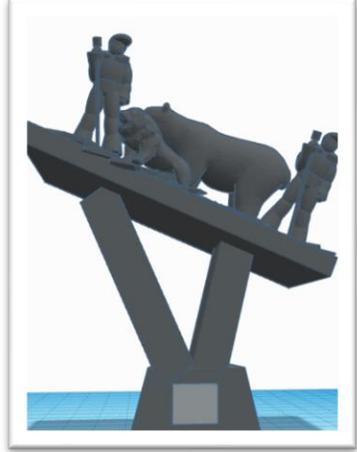


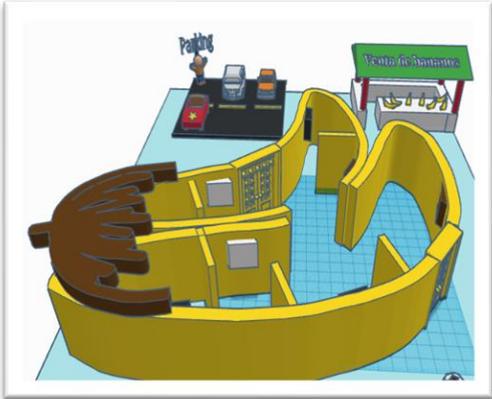
Tabla 12.
Diseño de las obras de arte realizadas por los estudiantes.

Equipo	Obra realizada	Cuerpos geométricos empleados
A	<p><i>Monumento a la fecundidad de Salvador Arango</i></p> 	<p>Cubos, pirámides de diferente base, los prismas y los octaedros, pirámides truncadas, el octaedro truncado y primas oblicuos.</p>
B	<p><i>Piedra del Ayurá de Sonia Tamayo</i></p> 	<p>Esferas, cilindros, prismas rectangulares.</p>
C	<p><i>Escultura el arriero de Pablo Estrada</i></p> 	<p>Prismas y Pirámide truncados.</p>

En relación con el diseño de la Casa Museo, los estudiantes, además de reconocer la necesidad de preservar el patrimonio artístico y cultural en el estudio interdisciplinario (Quigley et al., 2012), emprendieron diversas tareas específicas para cada disciplina dentro de la Educación STEAM. En el ámbito de la ciencia, los estudiantes indagaron por las maneras en las que la Casa Museo podría contribuir al medio ambiente mediante la creación de un área protegida que comprenda la plantación de árboles y la preservación de la fauna y flora del municipio de Envigado. Asimismo, investigaron por los tipos de materiales y sus propiedades que se emplean en la construcción de edificaciones.

En lo que concierne a la tecnología, los estudiantes indagaron por las que generan un menor impacto medioambiental en el uso de los recursos energéticos, como los paneles solares y un sistema de recolección de aguas lluvias; así como las diferentes herramientas de diseño y modelado como Floorplanner y Tinkercad. Mientras que, respecto a la ingeniería, indagaron por las técnicas de construcción, la habitabilidad y el prototipado de la Casa Museo. Además, buscaron los lugares donde se podía realizar la construcción por medio de la herramienta Google Earth donde visualizaron los terrenos. Ahora, presentamos la tabla 13, que resume los modelos de la Casa Museo propuestos por los estudiantes:

Tabla 13.
Modelos de la Casa Museo elaborados por los estudiantes.

Equipo	Casa Museo realizada
A	<i>Modelo de la casa elaborado en Tinkercad.</i>
B	
	<i>Modelo de la casa realizado en Floorplanner.</i>



C

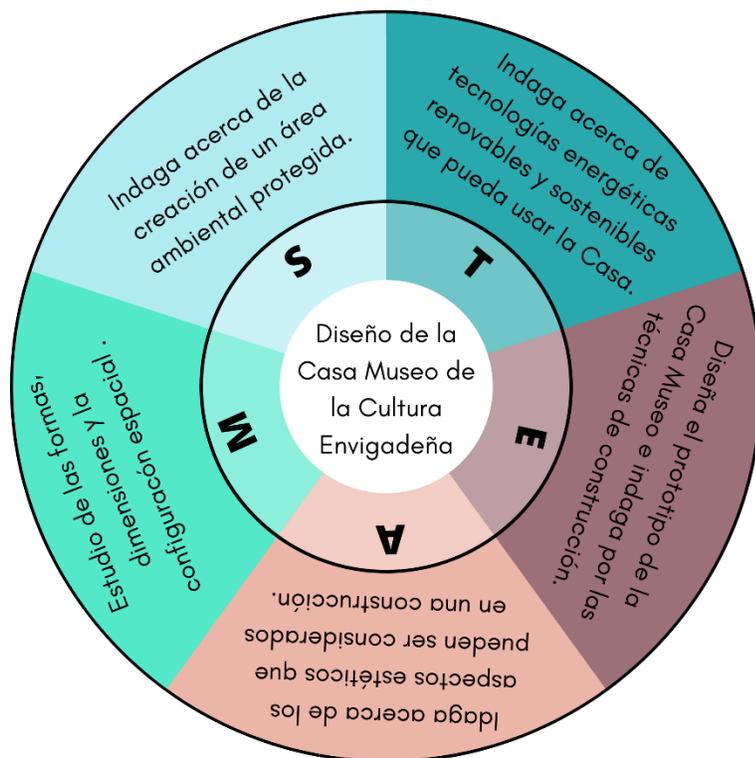
Modelo de la casa elaborado en Minecraft.



En relación con el arte, los estudiantes indagaron por los aspectos estéticos de la estructura, así como el diseño creativo de la Casa Museo. Respecto a las Matemáticas, los estudiantes indagaron por la forma de la estructura, las dimensiones, la distribución de los espacios de la casa (ver tabla 21), los costos de los terrenos según el valor del metro cuadrado de la zona elegida y los costos de construcción de la casa. En la figura 21 se puede ser la reconstrucción de algunas praxeologías relacionadas con el diseño de la Casa Museo de la Cultura envigadeña.

Figura 21

Praxeologías alrededor de la construcción del diseño de la Casa Museo.



Un aspecto relevante en la implementación de esta AEI fue la queja generalizada de los estudiantes de sentir que no estaban en la clase de matemáticas. También, los estudiantes manifestaron un desconcierto relacionado con que el profesor no les daba todas las herramientas para llevar a cabo el proceso de estudio. Este hecho concuerda con la visión de que los estudiantes esperan a que el profesor actúe como matemático para ellos, y en este sentido, corrobore los procedimientos y demás aspectos del estudio (Chevallard et al., 2002).

A continuación, mostramos una tabla que recoge algunos de los cuestionamientos, derivados de la pregunta generatriz, planteados por los estudiantes. Aunque estas preguntas no representaron el principal foco del estudio de la situación, permitieron a los estudiantes ver la riqueza del MER y realizar un bosquejo de una posible respuesta R_0 valiosa para Q_0 .

Tabla 14.*Preguntas construidas por los estudiantes por cada disciplina de la Educación STEAM.*

Disciplina de la Educación STEAM	Preguntas generadas por los estudiantes
Ciencia	<p>¿Con qué otros materiales se puede recrear esta obra? ¿Por qué Miguel hizo esta obra con piedra y no con metal si en teoría el metal es más resistente que la piedra? ¿Cómo se pueden utilizar las técnicas de imagenología para estudiar en detalle las pinceladas y la técnica utilizada en la creación de una obra de arte, como la pintura al óleo de Arango? ¿Por qué el aluminio es usado en las esculturas? ¿Qué pasa si a tu obra le da el sol? ¿Se podría deteriorar la escultura si estuviera al aire libre? ¿Cómo se pondría si se deteriora? ¿Qué tipos de cuidado debería tener esta escultura? ¿Se tendrán en cuenta factores científicos para la planificación de la iluminación, ventilación y aislamiento térmico de la obra? ¿Sería posible recrear estas obras con materiales reciclables? ¿Qué materiales son necesarios para la construcción de la estructura? ¿Qué materiales podríamos usar que sean reutilizables?</p>
Tecnología	<p>¿Cómo podría la tecnología de la realidad virtual o la realidad aumentada ser utilizada para crear experiencias interactivas que permitan a las personas explorar el paisaje representado en la obra desde diferentes perspectivas? ¿Cuáles son las herramientas digitales más comunes utilizadas por los artistas para crear obras de arte? ¿Cómo pueden las tecnologías emergentes, como la inteligencia artificial y la realidad virtual, transformar la forma en que se experimentan y se crean obras de arte en el futuro? ¿Los escultores deben tener un algoritmo para hacer sus obras? ¿Qué software se puede utilizar para replicar una de sus obras? ¿Qué herramientas y equipos tecnológicos se utilizarán durante la obra? ¿Cómo se utiliza la tecnología de impresión 3D para crear esculturas basadas en modelos digitales? ¿Cómo ha evolucionado la tecnología en la creación de esculturas a lo largo del tiempo?</p>
Ingeniería	<p>¿Cómo se pueden aplicar los principios de la ingeniería a la restauración y conservación de obras de arte históricas y antiguas? ¿Cómo se pueden aplicar las técnicas de modelado y simulación de ingeniería en la creación y diseño de obras de arte arquitectónicas y estructurales? ¿Crees que, teniendo medidas de una escultura, puedas replicar una pero tal vez más pequeña? ¿Cómo se aborda el mantenimiento y la conservación de una escultura con el paso del tiempo? ¿El lugar donde la estructura se construye afecta la estructura? ¿Cuáles son las cargas máximas que deberá soportar la estructura? ¿Qué herramienta me permite modelar la obra? ¿Qué estructura tendrá la casa?</p>

Arte	<p>¿Qué artistas reconocidos hay en Envigado? ¿Qué técnica utilizó Cano para crear esta obra? ¿Qué otro método se podría usar para construir esta obra? ¿Qué mensaje da la obra? ¿Cuántos borradores tuvo que hacer para que le saliera bien la escultura? ¿Cuáles son las características del diseño? ¿Cuál es el concepto artístico detrás de la obra?</p>
Matemáticas	<p>¿Sus obras tiene figuras geométricas? ¿Cómo se podría utilizar la geometría para analizar las formas y patrones en la obra de Débora Arango? ¿Cuál es su área en centímetros cuadrados? ¿Qué figuras geométricas tienen las obras de Miguel Ángel Betancourt? ¿Necesitaba Miguel Ángel saber matemáticas para poder trabajar en las esculturas, sobre todo las más grandes? ¿Sus obras eran simétricas? ¿Qué figuras geométricas se usan en esta estructura? ¿Qué figuras geométricas podemos usar en arte? ¿Qué tamaño tendrán las obras? ¿Qué tipo de materiales se utilizarán en la construcción y cuánto costarán? ¿Cuál será el presupuesto para la construcción del museo? ¿Qué medidas se pueden tomar para reducir los costos de la obra? ¿De dónde se van a sacar los recursos? ¿Cómo se puede optimizar la distribución y disposición de las obras y objetos expuestos en el Proyecto Casa Museo de la Cultura envigadeña, utilizando técnicas de geometría y cálculo espacial para maximizar el espacio disponible y mejorar la experiencia del visitante? ¿La presencia de polígonos será vital para la estructura? ¿Cuántos metros cúbicos tendría la estructura? ¿Qué medidas tendrá la estructura? ¿Cuál sería la estructura óptima para la estructura? ¿Cuál sería el área de la casa? ¿Cuál sería el perímetro de la casa? ¿Qué cuerpos geométricos componen esta obra? ¿Cuánto mide la superficie?</p>

Al concluir este proceso de estudio, los estudiantes presentaron un trabajo escrito en el que abordaron algunas de las cuestiones planteadas. Luego, llevamos a cabo un postest con el propósito de conocer cuál era su percepción acerca de los conceptos relacionados con la geometría espacial y su vinculación con las diversas disciplinas de la Educación STEAM. Para ello, utilizamos nuevamente el mismo cuestionario que se empleó en el pretest.

Al analizar las respuestas de los estudiantes a la pregunta *¿Qué entiendes por geometría?* Observamos una variedad de interpretaciones y definiciones. Algunos estudiantes la identifican como *la matemática de las figuras*. Otros, enfatizan en que la geometría abarca los *cuerpos geométricos y sus elementos*, lo que indica una comprensión más amplia que incluye los objetos tridimensionales. Sin embargo, encontramos algunas respuestas menos precisas, como *sistema métrico* o que la geometría *se utiliza para describir y analizar valores* (ver tabla 15).

Tabla 15.

Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría? - Postest.

Respuestas de los estudiantes		
Es la matemática de las figuras	Estudia los cuerpos geométricos y sus elementos.	La matemática de las figuras.
Son figuras de diferentes tamaños	La matemática de las figuras	Nada
Rama de la matemática que estudia los cuerpos geométricos	Sistema métrico	Es el estudio que analiza las figuras geométricas
Figuras planas	Se centra en el estudio de las propiedades de las líneas, planos, ángulos, formas y distancias y relación entre ellos	Es la matemática de una figura, como por ejemplo cuantas aristas hay en un rectángulo
Es una rama de las matemáticas que estudia las figuras geométricas	Área de las matemáticas	Figuras geométricas o cosas relacionadas.
Las figuras geométricas.	Área de la matemática que estudia los vértices, lados, aristas etc.	Es la rama de las matemáticas que se centra en las propiedades de las líneas, planos, ángulos, formas y las distancias y rotaciones.
Matemática de las figuras	Se utiliza para describir y analizar valores	Operaciones y todo lo que tenga que ver con cuerpos geométricos.
Estudio de las figuras	Ciencia que estudia las figuras	No sé
Es el estudio de las líneas, planos y ángulos.	Área de la matemática que estudia los cuerpos geométricos y sus elementos	Es el estudio de las líneas, planos y ángulos. Es el estudio de las líneas, planos y ángulos.
Figuras geométricas	Se centra en el estudio de las propiedades de las líneas, planos, ángulos, formas y distancias y relación entre ellos	Es el estudio que analiza las figuras geométricas

En cuanto a la pregunta *¿Qué entiendes por geometría espacial?* Logramos evidenciar que la mayoría de los estudiantes la asocia con figuras o cuerpos que ocupan el espacio y que tienen volumen, lo que indica que los estudiantes perciben la geometría espacial relacionada a los objetos tridimensionales. Sin embargo, algunos la siguen relacionando con el espacio exterior, los planetas y los astronautas; también, se presentan algunas respuestas como *no sé o nada en particular*, aspecto que refleja una falta de comprensión sobre la geometría espacial (ver tabla 16).

Tabla 16.

Respuesta a la pregunta ¿Qué entiendes por geometría espacial? - Posttest.

Respuestas de los estudiantes		
Es una variable de la geometría	Estudia las figuras 3d y sus propiedades.	Geometría que ocupa el espacio
Son la geometría o las figuras del espacio.	Geometría del espacio	Nada
Nada.	Métodos que miden el espacio	Estudia cuanto espacio ocupa algo
Figuras para medir su espacio.	Figuras espaciales o voluminosas	Tiene que ver con el estudio de los planetas, basándose en las figuras
Cuerpos geométricos en el espacio.	geometría del espacio como el área de objetos	Se encarga de estudiar las figuras con volumen.
Lo que esta alrededor en el espacio.	Es la rama matemática que estudia las figuras geométricas voluminosas que ocupan un lugar en el espacio.	Se encarga del estudio de las figuras geométricas voluminosas.
La geometría que usan los astronautas.	Es la geometría que describe y analiza los valores de un espacio o lugar.	geometría que estudia el espacio.
Figuras cuerpos con volumen que ocupan espacio	Las figuras geométricas que tenemos en nuestro espacio.	Figuras geométricas en el espacio.
geometría de las figuras 3d.	Figuras geométricas más grandes	Las figuras con las que hacen las constelaciones
Estudia la situación de cada región del planeta Se trata de lo mismo, pero con volumen.		

En comparación con los resultados de esta pregunta en el pretest, se evidenció una mejora en la comprensión de la geometría espacial por parte de los estudiantes. Las respuestas del posttest mostraron más claridad en la noción de la geometría espacial, en la que mencionan términos específicos como *figuras 3D*, *cuerpos con volumen* y *figuras que ocupan espacio*. Esto indica que la enseñanza sobre la geometría espacial ha contribuido a consolidar la comprensión de los estudiantes sobre este tema, aunque aún existen algunas respuestas vagas.

En lo que refiere a la percepción, frente a la pregunta *¿Con que elementos de tu entorno asocias la geometría espacial?* Encontramos que los estudiantes relacionan elementos de su entorno con formas geométricas tridimensionales, como *casas, cajas, carros, sillas y mesas*. Un aspecto particular es que algunos estudiantes hicieron referencia a figuras geométricas específicas como el *cilindro, la esfera y el paralelepípedo*. Sin embargo, aún encontramos respuestas como *todo, el espacio que me rodea*, entre otras, lo que muestra una comprensión general de la espacialidad (ver tabla 17).

Tabla 17

Respuesta a la pregunta ¿Con que elementos de tu entorno asocias la geometría espacial? - Postest.

Respuestas de los estudiantes		
Con un balón o con una rueda	Lo relaciono con muchos, por ejemplo: casas, cajas, carros, basuras etc.	Todo lo de mi alrededor
El sol, la luna, naves, cascos, uniformes etc.	Esfera	Ninguno
Todo	Las mesas y las sillas	Las paredes
No se	Un escritorio, una silla la cama	Cuando veo el sol, las estrellas en la noche y la luna
Con todos los objetos a mi alrededor	Algo con lados	Toda lo que tenga volumen.
Un cuerpo conformado por figuras geométricas	La mayoría de mi entorno	Cubo, cono, cilindro, esfera, paralelepípedo y más.
Los dispositivos geométricos	Lo asocio con el salón de clase, mi cuarto, una caja	Con la luna
Un televisor, un escritorio, un computador.	Dibuja: cuadrado, triangulo, rectángulo.	Todo o nada
Todo	Es el entorno que me rodea	Las constelaciones

Por último, en lo que respecta a la relación entre la geometría espacial y las disciplinas de la Educación STEAM, observamos que la mayoría de los estudiantes comprenden que la geometría espacial está vinculada con estas disciplinas debido al proceso de diseño de las obras y de la Casa Museo, así como a la formulación de interrogantes basados en la pregunta generatriz y el estudio de la geometría espacial (ver tabla 18).

Tabla 18.

Concepción de los estudiantes acerca de la relación entre la geometría espacial y la Educación STEAM- Postest.

N.º	PREGUNTAS	SÍ	NO	DUDA
1	La geometría espacial tiene que ver con el arte	23	0	4
2	La geometría espacial tiene que ver con la ciencia	21	4	2
3	La geometría espacial tiene que ver con la tecnología	20	5	2
4	La geometría espacial tiene que ver con la Ingeniería	19	2	6

En este capítulo presentamos los resultados de esta investigación, los cuales se relacionan con los aportes que se derivan de la implementación de MER que integra la Educación STEAM en el estudio de la geometría espacial. Entre estos se encuentra el empleo de la técnica de la determinación de algunos poliedros a partir de unos iniciales, que es poco habitual en la

institución en la que se desarrolla esta propuesta. Las razones de llevar a cabo el estudio de la geometría espacial residen en la determinación de los cuerpos y en su potencial para resolver problemas de manera integrada a las demás disciplinas escolares.

CAPÍTULO TERCERO: CONCLUSIONES

Los Modelos Epistemológicos de Referencia nos permiten estudiar los saberes antes de ser transpuestos en alguna institución determinada. Esta visión a priori de los saberes a enseñar posibilita tener una perspectiva amplia de las implicaciones que pueden traer consigo implementar dichos modelos. En esta medida, los MER son importantes instrumentos cuando, a la hora de emprender el estudio de una situación, nos desmarcamos de otros modelos que dominan las instituciones escolares que, a propósito, no suelen ser cuestionados.

En este MER buscamos integrar la Educación STEAM desde su núcleo: la interdisciplinariedad, y en particular nos enfocamos en desarrollar los aspectos relacionados con la geometría espacial. Es claro que los alcances de esta investigación son limitados debido a esta restricción a priori, no obstante, desde nuestro punto de vista son un aporte inicial para llevar a cabo investigaciones más profundas que sumen pasos en el camino de transición hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. En este paradigma, como hemos resaltado a lo largo de esta investigación, se busca que, tanto los estudiantes, como los profesores, didactas y demás participantes de las instituciones escolares se atrevan a ir más allá y no eviten enfrentarse a problemas o situaciones para cuales no tienen una respuesta dada de antemano. A continuación, mencionaremos las principales conclusiones de esta investigación.

En relación con el primer objetivo, que está vinculado al análisis económico-institucional del estudio de la geometría en Colombia, resaltamos que a pesar de la importancia asignada a este estudio en el currículo de matemáticas (MEN, 1998; 2006; 2016), observamos que los conceptos se presentan de manera generalizada. En esta medida, no existe una propuesta específica que oriente lo que se estudia, es decir una estructura de OM que responda a las razones de ser y las maneras de organizar este estudio, o sea, las OD que orientan los procesos didácticos.

En esta línea, la propuesta para el estudio de la geometría espacial no establece formas explícitas de integrar con otras disciplinas, a pesar de su importancia en el currículo. Además, observamos que las tareas asignadas a los estudiantes son generales y de ejecución inmediata, lo que no representa un desafío significativo para ellos. Estos aspectos subrayan la necesidad de una revisión y mejora en la enseñanza de la geometría espacial, donde no sólo se trate de modificar los contenidos, sino de transformar fundamentalmente el enfoque pedagógico.

Los MER son una posibilidad para el proceso. Un modelo, como el propuesto en esta investigación, puede resaltar en la importancia de la interdisciplinariedad y la participación de los estudiantes en el estudio de la geometría espacial. Además, puede permitir desafiar a los estudiantes con problemas complejos y ricos en posibilidades, para cultivar así habilidades

analíticas y de resolución de problemas. En este sentido, el papel activo de los estudiantes se convierte en un pilar fundamental, donde no solo adquieran información, sino que puedan participar activamente en su propio proceso de aprendizaje.

Como planteamos al inicio de esta propuesta, el estudio de la geometría espacial, y de las disciplinas escolares en general, debería incitar a cuestionar el mundo que nos rodea. En esta perspectiva, los temas a estudiar deberían retar a los estudiantes a encontrar respuestas valiosas a preguntas que no tengan una solución inmediata. En esta dirección, la actitud de la comunidad de estudio en general debería preguntarse por el sentido de llevar a cabo el estudio y la naturaleza de estos saberes. Así pues, el estudio de la geometría espacial debería guiarse bajo estos principios.

En cuanto al segundo objetivo, relacionado con diseño de un MER que integra la Educación STEAM, logramos identificar algunas OS, OT, OE, OA y OM, que se movilizan en el diseño de la Casa de la Cultura envigadeña. Este sistema praxeológico tiene como núcleo la interdisciplinariedad y pretende superar el fenómeno didáctico del ensimismamiento de las matemáticas escolares. Además, este MER evidencia que el estudio de la geometría espacial puede ser emprendido al comprender diferentes tipos de OM, las cuales lo enriquecen puesto que estimulan el aprendizaje de los estudiantes a través de la realización de tareas y sus aplicaciones provenientes de su estudio.

Asimismo, estas OM no solo constituyen una base fundamental de nuestro modelo, sino que también demuestran que el estudio de la geometría espacial puede llevarse a cabo al considerar y relacionar las diferentes disciplinas presentes en la Educación STEAM. En este sentido, el MER propuesto no solo enriquece el estudio de la geometría espacial, sino que también fomenta un aprendizaje más contextualizado para los estudiantes.

En lo que concierne al tercer objetivo, que consistió en analizar la incidencia de la puesta en marcha del MER en un grupo de grado séptimo, a través de la AEI implementada, se presentaron aspectos de relevancia. Entre ellos, los estudiantes manifestaron una resistencia generalizada a emprender el estudio de manera autónoma; mencionaron, en especial, porque sentían que no estudiaban matemáticas. En este estudio se presentaron aspectos relacionados con la determinación de las figuras geométricas, aspecto que puede dotar de sentido el estudio de la geometría (Rojas et al., 2022).

Por otro lado, el MER facilitó la integración de la geometría espacial con otras disciplinas de la educación STEAM para los estudiantes. Sin embargo, este enfoque integrado fue limitado en algunos aspectos debido a restricciones institucionales, como el tiempo limitado para el desarrollo

de la clase y las divisiones disciplinarias existentes en la institución, derivadas de la estructura curricular dominante. En particular, parece que esta visión de la escuela impide que los estudiantes puedan asociar el estudio de las matemáticas con el resto de las disciplinas. Es importante resaltar que los MER se presentan como hipótesis didácticas y que requieren ser contrastados y modificados.

Para finalizar, resaltamos algunas preguntas que quedan abiertas y que pueden servir de insumo para llevar a cabo futuras investigaciones. Algunas de estas preguntas quedan abiertas debido a que no pertenecían al alcance de nuestra investigación, mientras que otras surgieron como resultado de nuestros hallazgos en el transcurso de esta. A saber, ¿Qué implicaciones epistemológicas se derivan de la integración entre la TAD y la Educación STEAM? ¿Qué visión de la interdisciplinariedad se promueve con esta integración? ¿Cómo se relacionan las praxeologías de cada disciplina de la Educación STEAM? ¿Qué otras técnicas pueden surgir al implementar este MER? ¿Qué otras restricciones institucionales pueden surgir en el desarrollo de este MER?

REFERENCIAS

- Alban, G., Arguello, A., y Molina, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *Recimundo*, 4(3), 163-173.
- Alsina, C. (2016). Un templo de geometría: La Sagrada Familia en 2026. *Suma*, 82, 35-42.
- Álvarez, Montoya-Puerta y Herrera (2022) El estudio de los cuerpos geométricos: una revisión sistemática de literatura. XVII CIAEM (en prensa).
- Arráez, M., Calles, J. y Moreno de Tovar, L. (2006). La Hermenéutica: una actividad interpretativa. *Sapiens*, 7(2), 171-181.
- Aznárez, A. (2018). Evolución del contrato didáctico: un análisis desde la práctica reflexiva.
- Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100.
- Barra, N. (2019). ¿Qué es la Educación STEM/STEAM y porqué es importante? La República STEAM.
- Bateman, A. (1955) Julio Garavito Armero. Sociedad Geográfica de Colombia. Números 45 y 46, Volumen XIII. https://www.sogeocol.edu.co/documentos/045_jul_gar_arm.pdf
- Bejarano, M. (2016). La investigación cualitativa. *INNOVA Research Journal*, 1(2), 1-9.
- Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.
- Bustamante E. (2017). Un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones en la educación básica regular del Perú.
- Castela (2017). *Herramientas Digitales Para el Aprendizaje. Secuencias Matemáticas 7. Editorial Libros y Libros S.A.*
- Cadena-Blanco, F., Arias-Rueda, M., y Arias-Rueda, J. (2022). Geometría y emprendimiento con Tinkercad desde el enfoque de la educación STEAM.
- Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. *Acta Herediana*, 59(8), 9-15.
- Català, C.(2001). Geometría para ciudadanos tridimensionales. *Sigma: revista de matemáticas=matematika aldizkaria*, (19), 65-70.
- Chesky, N.,y Wolfmeyer, M. (2015). Introduction to STEM Education. *Philosophy of STEM Education*, 1–16. https://doi.org/10.1057/9781137535467_1
- Chevallard, Y., (s.f.) La enseñanza de la Geometría en la Secundaria (Trad. Villarroya). IREM de Aix-Marseille.
- Chevallard Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in ARSAC G. ET ALII (COORD.) (1994) – La transposition didactique à l'épreuve, La Pensée, Sauvage, 135 – 180.
- Chevallard Y. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE grupo editor.
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor S.A.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Actes de la, 11, 41-56.
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 1 61 -1 82. doi:10.4471/redimat.2013.26.
- Chevallard, Y. (2017). Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD.
- Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (2000) Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje (2.ª ed). Editorial Horsori. I.C.E Universitat Barcelona.
- Chevallard, Y., y Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). *Encyclopedia of mathematics education*, 53-61.
- Corica, A., y Marin, E. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85, 91-114.
- Costa, V., Rizzo, K., y Gallego, J. (2019). Educación STEM: integrar conceptos de fotometría a la clase de matemática usando tecnología. *Revista Enseñanza de la Física*, 31.
- Creswell, J. W. (2014). A concise introduction to mixed methods research. SAGE publications., ISO 690,

- Cuervo, D., y Reyes, R. (2021). Aporte de la metodología Steam en los procesos curriculares. *Revista Boletín Redipe*, 10(8), 279-302.
- Escalante, E., Borjas, M., Pacheco Bohórquez, M., & Anturi Linero, M. (2020). Evaluación del éxito escolar: análisis de Colombia frente al derecho a la equidad. *Revista de Derecho*, (53), 59-84.
- Escobar, C., y Costa, V. (2022). Avances de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación en el Enfoque STEAM para el estudio de la geometría. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 18(66).
- Eslava, D. (2018). La función social de la investigación. *Investigaciones Andina*, 20(36), 5-8.
- Espinosa, C. B., Agudelo, L. B., y Pachón, M. P. M. (2011). La hermenéutica en el desarrollo de la investigación educativa en el siglo XXI. *Itinerario Educativo: revista de la Facultad de Educación*, 25(57), 101-120.
- Fonseca, C., Gascón, J., y Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318.
- Friend, M., Cook, L., Hurley-Chamberlain, D., y Shamberger, C. (2010). Co-Teaching: An Illustration of the Complexity of Collaboration in Special Education. *Journal of Educational and Psychological Consultation*, 20(1), 9-27.
- García, F., y Sierra, T. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil.
- Gascón, J. (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma*.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(2), 203-231.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática*, 99-123.
- Ge, X., Ifenthaler, D., y Spector, J. (2015). Moving forward whit STEAM education
- Gómez M. A. S. (2018). La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue. *Fides et Ratio-Revista de Difusión cultural y científica de la Universidad La Salle en Bolivia*, 16(16), 123-146.
- Gonen, E. (2020). Tim Brown, cambio por diseño: cómo el pensamiento de diseño transforma las organizaciones e inspira la innovación (2009). *Revisión de mercados, globalización y desarrollo*, 4 (2).
- Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Síntesis.
- Guillén G. (1997). *El mundo de los poliedros. Matemáticas, cultura y aprendizaje N° 15*. Editorial Síntesis.
- Guillén G.. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación matemática*, 17(2), 117-152.
- Guillén, G. (2010). ¿ Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿ y en la investigación?. En *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Hasanah, U. (2020). Key definitions of STEM education: Literature review. *Interdisciplinary Journal of Environmental and Science Education*, 16(3), e2217.
- Houdement, C. (2019). Le spatial et le géométrique: le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie.
- Kiernan, N., Manches, A., y Seery, M. (2021). The role of visuospatial thinking in students' predictions of molecular geometry. *Chemistry Education Research and Practice*, 22(3), 626-639.
- Kline, M. (2000) El aislamiento de las matemáticas. Ed 5, *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, pp 336 - 369. Siglo XXI Ediciones.
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology (2nd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Labrigui, M. (2022). Enfoque STEAM: Enseñanza-aprendizaje de la geometría en 4º de ESO a través del diseño de la ciudad sostenible (Master's thesis).
- Leal, P., Estevez, E., y Castro, W. (2021). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la ciencia. *Revista Boletín Redipe*, 10(13), 603-609.
- Castaño Garrido, C. M., y Quecedo Lecanda, M. R. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa.
- Llanos, V., Otero, M., y Gazzola, M. (2019). Physic and Mathematics models in a co-disciplinary Study and Research Paths (SRPs) in the pre-service teacher education. *International Journal of Physics and Chemistry Education*, 11(3), 67-72.

- Lombard, N., y Hausberger, T. (2023). Transpositive phenomena at the interface between mathematics and physics: the case of quantum mechanics.
- Margot, K., y Kettler, T. (2019). Teachers' perception of STEM integration and education: A systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6(1), 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2>
- Martínez-Chavanz, R. (2005) La recepción de la física moderna en Colombia, *Saber y Tiempo*, n.º 18, 53-54.
- Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales, F., y Vílchez-González, J. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 103(4), 799–822. DOI: <https://doi.org/10.1002/sce.21522>
- Mendoza, M. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, 1(1), 83-115.
- Moore, T., Glancy, A., Tank, K., Kersten, J., Smith, K., y Stohlmann, M. (2014). A framework for quality K-12 engineering education: Research and development. *Journal of pre-college engineering education research (J-PEER)*, 4(1), 2.
- Mulero, M. (2021). Diseño e implementación de una propuesta de trabajo STEAM en aulas de infantil.
- Ortiz, J., Sanz, R., y Greca, I. (2021). Una mirada crítica a los modelos teóricos sobre educación STEAM integrada. *Revista iberoamericana de educación*.
- Pérez R. (2016). El ingeniero colombiano Julio Garavito ante las geometrías no euclidianas 1890-1920. *Historia*.
- Perignat, E., y Katz-Buonincontro, J. (2019). STEAM in practice and research: An integrative literature review. *Thinking Skills and Creativity*, 31, 31–43.
- Pombo, O. (2013). Epistemología de la interdisciplinariedad. La construcción de un nuevo modelo de comprensión.
- Quigley, C., Herro, D., y Jamil, F. (2017). Developing a conceptual model of STEAM teaching practices. *School Science and Mathematics*, 117(1-2), 1-12. <https://doi.org/10.1111/ssm.12201>
- Rahman, N. A., Rosli, R., Rambely, A. S., & Halim, L. (2021). Mathematics Teachers' Practices of STEM Education: A Systematic Literature Review. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1541-1559.
- Rahman, N. A., Rosli, R., Rambely, A., y Halim, L. (2021). Mathematics Teachers' Practices of STEM Education: A Systematic Literature Review. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1541-1559.
- Razzouk, R. Y Shute, V. (2012). What Is Design Thinking and Why Is It Important? *Review of Educational Research*, 82(3), 330–348. <https://doi.org/10.3102/0034654312457429>
- Reason, P. (2006). Choice and quality in action research practice. *Journal of management inquiry*, 15(2), 187-203. research. Emerging technologies for STEAM education. Springer, 383-395. *Recuperado de https://zaguan.unizar.es/record/57126*.
- Roa, J., y Hidalgo, M. (2017). Construcción de un modelo epistemológico de referencia para la enseñanza de la geometría elemental en el primer ciclo de la educación secundaria obligatoria en España.
- Rojas C. y Sierra A. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial.
- Rojas C. y Sierra A. (2020). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 593-602.
- Rojas C. y Sierra A. (2021a). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de investigación en educación matemática*, (20), 41-63.
- Rojas C. y Sierra A. (2021b). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación matemática*, 33(1), 208-239.
- Rojas C. y Sierra A. (2022). Un modelo epistemológico de referencia en torno a la determinación y construcción de sólidos para la enseñanza secundaria obligatoria.
- Sánchez, D., Greca, I., y Abad, M. (2022). La ciencia en el arte-Science in Art: La catedral de Burgos como elemento STEAM para la educación de la ciudadanía-The Cathedral of Burgos as a STEAM element of citizenship education. Ediciones Octaedro.
- Sanders, M. (2008). Stem, stem education, stemmania.
- Sandía, B., de los Ángeles, M., Corchuelo, B., Corrales Dios, N., & López Rey, M. (2014). Ventajas de la interdisciplinariedad en el aprendizaje. Experiencias innovadoras en la Educación Superior. *XI Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria*, 11-20.
- Santillán-Aguirre, J., Jaramillo-Moyano, E., Santos-Poveda, R. D., & Cadena-Vaca, V. D. C. (2020). STEAM como metodología activa de aprendizaje en la educación superior. *Polo del conocimiento*, 5(8), 467-492.

- Slavin, R. (2015). *Cooperative learning: Theory, research, and practice* (2nd ed.). Pearson.
- Stroud, A. y Baines, L. (2019). Indagación, procesos investigativos, arte y escritura en STEAM. *Educación STEAM: Teoría y práctica*, 1-18.
- Taylor, H., & Hutton, A. (2013). Think3d!: Training spatial thinking fundamental to STEM education. *Cognition and Instruction*, 31(4), 434-455.
- Terradellas, R. (2011). La investigación didáctica: hacia la interdisciplinariedad y la cooperación. *Educación Siglo XXI*, 29(1), 233-262.
- Toppol V., (2018). A study and research path on hyperthermia in children left in parked cars. 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7), Barcelona, Spain. https://citad7.sciencesconf.org/data/pages/book_citad7_en_v2_.pdf
- Torrubia-Barroso, M. I. (2019). Relaciones espaciales y geométricas en Educación Infantil.
- Uttal, D., y Cohen, C. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why, and how?. In *Psychology of learning and motivation* (Vol. 57, pp. 147-181). Academic Press.
- Yakman, G. (2008). STEAM education. *An overview of creation a model of integrative education. PATT*.
- Zapata, S., y Carmona-Mesa, J. (2021). Análisis documental sobre la educación STEM/STEAM no formal en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas: El caso de Iberoamérica. *REVOLUCIÓN EN LA FORMACIÓN Y LA CAPACITACIÓN PARA EL SIGLO XXI*, 442.
- Zeidler, D. (2016). STEM education: a deficit framework for the twenty first century? A sociocultural socioscientific response. *Cultural Studies of Science Education*, 11(1), 11-26. <https://doi.org/10.1007/s11422-014-9578-z>
- Zuluaga, Álvarez Rojas y Zuluaga (2022). El problema de la determinación de los cuadriláteros en la Educación Secundaria. *RELME* 36 (en prensa).