El Pensamiento Algebraico Escolar cuando se integra Robótica Educativa en la clase de matemáticas de séptimo grado

Yonatan Stiven Cardona Garzón

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación

Tutor
Jaime Andrés Carmona Mesa, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Maestría en Educación
Medellín, Antioquia, Colombia
2024

Cita	(Cardona-Garzón, 2024)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Cardona-Garzón, Y. (2024). *El Pensamiento Algebraico Escolar cuando se integra Robótica Educativa en la clase de matemáticas de séptimo grado* [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Maestría en Educación, Cohorte XXI.

Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Vicerrectoría de Docencia

Sistema de Bibliotecas

Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: Jhon Jairo Arboleda Céspedes.

Decano/Director: Wilson Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Cártul Valerico Vargas Torres

Agradecimientos

Al asesor Jaime Andrés Carmona Mesa, quien con su acompañamiento permitió configurar la investigación.

A los profesores Gilberto Obando y Paula Rendón, que con sus discusiones y recomendaciones suscitaron momentos de reflexión en torno al proceso investigativo.

A Alejandra Marín y Alexander Castrillón, cuyos valiosos aportes académicos y apoyo emocional contribuyeron a la realización de esta investigación.

A los profesores que integran el Seminario Permanente de Educación Matemática, por su disposición para escuchar los avances de mi estudio y hacer recomendaciones en la consolidación del trabajo investigativo.

Al grupo de Investigación Mathema-FIEM que, a través del convenio de pasantía CP-10410023/ES84190019-001-2022, apoyó económicamente el desarrollo de esta investigación.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

La investigación se desarrolla en torno al Pensamiento Algebraico Escolar (PAE) y el uso de la Robótica Educativa (RE) como instrumento que mediatiza el proceso de enseñanza. En este sentido, se precisa la naturaleza del PAE y los aspectos epistemológicos que diferencian los sistemas algebraicos y aritméticos. Así mismo, se señala la relevancia de considerar los instrumentos que mediatizan la actividad matemática, dado que estos transforman la manera en la cual se relaciona el sujeto con el objeto de conocimiento. En consecuencia, en el presente estudio se diseña, implementa y valora los alcances de una intervención de aula que explora la integración de la RE como instrumento en los procedimientos que desarrollan los estudiantes en el PAE.

A nivel conceptual, se declara la naturaleza del PAE y su diferencia con el pensamiento aritmético; además, se destacan consideraciones metodológicas en torno al uso de la RE en el aula de matemáticas y su posible influencia en el PAE. Para analizar la integración de la RE como instrumento, el estudio se fundamenta en un paradigma interpretativo y cualitativo. Los datos registrados se examinan mediante la categorización a priori, la codificación y la triangulación metodológica.

Los resultados de la investigación permiten evidenciar que la RE fomenta: i) la comprensión del papel de las magnitudes indeterminadas (variables, incógnitas y parámetros) y su relación con las magnitudes determinadas; ii) la representación y el relacionamiento entre magnitudes y iii) la estrategia heurística del ensayo y error dirigido como primer acercamiento analítico a problemas de carácter algebraico.

Palabras clave: Pensamiento Algebraico, Robótica Educativa, Ensayo y error dirigido, instrumentos.

Abstract

The research is developed around School Algebraic Thinking (PAE) and the use of Educational Robotics (RE) as an instrument that mediates the teaching process. In this sense, the nature of PAE and the epistemological aspects that differentiate algebraic and arithmetic systems are specified. Likewise, the relevance of considering the instruments that mediate mathematical activity is pointed out, since they transform the way in which the subject relates to the object of knowledge. Consequently, this study designs, implements and evaluates the scope of a classroom intervention that explores the integration of the RE as an instrument in the procedures developed by students in the PAE.

At the conceptual level, the nature of the PAE and its difference with arithmetic thinking are stated; in addition, methodological considerations are highlighted regarding the use of RE in the mathematics classroom and its possible influence on the PAE. In order to analyze the integration of RE as an instrument, the study is based on an interpretative and qualitative paradigm. The data recorded are examined through a priori categorization, coding and methodological triangulation.

The results of the research show that RE promotes: i) the understanding of the role of indeterminate magnitudes (variables, unknowns and parameters) and their relationship with determinate magnitudes; ii) the representation and relationship between magnitudes; and iii) the heuristic strategy of trial and error as a first analytical approach to algebraic problems.

Keywords: Algebraic thinking, educational robotics, directed trial and error, instruments.

Introducción

Es habitual que se señale al álgebra como uno de los contenidos curriculares que más desafíos representa a los estudiantes en el sistema escolar. Al respecto, se evidencia que una de las principales limitaciones para el desarrollo del Pensamiento Algebraico Escolar (PAE) está relacionada con la concepción del álgebra como una aritmética generalizada. En este sentido, resulta necesario que en los procesos educativos se reconozca la naturaleza del PAE, las condiciones que lo caracterizan y los aspectos que lo diferencian del pensamiento aritmético. Estas consideraciones deber ser contempladas para el diseño y la implementación de actividades orientadas al desarrollo del PAE.

En consecuencia, fomentar el PAE implica contemplar la ruptura epistemológica entre los sistemas algebraicos y aritméticos. Así mismo, de acuerdo con Radford (2006), el proceso de pensamiento está mediatizado por artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.), los cuales inciden directamente en la manera que el sujeto se relaciona con el objeto de conocimiento. En este sentido, la presente investigación explora la integración de la Robótica Educativa (RE) como instrumento que media la actividad matemática entre los estudiantes y el PAE.

La estructura del estudio se comprende en seis capítulos. En el primero, se presenta el planteamiento del problema, en el cual se exponen las dificultades de concebir el álgebra como una aritmética generalizada. Además, se destaca la RE como un instrumento con potencial para desarrollar el PAE, pero que requiere evidencia empírica que permita identificar las oportunidades para su integración en el contexto educativo.

El segundo capítulo evidencia la comprensión conceptual y epistemológica asumidas frente al PAE, donde se especifican las condiciones que lo caracterizan y diferencian del pensamiento aritmético. En torno a la RE, se destacan algunas consideraciones metodológicas frente a su integración como instrumento mediatizador en el proceso de enseñanza. Así mismo, se informa del potencial que posee la integración de la RE en el desarrollo del PAE a partir de la literatura consultada y la experiencia personal del investigador.

El tercer capítulo expone la fundamentación metodológica de la investigación, en la que se señala el enfoque y el paradigma que asume el investigador, así como las técnicas de recolección y análisis de los datos. Además, se presenta el diseño de intervención, la población que participó en el estudio, las consideraciones éticas, los procesos de codificación, categorización y triangulación de la información.

El cuarto capítulo presenta el análisis de la información recolectada en la intervención en concordancia con los fundamentos conceptuales establecidos. Los hallazgos evidencian que la integración de la RE como instrumento contribuye a la comprensión, la simbolización y la operatividad asociados al PAE. En primer lugar, se evidencia que la RE permite la identificación de las magnitudes indeterminadas (variables, incógnitas y parámetros) en situaciones algebraicas; además, transforma la manera en la que los estudiantes analizan y generan patrones-secuencias. En segundo lugar, se observa que la RE promueve la denotación algebraica, la cual puede alcanzar niveles simbólicos formales. En tercer y último lugar, se reconoce el proceso heurístico del ensayo y error dirigido como una estrategia que posibilita un acercamiento al tratamiento algebraico de los datos, el cual posee el potencial para fomentar métodos de razonamiento sofisticados basados en relaciones y estructuras.

En el quinto capítulo se exponen las conclusiones derivadas del análisis y los resultados obtenidos en la investigación. Este apartado destaca las principales transformaciones que propicia la RE al ser integrada como instrumento que mediatiza la actividad matemática entre los estudiantes y el PAE. Se evidencia el cambio conceptual en el tratamiento de los patrones-secuencias, debido a que los estudiantes son los que construyen las secuencias al identificar regularidades. Se reconocen los aportes en la denotación y semántica asociada a la comunicación de situaciones algebraicas. Además, se resalta el proceso de ensayo y error dirigido como una estrategia analítica del PAE, pues se identifica un razonamiento de tipo abductivo en el procesamiento de la información.

El sexto capítulo presenta recomendaciones para la integración de la RE en la clase de matemáticas. Además, se proponen líneas investigativas abiertas derivadas de la investigación. En el último apartado, se precisan las referencias que fundamentan el estudio y los anexos que se relacionan con la intervención.

Capítulo 1
Planteamiento del problema

Es habitual indicar que el álgebra es uno de los contenidos curriculares que más desafíos les representa a los estudiantes en el sistema escolar, percepción que usualmente está asociada al reto de identificar y utilizar el lenguaje simbólico inmerso en las expresiones algebraicas (Castellanos y Obando, 2009; Radford, 1999, 2002; Rojas y Vergel, 2013; Rojas y Vergel, 2017). Al respecto, se han desarrollado diversas investigaciones orientadas a la comprensión y delimitación de estas dificultades, así como las posibles alternativas que permiten atender a los retos asociados al desarrollo del Pensamiento Algebraico Escolar -PAE- (p. ej., Castro, 2012; Gutiérrez-Soto et al., 2015; Ruano et al., 2008). Incluso, a nivel internacional se reconoce que determinar las causas y las potenciales soluciones a estos obstáculos constituye una línea de investigación clave para fortalecer el PAE (Kieran, 2007, 2016).

En el caso particular de Colombia, la enseñanza del álgebra está presente en el sistema escolar desde la Educación Primaria mediante el reconocimiento, la identificación y la caracterización del cambio y la variación en diversos contextos, entre ellos el estudio de regularidades a través de patrones-secuencias[1] (Ministerio de Educación Nacional -MEN-, 1998, 2006). En el ciclo de la Educación Secundaria, se observa un especial énfasis de los procesos algebraicos a partir de los grados octavo y noveno, en los cuales se busca fomentar la construcción y comprobación de conjeturas, análisis de funciones y solución de ecuaciones algebraicas.

Al respecto, Gavilán (2011), Rojas y Vergel (2013) señalan que cuando los estudiantes se incorporan a la Educación Secundaria y se enfrentan a fenómenos que emplean el simbolismo formal (expresiones que contienen signos alfanuméricos), experimentan dificultades asociadas a la interpretación y uso de las *letras* en el lenguaje algebraico, así como en el tratamiento operativo sustentado en propiedades y relaciones. De hecho, se identifica que estudiantes destacados por su desempeño en las matemáticas en la Educación Primaria, evidencian dificultadas frente a las situaciones algebraicas que incluyen símbolos alfanumérico (Rojas y Vergel, 2013).

[1] En el contexto de la presente investigación, se consideran los patrones y las secuencias como elementos interconectados, indisociables y con interdependencia el uno del otro en el álgebra escolar, por lo cual se opta por utilizar la denominación “patrones-secuencias”.

Respecto a estas dificultades, se reconoce que la interpretación, uso y manipulación del lenguaje algebraico está asociado a: i) la comprensión del papel de variables, incógnitas y parámetros, ii) la semántica asociada a la simbología empleada y iii) la operatividad inmersa en la solución de situaciones algebraicas (Radford, 2014, 2021). Entre las posibles causas asociadas a las dificultades, en la literatura se reporta que concebir el álgebra como una aritmética generalizada constituye una limitación (Castro, 2012; Gavilán, 2011; Godino y Font, 2003; Serres, 2011; Socas, 2011; Zarzar y Ceballos, 2010). De acuerdo con esta perspectiva, los objetos matemáticos contemplados en la aritmética y el álgebra son los mismos (sistemas numéricos, operaciones y relaciones); la diferencia radica en el nivel de generalidad con la cual se expresan afirmaciones a través de variables, incógnitas y parámetros (Cañadas y Molina, 2016; Castellanos y Obando, 2009; Godino y Font, 2003).

Sin embargo, el PAE no se limita a una simbología que denota resultados numéricos a través de expresiones de generalidad; se requiere fomentar un pensamiento orientado a la identificación, análisis y comunicación de relaciones, donde se faculte el estudio de propiedades y estructuras (Gavilán, 2011; Kieran y Filloy, 1989; Papini, 2003). La comprensión del álgebra como aritmética generalizada, conlleva a desconocer la diferencia subyacente al procesamiento de la información y propicia espacios para que los estudiantes analicen y resuelvan situaciones algebraicas exclusivamente a partir de estrategias aritméticas (Kieran y Filloy, 1989; Papini, 2003). A continuación, se indican algunas las consecuencias de asumir el PAE como una generalización de la aritmética en función de las dificultades reportadas.

Frente a las variables, incógnitas y parámetros, es habitual que los estudiantes solo las exploren y manipulen a través de expresiones alfanuméricas, carentes de sentido o de contexto para la interpretación de las mismas en el PAE (Radford, 2010a; Torres et al., 2002). Por lo tanto, se requieren experiencias que permitan comprender el papel de las variables, incógnitas y parámetros en situaciones algebraicas (Serres, 2011; Torres et al., 2002). Al concebir el álgebra como aritmética generalizada, se priorizan procesos enfocados al cálculo numérico y procesamiento algorítmico de la información, no obstante para desarrollar el PAE es fundamental identificar las relaciones inmersas en la situación y considerar las estructuras subyacentes al sistema asociado (Andrade, 1998; García, 2007; Kieran, 2004; Kieran y Filloy, 1989; Radford, 2011, 2021).

De este modo, al dar prioridad al procesamiento algorítmico y a los resultados numéricos, se dificulta que los estudiantes conciban la expresión misma y sus relaciones como elementos de atención (Kieran, 2004). Además, se observa que los estudiantes se oponen a que las soluciones sean expresiones abiertas, relaciones entre magnitudes o rangos numéricos, debido a la reiterativa necesidad de comunicar cantidades determinadas como única respuesta (Andrade, 1998). En consecuencia, cuando se concibe el álgebra como una aritmética generalizada, se desconoce la relevancia de comprender el sentido de las variables, incógnitas y parámetros en las situaciones algebraicas, lo cual propicia una simbolización y operatividad basadas en la aritmética (Radford, 2013, 2014, 2021).

Respecto a la simbolización algebraica, por un lado, es frecuente que la simbología sea asociada como la diferencia más representativa entre la aritmética y el álgebra, debido a que se vinculan las expresiones alfanuméricas como única manera de representar la generalidad (Godino y Font, 2003; Kieran, 2004). No obstante, para analizar, estudiar, generalizar y comunicar las relaciones y transformaciones subyacentes a las situaciones algebraicas, el uso de símbolos como las letras no es imprescindible (Kieran, 2004; Radford, 2021). En particular, diversos investigadores (p. ej., Kieran, 2004, 2011; Radford, 1999, 2011, 2014, 2021; Rojas y Vergel, 2013) señalan que para expresar la generalización de una situación, es posible recurrir a acciones, palabras claves o incluso iconos que no están asociados al simbolismo alfanumérico.

Por otro lado, considerar el significado de signos matemáticos en situaciones aritméticas o algebraicas, es objeto de estudio y discusión (p. ej., Molina, 2006, 2009), dado que los estudiantes interpretan y operan las expresiones de acuerdo con el sentido atribuido en la aritmética. Al respecto, Gavilán (2011) problematiza las sintaxis entre los símbolos aritméticos y algebraicos, este autor señala que la mayoría de signos que han sido explorados y utilizados en la aritmética son asumidos por los estudiantes de forma análoga en procesos algebraicos, lo que promueve conflictos en el desarrollo del PAE. Por ejemplo, Andrade (1998) plantea que mientras en la aritmética la concatenación representa adición (23 significa 20 + 3; $2\frac{1}{3}$ equivale $2 + \frac{1}{3}$), en el álgebra indica multiplicación (4a supone multiplicar 4 y a). Además, en la aritmética es común que las letras refieran a un contexto concreto (p. ej., m: metros, g: gramos, etc.), pero en el álgebra estas adquieren una connotación de variables, incógnitas y parámetros (Castellanos y Obando, 2009).

Así mismo, en la aritmética los signos suelen indicar procedimientos, algoritmos y cálculos a realizar, no obstante, la principal función de estos en el álgebra es expresar relaciones (F. J. García, 2007; Serres, 2011). Un signo que ejemplifica el cambio de significado entre los sistemas aritméticos y algebraicos es el igual "=", el cual en aritmética se utiliza principalmente para denotar el resultado del cálculo numérico o simplemente como separador del problema y la solución (Andrade, 1998; Carpenter et al., 2005; Castellanos y Obando, 2009; Gavilán, 2011; Godino y Font, 2003; Papini, 2003; Serres, 2011; Socas, 2011); sin embargo, en el álgebra representa una relación de equivalencia (Andrade, 1998; Kieran y Filloy, 1989; Molina, 2006, 2009).

El hecho de que se observe el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado implica que se desconozcan las propiedades de simetría y transitividad en la igualdad, así como las relaciones estructurales de los sistemas implicados (Andrade, 1998; Kieran y Filloy, 1989; Papini, 2003). En este sentido, concebir los signos y símbolos en expresiones algebraicas a partir de una concepción aritmética, constituye una potencial limitación del PAE para establecer relaciones y manipular operativamente situaciones algebraicas (Gavilán, 2011).

Respecto a la operatividad y la manipulación de expresiones algebraicas Gavilán (2011), García (2007) y Carpenter et al. (2005) señalan que la aritmética se caracteriza por la realización de un conjunto de procedimientos que buscan cantidades determinadas a través de cálculos y operaciones, mientras que el álgebra supone la representación de relaciones y transformaciones a partir del análisis de estructuras, propiedades y teoremas. Así mismo, se observa que encontrar un valor numérico es el objeto de la actividad matemática en los sistemas aritméticos; no obstante, en el álgebra el propósito es diseñar y conservar una memoria de cada transformación, donde puedan evidenciarse las etapas en el proceso de solución, y el resultado puede constar de una relación, rangos numéricos o incluso una indeterminación (Carpenter et al., 2005; Gavilán, 2011; Papini, 2003).

De acuerdo con Radford (2011, 2014, 2021), considerar la operatividad y manipulación de las expresiones algebraicas implica identificar la forma de razonamiento de los estudiantes en torno a las relaciones y transformaciones; por ejemplo, cuando recurren a estrategias orientadas al cálculo numérico, evidencian aproximaciones aritméticas (Radford, 2013, 2021). Por lo tanto, es esencial en el proceso educativo reconocer qué tipo de procesos analíticos son algebraicos o aritméticos y fomentar aquellos que promuevan el PAE.

En este sentido, se observa que concebir el álgebra como una aritmética generalizada profundiza las dificultades en torno a la comprensión de variables, incógnitas y parámetros, así como la interpretación de los símbolos en expresiones algebraicas y su operatividad. Por esta razón es fundamental reconocer el cambio epistemológico entre los sistemas algebraicos y aritméticos, con el fin de identificar las transformaciones en las formas de pensar y actuar sobre los objetos algebraicos (Kieran, 2004; Kieran y Filloy, 1989; Radford, 2011, 2021). De acuerdo con Socas (2011), precisar estas diferencias epistemológicas permite que las situaciones diseñadas e implementadas por los profesores fomenten el desarrollo del PAE.

Una vez que se reconoce la naturaleza del objeto de conocimiento, en este caso del álgebra escolar, es crucial considerar la incidencia de los artefactos que median la actividad de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Radford (2006), los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.), no son simples amplificadores del pensamiento, se constituyen partes sustanciales del mismo. Este mismo autor señala que "se piensa con y a través de los artefactos culturales" (p. 107). En este sentido, es esencial reflexionar en torno a la influencia de los instrumentos que culturalmente pueden mediar la actividad matemática.

Entre los artefactos que han sido considerados con potencial para el aprendizaje del álgebra en el sistema escolar, se destaca el uso de instrumentos[2] tecnológicos como un recurso que fomenta el PAE. Por ejemplo, Kieran (2004), Castro (2012) y Warren et al. (2016) argumentan que la integración de este tipo de instrumentos en el aula fomenta espacios para comprender, simbolizar y operar expresiones algebraicas a través de diversas representaciones. De forma similar, Kieran y Filloy (1989) señalan que el uso de instrumentos como las computadoras posibilita dar prioridad a componentes vinculados con la comprensión de las variables, las incógnitas y los parámetros en las situaciones algebraicas, y demandan menos tiempo en aspectos algorítmicos.

Entre los instrumentos tecnológicos reconocidos con potencial para fomentar el PAE en los estudiantes, se incluyen hojas de cálculo, calculadoras gráficas, sistemas de álgebra computacional y entornos de programación (Kieran, 2007; Serna et al., 2021; Socas, 2011). De forma particular, Ferrada et al. (2019) y Zhong y Xia (2020) hacen un llamado especial por considerar experiencias

[2] A partir de este momento se opta por utilizar instrumentos en vez de artefactos para diferenciar las herramientas tecnológicas de los sistemas de signos u objetos.

didácticas en las que el uso de la Robótica Educativa (RE) sea clave al momento de potenciar el desarrollo del PAE.

Entre las potencialidades de la RE como instrumento para el desarrollo del PAE, se observa que posibilita la interpretación de relaciones caracterizadas por ser abstractas al representar situaciones o modelos en ambientes concretos (Ferrada et al., 2019; Zhong y Xia, 2020); aspectos que influye en la comprensión del papel de las variables, incógnitas y parámetros. Algunas investigaciones empíricas señalan que la RE puede promover la simbolización en diversas formas de representación -gestuales, icónicas o alfanuméricas- (Agatolio et al., 2018; Merlo-Espino et al., 2020); además fomenta las transformaciones a partir de reglas y propiedades, elementos propios de la operatividad y manipulación de los sistemas algebraicos (Alfieri et al., 2015).

Aunque se reconoce el potencial de la RE en el desarrollo de habilidades generales del proceso escolar (p. ej., Casado y Checa-Romero, 2020; Moreno et al., 2012), aún es limitada la evidencia empírica que permita reconocer las formas de pensar y de actuar de los estudiantes al integrar RE en el proceso de desarrollo del PAE. En este sentido, autores como Brender et al. (2021) argumentan la necesidad de ampliar en investigaciones que analicen e informen el potencial de integrar la RE en procesos educativos, en este caso el PAE. Por lo tanto, es importante explorar como es el PAE al integrar la RE en el aula de clase de matemáticas. Para este fin, la presente investigación indaga por:

¿Cómo es el Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado al integrar Robótica Educativa en la clase de matemáticas?

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo general

Analizar el Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado cuando se integra Robótica Educativa en clase de matemáticas.

1.1.2 Objetivos específicos

- Diseñar una intervención de aula con Robótica Educativa, fundamentada en principios epistemológicos del Pensamiento Algebraico Escolar, dirigida a estudiantes de séptimo grado.
- Caracterizar la comprensión, simbolización y operatividad del Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado, al integrar la Robótica Educativa como instrumento en la clase de matemáticas.

Capítulo 2
Marco conceptual

Este apartado presenta los conceptos que sustentan y contribuyen teóricamente al desarrollo de la investigación. En este sentido, se enuncian algunas concepciones en torno al PAE, donde se identifican condiciones y características que permiten fomentar este pensamiento; en particular, se precisa la conceptualización teórica y epistemológica que fundamenta y orienta el análisis de los datos. Por otro lado, se indican aspectos relevantes frente a la integración de la RE en el aula de clase, donde se asume como instrumento en el proceso de enseñanza y de aprendizaje en asignaturas del currículo escolar. Finalmente, se examinan investigaciones empíricas que reportan la integración de la RE como instrumento para fomentar el PAE.

2.1 Pensamiento Algebraico Escolar

Para fomentar el PAE es crucial reconocer las condiciones que lo caracterizan y lo diferencian de otras formas de pensamiento. Al respecto, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) señala que un aspecto relevante del PAE corresponde a la comprensión y uso intencionado de objetos algebraicos como variables, constantes, parámetros, términos, fórmulas y expresiones algebraicas. Así mismo, se identifica que el álgebra propende por la simbolización, comunicación y operatividad de estructuras matemáticas (entre ellas las numéricas), asociadas a actividades como la resolución de problemas y el diseño de modelos (Serres, 2011). No obstante, en la actualidad existen diversas comprensiones y caracterizaciones del PAE, en las cuales pueden observarse particularidades de acuerdo con su naturaleza. En este sentido, a continuación se presentan las concepciones de Godino et al. (2014), Godino y Font (2003), Kieran (2011, 2018) y Radford (2021) en torno al PAE, y se precisa la postura teórica que orienta la presente investigación.

De acuerdo con Godino y Font (2003), pensar algebraicamente implica acciones como representar, generalizar y formalizar las regularidades y patrones que se encuentran en diversas situaciones físicas, geométricas o numéricas. Así mismo, se reconoce que algunos rasgos característicos del álgebra son la generalización y la denotación simbólica de variables, incógnitas y parámetros (Godino et al., 2012). Frente al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, Godino et al. (2014) advierten sobre la importancia de reconocer y fomentar en los estudiantes:

- Los patrones y las regularidades: estos se encuentran de forma natural en las matemáticas a través de situaciones físicas, geométricas o numéricas. Las regularidades son reconocidas mediante la identificación de características comunes o transformacionales del fenómeno, las cuales deben ser ampliadas o generalizadas mediante patrones que reflejen sus propiedades.
- El uso de símbolos: permite una comunicación semiótica eficaz de las generalidades, como lo son los patrones y las regularidades. Se destacan las representaciones simbólicas que permiten simbolizar variables y expresiones algebraicas a través de ecuaciones.
- Las variables: sustituyen el uso de cantidades concretas o rango de estas en situaciones algebraicas. Adquieren diversos significados que dependen de su uso; por ejemplo, si representan la variación de una magnitud, o si hacen parte de una fórmula. En general, las acepciones de las variables tienden constituirse como un recurso para fomentar el reconocimiento y la construcción de expresiones que denoten la generalidad.
- Las funciones: posibilitan la identificación o construcción de relaciones que asocian elementos de un conjunto con otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del segundo conjunto. Las funciones son utilizadas normalmente para expresar situaciones de generalidad y su denotación no está limitada a los símbolos alfanuméricos, puesto que es posible expresarlas a través de contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Para Godino et al. (2012, 2014) y Godino y Font (2003) la generalización constituye un rasgo característico del PAE y debería estar presente en todas las situaciones algebraicas que se proponen en el sistema escolar. De acuerdo con estos autores, la generalización algebraica es tanto el instrumento como el producto del PAE. No obstante, Kieran (2018) señala que centrar la atención del PAE en los procesos de generalización, ha suscitado que se desconozca la relevancia de observar y analizar las estructuras y las relaciones al interior de las expresiones algebraicas.

Al respecto, Kieran (2022) destaca la importancia de considerar las propiedades, las operaciones y el vínculo entre los sistemas al manipular expresiones numéricas o relacionales.

Aunque el álgebra implique trabajar con formas generalizadas, la capacidad para identificar las estructuras y relaciones es crucial para tener éxito en los procesos de manipulación, debido a que posibilita reconocer el sentido de las transformaciones (Kieran, 2018). Frente al desarrollo del PAE, se identifican diversas características a concebir, a continuación se indican los aspectos que de acuerdo con Kieran (2011) es preciso contemplar en la actividad algebraica:

- Pensar lo general en lo particular: implica generalizar ideas matemáticas y sugiere el uso de estas como objetos de razonamiento, de tal forma que permitan analizar y estudiar casos particulares. En este sentido, identificar la manera en la que se relacionan los objetos matemáticos y comprender su estructura, posibilita la producción de expresiones que denoten generalidad, así como la generalización misma.
- Pensar en torno a las reglas de los patrones: refiere a la identificación de regularidades, relaciones y estructuras que posibiliten deducir un método, regla o propiedad que denote generalidad. Este aspecto permite admitir que las magnitudes determinadas no constituyen el elemento central de la actividad algebraica, es más bien la inferencia de relaciones y su denotación lo que faculta el análisis y descripción de situaciones algebraicas.
- Pensar relacionalmente sobre cantidades, números y operaciones: implica considerar las relaciones entre cantidades y atributos de objetos que son conmensurables. Concibe el uso de las propiedades fundamentales de las operaciones y la igualdad para analizar los problemas.
- Pensar representacionalmente sobre relaciones en situaciones problema: contempla la capacidad de construir expresiones algebraicas que permitan representar problemas. Favorece la abstracción, representación y comunicación de relaciones.
- Pensar conceptualmente sobre lo procedimental: concibe la capacidad de observar las transformaciones algebraicas y determinar el cambio que subyace a cada objeto algebraico. Transciende el seguimiento algorítmico de un proceso; se enfoca en la construcción de aspectos conceptuales que permitan la comprensión de relaciones y estructuras.
- Anticipar, conjeturar y justificar: se refiere a las formas de razonamiento en la solución de un fenómeno algebraico. Se subdivide en tres momentos: anticipar, conjeturar y justificar. Cuando el estudiante *anticipa* el resultado de una situación, debe contemplar las posibles

transformaciones que se puedan alcanzar, lo que permite planificar y retroalimentar de forma continua el proceso. En este sentido, los estudiantes tienen la tarea de establecer constantemente *conjeturas* acerca de las relaciones en un sistema, las cuales deben estar fundamentadas en argumentos que las *justifiquen*. Los tres elementos en conjunto aportan a la comprensión de las estructuras y las relaciones.

- Gesticulación, visualización y lenguaje: considera la interacción de diversos sentidos como el visual, el motor y el auditivo, los cuales se constituyen en herramientas para reconocer las relaciones subyacentes de una situación y permitir su posterior comunicación. Se reconoce que el lenguaje alfanumérico no es la única manera de denotar relaciones y generalidad.

En la visión del PAE que promueve Kieran (2011), destaca la idea considerar el álgebra como una forma de pensar en términos relacionales y rechaza la concepción de centrar la actividad algebraica en torno al uso de símbolos que se operan matemáticamente. Así mismo, aunque se reconoce la generalización como un aspecto relevante del PAE, la identificación de las estructuras y relaciones constituye una de las principales características del álgebra (Kieran, 2018).

Respecto a las estructuras y relaciones, Radford (2014, 2021) señala que la naturaleza del PAE no se encuentra limitada al análisis estructural y relacional de las expresiones algebraicas, debido a que es fundamental comprender el papel de las variables, incógnitas y parámetros (magnitudes indeterminadas). Este mismo autor, señala que es esencial reconocer el tipo de razonamiento que se lleva a cabo al momento de relacionar las magnitudes indeterminadas y determinadas (cantidades específicas), dado que el procesamiento o manipulación de las expresiones puede evidenciar un pensamiento aritmético o algebraico. De forma particular, Radford (2010a) manifiesta que existen tres condiciones que caracterizan el PAE, las cuales tienen que ver con los objetos de razonamiento (magnitudes indeterminadas), la comunicación semiótica (denotación) y el razonamiento implícito (analiticidad). A continuación, se precisa cada una de las condiciones del PAE de acuerdo con Radford (2010a, 2014, 2021):

- Magnitudes indeterminadas: considera como objetos de razonamiento a las magnitudes indeterminadas (incógnitas, variables y parámetros), y su relación con las determinadas (números o cantidades conocidas).

- Denotación: refiere a la comunicación semiótica a través de acciones o símbolos. Los medios semióticos posibilitan el análisis y la generalización de situaciones algebraicas.
- Analiticidad: contempla la manera en la cual se razona sobre las magnitudes (indeterminadas o determinadas) y sus relaciones. Esta condición permite identificar si el razonamiento pertenece a una forma de pensamiento algebraico o aritmético.

La concepción de Radford (2010a, 2014, 2021) en torno al PAE, reconoce el proceso de la generalización y las formas de pensar sobre las estructuras y sus relaciones como elementos constitutivos del pensamiento algebraico; no obstante, las relaciones entre magnitudes constituyen la condición central en el PAE. Por otro lado, Radford (2021) señala algunos elementos que permiten identificar diferencias procedimentales y conceptuales entre los pensamientos aritmético y algebraico.

En suma, las concepciones de Godino et al. (2014), Kieran (2011) y Radford (2010a, 2014, 2021) permiten identificar características frente al PAE; sin embargo, estas visiones difieren en algunos aspectos teóricos o prácticos frente a la actividad algebraica y su fundamentación. Aunque estos enfoques presenten divergencias, es posible precisar conexiones de acuerdo con la naturaleza de cada elemento. La Tabla 1 relaciona las concepciones de Godino et al. (2014), Kieran (2011) y Radford (2010a, 2014, 2021) en torno al PAE:

Tabla 1
Concepciones del Pensamiento Algebraico Escolar

Godino et al. (2014)	Kieran (2011)	Radford (2010a, 2014, 2021)
• Los patrones y regularidades • Las variables • Las funciones	• Pensar relacionalmente sobre cantidades, números y operaciones	• Magnitudes indeterminadas
• El uso de símbolos	• Pensar representacionalmente sobre relaciones en situaciones problema • Gesticulación, visualización y lenguaje	• Denotación
• Generalización	• Pensar lo general en lo particular • Pensar en torno a las reglas de los patrones • Anticipar, conjeturar y justificar • Pensar conceptualmente sobre lo procedimental	• Analiticidad

Nota. Elaboración propia de acuerdo con Godino et al. (2014), Kieran (2011) y Radford (2010a, 2014, 2021).

En relación con los aspectos que prioriza cada concepción, por un lado se evidencia que para Godino y Font (2003) pensar algebraicamente implica acciones orientadas a la generalización, donde se convierte tanto el instrumento como el producto del PAE. Por otro lado, Kieran (2018) señala que centrar la actividad algebraica en la generalización ha suscitado que se desconozca la relevancia de observar y analizar las estructuras y relaciones al interior de situaciones algebraicas. Por su parte, Radford (2021) sostiene que aunque generalizar y pensar en torno a las estructuras y relaciones son características del PAE, el elemento central lo constituye la comprensión del objeto de razonamiento (magnitudes indeterminadas), el cual es característico del PAE.

En particular, la presente investigación asume como marco de referencia del PAE las consideraciones de Radford (2010a, 2014, 2021), debido a que contempla no solo los procesos de generalización y las formas de pensar sobre estructuras y relaciones, sino que también reconoce la relevancia de la comprensión de las magnitudes indeterminadas (variables, incógnitas y parámetros), que se constituye como objeto sobre el cual se razona en el pensamiento algebraico. Así mismo, esta concepción permite distinguir si las formas de razonamiento competen a un pensamiento algebraico o aritmético, lo que posibilita atender a los desafíos descritos en torno al PAE.

Radford (2010a, 2014, 2021) destaca tres componentes que según él, se constituyen en las condiciones que caracterizan el PAE: las magnitudes indeterminadas, la denotación y la analiticidad. Este autor señala que el PAE se fomenta a nivel escolar principalmente a partir de dos dominios matemáticos: las ecuaciones algebraicas y la generalización algebraica de patrones-secuencias (Radford, 2002, 2021). A continuación, se describen las condiciones del PAE y los dominios matemáticos que lo promueven.

2.1.1 Condiciones que caracterizan el Pensamiento algebraico Escolar

La identificación de los elementos constitutivos del PAE posibilita el reconocimiento de las diferencias epistemológicas con otras formas de pensamiento. En este sentido, es fundamental asumir una postura teórica que posibilite determinar las características del PAE. De acuerdo con Radford (2014, 2021), existen tres condiciones que develan la naturaleza del PAE: i) las magnitudes indeterminadas, ii) la denotación y iii) la analiticidad; elementos que se desarrollan a continuación.

2.1.1.1 Las magnitudes indeterminadas. Esta condición evoca al razonamiento de magnitudes no determinadas o indeterminadas tales como las variables, las incógnitas y los parámetros (Radford, 2010b, 2021). La comprensión del sentido de la indeterminación permite la sustitución de una variable o un objeto desconocido por otro, de tal manera que cumpla las condiciones propuestas por la situación algebraica o la estructura del sistema de referencia (Radford, 2010b). De acuerdo con Radford (2014), esta condición del PAE implica pensar analíticamente sobre lo desconocido, de tal forma que se manipule lo indeterminado como una magnitud conocida, es decir, como si se tratara de números específicos.

Tradicionalmente, el álgebra escolar se ha conceptualizado únicamente a partir de la manipulación de expresiones simbólicas (Rojas y Vergel, 2013; Vergel, 2015); sin embargo, el manejo de símbolos no puede caracterizar la enseñanza del álgebra, dado que el PAE implica más que operar números y letras en igualdades numéricas (Radford, 2014, 2021). Así mismo, se ha evidenciado que asumir el álgebra como una manera de generalizar la aritmética conlleva a desconocer un cambio cualitativo en la forma de pensar, debido a que el PAE es más que hacer explícito lo que estaba implícito (Gavilán, 2011). Estos aspectos sugieren una ruptura epistemológica de la concepción del pensamiento algebraico, pues las magnitudes se deben considerar bajo la mirada de lo *relacional* (Radford, 2021).

Frente a la mirada relacional, diversos autores (p. ej., Blanton y Kaput, 2005; Kieran, 2011) reconocen la capacidad para relacionar magnitudes como un componente fundamental en el desarrollo del PAE. En este sentido, Serres (2011) señala la importancia de fomentar experiencias que posibiliten establecer relaciones, las cuales aportan en la identificación y comprensión del cambio y la variación. Al respecto, se reconocen investigaciones (p. ej., Bolea et al., 2001; Burgos y Godino, 2019; Wilhelmi, 2017) que fomentan la comprensión de relaciones algebraicas a través de situaciones de proporcionalidad, donde los estudiantes establecen vínculos entre magnitudes que varían.

En consecuencia, la comprensión de las magnitudes indeterminadas implica que los estudiantes puedan vincular los objetos algebraicos (variables, incógnitas o parámetros) a situaciones donde el evento o la cantidad no esté determinada por sí misma (Radford, 2010b, 2021). De esta manera, se debe propender por la identificación de relaciones de dependencia o de equivalencia al interior de los fenómenos algebraicos. Debido a que lo idóneo es operar y compartir las relaciones identificadas, es fundamental denotar de alguna forma lo indeterminado, dado que posibilita la manipulación y comunicación de lo indeterminado analíticamente.

2.1.1.2 La denotación. Contempla la forma de comunicación semiótica de las expresiones algebraicas. Debido a que históricamente el álgebra se ha utilizado para representar y analizar situaciones contextuales, la simbolización matemática se ha constituido uno de los componentes fundamentales del PAE (Gavilán, 2011; Kieran, 2011; Socas, 2011). No obstante, se evidencian dificultades para construir expresiones algebraicas que denoten problemas matemáticos o reales, por lo cual ha resultado de gran interés indagar y utilizar diversas formas que permitan denotar el problema y no recurrir únicamente a los simbolismos alfanuméricos (Kieran, 2011; Radford, 1999; Rojas y Vergel, 2013).

En este sentido, Radford (2014, 2021) señala que el simbolismo alfanumérico no es la única manera de comunicar semióticamente relaciones algebraicas, dado que pueden utilizarse formas de lenguaje natural, gestual, rítmico, simbólico o incluso una mezcla entre estos (Radford, 2014, 2021). De acuerdo con el tipo de denotación utilizado, es posible analizar la significación que se otorga a lo indeterminado, lo que posibilita la reflexión en torno a las relaciones asumidas por los estudiantes (Vergel, 2014). De esta forma, Radford (2010a) categoriza la *denotación simbólica* en tres estratos de generalización:

- Pensamiento algebraico factual: los medios semióticos movilizados son gestos, movimientos, ritmos, actividad perceptual y palabras. En esta categoría las magnitudes indeterminadas no alcanzan una enunciación, son simplemente expresadas en acciones, situaciones u objetos concretos.
- Pensamiento algebraico contextual: la mediación semiótica deja de ser factual para convertirse en una denotación más concisa, que expresa las ideas en términos descriptivos a partir de palabras que determinan generalidad. Esta categoría evidencia una idea de indeterminación explícita en frases claves ancladas a lo contextual de manera deíctica, donde se señalan y verbaliza la relación.
- Pensamiento algebraico simbólico: refiere a la representación semiótica a través de símbolos arbitrarios (por ejemplo, alfanuméricos) y constituye el nivel de denotación más alto y complejo para los estudiantes. Una de las razones en términos de su sofisticación, se debe a que en los niveles previos se podía utilizar un conjunto amplio de mediaciones semióticas, pero en esta forma de comunicación no tienen lugar. Este tipo de denotación facilita la manipulación analítica de las magnitudes indeterminadas.

Esta condición del PAE reconoce diversas maneras de representación y comunicación de relaciones algebraicas, las cuales no están únicamente ancladas al simbolismo alfanumérico, (Radford, 2010b, 2011). El propósito general en esta condición del PAE es posibilitar la comunicación de variables, incógnitas y parámetros, así como las regularidades en situaciones de patrones-secuencias. De acuerdo con la denotación y comunicación que utilicen los estudiantes, es posible analizar si se genera una ruptura epistemológica con el pensamiento aritmético, dado que debería expresarse de alguna manera los objetos de razonamiento.

Así mismo, cuando se consideran los medios semióticos de denotación (factual, contextual o simbólico), es posible identificar el nivel de generalización en torno a los objetos algebraicos (Radford, 2021). En este sentido, la manera en la cual los estudiantes denoten las relaciones algebraicas condiciona las diversas maneras de operatividad y manipulación, aspectos que develan el razonamiento (analiticidad) implícito al resolver situaciones.

2.1.1.3 La analiticidad. Contempla el razonamiento y la manipulación entre las magnitudes y sus relaciones, además de la comprensión y uso de las estructuras establecidas en el tratamiento de las expresiones algebraicas (Radford, 2014, 2021). En este sentido, Radford (2021) señala que esta condición implica una manera de pensar analíticamente, donde el manejo operatorio de los objetos algebraicos (variables, incógnitas o parámetros) sean tratados como magnitudes determinadas (números o cantidades conocidos), sin desconocer las características del objeto mismo.

Así mismo, Radford (2013, 2021) advierte que la analiticidad supone razonar de forma deductiva, de tal manera que a partir de un predicado o característica, puedan establecerse operaciones, propiedades, relaciones y estructuras a través de inferencias lógicas, sin necesidad de recurrir a procesos como el ensayo y error. Este autor señala que cuando los estudiantes utilizan el ensayo y error como procedimiento para la generalización o la determinación de una relación, evidencian un pensamiento aritmético y no algebraico, dado que la operatividad se da al reemplazar valores particulares hasta acertar en la magnitud y solo son necesarios conceptos aritméticos.

Sin embargo, algunos investigadores como Kieran (2018) y Vergel et al. (2022), sostienen que estrategias inductivas como el ensayo y error pueden constituirse como las primeras aproximaciones hacia un razonamiento más sofisticado o deductivo. En este sentido, aunque el procedimiento heurístico del ensayo y error no se tipifica como una forma deductiva para determinar relaciones, de acuerdo con los procesos que sean llevados a cabo, los estudiantes podrían recurrir a inferencias abductivas o deductivas en función del procesamiento realizado. Por ejemplo, Conde y Conde, (2005), Romero (2018) y Viar (2007) indican que el ensayo y error en la resolución de problemas matemáticos puede ser puesto en práctica a través de tres principales estrategias: i) Ensayo y error fortuito, ii) Ensayo y error sistemático y iii) Ensayo y error dirigido. A continuación, se presenta la categorización que enuncian los autores de cada estrategia:

- Ensayo y error fortuito: consiste en la elección de una magnitud determinada al azar, que se reemplaza en la fórmula o expresión a evaluar. Se lleva a cabo sin pautas o de forma aleatoria hasta que el resultado, la operación o la relación buscada sea alcanzada.
- Ensayo y error sistemático: los valores se seleccionan y sistematizan de manera ordenada, de tal forma que se eliminen posibles repeticiones de ensayo. Esta práctica permite que las opciones (magnitudes determinadas) se agoten y se pueda encontrar la solución o magnitud asociada.
- Ensayo y error dirigido: confiere a la práctica de reemplazar magnitudes y contrastar los resultados de cada valor de entrada con el valor de salida. Se realiza con el objetivo de analizar si el resultado está más cercano o lejano del valor buscado, para modificar el siguiente ensayo.

Al caracterizar el razonamiento llevado a cabo en cada estrategia, puede inferirse que las categorías de *ensayo y error fortuito* y *sistemático* procesan la información a partir de la comprobación particular de cada resultado, sin apoyarse de conocimientos preexistentes de la situación. De acuerdo con Núñez (2019) este tipo de procesamiento de la información indica un razonamiento inductivo, ya que se basa en la experiencia particular para generalizar. Por un lado, si un estudiante recurre a estrategias de *ensayo y error fortuito* o *sistemático*, refleja únicamente un pensamiento aritmético, debido a que solo se requiere considerar las relaciones entre los sistemas numéricos y sus reglas -aspectos que caracterizan la aritmética- (Radford, 2021).

Por otro lado, el *ensayo y error dirigido* suscita la toma de decisiones en torno a resultados previos, es decir, los ensayos se dan a partir de análisis de información, por lo cual no podría tipificarse únicamente como razonamiento inductivo. Aunque Radford (2021) categorice el ensayo y error como un procedimiento que carece de estructura deductiva; Vergel et al. (2022) sugieren que no se debe desestimar las generalizaciones inductivas, dado que podrían dar cuenta de una forma de pensamiento algebraico. En este sentido, la presente investigación considera relevante examinar las estrategias de ensayo y error presentes en la intervención, y de esta manera identificar si contribuyen al desarrollo del PAE.

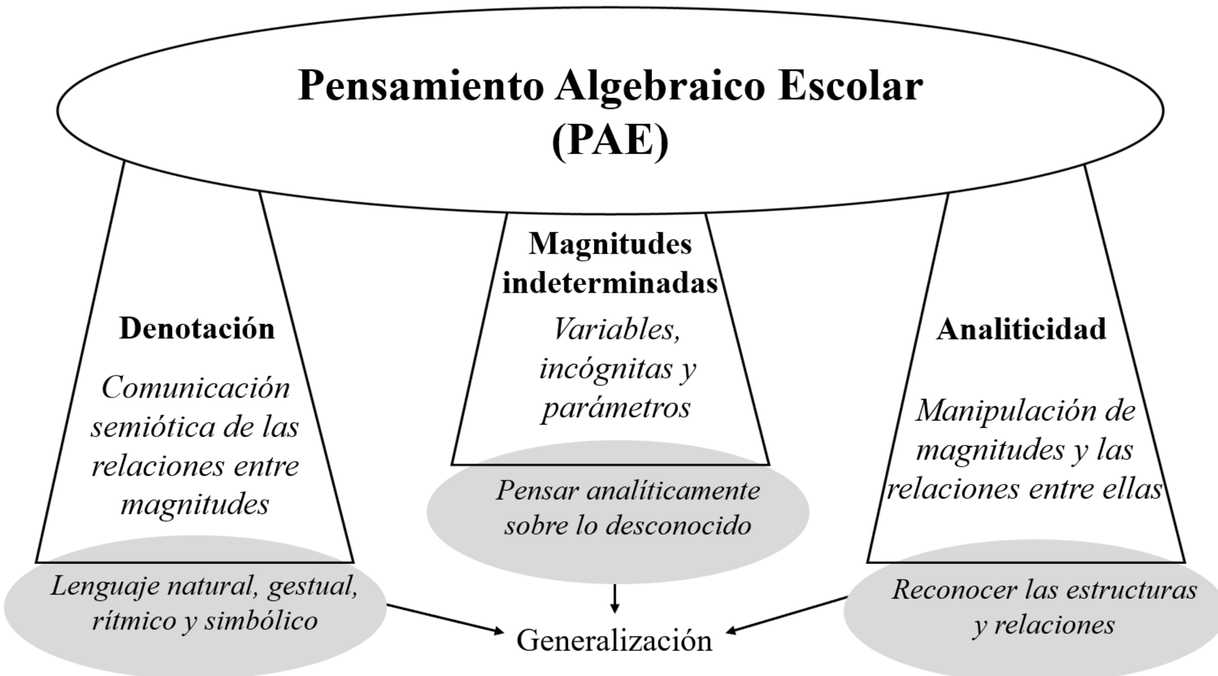
El reconocimiento de la analiticidad ejecutada por los estudiantes, permite identificar y caracterizar la manipulación, el razonamiento y las transformaciones que se generan al resolver una situación algebraica (Radford, 2014, 2021). En particular, esta condición posibilita examinar las estrategias, procedimientos y acciones en torno a las magnitudes y su denotación, lo que permite precisar si existe una ruptura epistemológica entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

En síntesis, frente a las condiciones que caracterizan el PAE (indeterminancia de magnitudes, denotación y analiticidad) no deben ser consideradas de forma disyunta, es la conjugación de las tres lo que conforman la naturaleza del álgebra escolar (Radford, 2021). Así mismo, es importante reconocer que la comprensión de las relaciones entre las magnitudes transversaliza las tres condiciones, debido a que se constituye el objeto de razonamiento en la actividad algebraica (Radford, 2021).

La Figura 1 representa la caracterización del PAE de acuerdo con Radford (2014, 2021), donde las condiciones (magnitudes indeterminadas, denotación y analiticidad) constituyen los cimientos que sostienen toda la actividad referida al Pensamiento Algebraico Escolar. Así mismo, la figura evidencia las bases a partir de las cuales se erigen las condiciones y la manera en la que se relaciona con el proceso de generalización para el investigador.

Figura 1

Caracterización del Pensamiento Algebraico Escolar



Nota. Elaboración propia de acuerdo con Radford (2014, 2021).

La Figura 1 evidencia las relaciones de las condiciones del PAE (magnitudes indeterminadas, denotación y analiticidad) con la comprensión del papel de variables, incógnitas y parámetros, la simbología empleada y la operatividad inmersa en la solución de situaciones algebraicas respectivamente. Aunque la generalización no se contemple como una condición explícita que caracteriza el PAE, es uno de los procesos derivados de la actividad algebraica, incluso se le reconoce como una manera de fomentar el PAE (Godino y Font, 2003; Radford, 2008a, 2013).

Las condiciones del PAE permiten identificar y caracterizar el pensamiento movilizado en situaciones algebraicas, de esta manera es posible reconocer el nivel de comprensión, comunicación y razonamiento de los estudiantes. No obstante, cada contexto de referencia condiciona la interacción entre el sujeto y el PAE, lo que implica concebir las particulares del sistema asociado. En este sentido, es relevante considerar los dominios matemáticos a partir de los cuales se fomenta el PAE.

2.1.2 Principales dominios matemáticos que fomentan el desarrollo del Pensamiento Algebraico Escolar

Radford (2002, 2021) advierte que el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela se fomenta principalmente a partir de dos dominios matemáticos: la generalización algebraica de patrones-secuencias y las ecuaciones algebraicas. El primer dominio implica la generalización de propiedades, características o relaciones de acuerdo con el análisis de un conjunto de elementos finitos, los cuales son comúnmente figurales o numéricos. El segundo dominio concibe la representación matemática de relaciones algebraicas a través de igualdades, donde las magnitudes son el objeto de estudio. A continuación, se profundiza en cada uno de los dominios matemáticos mencionados.

2.1.2.1 Generalización algebraica de patrones-secuencias. Concibe el reconocimiento, la generalización y la denotación de patrones-secuencias (ya sean figurales o numéricas), donde normalmente el objetivo es identificar la relación presente en el conjunto a estudiar y, a partir de su caracterización, predecir la posición o la magnitud de un término específico (Radford, 2013, 2021). Diversos investigadores (p. ej., Radford, 2010b, 2021; Rojas y Vergel, 2013; Vergel, 2015) indican que el reconocimiento de patrones-secuencias es una forma potente para iniciar el desarrollo del PAE en los primeros años escolares, dado que posibilita situaciones de cambio y de variación sin necesidad de recurrir a aspectos como la simbolización alfanumérica.

Al respecto, Radford (2013, 2015, 2021) indica la generalización de patrones-secuencias, supone una inferencia deductiva a partir de la observación de un conjunto finito de elementos inmersos en un sistema. No obstante, es importante advertir que generalizar no implica únicamente el proceso de análisis frente a las características comunes, es necesario estudiar formas de actuar y de expresar la generalidad encontrada (Rojas y Vergel, 2013). En este sentido, Radford (2013) señala que la generalización de patrones-secuencias está basada en:

- El reconocimiento de la característica o propiedad (pueden ser más de una) que es común en el conjunto estudiado, que se identifican a partir del análisis de un número finito de elementos. Este proceso se vincula con la comprensión de las magnitudes indeterminadas, dado que se requiere establecer relaciones mediante la observación de magnitudes.

- La generalización de la característica o propiedad reconocida a cualquier elemento del conjunto analizado. Este aspecto considera el razonamiento que los estudiantes establecen para identificar y comunicar la relación encontrada. Este proceso se vincula con la analiticidad, dado que esta condición permite determinar si la generalización compartida pertenece a un sistema algebraico o aritmético.
- La capacidad para deducir una expresión que permita calcular el valor, transformación o posición de cualquier término de la secuencia de acuerdo con la característica o propiedad identificada. No basta con generalizar la característica o propiedad común, se requieren formas de comunicar los cálculos, transformaciones o reglas de generalidad a través de símbolos. Este aspecto confiere a la denotación algebraica, dado que se debe expresar la relación encontrada.

2.1.2.2 Ecuaciones algebraicas. Este dominio considera la recreación y el análisis de un modelo algebraico, en el cual intervienen las relaciones entre magnitudes, la cuales pueden ser representadas a través de igualdades. Radford y Puig (2007) señalan que el propósito general de las ecuaciones es fomentar en los estudiantes una manera sofisticada de establecer relaciones de magnitudes, mediada por palabras y por símbolos. En este sentido, pensar algebraicamente a partir de ecuaciones implica que se identifiquen las relaciones entre magnitudes, que la relación sea expresada por medio de una representación semiótica, y que se lleven a cabo procesos de razonamiento basados en estructuras, operaciones y propiedades.

De acuerdo con Radford (2002), el uso de ecuaciones algebraicas en el aula debe considerar dos aspectos: i) la traducción o representación del problema a un lenguaje algebraico, y ii) la operatividad presente en el proceso de resolución de la ecuación. En este sentido, las condiciones que caracterizan el PAE permiten contemplar el proceso de comprensión, denotación y analiticidad de ecuaciones algebraicas. De forma particular, Radford (2021) indica el vínculo de las ecuaciones algebraicas y las condiciones del PAE:

- La denotación concibe la traducción o representación simbólica de las relaciones algebraicas a través de igualdades. Radford (2010a) señala tres niveles para denotar las expresiones algebraicas (factual, contextual y simbólico), los cuales permiten identificar el nivel de generalización que manifiestan los estudiantes en torno a los objetos algebraicos.

- En la traducción o representación simbólica de relaciones algebraicas, los estudiantes deben establecer relaciones entre magnitudes, de tal manera que se especifique la función de las magnitudes indeterminadas en las ecuaciones propuestas. Se vincula con la comprensión de las magnitudes indeterminadas.
- En la operatividad de las ecuaciones algebraicas interviene la directamente la analiticidad que llevan a cabo los estudiantes. Al respecto Radford (2021) señala que de acuerdo con el tipo de razonamiento llevado a cabo, puede caracterizarse la manipulación en el campo del pensamiento aritmético o algebraico.

En síntesis, considerar el desarrollo del PAE a partir de los dos principales dominios matemáticos orientados en la escuela, implica contemplar actividades orientadas a la comprensión, denotación y analiticidad de las magnitudes y sus relaciones. Los aspectos descritos hasta el momento permiten develar la naturaleza del PAE, así como el reconocimiento epistemológico del sistema para diseñar y caracterizar el pensamiento que reflejan los estudiantes al realizar intervenciones en el aula. En este sentido, el presente trabajo considera los dominios matemáticos de patrones-secuencias y ecuaciones algebraicas para el diseño de la intervención; y las condiciones del PAE, en la caracterización del pensamiento que reflejan los estudiantes.

Una vez que se reconoce la naturaleza del objeto de conocimiento y los aspectos del diseño, es preciso considerar la incidencia de los artefactos, en este caso de la RE como instrumento que mediatiza la actividad matemática. De acuerdo con Radford (2006), el carácter mediatizador del pensamiento se refiere al papel que desempeñan los instrumentos en la práctica social; por esta razón se utiliza la palabra *mediatizar* en lugar de mediar.

Radford (2006) señala que los artefactos, en este caso instrumentos, no son únicamente ayudas del pensamiento, se piensa con y a través de estos. En este sentido los instrumentos transforman la manera en la cual el sujeto se relaciona con el objeto de conocimiento (Radford, 2006, 2012), por cual se hace necesario investigar la incidencia en el desarrollo del PAE. A continuación, se examinan las implicaciones conceptuales que reporta la literatura frente el uso de la RE como instrumento en el aula de clase y, posteriormente, su influencia en el PAE.

2.2 La Robótica Educativa

En el siglo XXI las tecnologías[3] han logrado un notable protagonismo en el desarrollo de las actividades de la vida cotidiana, lo cual ha favorecido su uso en los procesos educativos (Socas, 2011). De forma reciente, se han desarrollado y explorado nuevas herramientas tecnológicas para la integración en el aula de clase como instrumentos de pensamiento, entre los cuales se observa la robótica como un recurso con potencial para fomentar el PAE (Zhong y Xia, 2020). No obstante, Warren et al. (2016) manifiestan que para integrar tecnologías digitales en el sistema escolar no basta con diseñar experiencias donde se utilicen, se requiere analizar el uso, tipo de tareas y los posibles resultados. En este sentido, el presente apartado indica elementos necesarios a contemplar para la integración de robots como instrumento mediatizador en el sistema escolar.

El término robot proviene de la palabra checa *robota* que denota trabajo, interpretándose de forma inicial como el tiempo de trabajo que un siervo otorga a su señor, acuñado por primera vez en la década de 1920 por Karel Capek en una obra de teatro. Posteriormente, el escritor de ciencia ficción Isaac Asimov, utiliza la palabra en sus escritos en los años 1940 en los que hacía referencia a máquinas que reemplazarían a los seres humanos en la ejecución de tareas sin descanso (Caballero, 2020; Villacís, 2019). Las primeras máquinas autómatas se remontan al antiguo Egipto y Grecia donde se acoplaron brazos mecánicos e hidráulicos para proporcionar movimiento a algunas estatuas que representaban a dioses (Poco, 2018; Viegas-D’Abreu y Villalba-Condori, 2017); por ello los robots se caracterizan habitualmente por la realización de movimientos repetitivos y programables.

La robótica se define como una disciplina científica derivada de la tecnología, que aborda la investigación y desarrollo de sistemas mecánicos programables para la realización de tareas de forma autónoma y en la simulación de comportamientos intelectuales, motores o sensoriales (Caballero, 2020; Poco, 2018; Villacís, 2019). La robótica ha sido empleada para una gran variedad de aplicaciones industriales, comerciales, científicas, domésticas entre otras; actualmente ha estado expandiéndose a campos y disciplinas como la medicina, construcción e incluso la educación (Caballero, 2020; Poco, 2018; Viegas-D’Abreu y Villalba-Condori, 2017; Villacís, 2019).

---

[3] En el marco de la presente investigación, se asumen como recursos tecnológicos para la enseñanza del álgebra al conjunto de herramientas denominadas como tecnologías de la información y la comunicación, las calculadoras y los ordenadores (Socas, 2011).

La robótica en el ámbito educativo ha sido denominado Robótica Educativa -RE- y se caracteriza por el diseño, ensamble y programación de un robot en el aula de clase (Bravo y Forero, 2012; López y Andrade, 2013; Villacís, 2019). Esta denominación tiene sus orígenes alrededor de la década de 1980 con trabajos de Seymour Papert en el Laboratorio del Instituto Tecnológico de Massachusetts, a través de la creación de un lenguaje de programación para niños llamado Logos (Moreno et al., 2012; Viegas-D'Abreu y Villalba-Condori, 2017). Este programa tenía como objetivo recrear un lenguaje de programación con una sintaxis similar a un lenguaje natural, pero más accesible a la comprensión de niños, jóvenes o adultos con habilidades básicas en la computación (Badilla y Chacón, 2004).

Una teoría del aprendizaje que fundamenta el uso de robots en la escuela es el *construccionismo*, en la cual a través de la creación, acción o construcción de artefactos se erigen formas de pensamiento paralelas a la construcción del mismo objeto, entre ellos conocimientos matemáticos (Badilla y Chacón, 2004; Papert y Harel, 1991). De esta manera, la relevancia del uso de la RE no radica en la construcción y programación del robot, sino en el proceso cognitivo que se produce en los sujetos al utilizar la RE (García, 2015).

En este sentido, Barrera (2015), López y Andrade (2013) y Moreno et al. (2012) precisan que las estrategias en las cuales se utiliza la RE en el aula se diferencian en dos tipos: la *enseñanza de la robótica* y la *enseñanza con robótica*. Por un lado, la *enseñanza de la robótica* se concibe como una dinámica de diseño, construcción y explicación del robot mismo, es decir, el interés principal es el aprendizaje de los componentes electrónicos y de programación asociados al robot. Por otro lado, la *enseñanza con robótica* se asume como un instrumento que dinamiza y fomenta el conocimiento de diferentes áreas del saber escolar, el cual se desarrolla a través de la experiencia de ensamblaje y programación de un robot. Este último enfoque es el que orientó la investigación.

La *enseñanza con robótica* es una propuesta educativa que propicia espacios para potenciar habilidades como la creatividad, la comunicación, las competencias digitales y la toma de decisiones a partir de datos, lo que da respuesta a los entornos y necesidades del mundo actual (Casado y Checa-Romero, 2020; Moreno et al., 2012). A su vez, se evidencia el aumento de la atención y motivación en los procesos de aprendizaje en disciplinas tradicionales como las matemáticas, ya que permite la manipulación y experimentación del material concreto en los estudiantes (Moreno et al., 2012; Reyes-González y García-Cartagena, 2014; Román-Graván et al., 2017).

Diversas investigaciones (p. ej., Araújo et al., 2017; Greenberg et al., 2020; Kim et al., 2021), sostienen que las experiencias de enseñanza con RE aportan al desarrollo práctico y didáctico de conceptos caracterizados por ser abstractos, dado que posibilita a los sujetos que interactúan con el robot diseñar, construir y verificar modelos en un plano mental y en ambientes físicos (Barranco, 2012; Bravo y Forero, 2012). En este sentido, se reconoce la integración de la RE como instrumento mediatizador que fomenta el aprendizaje de diversos contenidos curriculares al interior de las aulas de clase (Zhong y Xia, 2020).

Frente al uso de la RE en el sistema escolar, es habitual que diversos programas y planes de estudios prioricen el aprendizaje y desarrollo de habilidades orientadas a la programación y el control robótico, acompañados del pensamiento computacional (Chuang y Cheng, 2022). No obstante, al considerar las experiencias que reporta la comunidad académica, es posible reconocer tres niveles de integración de la RE con el currículo escolar. A continuación, se describen los escenarios y características que se identifica en la literatura, los cuales se tipifican de acuerdo con la incidencia en el currículo.

El primer nivel es el uso de la RE en *contextos extracurriculares*. Habitualmente se desarrolla a través de clubs, cursos, talleres o torneos en horarios no escolares. Se identifica que los entornos mencionados propenden por una enseñanza centrada en la robótica y con la finalidad de desarrollar competencias y conocimientos correspondientes a la construcción y programación de un robot. Estos espacios de aprendizaje se caracterizan por ser flexibles y con una alineación mínima a los planes de estudio (Acevedo-Zapata y Carmona-Mesa, 2021; Mubin et al., 2013). El nivel de integración curricular con asignaturas escolares es ínfimo o nulo, dado que las habilidades fomentadas se centran en la robótica y no en los contenidos del sistema escolar.

El segundo nivel es la *inclusión de la RE a través de asignaturas* como tecnología o informática y, en algunos casos, la RE es incluida en el sistema escolar como asignatura oficial (p. ej., Ocaña, 2012; Ocaña et al., 2015). El principal objetivo de este de nivel es el aprendizaje de los componentes de la robótica; sin embargo, autores como Ocaña (2012) y Ocaña et al. (2015) manifiestan que incorporar la RE en el currículo es un complemento a las áreas tradicionales como las matemáticas. La integración curricular en este nivel es parcial, debido a que las competencias desarrolladas son únicamente las que puedan ser utilizadas en la construcción y programación del robot, es decir, no se tiene el propósito de fortalecer o fomentar las competencias del sistema educativo.

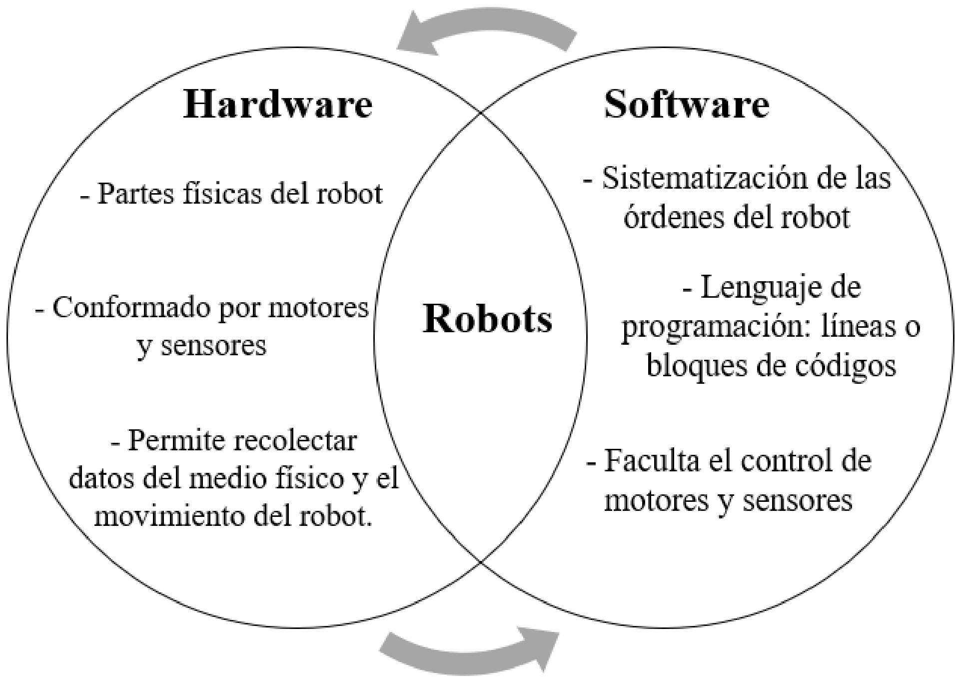
El tercer nivel es la *integración de la RE para el desarrollo de conceptos y competencias del currículo oficial*. Al respecto, Pina (2017) señala que diversas investigaciones aluden a la necesidad de diseñar e implementar un currículo que responda a los requerimientos de la sociedad actual, advierte que una manera de hacerlo es el uso de la RE en diferentes asignaturas del sistema escolar. Así mismo, Chuang y Cheng (2022) sostiene que no es suficiente con fomentar experiencias que posean una conexión mínima con el currículo o los planes de estudio, se requieren situaciones potencien habilidades en robótica y una disciplina como las matemáticas, de tal forma que se ajusten a los estándares educativos.

De esta manera, el tercer nivel permite el uso de la robótica con fines educativos del sistema escolar, debido a que se promueve de forma simultánea habilidades propias de la robótica y competencias en áreas tradicionales como las matemáticas. Este nivel de integración es el más eficaz si se desea potenciar habilidades matemáticas a partir de la RE (Chuang y Cheng, 2022). En este sentido, la presente investigación utilizó la RE como se describe en el tercer nivel de integración, a partir del diseño e implementación de una intervención de aula que contempla la RE como instrumento mediatizador para el aprendizaje del PAE en clase de matemáticas.

Frente al diseño e implementación de una intervención que integre la RE al sistema escolar, es necesario considerar los componentes que permiten la construcción de robots, como lo son el *hardware* y el *software*. El primero alude a las partes físicas del robot como motores y sensores y, el segundo, hace referencia al programa utilizado para proporcionar órdenes a los sistemas físicos. La Figura 2 expone los componentes de los robots y los aspectos que atañen a cada uno de ellos.

Figura 2

Componentes de los robots



Nota: elaboración propia.

En la actualidad diferentes empresas ofrecen paquetes de hardware y software orientados al uso en las aulas, los cuales se han denominado kits[4] de robótica. Bravo y Forero (2012) y Quiroga (2018) convergen en que los kits comerciales de robótica son una alternativa a la cual habitualmente se recurre para la implementación de la RE en el aula de clase de matemáticas, debido a que demanda conocimientos especializados en mecánica, electrónica o programación a los profesores.

Algunos de los kits más reconocidos en experiencias relacionadas con la educación matemática son Bee-Bot y Lego; sin embargo, en Medellín (contexto donde se desarrolló esta investigación) se reconoce a Pygmalion como una de las empresas que orientan sus actividades al fomento de la robótica en edades escolares de la educación básica y media. Cada uno de los kits mencionados poseen particularidades a considerar en el diseño y la implementación la RE. Por esta

[4] Conjunto de productos y utensilios destinados a un mismo fin, que se puede adquirir juntos. De forma específica los kits de robótica pueden incluir paquetes de software y hardware, no obstante puede variar de acuerdo con la empresa que ofrece el servicio.

razón, se describen a continuación las principales características reportadas, y las diferencias para su uso en las aulas de clase:

- Bee-Bot: La programación del robot se realiza exclusivamente mediante botones físicos ubicados en la parte superior, por medio de los cuales se programa el recorrido que realizará (Ferrada et al., 2019; Pérez y Diago, 2018); además sus desplazamientos se limitan a movimientos rectilíneos y giros múltiplos de 90 grados. Es un robot que, debido a la sencillez en términos de programación y construcción, posibilita el uso en las primeras edades escolares ya que no son necesarios conocimientos previos y su diseño permite programar de forma intuitiva. Las investigaciones que reportan el uso de este kit, analizan principalmente procesos de razonamiento espacial, pensamiento computacional y la resolución de problemas de desplazamiento (Diago et al., 2018; Ferrada et al., 2019; Pérez y Diago, 2018).
- Lego: Es uno de los kits más utilizados en experiencias de RE para enseñar matemáticas (Zhong y Xia, 2020). Lego desarrolla diversos kits robóticos, en los cuales es posible visualizar diferencias en las técnicas de ensamblaje y programación. Una de las características más relevantes de Lego refiere a la posibilidad de ensamblar robots altamente personalizados y de programarlos con funciones que los estudiantes deseen (Villacís, 2019). Entre las limitaciones que reportan las investigaciones se encuentra el alto costo para adquirir los kits (Abidin et al., 2021; Villacís, 2019; Zhong y Xia, 2020).
- Pygmalion: La empresa ha apoyado iniciativas como Innobótica, Semana de la Robótica y la innovación, entre otras, que se orientan al aprendizaje de la construcción y programación de robots (Ruta n, 2015). Los kits ofrecidos permiten la programación a través de líneas de códigos o por bloques de códigos (Arroyo, 2021). Sus diversas opciones de hardware posibilitan un uso de diferentes robots que se adaptan de acuerdo al público objetivo.

Respecto al uso de kits educativos, Vega-Moreno et al. (2016) reportan que introducir este tipo de hardware en el sistema escolar suele implicar un alto costo, ya que habitualmente provienen de marcas comerciales que buscan beneficios económicos mediante la compra de materiales y la capacitación de profesores. Como una alternativa que atiende a los gastos derivados de la adquisición de hardware, se destaca Arduino dado que minimiza el precio y permite su programación a través de softwares gratuitos orientados al aula de clase (Bravo y Forero, 2012; Múnera et al., 2020; Ong y Ling, 2020).

Arduino se destaca por poseer un sistema de código abierto[5], lo que implica poder acceder a recursos de programación y tutoriales orientados a la implementación en el aula de clase desarrollados por diversos actores de la comunidad educativa y científica (Plaza et al., 2018). Diferentes softwares compatibles con Arduino posibilitan que no sea indispensable conocimientos avanzados en lenguajes de programación (programación por líneas de códigos), lo que fomenta el uso de la RE en el desarrollo de diversas áreas del conocimiento como las matemáticas (Villacís, 2019).

De forma particular, algunos softwares para Arduino permiten la programación por bloques de códigos, los cuales son una tendencia en la RE, debido a que ofrecen una interfaz descrita en un lenguaje cotidiano de los sistemas de órdenes, lo que posibilita una exploración y manipulación intuitiva en los sistemas escolares (Diago et al., 2018). Estos softwares permiten que las instrucciones pre-programadas como secuencias, bucles, paralelismo y condicionales sean consideradas visualmente y, de esta manera, la sistematización de las órdenes sea evaluada en cada momento (Chuang y Cheng, 2022; Pérez y Diago, 2018). En este sentido, se destaca mBlock como software de programación por bloques acoplable a Arduino.

mBlock es un entorno de programación por bloques de códigos diseñado para un uso a nivel educativo, el cual es desarrollado por la empresa MakeBlock. Este software posibilita grabar la programación en el robot, es decir, no es necesaria una conexión continua entre la computadora y el hardware para ejecutar las órdenes preparadas por el usuario -como sucede con otras alternativas como el Scratch for Arduino- (Domínguez et al., 2018). La interfaz acoplable a Arduino permite visualizar grupos de instrucciones asociadas al movimiento, la lectura de sensores, el control, los operadores e incluso contempla la creación de variables y nuevos bloques lógicos.

De forma particular, en la presente investigación se utilizaron Arduino y mBlock como hardware y software asociados para el diseño e implementación de una intervención de clase, en la cual se analiza la integración de la RE en torno al PAE en clase de matemáticas. No obstante, para

[5] Son softwares que permiten acoplar diversos entornos de programación al sistema físico, es decir, no está anclado únicamente a las opciones de programas que pueda proporcionar el distribuidor.

integrar la RE en el currículo no es suficiente con contemplar las formas de uso (nivel de integración) y los materiales requeridos (hardware y software), es imperante que se reconozcan las implicaciones metodológicas y conceptuales de la RE como instrumento alrededor del PAE.

2.2.1 Integración de la Robótica Educativa para el desarrollo del Pensamiento Algebraico Escolar

De acuerdo con Zhong y Xia (2020), diversos estudios sugieren que la RE promueve la comprensión de los sistemas numéricos y algebraicos a través de experiencias que fomentan el conteo, el cálculo y la proporcionalidad. En este sentido, la comunidad de educación matemática ha evidenciado algunas implicaciones conceptuales y metodológicas del uso de la RE en el desarrollo del PAE (p. ej., Agatolio et al., 2018; Alsina y Acosta, 2018; Merlo-Espino et al., 2020; Zarzar y Ceballos, 2010). El presente apartado describe algunos reportes de investigaciones empíricas que analizan la influencia de la RE en el PAE.

Desde finales del siglo XX se ha explorado el aporte de la robótica y los ambientes computacionales al aprendizaje del álgebra; por ejemplo, Ursini (1996, 1997) y Zarzar y Ceballos (2010) analizan el uso del software Logo en el desarrollo de nociones de variación y simbolización. Ursini (1996) señala que la integración del software fomenta la comprensión de variables como valor general y promueve la denotación algebraica a través de simbología alfanumérica en la representación de magnitudes indeterminadas. Además, se ha identificado que el uso de Logo por parte de estudiantes, permite prescindir de ejemplos numéricos para generar o validar algoritmos de programación, de esta forma el razonamiento que se lleva a cabo es más cercano a inferencias de relaciones y estructuras algebraicas (Ursini, 1996).

Del mismo modo, Zarzar y Ceballos (2010) indican que el uso de Logo favorece la comprensión de ideas básicas de variación proporcional, el reconocimiento de patrones y la formulación de reglas que denotan generalidad. Estos autores señalan que la interacción con el software “no sólo mejora el desempeño de los estudiantes, sino también la naturaleza del aprendizaje de dichos contenidos temáticos, pues tal aprendizaje proviene de una fase de exploración y experimentación directa con los elementos matemáticos de generalización y variación” (Zarzar y Ceballos, 2010, p. 82). Aunque se reconoce que Logo aporta al desarrollo del concepto de magnitudes indeterminadas y su denotación, este software por sí solo no genera una necesidad de formalizar y generalizar las diversas nociones de magnitudes (Ursini, 1997); se requieren situaciones que propicien la construcción de relaciones de generalidad (Zarzar y Ceballos, 2010).

Así mismo, Alfieri et al. (2015) describen una experiencia que valora la integración de simuladores virtuales de robots para el desarrollo de habilidades en razonamiento proporcional. El software utilizado simula el movimiento de un robot en un mapa de tres dimensiones, en el cual se concibe el desplazamiento de acuerdo con la rotación de las llantas. Frente a los resultados, los investigadores señalan que operar en un contexto virtual elimina los desafíos que atañen al error del mundo físico en términos de las mediciones, lo que disminuye la carga cognitiva debido a que no es necesario priorizar conceptos estocásticos o métricos. Así mismo, se identifica que los entornos virtuales fomentan el uso del pensamiento matemático y reduce la posibilidad de que los estudiantes recurran al ensayo y error como método principal para determinar las relaciones proporcionales (Alfieri et al., 2015).

Las investigaciones referidas hasta el momento se caracterizan por considerar la integración de programas computacionales y robots digitales. Al respecto, Samuels y Poppa (2017) señalan que al promover experiencias de RE en entornos digitales y concretos, es común que los estudiantes evidencien preferencias por el uso de los robots físicos. En este sentido, en algunos estudios (p. ej., Agatolio et al., 2018; Alsina y Acosta, 2018; Merlo-Espino et al., 2020) integran las dos dimensiones de los robots (software y hardware) para examinar el uso de la RE en el desarrollo del PAE.

En concreto, Alsina y Acosta (2018) analizan una experiencia que integra robots físicos para fomentar el desarrollo del PAE a través de patrones-secuencias. Los autores manifiestan que la programación de las situaciones físicas permite que los estudiantes identifiquen las regularidades presentes en una situación y se fomenta su abstracción. Así mismo, al representar de alguna forma las estructuras y relaciones de los fenómenos concretos, se promueve la interacción con lenguajes simbólicos sin recurrir necesariamente a una denotación alfanumérica (Alsina y Acosta, 2018).

Al respecto, Agatolio et al. (2018) manifiestan que el uso de la RE posibilita el reconocimiento de las denotaciones alfanuméricas en función de las magnitudes indeterminadas, además de fomentar una interpretación intuitiva de las mismas. En este sentido, los investigadores señalan que la programación posee similitudes frente a la resolución de problemas matemáticos, debido a que en ambas dimensiones debe traducirse la situación a un lenguaje que posibilite manipular y comunicar el fenómeno. Si bien el uso de la RE educativa por sí sola no permite el desarrollo conceptual de las magnitudes, es posible que los estudiantes se enfrenten a situaciones donde reconozcan su denotación y se fomente un acercamiento a nociones de magnitudes (Agatolio et al., 2018).

Merlo-Espino et al. (2020) señalan que la RE es un instrumento con potencial para favorecer la comprensión de magnitudes indeterminadas como variables e incógnitas. Así mismo, los autores señalan que la interacción con los robots de manera concreta (hardware) y la programación de a través de programas (software), permite que la simbolización se fomente a partir de la denotación factual hasta la simbólica. En este sentido, se reconoce la importancia de fomentar situaciones que se desarrollen a partir de fenómenos físicos, de tal manera que los estudiantes puedan operar y verificar las relaciones a partir de lo concreto.

En consecuencia, para fomentar el desarrollo del PAE a través de la RE se evidencia la importancia de plantear desafíos reales, contextuales y concretos, que permitan a los estudiantes identificar regularidades y relaciones entre las magnitudes (Alsina y Acosta, 2018; Merlo-Espino et al., 2020). Así mismo, el uso de la RE como herramienta de aprendizaje fomenta los diferentes niveles de denotación y posibilita la comprensión de estos en contextos de físicos y de programación (Agatolio et al., 2018; Merlo-Espino et al., 2020).

De acuerdo con Alfieri et al. (2015), los entornos digitales permiten eliminar los obstáculos que atañen al error del mundo físico, aspecto que reducen la recurrencia al ensayo y error como método para resolver problemas. Este aspecto de conformidad con Radford (2021) fomenta un pensamiento algebraico y no aritmético en torno a la analiticidad presente en la resolución del problema. No obstante, Alsina y Acosta (2018) señalan que la exploración en contextos físicos permiten a los estudiantes verificar sus hipótesis y conjeturas a través del ensayo y error, y de esta forma se posibilita el análisis de la programación inmersa en el robot, lo que suscita una forma de razonar frente a los datos. En este sentido, es preciso analizar la manera en la cual la RE como instrumento, incide en la forma que en el pensamiento de los estudiantes frente a la comprensión, simbolización y operatividad del álgebra escolar.

3. Metodología

La presente investigación tiene por objetivo *analizar el Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado cuando se integra Robótica Educativa en la clase de matemáticas*. Por esta razón, las reflexiones giraron en torno a los significados, la comunicación y las interacciones que configuraron los estudiantes en términos de las condiciones del PAE (ver Figura 1) en las dimensiones del hardware y el software (ver Figura 2). Al respecto, Hernández et al. (2014) argumentan que reconocer los significados, la comunicación y las interacciones de los sujetos como insumos para el análisis de un estudio, constituye una de las características habituales en el desarrollo de una investigación cualitativa.

Al considerar que los significados, la comunicación y las interacciones son los elementos que permiten examinar el PAE cuando se integra RE, la investigación se desarrolla bajo un paradigma interpretativo; debido a que se concibe la teoría como una confluencia en y desde la praxis, donde convergen la realidad, la interpretación y la comunicación de los sujetos a través de la interacción con los demás en un ambiente determinado (Lorenzo, 2006). En particular, para identificar los significados, las interacciones y la comunicación que los estudiantes exhibieron durante las intervenciones, se reflexionó en torno a las conversaciones y producciones de los sujetos invitados a participar en la investigación (estudiantes de séptimo grado), lo que de acuerdo con Rapley (2014) implica un análisis del discurso.

Frente a la recolección de los datos, Rapley (2014) señala la importancia de suscitar espacios en los cuales sea posible analizar el fenómeno de interés en los entornos donde cotidianamente se desarrollan. Es decir, si bien es importante reflexionar en torno a las afirmaciones que los sujetos expresan a través de técnicas como las entrevistas, no es suficiente para comprender la complejidad de lo acontecido en la secuencia de actividades planteadas. En este sentido, Rapley (2014) indica la pertinencia de examinar las formas en las cuales se producen de modo *normal* o *rutinaria* las comprensiones y acciones a considerar en la investigación.

En coherencia, se fomentaron encuentros regulares en las clases de matemáticas, de tal forma que los participantes de la investigación se encontraran en su contexto habitual y se evitara generar actividades fuera de su jornada escolar regular. Para estudiar los significados, la comunicación y las interacciones que los estudiantes reflejaron durante la intervención, se propuso analizar las producciones físicas y digitales, así como el registro de grabaciones de audio - video. En particular, se llevó a cabo un *análisis de contenido* a través de la *codificación*, *categorización* y *triangulación* de los datos recolectados.

Frente al *análisis de contenido,* Gibbs (2013) indica que supone un procesamiento de los datos con la intención de lograr una transformación y no únicamente la transcripción de los mismos, en donde se reconocen dos implicaciones inherentes al análisis: el manejo y la interpretación. En consecuencia, se requiere no solo reconocer la manera en la que está dispuesta la información, sino también dotarla de un significado a nivel teórico y práctico. Por lo tanto, en la presente investigación se realizaron los procesos de *codificación, categorización* y *triangulación*, debido a que permiten gestionar, interpretar y contrastar la información obtenida en la intervención en función de las concepciones propuestas en el marco conceptual.

La *codificación* supone identificar el modo en el cual se tratan los datos obtenidos y brindar una denominación común de tal forma que compartan una misma idea (Gibbs, 2013). En este sentido, se codificaron las comprensiones, las denotaciones y la analiticidad de magnitudes y relaciones que evidenciaron los estudiantes en la intervención.

Frente a la agrupación de datos que comparten características comunes, Gibbs (2013) señala que cuando la codificación transciende lo descriptivo y se examina la información de forma más analítica o teórica, genera *categorías*. En este sentido, en el marco de la presente investigación, la codificación se vinculó a las condiciones del PAE; mientras que las categorías se relacionan con los dominios matemáticos que fomentan el desarrollo del PAE (patrones-secuencias y ecuaciones algebraicas) y las dimensiones de la robótica (Figura 2).

De forma particular, para responder a la pregunta de investigación se establecieron dos objetivos específicos: i) *diseñar una intervención de aula con Robótica educativa, fundamentada en principios epistemológicos del Pensamiento Algebraico Escolar, dirigida a estudiantes de séptimo grado,* y ii) *caracterizar la comprensión, simbolización y operatividad del Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado, al integrar la Robótica Educativa como instrumento en la clase de matemáticas.* El primero, corresponde a la elaboración de la intervención de aula (ver apartado 3.1 Intervención de aula); el segundo, refiere al análisis de la intervención en función de los *códigos y categorías a priori* que evidencia la Tabla 2.

Tabla 2

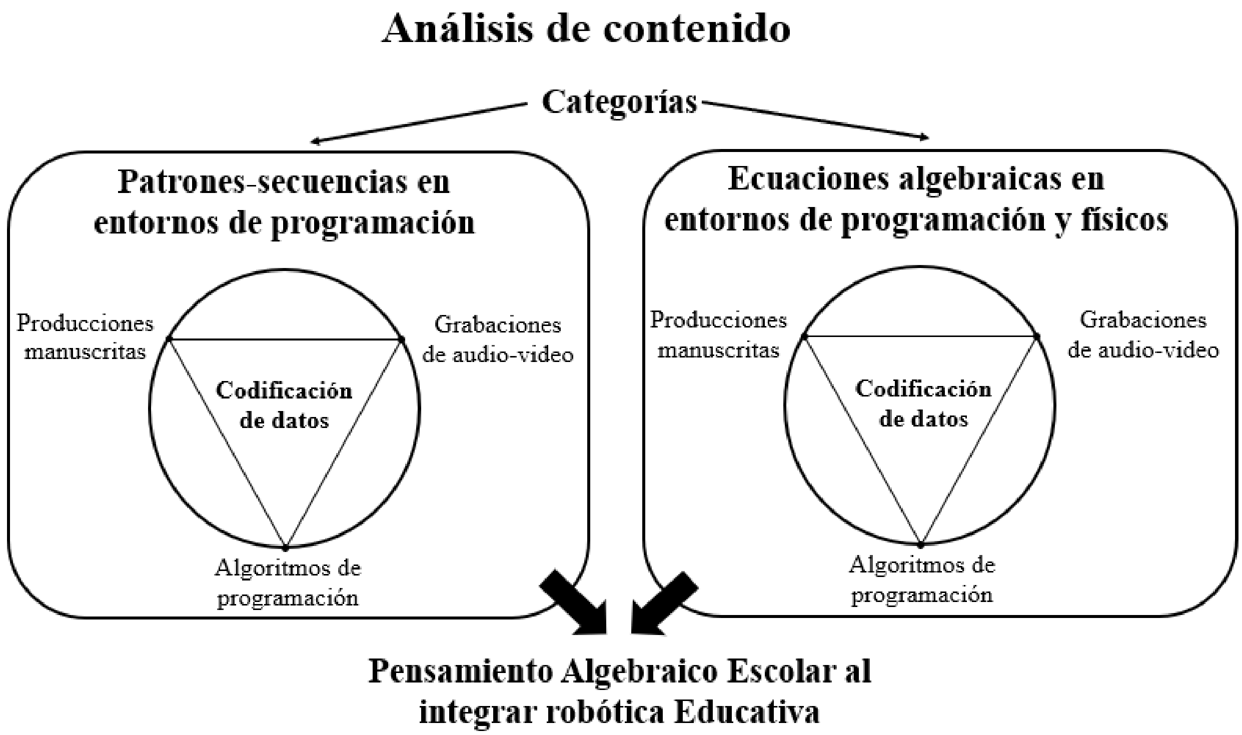
Categorías que delimitan la investigación

Segundo objetivo específico	Categorías	Instrumentos
Caracterizar la comprensión, simbolización y operatividad del Pensamiento Algebraico Escolar en estudiantes de séptimo grado, al integrar la Robótica Educativa como instrumento en la clase de matemáticas.	- Reconocimiento, generalización y denotación de patrones-secuencias algebraicas, a partir de entornos de programación (dimensión del software). - Comprensión, denotación y analiticidad de magnitudes y sus relaciones en ecuaciones algebraicas, a partir de entornos de programación (software) y físicos (hardware).	Observación participante y producción manuscrita (física o digital) u oral de los estudiantes.

Debido a que se analizan los significados, la comunicación y las interacciones de manera cualitativa, en la presente investigación se utilizó la *triangulación* como estrategia complementaria para estudiar los datos obtenidos de la experiencia empírica a partir de diferentes ángulos. De acuerdo con Aguilar y Barroso (2015) y Flick (2014), este proceso posibilita mayor control y rigor de los resultados alcanzados, dado que propicia la visualización de la información desde diversas aristas. La triangulación permite que el investigador adopte distintas perspectivas metodológicas, teóricas e, incluso una mezcla entre ellas, con un punto de confluencia sobre el problema en cuestión para determinar componentes que convergen o divergen (Flick, 2014).

En el marco de la presente investigación, se consideró la triangulación metodológica como proceso para examinar un mismo fenómeno a través de diversos ángulos. Aguilar y Barroso (2015) señala que este tipo de triangulación permite contrastar los resultados y analizar las coincidencias y diferencias entre los datos recolectados. En este sentido, se consideraron las comprensiones, la comunicación y las interacciones que evidencian los estudiantes por medio de manuscritos (físicos), algoritmos de programación (digitales) y registros de audio-video durante la secuencia de actividades. La Figura 3 representa gráficamente la forma que el investigador concibió el procedimiento analítico llevado a cabo.

Figura 3
Proceso de análisis del contenido de acuerdo con los datos obtenidos en la intervención



Nota. Elaboración propia.

Frente a la recolección de los datos se consideraron aspectos éticos para la investigación. De manera específica, se dialogó con los representantes legales de la institución, los estudiantes y sus respectivos acudientes acerca del propósito del estudio, los métodos de recolección de la información, el manejo de los datos y la confidencialidad que se brinda a los participantes. Esta consideración se realizó con la intención de evitar acciones que atentaran contra la integridad de los estudiantes, además de proporcionar transparencia en todo el proceso investigativo (Creswell, 2012).

En primer lugar, se explicó al Rector y Coordinador de la institución el propósito y las implicaciones de llevar a cabo la intervención de aula. En segundo lugar, el investigador principal (docente del área en el grado que se implementó) informa a los estudiantes y acudientes acerca de la posibilidad de participación en el proyecto. En tercer y último lugar, es tramitado el consentimiento informado con los acudientes de los estudiantes, para que de manera voluntaria realizaran las preguntas pertinentes del proceso y de ser el caso, expresaran su autorización a través de un *Consentimiento informado* (Anexo 1).

3.1 Intervención de aula

La intervención se llevó a cabo en una institución que presta el servicio educativo a estudiantes por cobertura[6] y privado de forma mixta; se encuentra ubicada en la comuna tres de la ciudad de Medellín y contaba con 34 estudiantes matriculados en grado séptimo para el año escolar 2022 (con edades entre los 11 y 14 años). Las actividades se realizaron durante las clases regulares de matemáticas, con una extensión total de ocho horas de clase. En el presente apartado se exponen los retos y desafíos que conforman la intervención, se precisan los objetivos de los mismos y se menciona la codificación de los equipos a partir de los cuales se presentan los resultados.

En la génesis del proceso de implementación, se presentó un contexto ficticio de aplicación denominado “Trabajar con la COES[7]”, el cual tenía como objetivo suscitar un ambiente de juego de roles con los estudiantes. La situación inició con una carta de invitación (Anexo 2) para la conformación de los *Equipos de automatización*, con la que se pretendía incentivar la participación en los retos, además de generar un espacio para organizar grupos de trabajo de tres o cuatro integrantes. A partir de la carta, se configuraron nueve equipos, a los cuales se citó en la sala de sistemas para realizar los retos.

Cada reto está conformado por diversos desafíos que permiten favorecer habilidades de programación y construcción de los robots, además de promover los dos principales dominios matemáticos del PAE (secuencias-patrones y ecuaciones algebraicas). La Tabla 3 presenta la estructura de la intervención, en la cual se específica la cantidad de desafíos, duración, dominios matemáticos y dimensiones de los robots implicados en cada reto.

[6] El servicio educativo de cobertura en Colombia consiste en una subcontratación que realiza la Entidad Territorial con empresas privadas para alcanzar niveles óptimos de cobertura educativa. Regularmente esta acción se realiza debido a la poca o nula presencia de establecimientos educativos públicos para garantizar el acceso a los niveles educativos básico o medio.

[7] La COES en el marco de las intervenciones hace referencia a la Agencia Colombiana en el Espacio, creada por el investigador para dinamizar los retos planteados y proponer un juego de roles a los estudiantes.

Tabla 3
Estructura de la intervención

Reto	Duración	Estructura del reto	Dominios matemáticos promovidos en la intervención	Dimensiones de la robótica
Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor	3 horas	21 desafíos de programación por bloques[8], distribuidos en tres escenarios. - *Mundo Salvaje*: 4 - *Planeta Arte*: 8 - *Mundo Gélido*: 9	Patrones-secuencias.	Software
Misión siembra en Marte	5 horas	4 desafíos denominados: - *Automatizar desde la tierra* - *Compartir lo aprendido* - *¡COES, tenemos un problema!* - *Compartir la ruta*	Ecuaciones algebraicas	Software y Hardware

Nota. Elaboración propia.

El primer reto "Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor", procura fomentar y fortalecer habilidades de programación por bloques y caracterizar el reconocimiento, la generalización y la denotación de patrones-secuencias inmersas en la construcción de algoritmos computacionales. Los estudiantes accedieron por medio de las computadoras a la guía de trabajo (Anexo 3), en la cual se proponen los softwares y desafíos que atañen al reto.

Para el desarrollo de este reto, cada Equipo de automatización se dividió en dos subgrupos con el objetivo de fomentar mayor interacción de los estudiantes con los softwares propuestos. Al finalizar los encuentros, los estudiantes enviaron las evidencias de solución (pantallazos de la

[8] Se denomina programación por bloques a los softwares que permite a los usuarios arrastrar y manipular ordenes pre-programadas, donde la interfaz se presenta en un lenguaje cotidiano y en el idioma que se prefiera (Pérez y Diago, 2018).

programación) a través de la plataforma institucional, datos que constituyen componentes clave en el análisis de la información (producción digital).

Los softwares utilizados en el primer reto, se caracterizan por poseer entornos de programación que movilizan la construcción de algoritmos computacionales por bloques. Cada desafío propuesto contempla indicaciones, ruta a programar, bloques de programación disponibles y zona de construcción de algoritmos. La Figura 4 ejemplifica la interfaz de los softwares utilizados.

Figura 4
Ejemplo de los escenarios inmersos en el primer reto

Nota: los softwares utilizados en este reto no pertenecen a la autoría del investigador, corresponden a una propuesta educativa online que promueve *Pilas bloques*[9].

[9] Es una aplicación que permite enseñar y aprender a programar por medio de bloques. Es desarrollado en Argentina desde la iniciativa Program.AR de la Fundación Sadosky. Enlace: https://pilasbloques.program.ar/

Las indicaciones son las pistas en texto escrito que presenta el desafío. Los bloques de programación disponibles representan las acciones que permite cada desafío, y pueden variar debido a que están sujetos a las particularidades del desafío. La zona de construcción del algoritmo computacional constituye el espacio donde los estudiantes establecen los bloques de programación a utilizar y ejecutar en el software. El escenario a programar representa gráficamente el desafío.

Una característica para destacar de los softwares es que al dar click sobre el botón ejecutar, este efectúa el algoritmo de programación que se encuentre en el bloque *al empezar a ejecutar*. Este componente es de suma importancia al interior del programa y la interacción con los sujetos, debido a que permite a los estudiantes verificar el algoritmo de programación y observar paso a paso lo que se ejecuta. De esta manera, los participantes pueden tomar acciones de acuerdo con la ejecución de los bloques y modificar el algoritmo conforme a sus intereses o necesidades de los desafíos.

El segundo reto, "Misión siembra en Marte" (Anexo 4) se caracterizan los procesos de comprensión, denotación y analiticidad de las magnitudes y sus relaciones en ecuaciones algebraicas a través de la automatización de un robot. En este reto, los subgrupos se fusionaron nuevamente, es decir, se reunieron de acuerdo con el registro inicial de los *Equipos de automatización* en la carta de invitación. En la Misión siembra en Marte se solicita a los estudiantes programar un chasis que simule un automotor. La Figura 5 es un modelo de los chasis robóticos construidos[10] por los estudiantes en la intervención que tuvo lugar a partir de la presente investigación.

[10] Los chasis fueron construidos por los estudiantes con orientaciones del profesor en clases del área de *Tecnología e informática* de la institución. Este aspecto no es ahondado en la investigación, dado que se buscó considerar la automatización del robot en relación con el PAE.

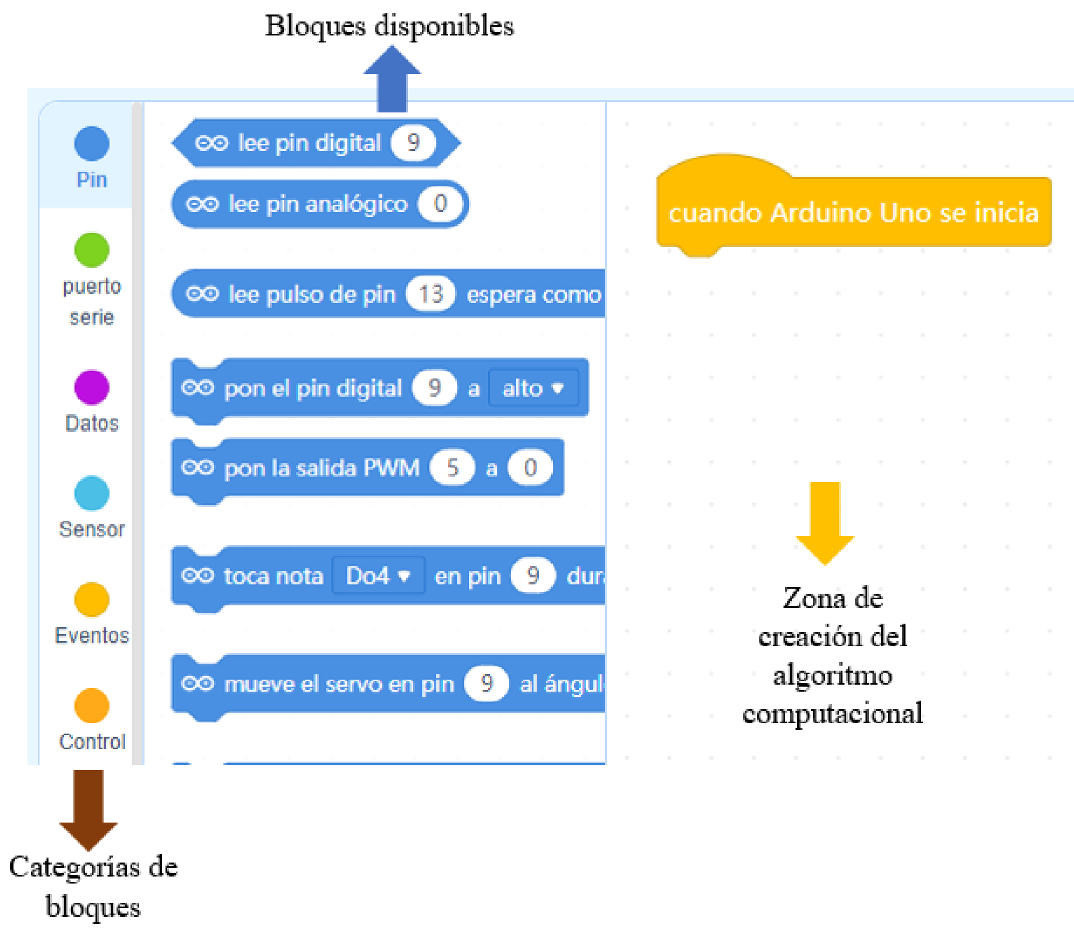
Figura 5.

Modelo de chasis robótico utilizado en el reto "Misión siembra en Marte"

Nota: la imagen corresponde a una fotografía que realizó el investigador a uno de los chasis construidos por los participantes de la intervención.

Para programar y automatizar el chasis robótico utilizado en la intervención (ver Figura 5), se utilizó el software mBlock (versión 5.3.0). Este software posibilitó la programación a través de bloques, de esta forma la construcción de los algoritmos computacionales fue muy similar al primer reto, donde se crean algoritmos computacionales a partir de bloques lógicos. La interfaz de mBlock está conformada por bloques disponibles, zona de construcción del algoritmo computacional y *categorías de bloques*; este último, se constituye como un nuevo parámetro a considerar dentro a la interacción con el software (Figura 6).

Figura 6
Interfaz del software mBlock

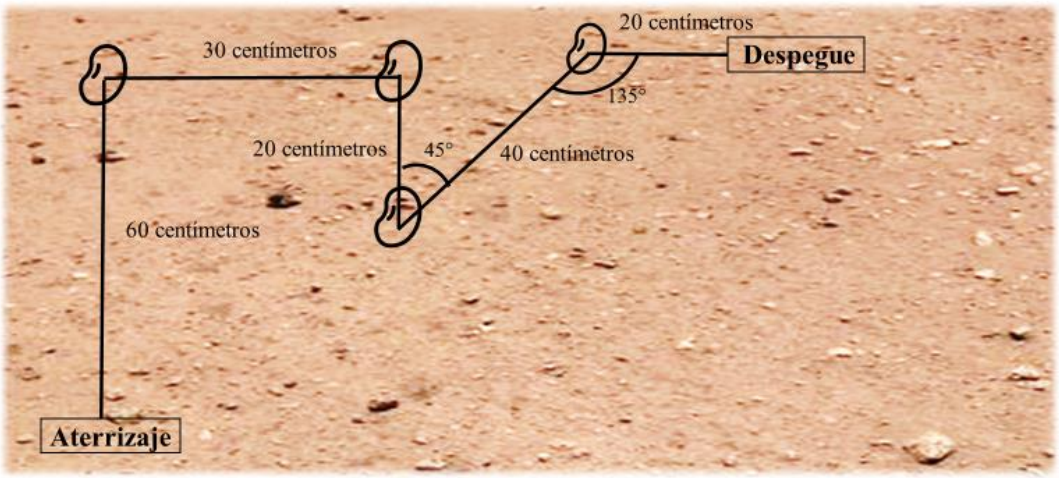


Las *categorías de bloques* corresponden a una agrupación de acciones en torno a las funciones que desempeñan al interior del software, por ejemplo, en la categoría *sensor* se encuentran los bloques que posibilitan controlar los sensores acoplados al hardware. Los bloques de programación disponibles representan las acciones que se pueden usar de cada categoría. La zona de construcción del algoritmo computacional constituye el espacio donde los estudiantes establecen los algoritmos computacionales en bloques que permiten automatizar el robot.

Respecto a los desafíos propuestos en el reto Misión siembra en Marte, estos se caracterizan por solicitar a los equipos el desplazamiento del robot en función de mapas y especificaciones técnicas. En este sentido los estudiantes debían construir algoritmos computacionales para automatizar el recorrido, y a partir del movimiento del robot en el entorno físico, verificar si cumplía con las condiciones descritas en el reto. La Figura 7 presenta uno de los mapas que los estudiantes debían automatizar; la zona de *Aterrizaje* corresponde al lugar donde inicia el chasis robótico su recorrido, y el lugar de *Despegue* es la meta (esta acepción pertenece a la situación de expedición espacial).

Figura 7

Mapa para programar en el desafío Automatizar desde la tierra - reto Misión siembra en Marte



Nota. Elaboración propia.

Frente a la automatización del robot, es preciso indicar que, aunque las magnitudes del mapa estén en términos de *distancia*, el software mBlock solo permite modificar el algoritmo computacional en magnitudes de *tiempo*, de esta manera los participantes deben determinar la relación existente entre ambas magnitudes. Por ejemplo, la Figura 8 corresponde al algoritmo computacional que utilizó el investigador para programar el desplazamiento rectilíneo de un robot por 60 cm.

Figura 8

Algoritmo computacional construido por el investigador para realizar recorrido de 60 cm

Nota. Captura de pantalla del algoritmo computacional construido por el investigador.

Para programar los desplazamientos del chasis robótico, se solicitó a los *Equipos de automatización* que construyeran un algoritmo computacional desde cero, con la expectativa que generaran uno similar al presentado en la Figura 8. De forma particular, el análisis de los desafíos se centra en las magnitudes de tiempo asignadas por los estudiantes a los bloques *espera* ___ *segundos*, los diálogos que se generaron en torno a la asignación de valores de los mismos y las producciones escritas asociadas a los desafíos del reto.

Es de anotar que, aunque la velocidad de cada chasis robótico es constante a lo largo del reto, la magnitud puede variar entre los diferentes robots construidos por los *Equipos de automatización*. Esto se debe a que aspectos como la fricción, el voltaje y el ensamblaje generan condiciones particulares en los robots. En consecuencia, si se comparan algunos algoritmos de los estudiantes es posible que no coincidan en las magnitudes de tiempo, pero la programación corresponda con el desplazamiento en distancia.

En suma, en el primer reto "Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor" procura analizar el reconocimiento, la generalización y la denotación de patrones-secuencias algebraicas en la construcción de algoritmos computacionales (software). El segundo reto, procura examinar la comprensión, la denotación y la analiticidad de magnitudes y sus relaciones en ecuaciones algebraicas, a partir de entornos de programación (software) y físicos (hardware).

Frente a los datos para el análisis de la intervención, estos pertenecen a los 34 estudiantes participantes de la investigación; no obstante, se seleccionan las respuestas e intervenciones de tres de los *Equipos automatizadores* (11 estudiantes), al considerar la regularidad de asistencia, el consentimiento informado de los acudientes y la representatividad de los datos respecto al grupo en general. La Tabla 4 presenta el nombre, subdivisión y codificación asignada a los Equipos de automatización que hacen parte de los análisis.

Tabla 4

Equipos de automatización que conforman el análisis de producciones y grabaciones

Nombre del Equipo automatizador	Codificación por grupo	Grupos reto 1	Grupos reto 2
Equipo 1 (E1)	Para referir a un integrante del Equipo 1, se utiliza el código E1. número del integrante, los cuales van de E1.1 hasta E1.4.	Cada equipo se subdivide en dos grupos de dos integrantes cada uno. Si el equipo tenía tres integrantes la subdivisión se realizó dos estudiantes en un grupo y el restante solo.	Participan todos los integrantes en un mismo equipo
Equipo 2 (E2)	Para referir a un integrante del Equipo 2, se utiliza el código E2. número del integrante, los cuales van de E2.1 hasta E2.4.		
Equipo 3 (E3)	Para referir a un integrante del Equipo 3, se utiliza el código E3. número del integrante, los cuales van de E3.1 hasta E3.3.		

Por un lado, la subdivisión de los grupos en parejas o de forma individual en el primer reto obedece a los propósitos de interacción que debían gestarse con los softwares, dado que se esperaba que todos los participantes lograran interactuar con los programas y de esta manera se posibilitara la adquisición de habilidades relacionadas con la construcción de algoritmos computacionales. Por otro lado, para el segundo reto los *equipos de automatización* constituidos a partir de la carta de invitación (ver Anexo 2), vuelven a configurarse en grupos de 3 o 4 estudiantes.

La configuración de 3 o 4 estudiantes para el segundo reto se debe a que diversas investigaciones (p. ej., Cuevas y Martínez, 2018; Jiménez et al., 2011; Llorente et al., 2019;

Nevárez-Toledo, 2016) configuran las experiencias empíricas con este número de integrantes. Así mismo, se observa que este número de integrantes por grupo posibilita que los estudiantes interactúen con el robot, además posibilita la interacción entre compañeros para superar los desafíos propuestos. En el siguiente capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos en el trabajo de campo.

Capítulo 4
Análisis de datos y resultados

Para examinar la información recolectada durante la intervención, se contemplaron los retos enunciados en la Tabla 4 y las categorías descritas en la Tabla 3. El análisis de la información se subdivide en las categorías en función de los dominios algebraicos propuestos en la intervención (secuencias-patrones y ecuaciones algebraicas) y las dimensiones de la RE. Los datos obtenidos se analizan en función de las condiciones que caracterizan el PAE (Ver Figura 1) de forma simultánea, dado que la conjugación de las tres es lo que permite reflexionar en torno al PAE de los estudiantes (Radford, 2014; 2021).

Para cada reto se consideran como fuentes de datos los algoritmos de programación (producción digital), la producción manuscrita y las grabaciones de audio-video. Así mismo, para el análisis de cada categoría se especifican los desafíos considerados en cada reto y se señalan las razones por las cuales el investigador selecciona cada desafío.

4.1 Reconocimiento, generalización y denotación de patrones-secuencias algebraicas en la construcción de algoritmos computacionales

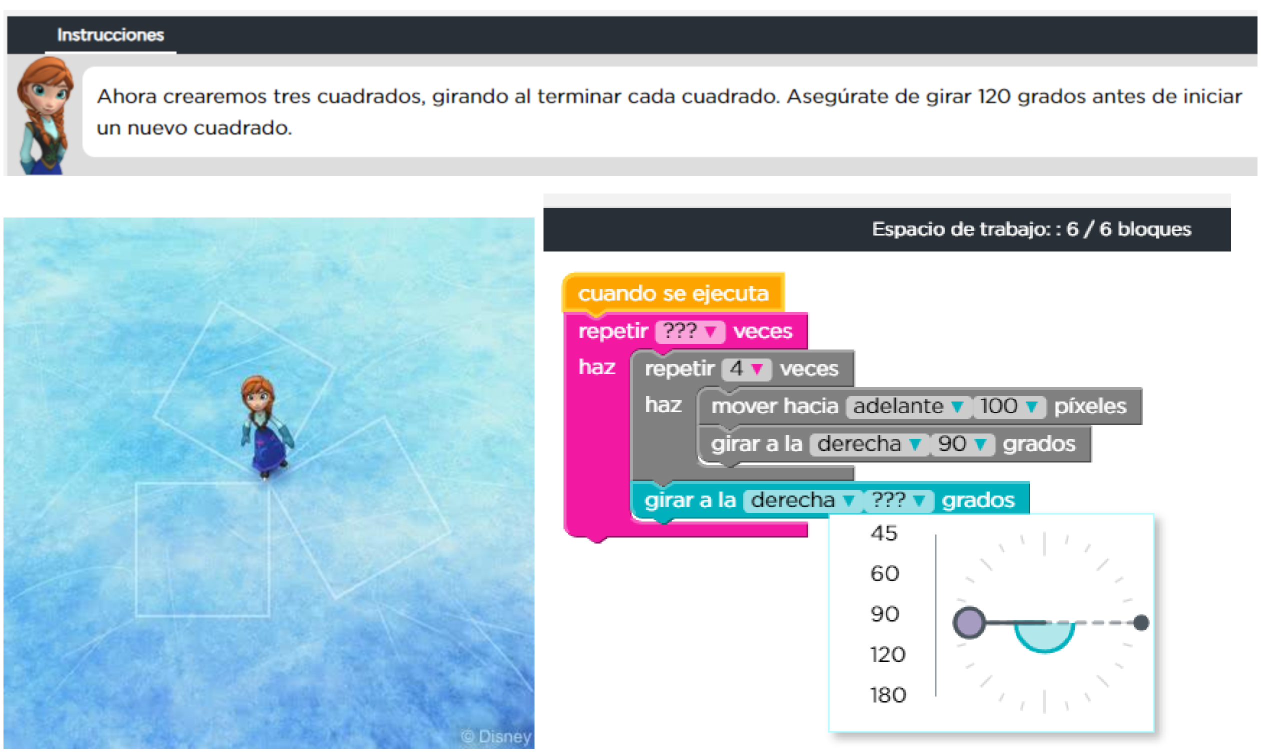
El reto "Entrenamiento en la galaxia *Enana del Can Mayor*" constituye la unidad central de análisis en torno a la incidencia de la dimensión del software en los procesos de reconocimiento, generalización y denotación de patrones-secuencias. El reto estaba constituido por tres escenarios: *Mundo Salvaje, Planeta Arte y Mundo Gélido* (ver Anexo 3); los cuales posibilitaban reconocer la lógica de programación por bloques y examinar las condiciones del PAE en patrones-secuencias durante la construcción de algoritmos computacionales.

Aunque las características de los escenarios posibilitaban que los estudiantes construyeran algoritmos computacionales, los desafíos de *Mundo Salvaje y Planeta Arte* permiten una mayor interacción de los estudiantes con los *bloques de programación disponibles* y *la zona de construcción del algoritmo*. En consecuencia, los participantes podían plantear diversos algoritmos computacionales y, a partir de la ejecución del software, modificar el algoritmo de ser deseado o requerido. Este factor propició que los equipos encontraran diversas soluciones a un mismo desafío.

Por otro lado, *Mundo Gélido* es un software que comparte aspectos procedimentales en cuanto al manejo e interfaz de *Mundo Salvaje* y *Planeta Arte*; no obstante, la mayoría de los desafíos proponían un conjunto de bloques de programación preconstruidos. La configuración del software fomenta principalmente la exploración de magnitudes, debido a que incentiva completar los algoritmos computacionales a partir de la asignación de valores determinados a los bloques preconstruidos. La Figura 9 muestra un ejemplo de la interfaz del programa y corresponde al desafío 4.

Figura 9

Ejemplo de interfaz de los escenarios de Mundo Gélido



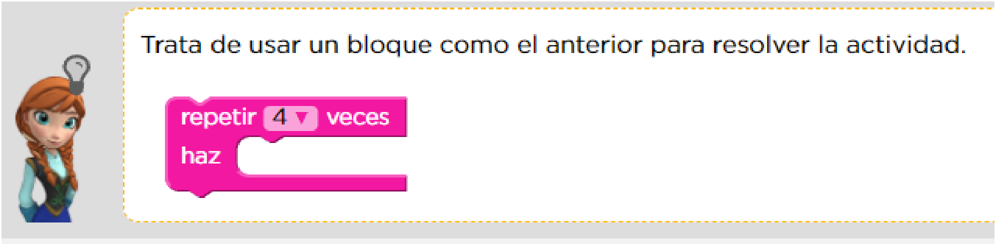
Nota: la figura corresponde a capturas del desafío 4 de Mundo Gélido.

Para superar el desafío 4 (Figura 9) los estudiantes solo podían modificar *repetir ??? veces* y *girar a la derecha ??? grados*. Los participantes debían asignar la magnitud determinada de *3* al primer bloque y de *120* al segundo; no obstante, la interacción con otros bloques de programación o reorganización de los mismos es limitada en el software.

Si los estudiantes no registraban las magnitudes de *3* y *120* respectivamente a los bloques de programación, el software orientaba la asignación de la magnitud a través de mensajes que aparecian posterior al primer error. Esta opción permitía que los participantes seleccionaran si deseaban la ayuda del programa, por ejemplo: ¿*Quieres una pista?*. De ser afirmativa la respuesta, el sotfware generaba una pista tal y como se evidencia en la Figura 10.

Figura 10

Ejemplo de pista que proporciona el programa de Mundo Gélido



Nota: La Figura corresponde a una pista que genera la interfaz posterior a errar en la primera ocasión.

A pesar de que la opción de *pista* posibilita a los estudiantes avanzar de manera autónoma sin requerir explicaciones por parte del profesor, la limitada interacción con la zona de *bloques de programación disponible para el desafío* posterior al primer error suscitó que los participantes recurrieran a las recomendaciones del programa de forma constante. Este aspecto generó que los estudiantes no ahondaran en las razones que causaban los errores en los algoritmos computacionales.

De acuerdo con Alfieri et al. (2015), las recomendaciones del software reducen la posibilidad de que los estudiantes recurran al ensayo y el error; aspecto que señala Radford (2021) como característico del pensamiento aritmético. No obstante, también limitaron la interactividad de los estudiantes en torno a la construcción de algoritmos computacionales, lo que restringió procesos de razonamiento implícitos en los argumentos que justificaban por qué el algoritmo computacional falló.

De esta forma, en el proceso de análisis de la primera categoría se consideran únicamente los datos derivados de los dos primeros escenarios, dado que permiten valorar los niveles de complejidad en los procesos de reconocimiento, generalización y denotación de patrones-secuencias computacionales. No es considerado el tercer escenario debido a que las sugerencias y las opciones de construcción del algoritmo del software limitaron los procesos de razonamiento del PAE en los estudiantes. En particular, se contempla la experiencia empírica de los estudiantes en la solución de los desafíos 2, 3 y 4 de *Mundo Salvaje* y el desafío 6 de *Planeta Arte*, dado que permiten comparar e informar la incidencia del uso del software en la construcción de patrones-secuencias computacionales.

Es necesario precisar que, si bien el escenario de *Plantea Arte* posee 8 desafíos, los dos primeros están orientados al aprendizaje de la programación por bloques. Además, los desafíos 3, 4 y 5, poseen una estructura idéntica a los desafíos de *Mundo Salvaje* en cuanto al reconocimiento, denotación y generalización de patrones-secuencias, por lo cual sería redundante analizarlos. Por último, los desafíos 7 y 8 representan situaciones similares a las construidas hasta el momento, por lo cual la mayoría de los equipos superan el desafío de forma ostensible y no se generan conversaciones o discusiones en torno a su solución. En este sentido, dado que la investigación indaga por los niveles de denotación factual, contextual y simbólico, se examinan las actuaciones como los gestos, los movimientos, los ritmos o la actividad perceptual, así como las expresiones comunicativas como las deícticas y los símbolos utilizados (Radford, 2010a).

En tal sentido, a continuación, se examinan los datos relacionados con los desafíos 2, 3 y 4 de *Mundo Salvaje* y el desafío 6 de *Planeta Arte*. Frente al escenario de *Mundo Salvaje*, los estudiantes debían construir un algoritmo computacional que permitiera a la *Puma* (representación pictográfica encerrada en un círculo amarillo en la Figura 11) desplazarse hasta el *churrasco* (representación pictográfica encerrada en un círculo rojo en la Figura 11). De forma particular, la Figura 11 representa el escenario y los bloques disponibles para el desafío 2 de *Mundo Salvaje*.

Figura 11

Desafío 2, Mundo Salvaje – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Nota. Captura de pantalla del software de programación.

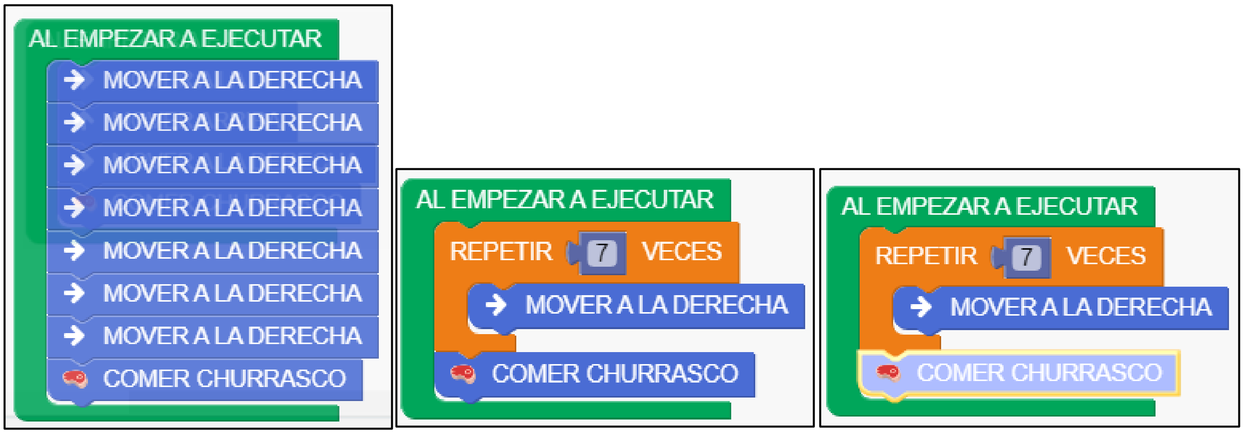
Para superar el desafío planteado en la Figura 11, los estudiantes debían identificar la distancia (magnitud en cuadrados) que había entre la *Puma* y el *churrasco*. Además, el escenario proponía una condición adicional a través de la pregunta: "¿Puede la Puma llegar al churrasco usando solo una vez el bloque mover?". Este aspecto promueve el uso del bloque *repetir "10"*[11] *veces* (representación pictográfica encerrada en un óvalo verde en la Figura 11).

El bloque *repetir_ veces* constituye un componente relevante para expresar (denotar) la generalización de un patrón o secuencia en el software este sentido, se examinan las estrategias de los participantes para reconocer el patrón, la manera en la cual integran el bloque repetir en los algoritmos computacionales construidos como forma de denotación y el proceso analítico asociado a la actividad, aspectos que de acuerdo con Radford (2013) permiten caracterizar la actividad algebraica asociada a los patrones-secuencias. La Figura 12 corresponde a los algoritmos computacionales de E1, E2 y E3, los cuales presentan diferencias en términos de su denotación y cantidad de bloques utilizados.

[11] Este número constituye en el software un pulsador que puede modificarse por un número Natural que el usuario indique.

Figura 12

Algoritmos de programación realizado por los equipos E2 (izquierda), E1 (centro) y E3 (derecha) para el desafío 2 del Mundo Salvaje



Nota. Algoritmo computacional básico (izquierda) y sofisticados (centro y derecha).

Por un lado, al considerar la programación de los integrantes de E2 (Figura 12, izquierda), se observa que los estudiantes cumplen parcialmente el desafío, debido a que el algoritmo construido permite ejecutar la orden principal (llevar a la *Puma* a comer el *churrasco*), pero no satisface la condición de utilizar una vez el bloque "mover" (Figura 11). E2 utiliza el bloque *mover a la derecha* 7 veces y no se evidencia el bloque *repetir _ veces* en la solución propuesta. De acuerdo con Radford (2013), cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a contextos de generalización algebraica, no es sorprendente que surjan dificultades. En este sentido, se evidencia que los integrantes de E2 no utilizaron el bloque repetir, en principio porque era la primera vez que estaba disponible, por lo cual no fue asumido como una posibilidad. En este caso, el algoritmo no cumplió con una de las condiciones (utilizar el bloque *mover a la derecha* una vez), pero permitió que los estudiantes avanzaran a los siguientes desafíos.

Por otro lado, al examinar los algoritmos computacionales de E1 y E3 (Figura 9, centro y derecha), se observa que los estudiantes utilizan el bloque *mover a la derecha* una vez y complementan la programación con el bloque *repetir 7 veces*. En este sentido, de acuerdo con Radford (2013), E1 y E2 hicieron una determinación sensible, la cual estaba asociada a fijar la atención en la cantidad de cuadros que hay desde la Puma hasta el churrasco y notar la similitud que representaba la construcción del algoritmo computacional. Así mismo, es de anotar que el algoritmo computacional construido por E1 y E3 cumplen con las condiciones que el desafío plantea, comer el churrasco y utilizar solo una vez el bloque mover.

La inclusión del bloque repetir por parte de los equipos E1 y E3 en el algoritmo computacional, evidencia que los participantes reconocen el patrón *mover a la derecha* y lo denotan al emplear el bloque *repetir _ veces* para formular una secuencia. Estos componentes permiten señalar que los estudiantes llevan a cabo una generalización, dado que aplican la propiedad común a los términos subsecuentes y utilizan una expresión directa que configura la situación (Radford, 2013; Vergel, 2015). Así mismo, es preciso indicar que el algoritmo construido es el más sofisticado que puede generarse en el desafío 2, lo que evidencia que la generalización elaborada es la más refinada posible. En lo que compete a la solución de los desafíos 3 y 4 de *Mundo Salvaje* de los estudiantes de E1 y E3, estos sostienen este tipo de razonamientos, donde se recurre a la denotación de patrones en secuencias computacionales que contienen el bloque *repetir _ veces*.

Al considerar las razones por las cuales los integrantes de E2 no denotaron la generalización del patrón *mover a la derecha* con el bloque *repetir _ veces*, se recurrió a las grabaciones de audio-video. La Tabla 5 presenta el diálogo llevado a cabo por los estudiantes de E2 al momento de construir el algoritmo computacional del desafío 2 de *Mundo Salvaje*.

Tabla 5
Diálogo E2 para solucionar el desafío 2, Mundo Salvaje – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Diálogo subgrupo E2	Interpretación del investigador
E2.1: contemos… E2.1 y E2.2: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.	Estrategias que permiten reconocer la característica común. Determinación sensible.
E2.2: uno… dos… tres… cuatro… listo, comer churrasco	Expresiones utilizadas mientras se construye el algoritmo de programación.
Ejecutan la programación a través del botón “Ejecutar”. E2.1: se podía darle repetir.	Declaración que evidencia el reconocimiento de la generalidad y su posible denotación a partir del bloque *repetir _ veces.*

La Tabla 5 permite evidenciar que, aunque se llevaron a cabo estrategias que favorecen el reconocimiento de la característica común, no se generó una denotación a través del algoritmo computacional que evidenciara la generalización. De acuerdo con Rojas y Vergel (2013), la generalización es un proceso que se caracteriza por los medios que los sujetos utilizan para reconocer y denotar la generalidad, y es indispensable contar con formas de expresarla. En este sentido, es posible que los estudiantes reconocieran el patrón, pero como era la primera vez que el bloque *repetir _ veces* estaba disponible, los participantes no consideraron el bloque repetir como una manera de expresar la secuencia a través de la programación.

Así mismo, la forma en la que los estudiantes agrupan el conteo (Tabla 5), permite evidenciar que fijaron la atención en la cantidad de cuadrados que poseen el mismo bloque computacional (*mover a la derecha*). En este sentido, en E2 se adoptaron estrategias que posibilitaban hacer una determinación sensible de la característica común (Radford, 2013). No obstante, los integrantes de E2 no expresaron el patrón de forma generalizada a través de una secuencia computacional que implicara el bloque *repetir _ veces*.

Al considerar la manera en la cual los estudiantes utilizaron el software, es fundamental reflexionar en torno a la ejecución del algoritmo computacional. Cuando los estudiantes presionaron click sobre el botón *Ejecutar* (ver Figura 4), el software permitió visualizar paso a paso el algoritmo construido en la *zona de construcción del algoritmo computacional*; además se produjo el aviso "*Tu programa no es el único que resuelve el problema. ¡Existen otras soluciones! ¿Estás usando los conceptos bien?".*

De acuerdo con la ejecución y el mensaje que genera el programa, se provocó la declaración registrada en la Tabla 5 por parte de los estudiantes "se podía darle repetir". Esta afirmación permite evidenciar que los integrantes de E2 concibieron la generalización algebraica a partir de su posible denotación. En este sentido, el software posibilitó que los participantes de E2 tomaran conciencia de la propiedad común (mover a la derecha), generalizaran la propiedad a los términos subsecuentes (otros seis) y dedujeran una expresión directa que permitiera denotar dicha situación (enunciar el uso del bloque *repetir _ veces*); de acuerdo con Radford (2013) lo anterior corresponde a los componentes de la generalización algebraica de patrones.

Los desafíos 3 y 4 de *Mundo Salvaje* (Figura 13) también representaban escenarios en los cuales podían denotarse patrones en términos del desplazamiento de la Puma a través de secuencias computacionales. La Figura 13 representa pictográficamente los desafíos y los bloques de programación disponibles.

Figura 13

Desafíos 3 y 4, Mundo Salvaje – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Nota. Escenarios de los desafíos 3 (izquierda) y 4 (central), y los bloques de programación disponibles en ambos escenarios (derecha).

Examinar los diálogos suscitados entre los estudiantes de E2 al interactuar con sus compañeros y el software en los desafíos 3 y 4 de *Mundo Salvaje*, permite considerar los procesos de pensamiento llevados a cabo por los estudiantes (Radford, 2006). De forma particular, la Tabla 6 evidencia las conversaciones de E2 al enfrentarse a los desafíos propuestos.

Tabla 6

Diálogos Equipo E2 para solucionar los desafíos 3 y 4 de Mundo Salvaje – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

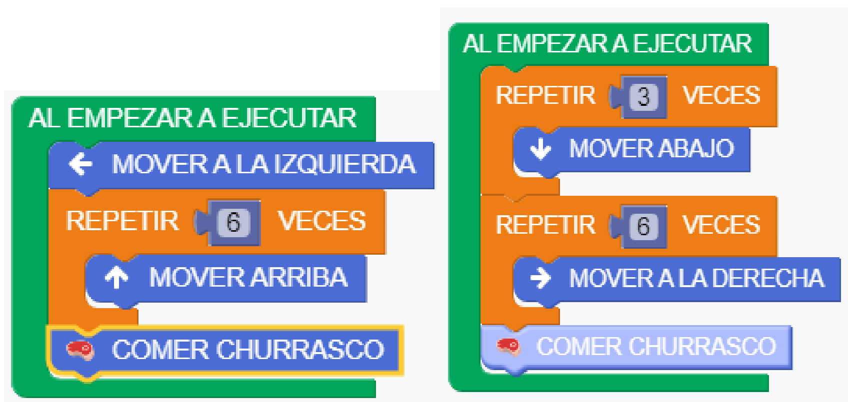
Diálogos solución desafío 3	Diálogos solución desafío 4	Interpretación del investigador
E2.2: a la izquierda y luego arriba… ya vi cómo se hace… creo.	E2.2: a ver… mover abajo tres veces. Luego mover a la derecha… y…	Reconocimiento del patrón. Determinación sensible.
E2.2: mire… izquierda y para arriba.	E2.1: luego vamos a repetir otra vez.	Generalización algebraica de patrones. Principio asumido del bloque *repetir _ veces*. De acuerdo a esta indicación, se infiere que en el paso anterior ya se había utilizado el bloque repetir.
E2.1: bueno… ahora, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.	E2.2: cinco, no mentiras seis. E2.1: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Sí. E2.1: a la derecha… E2.2: y comer churrasco.	Denotación de la secuencia a través del algoritmo computacional y comprobación a través del botón *Ejecutar*
	En ese momento se acerca el docente y pregunta ¿cómo lo hicieron?… cuéntenme… E2.2: **profe cuando toca repetir, ponemos esto más fácil** [señala el bloque repetir].	Uso del bloque repetir como estrategia para denotar la secuencia cuando se reconoce el patrón (principio asumido).

En la Tabla 6 se evidencia que los estudiantes adoptan estrategias que les permiten realizar una determinación sensible de los patrones a través de técnicas de conteo (Radford, 2013). Así mismo, se observa que E2 incorpora *repetir _ veces* como bloque lógico que posibilita denotar los patrones a través de secuencias computacionales. Lo anterior, corresponde con lo que Radford (2013) señala como una generalización abductiva, debido a que los participantes construyen algoritmos computacionales que integran el bloque repetir como un principio asumido para denotar las secuencias computacionales.

El bloque *repetir _ veces* no es asumido como simple posibilidad, dado que los estudiantes son conscientes que este permite expresar las secuencias de forma generalizada en el algoritmo computacional. Este aspecto se evidencia en la denotación (construcción del algoritmo computacional), dado que todos los posibles patrones son denotados a través de secuencias computacionales por E2. La Figura 14 corresponde a los algoritmos computacionales que E2 construyó en los desafíos 3 y 4.

Figura 14

Algoritmos de programación realizados por E2 para los desafíos 3 y 4 de Mundo Salvaje – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor



Nota. Algoritmos de solución a los desafíos 3 (izquierda) y 4 (derecha).

Por un lado, al examinar los algoritmos computacionales construidos (denotados) por E2 (Figura 14) y las conversaciones generadas al utilizar el software (Tabla 6), es posible evidenciar a partir de Radford (2013) que los estudiantes: i) reconocen patrones-secuencias a través de la determinación sensible de los cuadrados y el conteo (Tabla 6), ii) generalizan la característica común a los demás elementos del conjunto como principio asumido (Tabla 6) y iii) denotan patrones a través de secuencias computacionales que integran el bloque *repetir _ veces* (Figura 14). Además, al estudiar los algoritmos computacionales construidos por E2 en los desafíos 3 y 4 de *Mundo Salvaje*, corresponden con los algoritmos más sofisticados en cada caso, es decir, sintácticamente poseen la más compacta construcción algorítmica.

Por otro lado, los algoritmos computacionales construidos por E2 evidencian que los estudiantes pasaron de algoritmos computacionales básicos (Figura 12, izquierda) a sofisticados (Figura 14) sin requerir la intervención del profesor. En este sentido, al considerar el papel del instrumento, en este caso de la RE, se observa que esta transforma la manera en la que se establece y denota el reconocimiento de la característica común, debido a que al ejecutarse el programa posibilita la reflexión en torno a diferentes formas de construir el algoritmo computacional. De acuerdo con Radford (2012), el uso de un artefacto por parte de los sujetos no solo permite la adquisición del conocimiento, sino que también genera nuevas maneras de pensar y de conocer.

En este sentido, no basta con analizar con cómo los estudiantes se apropian o dominan los instrumentos, sino concebir y estudiar la forma en la cual estos median la actividad y transforman las prácticas educativas (Radford, 2012); por esta razón se examina el uso de la RE en el desafío 6 de Mundo Arte (Figura 15). El escenario se caracteriza por ser el primero en poseer un algoritmo erróneo en la *zona de programación*, el cual debían modificar los equipos de acuerdo con el mapa.

Figura 15

Desafío 6, Planeta Arte – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Nota. Escenario y Bloques disponibles (imagen superior), algoritmo erróneo propuesto por el software y su ejecucción (imagen inferior).

La programación errónea que se encuentra en la *zona de construcción del algoritmo computacional* (Figura 15, imagen inferior) está constituida por tres secuencias computacionales, cuando podrían ser solo dos. En la primera secuencia el patrón es correcto, sin embargo, la cantidad de veces que se debe repetir el patrón debe ser tres. En la segunda y tercera secuencia no son denotados los patrones *mover derecha dibujando* y *mover abajo dibujando* como un solo patrón, sino que se expresan como patrones independientes.

Al considerar el uso del software, es relevante reconocer que si los estudiantes pulsaban el botón *Ejecutar,* el programa realiza los trazos que evidencia la Figura 15 (imagen inferior). La Figura 16 corresponde al algoritmo computacional enviado por los integrantes del equipo E1 como solución al desafío 6 de *Planeta Arte*.

Figura 16

Algoritmo computacional del Equipo E1 para el desafío 6 de Planeta Arte - reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Frente a las modificaciones que realizaron E1 al algoritmo computacional del desafío 6, se observa que aumentan a tres la cantidad de veces que se repite la secuencia del bloque *repetir _ veces*. Así mismo, los estudiantes eliminan las secuencias que repetían 3 veces los bloques *mover a la derecha dibujando* y *mover a la abajo dibujando*. Para reemplazar las órdenes E1 construyó una nueva secuencia con *mover abajo y a la derecha* dibujando 2 veces y agregó dos bloques fuera de las secuencias *mover a la derecha dibujando* y *mover a la abajo dibujando* (ver Figura

16). Si bien el algoritmo computacional construido no corresponde al más sofisticado, cumple parcialmente con los objetivos del escenario. La Tabla 7 permite examinar el diálogo de los participantes en el desafío y considerar la mediación del software en la solución del mismo.

Tabla 7

Diálogo Equipo E1 para solucionar el desafío 6 de Planeta Arte – reto Entrenamiento en la galaxia Enana del Can Mayor

Diálogo E1	Interpretación del investigador
E1.1: se pueden repetir estos porque son iguales [aluden al primer bloque de repetir]. E1.2: pero esto acá no [se refieren a los dos bloques repetir restantes], bueno hasta acá. E1.1: porque aquí ya serían tres, dar repetir [indican que el primer bloque de repetir debe cambiarse el dos por un tres]. E1.2: sí porque esto es una vez, dos veces y tres veces. Listo. E1.1: listo, entonces pintamos a la derecha… son tres veces, una vez, dos veces, tres veces. Y separar los dos cosos [bloques repetir], sería… E1.2: luego mover a la derecha E1.1: ajá…y volver a repetir pero al contrario, en vez de subir, bajar. E1.2: o sea, aquí abajo y aquí nos quedaría a la derecha. O sea **tres abajo a la derecha**.	Existe un reconocimiento de los patrones *mover arriba dibujando -mover derecha dibujando* y *mover abajo dibujando - mover derecha dibujando*, los cuales son propuestos inmediatamente para denotar a través del bloque *repetir* _ veces. No obstante, el algoritmo construido hasta este momento es erróneo, ya que se posicionó el bloque *mover derecha dibujando* entre las dos secuencias y tres veces la secuencia mover abajo dibujando – *mover derecha* dibujando, sin incluirse el último bloque *mover abajo dibujando*, el cual se incluye posteriormente (ver Figura 13). Si bien los estudiantes reconocen que el patrón de ambas secuencias posee similitudes, no incluyen en su razonamiento que *mover derecha dibundo* cambia la frecuencia de la secuencia.
Los estudiantes pulsan el botón Ejecutar.	El sofware realiza un trazo adicional hacia la derecha, por lo cual no cumple con las específicaciones del desafío.
E1.2: o sea que serían dos… ponga dos, ponga dos [cambian el segundo bloque repetir tres veces por dos veces]. E1.1: y aquí le podemos poner… mover abajo.	Modificación de una secuencia de acuerdo a la ejecución del programa. Los cambios realizados se realizan en un lapso de veinticinco segundos.

Al considerar la relación del equipo E1 con el software, se observa que los estudiantes utilizan el botón *Ejecutar* como una manera de comprobar el algoritmo computacional. Posterior a la ejecución del programa, los participantes identifican que se genera un trazo adicional debido a que se tenía *repetir 3 veces* los bloques *mover abajo y a la derecha dibujando*. En este sentido, los estudiantes recurren a un proceso de ensayo y error para comprobar y modificar sus algoritmos, lo que de acuerdo con Radford (2013, 2021) no constituye una analítica del PAE, dado que no se genera la solución a través de un razonamiento deductivo.

No obstante, el diálogo de los integrantes del equipo E1 (Tabla 7), permite observar que los estudiantes no realizan un *ensayo y error aleatorio o sistemático*, dado que analizan el resultado obtenido y reformulan el algoritmo en función del valor de salida, por lo cual es posible catalogarlo como un *ensayo y error dirigido* (Conde y Conde, 2005; Romero, 2018; Viar, 2007). De esta manera, aunque el razonamiento llevado a cabo no alcanza a ser uno de carácter deductivo, no corresponde directamente a uno de tipo inductivo. Las modificaciones no son sugeridas a priori de la información, las hipótesis de los cambios surgen de los datos y luego son verificadas; en este sentido, en palabras de Núñez (2019) puede considerarse como un razonamiento abductivo.

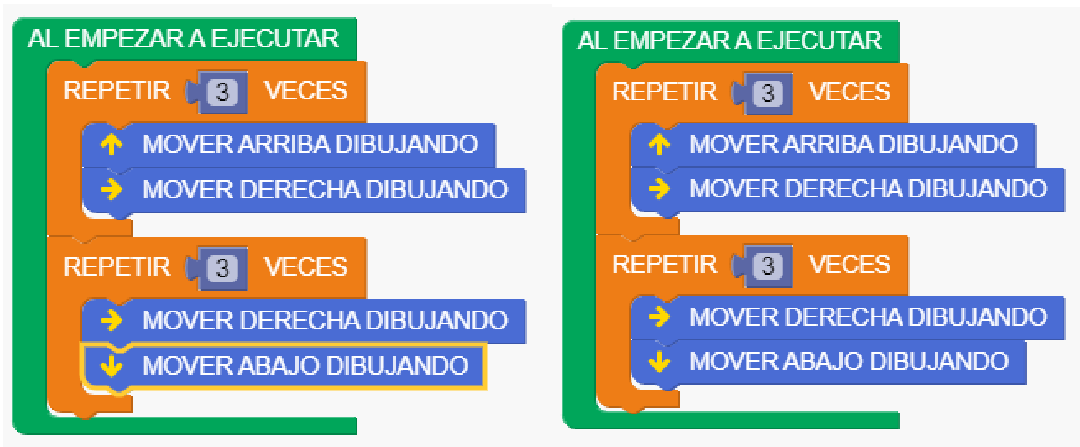
Frente a la abducción, es considerada como una forma de razonamiento que lleva a cabo procedimientos de inferencia, en los cuales se establece la mejor explicación posible a una situación específica, donde posteriormente la hipótesis es evaluada (Núñez, 2019; Rodríguez, 2005). En este sentido, cuando los estudiantes modifican el algoritmo computacional (establecen una hipótesis de funcionamiento plausible) y se ejecuta en el software (verificación empírica), están razonando abductivamente (Velásquez, 2015).

Respecto al razonamiento abductivo en la condición de analiticidad del PAE, Vergel et al. (2022) indican que se requiere investigar detenidamente la deducción que proviene de una abducción, dado que pueden suscitarse generalizaciones algebraicas. En este caso, se hace preciso considerar el ensayo y error como una forma de procesamiento de la información, el cual de acuerdo con las estrategias empleadas puede constituir una manera analítica del PAE.

Frente a los algoritmos computacionales de E1 y E3 (Figura 17), se observa que los estudiantes recurren al bloque *repetir _ veces* como una manera de denotar la secuencia. Ambos algoritmos computacionales corresponden a las más sofisticadas construcciones, dado que son las expresiones que menos bloques computacionales utilizan.

Figura 17

Algoritmos de programación realizado por los equipos E1 (izquierda), E3 (derecha) para el desafío 6 de Planeta Arte



Al considerar de forma general los algoritmos computacionales construidos por los estudiantes en los escenarios de *Planeta Arte*, se observa que los estudiantes integran el bloque *repetir_ veces* como una manera de programar (denotar) un patrón o regularidad a través de secuencias computacionales. En este sentido, aunque al principio los estudiantes reflejaron dificultades para utilizar algoritmos computacionales que denotaran contextos de generalización algebraica (bloque *repetir_ veces*; Figura 12, izquierda); el uso del software fomentó que en los equipos se adoptaran estrategias orientadas a la generalización algebraica (Figuras 16 y 17).

De acuerdo Radford (2013), entre las estrategias que se fomentaron a partir del uso del software para la generalización algebraica de patrones, se encuentra que la RE como instrumento fomenta: i) una determinación sensible a partir de la escogencia de similitudes en el movimiento requerido en los algoritmos computacionales (Tabla 5), ii) la toma de conciencia de la propiedad común y su generalización a términos subsecuentes (Tabla 5), iii) que el uso de secuencias computacionales no se constituyan una simple posibilidad sino un principio asumido (Tabla 6, Figura 14) y iv) una denotación que no está anclada únicamente al lenguaje alfanumérico, debido a que depende del sistema y los medios asociados utilizados.

En síntesis, la integración de la RE como instrumento en su dimensión del software, implica considerar las transformaciones entre el sujeto y el objeto de conocimiento; de manera específica, se identifican tres contextos a partir de la RE que se requieren estudiar para el desarrollo del PAE.

El primero, refiere la diferencia subyacente en la abstracción y la aplicación de patrones-secuencias en algoritmos computacionales. El segundo, alude a la limitación que pueden suscitar los entornos digitales frente a las instrucciones. El tercero, resalta el ensayo y error como un procedimiento que puede ser caracterizado algebraicamente de acuerdo con el procesamiento que sea ejecutado por los estudiantes.

Respecto al primer caso, es común que el objetivo de las tareas para desarrollar el PAE a través de patrones-secuencias estén orientadas a identificar la relación presente en un conjunto determinado y, a partir de su caracterización, se prediga la posición o la magnitud de un término específico (Radford, 2013, 2021). En este sentido, es común que se analice una secuencia con el objetivo de determinar el patrón inmerso. No obstante, en la construcción de algoritmos computacionales se espera que los estudiantes reconozcan las regularidades de una situación y sean capaces de construir secuencias que agrupen los patrones reconocidos (ver Figuras 12, 14, 16 y 17). Esta diferencia trae consigo cambios en la forma que los sujetos interactúan con el concepto, por lo cual, si se busca potenciar el PAE a través de la RE es importante que pueda examinarse la diferencia en las formas reconocimiento, generalización y denotación en torno a los patrones-secuencias que trae consigo la RE.

Para el segundo caso, Alfieri et al. (2015) señalan que el uso de software que incluyen instrucciones de tutoría automática después de que los estudiantes respondan erróneamente a una situación (en este caso los mensajes con sugerencias que genera el software), reduce las posibilidades de que se recurra al ensayo y error como estrategia para resolver los desafíos. No obstante, en esta investigación se identificó que el uso de un software que limita el ensayo y error, reduce también los procesos de razonamiento asociados al análisis y la argumentación del error. Así mismo, este tipo de software requiere que los estudiantes reconozcan de antemano las relaciones implícitas en las situaciones. En este sentido, al requerir un conocimiento previo para la construcción de algoritmos, no se promueve el razonamiento abductivo, el cual permite la generación de nuevas ideas y un proceso creativo del conocimiento.

Frente al tercer caso, resulta crucial examinar el procesamiento de la información llevado a cabo en el ensayo y error, dado que el *ensayo y error dirigido* puede catalogarse como una forma de razonamiento abductivo (Núñez, 2019), por lo tanto, algebraico (Vergel et al., 2022). Esta perspectiva del ensayo y error como un posible método de razonamiento algebraico difiere de la condición de analiticidad de que propone Radford (2014, 2021), debido a que los procedimientos ejecutados no son necesariamente deductivos, sino aritméticos.

Aunque Radford (2014, 2021) indique que las formas de razonamiento deductivos son la única manera de reflejar un pensamiento algebraico, es conveniente advertir que esta concepción implica un rol pasivo del estudiante frente al desarrollo del PAE. Al respecto, Soler-Álvarez y Manrique (2014) y Velásquez (2015) señalan que la abducción corresponde al razonamiento que permite la generación de nuevo conocimiento, dado que la inducción por sí sola no posibilita generalizar; las inferencias deductivas no añaden descubrimientos, pues el resultado ya está contenido en la regla (Núñez, 2019). No obstante, estas consideraciones contemplan únicamente el uso del instrumento en la dimensión del software de la RE, por lo tanto, es necesario examinar las transformaciones cuando se integra el hardware a las experiencias, elementos que se analizan en el siguiente apartado.

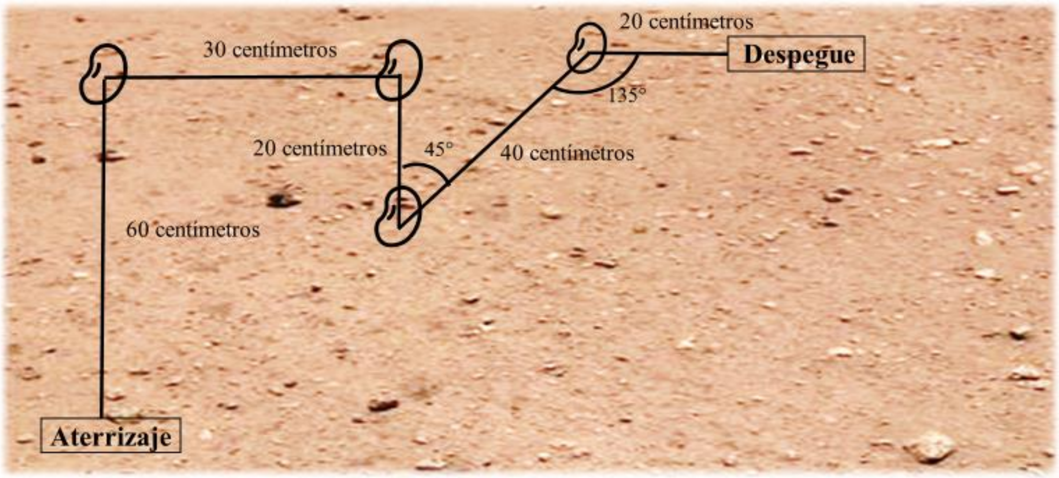
4.2 Comprensión, denotación y analiticidad de magnitudes y sus relaciones en ecuaciones algebraicas a partir de entornos de programación y físicos

El reto "Misión siembra en Marte" (ver Anexo 4) representa la unidad de análisis frente al uso de la RE (en las dimensiones del software y el hardware) en los procesos de comprensión, denotación y analiticidad de magnitudes y sus relaciones en ecuaciones algebraicas. Los desafíos que conforman el reto permiten valorar las condiciones del PAE en los algoritmos de programación y la relación con la automatización del robot. De forma particular, se examinan las magnitudes de distancia (unidades métricas de los mapas, ver Figura 7), el tiempo (magnitud asignada al bloque *espera* ___ *segundos*, ver Figura 8) y las relaciones que se establecen entre ellas.

A diferencia de la categoría anterior, en este reto son considerados los datos derivados de todos los desafíos, no obstante, se seleccionan algunos apartados dado que permiten analizar las condiciones del PAE en torno al software y el hardware en la RE. De manera específica, para analizar la comprensión de las magnitudes indeterminadas y su relación con las determinadas, es clave considerar el algoritmo computacional construido para la automatización en el desplazamiento del primer mapa (Figura 18). Este desafío se selecciona debido a que es la primera vez que los estudiantes deben automatizar el robot.

Figura 18

Mapa para programar en el desafío Automatizar desde la tierra - reto Misión siembra en Marte



Nota. Elaboración propia.

El primer desplazamiento a automatizar en el robot es de 60 cm, el cual corresponde a la distancia entre la zona de *Aterrizaje* y la primera semilla. En relación con la programación de este movimiento, se advierte que la magnitud asignada en el bloque *espera _ segundos* (ver Figura 8) representa la principal magnitud indeterminada del mapa, dado que se deben establecer relaciones entre las magnitudes de *distancia* y *tiempo* sin conocer *velocidad* del chasis robótico. La Figura 19 muestra los algoritmos computacionales construidos por los grupos E1, E2 y E3, a partir de los cuales es posible examinar las magnitudes de tiempo asignadas por los estudiantes.

Figura 19

Programación de los Equipos automatizadores E1, E2, y E3 al primer desplazamiento del desafío Automatizar desde la tierra - reto Misión siembra en Marte

Nota. Capturas de pantalla de los algoritmos de programación de los Equipos E1 (izquierda), E2 (centro) y E3 (derecha).

Los algoritmos computacionales de los equipos E1 y E2 incluyen el bloque inicial *espera 3 segundos*, debido a que el profesor sugirió a los estudiantes que lo incorporaran en la programación, con el objetivo de evitar que los robots iniciaran inmediatamente se activara el interruptor. Al examinar las grabaciones, se puede observar que los estudiantes establecen algunas estrategias para determinar la magnitud a asignar en el bloque *espera _ segundos* (Tabla 8).

Tabla 8

Diálogo E2 para determinar la magnitud del primer recorrido en el desafío Automatizar desde la tierra - reto Misión siembra en Marte

Diálogo E2	Interpretación del investigador
E2.1: ¿cuánto lo puso? [se refiere al tiempo del bloque esperar que está entre encender y apagar los motores]. E2.2: dos segundos, porque con cinco andaba más de un metro. *El profesor se acerca ya que uno de los integrantes hace una indicación que el grupo posee una duda*. Profesor: ¿qué les pasó? [profesor mira la programación y añade]. Con cinco segundos ¿cuánto les andaba? E2.2: más de un metro. Profesor: y la otra pregunta que tenían, ¿cuál era? E2.1: ¿se puede poner segundos con decimal? Profesor: sí, si se puede. Se pone con puntos [indica que el símbolo a utilizar al interior del programa es con puntos y no con comas].	Hipótesis de funcionamiento entre el software y el recorrido que realiza en el mundo físico (hardware).
E2.1: quite las pilas usted… para yo ir haciendo esto [se refiere a la programación en mBlock]. Uno punto… Pongamos punto cinco a ver. E2.1: vaya poniendo el metro [indica a sus compañeros que tengan la cinta métrica en el piso para medir el desplazamiento del robot].	Acciones para modificar la magnitud asociada al bloque *espera _ segundos.*
La clase finaliza y se continúa en el siguiente encuentro E2.1: entonces hagámosle ¿uno coma… qué? E2.2: uno punto …tres. E2.1: es que ahí fue donde pusimos… E2.2: uno punto seis. E2.1: no, tiene que ser menos. E2.3: uno punto uno.	Valoración de la magnitud asignada como valor de entrada y salida.

Los estudiantes de E2 ejecutaron, midieron y ajustaron el algoritmo computacional que controlaba el robot hasta determinar que debía asignarse una magnitud de “0.89” al bloque *espera ___ segundos*, para que este se desplazara 60 cm exactamente. Frente a los procesos llevados a cabo por los equipos E1 y E3, se observa que desarrollan procedimientos similares a las descritas en la Tabla 8, a través de los cuales lograron programar el recorrido propuesto. En relación con la estrategia utilizada por los tres equipos, es factible categorizarla como un tipo ensayo y error, donde el principal método es modificar las magnitudes asociadas al bloque *espera* __ *segundos* de acuerdo con la distancia que recorría el chasis robótico en cada ejecución.

En este sentido, la interacción constante entre el programa mBlock y la ejecución en el automotor robótico, evidencia que la interconexión de los softwares y hardware faculta la verificación de hipótesis y conjeturas a través del ensayo y error (Alsina y Acosta, 2018). En particular, en función de los procedimientos llevados a cabo por los equipos E1, E2 y E3, la estrategia se categoriza como un *ensayo y error dirigido*, debido a que los estudiantes sustituían las magnitudes de tiempo en el algoritmo de programación al analizar el valor de salida -magnitudes de desplazamiento- (Conde y Conde, 2005; Romero, 2018; Viar, 2007).

Es así que la RE proporciona condiciones para conjeturar, comprobar y modificar las magnitudes indeterminadas de acuerdo con las características del fenómeno, de tal forma que se satisfaga el valor buscado (Alsina y Acosta, 2018). De forma particular, el software permite que los estudiantes construyan el algoritmo computacional que más se adapte a la situación de acuerdo con sus observaciones (conjeturen) y a través del hardware se da una verificación de la programación por medio de entornos físicos (comprobación). El vínculo entre las dimensiones de los robots (*software* y *hardware*) y los procedimientos de *ensayo y error dirigido*, corresponden con lo que Núñez (2019) describe como un razonamiento abductivo, en el que se propone una hipótesis plausible, la cual solo puede ser verificada a través la comprobación empírica.

En este sentido, el *ensayo y error dirigido* puede considerarse como una forma de pensamiento algebraico, dado que no se remplazan magnitudes de manera inductiva hasta alcanzar el valor de salida deseado, sino que involucran razonamientos de tipo abductivo y deductivo al considerar los datos y modificarlos de acuerdo con el análisis de los mismos. El proceso es abductivo cuando los estudiantes proponen conjeturas que por sí mismas son plausibles (*abducción*), luego las comprueban a través de procesos de ensayo y error (*inducción*) y, si los resultados no proporcionan el valor esperado, son modificadas las magnitudes en conformidad con la proporcionalidad directa -*deducción*- (Núñez, 2019).

No obstante, el *ensayo y error dirigido* no fue la única estrategia a la cual recurrieron los estudiantes para establecer relaciones entre magnitudes. Por ejemplo, en la Tabla 9 se pueden observar los diálogos que sostienen el profesor y los integrantes de los equipos E1, E2 y E3, a partir de los cuales se resaltan las relaciones identificadas.

Tabla 9

Diálogos de integrantes de los equipos E1, E2 y E3 del primer desafío - reto Misión siembra en Marte

Diálogo E1	Diálogo E2	Diálogo E3
Profesor: una pregunta… ¿con cuánto hace el recorrido de 60? ¿ya lo hicieron? [se refiere al primer recorrido donde el robot se debe desplazar 60 cm]. E1.1: con 0.75 Profesor: listo… y entonces en este [señala en el mapa el recorrido de 30 cm] ¿ya lo están programando? E1.1: sí Profesor: ¿con cuánto? E1.1: con 0.5, poner uno en alto [el estudiante estaba explicando la programación del giro]. Profesor: no, ese es el giro, yo quiero preguntarles… *el profesor no había*	E2.1: profe, una pregunta… miramos en la calculadora la mitad de este y no nos dio [Se refieren a que intentaron obtener la mitad de 0.89, magnitud en tiempo que permite el desplazamiento de 60 cm]. Profesor: listo está bien… por el punto acá [señala que en la calculadora que están utilizando no realizan una adecuada notación decimal]. E2.1: ¿este punto acá si se puede? Profesor: no, quítalo… ¿Ustedes qué hicieron ahí? ¿Por qué utilizaron calculadora para hacer eso? E2.1: **pues la mitad de 0.89** Profesor: sí, ¿por qué? E2.1: ah… **porque esta es la mitad de 60 [señalan que el desplazamiento de 30 cm es la**	Profesor: me van explicando por favor como han estado haciendo lo del mapa [hace referencia a los algoritmos de programación]. ¿Cómo hicieron para que recorriera 60 cm? E3.1: lo pusimos a andar 0.75 segundos, nos dio exactamente 60 centímetros. Profesor: listo… bueno, por ejemplo, este segundo recorrido, ¿cómo se haría? E3.1: eh, **con la mitad** Profesor: con la mitad, y este tercer recorrido… E3.1: **con una tercera parte.**

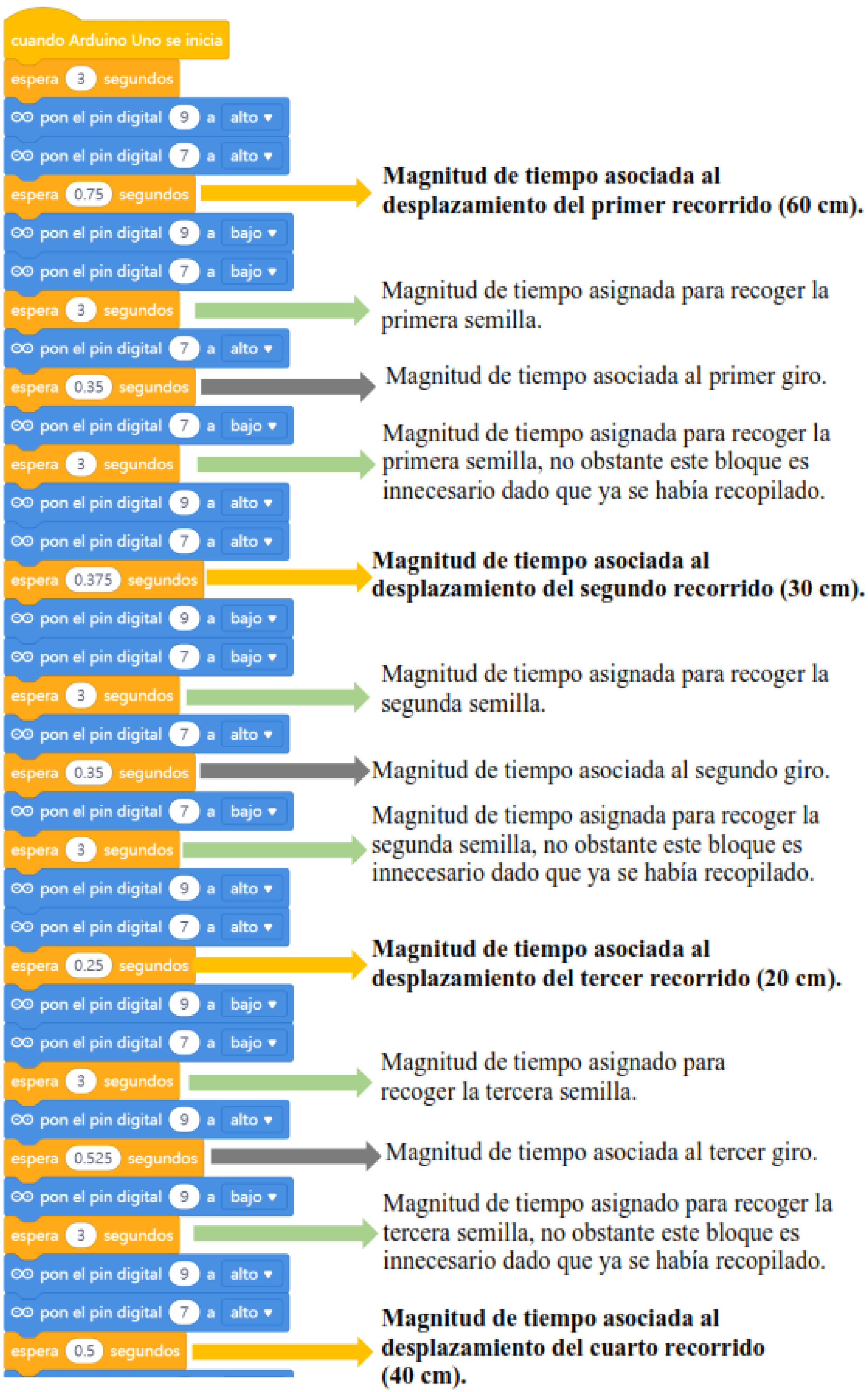
Diálogo E1	Diálogo E2	Diálogo E3
terminado de realizar la pregunta y el estudiante dice E1.1: **la mitad** Profesor: ¿la mitad de cuál? E1.3: la mitad de 0.75 Profesor: ahí le saca la mitad, y por ejemplo ¿aquí? [señala el tercer recorrido] ¿cómo harían para saber cuánto se hace? E1.1: **un tercio.** Profesor: ¿un tercio?, listo, muy bien. ¿y este? [señala el cuarto recorrido]. E1.1: **el doble** Profesor: ¿el doble de qué? E1.4: de veinte.	**mitad del primer desplazamiento].**	

Expresiones como "el doble", "el triple", "la mitad" o "la tercera parte" permiten identificar que los estudiantes establecieron relaciones entre magnitudes a través de las estructuras proporcionales. De acuerdo con Kieran (2011) y Radford (2021), una mirada relacional de las magnitudes fomenta el desarrollo del PAE, ya que comparar y analizar relacionalmente las magnitudes en términos de sus propiedades promueve la comprensión y generalización de características comunes.

De esta manera, se observa que la mirada relacional de las magnitudes de distancia (determinadas) permiten a los estudiantes calcular magnitudes de tiempo (indeterminadas), de esta manera se logran establecer las magnitudes asociadas a los desplazamientos de 20 cm, 30 cm, y 40 cm a partir de una magnitud conocida previamente (tiempo asociado al desplazamiento de 60 cm). En este sentido, las primeras estrategias de *ensayo y error dirigido* se transformaron a procedimientos que buscan relaciones, en este caso de proporcionalidad. De acuerdo con Kieran (2018), que la manera de resolver las situaciones evolucionaran de una aproximación básica hasta las nociones de estructuras, evidencia que el ensayo y error fomenta el uso de técnicas más sofisticadas. La Figura 20 ejemplifica la denotación de la situación por medio de un algoritmo de programación construido por los estudiantes E1 en la automatización del primer mapa.

Figura 20

Algoritmo de programación del E1 para sembrar las semillas en el primer mapa



La Figura 20 representa uno de los algoritmos computacionales construidos por los estudiantes de E1 para automatizar el robot en el recorrido del primer mapa (Figura 18); no obstante, es importante reconocer que tanto E2 como E3 poseen estructuras algorítmicas similares, la diferencia radica en las magnitudes asociadas al bloque *esperar __ segundos*. Así mismo, al examinar la programación (Figura 20) se observa que tanto las magnitudes de tiempo como el desplazamiento son proporcionales entre sí. Por ejemplo, la magnitud de tiempo asociada al primer y segundo recorrido poseen correspondencia proporcional: $\frac{60\ cm}{30\ cm} = \frac{0.75}{0.375}$ (ver Figura 20).

En consecuencia, tanto los diálogos (Tabla 9) como los algoritmos de programación (Figura 20) evidencian que los estudiantes establecen las magnitudes indeterminadas asociadas a los desplazamientos de 20 cm, 30 cm y 40 cm a partir de la magnitud de tiempo relacionada con 60 cm. Es así que los participantes recurrieron a la estructura proporcional entre magnitudes de distancia y realizaron una analogía con las magnitudes de tiempo. Es así, que cuando los estudiantes detectan similitudes y establecen relaciones, en este caso de proporcionalidad, evidencian una comprensión de la variación y dependencia de eventos (Zarzar y Ceballos, 2010).

En este sentido, se observa un razonar en torno a las estructuras, debido a que se reconocen las propiedades al interior del sistema, en este caso, los números, operaciones y relaciones (Kieran, 2022). De acuerdo con Radford (2021), esta forma de razonar satisface la condición de analiticidad del PAE, debido a que las inferencias que realizan los sujetos siguen una lógica deductiva, donde a partir del análisis de una magnitud indeterminada, se recurre a propiedades de las estructuras para relacionarlas con una magnitud determinada.

Aunque inicialmente los estudiantes adoptaron el proceso de *ensayo y error dirigido* como principal estrategia al automatizar los desplazamientos, los participantes comenzaron a analizar e identificar las relaciones subyacentes de la situación y el conjunto numérico. De acuerdo con Kieran (2018), se observa que la estrategia inicial de ensayo y error permite que surjan técnicas estructuradas de alto nivel. En este sentido, la RE fomentan una transición de estrategias básicas como el *ensayo y error dirigido* a la identificación deductiva de relaciones y estructuras.

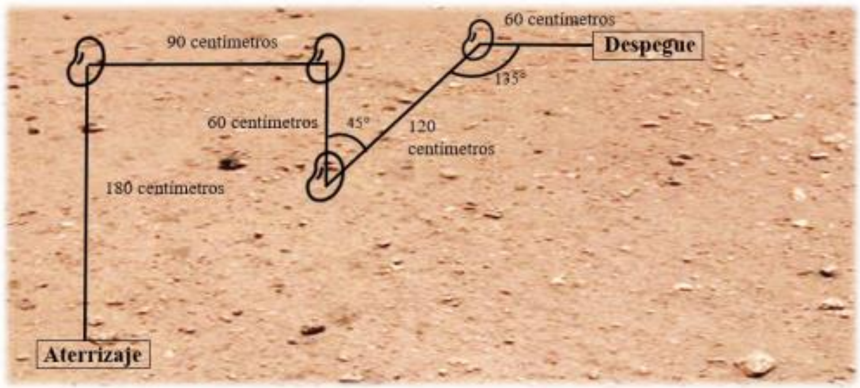
Al considerar las dimensiones de la RE, es importante reconocer que el software por sí solo no fomenta la identificación de relaciones; es la interacción sostenida del *software* con el *hardware* lo que permitió que los estudiantes identifiquen la dependencia y variación de magnitudes (Agatolio et al., 2018). De forma particular, los entornos físicos fomentaron la comprensión y abstracción de las magnitudes indeterminadas, debido a que las magnitudes se encontraban vinculadas a objetos concretos, a los cuales los participantes podían asignar una interpretación o sentido al interior del problema y la realidad (Alsina y Acosta, 2018; Merlo-Espino et al., 2020).

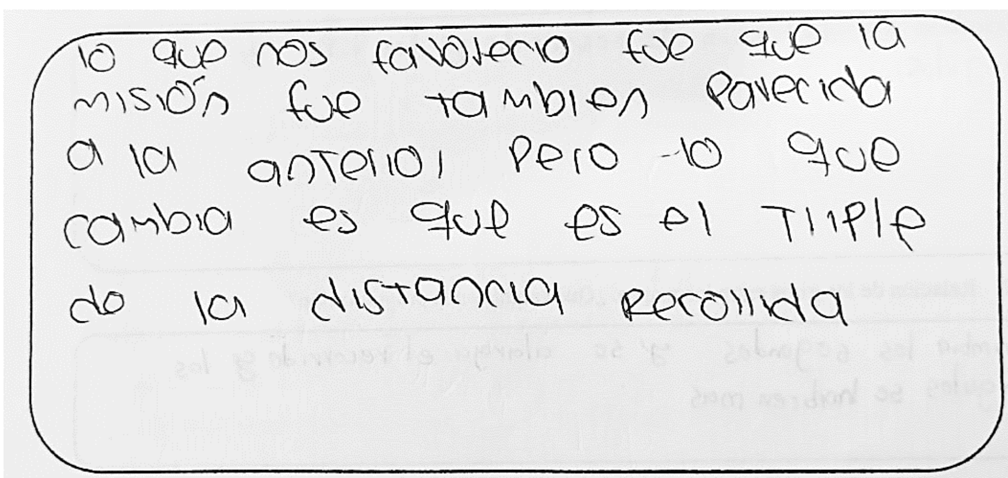
Aunque los estudiantes comprendieron y estructuraron analíticamente las relaciones de magnitudes entre distancia y tiempo, la denotación se generó únicamente a través de algoritmos computacionales. Al contemplar la comunicación de las relaciones abstraídas por los participantes (Tabla 9), se observa que estos se apoyaron principalmente de los niveles *factual* y *contextual* para expresar las relaciones (Radford, 2010b). Este tipo de lenguaje está presente en el desafío *¡COES, tenemos un problema!*, donde los participantes justifican las respuestas a partir de comunicación semiótica basada en términos claves. La Figura 21 representa el enunciado del desafío y la respuesta de los integrantes de E3.

Figura 21

Respuesta del equipo E3 al numeral cuatro del desafío ¡COES, tenemos un problema! - reto Misión siembra en Marte

4. ¿Cuál sería el tiempo que tarda el robot en completar la misión, si el mapa que se desea programar tuviese el triple de la distancia en cada uno de los recorridos?




lo que nos favorecio fue que la misión fue tambien parecida a la anterior pero lo que cambia es que es el triple de la distancia recorrida

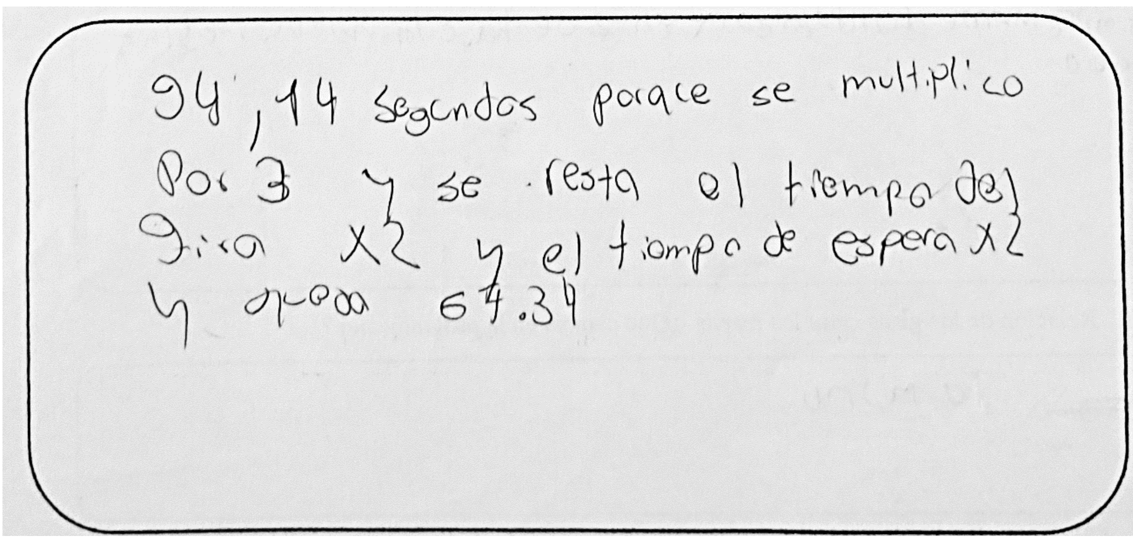
Nota. La imagen superior corresponde a las indicaciones otorgadas y la inferior a la producción manuscrita del E3.

Los integrantes del equipo E3 enuncian que solo es requerido multiplicar por tres el tiempo de la distancia del primer mapa programado "*lo que cambia es que es el triple de la distancia recorrida*" para determinar el tiempo total. En este sentido, los estudiantes reconocen que basta con operar el tiempo de la distancia, mientras que el tiempo de los giros y la siembra de las semillas es constante. De esta forma, es posible indicar que los participantes son conscientes de las magnitudes que varían y las que permanecen constantes, lo que evidencia un pensamiento analítico de las magnitudes a través de relaciones y estructuras (Radford, 2014, 2021). No obstante, al considerar la denotación por medio de la cual se comunican las relaciones, se observa que se posiciona en el segundo nivel de generalización (*contextual*), dado que E3 recurre principalmente a palabras claves que describen la situación (Radford, 2010a, 2021).

Así mismo, los estudiantes de E1 recurren a un lenguaje *contextual* para fundamentar la respuesta al desafío. La Figura 21 evidencia la denotación que utilizan los estudiantes de E1 para justificar el resultado.

Figura 22

Respuesta del equipo E1 al numeral cuatro del desafío ¡COES, tenemos un problema! - reto Misión siembra en Marte



Aunque la denotación utilizada por E1 no es la más avanzada (*simbólica*), debido a que recurren a lo *contextual* para establecer los argumentos (Radford, 2010a, 2021); los estudiantes identifican la estructura subyacente en términos de las magnitudes que varían y las que permanecen constante, aspecto que devela una analiticidad y comprensión de las magnitudes (Radford, 2014, 2021). De manera particular, este equipo concibió que todo se multiplicaba por tres, pero reconocieron que no toda la magnitud aumentaba de forma proporcional, por lo cual decidieron restar dos veces las magnitudes asociadas a los tiempos de giro y de espera para sembrar las semillas.

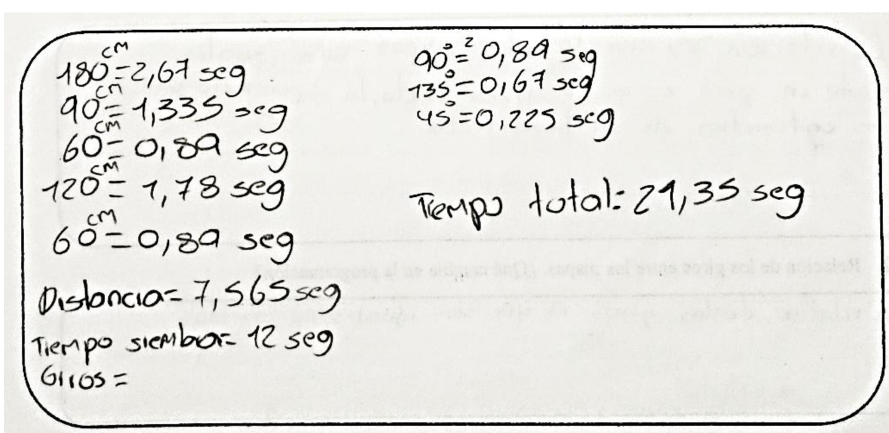
En este sentido, los estudiantes reconocen las estructuras y relaciones de proporcionalidad implícitas en el desafío, debido a que reconocieron que aumentar tres veces un resultado implica que cada factor también lo hace (Figura 22). Los participantes para continuar con la solución del desafío adoptan la estrategia de desagregar dos de las tres veces sumadas. Este tipo de razonamiento devela que los integrantes de E1 recurren a inferencias deductivas en términos de las estructuras de tal manera que les permitan transformas las expresiones algebraicas de acuerdo con las indicaciones. Radford (2014, 2021) señala que este tipo de tratamiento de las magnitudes, a partir de sus estructuras y relaciones, evidencia que E1 utiliza procesos propios del PAE.

Al considerar la forma en la que E1 manipula las magnitudes del desafío, se observa que los estudiantes no recurren a la determinación de magnitudes asociadas a los desplazamientos (las cuales son las que varían entre el primer y el segundo mapa; Figuras 8 y 21, superior). En este sentido, la respuesta de E1 (Figura 22), evidencia que los estudiantes analizan y operan con magnitudes indeterminadas como si estás fuesen determinadas, lo que devela una comprensión de la indeterminancia de las magnitudes (Radford, 2021). Es así que los integrantes de E1 realizan una sustitución de una variable o un objeto desconocido por otro, de tal manera que cumplieron las condiciones propuestas por la situación algebraica o la estructura del sistema de referencia (Radford, 2010b).

Frente a las estrategias utilizadas por E2 para denotar y operar el desafío 4, se evidencia que los estudiantes recurren a un lenguaje *simbólico*, el cual es el más sofisticado para representar las relaciones entre magnitudes (Radford, 2010a, 2021). La Figura 23 permite contemplar las relaciones de equivalencia que establecen los integrantes de E2.

Figura 23

Respuesta del equipo E2 al numeral cuatro del desafío ¡COES, tenemos un problema! - reto Misión siembra en Marte



Por un lado, la denotación utilizada por E2 (Figura 23) permite evidenciar que los integrantes utilizan el signo igual como un símbolo que denota relaciones y no como signo que indica una operación a realizar (García, 2007; Kieran y Filloy, 1989; Serres, 2011). Los estudiantes relacionan las magnitudes de *distancia* y *tiempo*, por ejemplo cuando denotan *180 cm = 2,67 seg* no existe ninguna operación a resolver, sino una equivalencia de magnitudes (Andrade, 1998; Molina, 2006, 2009). De acuerdo con Kieran (2004) y Radford (2021) el enfoque proporcional registrado en E2 (Figura 23) evidencia un pensamiento algebraico, debido a que se recurre a un tratamiento relacional de las magnitudes.

Por otro lado, la denotación de E2 evidencia que el uso de símbolos sigue anclado a nociones aritméticas, donde el uso de "seg" que representa segundos y "cm" simboliza la distancia en centímetros en la equivalencia (Castellanos y Obando, 2009). En este sentido, el simbolismo alfanumérico no representa la indeterminancia de una magnitud, es utilizado para diferenciar o reconocer cada tipo de magnitud asociada a la equivalencia; es así que, aunque no corresponde con un lenguaje *simbólico*, permite que los participantes asignen significancia a las equivalencias.

Las respuestas proporcionadas hasta el desafío *¡COES, tenemos un problema!*, evidencian que los estudiantes comprendían los aspectos inherentes a las magnitudes, dado que identificaron las que variaban, las dependientes o las constantes (Figuras 21, inferior y 22), esto permitió que se operaran con las magnitudes indeterminadas como si de magnitudes determinadas se tratara (Figura 22). Así mismo, en torno a la analiticidad, los participantes utilizaron estrategias asociadas al *ensayo y error dirigido* (Tabla 8), lo cual constituyó una fase inicial para el desarrollo de un pensamiento más sofisticado basado en las estructuras (Kieran, 2018); por ejemplo un análisis de las relaciones proporcionales al interior de la situación (Tabla 9).

En torno a la denotación presente, se observa una comunicación entre estudiantes basada en los niveles *factual* y *contextual* (Tabla 9). A medida que los equipos utilizan la RE y evidencian la necesidad de una interacción constante entre las dimensiones del software y hardware, recurren a denotaciones *contextual* y *simbólica* para comunicar y manipular las relaciones entre magnitudes (Figuras 21, 22 y 23). Al caracterizar las expresiones que utilizan los participantes, se observa que las notaciones aún están ancladas nociones propias del pensamiento aritmético (Figura 23), por ejemplo "cm" y "seg" (Castellanos y Obando, 2009).

En este sentido, el desafío *Compartir la ruta*, se diseñó con el propósito de inducir una denotación algebraica generalizada de nivel *simbólica* (alfanumérica). Así mismo, este desafío permitió identificar la forma en la cual es denotada la magnitud indeterminada, así como el proceso analítico inmerso en la generalización algebraica. La Figura 24 representa el último desafío del segundo reto.

Figura 24
Desafío Compartir la ruta - reto Misión siembra en Marte

Compartir la ruta

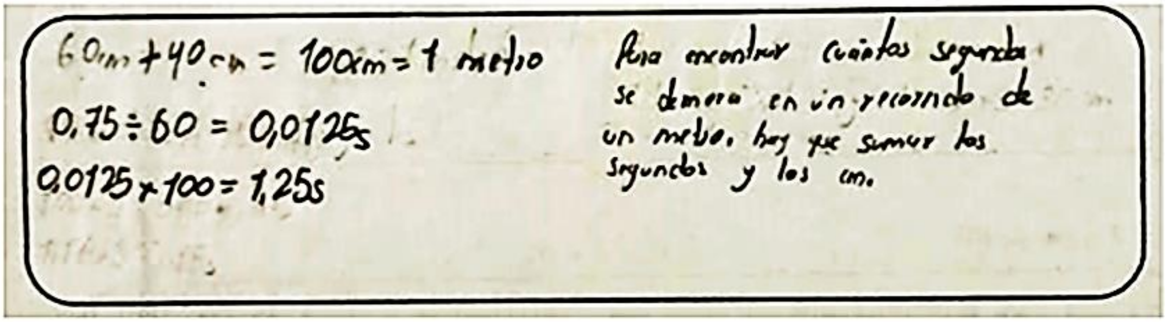
El equipo de biólogos ha encontrado otra zona que es ideal para sembrar algunas semillas, sin embargo, la última tormenta de Marte ha quemado los circuitos que permitían la comunicación del equipo automatizador con el robot. Por esta razón, es necesario que tu equipo comparta lo aprendido hasta el momento y facilite la programación de futuras misiones. De esta forma, se requiere identificar algunos algoritmos y expresiones matemáticas que permitan programar:

1. El recorrido en línea recta en metros.

Al observar las denotaciones realizadas por los equipos, se evidencia que existen diferencias en términos de la comprensión, denotación y analiticidad de las magnitudes y sus relaciones. En este sentido, se consideran las respuestas de los tres equipos (E1, E2 y E3) para identificar las condiciones del PAE. La Figura 25 exhibe el proceso operativo que presentó E3 para automatizar el recorrido en línea recta del robot con el cual se realizó la intervención.

Figura 25

Respuesta de E3 al primer apartado del desafío Compartir la ruta - reto Misión siembra en Marte



Es relevante considerar que hasta el momento a los estudiantes se les había solicitado automatizar el desplazamiento del robot en centímetros, por lo cual los equipos debían adoptar estrategias que permitieran determinar el movimiento rectilíneo del robot en un metro. Al examinar el proceso analítico llevado a cabo por E3, se evidencia que los estudiantes: i) determinan la cantidad de centímetros que hay en un metro; ii) toman las magnitudes asociadas al primer desplazamiento del mapa inicial y lo dividen (*0,75 ÷ 60*), lo cual les permite establecer el tiempo que debía programarse por centímetro; y ii) multiplican la magnitud determinada (*0,0125*) por 100, que corresponde a lo identificado en i).

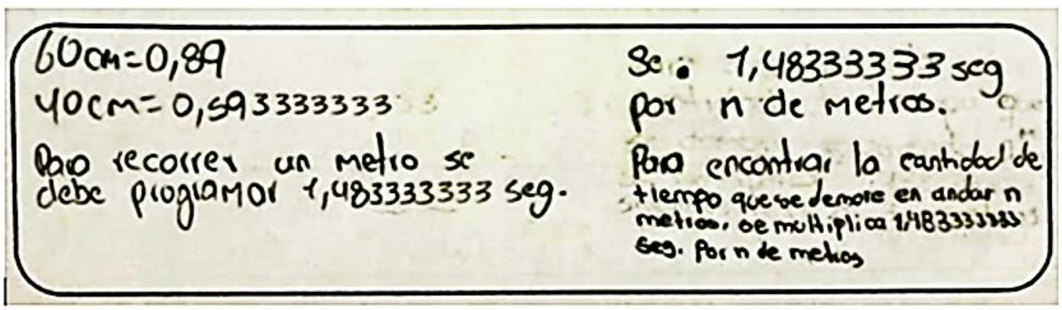
De acuerdo con Radford (2021), el proceso llevado a cabo por E3 evidencia estrategias analíticas de carácter deductivo, debido a que se consideraron las estructuras métricas y las relacionales entre las magnitudes para identificar el tiempo que se debía asignar a la automatización del robot. Es de anotar que la explicación que realizan los estudiantes (Figura 25) no es acertada, dado que señalan que para determinar la distancia en un metro se debe *sumar los segundos y los centímetros*, afirmación que es errónea.

Al considerar la expresión generada por E3 (Figura 25), esta puede categorizarse como una denotación en el estrato de generalización *factual* (Radford, 2010a, 2021), dado que se comunica en términos de la singularidad de un metro de desplazamiento. Aunque los estudiantes establecieron relaciones de equivalencia numérica para describir el vínculo entre el movimiento en metros y el tiempo que debía asignarse, no se representó semióticamente la magnitud indeterminada (la variable) para calcular la automatización en cualquier magnitud determinada. Así mismo, al examinar los signos utilizados, se observa que el “=” aún está anclado a un pensamiento aritmético, debido a que este se utiliza para representar los resultados de las operaciones realizadas (García, 2007; Kieran y Filloy, 1989; Serres, 2011).

Frente a la respuesta de E2 (Figura 26), se evidencia una denotación de la generalización de tipo *simbólica*, debido a que la variable (magnitud indeterminada) en la expresión generada es denotada a través de un símbolo arbitrario, en este caso *n* (Radford, 2021). En este sentido, E2 alcanza el nivel de denotación más sofisticado, dado que las representaciones semióticas no están ancladas a términos contextuales y por sí mismas expresan la generalidad de la situación (Radford, 2021).

Figura 26

Respuesta de E2 al primer apartado del desafío Compartir la ruta - reto Misión siembra en Marte



Respecto a los signos utilizados por E2, se evidencia que el “=” es usado como símbolo que representa equivalencia (García, 2007; Kieran y Filloy, 1989; Serres, 2011), dado que relacionan las magnitudes de distancia y tiempo asociadas a la automatización del robot. En este sentido, los estudiantes evidencian un cambio entre las consideraciones de los objetos de razonamiento de los pensamientos aritmético y algebraico (Radford, 2021). El hecho de que los estudiantes se posicionen en un nivel denotación simbólica promueve el uso de signos a partir del PAE.

Frente a la analiticidad presente en la respuesta de E2, se observa que los estudiantes establecen relaciones de equivalencia entre magnitudes de tiempo y distancia (*60 cm = 0,89 y 40 cm = 0,59333*) para identificar la magnitud que se debe programar en un metro. Es así que los participantes asocian una relación de entre las magnitudes de distancia y tiempo, donde 60 cm + 40 cm = 1 metro y 0,89 seg + 0,59333 = tiempo requerido para que el robot se desplace 1 metro.

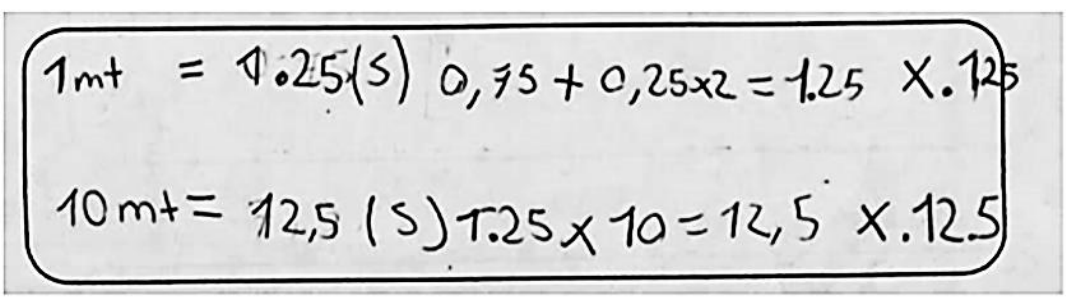
En este sentido, las relaciones establecidas poseen un carácter deductivo en términos de las estructuras métricas y de proporcionalidad (Radford, 2021).

En torno a la indeterminancia de las magnitudes, E2 señalan que *para encontrar la cantidad de tiempo que se demora en andar n* [símbolo para la magnitud indeterminada] *metros, se multiplica 1,48333 seg por n metros.* Es así que los estudiantes evidencian un tratamiento de las magnitudes indeterminadas y sus propiedades como si de magnitudes determinadas se tratara (Radford, 2021).

Por último, al examinar la respuesta de E1, se observa que denotan la magnitud indeterminada (variable) a través del símbolo *X*, lo que de acuerdo con Radford (2021) evidencia el nivel más sofisticado de generalización, el *simbólico*. Frente a la magnitud indeterminada, los estudiantes hacen explícito su notación a través del símbolo *X*, el cual utilizan para representar la fórmula o expresión de generalidad que devela la automatización del recorrido. No obstante, es importante reconocer que la expresión algebraica posee signos que están anclados a comprensiones del pensamiento aritmético, como es el caso de *mt* que representa metros (Castellanos y Obando, 2009). La Figura 27 evidencia el proceso analítico y la expresión algebraica que presentan los estudiantes para automatizar el recorrido del robot en metros.

Figura 27

Respuesta de E1 al primer apartado del desafío Compartir la ruta - reto Misión siembra en Marte

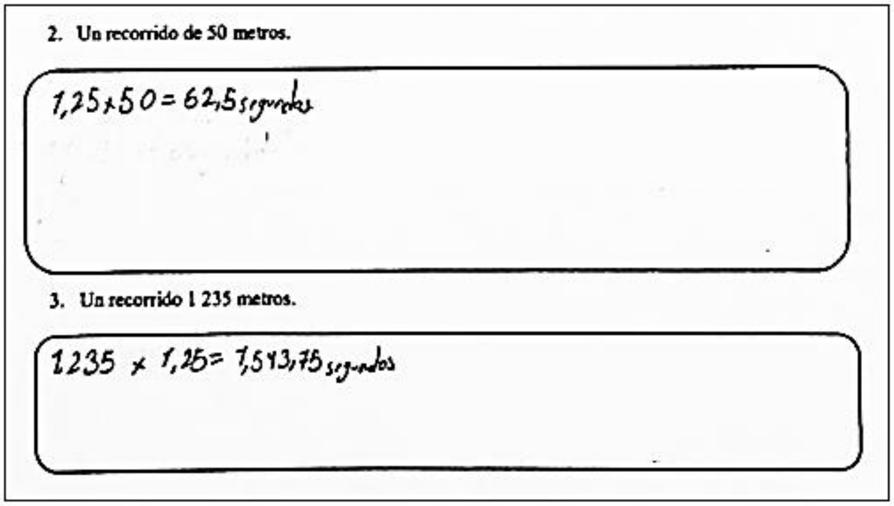


En torno al proceso analítico que exhibe E1 (Figura 27), se observa que los estudiantes utilizan las relaciones determinadas en los desafíos anteriores y señalan que *0,75* (segundos a programar para que el robot se desplace 60 cm) sumado con dos veces *0,25* (segundos a programar para que el robot se desplace 20 cm) corresponde a la magnitud a asignarse para determinar la magnitud deseada, en este caso un metro. Los procesos llevados a cabo por el equipo ponen de manifiesto que los integrantes de E1 recurren a las relaciones proporcionales y la estructura métrica para establecer la expresión algebraica, lo cual de acuerdo con (Radford, 2021) evidencia un pensamiento algebraico. De hecho, es importante reconocer que los E1 no solo determinan la magnitud a programar para un metro, sino que también establecen una relación con un recorrido de 10 metros.

Los integrantes de E1, E2, y E3 al enfrentarse a la primera parte del desafío *Compartir la ruta*, recurren a las estructuras y relaciones métricas y proporcionales para determinar las posibles expresiones algebraicas para la automatización del recorrido (ver Figuras 25, 26 y 27). Aunque el nivel de generalización en la denotación es diverso, se encuentran en los niveles *factual* (Figura 25, E3) y *simbólico* (Figuras 26 y 27, E2 y E1), dado que en el primer caso la magnitud indeterminada no alcanza a ser denotada, solamente se enuncia el posible proceso a seguir para encontrarla (Radford, 2021). Si bien los estudiantes denotaron de alguna forma la expresión de generalidad, es relevante contemplar los procesos para encontrar una magnitud relacionada con la fórmula. La Figura 28 exhibe las respuestas de los tres equipos donde se les solicitó que determinaran la magnitud de tiempo asociada a la automatización de los recorridos de 50 y 1235 metros.

Figura 28

Respuestas de E3, E2 y E1 en torno a los recorridos de 50 y 1235 metros en el desafío Compartir la ruta - reto Misión siembra en Marte



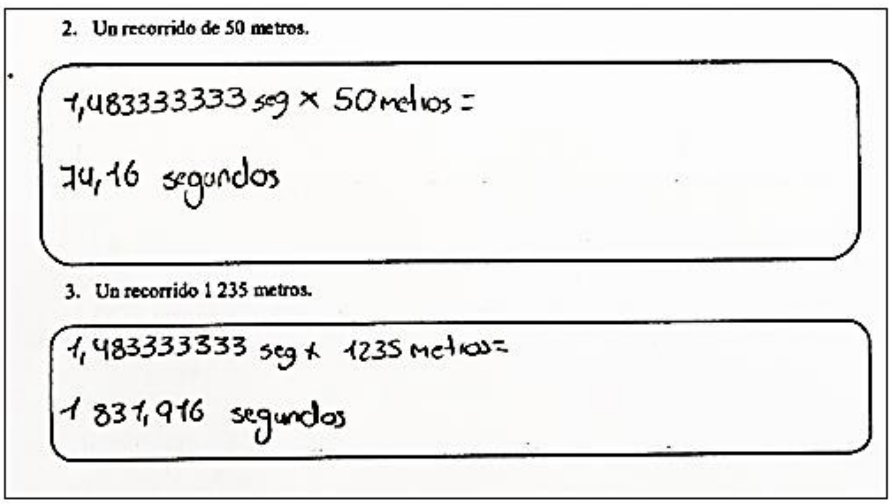
2. Un recorrido de 50 metros.

1,25×50 = 62,5 segundos

3. Un recorrido 1 235 metros.

1235 × 1,25 = 1.543,75 segundos

Respuestas E3



2. Un recorrido de 50 metros.

1,483333333 seg × 50 metros =

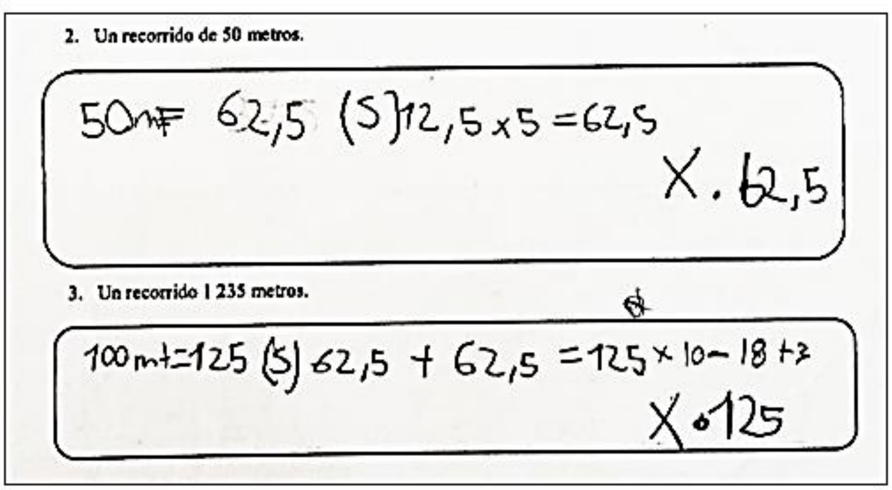
74,16 segundos

3. Un recorrido 1 235 metros.

1,483333333 seg × 1235 metros =

1 831,916 segundos

Respuestas E2



2. Un recorrido de 50 metros.

50mt 62,5 (S) 12,5 × 5 = 62,5

X . 62,5

3. Un recorrido 1 235 metros.

100 mt = 125 (S) 62,5 + 62,5 = 125 × 10 − 18 + 3

X · 125

Respuestas E1

La Figura 28 permite observar que los integrantes de E1 y E2 recurren a la expresión de generalidad elaborada para determinar la magnitud asociada a los recorridos de 50 y 1235 metros. En este sentido, el procedimiento operativo evidencia que los estudiantes identifican la función de la magnitud indeterminada en la expresión algebraica, dado que se remplaza la magnitud determinada en la posición de la magnitud indeterminada y se opera de acuerdo con sus propiedades. Aunque E1 no evidenciara una denotación de la magnitud indeterminada en la expresión construida (Figura 25), reconocen y comunican la forma en la cual se puede encontrar la magnitud requerida.

De esta manera, las expresiones construidas por E1 y E2 evidencian un significado procedimental y operativo, donde es suficiente reemplazar la magnitud determinada (50 o 1235) en la expresión construida para determinar la magnitud de tiempo asociada a la automatización del robot. De acuerdo con Merlo-Espino et al. (2020), este aspecto evidencia que la RE fomenta una comprensión y denotación de las magnitudes en función de las expresiones algebraicas y los procedimientos operativos a desarrollar.

Frente al proceso operatorio de E1, se observa que no recurren a la expresión algebraica construida (ver Figura 28); los estudiantes identifican las magnitudes de tiempo asociadas a la automatización del robot a partir de relaciones proporcionales. En este sentido, E1 recurre a la relación de la Figura 27 (*10 mt = 12,5 s*) para establecer la magnitud de 50 m, dado que operan *12,5 x 5*. Es así que los integrantes de E1 establecieron que 50 equivale a 10 multiplicado por 5, lo que evidencia un pensamiento analítico en la solución del problema (Radford, 2021).

Si bien E1 recurre a una manera analítica para determinar magnitudes asociadas a las situaciones propuestas a través de relaciones proporcionales, la expresión algebraica construida no evidencia un significado para el tratamiento de la información. Por ejemplo, la magnitud asociada al recorrido de 1235 metros no fue determinada por el equipo, dado que se llevaron a cabo errores procedimentales en las relaciones proporcionales y asociación de magnitudes de distancia y tiempo como una misma variable. En este sentido, aunque las relaciones proporcionales contribuyen al establecimiento a la identificación de relaciones y estructuras al interior de un dominio (Kieran, 2018; Radford, 2021), estas estrategias deben impulsar una forma de pensamiento en función de la generalidad, donde las expresiones algebraicas y la denotación de la magnitud indeterminada adquiera un sentido para los estudiantes (Papini, 2003).

En síntesis, cuando se integra la RE como instrumento en las dimensiones del hardware y software para abordar ecuaciones algebraicas, es relevante concebir aspectos conceptuales que caracterizan la práctica educativa; de manera específica, a partir de la intervención realizada se identifican cuatro componentes a contemplar. El primero, conlleva a valorar el *ensayo y error dirigido* como un procedimiento heurístico básico que fomenta habilidades y estrategias sofisticadas basadas en las estructuras. El segundo, implica considerar que la constante interacción de los estudiantes con las dimensiones de la RE (hardware y software) permite que se interprete o se signifiquen las magnitudes y sus relaciones con la situación. El tercero, la denotación que se suscita depende de los programas (software) utilizados, de las notaciones colectivamente construidas en clase y las concepciones previamente constituidas. El cuarto, conforme los participantes interactúan con el hardware, transcienden procesos asociados a la comprobación y recurren a la abstracción de relaciones y estructuras, es decir, dejan de utilizar los robots como instrumento de apoyo en el proceso de razonamiento.

Frente al primer aspecto, el *ensayo y error dirigido* se constituye una estrategia heurística a la que recurren los estudiantes en los desafíos iniciales de ecuaciones algebraicas, no obstante transciende y deja de utilizarse como principal método para posibilitar que los participantes adopten procedimientos más sofisticados y de alto nivel, basados en el reconocimiento de relaciones y estructuras (Kieran, 2018). Este elemento se evidencia en los procesos llevados a cabo en el primer desafío del reto Misión siembra en Marte, donde la forma para determinar el primer recorrido es el *ensayo y error dirigido* (ver Tabla 8); sin embargo, solo constituyó un procedimiento inicial, dado que se comenzaron a construir relaciones de magnitudes a partir del concepto de proporcionalidad (Tabla 9).

En este sentido, los razonamientos que estaban anclados a la comprobación empírica del uso del robot, son desplazados por formas de razonamiento deductivo, donde las relaciones y estructuras fugen el papel preponderante en el establecimiento de relaciones entre magnitudes y su denotación (Tablas 8 y 9). Es así que el uso del hardware y el software como instrumento que apoya el razonamiento abductivo, fomenta la configuración de relaciones algebraicas basadas en estructuras y relaciones y no solo en comprobaciones empíricas. De esta manera, el pensamiento inicia en elementos contextuales o físicos y transciende a un plano abstracto basado en reglas y propiedades.

En torno al segundo elemento, la constante interacción que debe realizarse con el software y el hardware para buscar relaciones entre las magnitudes de distancia (desplazamiento-hardware) y tiempo (programación-software), fomentó que se reconociera el carácter dependiente entre ambas magnitudes al automatizar el robot (ver Tabla 8). En este sentido, aunque los participantes de la investigación no estaban familiarizados con el concepto de velocidad, reconocieron que las magnitudes de tiempo y distancia se relacionaban de alguna forma. No obstante, este tipo de inferencias se desprende del continuo uso de la RE como instrumento. Así mismo, estas características posibilitaron que los estudiantes dotaran de sentido a las magnitudes indeterminadas en función de las determinadas (Tabla 8).

En relación con el tercer aspecto, aunque la RE en sus dimensiones del hardware o el software no requiera una denotación simbólica de las expresiones algebraicas, el uso de la RE requiere que los estudiantes relacionen la programación asociada al software de acuerdo con los aspectos físicos del hardware. En este sentido, el uso de la RE implica una comunicación entre ambas dimensiones, de tal forma que puedan abstraerse las relaciones y ser movilizadas a través de la programación (Merlo-Espino et al., 2020). Es así que es relevante precisar que la denotación presente en la RE depende de los softwares, el tipo de notación semiótica que se promueva en el aula y las concepciones constituidas hasta ese nivel escolar.

De acuerdo con el tipo de software utilizado se fomenta una notación específica, es decir, está anclada al desarrollo del programa que el profesor promueva. Por ejemplo, las magnitudes indeterminadas estaban asociadas al tiempo (otros dependen de las rotaciones, p. ej, Lego) y los decimales se denotaban con punto y no con coma. Aunque los estudiantes tratan de comunicar las relaciones que encuentran con sus compañeros, muchas de esas estrategias están basadas en un lenguaje *factual*, es papel del profesor promover situaciones de comunicación semiótica escrita para suscitar un lenguaje menos deíctico. Así mismo, se identifica que los estudiantes aún recurren a significados de los símbolos ancados al pensamiento aritmético, no obstante, si su expresión algebraica no genera conflictos semánticos, posibilita la manipulación de magnitudes.

Frente al cuarto aspecto, se observa que las principales estrategias para determinar relaciones dependían del uso del hardware como instrumento de comprobación empírica; no obstante, se suscita un uso de la RE en sus dos dimensiones basado en la abstracción de reglas y características. De forma específica, los estudiantes recurrieron al uso del hardware en el primer desafío, pero los tres siguientes no fue requerido el uso de los robots, lo que evidencia una abstracción de las relaciones implícitas en el movimiento.

Aunque hasta el momento se han mencionado características del PAE de acuerdo a sus dos principales dominios matemáticos (patrones-secuencias y ecuaciones algebraicas) y se han relacionado con las dimensiones de la RE (software y hardware); se hace necesario reconocer la incidencia de la RE como instrumento en las condiciones del PAE. En este sentido, se reportan a continuación características del PAE cuando se integra RE en la clase de matemáticas.

En torno a la primera condición del PAE, la continua interacción entre el *software* (programación de las magnitudes) y el *hardware* (ejecución de los algoritmos computacionales) se evidencia que fomenta una comprensión de las características de las magnitudes (el papel de las variables, incógnitas y parámetros), debido a que se pone en relieve asuntos como la dependencia y las relaciones entre magnitudes (Tabla 8). Por un lado, el hardware es un instrumento con potencial para fomentar la comprensión de las magnitudes, dado que promueve situaciones en las cuales los estudiantes pueden recrear y relacionar problemas que vinculan magnitudes, lo que dota de sentido y significado a las magnitudes indeterminadas (Alsina y Acosta, 2018; Merlo-Espino et al., 2020).

Por otro lado, es importante resaltar que el software como instrumento implica cambios conceptuales en el tratamiento de las magnitudes indeterminadas. Mientras que a lápiz y papel es común que el objetivo de las tareas relacionadas con los patrones-secuencias resida en la predicción de una posición o magnitud determinada a partir de una determinación sensible previa (Radford, 2013, 2021); en la construcción de algoritmos computacionales los estudiantes reconocieron las regularidades y construyeron secuencias al agrupar los patrones determinados (Agatolio et al., 2018; ver Figuras 12, 14, 16 y 17).

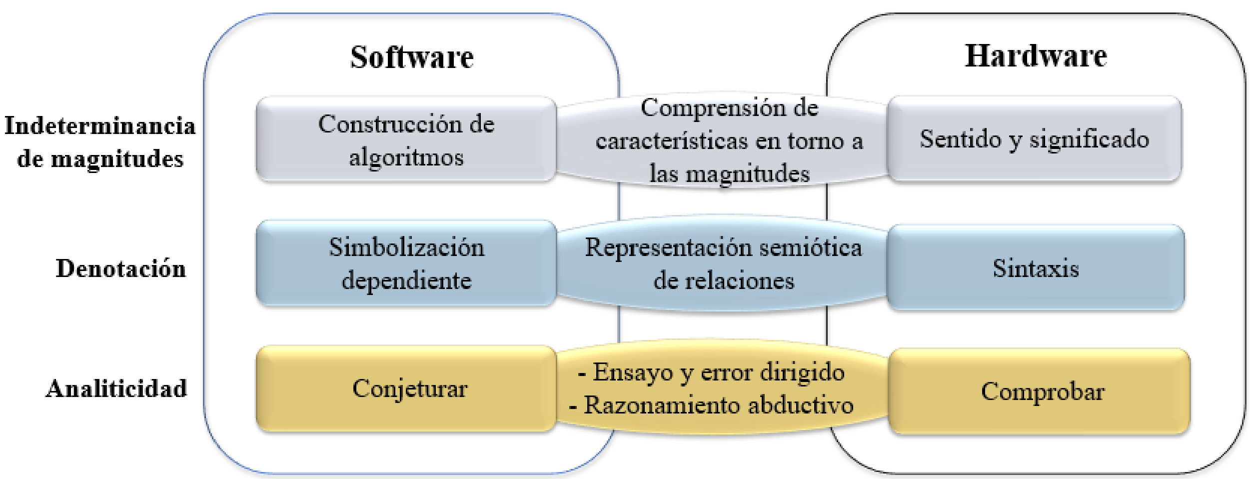
Frente a la segunda condición, la denotación, se logró determinar que el proceso de comunicación funge un papel fundamental para relacionar las magnitudes asociadas a cada sistema (software y hardware). Se observó que en la modificación de los algoritmos de programación (software) se requiere que los sujetos examinen la dependencia entre magnitudes y sean ajustadas de acuerdo con el valor de salida (ver Tabla 8). Aunque no exista una necesita de expresar algebraicamente relaciones con la RE, el vínculo entre los sistemas físicos (hardware) y el software, suscitó la representación de magnitudes y sus relaciones, de tal forma que se posibilitaran procesos operativos o de divulgación (Figuras 21, 22 y 23). En este sentido, se fomentó una semántica al interior de las expresiones que los estudiantes construyen para analizar y relacionar las magnitudes.

En torno a la última condición, la analiticidad, Radford (2021) señala que el razonamiento deductivo es uno de los aspectos que diferencia el pensamiento algebraico del aritmético; no obstante es importante que no se desconozcan otras formas de razonamiento como maneras de acceder al PAE (Vergel et al., 2022). En este sentido, se observa que el software y el hardware posibilitaron que los estudiantes adoptaran estrategias como el *ensayo y error dirigido*, que promueve un razonamiento abductivo (Núñez, 2019). Es así que el software permite conjeturar en torno a un evento y el hardware posibilita la comprobación de la situación (p. eje., Merlo-Espino et al., 2020).

En síntesis, la Re como instrumento en sus dimensiones (*software y hardware*) poseen características que inciden en el PAE, de manera específica se reflejan algunos aportes y transformaciones en relación con las condiciones del PAE (magnitudes indeterminadas, denotación y analiticidad). La Figura 29 representa el potencial de la RE al ser integrada como instrumento mediatizador entre estudiantes de séptimo grado y el PAE. Los vínculos que se establecen se derivan de la evidencia empírica de la intervención de aula y la reflexión personal del investigador en torno al PAE.

Figura 29

Potencial de la RE en el desarrollo del PAE



Nota. Elaboración propia.

Aunque la Figura 29 presente algunas transformaciones o aportes de la RE como instrumento que mediatiza la actividad matemática entre estudiantes de séptimo grado y el PAE, se requiere mayor evidencia empírica que permita reconocer aspectos para el diseño de nuevas intervenciones de aula. En el siguiente apartado, se exponen las conclusiones derivadas del análisis de la evidencia empírica y las consideraciones del investigador frente al PAE.

Capítulo 5
Conclusiones

Se reconoce en la literatura internacional que existen diferencias subyacentes entre los pensamientos algebraico y aritmético, aspectos que debe concebirse en el diseño e implementación de actividades orientadas al desarrollo del Pensamiento Algebraico Escolar (PAE). Así mismo, se admite que no basta con identificar el objeto de conocimiento, en este caso el álgebra escolar, es necesario reconocer la incidencia de los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) culturales que mediatizan la actividad de enseñanza. Al respecto, se reconoce a la Robótica Educativa (RE) como un instrumento con potencial para mediatizar y ser integrado en el desarrollo del PAE.

En este sentido, la presente investigación se propuso *analizar el Pensamiento Algebraico escolar en estudiantes de séptimo grado cuando se integra Robótica Educativa en clase de matemáticas*. El análisis de las producciones de los participantes permite informar acerca de transformaciones en la actividad de pensamiento entre los estudiantes y el objeto de conocimiento. A continuación, se señalan tres conclusiones de los cambios o aportes al PAE en estudiantes de séptimo grado al integrar la RE como instrumento mediatizador.

En primer lugar, frente a la comprensión de magnitudes indeterminadas, se identifica que la RE como instrumento mediatizador propicia que los estudiantes establezcan relaciones entre magnitudes a partir de contextos físicos. Este aspecto fomenta la identificación de características como las regularidades (figurales o numéricas), la dependencia de eventos o las constantes al interior de una situación. Así mismo, se evidencian modificaciones en torno al tratamiento del objeto de razonamiento; por ejemplo, en el procesamiento de patrones-secuencias, debido a que con este instrumento (RE) el objetivo es la construcción de secuencias computacionales, en vez de un análisis de las mismas.

En segundo lugar, se evidencia que la RE promueve la denotación algebraica. Aunque para el uso de este instrumento no sea esencial una denotación de alto nivel como la simbólica, las diversas situaciones algebraicas fomentan una simbolización con carga semántica para los estudiantes. Esto se debe a la constante necesidad de relacionar las dos dimensiones de la RE (software y hardware). Así mismo, cuando los estudiantes comunican de manera escrita las relaciones entre magnitudes que identifican, se evidencia potencial para manipular algorítmicamente y de forma analítica las relaciones.

En tercer y último lugar, aunque el razonamiento deductivo es uno de los aspectos que evidencian la analiticidad y que diferencia un tratamiento algebraico de los datos, estrategias heurísticas como el ensayo y error dirigido fomentan procedimientos más sofisticados, basados en las relaciones y las estructuras. Así mismo, el ensayo y error dirigido promueve el razonamiento abductivo, que de acuerdo con Soler-Álvarez y Manrique (2014) y Velásquez (2015) permite la generación de nuevo conocimiento. En este sentido, no es necesario que los estudiantes reconozcan las relaciones o estructuras *a priori*, pueden identificarlas a partir de la integración de la RE en el aula de clase. Es así que, la integración de la RE como instrumento que mediatiza la actividad de aprendizaje y enseñanza posibilita que los estudiantes accedan a formas deductivas de razonamiento a partir de inferencias abductivas, sin requerir exhaustivas orientaciones o sugerencias de los profesores.

Capítulo 6

Recomendaciones y líneas investigativas abiertas

A partir del análisis de los resultados y las consideraciones metodológicas en la implementación, se presentan cinco recomendaciones en torno a futuras intervenciones de aula e investigaciones donde la RE funge como instrumento para el desarrollo del PAE. En primer lugar, resulta fundamental considerar que los softwares asociados a las experiencias de aula establecen la forma de relacionamiento de los estudiantes con el objeto de conocimiento. En este sentido, es necesario concebir las funciones, potencialidades y limitaciones que los programas (softwares) poseen, es decir la analizar la interfaz en su generalidad. Por ejemplo, cuando el software a utilizar proporciona instrucciones, sugerencias o restringe las opciones para proceder en el programa, los estudiantes se limitarían a ser seguidores de comandos. El aspecto descrito limita procesos de razonamiento, búsqueda de estrategias para la resolución de problemas o inferencia de relaciones y estructuras.

En segundo lugar, es crucial considerar aspectos vinculados al error, dado que en la dimensión física de la RE (hardware) pueden influir elementos relacionados con la construcción, el voltaje, la fricción y la orientación del robot. En este sentido, es preciso que se mencionen las posibles divergencias o adaptaciones requeridas en la implementación para la construcción de algoritmos de programación y su ejecución.

En tercer lugar, aunque la RE promueva la denotación a través de la comunicación semiótica, los profesores son los encargados de promover la simbolización de expresiones algebraicas por medio de las tareas propuestas. En este sentido, para alcanzar un nivel de denotación simbólica, se requiere potenciar la generalización de relaciones, aspecto que permite evidenciar la comprensión, denotación y analiticidad de las magnitudes en los estudiantes.

En cuarto lugar, si bien en el objetivo de la investigación no se concibe la construcción del robot como un elemento para analizar el PAE, se reconoce la importancia de disponer de espacios para el ensamble del robot. Este aspecto contribuye al análisis lógico del funcionamiento de los robots. De esta manera, los estudiantes pueden diagnosticar las razones de las fallas en la ejecución de un algoritmo computacional, el cual puede ser en términos de la programación o el ensamblaje.

Frente al estudio de experiencias relacionadas con la RE como instrumento y el PAE, en quinto lugar, se enuncian aspectos para el análisis de la información. Se observó que los participantes recurrieron a expresiones dícticas, en las cuales se señalan o advierten patrones o relaciones por medio de gestos, acciones o precisiones contextuales. En este sentido, los registros de audio, observación participante o producciones manuscritas limitan la caracterización de la comprensión, denotación y analiticidad de magnitudes y sus relaciones; es necesario registrar las acciones físicas a través de video de cada equipo, de tal manera que sea posible identificar los razonamientos y procedimientos gestados para resolver la situación planteada.

Frente a las líneas investigativas abiertas que suscitó la presente investigación, se consideran:

- La exploración del Pensamiento Algebraico Escolar a partir del concepto de función, con el uso de la Robótica Educativa como instrumento mediatizador. Esta línea permitiría considerar no solo los niveles de denotación, sino que a su vez, examinar la incidencia en la interpretación, análisis y representación gráfica de funciones.
- El estudio de secuencias-patrones en las dimensiones del software y hardware de la Robótica Educativa, de tal forma que permita caracterizar los aportes del hardware y su relación con el software.
- Analizar la comunicación que promueven diversos softwares y hardware, en relación con los niveles de denotación factual, contextual y simbólico. Este aspecto posibilitaría considerar los instrumentos de Robótica Educativa más apropiados para fomentar la simbolización.
- Identificar con mayor detalle la incidencia de las dimensiones de la RE en las condiciones del PAE, de tal manera que pueda caracterizarse la integración de la RE en diversos niveles educativos.
- Analizar la incidencia de razonamientos inductivos, deductivos y abductivos en el tratamiento de la información para el desarrollo del PAE.

Referencias

Abidin, Z., Arifudin, R., Hardyanto, W., Akhlis, I., Umer, R., y Kurniawan, N. (2021). Low-cost educational robotics for promoting STEM education. *Journal of Physics: Conference Series*, *1918*(4). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/4/042018

Acevedo-Zapata, S., y Carmona-Mesa, J. A. (2021). Análisis documental sobre la educación STEM/STEAM no formal en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas: el caso de Iberoamérica. En E. Serna (Ed.), *Revolución en la Formación y la Capacitación para el Siglo XXI (4a ed.) (Vol. I)* (pp. 443–458). Medellín: Instituto Antioqueño de Investigación.

Agatolio, F., Albanese, F., y Moro, M. (2018). How an Ambitious Informatics Curriculum Can Influence Algebraic Thinking of Primary School Children. En *International Conference on Informatics in Schools: Situation, Evolution, and Perspectives* (Vol. 1, pp. 354–365). https://doi.org/10.1007/978-3-030-02750-6_27

Aguilar, S., y Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Píxel-Bit, Revista de Medios y Educación*, *47*, 73–88. https://doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i47.05

Alfieri, L., Higashi, R., Shoop, R., y Schunn, C. (2015). Case studies of a robot-based game to shape interests and hone proportional reasoning skills. *International Journal of STEM Education*, *2*(1), 1–13. https://doi.org/10.1186/s40594-015-0017-9

Alsina, Á., y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *52*, 218–235.

Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *EMA*, *3*(3), 241–253.

Araújo, C. A. P., Santos, J. D. P., y Meireles, J. C. (2017). Uma proposta de investigação tecnológica na Educação Básica: aliando o ensino de Matemática e a Robótica Educacional. *Revista Exitus*, *7*(2), 127. https://doi.org/10.24065/2237-9460.2017v7n2ID304

Arroyo, M. (2021). *Desarrollo de competencias ciudadanas a través de una propuesta educativa mediada por la robótica en la Institución Educativa Gabriel García Márquez de la Ciudad de Medellín* [Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico Metropolitano]. http://repositorio.itm.edu.co/handle/20.500.12622/4693

Badilla, E., y Chacón, A. (2004). Construccionismo: Objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, *4*(1), 0.

Barranco, A. A. (2012). La robótica educativa, un nuevo reto para la educación panameña. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.*, *13*(2), 9–17.

Barrera, N. (2015). Uso de la robótica educativa como estrategia didáctica en el aula. *Praxis y Saber*, *6*(11), 215–234.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). Un nuevo modelo de álgebra elemental como alternativa a la "aritmética generalizada". *Recherches en didactique des mathématique*, *21*(3), 247–304.

Bravo, F. Á., y Forero, A. (2012). La robótica como un recurso para facilitar el aprendizaje y desarrollo de competencias generales. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *13*(2), 120–136.

Brender, J., El-Hamamsy, L., Bruno, B., Chessel-Lazzarotto, F., Zufferey, J. D., y Mondada, F. (2021). Investigating the Role of Educational Robotics in Formal Mathematics Education: The Case of Geometry for 15-Year-Old Students. En *European Conference on Technology Enhanced Learning: Vol. 12884 LNCS* (pp. 67–81). https://doi.org/10.1007/978-3-030-86436-1_6

Burgos, M., y Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educacion Matematica*, *31*(3), 117–150. https://doi.org/10.24844/EM3103.05

Caballero, Y. A. (2020). *Desarrollo del pensamiento computacional en Educación Infantil mediante escenarios de aprendizaje con retos de programación y robótica educativa* [Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca]. http://hdl.handle.net/10366/142799

Cañadas, M., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, *37*(1), 53–59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Casado, R., y Checa-Romero, M. (2020). Robótica y Proyectos STEAM: Desarrollo de la creatividad en las aulas de Educación Primaria. *Pixel-Bit, Revista de Medios y Educación*, *58*, 51–69. https://doi.org/10.12795/pixelbit.73672

Castellanos, S. M., y Obando, J. A. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. En *10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, y J. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75–94). Jaén: SEIEM.

Chuang, C.-W., y Cheng, H. H. (2022). Learning Algebra with Robotics in Math Classes. *2022 18th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, 1–6. https://doi.org/10.1109/MESA55290.2022.10004399

Conde, R., y Conde, Y. (2005). El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos. En *V Congreso Internacional Virutal de Educación* (pp. 1–27).

Creswell, J. W. (2012). *Educational research : planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Lincoln: Pearson.

Cuevas, R., y Martínez, Y. (2018). *Estrategias de capacitación y acompañamiento para el uso docente de la Robótica Educativa en Matemática del nivel secundario, en el liceo Enriquillo Modalidad Académica, del Distrito 05 Duvergé, Regional 18 Bahoruco, Período Septiembre-diciembre 2018* [Tesis de Maestría, Universidad Abierta para Adultos UAPA]. http://190.122.99.186/handle/123456789/476

Diago, P. D., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2018). La resolución de problemas matemáticos en primeras edades escolares con Bee-bot. *Matemáticas, educación y sociedad*, *1*(2), 36–50.

Domínguez, Y., Lázaro, J. de, Suarez, J., y Martínez, P. (2018). Experiencias sobre Robótica Educativa y programación con Mbot. *III Congreso de Electrónica y Automatización*.

Ferrada, C., Díaz-Levicoy, D., Salgado-Orellana, N., y Parraguez, R. (2019). Propuesta de actividades STEM con Bee-bot en matemática. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *8*(1), 33–43. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.33-43

Flick, U. (2014). *La gestión de la calidad en investigación cualitativa* (Vol. 8). Ediciones Morata.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en Educación Matemática*, *2007*, 71–92. http://funes.uniandes.edu.co/1268/

García, J. M. (2015). *Robótica Educativa. ¿Modelo para armar? 10*, 77–90.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la Escuela*, *73*, 95–108.

Gibbs, G. (2013). *El análisis de datos en investigación cualitativa* (Vol. 6). Ediciones Morata.

Godino, J., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J., Castro, W. F., Aké, L. P., y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *26*(42 B), 483–511. http://bit.ly/3RFR43P

Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento Álgebraico y su Didáctica para Maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Greenberg, R. I., Thiruvathukal, G. K., y Greenberg, S. T. (2020). Integrating mathematics and educational robotics: Simple motion planning. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, *1023*, 262–269. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26945-6_23

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragonBox Algebra© como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *30*(1), 33–44.

Hernández, S., Fernández, C., y Baptista, L. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta edic). Mc Graw-Hill: México.

Jiménez, J., Ramírez, J., y González, J. (2011). Sistema modular de robótica colaborativa aplicado en educación. *Revista Facultad de Ingenieria*, *58*, 163–172.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707–762).

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching. En *Early algebraization* (pp. 579–593). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_29

Kieran, C. (2016). Cognitive Neuroscience and Algebra: Challenging Some Traditional Beliefs. En *And the Rest is Just Algebra* (pp. 1–238). https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. En *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 79–105). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kieran, y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *7*(3), 229–240.

Kim, Y. R., Park, M. S., y Tjoe, H. (2021). Discovering Concepts of Geometry through Robotics Coding Activities. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(3), 406–425. https://doi.org/10.46328/ijemst.1205

Llorente, P. A., Gómez, R. G., De Tena, A. E., Medrano, I. C., y Hernández, I. (2019). Robótica educativa en la formación inicial del profesorado. En *Innovación y tecnología en contextos educativos Robótica* (pp. 260–268). Universidad de Málaga (UMA).

López, P. A., y Andrade, H. (2013). Aprendizaje de y con robótica, algunas experiencias. *Revista Educación*, *37*(1), 43. https://doi.org/10.15517/revedu.v37i1.10628

Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação*, *31*(1), 11–22.

Merlo-Espino, R. D., Rodríguez-Hernández, V., y Castaño-Meneses, V. M. (2020). Robótica Educativa como Herramienta Dirigida al Desarrollo de Pensamiento Algebraico en Edades Tempranas. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, *9*(2), 245–253. https://doi.org/10.37843/rted.v9i2.170

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá:

Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/1402

Molina, M. (2009). Una Propuesta de Cambio Curricular Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *Pna*, *3*(3), 135–156.

Moreno, I., Muñoz, L., Serracín, J. R., Quintero, J., Pittí, K., y Quiel, J. (2012). La robótica educativa, una herramienta para la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las tecnologías. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *13*(2), 74–90.

Mubin, O., Stevens, C. J., Shahid, S., Mahmud, A. Al, y Dong, J.-J. (2013). A review of the applicability of robots in education. *Technology for Education and Learning*, *1*(1). https://doi.org/10.2316/Journal.209.2013.1.209-0015

Múnera, J. M., Jimenez, A., Botero, M. A., Rivas, K. Y., y López, J. (2020). La educación moderna al alcance de arduino. *Revista Espacios*, *41*(30), 292–294.

Nevárez-Toledo, M. (2016). *La Robótica Educativa como herramienta de aprendizaje colaborativo en estudiantes de educación general básica superior* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Ecuador]. https://repositorio.pucese.edu.ec/handle/123456789/625

Núñez, J. (2019). Razonamiento abductivo: una contribución a la creación del conocimiento en educación. *Cadernos de Pesquisa*, *49*(171), 308–328.

Ocaña, G. (2012). Robótica como asignatura en enseñanza secundaria. Resultados de una experiencia educativa. *Espiral. Cuadernos del profesorado*, *5*(10), 56–64. https://doi.org/10.25115/ecp.v5i10.940

Ocaña, G., Romero, I. M., Gil, F., y Codina, A. (2015). Implantación de la nueva asignatura "Robótica" en Enseñanza Secundaria y Bachillerato. *Revista Investigación en la Escuela*, *7*(87), 65–79. https://doi.org/10.12795/IE.2015.i87.05

Ong, S. L., y Ling, J. P. W. (2020). Low-Cost Educational Robotics Car Promotes STEM Learning and 21 st Century Skills. *2020 IEEE International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE)*, 467–473. https://doi.org/10.1109/TALE48869.2020.9368487

Papert, S., y Harel, I. (1991). Situating Constructionism. *Cosntructionism*, *36*(2), 1–11.

Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 41–71.

Pérez, G., y Diago, P. (2018). Estudio exploratorio sobre lenguajes simbólicos de programación en tareas de resolución de problemas con Bee-bot. *Magister*, *30*(1 y 2), 9–20.

Pina, A. (2017). Robótica Educativa en Educación Primaria: ¿por qué y cómo? En y A. P.-C. (Coords. . S. Pérez- Aldeguer, G. Castellano-Pérez (Ed.), *Propuesta de Innovación Educativa en la Sociedad de la Información* (pp. 15–27). Eindhoven, NL: Adaya Press.

Plaza, P., Sancristóbal, E., Carro, G., Blazquez, M., García-Loro, F., Martin, S., Perez, C., y Castro, M. (2018). Arduino as an Educational Tool to Introduce Robotics. En *2018 IEEE international conference on teaching, assessment, and learning for engineering (TALE)* (pp. 1–8). IEEE.

Poco, J. A. (2018). *La Robótica Educativa Y Su Influencia En El Aprendizaje Colaborativo En Estudiantes De Primero De Secundaria De La I.E. General José De San Martín* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de San Agustín]. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/7076

Quiroga, L. P. (2018). La robótica: Otra forma de aprender. *Revista de Educación y Pensamiento*, *25*(25), 51–64.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, *11*(03), 25–53.

Radford, L. (2002). Algebra as tekhne. Artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(1), 31–56.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, 103–129.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pna*, *4*(2), 37–62. http://digibug.ugr.es/handle/10481/3505

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En *Early algebraization* (pp. 303–322). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2012). Reaction to part III: On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. En *From Text to "Lived" Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 283–288). https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3–12). Granada, España: Editorial Comares.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015). The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *Pna*, *9*(3), 129–141. http://hdl.handle.net/10481/34986

Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da ágebra na teoria da objetivação. In V. Moretti y L. Radford (Eds.),. En V. Moretti y L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171–195). Livraria da Física.

Radford, L., y Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 145–164. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9024-6

Rapley, T. (2014). *Los análisis de la conversación, del discurso y de documentos en Investigación Cualitativa* (Vol. 7). Ediciones Morata.

Reyes-González, D., y García-Cartagena, Y. (2014). Desarrollo de habilidades científicas en la formación inicial de profesores de ciencias y matemáticas. *Educación y Educadores*, *17*(2), 271–285. https://doi.org/10.5294/edu.2014.17.2.4

Rodríguez, R. J. (2005). Abducción en el contexto del descubrimiento científico. *Revista de filosofía*, *43*, 87–97. https://app.box.com/s/zcghqrbme9c2ggni2xjezztjssx9is6p

Rojas, P. J., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica y tecnológica*, 688–694.

Rojas, P. J., y Vergel, R. (2017). Pensamiento algebraico en el contexto escolar. En *VIII Congreso Iberoamericano, de educación matemática.* (pp. 590–598).

Román-Graván, P., Hervás-Gómez, C., y Guisado-Lízar, J.-L. (2017). Experiencia de innovación educativa con robótica en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla (España). En J. Ruiz-Palmero, J. Sánchez-Rodríguez, y E. Sánchez-Rivas (Eds.), *Innovación docente y uso de las TIC en educación* (UMA Editor, pp. 1–16).

Romero, J. (2018). *Estrategias metodológicas para la resolución de problemas en la unidad didáctica de matemática, en estudiantes del I ciclo de administración de negocios agropecuarios del I.E. S.T. " Lizardo Montero Flores ", Montero, Ayabaca, Piura.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo"]. https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/9049

Ruano, R. M., Socas, M., y Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *Pna*, *2*(2008), 61–74.

Ruta n. (2015). El lugar donde se potencia la innovación. En *Ruta n Medellín centro de innovación y negocios* (pp. 1–106). Horizontes: Nuestra herencia es conquistar fronteras.

Samuels, P., y Poppa, S. (2017). Developing Extended Real and Virtual Robotics Enhancement Classes with Years 10–13. En *Robotics in Education: Research and Practices for Robotics in STEM Education* (pp. 69–81). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42975-5_7

Serna, T. A., Cardona, E., y Carmona-Mesa, J. A. (2021). Una revisión de literatura sobre estrategias de enseñanza de las expresiones algebraicas en educación secundaria. *Uni-Pluriversidad*, *21*(2), 1–13. https://doi.org/10. 17533/udea.unipluri. 348601

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens*, *12*(1), 122–142.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5–34.

Soler-Álvarez, M. N., y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(2), 191–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Ema*, *7*, 227–246.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática*, *8*(2), 33–40.

Ursini, S. (1997). El lenguaje Logo, los niños y las variables. *Educación matemática*, *9*(2), 30–42.

Vega-Moreno, D., Cufí, X., Rueda, M. J., y Llinás, D. (2016). Integración de robótica educativa de bajo coste en el ámbito de la educación secundaria para fomentar el aprendizaje por proyectos. *International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI)*, *6*, 162–175.

Velásquez, G. (2015). El rol de la abducción peirceana en el proceso de la investigación científica. *Valenciana*, *8*(15), 189–213.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* [Tesis de Doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://funes.uniandes.edu.co/4054/1/Vergel2014Formas.pdf

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *Pna*, *9*(3), 193–215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Vergel, R., Radford, L., y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético “sofisticado” y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *36*(74), 1174–1192. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Viar, R. (2007). Estrategias En La Resolucion De Problemas. En *I.E.S. “Conde de Aranda” ALAGON* (pp. 1–12). Obtenido de: https://cursa.ihmc.us/rid=1K9GVFYNV-V5GMJ3-BP/Estrategias-Resolución de problemas.pdf.

Viegas-D’Abreu, J. V., y Villalba-Condori, K. O. (2017). Education and Educative Robotics. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, *11*(54), 1–13. https://doi.org/10.6018/red/54/11

Villacís, J. (2019). *Integración de la robótica mediante el uso de la plataforma Arduino para el aprendizaje de matemáticas en el aula* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico de Leiria]. http://hdl.handle.net/10400.8/4015

Warren, E., Trigueros, M., y Ursini, M. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73–108). https://doi.org/10.4324/9781315044378-17

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giamore, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* (pp. 1–16).

Zarzar, B., y Ceballos, R. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(3), 55–86.

Zhong, B., y Xia, L. (2020). A Systematic Review on Exploring the Potential of Educational Robotics in Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(1), 79–101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

Anexos

Anexo 1: consentimiento informado en la participación en el proyecto de investigación

Estimado acudiente, le invitamos a leer con cuidado este documento en el que le solicitamos su consentimiento para que su acudido participe de esta investigación que se realiza en la institución. Es necesario informarle y solicitar su aprobación en tanto su hijo(a) es menor de 18 años, y de acuerdo con la legislación colombiana respecto a los derechos de niños, niñas y adolescentes, es preciso que los acudientes firmen el consentimiento informado, a la par que los niños(as) firmen el asentimiento informado respectivo.

La investigación se adelanta en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia, la cual busca analizar el aporte de integrar la robótica en el desarrollo del pensamiento algebraico escolar. Para la realización de esta, se invita a los estudiantes del grado séptimo del colegio a participar de las interacciones que se dan entre estudiantes, profesores y conocimiento disciplinar. En ese sentido, los datos que serán importantes para el análisis en la investigación son:

- Videos que se registran en algunas de las sesiones de clase esenciales para la investigación.
- Diálogos, producción manuscrita (física y digital) y demás recursos que se utilicen en clase y sean elaborados por los participantes.
- Audios y videograbaciones de entrevistas.

Por lo anterior, les solicitamos su colaboración y respaldo autorizando el registro de esta investigación a través de los medios anteriormente mencionados, con el fin de que posteriormente sea analizada en función de los objetivos del proyecto. Sobre la participación en el proyecto informamos que:

1. La participación en el proyecto es voluntaria y gratuita.
2. Los estudiantes se pueden retirar de la investigación en cualquier momento sin que eso represente un perjuicio para ellos.
3. La participación en la investigación no tendrá efectos sobre la calificación (notas) de los desempeños de los estudiantes.
4. Los estudiantes no tendrán incentivos económicos por su participación en el proyecto.
5. Toda la información obtenida será archivada en papel y medio electrónico. El archivo se guardará en la Universidad de Antioquia bajo la responsabilidad del equipo de trabajo.
6. La información recolectada solo se utilizará para fines académicos. En caso de requerir usar alguna imagen o transcripción para algún informe de investigación se hará guardando la identidad de los participantes.
7. Al participar, los estudiantes formarán parte de ambientes de aprendizaje innovadores que fomentarán el desarrollo del pensamiento matemático, lógico y tecnológico.
8. La institución reconoce que el proyecto contribuye en el desarrollo y la investigación escolar, por esta razón favorece la ejecución del mismo.

Agradecemos su aporte a la comunidad científica y educativa del país, con certeza permitirán ampliar los desarrollos y comprensiones que se tienen sobre los ambientes que propician un aprendizaje de la matemática.

Manifiesto que no he recibido presiones verbales, escritas y/o mímicas para participar en el estudio; que dicha decisión la tomo en pleno uso de mis facultades mentales, sin encontrarme bajo efectos de medicamentos, drogas o bebidas alcohólicas, consciente y libremente.

He leído y escuchado satisfactoriamente las explicaciones sobre la participación en esta investigación. Así mismo, se me brinda copia del consentimiento informado y he tenido la oportunidad de hacer preguntas a las cuales se me han respondido satisfactoriamente, por lo que estoy de acuerdo en participar en ella y autorizo el uso de la información obtenida para los propósitos planteados en el apartado introductorio del presente consentimiento.

Firma del estudiante Nombre: Número de identificación: Fecha:	Firma del acudiente Nombre: Número de identificación: Fecha:
Yonatan Stiven Cardona Garzón Investigador Correo: yonatan.cardona@udea.edu.co Facultad de Educación - Universidad de Antioquia	Jaime Andrés Carmona Mesa Asesor del proyecto de maestría Correo: jandres.carmona@udea.edu.co Facultad de Educación – Universidad de Antioquia

Anexo 2: carta de invitación para participar de la intervención

Administración Nacional de la Agencia Colombiana en el Espacio **(COES)**
Equipo de Recursos Humanos
Medellín, octubre de 2022
Asunto: Equipo de automatización

Buenos días.

La humanidad se encuentra ahora más cerca que en cualquier otro momento de la historia de conocer los confines del universo y sus planetas, es por esta razón que la COES planifica misiones para estudiar lo desconocido. Sin embargo, se requiere de equipos que orienten y diseñen las misiones automatizables, de tal manera que afronten los diversos desafíos que implica la exploración del espacio. Al estudiar sus hojas de vida y experiencias reflejadas en las diversas clases, comprendemos el gran potencial que poseen para hacer parte de este gran proyecto, por esta razón están siendo invitados a hacer parte de la COES.

Así mismo, confiamos que el trabajo en equipo es la mejor manera de avanzar en el conocimiento, ya que "Individualmente, somos una gota, juntos, somos el mar" como señalaba Akutagawa (sf). Por este motivo, si está interesado en hacer parte de las futuras misiones, lo invitamos a conformar un grupo de tres o cuatro estudiantes y que de esta manera se consolide el *Equipo de automatización* para las misiones.

El primer encuentro tendrá lugar durante la próxima clase de matemáticas, en él se desea explorar y fortalecer los conocimientos requeridos para automatizar los robots que serán enviados a las misiones espaciales. Esperamos poder contar con su participación. Muchas gracias por su atención.

Atentamente,

____

Yonatan Cardona
Delegado de recursos humanos.

Integrantes

____

____

____

____

Anexo 3: guía del estudiante en el reto 1

Entrenamiento en la galaxia *Enana del Can Mayor*

Nombres:

Fecha:

La COES ha localizado y observado algunos planetas de la galaxia *Enana del Can Mayor*, y a partir de ellos, ha desarrollado algunos simuladores que recrean sus entornos para que los futuros equipos de exploración posean mayores probabilidades de éxito. Como forma de entrenamiento, tu equipo debe afrontar los diversos desafíos que se han simulado y evidenciar la posible solución encontrada a partir de un recorte o pantallazo en la columna "Evidencia de programación".

Sugerimos **identificar** el objetivo del desafío, luego crear el **algoritmo** de la posible solución, y finalmente, **ejecutar** la programación. Si al ejecutar la programación, el desafío no se cumple, inténtalo de nuevo y registra nuevamente los bloques de programación a través del pantallazo. Si lo has logrado, continua con el siguiente desafío. Al finalizar enviar a través de la plataforma institucional el presente documento con las evidencias.

Mundo Salvaje

En este planeta deben ayudar a Duba a comer su carne, por ello se requiere crear algoritmos que permitan realizar los recorridos. Debido a que cada bloque de algoritmo es una instrucción que se le da a Duba, es crucial indicar los pasos de la forma más abreviada, es decir, utilizar la menor cantidad de bloques. Buena suerte.

Reto	**Enlace**	**Evidencia de programación**
1	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/202	
2	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/230	
3	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/231	
4	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/232	

Planeta Arte

Coty está en el planeta del arte y desea pintar obras a partir de algunos bosquejos; como equipo deben proporcionar los algoritmos que permitan realizar cada trazo y de esta forma ayudar a la llama a completar sus dibujos. ¡Éxitos!

Desafío	**Enlace**	**Evidencia de programación**
1	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/208	
2	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/209	
3	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/233	
4	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/238	
5	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/235	
6	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/239	
7	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/2021207	
Pinta tu propia obra		
8	https://pilasbloques.program.ar/online/#/desafio/255	

Nota: Si quieres realizar más dibujos libres lo puedes hacer, simplemente recuerda evidenciar la programación y la pintura

Mundo Gélido

Ana y Elsa desean formar algunas figuras bidimensionales mientras patinan en el hielo, para ello, es necesario que tu equipo ayude a configurar los algoritmos que permiten construir cada forma. Algunas poseen regularidades en su construcción, por ello los invitamos a identificarlas e incorporarlas en la programación.

Desafío	**Enlace**	**Evidencia de programación**
1	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/1	
2	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/2	
3	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/4	
4	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/5	
5	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/6	
6	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/10	
7	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/11	
8	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/12	
Patina libremente con Elsa		
9	https://studio.code.org/s/frozen/lessons/1/levels/20	

Nota: Si quieres realizar más dibujos libres lo puedes hacer, simplemente recuerda evidenciar la programación y la pintura

Anexo 4: guía del estudiante en el reto 2

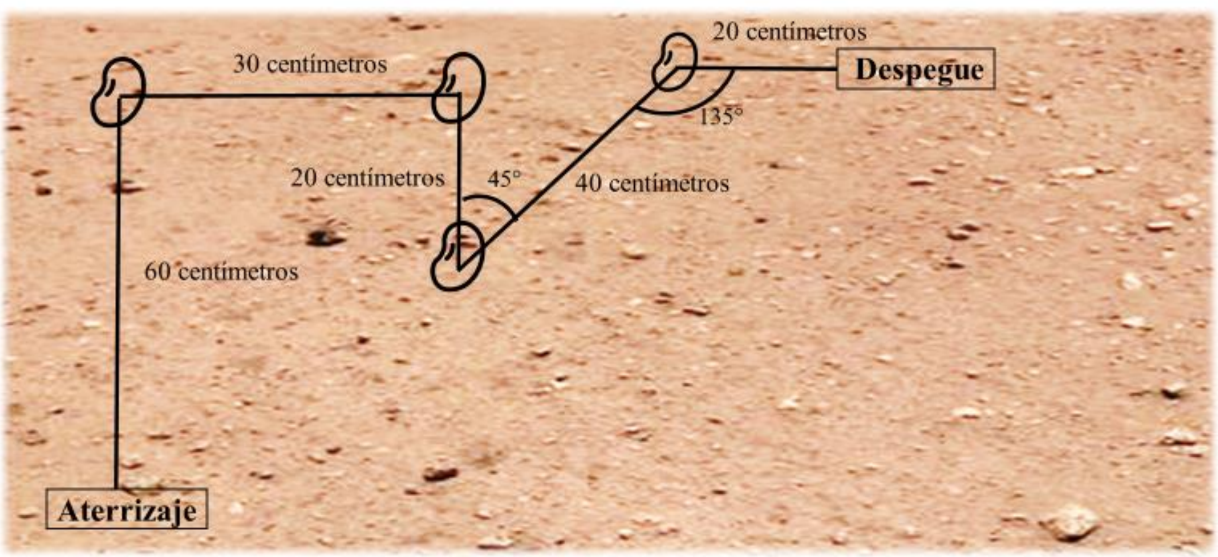
Misión siembra en Marte

La COES está planeando la exploración y posible adaptación de la vida vegetal en Marte, para ello han decidido enviar un robot que siembre algunas semillas en puntos que un grupo de biólogos ha determinado estratégicos. Para llevar a cabo esta misión, le han designado a tu equipo la tarea de automatizar el robot que realizará la siembra.

Automatizar desde la tierra

A continuación, se describen las indicaciones por parte de la COES para la misión:

- El robot debe ser programado a través de mBlock
- El porcentaje de éxito de la misión depende de la cantidad de semillas sembradas y su adecuada ubicación.
- El robot debe quedarse en el punto de siembra durante 3 segundos para que este pueda plantar la semilla.
- El mapa que debe recorrer el robot es:



Realizar la programación.

Compartir lo aprendido

Como método de entrenamiento para los próximos equipos encargados de programar robots en las misiones, la COES le ha pedido que posterior a la programación de la primera siembra:

1. Expresen la o las rutas que el equipo siguió para llegar a la programación final, es decir, ¿Qué información o elementos les permitieron construir el algoritmo de programación?

2. Evidenciar el algoritmo de programación utilizada en mBlock. (representar los bloques de programación).

3. Analizar las posibles relaciones entre los diferentes trayectos, por ejemplo, ¿El trayecto entre el punto de aterrizaje y la primera semilla posee alguna relación con el trayecto de la primera semilla y la segunda semilla? Expresar las relaciones entre los trayectos que puedan identificarse.

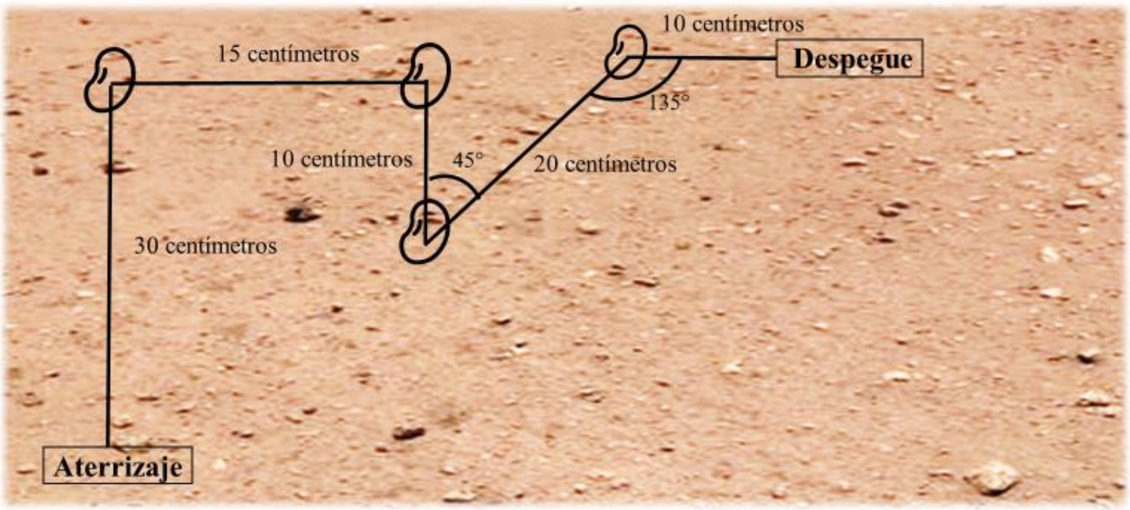
4. Formular las posibles relaciones entre el primer, tercer - cuarto giro del mapa.

5. Recomendaciones generales frente al primer desafío de la *Misión de siembra en Marte*.

Nota: Responde a los puntos planteados anteriormente en las hojas que el docente le ha proporcionado al equipo.

¡COES, tenemos un problema!

Cuando el robot llegó al punto de aterrizaje, el equipo encargado de la comunicación ha informado que las medidas del mapa son erróneas, por ello piden a tu equipo realizar nuevamente la programación para enviarla. Sin embargo, hay un problema, debe ser enviada en menos de 5 minutos ya que habrá una tormenta de arena que si alcanza al robot lo destruirá. A continuación, se encuentra el mapa con las medidas correctas. **¡A programar!**



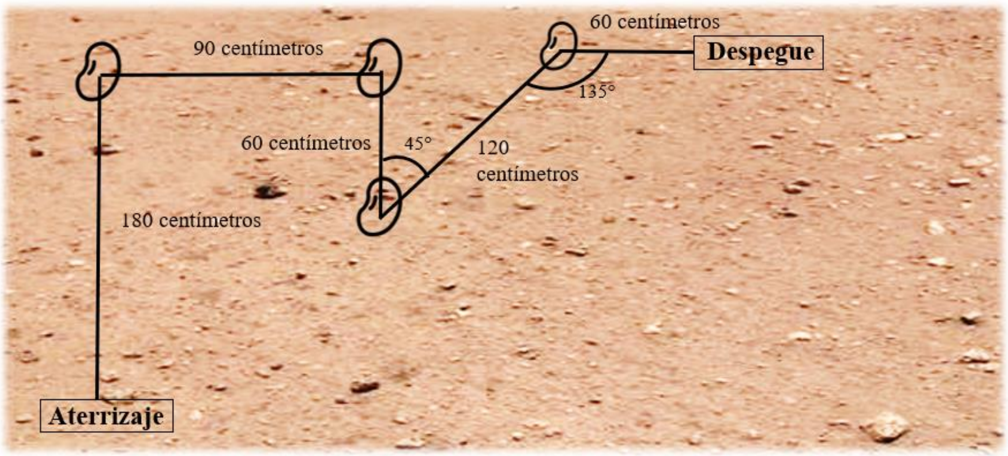
Después de programar el nuevo mapa, el equipo designado por la COES para llenar el combustible del robot, ha pedido al equipo automatizador establecer:

1. Relación de la distancia que recorre el robot entre los mapas programados. ¿Cómo cambia la programación?

2. Relación de los giros entre los mapas. ¿Qué cambia en la programación?

3. Relación de tiempo que tarda el robot en completar la misión.

4. ¿Cuál sería el tiempo que tarda el robot en completar la misión, si el mapa que se desea programar tuviese el triple de la distancia en cada uno de los recorridos?



Compartir la ruta

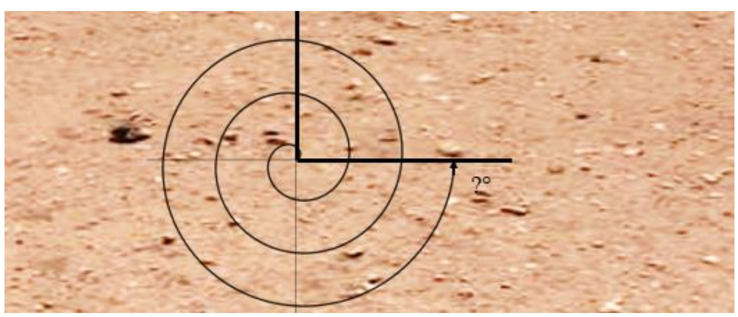
El equipo de biólogos ha encontrado otra zona que es ideal para sembrar algunas semillas, sin embargo, la última tormenta de Marte ha quemado los circuitos que permitían la comunicación del equipo automatizador con el robot. Por esta razón, es necesario que tu equipo comparta lo aprendido hasta el momento y facilite la programación de futuras misiones. De esta forma, se requiere identificar algunos algoritmos y expresiones matemáticas que permitan programar:

1. El recorrido en línea recta en metros.

2. Un recorrido de 50 metros.

3. Un recorrido 1 235 metros.

4. Los giros.



5. Un giro de 180°.

6. Un giro de 315°.