Estratificación de pensamiento algebraico manifestada a través de juegos

María Camila Arroyave Ocampo

Manuela Gómez Ospina

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Licenciadas en Matemáticas

Asesores:

Dr. John Henry Durango Urrego

Dra. Sandra Milena Zapata

Línea de Investigación:

Argumentación en álgebra/ Álgebra temprana

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Medellín, Colombia

2024

Dedicatoria

A Dios, cuya guía y bendiciones han iluminado mi camino a lo largo de este proceso. A mi compañera de trabajo de grado Manuela, por su colaboración incansable, su dedicación y su esfuerzo conjunto en este proyecto. Tu compromiso y trabajo en equipo han enriquecido esta experiencia y han sido fundamentales para alcanzar nuestras metas.

A mi amada pareja por motivarme y ser mi apoyo incondicional en cada paso de este camino académico. Tu amor y comprensión han sido mi mayor fortaleza.

A mi madre por su constante apoyo, sacrificio y amor incondicional. Su aliento y orientación han sido pilares fundamentales en mi vida.

A mis amados abuelos, cuya sabiduría, amor y valores han sido una inspiración constante en mi camino. Su legado perdura en cada logro que alcanzó.

María Camila Arroyave

A Dios, quien ha sido mi guía y fortaleza en cada paso de este camino, le dedico este trabajo de grado como testimonio de mi gratitud por su amor incondicional y su constante inspiración.

A María Camila, mi compañera de equipo, agradezco tu apoyo, colaboración y dedicación en este proyecto. Tu compromiso ha sido valioso para alcanzar nuestros objetivos.

A mi esposo Julián, quien ha sido mi mayor apoyo en los momentos de desafío. Gracias por tu amor incondicional, tu paciencia y tu constante estímulo para alcanzar mis metas.

A mi querida madre Anyuli, cuyo amor y sacrificio han sido la luz que ha iluminado mi camino desde el principio. Tu ejemplo de fortaleza y determinación siempre me inspira a dar lo mejor de mí.

A mi amado padre Fredy, por ser mi guía, mi consejero y mi modelo a seguir. Tus palabras de aliento y sabios consejos han sido un faro en los momentos de incertidumbre.

A mi familia, por su incondicional apoyo, comprensión y amor a lo largo de este proceso.

Que este trabajo sea un pequeño reflejo de mi profundo agradecimiento y amor hacia cada uno de ustedes, quienes han sido mi mayor inspiración y motivo de orgullo.

Manuela Gómez

Agradecimientos

Queremos expresar nuestra gratitud a las personas que contribuyeron de diversas formas a la realización de este trabajo de grado.

En primer lugar, queremos agradecer a Dios, fuente de sabiduría y fortaleza, por guiarnos y sostenernos a lo largo de este gratificante camino académico, además por concedernos la perseverancia y la capacidad para superar obstáculos, por inspirarnos en la búsqueda del conocimiento y por brindarnos la oportunidad de alcanzar esta meta académica.

Expresamos nuestro sincero agradecimiento a los asesores de este trabajo de grado, el doctor John Henry Durango y la doctora Sandra Milena Zapata, por su inestimable orientación, dedicación y apoyo a lo largo de este arduo pero gratificante proceso de trabajo de grado, su profundo conocimiento, orientación experta y valiosos comentarios han sido fundamentales para enriquecer este trabajo y llevarlo a su mejor versión. Cada sugerencia, corrección y consejo ha sido recibido con gratitud y ha contribuido al desarrollo y éxito de este proyecto.

La Facultad de Educación, que ha sido más que un lugar de estudio; ha sido un espacio en el que hemos encontrado inspiración, conocimiento y apoyo incondicional, los profesores y el personal administrativo han desempeñado un papel fundamental en nuestra formación, guiándonos con sabiduría y paciencia, y motivándonos a alcanzar nuestras metas.

Queremos dedicar unas palabras especiales a nuestras queridas familias, quienes han sido el pilar fundamental, el amor incondicional y la inspiración durante este trayecto, a nuestros padres, madres, hermanos, hermanas, abuelos, abuelas, y demás miembros de nuestras familias, quienes, con su apoyo incondicional, sus consejos sabios y su amor desinteresado han sido nuestra fuente de fortaleza y nuestra guía en cada paso de este camino.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

Este trabajo de grado se enfoca en investigar la manifestación de la estratificación del pensamiento algebraico en estudiantes de sexto grado, utilizando juegos específicamente diseñados para visualizar los diferentes niveles de estratificación propuestos por Radford (2010). Se plantea un diseño metodológico que integra la observación directa durante la práctica pedagógica, análisis cualitativos de las interacciones entre los estudiantes y equipos, así como la comprensión de conceptos algebraicos. Este estudio permitió identificar patrones y tendencias en la estratificación del pensamiento algebraico, abarcando desde niveles iniciales de comprensión hasta niveles avanzados de abstracción y aplicación. Los resultados obtenidos proporcionaron una comprensión esclarecedora de cómo los estratos del pensamiento se manifiestan mediante el uso de juegos, así como su influencia en el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico. Además, orientaron la implementación de estrategias pedagógicas efectivas para fomentar el pensamiento algebraico entre los estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Hernán Toro Agudelo.

Palabras clave: Estratificación, Pensamiento Algebraico, Juegos Educativos, Patrones, Secuencias.

Abstract

This thesis focuses on investigating the manifestation of the stratification of algebraic thinking in sixth-grade students, using games specifically designed to visualize the different levels of stratification proposed by Radford (2010). A methodological design is proposed that integrates direct observation during pedagogical practice, qualitative analysis of interactions among students and teams, as well as the comprehension of algebraic concepts. This study identifies patterns and trends in the stratification of algebraic thinking, spanning from initial levels of comprehension to advanced levels of abstraction and application. The results obtained provide an enlightening understanding of how the strata of thinking manifest through the use of games, as well as their influence on the progressive development of algebraic thinking. Furthermore, they guide the implementation of effective pedagogical strategies to promote algebraic thinking among sixth-grade students at the Hernán Toro Agudelo Educational Institution.

Keywords: Stratification, Algebraic Thinking, Educational Games, Patterns, Sequences**.**

Introducción

El interés de esta investigación surge en el desarrollo de la Práctica Pedagógica de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, la cual inició con una etapa de observación en la Institución Educativa Hernán Toro Agudelo, localizada geográficamente en la Comuna 3, en el barrio Manrique, en la zona nororiental de Medellín. Ubicamos esta investigación en el grado sexto tres, siendo esta una población de estudiantes con edades entre los 12 y 14 años. Estos estudiantes se caracterizan por el desinterés académico, los cambios de humor y actitudes desafiantes, además de volverse independientes, desarrollar su personalidad, generar intereses propios, ser vigorosos y activos.

Se resalta su curiosidad como el principal motivador de su aprendizaje, es por esto que, en el reconocimiento del contexto, se evidenció que los estudiantes se encontraban emocionados con actividades que estuviesen relacionadas con los sonidos, colores, material concreto, tecnológicas y actividades interactivas.

En el proceso se evidenció que las acciones anteriores se encontraban desligadas parcialmente de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que como menciona Mayela (2008) hay una preocupación por el bajo rendimiento en matemáticas, en donde resalta que el motivo principal del fracaso es por el método tradicional de enseñanza mecánica y repetitiva y destaca la importancia de que una forma de lograr el mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje es la resolución de problemas en matemáticas, mediante fundamentos teóricos y el conocimiento lógico matemático, propuestos a través de actividades lúdicas de interés para los estudiantes y concluye que la matemática no se aprende por transmisión directa de lo que explica el docente o de la información que se obtiene de los libros de texto; sino que se aprende en interacción con situaciones problemáticas las cuales obligan al estudiante a modificar su estructura cognitiva por el contacto con una multiplicidad de acciones que requieren distintas habilidades.

1. Planteamiento del problema

En el panorama educativo actual, la enseñanza de las matemáticas enfrenta el desafío de sostener el interés de los estudiantes, especialmente debido a la percepción común de que este campo es abstracto y complejo. Ante esta realidad, la integración del juego como herramienta emerge como una propuesta clave para la investigación. Aunque hay evidencia creciente que respalda los beneficios del juego en el proceso de aprendizaje, persisten incertidumbres sobre cómo llevar a cabo una integración en el currículo de matemáticas, particularmente en el pensamiento algebraico. La introducción cuidadosa de juegos no solo puede cambiar la percepción negativa asociada con las matemáticas, sino que puede ofrecer un enfoque participativo y motivador. La selección estratégica de juegos con los objetivos curriculares es esencial para la implementación de esta estrategia, que busca no solo captar la atención, sino promover el pensamiento algebraico.

La integración del juego en la enseñanza de las matemáticas no solo tiene como propósito hacer la experiencia educativa atractiva, sino la percepción común de que las matemáticas son difíciles de aprender. Al introducir elementos lúdicos, se busca no solo despertar el interés de los estudiantes, sino mejorar su comprensión y aplicabilidad de los conceptos matemáticos. Es esencial explorar cómo el juego puede adaptarse a diferentes niveles educativos y cómo puede integrarse con otros métodos de enseñanza. Este enfoque demanda una planificación y capacitación del profesor cuidadosa para garantizar que el juego se utilice como una herramienta pedagógica y no simplemente como un elemento superficial. La cuidadosa consideración de la implementación del juego en el currículo matemático contribuirá a promover una comprensión de los conceptos algebraicos.

1.1. Observaciones durante práctica pedagógica

En la práctica pedagógica se realiza una etapa de observación, donde se evidencia que la profesora cooperadora es dinámica en sus clases, ya que introduce juegos para explicar ciertos temas matemáticos. De manera específica, la profesora orienta temas del pensamiento algebraico como secuencias, patrones, variables e incógnitas, que no solo hacen que estas temáticas sean más interactivos y estimulantes, sino que genera un mayor interés por parte de los estudiantes. El enfoque lúdico no solo contribuye a un ambiente de aprendizaje participativo, sino que ayuda a mantener a los estudiantes comprometidos y motivados durante las clase, además se pudo evidenciar en la clase de matemáticas en el grado 6-3 y la información consignada en la bitácora, confusiones por parte de los estudiantes en temas como: operaciones aritméticas, propiedades de los números, la introducción a las letras, patrones y secuencias, justamente los temas base del pensamiento algebraico.

Es importante señalar que la profesora cooperadora se basaba en que un estudiante diera una respuesta positiva o negativa, pero no era consciente que el estudiante puede manifestar algunas características que demuestra que el estudiante ha alcanzado algún nivel del pensamiento algebraico, es necesario reconocer los estratos de pensamiento algebraico, al entender los estratos del pensamiento algebraico según Radford (2006b) como el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico, en donde se refiere a etapas que experimenta el estudiante, estos "estratos" representan capas progresivas de comprensión y habilidad en el ámbito del álgebra, desde las operaciones básicas con números hasta la capacidad de generalizar patrones, resolver ecuaciones y trabajar con funciones algebraicas, dado que esto permitiría adaptar aún más su enseñanza para garantizar que los estudiantes, independientemente de su nivel de habilidad, puedan participar activamente de las clases.

1.2. Formulación del problema

El aprendizaje del álgebra es un proceso que se ha examinado desde diversas perspectivas en un gran número de investigaciones, como la presentada por Butto y Rojano (2010), que afirman que se pueden crear enfoques de enseñanza flexibles, inclusivos y efectivos que se adapten a las necesidades y capacidades individuales de los estudiantes, ya que permite fomentar una comprensión de las matemáticas. donde el objeto de estudio está en la transición entre el pensamiento aritmético y algebraico. Para Ursini et al. (2005) la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de variables para representar números; y si bien los estudiantes desde la escuela primaria han trabajado con las letras en fórmulas geométricas, es en la escuela secundaria en donde las letras surgen con mayor frecuencia en contextos algebraicos, donde se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados de la situación en que aparecen.

En el octavo grado, se introduce específicamente el uso de símbolos, letras combinadas con números y estructuras abstractas en la enseñanza de álgebra. En este contexto, es crucial que el profesor observe detenidamente las necesidades de sus estudiantes y aplique estrategias que faciliten su comprensión, como destacan Sosa et al. (2015), quienes enfatizan la importancia de que el profesor conozca el proceso de aprendizaje de sus estudiantes para lograr una recepción del contenido. Aunque algunos estudiantes pueden haber tenido acercamientos previos a estructuras algebraicas, no se aprovecha al máximo su pensamiento algebraico, ya que a menudo los conceptos matemáticos se presentan de manera fragmentada. Siguiendo con la perspectiva de Molina et al. (2004), es esencial integrar y conectar estos conceptos para promover un entendimiento en el aprendizaje algebraico.

> […] diferentes estudios de investigación, así como la experiencia en la enseñanza de las matemáticas muestran las múltiples dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, al momento de que la complejidad y la demanda cognitiva de las matemáticas escolares parecen incrementarse repentinamente y provoca que los estudiantes memoricen reglas sin significado ni sentido y pierdan el interés por las matemáticas. Para superar estas dificultades y facilitar la transición al álgebra, muchos investigadores proponen una introducción anterior al álgebra (p.1).

En este sentido, surge la necesidad de replantear las estrategias de enseñanza del álgebra que ha motivado la implementación de enfoques alternativos, donde se destaca la introducción de actividades lúdicas, especialmente el juego, en el aula de sexto grado de la Institución Educativa Hernán Toro Agudelo. De acuerdo con Alonso (2021), el juego, al ser una actividad natural y espontánea en la infancia, no solo fomenta la adquisición de conocimientos, sino que se convierte en una herramienta para investigar, explorar, manipular y experimentar al tiempo de que el desarrollo integral de los estudiantes es favorecido. Este enfoque busca no sólo hacer atractivo el aprendizaje del álgebra, sino proporcionar a los estudiantes una experiencia educativa, al promover su participación espontánea y su conexión con los conceptos algebraicos.

Este trabajo investigativo se centra en analizar estrategias y metodologías para desarrollar abstracciones algebraicas mediante el juego, al resaltar su importancia en la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Los niveles de estratificación algebraica son considerados, al propiciar al profesor claridad sobre el nivel de sus estudiantes. El juego se presenta como una herramienta para transitar en los niveles del pensamiento algebraico, al facilitar al profesor examinar el estado que los estudiantes pueden alcanzar en este ámbito mediante actividades lúdicas. Asimismo, se busca entender cómo el juego contribuye al proceso de aprendizaje algebraico. Se analizan casos específicos de implementación en el aula, a través de la búsqueda de evidencia de impacto en el desarrollo de abstracciones algebraicas y la adaptabilidad de estas estrategias a diversos estilos de aprendizaje y niveles de habilidad.

1.3. Antecedentes

La investigación tiene como objetivo analizar cómo la implementación de juegos permite la estratificación de los niveles de pensamiento algebraico en estudiantes de sexto grado en la institución educativa Hernán Toro Agudelo. Se abordan diversos estudios para las problemáticas en métodos de aprendizaje, especialmente en temas algebraicos. Los juegos se presentan como una herramienta para mejorar la comprensión de estos conceptos. La revisión de literatura propone soluciones prácticas mediante la integración de actividades lúdicas en la enseñanza. Esta investigación fomenta la participación activa y el interés de los estudiantes en las matemáticas. Además, se destaca la importancia de adaptar el juego como estrategia a las características específicas del grupo estudiantil para un aprendizaje personalizado.

Butto y Rojano (2010) basan su postura en la premisa de que la aritmética y la matemática en la escuela, se han abordado de tal manera que restan importancia a la generalización como factor del pensamiento algebraico, dado que piensan que los estudiantes de la escuela elemental pueden estar preparados para pensar sobre estructuras y relaciones, aunque no puedan usar símbolos convencionalmente aceptados; afirmación con la cual se identifican Fernández y Molina (2016) quienes observaron que la mayoría de los estudiantes tenían dificultades para interpretar las letras en álgebra como incógnitas o como números generalizados, además, encontraron que la minoría podía describir adecuadamente las diferencias entre parámetros, incógnitas y variables, y la mayoría tendían a interpretar letras como suplencia de objetos o palabras.

La investigación que proponemos se enmarca en el ámbito de la educación matemática, específicamente centrada en el aprendizaje del pensamiento algebraico. Existe una variedad de estudios que abordan las dificultades persistentes en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el contexto del álgebra. Ramos et al. (2021) han señalado que estas dificultades han sido objeto de constante preocupación en el ámbito educativo, atribuidas en gran medida a diversos factores presentes en el microsistema educativo, que incluye al estudiante, la materia, el profesor y la institución escolar. Estas dificultades se manifiestan en forma de errores cometidos por los estudiantes en su proceso de aprendizaje matemático.

La constante preocupación por los métodos de formación ha traído consigo la esperanza, la cual se encuentra sustentada en investigaciones sobre los procedimientos que pueden permitir generar en los estudiantes aprendizajes asociativos, experienciales y emocionales; es justamente allí en donde sobresale el papel que cumple el juego en el aula de clase, donde se comienza a visualizar nociones matemáticas, desde el pensamiento algebraico, en donde autores como Callejo et al. (2019) sustentan que los patrones visuales a partir de herramientas tecnológicas y juegos virtuales son una estrategia para introducir el pensamiento algebraico en los estudiantes; por un lado, Chimoni et al. (2019) en su investigación muestran la relevancia de las actividades de instrucción, en la que validan que estas ayudan al estudiante a enfocarse en un tema específico y concluyen que estas actividades impactan en el aprendizaje de los estudiantes en la instrucción temprana al álgebra.

La iniciación al álgebra es un paso esencial que se puede tratar desde diferentes edades escolares, aun así, se hace necesario reconocer el rol de los profesores, puesto que son los encargados de enseñar los temas a los estudiantes desde una perspectiva actualizada y que satisfaga sus necesidades, además de tener en cuenta su contexto, formas de aprendizaje y capacidades académicas; es por ello que se articulan las ideas de Sosa et al. (2015) que evidencian la significación que se tiene, al momento en que el profesor reconoce cómo los estudiantes aprenden cada contenido que se enseña, comprenden cuáles son las características del aprendizaje y la forma en que pueden implementarlo para ofrecer un aprendizaje; Por otra parte, Pincheira y Alsina (2021) sostienen que es conveniente permitir a los profesores una experiencia de formación que les permita la profundización de actividades matemáticas que promuevan el desarrollo algebraico temprano.

En este apartado, focalizamos la atención en investigaciones que enfatizan en el juego como una herramienta para alcanzar objetivos académicos. Al examinar diversas investigaciones, se evidencia de manera consistente el impacto positivo del juego en el proceso de aprendizaje, tanto en el ámbito específico del álgebra como en la educación en general. Estos estudios detallan estrategias y juegos específicos que han demostrado ser eficaces para influir en el aprendizaje. Se busca comprender cómo el juego puede implementarse en la enseñanza del álgebra, con el propósito de mejorar no solo la comprensión algebraica sino el proceso de aprendizaje global de los estudiantes. Este enfoque nos permitirá diseñar estrategias pedagógicas que aprovechen el potencial educativo del juego.

Edo et al. (2009) realizan un trabajo interdisciplinario enfocado especialmente en la educación matemática, los datos recolectados para esta investigación se obtuvieron a través de una experimentación planificada, donde evidencian que el juego trabajado en el aula como punto de partida es “adecuado” para trabajar la construcción conjunta del conocimiento matemático, concluye que el juego desarrolla acciones en los estudiantes para la implementación de ciertos conceptos matemáticos. Das et al. (2017) muestran la trascendencia del juego, en la infancia donde a través de estos se puede obtener un aprendizaje que permite la interacción social, ya que los juegos siempre han estado y estarán presentes en la vida, por ende este artículo propone los juegos libres y los juegos guiados para generar aprendizajes lúdicos, donde el juego puede ser una vía para un aprendizaje en cualquier edad que se emplee, donde en un contexto de aprendizaje puede ser motivador y un elemento para los estudiantes.

El juego, además, puede ser una herramienta que proporcione a los estudiantes de grado sexto una alternativa donde pueda desarrollarse el pensamiento algebraico de una manera diferente, tiene un acercamiento previo a conceptos que puedan ser de gran avance al enfrentarse al álgebra en el aula, así como defiende Álvarez (2017) en su investigación que tiene como objetivo la implementación de los juegos como herramienta que puede mejorar el aprendizaje del álgebra en estudiantes del grado octavo, donde a través de su investigación responde a la pregunta de investigación ¿Cómo implementar el juego en la iniciación del álgebra donde este parte de una estrategia didáctica para superar los errores y dificultades que presentan los estudiantes durante este proceso? En este estudio, el autor comienza con la problemática que existe en los estudiantes al comenzar en el álgebra, a través del análisis de los procedimientos que realizan los estudiantes al realizar un ejercicio y analizar cuáles son esos errores más relevantes en el tema.

Bravo et al. (2021) respaldan la integración de juegos didácticos como una herramienta fundamental para consolidar contenidos matemáticos en la secundaria básica. Su enfoque se fundamenta en proporcionar tanto fundamentos teóricos como metodológicos, al resaltar la importancia de adaptar los juegos al nivel de conocimiento de los estudiantes para mantener su interés y ofrecer nuevas oportunidades de aprendizaje. Los autores enfatizan que los juegos no solo son herramientas pedagógicas, sino que transforman la experiencia educativa, promueven la participación activa y la comprensión de conceptos matemáticos. Se resalta la necesidad de una adaptación cuidadosa para personalizar la experiencia de aprendizaje, que contribuye a crear un ambiente educativo dinámico y motivador. Bravo et al. (2021) respaldan la eficacia de los juegos didácticos como valiosas herramientas pedagógicas que enriquecen las prácticas educativas y mejoran el proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito matemático de la secundaria básica.

Vargas et al. (2020) proporcionan una visión integral del aprendizaje basado en juegos aplicado a la enseñanza de las matemáticas en la educación superior. Al responder a su pregunta central sobre la influencia de este enfoque en la motivación y el rendimiento académico, los hallazgos destacan que los juegos desempeñan un papel al mantener el interés de los estudiantes en los procesos de enseñanza. Este estudio resalta la relevancia de considerar estrategias basadas en juegos para mejorar la participación y el desempeño de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior. La investigación resalta la necesidad de explorar y adoptar enfoques pedagógicos innovadores que aprovechen la dinámica y la motivación a los juegos y propicien así un marco para mejorar la experiencia de aprendizaje en el ámbito matemático de la educación superior.

Edo y Deulofeu (2006) informan sobre comprender las formas en que los estudiantes aprenden los contenidos matemáticos en una situación didáctica que incorpora juegos de mesa, para ello se realiza la interpretación de los resultados de un taller, este se compone de cinco secuencias didácticas para cada curso, cada una en torno a un juego, cada secuencia contiene tres o cuatro sesiones de clase. Esta experiencia involucró a 9 adultos y 98 estudiantes de entre seis y ocho años. El marco teórico de referencia usado es la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza; finalmente esta investigación permite concluir que esta práctica educativa genera un contexto que, al ser gestionado desde una perspectiva constructivista de interacción entre los participantes, favorece la construcción de distintos tipos de conocimientos matemáticos.

La influencia del juego como estrategia pedagógica y su relación con el aprendizaje de nociones lógicas y matemáticas ha sido resaltada a través de la estrategia del estudio de caso constitutivo. Según Gallego et al. (2020), el juego se percibe como un medio fundamental de expresión y comunión en la infancia, y sostienen que en el ámbito educativo puede ser empleado como una estrategia pedagógica para fortalecer el aprendizaje de las matemáticas. Los autores concluyen que, al comprender el juego como una estrategia pedagógica, los profesores deben dirigir su implementación de manera deliberada, como una forma de fomentar tanto el aprendizaje como la diversión, especialmente al trabajar la enseñanza de conceptos matemáticos. Este planteamiento resalta la importancia de que los profesores guíen la incorporación del juego en el aula como una herramienta integral que mejora la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

Aristizábal et al. (2016) en su investigación tienen como objetivo principal desarrollar múltiples habilidades y relaciones que refuercen las operaciones básicas en estudiantes de grado quinto, donde se asume que el juego debe ocupar un lugar primordial entre las múltiples actividades del estudiante; la estrategia didáctica utilizada consiste en trabajar una serie de actividades lúdicas y juegos en cada una de las operaciones matemáticas y la combinación de las mismas, al igual que en la resolución de problemas, cuya implementación permite generar motivación e interés en los estudiantes en el tema planteado. Además, se ratifica, que la enseñanza de las matemáticas, al utilizar el juego como una estrategia didáctica en reemplazo de los métodos didácticos convencionales, aplicados en el aula de clase, logran la transformación del proceso de enseñanza y la forma en que profesores y estudiantes acceden al conocimiento.

Chacha (2022) analiza cómo se encuentran los estudiantes en el desarrollo y aprendizaje de los conceptos en matemática, a través de actividades que ayudan a solventar los inconvenientes encontrados en los datos previos a la investigación, Chacha (2022) optó por el desarrollo del juego como estrategia didáctica para la comprensión del pensamiento lógico matemático, establece acciones que van desde algunas aplicaciones sencillas, para después avanzar por los niveles, al elegir los juegos como el crucigrama matemático, el bingo y el monopolio, los cuales obtuvieron resultado en la práctica con los estudiantes; el trabajo se inscribe en un marco teórico que busca comprender la importancia del juego y la didáctica para generar aprendizajes. Para la metodología se utilizó el enfoque cuantitativo y el método descriptivo, finalmente la autora concluye al basar en sus observaciones, que los estudiantes responden activamente ante el juego en cualquier ámbito de aprendizaje.

En la revisión de los antecedentes de esta investigación, se resalta que las actividades lúdicas y los juegos en la enseñanza ofrecen beneficios tanto cognitivos como emocionales, además de ser recreativos, contribuye al fortalecimiento y ampliación de conceptos educativos. Se fundamenta en los estudios de Decroly (1871–1932), quien exploró juegos educativos que tienen en cuenta las necesidades biológicas humanas. Carrillo et al. (2020) respaldan la influencia positiva de los juegos decrolyanos en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los niveles iniciales. La investigación busca identificar y caracterizar estos juegos, al considerarlos elementos del entorno estudiantil. La conclusión principal es que comprender las necesidades del estudiante facilita atraer su atención, permite buscar y acceder al conocimiento de manera relevante en el proceso educativo.

Meneses y Monge (2001) resaltan en su investigación la esencial contribución del juego y sus acciones a la educación integral, al destacar la necesidad de interacción y actitud social en su ejecución. Su conclusión recalca la importancia de la participación activa de los profesores en estas actividades, que permite desarrollar estrategias didácticas alineadas con los objetivos propuestos. El marco teórico se enfoca en cómo el juego facilita a los educadores la formulación de conceptos teóricos que respalden las actividades relacionadas y sus objetivos en el aula, al propiciar un sentido lógico a una actividad intrínseca en los estudiantes y promueve su desarrollo integral en el ámbito educativo. La investigación resalta la interacción en el juego como un catalizador fundamental para el aprendizaje y la formación de los estudiantes y resalta la importancia de integrar estas dinámicas en el entorno educativo.

Lira et al. (2021) destacan la importancia de la apropiación de juegos por parte de profesores de matemáticas para enseñar ecuaciones de primer grado, al basarse en libros de texto aprobados en el programa nacional de libros de texto en Brasil. Su marco teórico metodológico se estructura en tres fases: pre-apropiación, apropiación original y reapropiación. La investigación utiliza la metodología de investigación reflexiva con principios como monitorear el trabajo profesorado, seguimiento dentro y fuera del aula, recolección de recursos y seguimiento reflexivo del trabajo de documentación. Consideran que su estudio es crucial para comprender las fases de apropiación de recursos didácticos y actividades lúdicas, y sugieren que puede inspirar a otros profesores a realizar investigaciones similares sobre la apropiación de recursos para la enseñanza de temas específicos de matemáticas.

Peters (1998) sostiene que los juegos no son solamente para aprender un conocimiento, sino que incluso demuestra cómo ayuda a mejorarlos, cómo amplía la concepción de un tema y cómo ayuda en la lógica matemática de cada persona, no solo de los estudiantes en el aula, como es el caso de este estudio que se realizó con el propósito de mejorar los conocimientos numéricos de los jóvenes mediante juegos matemáticos; en el primer estudio, se trabajó con 55 jóvenes de 5 años aproximadamente, los acudientes entraban al aula de clase guiados por los profesores a jugar con subgrupos de estudiantes; el segundo estudio, se realizó con 128 estudiantes de 7 años, al investigar diferentes formas de fusionar juegos en los planes de estudios de matemáticas escolares, incluidos las interacciones con los padres que jugaron con los estudiantes.

Bedón y Cedeño (2023) tuvieron por objetivo determinar la relación de los juegos de aprendizaje en línea con la formación de las nociones lógico matemáticas, en los estudiantes de educación inicial; la metodología tiene un enfoque cuantitativo, el tipo de investigación es experimental y correlacional; se trabajó con 28 estudiantes del nivel inicial de la escuela Gabriela Mistral de una población de 56 estudiantes; se abordó este estudio a través de la observación, donde se hace la conclusión de que los juegos de aprendizaje en línea para la formación de las nociones lógico matemática en los estudiantes, resultaron ser una estrategia educativa en el seno de las tecnologías de la información y la comunicación, dado a su impacto en el desarrollo de habilidades y destrezas en estudiantes de educación inicial, así como en la posibilidad de incrementar el desarrollo cognitivo en términos de la estimulación de los diferentes canales como el auditivo, kinestésico y visual, conlleva a un proceso de formación de las nociones lógico matemáticas de.

Cambo (2023) propone en su trabajo investigativo dar solución a las dificultades que se encuentran al enseñar álgebra, e implementa el método lúdico para el aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones; estas estrategias lúdicas intervienen como métodos o técnicas utilizados por el profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La investigación fue de tipo observacional porque se tomó como referencia datos obtenidos de dos investigaciones del mismo campo de estudio para su posterior análisis; el estudio es de tipo descriptivo porque fue necesario analizar e interpretar datos estadísticos y determinar el impacto de las estrategias lúdicas en el aprendizaje de los estudiantes, el método empleado es de enfoque inductivo - deductivo, debido a que se recogió y se analizaron datos mediante la estadística descriptiva y de comparación, visto que permitió afianzar conocimientos adquiridos.

La noción de la relevancia del juego en los aprendizajes algebraicos investigados por Turgut y Dogan (2017) encontraron que, en general, el uso de juegos tiene un efecto moderado y positivo en el rendimiento académico en matemáticas. Esto implica que el uso de juegos puede ser beneficioso para enseñar matemáticas y mejorar los resultados de aprendizaje en esta área. Se puede acotar que estos antecedentes tienen una mirada a favor del juego y buscan mostrar cómo el pensamiento algebraico ha presentado dificultades al ser abordado mediante la enseñanza tradicional, al mencionar que aprendemos de formas diferentes y que al investigar mediante la intervención en el aula con este tipo de herramientas se pretende alcanzar un desarrollo del pensamiento algebraico en el grado sexto, específicamente a través de los niveles de estratificación.

Lasprilla et al. (2012) investigaron por medio de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de alcanzar mayores niveles de conceptualización. El estudio describe y examina los medios semióticos de objetivación y los estratos de generalidad que menciona Radford (2021) en donde se evidencia la producción semiótica por parte de los estudiantes. Lasprilla et al. (2012) concluyen que las diferentes formas de demostrar a los estudiantes los medios semióticos de objetivación, es a través de movimientos, gestos, expresiones y frases, donde nace la necesidad de identificar un área de conceptos donde puedan empezar a pensar de forma algebraica, aunque específicamente no acuda a los signos alfanuméricos del álgebra o a las fórmulas generalizadas de una situación.

La Real Academia Española (2023) define "juego" como la acción de participar en ejercicios recreativos sometidos a reglas, en los cuales se puede ganar o perder, sin embargo, la palabra "juego" abarca un espectro complejo de significados. En este enfoque, el juego se destaca como una actividad central en el desarrollo estudiantil y su integración en la educación. Desde la perspectiva psicológica, el juego desempeña un papel esencial en el crecimiento cognitivo, social y emocional de los estudiantes. Actúa como un vehículo para explorar, practicar habilidades, resolver problemas y fomentar la creatividad. Al funcionar como una vía para conectar con el aprendizaje formal, permite la experiencia tangible de conceptos abstractos y el fomento de habilidades sociales a través de la colaboración y comunicación.

La investigación de Sarlé et al. (2010) destaca propuestas de enseñanza centradas en el juego, con el objetivo de mejorar las oportunidades educativas para estudiantes en el nivel inicial. Su enfoque se basa en la reflexión y renovación de las estrategias pedagógicas. Presentan propuestas de juegos adaptadas a las características y edades de los estudiantes, destacando la importancia de actualizar constantemente el material desde perspectivas didácticas y pedagógicas. La conclusión principal es que el juego va más allá de la diversión, se revela como una herramienta educativa inclusiva que modela la interacción de los individuos con su entorno y facilita la adquisición de conocimientos. Este enfoque no sólo enfatiza la diversión en el aprendizaje, sino la integración de actividades lúdicas que se alineen de manera con los objetivos educativos.

Huizinga (1972) destaca la importancia del juego en el desarrollo humano, al argumentar que la acción de jugar está intrínsecamente entrelazada con la cultura de la humanidad. Según su perspectiva, el juego no es simplemente un derivado cultural, sino un elemento de la cultura misma. Huizinga sostiene que el juego es una actividad en la vida cultural humana y fundamental para la comprensión de la sociedad. Su definición del juego lo describe como una actividad libre, apartada de la rutina diaria por su naturaleza especial, y regida por reglas que fomentan tanto la competición como la cooperación. Este enfoque resalta el papel central del juego en la formación de la identidad cultural y social, al destacar cómo esta actividad va más allá de la mera diversión para influir en aspectos fundamentales de la experiencia humana.

Según Freud (1920), el juego se encuentra estrechamente ligado al deseo de buscar placer y representar una inclinación hacia la satisfacción y responde al impulso de reducir tensiones, denominado como el principio de placer y el principio de muerte, respectivamente. El comportamiento lúdico implica procesos complejos, incluye la manifestación de deseos inconscientes arraigados en la infancia y la emergencia de angustias derivadas de las experiencias de vida. Freud (1920) argumenta que el juego no solo proporciona entretenimiento, sino que se convierte en un mecanismo de adaptación fundamental para superar desafíos emocionales y psicológicos. Este enfoque psicoanalítico resalta la importancia del juego como una expresión simbólica que revela aspectos del interior humano y su capacidad para enfrentar las complejidades del desarrollo personal.

Según Vygotsky (2009), el juego se manifiesta como una respuesta innata para la interacción social, con raíces sociales y una función que va más allá de los impulsos individuales. En la perspectiva vygotskiana, el juego se entiende como una actividad compartida, donde la colaboración con compañeros posibilita la adopción de roles que complementan el papel central del jugador. La función del juego no solo como una expresión individual, sino como un fenómeno social que facilita la construcción conjunta de significados y la internalización de normas culturales en un entorno lúdico. Vygotsky destaca cómo el juego actúa como un medio para el desarrollo de habilidades cognitivas y sociales, permite a los participantes negociar y comprender diversas perspectivas dentro de un marco colaborativo.

En el contexto de esta investigación, nuestro enfoque se centra en el cómo se manifiesta la estratificación de pensamiento algebraico a través de juegos. Hemos reconocido al juego como una herramienta para alcanzar estos niveles de estratificación. Es crucial destacar que el juego desempeña un papel central en varias instancias de nuestra investigación, sirve como un medio fundamental para lograr nuestro objetivo principal de manifestar los niveles de estratificación de pensamiento algebraico. Esta metodología no solo nos permite comprender las características y variaciones en los niveles de pensamiento algebraico, sino que nos capacita para desarrollar estrategias prácticas y eficaces destinadas a mejorar el aprendizaje en este ámbito específico.

Los antecedentes investigativos presentados en este trabajo de grado arrojan luz sobre la relevancia y el potencial del juego como herramienta pedagógica para estratificar los diferentes niveles de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2006b), donde la implementación del juego puede no solo facilitar la comprensión de conceptos matemáticos complejos, sino promover una interacción social enriquecedora entre los estudiantes. Estos antecedentes sientan las bases para una investigación que busca llevar al aula la teoría de juegos con los niveles de estratificación, con el objetivo de mejorar la experiencia educativa y fomentar el aprendizaje en los estudiantes. En última instancia, la implementación del juego en los niveles de estratificación algebraica proporciona una educación matemática enriquecedora y equitativa, puesto que prepara a los estudiantes para enfrentar los desafíos del contexto real.

1.4. Pregunta investigativa

¿Cómo se manifiesta la estratificación de pensamiento algebraico a través de juegos?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Analizar cómo se manifiesta la estratificación de pensamiento algebraico a través de juegos en estudiantes de grado sexto.

1.5.1.1. Objetivos específicos

1. Identificar qué juegos matemáticos proporcionan un acercamiento en conceptos y aprendizajes algebraicos.
2. Analizar cómo el juego puede ayudar a desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes que han tenido acercamientos previos al álgebra.
3. Diseñar y aplicar juegos didácticos con la intención de enmarcarlos en el pensamiento algebraico, al aprovechar el juego como una herramienta para fomentar el aprendizaje.

2. Marco teórico

En el panorama educativo actual, la enseñanza de las matemáticas ha trascendido de la transmisión de conceptos teóricos, puesto que la búsqueda de métodos pedagógicos ha surgido a través de la exploración de enfoques innovadores que no solo faciliten la comprensión, sino que también estimulen el interés y la participación activa de los estudiantes. Un enfoque emergente es la introducción de pensamiento algebraico a través de juegos. El álgebra, considerada como una disciplina abstracta y desafiante, puede beneficiar el aprendizaje de los estudiantes en gran medida al usar estrategias que involucren la interacción lúdica. En este capítulo 2 del trabajo de investigación, se exponen elementos teóricos para el pensamiento algebraico y la noción de juego.

Para presentar el marco teórico y facilitar su comprensión, empleamos un organizador gráfico. Este recurso tiene como objetivo principal sustentar de manera clara y concisa los fundamentos teóricos que respaldan nuestra investigación. A través de este organizador, se estructuran los conceptos clave, las relaciones entre ellos y su relevancia para la investigación. Adicionalmente, facilita la visualización de la estructura teórica, al permitir a los lectores identificar los elementos fundamentales y comprender cómo se interrelacionan para las investigadoras. Asimismo, sirve como una guía para orientar el análisis y la interpretación de los datos recopilados, En resumen, el uso de este organizador gráfico en nuestro trabajo investigativo proporciona una herramienta para comunicar la base teórica sobre la cual se construye nuestra investigación.

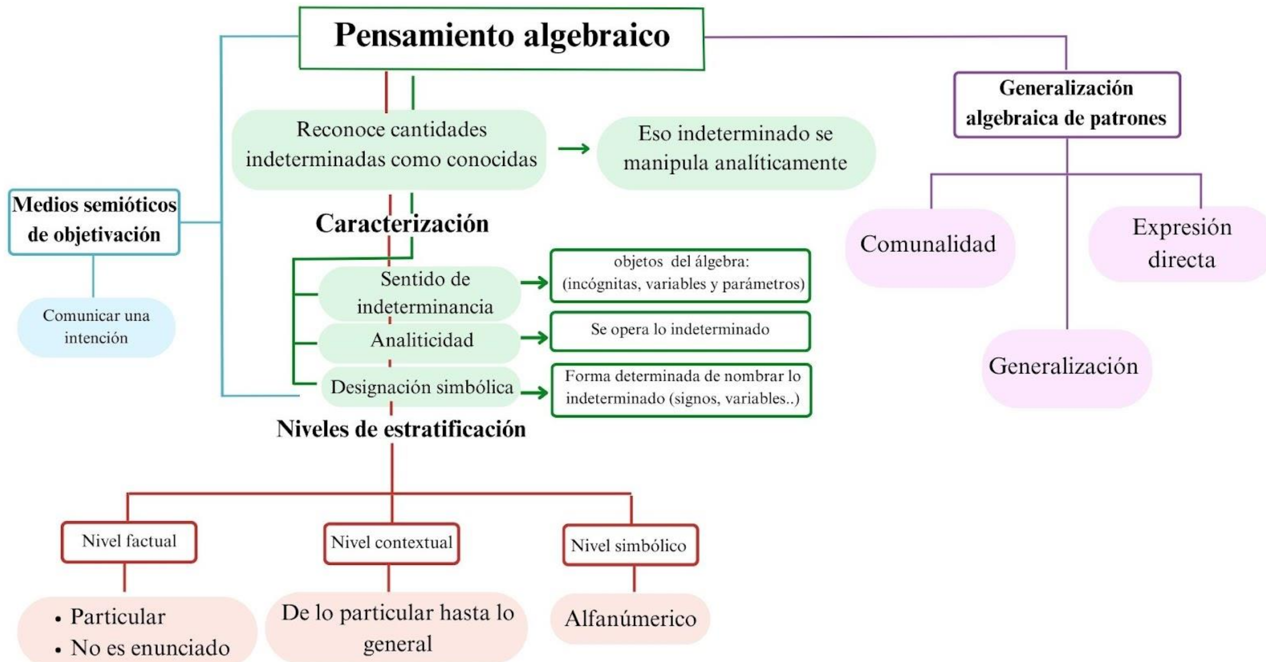


Figura 1. *Esquema del marco teórico*

2.1. Pensamiento algebraico

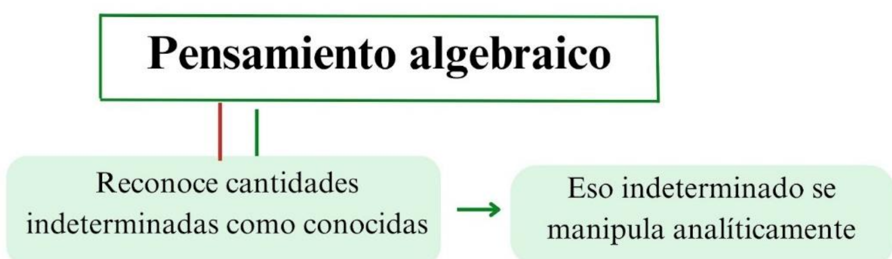


Figura 2. *Pensamiento algebraico*

El pensamiento algebraico es un tema investigativo amplio, que ha sido de interés por investigadores como Radford (2006b) que en su investigación sobre pensamiento algebraico, argumenta que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la teoría de la objetivación busca generar orientaciones que permitan el progreso del aprendizaje y de la abstracción de conceptos algebraicos que principalmente den sentido al desarrollo del pensamiento algebraico, es importante la compresión del pensamiento algebraico desde temprana edad con la intención de que los estudiantes avancen en sus procesos cognitivos matemáticos. Se entiende por comprensión desde la perspectiva de Radford (2021) que la educación no se limita a la mera transferencia de conocimientos o a la adquisición de conceptos matemáticos, sino que se enfoca en el proceso del saber, lo que promoverá que los estudiantes sean analíticos, deduzcan e induzcan propiedades algebraicas y puedan comunicar y argumentar el conocimiento.

En la educación Colombiana se plantea en los Lineamientos Curriculares (1998) que la enseñanza debe estar orientada en el desarrollo de cuatro procesos matemáticos interrelacionados: resolución de problemas que es el proceso cognitivo mediante el cual se encuentra una solución la representación matemática que describe o muestra algo de manera visual o simbólica, la modelación donde se crean modelos para representar fenómenos matemáticos y la argumentación donde se presentan razones o evidencias de una afirmación o punto de vista especifico, estos procesos tienen un papel fundamental en la adquisición de conceptos y su aplicación para enfrentarse a problemas de la vida cotidiana; sin embargo, estos procesos se encuentran ligados al desarrollo del pensamiento aritmético más no propiamente al desarrollo del pensamiento algebraico.

La apuesta actual es reconocer las relaciones entre los pensamientos aritméticos y algebraicos y poder encontrar una forma alternativa de acercarse al desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas además de hacer uso de metodologías didácticas, pedagógicas e interactivas. El pensamiento algebraico, según la perspectiva de Radford (2006b), se presenta como una habilidad que se desarrolla a través de herramientas culturales fundamentales, como el lenguaje, los símbolos y las representaciones gráficas, contrario a la idea de que el pensamiento algebraico tiene un significado, Radford (2006b) argumenta que este se adquiere y construye a través de la interacción con el entorno social, matemático y cultural.

En este enfoque, el lenguaje se presenta como una herramienta esencial para la construcción del pensamiento algebraico, la capacidad de expresar conceptos matemáticos de manera precisa y clara contribuye a la comprensión de los principios algebraicos, además, el lenguaje matemático sirve como medio para la comunicación de ideas algebraicas entre personas y facilita la construcción colectiva del conocimiento. Los símbolos algebraicos, por su parte, son herramientas poderosas que permiten la representación de conceptos abstractos, Radford (2021) destaca que estos símbolos no poseen un significado intrínseco, sino que adquieren su sentido a través de la interacción social y cultural, la asignación de significados a los símbolos algebraicos se desarrolla en el contexto de la práctica matemática compartida, donde la comunidad matemática influye en la construcción de significados y en la comprensión de conceptos algebraicos.

Las representaciones gráficas desempeñan un papel crucial en el pensamiento algebraico; las representaciones visuales ofrecen una alternativa de comprender conceptos algebraicos, facilita la conexión entre las representaciones simbólicas y las ideas matemáticas, la interpretación y creación de representaciones gráficas contribuyen a la diversificación de las estrategias cognitivas utilizadas en el proceso de resolución de problemas algebraicos. Desde la perspectiva de Radford (2006a), el pensamiento algebraico no se desarrolla de manera aislada, sino que emerge y evoluciona a través de la interacción en el entorno social y cultural, por lo tanto, en el aula de clase, es esencial fomentar la discusión, el intercambio de ideas y la discusión de perspectivas. La diversidad de enfoques y la confrontación de ideas enriquecen la comprensión del pensamiento algebraico, promueve, así como lo menciona Radford (2021) la autorrealización del sujeto que aprende.

2.1.1. Caracterización del pensamiento algebraico

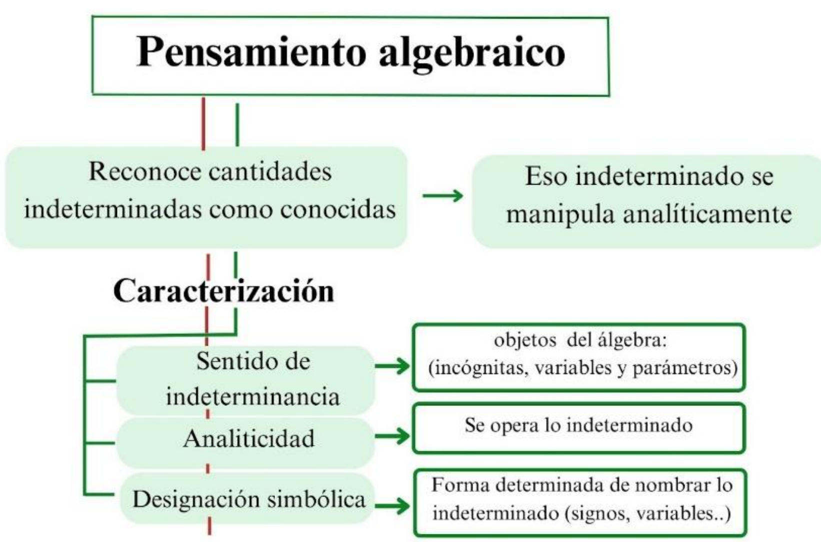


Figura 3. *Caracterización del pensamiento algebraico*

La caracterización del pensamiento según Radford (2021) se centra en comprender cómo las personas tratan y resuelven problemas matemáticos, destaca la interacción entre sus procesos cognitivos y la representación externa de las situaciones matemáticas. Él propone una perspectiva que considera tanto la dimensión interna del pensamiento como su expresión externa, el lenguaje y los gestos utilizados durante el proceso de resolución de problemas. El pensamiento algebraico se concibe como una actividad mediada por la cultura, donde la interacción entre el individuo y su entorno juegan un papel fundamental en la construcción de significados matemáticos. Radford (2021) identifica niveles de estratificación en el pensamiento desde los procesos básicos hasta los avanzados, y destaca la importancia de la abstracción y la generalización en el desarrollo del pensamiento matemático.

Radford (2010) resalta la importancia de los objetos matemáticos y sus representaciones en la formación del pensamiento. Considera que los objetos matemáticos son construidos conjuntamente por los estudiantes en el contexto de la interacción social y que la manipulación de estos objetos en el espacio cognitivo es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico. Bajo la perspectiva de Radford (2021), se revelan características intrínsecas que influyen en su formación y comprensión; entre estas, se destacan el sentido de la indeterminancia a partir de las incógnitas, la analiticidad mediante la operación de las cantidades desconocidas y la designación simbólica al exponer simbólicamente una expresión, donde cada una de las anteriores pretende describir las características principales del pensamiento algebraico propuestas por Radford (2010).

Sentido de la Indeterminancia

Se manifiesta mediante la flexibilidad y apertura a conceptos algebraicos donde se hace presente en la evidencia y la versatilidad de objetos como incógnitas, variables y parámetros. En este contexto, estos elementos adquieren significados múltiples y cambiantes: las incógnitas representan valores desconocidos resueltos mediante ecuaciones, las variables asumen diversos valores, y los parámetros aportan dimensiones variables a expresiones algebraicas. La indeterminancia, es la posibilidad de manipular lo desconocido como si de cantidades determinadas se tratara,

al permitir a los estudiantes construir sus propios significados y conexiones en álgebra, lo cual conduce a una comprensión de los conceptos algebraicos. Este enfoque flexible fomenta la autonomía cognitiva y permite la asimilación y construcción del pensamiento algebraico.

Analiticidad

Se manifiesta en la capacidad de descomponer y analizar problemas algebraicos en partes manejables, así mismo los estudiantes desarrollan la habilidad de descomponer expresiones algebraicas, ecuaciones y problemas en elementos simples, facilita la comprensión y resolución de los mismos. Este enfoque analítico implica la capacidad de reconocer patrones, identificar relaciones y aplicar estrategias de simplificación, lo que a su vez contribuye a una comprensión de la estructura de los conceptos algebraicos. Se destaca la operación sobre la indeterminación, donde la analiticidad no solo implica descomposición, sino también la capacidad de operar y manipular con esas cantidades indeterminadas, permite a los estudiantes explorar y determinar valores desconocidos.

Designación simbólica

Resalta la utilidad de los símbolos en el álgebra como herramienta fundamental para representar y manipular conceptos matemáticos. Objetos como incógnitas, variables y parámetros encuentran expresión a través de símbolos que carecen de un significado y adquiere sentido a medida que interactúan en contextos sociales y culturales. Las incógnitas, al representar la parte desconocida, se convierten en símbolos flexibles que permiten explorar y determinar valores no fijos; las variables, por su parte, se utilizan como símbolos para expresar relaciones y las constantes proporcionan estabilidad a las expresiones algebraicas. Esta designación simbólica va más allá de asignar nombres arbitrarios. Es la forma determinada de nombrar la indeterminación. Los símbolos permiten una representación concisa de relaciones matemáticas, facilitan la generalización de patrones y propician un lenguaje eficaz para la comunicación matemática.

2.1.2. Medios semióticos de objetivación

Son formas de representación que permiten a los estudiantes construir y comunicar significados matemáticos. Radford (2003, 2006a, 2009) enfatiza la importancia de estos medios para mediar el pensamiento individual y la comunicación matemática dentro de un contexto social y cultural, además, se refiere a las herramientas que las personas utilizan en el proceso de dar significado a las cosas. Estos medios buscan establecer una coherencia con lo que se está pensado, a través de intenciones, acciones con el fin de dar claridad al objetivo que se desea alcanzar. Radford (2009) destaca la importancia de estos medios en el desarrollo del pensamiento matemático, no solo como herramientas para comunicar intenciones, sino que también cumplen el propósito de facilitar las acciones a través de medios como artefactos, gestos, palabras y símbolos.

Estos medios, según Vergel (2014), no permiten que exista una facilidad con el entorno, sino que también sirven como portadores de una conciencia construida a través de la actividad cognitiva. Radford enfatiza que estos medios desempeñan un papel fundamental en los procesos del pensamiento algebraico, en situaciones vinculadas especialmente a la generalización de patrones en el aprendizaje matemático. Según Radford (2003, 2006a, 2009) los medios semióticos de objetivación abarcan diversas formas, entre las que se encuentran el lenguaje, tanto oral como escrito, utilizado para expresar conceptos matemáticos mediante términos, definiciones, explicaciones y argumentos en lenguaje natural. También engloban los símbolos matemáticos, que comprenden el uso de notaciones y fórmulas para representar relaciones y operaciones matemáticas.

Las representaciones gráficas constituyen otra categoría de estos medios, incorporan gráficos, diagramas, tablas y otras representaciones visuales que sirven para ilustrar conceptos matemáticos y relaciones. Se incluyen gestos y movimientos corporales como elementos que acompañan el pensamiento y la comunicación matemática, desempeñan un papel como medios para expresar ideas y conceptos. Los manipulativos y objetos matemáticos forman parte de estos medios semióticos, implican el uso de objetos físicos que permiten a los estudiantes interactuar directamente con conceptos matemáticos, como bloques para representar números o elementos geométricos. En conjunto, estos medios se presentan como herramientas variadas y complementarias en el proceso de objetivación de la experiencia matemática.

2.1.3. Estratificación de pensamiento algebraico

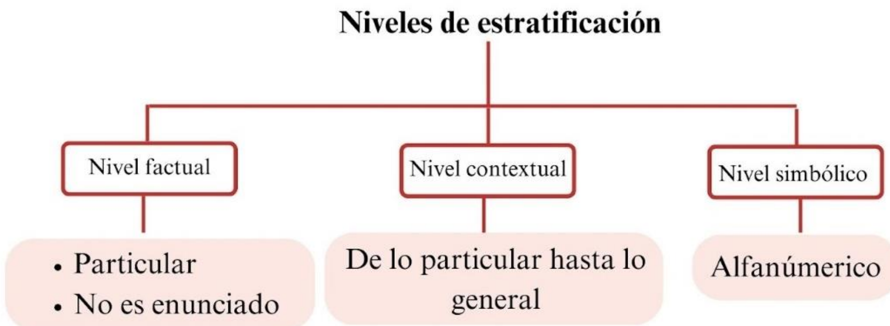


Figura 4. *Niveles de estratificación*

La estratificación del pensamiento algebraico se basa en las delimitaciones que trata Radford (2021) en los niveles de generalización algebraica, en donde se determinan los niveles según Lasprilla et al. (2012):

> Un estrato de generalidad es factual en la medida que la generalización surge de actividad perceptual, acciones sobre los números, gestos y palabras; mientras que el contextual es más fino, en términos de los medios semióticos que emplea, ya que es a partir de la observación de aspectos estructurales, como “el de arriba”, “el de abajo”, etc., que se da la generalización. Y el simbólico se refiere al uso de signos alfanuméricos del álgebra, en donde los medios semióticos empleados son los símbolos escritos. La idea de estrato de generalidad es teorizada en la perspectiva semiótica. (p. 316)

Según Radford (2010a), el pensamiento algebraico se manifiesta en tres características interrelacionadas: indeterminancia, analiticidad y designación simbólica. Estas características están estrechamente ligadas a los estratos del pensamiento algebraico, Además, en estas características, se observa la presencia de medios semióticos de objetivación, como herramientas simbólicas que permiten la representación y manipulación de conceptos algebraicos. La propuesta de Radford (2010a) aboga por una comprensión del pensamiento algebraico, considera tanto sus aspectos conceptuales como las herramientas simbólicas que lo sustentan. Esta perspectiva asume la comprensión del proceso cognitivo algebraico al incorporar tanto la naturaleza abstracta como las representaciones simbólicas que lo caracterizan.

El nivel factual es el primer estrato de pensamiento algebraico. En este estrato, la indeterminación, es decir, las variables, los símbolos y demás, no alcanzan un nivel de enunciación, sino que se evidencia a través de los medios semióticos de objetivación que están presentes en este nivel, que serían los gestos, los movimientos, los señalamientos indexicales, palabras claves; es decir, que eso indeterminado queda implícito, en este primer nivel se ve presente que los estudiantes alcanzan casos particulares en secuencias específicas Esta generalización es una etapa inicial del desarrollo del pensamiento algebraico, aunque permite al estudiante una comprensión de conceptos algebraicos no es una comprensión profunda, pero permite avanzar en el desarrollo del pensamiento, proporciona una base inicial consistente para los niveles posteriores.

El nivel contextual es el segundo nivel de pensamiento algebraico. En este los casos pasan de particulares a generales. Es importante mencionar que, en este nivel, los estudiantes hacen una descripción de la fórmula general sin ser conscientes plenamente de las variables que se encuentran presentes; por ejemplo, a través de los medios semióticos ellos pueden sustentar que en X posición se le suma o aumenta una cantidad y que eso puede ser algo general que sucede en cada caso, en este nivel los estudiantes comienzan a desarrollar una comprensión conceptual del álgebra. En el nivel contextual los estudiantes no solo son capaces de solucionar casos o situaciones específicas del pensamiento algebraico, sino que empiezan a mirar particularidades en casos generales y así poder determinar qué sucede de manera general, sin embargo, no se explícita una expresión directa, sino que empiezan a aparecer algunos elementos propios de la designación simbólica.

Finalmente, el tercer nivel corresponde al pensamiento algebraico simbólico, nivel en que los estudiantes profundizan en la comprensión del álgebra como un sistema coherente y desarrollan habilidades para pensar algebraicamente. En este nivel las expresiones alfanuméricas empiezan a aparecer y el proceso se verbaliza como una fórmula general para la situación. Como expone Radford (2010), “En la generalidad simbólica los objetos generales y las operaciones realizadas con ellos son expresados en el sistema semiótico alfanumérico del álgebra” (p. 56). En esa perspectiva, se exploran las estructuras y propiedades algebraicas, como la simetría, las operaciones inversas y las propiedades de los sistemas de ecuaciones. Los estudiantes son capaces de generalizar y justificar los resultados algebraicos, utilizan argumentos deductivos, es el nivel avanzado en la estratificación propuesta por Radford (2010).

Los niveles propuestos por Radford (2021) no son etapas secuenciales en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que representan diferentes características del pensamiento algebraico que pueden coexistir en diferentes momentos y contextos. Los niveles de estratificación del pensamiento no siguen una progresión lineal en el proceso de aprendizaje, dado que los estudiantes pueden moverse entre estos niveles de manera flexible y no necesariamente en una secuencia ordenada. Un ejemplo, un estudiante trata un problema algebraico alcanza en un nivel factual, luego reconoce un patrón que lo lleva a alcanzar las herramientas para avanzar en el nivel contextual, y finalmente, al explorar más a fondo, podría llegar a considerar el comportamiento general del problema donde finalmente pueda alcanzar el nivel simbólico. Este movimiento entre niveles puede ser impulsado por la curiosidad, la exploración activa, la retroalimentación del profesor o incluso el contexto del problema, sin embargo, no es una transición forzosa ya que los estudiantes pueden quedarse en un nivel o tener mayor afinidad con ciertos niveles, si bien no necesariamente tienen un desarrollo lineal o restrictivo entre ellos, es importante mencionar que el ideal es avanzar por cada nivel de manera progresiva.

Los estudiantes pueden tener fortalezas y debilidades en diferentes niveles de estratificación. Algunos pueden tener ciertas competencias en el nivel factual o contextual, pero pueden enfrentar desafíos al estar expuestos al nivel simbólico. Otros pueden tener facilidad para el análisis y para sacar justificaciones algebraicas en el nivel simbólico, pero pueden necesitar apoyo para dominar ciertos conceptos numéricos en el nivel factual. Esta variabilidad destaca la necesidad de enfoques educativos diferenciados que traten las necesidades individuales de los estudiantes. Al introducir el álgebra a través de juegos, se debe considerar la no linealidad entre las categorías, esto implica que los juegos deben ser diseñados de manera que permitan a los estudiantes experimentar los diferentes niveles de estratificación de manera natural. Los juegos proporcionan oportunidades para que los estudiantes se sientan cómodos en los niveles de estratificación, mientras introducen elementos algebraicos de manera gradual.

2.1.4. Generalización algebraica de patrones

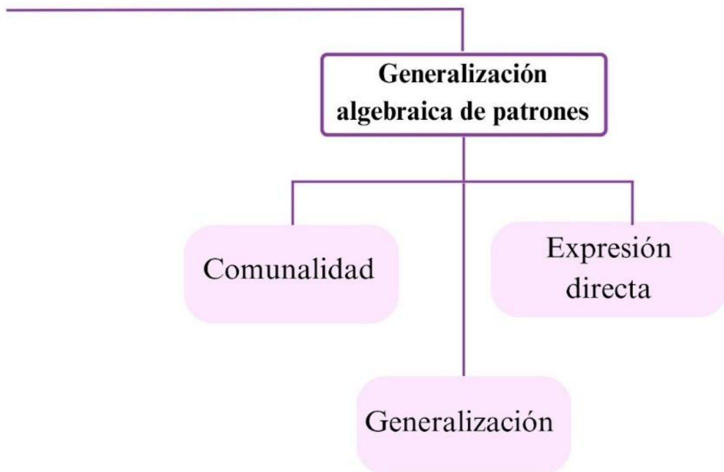


Figura 5. *Generalización algebraica de patrones*

La generalización algebraica de patrones constituye un área de estudio que se enmarca dentro de la teoría de números y álgebra. Esta disciplina se centra en la identificación y expresión sistemática de relaciones matemáticas a secuencias numéricas; a diferencia de un enfoque meramente descriptivo, la generalización algebraica busca trascender la observación de repeticiones en patrones, adentra en el desarrollo de reglas y expresiones algebraicas que caracterizan de manera concisa y universal las secuencias. Este proceso implica la capacidad de discernir estructuras y la formulación de modelos algebraicos que capturan la esencia de los fenómenos observados. Desde la perspectiva de Radford (2010b), la generalización algebraica de patrones adquiere una dimensión adicional, puesto que sugiere que este proceso no solo involucra la identificación de repeticiones, sino que se enriquece por la interacción social y cultural la construcción de significados algebraicos; la capacidad de generalizar, no solo está arraigada en la observación y el análisis, sino también en la participación activa en un entorno matemático y cultural que influye en la asignación de significados a los símbolos y a las reglas algebraicas.

La generalización algebraica de patrones, en su naturaleza analítica y su conexión con el entorno sociocultural se erige como un proceso matemático dinámico y en constante evolución que además es fundamentalmente importante en la introducción del álgebra en la escuela, contribuye no sólo al avance teórico en álgebra, sino también a la comprensión profunda de la interrelación entre el pensamiento algebraico y el entorno en el cual se desenvuelve. La propuesta de Radford (2013b), sobre las tres formas en que se organiza la generalización algebraica de patrones abarca los conceptos de comunalidad, generalización y expresión directa, a continuación, se define cada una de estas dimensiones.

Comunalidad

La perspectiva presentada por Radford (2013b) se centra en la identificación de similitudes y regularidades en patrones numéricos diversos. Este enfoque implica la habilidad de reconocer elementos comunes o estructuras recurrentes presentes en distintas secuencias, lo que permite la categorización de patrones bajo conceptos compartidos. La esencia de esta aproximación radica en la capacidad para agrupar patrones, resalta conexiones que trascienden la singularidad de cada secuencia. Al destacar la comunalidad, se busca promover una visión general de las relaciones algebraicas. Este enfoque no solo permite la identificación de patrones específicos, sino que también propicia la comprensión de las conexiones que unen a estos patrones en un contexto amplio. En última instancia, la búsqueda de regularidades y similitudes no solo revela la naturaleza intrínseca de los patrones numéricos, sino que también contribuye a la construcción de un marco conceptual comprensivo.

Generalización

Radford (2013b) se refiere a la capacidad de formular reglas o expresiones algebraicas que proporcionen una descripción sistemática y universal de dichos patrones. Este proceso trasciende la observación de similitudes, ya que busca establecer conceptos algebraicos aplicables a una variedad de situaciones. La esencia de esta etapa radica en la capacidad para generalizar, es decir, formular patrones algebraicos que capturen las relaciones numéricas. Al lograr esta generalización, se abre la puerta a la capacidad de prever y comprender la evolución de secuencias más allá de las instancias específicas observadas inicialmente. Este enfoque no solo se trata de identificar patrones aislados, sino de destilar principios fundamentales que pueden extenderse a diversas circunstancias.

Expresión Directa

Según Radford (2013b) se refiere a la representación algebraica clara y concisa de los patrones identificados previamente. Esta forma de expresión directa implica traducir las reglas generales formuladas durante la generalización en ecuaciones o fórmulas algebraicas que expresan directamente la relación matemática subyacente. La expresión directa permite la aplicación práctica de los conceptos algebraicos identificados, además permite la predicción y el cálculo eficiente de términos futuros en la secuencia, la claridad y la brevedad, es fundamental para la utilidad práctica y la comprensión de las relaciones algebraicas establecidas, al permitir su aplicación en diversos contextos y optimiza la resolución de problemas matemáticos.

2.2. El juego

El juego desempeña un papel crucial en la educación, así como lo proponen Sarlé et al. (2010) al permitir un aprendizaje activo y comprometido, motiva a los estudiantes a explorar y descubrir conceptos por ellos mismos. A través de situaciones de la vida real y desafíos lúdicos, los estudiantes desarrollan habilidades cognitivas, sociales y emocionales, mientras aplican conocimientos de manera práctica. La creatividad florece al tratar problemas de formas diversas, y la interacción en los juegos fomenta el aprendizaje social y colaborativo. Los juegos se pueden aventajar al adaptarse a diferentes estilos de aprendizaje, preparan a los estudiantes para la vida al dotar de habilidades esenciales para enfrentar desafíos. En el contexto de introducir el juego en el aula se puede transformar la forma en que los estudiantes comprenden y aplican conceptos en diferentes áreas desde cualquier edad.

Sarlé et. al (2010) consideran que el juego es una herramienta esencial en el proceso educativo. Su enfoque se centra en que el juego no solo es una actividad recreativa, sino también un medio para el aprendizaje y la construcción de conocimiento. El juego va más allá de ser simplemente una actividad espontánea para los estudiantes o una herramienta ocasional utilizada por los profesores para captar su atención. El juego actúa como un motor impulsor del aprendizaje en los estudiantes, asume un rol en la manera en que perciben y exploran el mundo que los rodea. Sarlé et al. (2010) nos dicen que el juego, al ser un componente cultural, requiere ser incorporado en la enseñanza. Esto implica que el profesor debe organizar la forma en que guía el juego, considerar factores como el tipo de juego, el tiempo, los entornos, los recursos, la dinámica de los participantes y las estrategias a implementar para asegurar que los estudiantes asimilen la experiencia lúdica propuesta.

El juego en sí mismo es un componente valioso que forma parte de la cultura y experiencia de los estudiantes. No se trata simplemente de una actividad accidental o espontánea, sino que es una expresión cultural en la vida de los estudiantes que requiere una consideración seria y una aproximación educativa. Por lo tanto, el papel del profesor implica una planificación cuidadosa en torno al juego. Esto significa que el educador debe diseñar cómo se llevará a cabo la interacción entre los estudiantes y el juego en cuestión. Esto abarca desde el tipo de guía o asistencia proporcionada, el tiempo asignado para el juego, la disposición de los espacios y los materiales relevantes, para asegurar que los estudiantes comprendan y adopten la experiencia lúdica propuesta. El juego se reconoce como un contenido educativo esencial, y el profesor debe crear una estructura educativa que fomente una apropiación efectiva.

Sarlé et al. (2010) sostienen que el juego es una forma natural en la que los estudiantes exploran su entorno, interactúan con otros y comprenden conceptos complejos de manera intuitiva. donde el juego promueve la creatividad, el pensamiento crítico y la resolución de problemas, habilidades esenciales para el aprendizaje a lo largo de la vida. Sarlé et al. (2010) plantean la importancia de que la escuela asuma la responsabilidad de enriquecer el juego de los estudiantes al presentar propuestas que fomenten su habilidad para adquirir conocimientos, aprender y nutrir su imaginación. En el contexto de introducir el álgebra temprana a través de juegos, es importante diseñar actividades que involucren a los estudiantes en la exploración de conceptos algebraicos. Estos juegos podrían permitir a los estudiantes manipular símbolos y variables de manera práctica, lo que facilita la comprensión de abstracciones matemáticas.

2.2.1. Características de los juegos

Según Sarlé (2011), el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas resalta el potencial para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. Al tratarse de actividades basadas en el juego, debido a la naturaleza del juego y la edad de los estudiantes, el profesor debe considerar la totalidad de la situación, aunque los estudiantes solo perciban una parte. Al enfocarse tanto en el juego como en el contenido, el profesor puede permitir errores o cambios durante la actividad, tratarlos después del juego y reconocer la necesidad de repetir el mismo juego varias veces. Cada vez que se juega, se revela gradualmente el significado que diferentes participantes le atribuyen al juego. Sarlé (2011) señala que, para el profesor, observar varias resoluciones del juego proporciona una comprensión completa de las variaciones que los estudiantes aplican al juego como una forma de ejercitar el pensamiento. Por eso se proponen unas características que los juegos deben tener en cuenta:

Voluntario

La participación voluntaria en juegos, según Sarlé et al. (2010), se vincula estrechamente con el compromiso y la motivación de los estudiantes. Al elegir participar por su propia voluntad, los estudiantes muestran un interés genuino, lo que les impulsa a explorar, aprender y disfrutar plenamente de la experiencia. Este nivel de autonomía contribuye a que el juego se perciba como una actividad enriquecedora en lugar de una imposición, lo que podría generar resistencia o desinterés. Además, la libertad de elección fomenta un ambiente positivo y colaborativo, ya que los participantes están propensos a comprometerse activamente. En consecuencia, la participación voluntaria en juegos no solo potencia la adquisición de conocimientos, sino que también fortalece la conexión emocional y la disposición de los estudiantes hacia el aprendizaje. Este enfoque permite adaptar los juegos a las preferencias individuales, optimiza así la eficacia del proceso educativo a través de una participación comprometida y entusiasta.

Planificado

Sarlé (2011) argumenta que la planificación cuidadosa de los juegos es esencial, ya que permite a los profesores considerar de manera estratégica los objetivos educativos y las necesidades específicas de los estudiantes al diseñar actividades lúdicas. La planificación asegura una alineación con los contenidos curriculares y los objetivos pedagógicos, garantiza así que el tiempo dedicado al juego no solo entretenga, sino que también contribuya al proceso de aprendizaje y al desarrollo de habilidades. Además, una planificación adecuada permite la adaptabilidad de los juegos a diferentes contextos y edades, asegura su relevancia para los participantes. Este enfoque también brinda a los profesores la oportunidad de anticipar posibles desafíos y ajustar estrategias según las necesidades específicas de los estudiantes, al promover así una implementación efectiva y exitosa de los juegos en el entorno educativo.

Tiempo determinado

Según Sarlé (2011), la asignación de un tiempo determinado al juego es esencial, ya que proporciona estructura y propósito a la actividad lúdica. La limitación temporal no solo ayuda a los estudiantes a concentrarse, sino que también les permite aprovechar al máximo la experiencia sin descuidar otras responsabilidades. Este enfoque fomenta la toma de decisiones rápida y la resolución de problemas, lo que favorece así la participación y la creatividad durante el juego. En síntesis, establecer un tiempo específico para el juego contribuye a su utilización de manera efectiva y beneficiosa en el contexto educativo, al tiempo que fortalece la conexión entre la diversión y el aprendizaje. La temporalidad brinda un marco que potencia el valor pedagógico de la actividad lúdica, asegura un equilibrio entre la participación activa y la gestión eficiente del tiempo dentro del entorno educativo.

Espacio de interacción

Sarlé et. al (2010) defienden la idea de que el juego debe ser un espacio de interacciones ya que estas interacciones sociales son fundamentales para el desarrollo de los estudiantes. Durante el juego, los estudiantes tienen la oportunidad de interactuar entre sí, colaborar, negociar, comunicarse y resolver problemas en un contexto divertido y relajado. Estas interacciones fomentan el desarrollo de habilidades sociales, la empatía, la comunicación efectiva y la construcción de relaciones con sus compañeros. Además, el juego en grupo puede reflejar situaciones de la vida real y permitir a los estudiantes practicar y comprender el mundo que los rodea de una manera diferente y participativa. El juego como espacio de interacciones, enriquece el aprendizaje social y emocional de los niños.

Llamativo para los estudiantes

Según Sarlé (2011), una característica fundamental de los juegos es su capacidad para ser llamativos, ya que la atracción visual y emocional despierta el interés y la participación activa de los estudiantes. Al diseñar juegos visualmente atractivos y emocionantes, se logra capturar la atención de los estudiantes, motiva a explorar y comprometer plenamente con la actividad lúdica que se desea desarrollar. Este aspecto cobra especial relevancia en el contexto educativo, donde un juego llamativo puede crear un ambiente propicio para el aprendizaje al estimular la curiosidad y la creatividad, y al mantener el entusiasmo a lo largo del tiempo. La combinación de atractivo visual y emocional en los juegos contribuye significativamente a crear una experiencia cautivadora para los estudiantes, al tiempo que se favorece así el proceso educativo de manera positiva.

Estrategia de enseñanza

Sarlé (2010) expone que en la educación inicial se ha prestado atención a cómo definir lo que enseñamos. Al mismo tiempo, se ha entendido la importancia de saber qué se necesita para enseñar cosas específicas a niños pequeños y cómo adaptarlas para que sean adecuadas. Esto ha dado lugar a tres desafíos: (1) saber en qué momento el juego se convierte en algo que enseñamos, (2) entender qué cosas se deben saber para enseñarlo y (3) descubrir cómo cambia el juego al convertirse en algo que enseñamos. El juego facilita la adquisición de habilidades, conocimientos y valores al tiempo que mantiene el interés y la motivación de los estudiantes. Además, fomenta la colaboración, el pensamiento crítico y la creatividad, lo que contribuye a un aprendizaje completo, proporciona una experiencia práctica y concreta para los estudiantes, lo que les permite comprender y aplicar conceptos matemáticos de manera diferente. A través de desafíos y problemas planteados en un contexto lúdico, los estudiantes pueden explorar, experimentar y descubrir principios matemáticos por sí mismos.

Habilidad social y cognitiva

Sarlé (2011) sostiene que la escuela es donde pasamos la mayor parte de nuestra infancia y, a diferencia del hogar, los adultos tienen un propósito específico al cuidar de los estudiantes. En este entorno, las actividades son dirigidas por el profesor y los estudiantes deben participar mientras mantienen el interés en temas que tal vez no buscarían por sí mismos. La dinámica social de la escuela influye en la enseñanza y en la rutina diaria, ya que los niños aprenden a interactuar con sus pares y adultos, a adaptarse a relaciones desiguales y a ser evaluados constantemente. El juego facilita la adquisición de habilidades, conocimientos y valores al tiempo que mantiene el interés y la motivación de los estudiantes. Además, fomenta la colaboración, el pensamiento crítico y la creatividad. El juego en el aula de matemáticas promueve el trabajo en equipo donde los estudiantes interactúan, discuten estrategias, comparten ideas y resuelven problemas en conjunto.

La implementación del juego en la enseñanza de los aprendizajes algebraicos no solo hace que el proceso de aprendizaje sea atractivo y divertido, sino que también mejora la comprensión, el compromiso y el desarrollo de habilidades matemáticas y sociales en los estudiantes. Las características de los juegos nos muestran la importancia de que sean voluntarios y planificados, con un tiempo determinado y un espacio propicio para las interacciones. Estos juegos deben ser visualmente llamativos y emocionantes para capturar la atención y mantener el entusiasmo de los estudiantes. Al tratar tanto aspectos cognitivos como sociales, los juegos como estrategia de aprendizaje se convierten en un vehículo para el desarrollo integral de los estudiantes. Al enfocarse en estas características, los educadores pueden aprovechar al máximo el potencial educativo del juego, proporciona una experiencia enriquecedora que contribuye a un aprendizaje y a la adquisición de habilidades.

2.2.2. Estructura de los juegos

Los juegos abarcan un tejido complejo que se entrelazan para dar forma a una experiencia lúdica significativa. Estos elementos fundamentales establecen el marco en el cual los participantes interactúan, compiten y colaboran, proporciona un contexto estructurado que va más allá de la simple diversión. En este sentido, explorar la interacción entre las reglas que rigen el juego, las normas de comportamiento, el orden establecido, los objetivos a alcanzar, los roles asignados y la competencia, nos permite desentrañar cómo los juegos no solo entretienen, sino que también fomentan el desarrollo de habilidades cognitivas, sociales y emocionales de manera simultánea. Al adentrarnos en esta estructura, se revela la riqueza y el potencial educativo que los juegos aportan al proceso de aprendizaje y crecimiento personal. Por eso se propone una estructura general que deben tener los juegos:

Un Propósito u objetivo

Sarlé et. al (2010) nos dicen que el juego debe tener un objetivo o un propósito específico dentro de la dinámica lúdica, ya que los juegos no son simplemente actividades recreativas, sino que están diseñados para alcanzar metas educativas y de desarrollo. La integración de objetivos en los juegos proporciona dirección y significado, canaliza la energía de los participantes hacia la consecución de metas específicas. Este enfoque no solo estimula la motivación y la concentración de los jugadores, sino que también les brinda la oportunidad de adquirir habilidades, conocimientos y valores de manera efectiva y aplicable. Al incorporar objetivos, los juegos se transforman en herramientas de aprendizaje intencionales que combinan la diversión con la construcción de resultados concretos.

Roles

Es fundamental la aparición de roles en los juegos, según Sarlé et. al (2010) la inclusión de roles en el juego es esencial porque agrega una dimensión de interacción social y fomenta el desarrollo de habilidades sociales y cognitivas en los participantes. Los roles asignados en el juego permiten a los jugadores adoptar diferentes perspectivas y desempeñar diversos roles dentro de una narrativa o contexto específico. Esta dinámica enriquece la experiencia lúdica al requerir la comunicación, la colaboración y la negociación entre los jugadores que asumen diferentes roles. Además, al asumir roles, los participantes pueden desarrollar empatía al ponerse en el lugar de otros, fortalece su comprensión de diferentes puntos de vista y perspectivas.

Reglas

Sarlé et. al (2010) sostienen que en los juegos debe existir la presencia de reglas ya que debido a esto se establece en un marco de referencia que organiza y guía la actividad lúdica. Las reglas proporcionan una estructura clara que define cómo se lleva a cabo el juego, qué acciones son permitidas o prohibidas, y cómo se alcanzan los objetivos establecidos. Esta estructura no solo promueve la igualdad y la justicia en el juego, sino que también ayuda a la estimulación de pensamiento estratégico, la toma de decisiones y la resolución de problemas por parte de los participantes. Al seguir las reglas, los jugadores experimentan una serie de retos y limitaciones que fomentan la creatividad y la adaptación, además de enseñarles a manejar situaciones en un contexto de normas preestablecidas. En definitiva, las reglas en los juegos contribuyen a una experiencia enriquecedora al proporcionar un marco organizativo y formativo que promueve el aprendizaje y el desarrollo de habilidades.

Competencia

Para Sarlé (2011) el juego de competencia es relevante porque cree que esta modalidad no sólo motiva a los estudiantes, sino que también promueve la implicación activa, el pensamiento crítico y la resolución de problemas, ya que, el juego de competencia brinda a los estudiantes un contexto dinámico y desafiante que fomenta su interés y participación. La competencia intrínseca del juego puede despertar la curiosidad y la emoción de los estudiantes, lo que a su vez puede aumentar su compromiso con los conceptos algebraicos que son presentados. Al competir, los jugadores se esfuerzan por superar desafíos, mejorar sus habilidades y lograr sus objetivos, lo que contribuye al desarrollo de su autoconfianza y perseverancia. Además, la competencia puede inspirar la creatividad y la innovación, ya que los jugadores buscan estrategias y soluciones únicas para ganar. Sin embargo, es importante equilibrar la competencia con la colaboración y el respeto hacia los demás, promueve así un ambiente de juego saludable y constructivo.

2.2.3. El juego en el aprendizaje del álgebra

El enfoque del juego en el aprendizaje del álgebra ha ganado prominencia en la pedagogía contemporánea gracias a su capacidad para fomentar una comprensión profunda y significativa de los conceptos algebraicos. Según Sarlé et al. (2010) el juego ofrece a los estudiantes un entorno seguro y estimulante donde pueden experimentar con símbolos y expresiones algebraicas de manera lúdica, argumenta que, a través del juego, los estudiantes pueden tratar desafíos matemáticos de manera menos intimidante, lo que les permite explorar y manipular conceptos abstractos con mayor confianza. Además, sostiene que el juego promueve una interacción social enriquecedora, lo que conlleva la colaboración y la comunicación entre estudiantes, y les brinda la oportunidad de explicar su pensamiento algebraico a sus compañeros, refuerza así su comprensión y habilidades de expresión.

El uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas aumenta el interés, la motivación y la participación de los estudiantes, lo que conduce a un aprendizaje duradero. Además, se ha encontrado que el uso de juegos mejora la interacción entre los estudiantes, los profesores y los compañeros, y afecta positivamente las actitudes hacia las matemáticas. Como lo plantea el análisis de Sarlé et al. (2010) es importante considerar variables moderadoras, como el nivel educativo, el tipo de juego y el tamaño de la muestra, para determinar si existen diferencias significativas en el logro académico en función de estos factores. El enfoque de Sarlé et al. (2010) encuentra resonancia con investigadores como Radford (2021), quien también resalta el papel del juego en la construcción de significados algebraicos. Radford (2021) sugiere que el juego no solo permite a los estudiantes manipular símbolos, sino que también los ayuda a explorar conexiones conceptuales profundas.

El juego en el aprendizaje del álgebra facilita el desarrollo de un pensamiento algebraico flexible, donde los estudiantes no solo siguen reglas, sino que comprenden cómo las manipulaciones algebraicas se relacionan con la estructura subyacente de los objetos matemáticos. En este sentido, el juego se convierte en un medio semiótico de objetivación, permite a los estudiantes construir representaciones simbólicas y tratar problemas matemáticos desde múltiples perspectivas. En conjunto, las perspectivas de Sarlé et al. (2010) y Radford (2021) resaltan el potencial del juego para transformar la enseñanza del álgebra en una experiencia accesible, comprometida y enriquecedora para los estudiantes.

2.3. Relevancia del marco teórico en la investigación cualitativa

Las ideas presentadas en la revisión de la literatura y el marco teórico son adecuadas para una investigación cualitativa en el campo de la educación y específicamente, en el ámbito del pensamiento algebraico y el uso de juegos como estrategia de enseñanza. La investigación cualitativa según Hernández et al. (2014) se enfoca en comprender y explorar fenómenos desde la perspectiva de los participantes, es por eso que el juego es una herramienta efectiva para fomentar la comprensión del álgebra y poder analizar cómo se manifiesta la estratificación del pensamiento algebraico a través de juegos. Esto podría relacionarse con el enfoque cualitativo en la comprensión de las experiencias y perspectivas de los estudiantes en relación con el álgebra. En esta investigación se presentan múltiples perspectivas y enfoques, desde la teoría de la objetivación de Radford (2021) y la estratificación del pensamiento algebraico hasta la teórica del juego según Sarlé (2010).

La investigación cualitativa permite capturar estas perspectivas diversas al recopilar datos a través de entrevistas, observaciones y análisis de documentos, los cuales se desarrollan en un contexto educativo donde se implementarán estrategias pedagógicas que puedan involucrar a los estudiantes en un contexto real, al enforcarse en la educación matemática y la implementación de juego en el aula de clase, considera el juego como una herramienta que puede utilizarse en el aula de matemáticas. Las ideas principales de la revisión de la literatura y el marco teórico de esta investigación hacen referencia a una investigación cualitativa, ya que se centran en temas relacionados con la educación matemática, el pensamiento algebraico y el uso de juegos en el aula, y buscan comprender las experiencias y perspectivas de los participantes en estos contextos educativos.

2.4. Coherencia teórica en el diseño de los juegos

Es esencial destacar que cada actividad meticulosamente planificada y ejecutada en este estudio está intrínsecamente vinculada al marco teórico que hemos construido. La orientación de nuestra investigación en educación matemática ha sido guiada por este marco teórico, mediado por las valiosas contribuciones de la investigadora Patricia Sarlé y el doctor Luis Radford. Este marco teórico ha actuado como la brújula que ha dirigido cada fase de nuestro trabajo, asegura una conexión coherente entre la teoría y la práctica. Asimismo, la influencia de Sarlé y Radford han guiado las decisiones metodológicas al garantizar la alineación precisa con los principios educativos que respaldan nuestra investigación. La integración cuidadosa de esta perspectiva teórica ha fortalecido la calidad y la coherencia de nuestro enfoque, lo que contribuye al avance de nuestro conocimiento en el campo de la educación matemática.

Según Sarlé (2010) hemos diseñado actividades pedagógicas que estimulan la participación activa de los estudiantes a través de enfoques lúdicos, las cuales pretenden permitir una comprensión profunda y representativa de los conceptos de patrones y series, tiene en cuenta la teoría del juego donde nos menciona algunas de sus características y estructura que deberían tener los juegos implementados en esta investigación, Sarlé (2010) menciona que los juegos direccionados en la enseñanza, deben ser voluntarios y planificados para aumentar el compromiso y la motivación de los estudiantes, alinea los objetivos educativos y curriculares con las actividades lúdicas. Además, los juegos en el aprendizaje del álgebra proporcionan un entorno seguro y estimulante donde los estudiantes pueden experimentar con conceptos abstractos, fomenta la interacción social, la colaboración y el pensamiento algebraico.

Estas ideas destacan la importancia de la planificación y el enfoque educativo en el uso de juegos como herramientas efectivas para el aprendizaje y el desarrollo de habilidades en estudiantes. Incorporado la perspectiva de Radford (2021) sobre los niveles de estratificación, se comprende que las actividades deben ser apropiadas y desafiantes para cada nivel de competencia, fomenta así un aprendizaje progresivo y adecuado a las necesidades de los estudiantes. Asimismo, se adaptan las actividades para fomentar una mayor reflexión y conciencia metacognitiva, tal como lo propone Radford (2010) en su enfoque educativo. Los juegos diseñados para la estratificación del pensamiento algebraico deben ser interactivos, desafiantes pero accesibles, y capaces de adaptarse a las necesidades y niveles de los estudiantes, puesto que al permitir que los estudiantes experimenten y practiquen con conceptos algebraicos de manera lúdica, estos juegos contribuyen al desarrollo del problema planteado inicialmente.

3. Metodología

3.1. Contextualización de la elección metodológica

Este trabajo de grado se centra en una investigación cualitativa, respaldada por la importancia enfatizada por Hernández et al. (2014) en la comprensión de fenómenos complejos y la exploración de aspectos subjetivos de la realidad. El contexto educativo abordado involucra la interacción entre estudiantes y profesores en un ambiente de aprendizaje específico, inherentemente complejo y multifacético, este escenario demanda una aproximación cualitativa para comprender a fondo los procesos y dinámicas implicados. Según Hernández et al. (2014), la metodología cualitativa nos permite explorar las experiencias, percepciones y significados en este contexto, esencial para analizar cómo se estratifica el pensamiento algebraico a través de juegos, de forma alineada con la naturaleza inductiva de la investigación cualitativa.

La metodología cualitativa, según la propuesta de Hernández et al. (2014), emerge en el trabajo de investigación, ya que su enfoque inductivo proporciona la herramienta necesaria para explorar a fondo las experiencias humanas y capturar la diversidad de interpretaciones en el contexto específico que se investiga. Al dirigir nuestra investigación hacia la exploración de experiencias, percepciones y significados, nos sumergimos en el análisis de cómo se estratifica el pensamiento algebraico a través de juegos. La elección de utilizar el juego como herramienta principal no solo se alinea con la metodología cualitativa, sino que también refleja nuestra intención de sumergirnos en la vivencia práctica de los estudiantes, permite capturar dimensiones subjetivas.

Según Hernández et al. (2014) la metodología cualitativa ofrece la posibilidad de adoptar un enfoque inductivo, lo que implica que los hallazgos puedan emerger de forma natural a medida que se recopilan y analizan los datos. Esta característica se vuelve relevante en este trabajo de investigación, donde nos sumergimos en la exploración de nuevas perspectivas y comprensiones dentro del contexto educativo estudiado. Hernández et al. (2014), mencionan la flexibilidad inherente de la metodología cualitativa, la cual permite que las experiencias y percepciones de los participantes se revelen de manera auténtica, lo cual contribuye a una comprensión contextualizada del juego. Este enfoque inductivo nos habilita para capturar las interacciones estudiantiles, enriquece la investigación con descubrimientos que podrían no haber sido anticipados en una estructura de investigación más rígida y predefinida.

3.1.1. Tipo de estudio que orienta la investigación: cualitativo

Este tipo de estudio se orienta hacia un enfoque cualitativo, particularmente adecuado para investigar los niveles de estratificación del pensamiento algebraico en el contexto de juegos. Este enfoque permite explorar las experiencias individuales de los jugadores y sus reflexiones durante el juego, mediante métodos como entrevistas, observación participante y análisis de diarios de campo. Estas herramientas cualitativas ofrecen la capacidad de capturar las perspectivas únicas de cada jugador, así como analizar las estrategias y decisiones que aplican durante el juego. Este enfoque mostro cómo los factores contextuales y narrativos influyen en la estratificación del pensamiento algebraico de cada jugador, contribuyo a una comprensión de la relación entre la experiencia del juego y el pensamiento estratégico.

3.1.2. Foco de análisis: la integración de juegos en la formación del pensamiento algebraico

El objeto de investigación central que deseamos abordar se enfoca en analizar el juego como una herramienta pedagógica ayuda a identificar la estratificación de niveles de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2010). Esta perspectiva de investigación adquiere relevancia debido a desafíos inherentes en la enseñanza de conceptos algebraicos, especialmente en contextos educativos diversos y con estudiantes de diferentes niveles de competencia. La incorporación estratégica de juegos en este proceso de aprendizaje, tiene en cuenta niveles de estratificación propuestos por Radford (2010), nos ofrece un enfoque multifacético para analizar cómo estos juegos pueden ser efectivamente utilizados para identificar niveles de estratificación propuestos por Radford (2010), en estudiantes del grado 6º3 de la institución educativa Hernán Toro Agudelo.

La integración de juegos en la enseñanza del pensamiento algebraico se vuelve esencial al considerar las habilidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes. La diversidad de experiencias y niveles de competencia que cada estudiante aporta al aula resalta la importancia de utilizar estrategias que puedan ser llamativas para los estudiantes, como, por ejemplo, los juegos. Estos juegos proporcionan una herramienta donde cada estudiante puede interactuar activamente con conceptos algebraicos, independientemente de su punto de partida en el desarrollo del pensamiento algebraico. La adaptación de juegos para acomodar las diferencias individuales de habilidad se convierte en una herramienta para abordar el desafío de enseñar conceptos algebraicos de manera equitativa, permite que los estudiantes participen y comprendan el álgebra de una manera diferente, promueve la comprensión de conceptos matemáticos en el aula.

El enfoque central de esta investigación es analizar la estratificación de los niveles de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2010) a través de la herramienta juego, en la adquisición de habilidades y conceptos algebraicos. Además, busca abordar las barreras que los estudiantes enfrentan al comprender el álgebra. Este estudio es de particular interés al explorar cómo la adaptación de juegos en diferentes niveles de estratificación puede emerger como una estrategia pedagógica para la enseñanza del pensamiento algebraico. Asimismo, pretende comprender cómo estos juegos pueden satisfacer las necesidades específicas de diversos grupos de estudiantes, a la vez de destacar la importancia de que los educadores diseñen experiencias de aprendizaje.

3.2. Trabajo de campo

El presente conjunto de juegos se distingue por la planificación que busca integrar factores como la estrategia, la destreza y la recreación, generando así una experiencia lúdica. La estructura global ha sido concebida con el objetivo de ofrecer una diversidad equilibrada y adaptable a distintas preferencias, abarcando aspectos tácticos, habilidades específicas y momentos de entretenimiento. En consonancia con esta visión, la estratificación del pensamiento algebraico se manifiesta a través de diferentes juegos. La investigación propone analizar cómo se manifiesta la estratificación en estudiantes de grado sexto, con el propósito de identificar patrones y niveles de comprensión respecto a los conceptos algebraicos. Se evaluará la capacidad de los estudiantes para abordar y resolver ejercicios algebraicos, ofreciendo así una comprensión de su desarrollo en esta área.

3.2.1. Juego 1. Álgebra al ritmo de la música

Este juego se enfoca en la exploración de secuencias y patrones, con la intención de brindar una introducción inicial a los estudiantes a este tema. Definidas como la ordenación y repetición sistemática de elementos en una serie, las secuencias y patrones se presentan como el punto de partida para comprender el juego. En la perspectiva de Radford (2021) se destaca la generalización de secuencias como un área en el ámbito del pensamiento algebraico. La investigación se centra en presentar a los estudiantes una cantidad limitada de elementos en una secuencia, ya sea figuras formadas por objetos o una secuencia numérica. Posteriormente, se desafía a los estudiantes a determinar el valor de los elementos futuros, los más distantes en la secuencia e incluso a conceptualizar el término general ("n") de la secuencia. Este enfoque pedagógico integral no solo involucra a los estudiantes en el juego, sino que también promueve el contexto del pensamiento algebraico.

Radford (2010) destaca la importancia de la generalización algebraica en el análisis de patrones, enfatiza la habilidad de identificar similitudes en algunos elementos de una secuencia y extender esa similitud a toda la serie. Este proceso implica la creación de una fórmula o regla basada en la similitud descubierta, permite calcular cualquier elemento de la secuencia sin requerir observación directa. Conocido como descubrir una "regla secreta" que se aplica a toda la secuencia, este enfoque, según Radford (2010), posibilita calcular términos sin necesidad de visualizarlos. Este proceso de generalización implica encontrar una característica común en cada término de la secuencia. La generalización algebraica, emerge como una herramienta esencial que va más allá de la simple identificación de patrones.

Explicación del juego: Se darán 8 figuras geométricas: círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo, paralelogramo, Hexágono, rombo y pentagrama (estrella), así formaremos 8 sonidos diferentes, estos sonidos se encuentran previamente establecidos así:

- Círculo amarillo: 1 aplauso
- Cuadrado azul: chasquido con dedos

- Triángulo verde: 1 salto
- Rectángulo morado: sonido con la boca “clap”
- Pentagrama rojo: 1 aplausos en las piernas
- Paralelogramo negro: 1 golpe suave en el pecho
- Rombo naranja: golpe en la cabeza
- Hexágono café: sonido de “shh”

Las Profesoras presentan seguidamente un patrón como ejemplo a la explicación de la actividad**,** luego cada equipo pasará a la creación de su propio patrón y finalmente se realizará la presentación de la propuesta por cada grupo.

Reglas

1. No se puede repetir un sonido tres veces seguidas.
2. Si dos equipos tienen la misma melodía, quedan descalificados
3. El intérprete de la melodía debe ser preciso, se admite solo un fallo.
4. Jurados: deben ser imparciales y honestos.
5. Si una persona del equipo no trabaja, el equipo completo pierde.
6. Cada equipo será evaluado por puntos, estos puntos serán establecidos así:
   6.1. Cada jurado tendrá 3 formas de calificar, cara feliz que vale 5 puntos, cara regular que vale 3 puntos y cara triste que vale 2 puntos.
   6.2. En el momento en que los compositores y coreógrafos salgan al escenario, los demás equipos deben estar atentos para adivinar el patrón, el equipo que primero adivine obtendrá un punto a favor.
7. Durante las presentaciones debe haber total silencio, el equipo generador del ruido perderá puntos.
8. Ganará el equipo con más puntos al finalizar las presentaciones.

Roles

1. Intérpretes: representa la melodía (mínimo 3 estudiantes)
2. Compositores: escribe el patrón de la melodía (2 estudiantes)

3. Coreógrafo: da fuerza a la melodía para impulsar a su equipo a la victoria (mínimo 1 estudiante)
4. Jurados: dicen que equipo es el ganador (5 estudiantes)

Agrupación: se harán 5 equipos de 5 estudiantes cada uno, 1 mesa de jurados que cuente con 5 integrantes, serán ellos quienes decidan el equipo ganador.

Materiales: colores, lápices, hojas blancas, escarapelas, fichas de calificación, figuras geométricas planas para el tablero y marcador.

Intención: analizar y comprender patrones y secuencias, mediante su estructura y regularidades a través de sonidos y las figuras geométricas.

3.2.2. Juego 2. Desafiando dimensiones

Este juego se centra en la exploración y consolidación de conceptos relacionados con secuencias y patrones propios del pensamiento algebraico Iniciaremos con un repaso de las secuencias y patrones previamente explorados en el juego 1, a través del uso de este conocimiento como punto de partida. A medida que avanza el juego, los estudiantes exploran secuencias y patrones dentro del contexto de juegos, además de la oportunidad de aplicar y reforzar conceptos algebraicos. Además, se fomentará la reflexión sobre la importancia de lo indeterminado, la generalización y la representación simbólica en la comprensión de secuencias y patrones, elementos clave en el pensamiento algebraico. Este enfoque integral busca no solo fortalecer la comprensión conceptual de los estudiantes, sino también promover habilidades en conocimientos adquiridos en un entorno lúdico y educativo.

En última instancia, la finalidad de este juego se extiende más allá del fortalecimiento de las habilidades matemáticas; busca también fomentar un interés por el aprendizaje de las matemáticas por parte de cada jugador, en este caso el estudiante. A través de la participación activa en el juego, se pretende demostrar que el pensamiento algebraico no solo puede ser sobre lo indeterminado, sino también sobre lo analítico y simbólico. La integración de diversión e interactividad en el proceso educativo aspira a crear un entorno estimulante que inspire a los estudiantes, estimule su participación y les permita descubrir nuevos conceptos algebraicos. Más allá de la transmisión de conocimientos, este enfoque se orienta a suscitar un interés en el ámbito de las matemáticas, contribuye así a un aprendizaje que les permita a los estudiantes mirar desde otra perspectiva.

Explicación del juego: Se entregan 4 cubos por equipo previamente realizados por las profesoras y se explican conceptos básicos del cubo (aristas, vértices y lados). Los estudiantes se organizan en el suelo del aula agrupados en círculo, en la mitad del salón hay una campana que es manipulada únicamente por un integrante de los equipos en caso de saber la respuesta a la pregunta orientada por las profesoras a cargo.

Las profesoras hacen una serie de preguntas vinculadas a la actividad, pide a los estudiantes contar los vértices y aristas de una cantidad de cubos y cada equipo debe intentar dar respuesta a esos interrogantes.

Las preguntas están relacionadas con una secuencia formada con los cubos previamente entregados.

Reglas

1. Las respuestas no se pueden gritar.
2. Se debe tocar la campana y dar la respuesta en el tablero, en caso de no hacerlo así: se anula 1 punto.
3. Si un integrante dio una respuesta incorrecta y otro equipo la sabe pueden pararse y dar la respuesta.
4. Cada respuesta buena genera dos puntos.

Roles

1. Razonadores: encargados de darle solución a las respuestas
2. Puntuadores: determinan si el punto es válido o inválido
3. Campanero: encargado de correr velozmente a la mitad del salón para tocar la campana

Agrupación: se divide el grupo en 6 subgrupos, cada uno de 5 estudiantes

*Materiales: h*ojas blancas, regla, una campana, cubos de papel, escarapelas de colores para diferenciar los equipos.

Cuestionario:

1. ¿Cuántas aristas tiene 1 cubo?
2. ¿Cuántos vértices tiene 1 cubo?
3. ¿Cuántos vértices tienen dos cubos?
4. ¿Cuántas aristas tienen 3 cubos?
5. ¿Cuántos cubos necesitará para tener 16 vértices?
6. ¿Cuántos vértices tendrán 10 cubos?
7. ¿Cuántas aristas tendrán 10 cubos?
8. Si armamos una figura con tres cubos, dos en forma horizontal y uno en forma vertical ¿Cuántos vértices y aristas se obtienen?
9. ¿Puedes encontrar una fórmula matemática para hallar vértices?

Intención: Estratificar el pensamiento algebraico en los estudiantes de 6°3 a través de desafíos conceptuales y prácticos.

3.2.3. Juego 3. Búsqueda del tesoro algebraico

En este juego se exploran diversos temas a través de tarjetas de desafío que los estudiantes descubren y resuelven, a través de conceptos como secuencias, patrones y ecuaciones simples. Estas tarjetas ofrecen una variedad de desafíos que involucran la aplicación práctica de conocimientos en contextos relacionados con el pensamiento algebraico. Al abordar temas clave de manera interactiva, el juego proporciona a los estudiantes oportunidades para desarrollar y aplicar habilidades matemáticas esenciales de una manera lúdica. Este enfoque no solo amplía la comprensión conceptual, sino que también promueve la resolución de problemas y el pensamiento crítico, contribuye así a un aprendizaje matemático integral. La combinación de desafíos y diversión en el juego pretende no solo reforzar conocimientos, sino también cultivar un ambiente educativo enriquecedor y motivador para los estudiantes.

Explicación del juego: Se presenta a los estudiantes una historia (ver anexo 1**.** Historia del tesoro: Juego 3 Tesoro algebraico) en la que se encuentran en busca de un tesoro escondido, a medida que los estudiantes avanzan en la historia se les presentan una serie de desafíos algebraicos (ver anexo 2. Desafíos algebraicos: Juego 3 Tesoro algebraico). Los estudiantes resuelven cada desafío, obtienen "pistas" que los acercan al lugar donde se encuentra el tesoro. El último desafío informa tanto la solución al enigma como la ubicación del "tesoro algebraico". En cada turno, las profesoras toman en sus manos una tarjeta de desafío algebraico y la leen en voz alta. Todos los equipos trabajan para resolver el desafío en un tiempo determinado. Una vez que un equipo resuelve el desafío, verifica con el facilitador (profesoras o líderes del juego). Si la respuesta es correcta, el equipo recibe una tarjeta de pista. El equipo que descifra todas las pistas y llega a la ubicación final del tesoro será el ganador, recibe el "tesoro algebraico" como recompensa.

Reglas

1. Las respuestas no pueden presentarse en voz alta sin ser confirmadas previamente por las profesoras, de ser así el equipo que dio la respuesta sin consentimiento no recibirá la pista mientras que los demás equipos sí.
2. Un solo estudiante no puede dominar todo el juego y tomar el control completo. Todos deben tener la oportunidad de participar activamente.
3. No deben tomar atajos o buscar respuestas en línea sin intentar resolver los desafíos por sí mismos.
4. El equipo que encuentre el tesoro será el ganador.

Roles

1. Guía: Dirige el grupo por el mejor camino
2. Razonador: Ayude a resolver los problemas presentados
3. Detective: Toma la carta de los desafíos y ayuda al equipo a ir a la otra pista

Agrupación: Se dividen los estudiantes en 6 grupos conformados por 5 personas

Materiales: Tarjetas con desafíos algebraicos, tarjetas con pistas, papel y lápiz para anotar soluciones, pistas y un "tesoro"

Intención: Motivar a los estudiantes a trabajar en equipo, utilizar su pensamiento algebraico y desarrollar habilidades de resolución de problemas mientras buscan "tesoros" escondidos en una serie de desafíos algebraicos.

3.2.4. Juego 4. Museo de fractales: exploración algebraica

La actividad se inicia con una explicación sobre los fractales, la cual destaca la naturaleza como patrones que se repiten a diversas escalas y su generación a través de reglas matemáticas. Se introduce a los participantes en la idea de cómo estructuras geométricas complejas pueden surgir de procesos matemáticos aparentemente simples. Se enfatiza la noción de autosimilitud, donde las partes del objeto son similares al objeto completo, que brinda una introducción conceptual al tema de los fractales. Este enfoque busca no solo informar sobre los fractales, sino también despertar el interés y la curiosidad de los participantes al resaltar la conexión entre las matemáticas y los patrones complejos que se observan en la naturaleza y el arte. La actividad se concibe como una oportunidad no sólo para comprender conceptos matemáticos, sino también para apreciar los fractales en el entorno.

Explicación del juego: Se propone a los estudiantes realizar un fractal con la explicación previa de las profesoras, después de que los estudiantes han creado un fractal básico, se explica el concepto de iteración. Se sugiere que cambien el número de iteraciones al repetir el proceso (por ejemplo, hacerlo tres veces, cuatro veces). Se puede observar cómo el número de elementos en cada iteración crece de manera exponencial y cómo esto puede relacionarse con la multiplicación en álgebra. Se concederán unos minutos para que los estudiantes se animen a personalizar sus fractales al agregar colores y tamaños variados de los elementos. Mientras se hace el montaje de la exposición del museo, cada equipo elige un integrante que hace parte de los jurados.

Los estudiantes le colocan un precio a su obra y empiezan a explicar a cada grupo de estudiantes que se acerca porque deben comprar su obra y como se aplica el concepto de los fractales en ella. Las profesoras toman el rol de evaluadores y compradores, donde generan preguntas de las secuencias y patrones formados en los fractales presentados, los estudiantes se les permite responder las preguntas incluso de obras de sus compañeros, esto les dará una buena puntuación que los jurados tendrán en cuenta. La idea es que cada equipo trate de vender su obra al explicar en detalle qué hizo y qué significa esto, además de ponerle un precio que consideren al valor de su obra. Al concluir el juego se resalta cómo las características del pensamiento algebraico se manifiestan en los patrones de los fractales y se asigna un ganador por su obra y por el pensamiento presentado en la exposición del museo.

Reglas

1. Las justificaciones de su obra para ser vendida deben ser razones matemáticas encontradas en la obra.
2. Los jurados deben ser imparciales, en caso de detectar fraude la obra será omitida y no podrá participar más.
3. Todos los participantes del equipo deben participar activamente, esto se tendrá en cuenta en la votación de los jurados.

Roles

1. Jurados: compran las obras y quienes determinarán qué obra es el ganador a (Elegido por el equipo luego de la creación)
2. Pintores: encargados de decorar y organizar la obra (Todos)
3. Expositores: presentar la obra en el museo (dos)

Agrupación: se seleccionan dos supervisores y los demás participantes serán jugadores

Materiales: papel cuadriculado o papel en blanco, lápices, colores, marcadores, regla, tiquetes, escarapelas.

Intención: introducir a los estudiantes al concepto de fractales y relacionar su creación con conceptos algebraicos.

3.2.5. Juego 5. Sigue el patrón

El juego se desarrolla a través de preguntas aleatorias que exploran el tema de patrones, desafía a los participantes a responder para acumular puntos y avanzar, la variedad en las preguntas introduce emoción y desafío, puesto que se fomenta una participación activa y la aplicación práctica de conocimientos. La acumulación de puntos no solo refuerza la comprensión individual, sino que también impulsa una competencia amistosa, añade un elemento motivador al juego. Este enfoque lúdico no solo tiene como objetivo educar sobre patrones, sino también convertir el aprendizaje en una experiencia dinámica y entretenida, lo que permite la comprensión de conceptos. La estructura del juego, centrada en la aleatoriedad de las preguntas, busca mantener la atención y el interés de los participantes, puesto que se crea un ambiente participativo y estimulante.

Explicación del juego: Los estudiantes se organizan en parejas (una pareja detrás de otra), seguidamente las profesoras inician el patrón, dicen: un triángulo tiene 3 vértices, continua la primera pareja de estudiantes, dice: dos triángulos tienen 6 vértices, la siguiente pareja de estudiantes dice: tres triángulos tienen 9 vértices y así se continúa hasta que una pareja de estudiante se equivoque, en caso de que una pareja se equivoque sale del juego y se comienza de nuevo el patrón desde el inicio con la pareja que sigue en la hilera.

Reglas

1. Una pareja se puede demorar máximo 10 segundos para contestar el patrón, de no ser así automáticamente queda calificada.
2. No se permite que una pareja responda por otra, de ser así queda descalificada la pareja que incumpla la regla.
3. Cada pareja tiene derecho a dos comodines, el cual consta de solicitar una ayuda a cualquier pareja.

4. Gana la pareja que no se equivoque en la construcción del patrón al quedar como únicos jugadores.

Roles

1. Jugadores
2. Supervisores: Están al pendiente de que no se haga trampa, sino que cada pareja siga con las reglas establecidas.

Agrupación: Los estudiantes se forman en parejas, una detrás de la otra en hileras para que sea más ágil las respuestas.

Materiales: Hoja blanca, lápiz.

Intención: Desarrollar el pensamiento divergente y favorecer la coordinación visual y motora, además de identificar el primer y segundo nivel de estratificación de pensamiento algebraico (factual y contextual).

3.2.6. Juego 6. Football algebraico

El juego presenta un desafío algebraico al involucrar a los estudiantes en la creación y gestión de un equipo de fútbol. Los desafíos, integrados en cartas específicas (Ver anexo 3. Cartas algebraicas: Juego 6 Football algebraico) exploran temas como ecuaciones simples, secuencias, patrones, vértices, aristas y fractales. Cada desafío plantea situaciones algebraicas relacionadas con el rendimiento del equipo, exige a los estudiantes aplicar conceptos matemáticos para superarlos. La dinámica del juego busca no solo fortalecer habilidades algebraicas, sino también hacer que el aprendizaje sea interactivo y motivador al relacionarlo con el contexto del fútbol. Este enfoque integral pretende no solo enseñar conceptos del pensamiento algebraico, sino también demostrar su aplicabilidad práctica en situaciones de la vida cotidiana ya que permite una comprensión contextualizada del juego.

*Explicación del juego: l*os estudiantes se dividen en dos grandes equipos, seguidamente se presenta una bolsa con unos desafíos (Ver anexo 3. Cartas algebraicas: Juego 6 Football algebraico) por las profesoras encargadas, quienes a su vez también tendrán el rol de árbitros. La idea es que cada equipo elija un desafío y por cada respuesta buena obtenida por el equipo se tiene la oportunidad de meter gol en la portería desde el tiro de cobro, si el estudiante mete gol será punto para su equipo, si falla deberá esperar el segundo desafío para volverlo a intentar.

Reglas

1. Si el estudiante que cobra el gol no logra hacerlo, no obtendrá punto así su equipo sí haya acertado en la respuesta.
2. Si ambos equipos responden al mismo tiempo se van a penales de tres cobros, cada equipo.
3. No se permite discutir o pelear en la cancha, esto es considerado falta y anulación de un gol.
4. Todo el equipo debe participar, de no ser así sus rivales del equipo contrario llevan delantera en el partido.
5. Si por algún motivo ningún equipo sabe la respuesta, se van a penales de tres cobros cada equipo.
6. Gana el equipo que más goles realiza.

Roles

1. Árbitros: encargado de que todas las reglas se cumplan.
2. Jugadores: resuelven las situaciones.
3. Porteros: encargado de defender a su equipo a la hora de que el equipo contrario intenta hacer gol.

Agrupación: el salón se divide al azar en dos grandes equipos, cada equipo es autónomo de elegir su portero y los goleadores.

Materiales: hoja blanca, lápiz, escarapelas de identificación de equipo, balón, pito, porterías, marcador, bolsa con tarjetas de pregunta.

3.3. Identificación de participantes

En la investigación participaron 29 estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Hernán Toro Agudelo, 14 niños y 15 niñas, con una edad promedio de 11 a 13 años, la mayoría celebró su duodécimo cumpleaños durante el año escolar, aunque algunos tienen 10 años por haber nacido a principios de 2013. La diversidad geográfica es evidente, ya que provienen de varios barrios de Medellín, mayormente de la Comuna 3, específicamente del barrio Manrique, pero también algunos viajan desde áreas como Aranjuez, Villa Hermosa y Campo Valdez, esto añade una dimensión geográfica a la variada composición del grupo. Este contexto diverso enriquece la investigación al proporcionar una perspectiva amplia y representativa de experiencias educativas y geográficas.

En relación con los estratos socioeconómicos, el grupo sexto tres se compone principalmente de estudiantes pertenecientes a los estratos 1 y 2. Este conjunto diverso de participantes exhibe una amplia variedad de intereses y pasatiempos; algunos disfrutan de actividades al aire libre y salir con amigos, mientras que otros encuentran entusiasmo en la hora del refrigerio o se destacan en deportes como el fútbol. Asimismo, se evidencian intereses particulares en la ciencia y la tecnología. Más allá de estas diferencias individuales, el curso refleja la diversidad cultural de la comunidad, enriquece el entorno de aprendizaje y promueve la comprensión intercultural entre los estudiantes. El grupo se destaca por su espíritu colaborativo y la disposición de apoyarse mutuamente tanto en actividades académicas como extracurriculares.

3.3.1. Participantes voluntarios

Para llevar a cabo esta investigación, se envió un consentimiento informado a los acudientes de los estudiantes participantes, asegurando que todas las partes involucradas estuvieran plenamente informadas sobre los objetivos y procedimientos del estudio. En primera instancia, se obtuvo el visto bueno de los estudiantes, quienes fueron informados de que su participación era completamente voluntaria y podían retirarse en cualquier momento sin repercusiones. Este proceso de consentimiento enfatizó la importancia de la autonomía y el respeto por las decisiones individuales de los estudiantes. Participar en esta investigación traía varios beneficios para los estudiantes. En primer lugar, ofrecía la oportunidad de mejorar sus habilidades de análisis y comprensión, lo que es fundamental para su desempeño académico. Además, los estudiantes desarrollaron una mayor capacidad crítica, aprendiendo a evaluar diferente información. La investigación también fomenta la colaboración en un entorno de aprendizaje dinámico, promoviendo el trabajo en equipo y la comunicación.

Este estudio convocó a participantes voluntarios que han optado por involucrarse en la investigación de manera consciente y voluntaria. Es importante destacar que estos individuos no fueron seleccionados al azar ni fueron incorporados de manera obligatoria. La elección de participar es libre y representa la voluntad de aquellos que desean contribuir con sus experiencias al proyecto de investigación. Inicialmente, se invitó a un grupo de estudiantes a participar, y aquellos dispuestos a colaborar se convirtieron en los participantes de la investigación. Este enfoque de participantes voluntarios se considera apropiado para la investigación, ya que busca obtener información detallada sobre las experiencias específicas que se desarrollan en el contexto educativo del estudio.

3.4. Contribución activa de las investigadoras

En la recolección de datos en una investigación cualitativa, según Hernández et al. (2014), el papel de las investigadoras implica desempeñar roles flexibles y adaptables con el objetivo de obtener información de los participantes tal como la expresan. Esto implica minimizar al máximo cualquier influencia que sus propias creencias, fundamentos o experiencias personales puedan ejercer sobre los participantes y el entorno de estudio. Es esencial que las investigadoras se muestren sensibles, genuinas y abiertas en su interacción con cada participante, al crear un ambiente propicio en el que estos se sientan cómodos al compartir sus experiencias y puntos de vista sin temor a ser juzgados o criticados. Este enfoque favorece la obtención de datos, al respetar la perspectiva única de cada participante y garantizar la validez e integridad de la información recopilada en el proceso de investigación.

Según Hernández et al. (2014) es recomendable emplear diversas fuentes de datos y diferentes métodos, como entrevistas, observaciones y grupos de enfoque, para la recopilación de información en una investigación cualitativa. No obstante, se destaca la importancia de reconocer que cada cultura, grupo y persona aporta su propia perspectiva única. Previo al estudio es crucial obtener información detallada sobre el contexto y las personas involucradas. Se manifiesta la flexibilidad en la evolución de los métodos de recopilación de datos a medida que progresa la investigación, requiere que las investigadoras se adapten a las necesidades cambiantes del estudio. En este tipo de investigación, las investigadoras desempeñan un papel activo y reflexivo, donde se busca comprender las experiencias y perspectivas de los participantes sin imponer sus propias creencias.

3.5. Recopilación de información

En el marco de la metodología propuesta por Hernández et al. (2014) se implementó la observación como una estrategia para la recopilación de información. Durante las sesiones de juego en el contexto educativo, se realizan observaciones detalladas y sistemáticas, al enfatizar en la importancia de la observación como una herramienta que permite capturar la realidad tal como ocurre en el entorno natural. Esto proporciona una visión de las interacciones entre estudiantes durante los juegos, permite el análisis de las dinámicas grupales y cómo se aplican conceptos algebraicos en situaciones concretas. Al seguir las recomendaciones de Hernández et al. (2014), se registran notas de campo exhaustivas y registro fotográfico para documentar observaciones y reflexiones, que contribuyen a una comprensión enriquecida de procesos de enseñanza y aprendizaje en el contexto estudiado.

Hernández et al. (2014) proponen el uso de entrevistas en profundidad como una técnica esencial para comprender las experiencias y percepciones de participantes en un estudio cualitativo. Al seguir su enfoque, se llevan a cabo entrevistas con estudiantes involucrados en la implementación de juegos en la enseñanza del pensamiento algebraico. Estas entrevistas se basan en conversatorios y justificaciones brindadas por los estudiantes en relación con los ejercicios realizados de acuerdo con los principios de Hernández et al. (2014), para asegurar que se abordan aspectos específicos, como beneficios percibidos, desafíos enfrentados y las estrategias pedagógicas utilizadas. Al adoptar esta metodología, se busca profundizar en las perspectivas de cada participante y capturar las voces individuales que contribuyen a una comprensión completa y matizada de fenómenos estudiados.

La organización de grupos de enfoque, según la propuesta de Hernández et al. (2014), se presenta como una parte integral del proceso de recopilación de datos. Estas sesiones grupales brindan una discusión valiosa que permite el intercambio de ideas entre los participantes y enriquece así el proceso de investigación. Desde esta perspectiva, los grupos de enfoque fomentan la interacción entre los estudiantes y ofrece información sobre las dinámicas grupales y las percepciones colectivas en relación con la enseñanza del pensamiento algebraico mediante juegos. Esta metodología permite la generación de conocimiento a partir de la reflexión compartida y la construcción conjunta de significado, permite una comprensión de las experiencias y perspectivas de los participantes en el contexto educativo estudiado.

La recolección de información para esta investigación basada en niveles de estratificación mediante el uso de la herramienta juego, se llevó a cabo una metodología fundamentada en las recomendaciones de Hernández et al. (2014). La combinación de observación detallada, entrevistas tipo conversatorio y grupos de enfoque proporciona una perspectiva sobre las experiencias y percepciones de los participantes en el contexto de la enseñanza del pensamiento algebraico a través de juegos. Se tiene en cuenta sus directrices, se promueve la captura de datos contextuales y la exploración de los casos estudiados. Esta metodología permitirá generar una comprensión de cómo los juegos impactan en el proceso de aprendizaje y en la dinámica educativa en general. Así, los resultados obtenidos a través de esta recopilación de información contribuyen al conocimiento en el campo de la educación matemática y la pedagogía de juegos.

4. Análisis

En este capítulo se presenta un análisis sobre cómo se manifiesta la estratificación del pensamiento algebraico, a través del juego como herramienta en estudiantes del grado sexto, de la institución educativa Hernán Toro Agudelo. En el contexto educativo actual, la integración de herramientas como el juego se ha convertido en un enfoque innovador para el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes. La capacidad de pensar algebraicamente es fundamental en la resolución de problemas matemáticos y en la preparación de los estudiantes para enfrentar desafíos en diferentes áreas. El presente análisis se centra en la aplicación de seis juegos, diseñados específicamente para analizar cómo se manifiestan los niveles de pensamiento algebraico en los estudiantes de grado sexto. Estos juegos fueron creados para involucrar a los estudiantes en procesos relacionados con la generalización de patrones, a través de la observación y la participación directa, se examinó cómo los diferentes niveles de estratificación se ponen en manifiesto con la herramienta juego.

4.1. Descripción sobre cómo se hicieron los análisis

Esta investigación, implementó los medios de recopilación de información para generar diferentes datos que se relacionan con el estudio cualitativo. El análisis consiste en las similitudes y diferencias entre datos no estructurados, que abarcan observaciones de las investigadoras y narraciones de los participantes en diversas formas (visuales, auditivas, textos escritos y expresiones verbales/no verbales), este análisis se llevó a cabo mediante tablas de doble entrada donde se analiza cada equipo en cada juego propuesto. Este proceso implica identificación de las características propias del pensamiento algebraico y la generalización de patrones propuesto por Radford (2010, 2013b), además de manifestar el nivel de estratificación alcanzado por cada equipo en cada juego para lograr una comprensión de los datos en cuestión.

Los datos de esta investigación se han recopilado a partir de las producciones escritas de los estudiantes, los intercambios dialógicos entre profesoras y estudiantes y grabaciones de audio correspondientes a contextos educativos específicos. La revisión detallada de las composiciones escritas proporciona una comprensión de las diversas manifestaciones del pensamiento algebraico en el ámbito académico de sexto grado. Por otro lado, los diálogos sostenidos entre profesores y estudiantes ofrecen una perspectiva contextual, algebraica y pedagógica, al ampliar la visión de las interacciones dinámicas que tienen lugar en el aula. La inclusión de grabaciones de audio agrega una dimensión acústica al análisis, capturando no solo la calidad del discurso verbal empleado durante la resolución de problemas algebraicos, sino también las dinámicas tonales y las expresiones paralingüísticas que enriquecen la interpretación de las interacciones educativas

4.1.1. Categorización de los datos

Después de identificar similitudes y diferencias, el siguiente paso crucial en el proceso de análisis de datos implicó la organización en categorías temáticas, a través de las tablas de doble entrada, este procedimiento es esencial para dotar de forma y coherencia a los datos recopilados y facilitar su análisis. Las categorías actúan como etiquetas o agrupaciones que representan conceptos e ideas clave esenciales, es decir una codificación de los datos. Esta estructuración permite una comprensión de la información, además posibilita la interpretación sistemática de los resultados, al analizar la enseñanza del pensamiento algebraico mediante el uso de la herramienta juego, estas categorías temáticas sirven como herramienta fundamental para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada, lo que además propicia la comprensión y el análisis de los datos recolectados.

4.1.2. Presentación de análisis

Tras la organización de los datos en categorías temáticas, los resultados se presentan mediante una descripción detallada de cada categoría. Este enfoque incluye expresiones y citas directas de los participantes que ejemplifican estas categorías, la cual brinda una representación auténtica de sus experiencias y perspectivas. Además, se ofrecen resúmenes de los temas principales identificados y los datos recopilados. Este proceso de presentación de resultados permite una comprensión contextualizada de la información, al destacar las voces y experiencias de los participantes. La inclusión de citas directas enriquece la narrativa, que propicia evidencia directa de las percepciones y vivencias de los involucrados en la enseñanza del pensamiento algebraico mediante juegos, contribuye así a una interpretación de los hallazgos.

En la medida en que progresa el análisis, se asume el rol de narrador y observador imparcial. Este enfoque se adopta con el objetivo de describir las experiencias con *transcripción numerada de PME* tal como las perciben y expresan los estudiantes que son participantes, al representar su lenguaje y expresiones únicas manifestadas en el momento de la intervención de los juegos. Este compromiso asegura que el trabajo sea fiel a las voces y perspectivas individuales de los estudiantes, al evitar interpretaciones sesgadas. Posteriormente, se buscan conexiones y relaciones entre estos datos a la vez de que se otorga un significado. Es crucial considerar el contexto donde se extrajeron los datos, ya que esto proporciona una perspectiva completa y permite una comprensión de las experiencias en el contexto de la enseñanza del pensamiento algebraico mediante los juegos usados como herramienta.

Es esencial que los descubrimientos de la investigación sean comparables con la literatura que se presenta en los antecedentes y la teoría previamente establecida. Esta conexión proporciona un marco para situar los resultados en el contexto amplio de la investigación. La categorización en la recolección de datos se revela como un proceso integral y reflexivo, que abarca desde la inmersión en los datos hasta la generación de análisis y conclusiones. A lo largo de este proceso, se mantiene una conexión constante con el contexto y el conocimiento previo de los estudiantes participantes. Este enfoque permite no solo capturar la esencia de las experiencias humanas, sino también comprenderlas desde diversas perspectivas, garantiza así la validez y la interpretación de los hallazgos de manera coherente con la realidad del contexto educativo explorado.

4.2. Análisis de cada equipo en cada juego

Los juegos educativos han demostrado ser herramientas eficaces para la enseñanza de conceptos matemáticos, se entiende que los juegos no se limitan a ser meras actividades recreativas, sino que también impulsan el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En este contexto, surgen los juegos de creación propia como una herramienta, pensados específicamente para estratificar los niveles de pensamiento, con el fin de ofrecer una experiencia de aprendizaje motivadora y entusiasta, recurre a la interdisciplinariedad. Un aspecto destacado de estos juegos se evidenció en la capacidad que los estudiantes tienen para adaptarse a las diferentes formas de aprendizaje, permite que los jugadores avancen a su propio ritmo. Además, posibilitó la colaboración entre estudiantes, fomenta el trabajo en equipo en el desarrollo del juego.

El análisis se centró en el uso de juegos como herramienta para estratificar los niveles de pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones. La investigación analizó cómo estos juegos pueden adaptarse para mejorar la comprensión de los conceptos algebraicos, al mismo tiempo que se exploró su impacto en la motivación y participación de los estudiantes. La retroalimentación inmediata proporcionada por los juegos desempeñó un papel fundamental al permitir la corrección de errores y el desarrollo de habilidades algebraicas por parte de los estudiantes. Además, la capacidad de ajustar la dificultad de los desafíos dentro de los juegos, permite garantizar que los estudiantes encontrarán un nivel óptimo de desafío y, al mismo tiempo, disfrutarán de la experiencia de aprendizaje al avanzar en sus procesos académicos y sociales.

Los juegos recompensaron el progreso en forma de puntos, a medida que los jugadores superaron los desafíos relacionados con el pensamiento algebraico, específicamente en secuencias y patrones, lo cual generó un ambiente de competencia saludable y un incentivo adicional para profundizar en los conceptos. Esto motivó a los jugadores a explorar y aprender. Asimismo, la experiencia interdisciplinaria que ofrecieron estos juegos puede verse relacionada con disciplinas como la música, el deporte, el arte, la literatura y tecnología las cuales enriquecieron la comprensión de la disciplina central que son las matemáticas. Esta interconexión fomenta la creatividad y la experimentación, lleva el aprendizaje más allá de los límites tradicionales del aula, brinda un enfoque educativo integral y motivador.

4.2.1. Codificación cromática de los datos

Cada elemento derivado de los datos ha sido designado con un color específico para permitir su identificación y análisis. En el contexto del pensamiento algebraico, se ha implementado una codificación cromática precisa: el amarillo se asigna a los elementos a nivel factual, el naranja se reserva para el nivel contextual, y el rojo destaca los elementos a nivel simbólico, además, estas categorías ponen de manifiesto las características del pensamiento algebraico y generalización de patrones Esta práctica de utilizar colores específicos busca organizar la información, permite un reconocimiento oportuno durante el análisis de los datos recopilados. Así, la elección cuidadosa de colores se alinea con el objetivo de brindar claridad y eficiencia en la interpretación de los distintos niveles de pensamiento algebraico, además de dar más claridad a nuestro capítulo de análisis.

Tabla 1. *Codificación cromática de los datos*

Codificación cromática de los datos	
Nivel factual	
Nivel contextual	
Nivel simbólico	

Se detallan a continuación las tablas de doble entrada que organizan los datos obtenidos durante las actividades de juegos. El propósito fundamental de estas tablas es identificar los datos relevantes con el fin de categorizarlos posteriormente en los niveles de estratificación propuestos por Radford (2006b). Estos niveles, desarrollados a lo largo de esta investigación, proporcionan un marco conceptual que permite analizar y comprender la información recopilada, de la cual surgen los datos que se pretenden sistematizar en las tablas. La disposición ordenada de estos datos facilitará su integración en la estructura conceptual delineada por Radford (2006b), contribuye así a una comprensión del desarrollo de los juegos y sus implicaciones en los aprendizajes de los estudiantes.

4.2.2. Abreviaturas en las tablas

En el marco de esta investigación, resulta importante proporcionar una aclaración respecto a las siglas utilizadas para identificar tanto a los equipos participantes como a las profesoras correspondientes en las tablas de datos. Específicamente, las abreviaturas "E1", "E2" y "E3" hacen referencia al equipo 1, equipo 2, y equipo 3 respectivamente, que compitieron en los juegos realizados de este estudio. La letra "P" se emplea para designar a las profesoras encargadas de dirigir y coordinar dichos equipos. La adopción de este protocolo de nomenclatura tiene como finalidad primordial permitir la identificación y comprensión de los elementos pertinentes presentes en las tablas de datos y clasificaciones. Así, se garantiza la presentación clara de la información recopilada, que además contribuye a la coherencia y la transparencia en el análisis de los datos obtenidos en el contexto de este estudio investigativo.

4.2.3. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 1: Álgebra al ritmo de la música

Este juego se centra en explorar y comprender secuencias y patrones, que pretende proporcionar una introducción inicial a estos conceptos sobre la percepción inicial de lo que los estudiantes comprenden por secuencia y patrón y posteriormente la definición adoptada por Radford (2010). El objetivo principal es que los estudiantes adquieran una comprensión de los significados contribuidos a secuencias y patrones antes de acercarse al tema. En esta tabla, se pretende capturar y organizar los datos generados durante la experiencia de juego centrada en la exploración de secuencias y patrones correspondientes al juego número uno, el cual ha sido diseñado como una puerta de entrada a estos conceptos, con el objetivo de proporcionar a los participantes una base conceptual antes de presentar de manera específica estos elementos fundamentales en la investigación.

Tabla 2. *Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 2: Desafiando dimensiones*

<table>
<tr><th colspan="3">Manifestación de los estratos de pensamiento en el juego 1: Álgebra al ritmo de la música</th></tr>
<tr><th>Equipos</th><th>Dato</th><th>Categoría</th></tr>
<tr><td>Equipo 1</td><td>Se les pidió a los equipos que construyeran una secuencia con las figuras presentadas previamente, a las cuales se les asignó un sonido específico, en esta imagen creada por el equipo 1, se puede evidenciar que se generó un patrón constituido por una estrella, un círculo, un triángulo y un hexágono, este patrón inicia nuevamente después del hexágono, se afirma lo anterior por la repetición que se muestra en la hoja, lo que al parecer da cuenta de una creación de secuencia propuesta por el equipo 1.

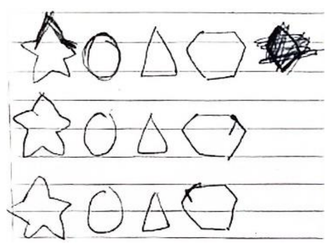


Figura 6. Secuencia presentada por el equipo 1 en el juego 1 (Equipo 1, 2023)

Se asumió, además, que cada figura geométrica plana representaba una posición, es decir, la posición 1 correspondía a la estrella, la posición 2 al círculo, la posición 3 al triángulo y así sucesivamente, lo cual llevó a la generación de preguntas cómo:

1 P: ¿Qué figura corresponde a la posición 2?

2 E1: “El círculo” (Observa la hoja, comienza a contar con señalamientos indexicales cada figura hasta llegar a la posición 2) (Equipo 1, 2023)

3 P: ¿Qué figura corresponde a la posición 4?

4 E1. “A un hexágono” (Observando la hoja, recurrió al conteo con señalamientos indexicales a cada figura hasta llegar a la posición 4) (Equipo 1, 2023)</td><td>Nivel de estratificación Factual</td></tr>
</table>

	5 P: ¿En qué posición vuelve a parecer el hexágono? 6 E1: “cuatro, cinco, seis, siete y ocho, ah profe en la posición ocho” (Equipo 1, 2023) (Cuenta con señalamientos indexicales y expresiones orales desde la posición cuatro hasta la ocho) 7 P: ¿Y si quiero saber qué figura aparece en la posición catorce, como lo haría? 8 E1: “Nos dimos cuenta profe que cada figura aparece a la quinta vez de nuevo, entonces si la estrella es posición uno, si le sumamos cuatro ya sería posición cinco que otra vez aparece la estrella, si le sumamos otros cuatro ya sería eh, cinco más cuatro nueve y nueve más cuatro trece, entonces el círculo aparece en la posición trece y la posición catorce sería la figura que sigue, es decir la figura de círculo” (Equipo 1, 2023) (cuenta con los dedos y señala la hoja con el índice)	
Equipo 2	Se inició con la pregunta al equipo 2 sobre el concepto de patrones y secuencias: 1 P: ¿Qué entienden por patrón? 2 E2: “Un patrón es como un diseño que se repite una y otra vez, como cuando haces dibujos iguales en una hoja, también puede ser algo que sigue un orden, como contar de dos en dos.” (Equipo 2, 2023) (La respuesta fue acompañada por gestos corporales, específicamente mediante una manipulación con las manos en donde intentaba dar cuenta mientras hablaba, que los patrones pretendían generar una repetición regular)	**Nivel de estratificación Factual**

Figura 7*. Imagen tomada del video IMG_6697.MOV equipo 2 en el juego 1(Equipo 2, 2023)*

Se continuó con la pregunta sobre la definición de secuencia y se obtuvo lo siguiente.

3 P: ¿Qué entienden por secuencia?

4 E2: son como una serie de cosas que pasan en un orden específico, como una película o un paso de baile y se repite varias veces" (Equipo 2, 2023).

Figura 8*. Secuencia presentada por el equipo 2 en el juego 1* (Equipo 2, 2023)

5 P: ¿En la posición 3 qué figura corresponde según el patrón previamente construido?

6 E2: "En la posición 3 está un cuadrado" (Equipo 2, 2023) (Responde mientras mira la hoja en donde crearon su patrón)

7 P: ¿En la posición 7 qué figura corresponde?

8 E2: "Un hexágono" (Equipo 2, 2023) (Se hace indispensable el uso de la hoja donde se creó el patrón)

9 P: ¿Y en la posición 8?

10 E2: "No hay una posición 8, porque solo hay 7 figuras" (Equipo 2, 2023)

Nota: se aclaró la inconsistencia, con el fin de continuar con las preguntas.

11 P: ¿Sabes cuál es la figura que corresponde a la posición 8?

12 E2: "La figura es el círculo" (Equipo 2, 2023) (La respuesta fue inmediata y no hubo necesidad de mirar la hoja)

13 P: ¿y cuál sería la figura asociada a la posición 15?

14 E2: "Ay profe ya nos dimos cuenta que siempre va de 7 en 7 porque solo hay 7 en el dibujo y luego se repiten y se repiten, 7 más 7 es 14 ósea que 15 es cuando vuelvo a empezar y sería el círculo" (Equipo 2, 2023) (En esta respuesta usaban sus manos para realizar el conteo de 7 en 7 y además alzaban sus cabezas en acto de confianza y satisfacción por llegar a la respuesta)

Se continuaron con preguntas de mayor abstracción en el cual no se pudiese hacer uso del patrón elaborado

15 P: ¿Cuál es la figura correspondiente a la posición 28?

16 E2: "Sería el hexágono, porque 7 más 7 más 7 más 7 es 28 y el hexágono está en la posición 7" (Equipo 2, 2023)

17 P: ¿Y en la posición 30?

18 E2: "Sería dos posiciones después del hexágono ósea el cuadrado" (Equipo 2, 2023)

19 P: ¿Crees que podrías hallar una forma en la que siempre sabrían cuál es la figura correspondiente a cualquier posición?

20 E2: "Sí porque solo se tiene que sumar 7 más 7 hasta llegar al número que se necesita" (Equipo 2, 2023)

	21 P: ¿Cuál sería la figura asignada a la posición 50? 22 E2: “Profe pues podríamos sumar y sumar hasta llegar a cincuenta” (Equipo 2, 2023) 23 P: ¿y no hay otro camino más corto que me pueda servir? 24 E2: “Profe pues multiplicando un número por siete que me da cincuenta, pero como no hay, entonces uno que está cerca del cincuenta. Por ejemplo, siete por siete es cuarenta y nueve, entonces cuarenta y nueve es hexágono, entonces cincuenta creo que sería el círculo” (Equipo 2, 2023)	
Equipo 3	El equipo 3 presentó el siguiente patrón  ***Figura 9***. *Secuencia presentada por el equipo 3 en el juego 1* (Equipo 3, 2023) 1 P: ¿Por qué consideras que tu representación gráfica es un patrón? 2 E3: “Porque use las figuras con las que vamos a presentar nuestro ritmo” (Equipo 3, 2023) (Lo enuncia al colocar su mirada en las profesoras) 3 P: ¿En la posición uno de tu patrón que figura se encuentra? 4 E3: “Profe sería un triángulo” (Equipo 3, 2023) (Señala la hoja con el índice) 5 P: ¿Y en la posición cuatro cuál sería? 6 E3: “Un cuadrado” (Equipo 3, 2023) (Mira la hoja y señala con el índice) 7 P: ¿En qué posición vuelve a aparecer el cuadrado?	**Nivel de estratificación Factual**

8 E3: "Se tendría que escribir de nuevo el patrón para poder hallar la posición del cuadrado, pero si lo sumamos vuelve aparecer en la posición nueve" (Equipo 3, 2023) (Cuenta con los dedos) 9 P: ¿En qué posición vuelve a aparecer el triángulo? 10 E3: "Profe siempre se le está sumando al triangulo cinco posiciones más, entonces el triángulo aparece siempre en la sexta posición de la secuencia" (Equipo 3, 2023) 11 P: ¿Cuál figura corresponde a la posición 11? 12 E3: "Nos dimos cuenta que si el triángulo es posición uno, le sumamos cinco y sería luego la posición seis, luego le sumamos otra vez cinco y sería posición once, entonces en el triángulo si queremos saber cualquier posición siempre se le suma de cinco en cinco." (Equipo 3, 2023)	

4.2.3.1. Análisis de juego 1 - Equipo 1

En el juego 1, denominado "Álgebra al ritmo de la música", se puede observar que el equipo 1 realiza una secuencia basada en figuras geométricas, los estudiantes mostraron una comunalidad al identificar una característica recurrente: la presencia de la estrella, el círculo, el triángulo y el hexágono. Estos elementos conformaron la secuencia, y a partir de esta observación, los estudiantes comenzaron a reconocer patrones y asignar posiciones específicas, incluso cada vez que estas no estaban explícitamente representadas en la parte de la secuencia presentada en la hoja. La comunalidad mencionada anteriormente marca el primer paso hacia la generalización de patrones. Los miembros del equipo 1 señalaron con claridad la posición de cada figura en la secuencia. Por ejemplo, indicaron que el círculo estaba en la posición dos, pero también anticiparon que más adelante estaría en la posición seis.

La capacidad de los estudiantes para manejar la indeterminación se destaca en su análisis, ya que se puede observar en la frase *"si la estrella es posición uno, le sumamos cuatro ya sería posición cinco porque que otra vez aparece la estrella" (Equipo 1, 2023).* Este pensamiento muestra que el equipo 1 comprende cómo opera la secuencia para que una figura vuelva a aparecer. Dado que sus respuestas fueron correctas en varios casos particulares, se desprende un indicio de que el equipo ha establecido la correspondencia entre las figuras y sus respectivas posiciones. En términos de la primera dimensión de generalización de patrones, se puede concluir que el equipo 1 se sitúa en un nivel factual, puesto que su capacidad para identificar patrones en casos específicos y asignar posiciones indica una comprensión de la secuencia presentada.

4.2.3.2. Análisis del juego 1 - equipo 2

En la construcción que realizó el equipo 2 se puede observar que se generó un patrón con las figuras previamente establecidas por las profesoras, en la imagen anexada se ve que la primera línea es más extensa que las demás, sin embargo, se visualiza que se tachó el hexágono y de esta forma los patrones mantuvieron la misma estructura. Algo particular que se puede evidenciar en la construcción del mismo es que en este equipo se repite dos veces seguidas el cuadrado, lo cual podría dar cuenta del concepto que tienen los estudiantes de patrón, por otro lado se repite el mismo patrón tres veces lo que además da indicios de que los estudiantes tienen nociones de lo que significa una secuencia, por otro lado, el concepto de "patrón" que asumieron los estudiantes en este contexto se refiere a una estructura o diseño que exhibe repetición y regularidad.

En las respuestas, se utilizan términos clave como "repetición" y "orden" para ilustrar la naturaleza de un patrón. Se emplea un ejemplo específico, el contar de dos en dos, para demostrar cómo se manifiesta la secuencia regular en el contexto de los patrones. El enfoque en la repetición y el orden es aceptado, ya que estos elementos son fundamentales para comprender la naturaleza de los patrones. La respuesta es clara y utilizan un lenguaje accesible, lo que facilita la comprensión del concepto, se tiene en cuenta que son estudiantes de sexto grado. La respuesta refleja la capacidad del equipo para entender y expresar conceptos de manera clara y creativa, demuestra una comprensión básica de la idea de secuencias, además se logra evidenciar en las respuestas obtenidas por el equipo 2 que se encuentran en un nivel factual de estratificación.

En las respuestas proporcionadas por el equipo 2, se observa una comunalidad en el momento en que ellos responden lo siguiente a la pregunta sobre ¿qué figura se genera en una posición determinada? *"Ay profe ya nos dimos cuenta que siempre va de 7 en 7 porque solo hay 7 en el dibujo y luego se repiten y se repiten, 7 más 7 es 14 ósea que 15 es cuando vuelvo a empezar y sería el círculo" (Equipo 2, 2023),* la justificación da cuenta de un conocimiento implícito, porque, aunque no se puede asegurar que los estudiantes llegaron a una fórmula si lograron comunicar de forma acertada.

4.2.3.3. Análisis del juego 1 - Equipo 3

El equipo 3 se vio confundido en la construcción del patrón puesto que en la imagen se puede apreciar que no había nociones claras sobre la construcción del mismo, ya que realizaron 4 figuras de las cuales una de ellas se repitió una vez, sin embargo, a medida que avanzaron en sus respuestas, demostraron un mayor entendimiento y consolidación de sus ideas. Un ejemplo destacado de este progreso se reflejó en la siguiente afirmación: *"Profe siempre se le está sumando al triángulo cinco posiciones más, entonces el triángulo aparece siempre en la sexta posición de la secuencia"* (Equipo 3, 2023). La inclusión de la palabra "siempre" en esta respuesta aportan una mayor certeza y firmeza a la explicación, brinda así una comprensión sólida del patrón que se encontraba en análisis.

En el análisis del desempeño del equipo 3 en el juego "Álgebra al Ritmo de la Música", se destaca la presencia de una comunalidad notable en su enfoque hacia la generalización de patrones. El equipo no solo identificó la existencia de características o elementos comunes en la secuencia, sino que también demostró una comprensión al reconocer similitudes y regularidades persistentes a lo largo de diferentes instancias o pasos de la secuencia. Esta comunalidad se manifiesta claramente en la capacidad del equipo 3 para identificar elementos específicos que se repiten a lo largo de la secuencia. A pesar de las variaciones en las posiciones y las formas de las figuras, el equipo logró identificar una característica común que se repetía una cantidad específica de veces, estas características indican que el equipo tres está ubicado en un nivel inicial del pensamiento algebraico, que sería el nivel factual.

4.2.4. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 2: Desafiando dimensiones

Este juego se centra en la exploración y consolidación de conceptos de secuencias y patrones, conecta el pensamiento algebraico con la experiencia de juegos educativos y material concreto que comprende el uso de cubos, repasa lo aprendido en el primer juego sobre secuencias y patrones. A medida que se avanza, los estudiantes explorarán estos conceptos de manera interactiva, además de aplicar y reforzar el pensamiento algebraico de manera práctica y motivadora. Se fomenta la reflexión sobre la importancia de la abstracción, la generalización y la representación simbólica en la comprensión de secuencias y patrones, que son elementos clave en el pensamiento algebraico, además de llevar a los estudiantes a pensar algebraicamente con diferentes preguntas que hacen que el estudiante vea más allá de lo que se presenta en el material concreto y pueda aprender desde la indeterminancia a buscar diferentes estrategias algebraicas para llegar a una designación simbólica.

Tabla 3. *Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 2: Desafiando dimensiones*

Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 2: Desafiando dimensiones

Equipos	**Dato**	**Categoría**
Equipo 1	1 P: ¿Podrías decirme cuántas aristas tiene un cubo? 2 E1: “Un cubo tiene doce aristas “(Equipo 1, 2023) 3 P: ¿Y si colocamos un cubo sobre otro cuántas aristas quedan? 4 E1: “Profe quedan veinte contando una sola vez la arista que queda con el cubo de encima” (Equipo 1, 2023) (Cuentan con los dedos en el material concreto) 5 P: ¿y cuántos cubos necesitamos para que sean 36 aristas?	Nivel de estratificación factual

	6 E1: “cuatro cubos” (Equipo 1, 2023) (después de un tiempo y de contar con los dedos dan la respuesta) 7 P: Si el cubo uno fuera la primera posición y queremos hallar la cantidad de aristas que hay en la posición 4 ¿cómo lo haríamos? 8 E1: “supongamos que el cubo uno es la posición uno con doce aristas, entonces la posición dos tendría veinte aristas, luego la posición tres tendría veintiocho aristas y la posición cuatro treinta y seis aristas” (Equipo 1, 2023) 9 P: ¿qué pueden hacer ahí? 10 E1: “Se puede decir profe, que entonces a cada posición se le tiene en cuenta el número de aristas y de ahí en adelante se le suma ocho para encontrar el número de aristas de la siguiente posición.” (Equipo 1, 2023) (dan la respuesta sin los cubos en material concreto)	
Equipo 2	1 P: ¿Cuantos vértices tiene un cubo? 2 E2: “Ocho vértices” (Equipo 2, 2023) (Responde mientras cuenta los vértices que tiene el cubo que previamente se les entregó) 3 P: Si pones un cubo sobre otro ¿Cuántos vértices puedo contar? 4 E2: “Se pueden contar doce vértices” (Equipo 2, 2023) (Nuevamente pudo contar los vértices puesto que cada equipo tenía tres cubos) 5 P: Si ponemos tres cubos, uno encima de otro ¿Cuántos vértices puedo contar? 6 E2: “Se pueden contar 16 vértices” (Equipo 2, 2023) (Esta vez no recurre al conteo, sino, que la respuesta es inmediata) 7 P: ¿Qué proceso además del conteo, se podría utilizar para saber la cantidad de vértices que se generan si agrego cada vez más un cubo? 8 E2: “Estoy aumentándole, a los cubos que tenía le aumentó 4” (Equipo 2, 2023) (Al recurrir a la suma el equipo evidencia que puede dar respuesta, incluso sin el material concreto) 9 P: Si quiero saber cuántos vértices tiene 5 cubos uno encima de otro ¿Qué proceso debo hacer?	Nivel de estratificación contextual

	10 E2: “Sabemos que los vértices de un cuadrado siempre serán ocho pero al estar la condición de que deben ir los cubos encima de otro se esconden cuatro vértices, por lo que quedan 4 vértices y esos son los que sumamos, pero también se puede hacer por multiplicación y así sería más rápido, entonces sí quiero encontrar los vértices de cinco cuadrados multiplicó cinco por cuatro y me da veinte y sumó 4 más porque el primero tiene 8, entonces sí quiero encontrar cualquier cuadrado por ejemplo x cantidad, entonces multiplico esa x por cuatro y le sumo 4. esa x sería cualquier cantidad de cuadrados” (Equipo 2, 2023)	
Equipo 3	1 P: ¿Cuántas aristas tiene un cubo? 2 E3: “doce” (Equipo 3, 2023) (La respuesta fue generada mientras contaba las aristas del cubo) 3 P: Si ponemos un cubo sobre otro ¿cuántas aristas podemos tener? 4 E3: “Se pueden contar 20 aristas” (Equipo 3, 2023) 5 P: ¿Qué proceso podemos hacer si queremos saber cuántas aristas tienen determinados cubos? 6 E3: “El primer cubo tiene doce aristas y el segundo veinte aristas, es decir que solo se le agregaron ocho aristas y ya tienes que ir agregando ocho, ocho, ocho, ocho y así hasta llegar a la posición que desees” (Equipo 3, 2023) 7 P: Si te preguntan por la posición 10 ¿Cuántas aristas tendrían esos 10 cubos? 8 E3: “Profe entonces se puede multiplicar ocho por diez que me da ochenta, pero como el primer cubo tiene doce aristas yo necesito que todo me quede en ochos es por eso que puedo restar a doce ocho y así me queda que da cuatro, esos cuatro se le suman a los ochenta o sea que da ochenta y cuatro aristas a los diez cubos en la posición diez” (Equipo 3, 2023)	Nivel de estratificación factual

4.2.4.1. Análisis del juego 2 - Equipo 1

Los estudiantes demostraron un entendimiento de los conceptos básicos relacionados con las aristas de un cubo, respondieron correctamente a preguntas sobre la cantidad de aristas que tiene un cubo y cómo cambia esta cantidad al colocar un cubo sobre otro. Este proceso algebraico realizado por el equipo 1 tiene presente una característica del pensamiento algebraico que es la indeterminancia, donde los estudiantes empiezan a reconocer patrones con relación a la posición del cubo y la cantidad de aristas. Este reconocimiento implica encontrar regularidades o características comunes, donde además utilizan variables implícitas al hablar de "la posición uno", "la posición dos", etc., y aplican reglas generales para determinar la cantidad de aristas en cada posición específica en función de la posición anterior.

Por otro lado, se pudo evidenciar la primera característica para la generalización de patrones, donde encontraron una comunalidad en la secuencia al relacionar la posición de un cubo con la cantidad de aristas que tienen, al considerar que cada nueva posición de cubo aumentaba en ocho la cantidad de aristas con respecto a la posición anterior. Estas habilidades y capacidades demuestran que el equipo ha alcanzado un nivel de estratificación factual en la generalización de patrones, debido a la relación entre la cantidad de cubos y la cantidad total de aristas, estas habilidades y capacidades que al encontrar una característica común para casos específicos o posiciones específicas de la secuencia también nos da elementos para posicionar el equipo 1 en este nivel.

4.2.4.2. Análisis del juego 2 - Equipo 2

En este intercambio, los estudiantes del Equipo 2 van más allá de resolver problemas matemáticos específicos al hacer alusión a un nivel contextual mediante la manifestación verbal de una fórmula que ofrece solución al problema. Expresan la idea de "aumentarle a los cubos" de manera concreta, lo cual indica una conciencia de cómo aplicar sus conocimientos en el contexto específico del juego matemático. Además, en el diálogo proporcionado, la característica de la analiticidad del pensamiento algebraico se hace evidente al momento en que los estudiantes introducen una variable representada por "x", adicionalmente, al hablar sobre la cantidad de cuadrados en la fórmula general, mencionan: "sí quiero encontrar cualquier cuadrado por ejemplo x cantidad, entonces multiplicas esa x por cuatro y le sumo 4" (equipo 2, 2023). Acá se puede notar que se generaliza la fórmula para cualquier cantidad de cuadrados, al verbalizar la fórmula para calcular la cantidad de vértices en cualquier cantidad de cubos, demuestran un entendimiento del pensamiento algebraico y la capacidad de generalizar conceptos Este nivel contextual resalta la habilidad de los estudiantes para no solo resolver situaciones específicas, sino también para articular y aplicar sus conocimientos en un marco amplio y práctico.

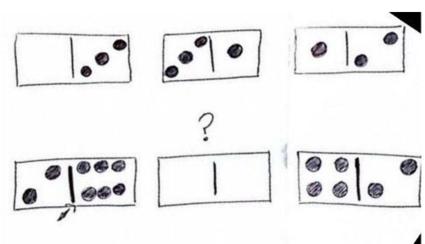
4.2.4.3. Análisis del juego 2 - Equipo 3

En el equipo 3 se puede evidenciar un nivel de estratificación factual al responder preguntas sobre el número de aristas en un cubo individual (doce) y cómo cambia al apilar dos cubos (veinte). La indeterminancia se revela siempre que los estudiantes resaltan el proceso para determinar el número de aristas en una cantidad específica de cubos. Al proponer la adición de "ocho, ocho, ocho, ocho" al apilar cubos, ofrecen una regla particular sin especificar la cantidad exacta de cubos. Esta indeterminancia resalta la capacidad de aplicar el pensamiento algebraico a situaciones variables. A su vez, se refleja la generalización de patrones a través de la comunalidad, la cual se evidencia al analizar la pregunta sobre la posición 10. Al emplear operaciones matemáticas como la multiplicación (ocho por diez) y la resta (doce menos ocho) para calcular el número de aristas en diez cubos, los estudiantes aplican conceptos de manera coherente. Este enfoque muestra una conexión clara entre el conocimiento de las aristas individuales y su aplicación a una situación particular de la secuencia, al destacar la capacidad del equipo para integrar y aplicar conceptos previamente establecidos en nuevos contextos.

4.2.3. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 3: Tesoro algebraico

Este juego presenta diversas temáticas mediante tarjetas de desafío, las cuales los estudiantes descubren y resuelven. Algunos de los conceptos que abarcan incluyen secuencias, patrones y ecuaciones básicas. La tabla a continuación posibilita un análisis detallado de la destreza de los participantes en diversos aspectos, incluye la resolución de ecuaciones, la identificación de patrones y la aplicación de conceptos algebraicos. Adicionalmente, considera el contexto en el que se presentaron tarjetas de desafíos que los jugadores debían resolver. A través de esta tabla, buscamos entender cómo los participantes emplean y desarrollan sus habilidades algebraicas al enfrentar los desafíos planteados por las tarjetas en el juego.

Tabla 4. *Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 3: Tesoro algebraico*

Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 3: Tesoro algebraico		
Equipo	**Datos**	**Categoría**
Equipo 1	 ***Figura 10.*** *Ejercicio uno presentado al equipo 1 en el juego 3* (Equipo 1, 2023) 1 P: ¿cómo resolvieron la secuencia presentada? 2 E1: “Estuvimos observando que en la primera tiene tres puntos, esta tiene uno, esta tiene seis, entonces la respuesta de la ficha sería seis y cuatro, porque acá hay seis (señala el lado izquierdo) y acá hay cuatro (señala el lado derecho) entonces la ficha de la respuesta sería seis y cuatro” (Equipo 1, 2023) 3 P: ¿Si hubiese una séptima ficha, ¿cuáles serían los dos números qué se encuentran en ella? 4 E1: “Al mirar los números que ya aparecen en la figura y que se mencionan casi todos vemos que hay un número que no se menciona que es el cinco (señala todas las fichas con la disposición de mostrar que en efecto falta un número teniendo en cuenta que se está trabajando con fichas de dominó, por ende los números oscilan	Nivel de estratificación factual

entre uno a seis) por eso decimos que sería primero el dos porque ya sabemos que se repite el anterior para comenzar por eso sería el dos y luego el cinco porque es el número que aún no se menciona" (Equipo 1, 2023)

5 P: ¿Encuentras un patrón en la figura que se muestra?

6 E1: "Pues profe lo que decimos es que siempre se repite el número anterior para el primer lado de la ficha y el segundo lado de la ficha es el mismo número con el que comienza la siguiente ficha" (Equipo 1, 2023)(En este contexto, es evidente que en el equipo uno, los miembros del equipo describen la cantidad de puntos en diferentes fichas mediante gestos físicos, enumeración directa y verbalización de palabras, intentando así abordar la ficha final)

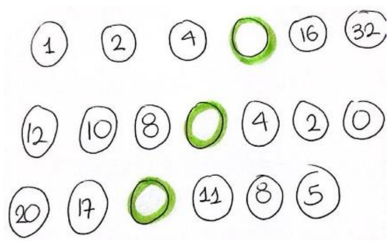


Figura 11*. Ejercicio dos presentado al equipo 1 en el juego 3*
(Equipo 1, 2023)

1 P: ¿En la primera secuencia cuál es el número correcto?

2 E1:" Profe es el ocho, porque el doble de dos es cuatro el doble de cuatro es ocho y el doble de ocho es 16" (Equipo 1, 2023)

3 P: En la segunda fila ¿cuál es el número que corresponde al espacio vacío?

4 E1: "Sería el número seis porque va disminuyendo de dos en dos" (Equipo 1, 2023)

5 P: ¿En la tercera fila cuál es el número que falta?

6 E1: "Es el número 14, porque va disminuyendo de tres en tres" (Equipo 1, 2023)

7 P: ¿puedes describir qué procesos utilizaste para resolver la figura?

8 E1: “Al mirar los ejercicios notamos que algunas veces se suma o se resta dependiendo de lo que nos pregunten, logramos llegar a las respuestas al ver los números anteriores al espacio y los siguientes al espacio, por eso logramos responder” (Las respuestas presentadas se centran en la aplicación directa de operaciones matemáticas y la identificación numérica) (Equipo 1, 2023)

Equipo 2

Nivel de estratificación contextual

***Figura 12**. Ejercicio uno presentado al equipo 2 en el juego 3*
(Equipo 2, 2023)

1 P: ¿cómo resolvieron la secuencia presentada?

2 E2: “Notamos que el patrón era que la primera ficha que estaba aquí a la derecha, la siguiente ficha seguía a la izquierda y así note que la que seguía a ese lado era en el primer lugar el seis y en el segundo lugar de la ficha era el cuatro” (Los estudiantes del equipo 2, responden al tiempo de que señalan con gestos indexicales las posiciones de las fichas presentadas en la figura) (Equipo 2, 2023)

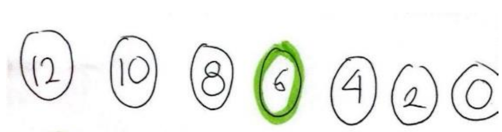


***Figura 13.** Ejercicio dos presentado al equipo 2 en el juego 3*
(Equipo 2, 2023)

1 P: En la segunda secuencia ¿cuál es el número correcto?

2 E2: “La respuesta correcta es seis” (Equipo 2, 2023)

3 P: ¿Qué proceso utilizaste?

4 E2: “Lo mire de derecha a izquierda, a cero le sume dos me dio cuatro a cuatro le sume dos y me dio seis” (Equipo 2, 2023)

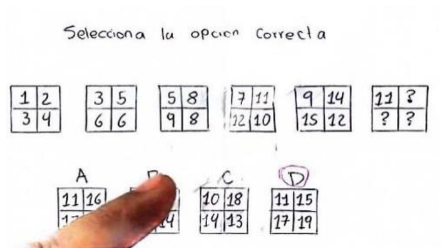


Figura 14. *Ejercicio tres presentado al equipo 2 en el juego 3*
(Equipo 2, 2023)

1 P: ¿Cómo llegaron a la deducción de que la respuesta (B) era la opción correcta?

2 E2: "Nos dimos cuenta que en el primer cuadro de la derecha en la parte superior va de dos en dos, en el segundo de la parte superior va de tres en tres, en el tercero de la parte inferior también va de tres en tres y en último de la parte inferior de dos en dos". (Los estudiantes del equipo 2, hacen uso de términos direccionales para dar explicación sobre cómo se comporta la secuencia, lo que les permite llegar a la opción correcta), (Señala la opción correcta con su índice, mostrando seguridad de que su justificación fue válido para llegar a la solución) (Equipo 2, 2023)

Equipo 3

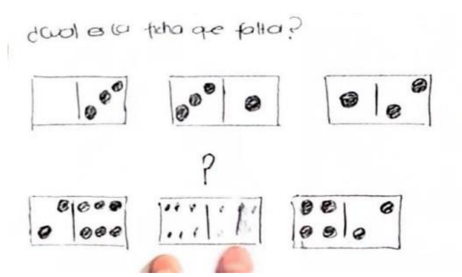


Figura 15*. Ejercicio uno presentado al equipo 3 en el juego 3*
(Equipo 3, 2023)

1 P: ¿Cómo solucionaste la secuencia que te presentaban?

2 E3: "Nos dimos cuenta que cada uno se repetía con el anterior, esté como tiene seis puse seis y en el otro lado como tiene cuatro puse cuatro." (Equipo 3, 2023)

3 P: ¿Si hubiese una séptima ficha, ¿cuáles serían los dos números qué se encuentran en ella?

4 E3: “Al observar los números notamos que casi todos son mencionados. Sabemos que estamos trabajando con fichas de dominó, donde los números van del uno al seis, podemos destacar que el número que falta es el cinco. Por lo tanto, decimos que el primer número sea el dos, ya que sabemos que se repite el anterior, luego, el siguiente número sería el cinco, completando así la secuencia para una séptima ficha” (Equipo 3, 2023)

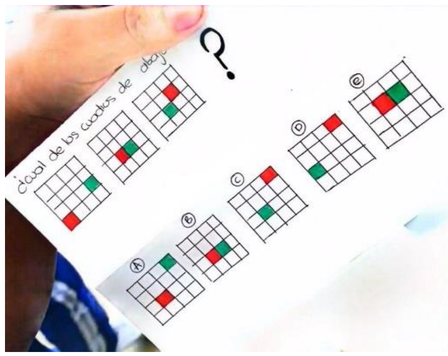


***Figura 16**. Ejercicio dos presentado al equipo 3 en el juego 3*
(Equipo 3, 2023)

1 P: ¿Cuál sería la opción correcta en la secuencia presentada?

2 E3: “Como en la señal del televisor, las burbujas chocan, entonces irían en lados diferentes, como estos chocan aquí (señala la segunda figura) ambos están en completo movimiento, entone tendría que ser la D porque van avanzando hacia los lados opuestos, avanzando una casilla cada vez.” (Equipo 3, 2023)

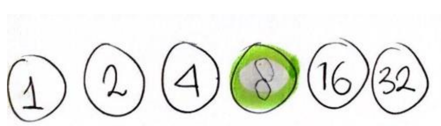


***Figura 17**. Ejercicio tres presentado al equipo 3 en el juego 3*
(Equipo 3, 2023)

1 P: ¿En la primera secuencia cuál es el número correcto?

2 E3: “Es el número ocho porque uno más uno me da dos y dos más dos cuatro o sea que suma el mismo número en la fruta y cuatro más cuatro ocho” (Equipo 3, 2023)

3 P: ¿Qué otro método puedes utilizar? 4 E3: “Multiplicando por dos siempre el mismo número” (Equipo 3, 2023) 5 P: Si te pidieran que mencionen cuál es el número que aparecerá en la posición 9 ¿Cuál sería? 6 E3: “Tendría que multiplicar el número anterior por dos para que me genere el número que sigue, sería dos por treinta y dos, sería sesenta y cuatro, luego sesenta y cuatro por dos y seria ciento veintiocho y luego por dos seria doscientos cuarenta y seis” (Equipo 3, 2023)	

4.2.5.1. Análisis juego 3 - Equipo 1

En el equipo 1, se hace visible que en el juego tesoro algebraico, se inscriben en el nivel factual de estratificación, ya que se hace evidente una comunalidad al identificar y aplicar patrones en las fichas de dominó, destaca el hecho de que en el primer lado de cada ficha se repite el número con el que comienza la siguiente. Asimismo, demuestran una comprensión al emplear operaciones matemáticas, como la duplicación, y al reconocer patrones de disminución en las secuencias numéricas. Esta coherencia refleja un enfoque común basado en reglas matemáticas establecidas, por otro lado, se observa indeterminancia en la respuesta del equipo en el momento en que responden la pregunta sobre los dos números en una séptima ficha hipotética. Una regla general indica que el número dos se repite y el cinco es el que aún no se ha mencionado, no especifican la cantidad exacta de fichas en la secuencia. Esta falta de precisión en cuanto a la cantidad de elementos entre las ya mencionadas y la séptima ficha introduce cierta ambigüedad, destaca un aspecto de indeterminancia en su aproximación al problema.

4.2.5.2. Análisis juego 3 - Equipo 2

Los estudiantes del Equipo 2, se encuentran ubicados en el nivel contextual, donde demuestran habilidades analíticas y una generalización de los patrones presentados en la secuencia, al describir su proceso para resolver la primera secuencia, muestran una capacidad para identificar patrones visuales y expresarlos verbalmente. Su enfoque de observar las posiciones de las fichas y reconocer la alternancia de números refleja una analiticidad en la generalización de patrones, en la segunda secuencia, los estudiantes aplican un método sistemático al observar de derecha a izquierda y realizar operaciones matemáticas para identificar el patrón. Al explicar su proceso, demuestran la capacidad de llevar a cabo cálculos y operaciones para llegar a la respuesta correcta, lo que destaca su habilidad para combinar la observación de patrones con el pensamiento algebraico. En la tercera parte, en la pregunta sobre la deducción de la respuesta correcta, los estudiantes emplean términos direccionales para explicar el comportamiento de la secuencia. Esta capacidad de utilizar lenguaje específico muestra comprensión del patrón presentado y resalta su capacidad para articular conceptos matemáticos. Además, al señalar la opción correcta con seguridad, evidencian la validez de su justificación y demuestran una confianza en su capacidad para resolver problemas de manera analítica.

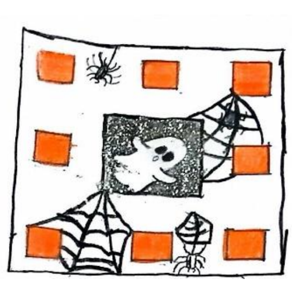
4.2.5.3. Análisis juego 3 - Equipo 3

El Equipo 3 al analizar la secuencia evidencia una comunalidad, ya que comparten estrategias y patrones similares. Su reconocimiento de la repetición de números en las fichas de dominó refleja una comprensión colectiva de la regularidad en la secuencia, la aplicación de una analogía con burbujas en movimiento demuestra una perspectiva compartida sobre cómo interpretar y relacionar conceptos en situaciones específicas; la aplicación de operaciones matemáticas, como la adición y la multiplicación, en la resolución de secuencias numéricas indica una comunalidad en la generalización algebraica de patrones. Por eso el equipo 3 se encuentra en el nivel de estratificación factual, ya que son capaces de encontrar una característica común en casos particulares a partir de una indeterminancia específica.

4.2.6. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 4: Museo de fractales: exploración algebraica

En este juego los estudiantes se sumergen en el ámbito de la creación de fractales, una disciplina que fusiona el arte matemático con la combinación precisa de creatividad y estructura, los estudiantes fueron guiados sistemáticamente a través del proceso de creación de fractales básicos, donde además se abordó el concepto de iteración. La **Tabla 5** sirvió como una herramienta esencial para analizar las habilidades de los participantes en diversos aspectos. Desde la capacidad de llevar a cabo iteraciones para crear patrones y secuencias hasta la destreza en la identificación y aplicación de conceptos matemáticos, la **Tabla 5** pretende capturar la evolución y desempeño de los estudiantes durante el proceso de creación de sus propios fractales.

Tabla 5*. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 4: Museo de fractales, exploración algebraica*

Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 4: Museo de fractales, exploración algebraica		
Equipos	**Dato**	**Categoría**
Equipo 1	1 P: ¿Qué son los fractales? 2 E1: “Son como los mandalas, porque se pueden ver las figuras geométricas con patrones” (Equipo 1, 2023) 3 P: ¿Cómo hicieron la creación de su fractal?  ***Figura 18****. Elaboración presentada por el equipo 1 en el juego 4* (Equipo 1, 2023)	**Nivel de estratificación contextual**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>4 E1: “Nuestro fractal ha sido construido con cuadrados y se puede asociar a un edificio que tiene muchas ventanas” (Equipo 1, 2023)

5 P: Si queremos encontrar cuántos cuadrados hay cuando hacemos dos iteraciones ¿Qué haríamos?

6 E1: “Debemos saber que la primera iteración tiene 8 cuadrados y la segunda va a tener ocho más ocho es decir dieciséis cuadrados” (Equipo 1, 2023)

7 P: ¿Y si queremos saber cuántos cuadrados hay en 10 iteraciones o en la décima posición?

8 E1: “Podemos sumar diez veces el ocho” (empieza a señalar con movimientos indexicales la hoja haciendo la simulación de un caracol), es decir que podemos multiplicar al ocho por cualquier iteración que queramos encontrar o por cualquier posición, por ejemplo, si queremos encontrar la posición 15 simplemente multiplicamos 15 por ocho” (Equipo 1, 2023)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Equipo 2</td>
<td>1 P: ¿Dónde creen que podemos ver los fractales en el mundo real?

2 E2: “Los fractales se pueden ver en la naturaleza, ya que esas formas geométricas que podemos ver en las flores o en los copos de nieve, pueden ser fractales también, porque se repiten una y otra vez” (Equipo 2, 2023)

3 P: ¿Y cómo podrían explicarme su fractal?

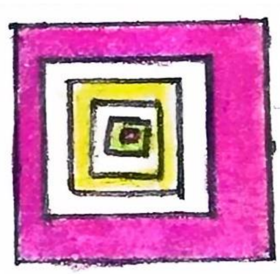
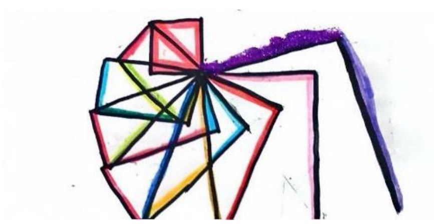


Figura 19. Elaboración presentada por el equipo 2 en el juego 4 (Equipo 2, 2023)

4 E2: “Profe pues nuestro fractal es muy sencillo, ya que dentro de una ventana gigante existen infinidades de otras ventanitas” (señalan con movimientos indexicales y expresiones faciales la hoja, muestra su fractal realizado) (Equipo 2, 2023)</td>
<td>Nivel de estratificación factual</td>
</tr>
</table>

	5 P: ¿Cuál sería la posición número uno en este fractal? 6 E2: “Profe sería ésta” (Señalan el primer cuadrado que está de morado) (Equipo 2, 2023) 7 P: ¿Y cómo está construida esa posición uno y las demás posiciones? 8 E2: “Profe nuestro fractal lo tratamos de hacer con un centímetro de distancia entre cada cuadrado o cada posición, por eso la posición uno tendría un centímetro de medida y la posición veinte tendría veinte centímetros de medida entre la posición uno y la posición veinte” (Equipo 2, 2023)	
Equipo 3	1 P: ¿Cómo pensaron en el fractal?  ***Figura 20***. *Elaboración presentada por el equipo 3 en el juego 4* (Equipo 3, 2023) 2 E3: “Nuestro fractal lo construimos en forma de espiral y la figura geométrica que lo compone es el rectángulo que tiene su primer rectángulo de 2cm el alto y 4cm la base” (Equipo 3. 2023) 3 P: Si queremos hacer 20 iteraciones o queremos encontrar la posición 20 cómo sería el rectángulo ¿Como se haría? 4 E3: “Profe lo primero es mirar que cada rectángulo va aumentando de a dos por centímetro cada vez que se hace una iteración nueva, por eso la segunda posición o el segundo rectángulo seria de 4cm de alto y 6cm su base” (Equipo 3, 2023) P: Pero si queremos encontrar la posición 20 ¿cómo lo haríamos? (La profesora repite nuevamente la pregunta que inicialmente plante)	Nivel de estratificación factual

5 E3: “Estamos multiplicando el número de la posición por la base y la altura, entonces si queremos encontrar la posición tres o cómo quedaría el rectángulo tres multiplicamos tres por el alto del primer rectángulo que es tres por dos que es seis y luego la base que es tres por cuatro doce, entonces la posición veinte sería multiplicar veinte por la base y veinte por el alto del primer rectángulo” (Equipo 3, 2023)	

4.2.6.1. Análisis juego 4 - Equipo 1

El equipo ha alcanzado características propias del nivel de estratificación contextual, ya que inicialmente, el problema se presenta como una pregunta sobre cuántos cuadrados hay después de ciertas iteraciones. Aunque el equipo 1 ofrece una respuesta inicial sobre las iteraciones y la cantidad de cuadrados, la indeterminación surge en el momento en que se plantea la pregunta sobre el número de cuadrados en la posición décima y es ahí que empiezan a operar con esa indeterminancia, tratan de encontrar la posición, manifiesta una característica propia de pensamiento algebraico que es la analiticidad, además utiliza un lenguaje y un enfoque matemático para cuestionar el problema. Por ejemplo, al hablar de iteraciones y asociar el fractal a un edificio con ventanas, colocan en contexto el problema dentro de un marco matemático.

La generalización de patrones se observa en el momento en que el equipo generaliza el proceso para encontrar el número de cuadrados en cualquier iteración o posición. Al multiplicar el número de iteraciones por el número de cuadrados en cada iteración, desarrollan una fórmula general para encontrar el número de cuadrados en cualquier posición, aunque la expresan de forma verbal, pero resalta los elementos de la fórmula que describen el patrón y la secuencia, esto muestra una comprensión analítica del problema y la capacidad de generalizar la situación. El equipo 1 utiliza términos como "iteraciones", "cuadrados" y "posición" para la solución, estos términos tienen significados precisos en el contexto matemático y son elementos de objetivación que se encuentran en el uso de términos matemáticos específicos.

4.2.6.2. Análisis juego 4- Equipo 2

El equipo 2 utiliza términos y conceptos matemáticos, como la distancia entre cada posición en el fractal. Explican que hay un centímetro de distancia entre cada cuadrado o posición, lo que indica un entendimiento de la estructura y las medidas involucradas. La indeterminancia se ve presente en la pregunta sobre la posición número uno en el fractal, a los que responde al señalar el primer cuadrado de color morado. Esto sugiere una cierta ambigüedad o falta de precisión en la definición de la posición número uno, ya que podría interpretarse de diferentes maneras, depende de cómo se define la secuencia, sin embargo, para ellos la posición uno era el cuadrado morado y las iteraciones que aumentan hacen que se vea más pequeño el fractal, estos movimientos que ellos realizan al señalar con el índice son elementos de objetivación propios del nivel de estratificación factual.

La comunalidad de patrones se evidencia en la explicación proporcionada por el Equipo 2, quienes intentaron construir su fractal al mantener una distancia uniforme entre cada posición. Este enfoque sugiere que están en busca de una característica común en la secuencia, específicamente la uniformidad en la distancia entre los elementos del fractal. Este esfuerzo revela un intento por identificar patrones o regularidades en la estructura fractal, además, la asociación entre la distancia de cada cuadrado y la medida inicial que indica que pudieron discernir posiciones particulares de la secuencia. Esta construcción sugiere un proceso de generalización de patrones al identificar y relacionar características comunes dentro del fractal, lo que demuestra un nivel de pensamiento algebraico factual que va más allá de la simple observación visual.

4.2.6.3. Análisis juego 4- Equipo 3

El equipo 3 en este juego se ubica en un nivel de estratificación factual, ya que se enfoca en la comprensión y descripción de una posición específica, el equipo construye un fractal en forma de espiral al utilizar rectángulos y determinar las dimensiones de estos rectángulos en iteraciones sucesivas. Se observa lo indeterminado inicialmente al plantear la pregunta sobre cómo determinar el rectángulo en la posición 20, lo que requiere un proceso de pensar algebraicamente por parte del equipo, ya que no pudieron llegar a la respuesta inmediatamente, además la comunalidad de la secuencia se ve explícita cuando mencionan que el patrón aumenta en las dimensiones de los rectángulos en cada iteración. Para colocar de manifiesto la objetivación en el proceso, describieron el patrón de aumento, y utilizaron el concepto de multiplicación para calcular las dimensiones del rectángulo en una posición específica y se explicó cómo aplicar este patrón para encontrar las dimensiones del rectángulo en la posición 20.

4.2.7. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 5: Sigue el patrón

En este juego los equipos son organizados en parejas y deben completar un patrón numérico basado en la cantidad de vértices de los triángulos. Las preguntas son aleatorias y desafían a los estudiantes a responder correctamente para acumular puntos y avanzar. La variedad en las preguntas genera emoción y desafío, promueve una participación activa y la aplicación práctica de conocimientos. La acumulación de puntos refuerza la comprensión individual y fomenta una competencia amistosa entre los participantes. El objetivo del juego no es solo educar sobre patrones, sino también convertir el aprendizaje en una experiencia dinámica y entretenida para facilitar la comprensión de conceptos. La estructura del juego, centrada en la aleatoriedad de las preguntas, busca mantener la atención y el interés de los jugadores, además, crea un ambiente participativo. Si una pareja comete un error, sale del juego y se reinicia el patrón con la pareja siguiente en la fila.

Tabla 6. *Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 5: Sigue el patrón*

Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 5: Sigue el patrón

Equipo	**Dato**	**Categoría**
Equipo 1	1 P: ¿Por qué en la secuencia: de 2,4,6,8, ¿10 sigue el doce? Argumenta	**Nivel de estratificación contextual**

	2 E1: "Porque siempre se suma de dos en dos, entonces siempre tendré que sumar de a dos más, después del 10 sigue el doce y luego el catorce" (Equipo 1, 2023) 1 P: ¿Qué está sucediendo en esta secuencia de 2, 4, 8, 16, 32? 2 E1: "Se está sumando el mismo número, como dos más dos, cuatro más cuatro, ocho más ocho y así se va formando la secuencia." (Equipo 1, 2023) 3 P: Si en la primera secuencia presentada, cada número es una posición, al iniciar desde la posición uno que sería el dos, y la posición dos, que sería el dos ¿podrías mencionar cuál es la regla de formación que se presenta en la secuencia anterior? 4 E1: "Sí podría y es que siempre voy a multiplicar la posición por dos, eso me daría el número que me pidan siempre que me den también la posición" (Equipo 1, 2023) 5 P: En la segunda secuencia presentada ¿cuál es la regla de formación que se presenta? 6 E1: "Al número anterior se le duplica su valor" (Equipo 1, 2023)	
Equipo 2	1 P: ¿Cuál es la operación matemática que se aplica a los patrones, donde debíamos enumerar la cantidad de vértices en cubos sucesivos al aumentar la cantidad de cuadrados? 2 E2: "La multiplicación, porque multiplicamos el número de vértices por el número de cuadrados y ahí nos daba el resultado" (Equipo 2, 2023) 3 P: ¿Cómo llegaste a que la operación que se debía utilizar era una multiplicación? 4 E2: "Porque si cada cubo tiene 8 vértices entonces otro cubo más va a tener otros 8 vértices es lo mismo de multiplicar 8 por 2 y si me pregunta por tres cubos, sería multiplicar 8 por tres" (Equipo 1, 2023) 5 P: Si un cuadrado tiene cuatro vértices y cuatro lados ¿si sumo varios cuadrados, todos los cuadrados siempre van a tener la misma cantidad de lados y vértices?	**Nivel de estratificación contextual**

	6 E1: “Si, porque un cuadrado tiene cuatro vértices y cuatro lados y si dos cuadrados tienen ocho vértices, tiene ocho lados, entonces siempre va a tener la misma cantidad de lados y vértices” (Equipo 2, 2023)	
Equipo 3	1 P: ¿Por qué en la secuencia: de 2,4,6,8, ¿10 sigue el doce? argumenta 2 E2: “Sigue el número doce” (Equipo 3, 2023) 3 P: ¿Cómo llegaste a ese resultado? 4 E2: “Porque es la tabla del dos, 2 por 1 es dos, dos por dos es cuatro, dos por tres es seis y así” (Equipo 3, 2023)  ***Figura 21**. Imagen tomada del video IMG_6861.MOV equipo 3 en el juego 5* (Equipo 3, 2023) 5 P: ¿Qué operación matemática hay entre los patrones donde se debía decir cuántos vértices tienen dos, tres, cuatro … cuadrados y se continúa aumentado la cantidad de cuadrados? 6 E3: “Se debía ir sumando, por ejemplo, un cuadrado tiene cuatro vértices, si le sumo otro cuadrado al pegarlo del cuadrado anterior se le suman dos vértices y quedarían seis vértices, al sumarle un nuevo cuadrado le sumariamos nuevamente dos vértices y así sucesivamente” (Equipo 3. 2023)	**Nivel de estratificación factual**

4.2.7.1. Análisis juego 5 - Equipo 1

Los estudiantes del Equipo 1 muestran una comprensión de patrones y reglas en secuencias numéricas, puesto que en la primera secuencia (2, 4, 6, 8, 10), los estudiantes argumentan que la regla de formación es la adición constante de dos. Su explicación refleja una comprensión de cómo la secuencia se genera mediante la suma sucesiva de dos unidades. Además, su proyección hacia el siguiente número (12) indica una capacidad para extrapolar la regla a términos adicionales. En la segunda secuencia (2, 4, 8, 16, 32), los estudiantes identifican la regla de multiplicación, al generalizar que se suma el mismo número (duplica su valor en cada paso), demuestran una analiticidad de cómo se construye la secuencia. La respuesta sugiere la capacidad de reconocer patrones exponenciales y aplicar el concepto de duplicación en cada paso.

Al momento en que se les pide analizar la primera secuencia se consideran las posiciones como números, los estudiantes articulan una regla general: multiplicar la posición por dos para obtener el número correspondiente en la secuencia. Esto destaca su habilidad para comprender y expresar la relación entre la posición y el valor en la secuencia, lo que sugiere un pensamiento algebraico.

4.2.7.2. Análisis juego 5- Equipo 2

Los estudiantes del Equipo 2 relacionan la cantidad de cuadrados y la cantidad de vértices en cubos sucesivos y aplican la operación de multiplicación para modelar esta relación, en el momento en que se les pregunta sobre la operación matemática aplicada, los estudiantes identifican la multiplicación, explican que multiplican el número de vértices por el número de cuadrados para obtener el resultado; al explicar cómo llegaron a la conclusión de que la multiplicación era la operación adecuada, los estudiantes observan la constante en el número de vértices (8) en cada cubo y reconocen que agregar más cubos implica multiplicar cantidad por el número de cubos. Esta capacidad de generalizar hace que emerja una característica propia del pensamiento algebraico que es la analiticidad. Los estudiantes aplican su comprensión al concepto de cuadrados. Al afirmar que, si dos cuadrados tienen ocho vértices, también tendrán ocho lados, lo que demuestra así que el equipo 1 se encuentra en un nivel contextual de estratificación.

4.2.7.3. Análisis juego 5- Equipo 3

El equipo 3 se ubica en el nivel de estratificación factual, al entender que en la primera pregunta sobre la secuencia numérica (2, 4, 6, 8, 10), responde "Sigue el número doce" sin proporcionar una justificación o argumento detrás de la elección del siguiente número. Este enfoque refleja una falta de argumentación explícita, lo que se considera como una respuesta no clara, indica cierto nivel de indeterminancia en la explicación, sin embargo, en la segunda parte del diálogo, el equipo 3 demuestra una comprensión al explicar que la secuencia sigue la tabla del dos, donde cada número es el resultado de multiplicar 2 por un número consecutivo. Este enfoque revela comunalidad al aplicar una regla específica (la tabla del dos) para explicar la secuencia, lo que indica una comprensión basada en reglas matemáticas.

4.2.8. Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 6: Football algebraico

En el juego los grupos forman equipos de fútbol y enfrentan desafíos relacionados con ecuaciones, secuencias, patrones y otros conceptos matemáticos. Cada desafío plantea situaciones algebraicas vinculadas al rendimiento del equipo, además, exige a los estudiantes aplicar conocimientos matemáticos para resolverlos. El objetivo es fortalecer habilidades algebraicas y aplicar los conceptos aprendidos en los juegos anteriores, además de relacionarlos con el contexto del fútbol. Esto no solo enseña conceptos algebraicos, sino que también demuestra su utilidad práctica en situaciones cotidianas y permite una comprensión contextualizada del juego. En la dinámica del juego, los equipos eligen desafíos de una bolsa presentada por las profesoras, quienes también actúan como árbitros. Cada respuesta correcta brinda la oportunidad de marcar un gol desde el tiro de cobro y aumenta un punto al equipo. Si un estudiante falla, tendrá otra oportunidad después de enfrentar un segundo desafío.

Tabla 7. *Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 6: Football algebraico*

Manifestación de los estratos de pensamiento algebraico en el juego 6: Football algebraico		
Equipo	**Dato**	**Categoría**
Equipo 1	1 P: ¿cómo solucionarías esa tarjeta? 2 E1: “Si un triángulo tiene tres lados, dos triángulos tienen seis lados” (Equipo 1, 2023) 3 P: ¿Y cuántos lados tendrán cuatro triángulos?	**Nivel de estratificación simbólico**

	4 E2: "Profe muy fácil, tendrá nueve lados, ya que siempre le estamos aumentando el número 3" (Equipo 1, 2023) 5 P: ¿Y si no conocemos la posición anterior? Es decir, me dijeron que en el tercer triángulo tendrá nueve lados, porque se basan de la posición dos es decir seis lados, pero si quiero hallar la posición veinte es decir cuántos lados tendrán veinte triángulos ¿cómo lo haría? 6 E2: "Lo que habría que hacer es sumar el número tres, veinte veces, ya que cada posición aumenta tres, o podemos multiplicar la posición por el número tres que es lo que no cambia, es decir lo que siempre va a permanecer en la secuencia" (Equipo 1, 2023) 7 P: ¿cómo podemos explicarlo de una manera más general? 8 E1: "nx3 multiplicamos cualquier cantidad de triángulos por 3, por eso si n es cualquier cantidad de triángulos lo multiplico por tres que son la cantidad de lados que tiene todos los triángulos". (Equipo 1, 2023)	
Equipo 2	1 P: ¿cómo pueden solucionar esa tarjeta, como pueden decir que número continua en la secuencia? (Tarjeta: secuencia: 1,4,9,16,25) 2 E2: "Sigue el número 36" (Equipo 2, 2023) 3 P: ¿Cómo llegaron a esa respuesta? 4 E2:" Es que en clase estuvimos trabajando los números al cuadrado y cada número que sale en la secuencia es lo números 1,2,3,4,5 y 6 elevados a la dos, es decir multiplicados por sí mismo dos veces" (Equipo 2, 2023) 5 P: ¿Si yo quiero encontrar la posición nueve, teniendo en cuenta que el uno es la posición uno y el cuatro es la posición dos como lo haría? 6 E2: "Lo que hago es elevar la posición a la dos, o multiplicarla por sí mismo dos veces, es decir que si es la posición nueve multiplicó nueve por nueve y el número que hay en esa posición es el ochenta y	**Nivel de estratificación contextual**

<table>
<tr><td></td><td>uno y así se puede hacer con cualquiera, se multiplica la posición que quiero por sí misma y ya da el resultado” (Equipo 2, 2023)</td><td></td></tr>
<tr><td>Equipo 3</td><td>1 P: ¿Cómo podrían resolver la tarjeta que sacaron? (Tarjeta secuencia: 2,4,6,8)

2 E3: “Profe está muy fácil, simplemente la siguiente posición sería diez” (Equipo 3, 2023)

3 P: ¿cómo puedo saber qué número va en la posición 10 de la secuencia?

4 E3: “Va la posición veinte porque le multiplicó dos por diez” (Equipo 3, 2023)

5 P: ¿Y si quiero saber la posición n? toman como cualquier posición.

6 E3: “Multiplicó por dos el número de la posición que desee encontrar, porque cada vez tengo que multiplicar por dos la posición que sea, por ejemplo, la posición 2 sería dos por dos y me dio cuatro, entonces siempre le sumo dos.” (Equipo 3, 2023) (Realizan un movimiento con las manos queriendo explicar cómo funcionan las posiciones en esa secuencia) (Equipo 3, 2023)

Figura 22. Imagen tomada del video IMG_6877.MOV equipo 3 en el juego 6 (Equipo 3, 2023)</td><td>Nivel de estratificación contextual</td></tr>
</table>

4.2.8.1. Análisis juego 6 - Equipo 1

En este juego el equipo 1 llegó a un nivel de estratificación simbólico porque utiliza conceptos matemáticos de manera abstracta y simbólica para resolver un problema. La designación simbólica es una característica del pensamiento algebraico y se hace presente en la expresión "nx3", donde "n" representa el número de triángulos y "x3" representa la multiplicación por tres,

lo que simboliza la relación entre el número de triángulos y el número de lados. Al generalizar una fórmula algebraica para esta secuencia se puede decir que llegaron a la expresión directa cada vez que la profesora y los estudiantes discuten cómo generalizar la solución para cualquier cantidad de triángulos; se nota la utilización de la fórmula "nx3" como una representación simbólica de esa generalización. El equipo 1 alcanza un nivel de estratificación simbólico debido al uso de símbolos matemáticos para representar patrones y relaciones en lugar de simplemente contar o manipular números en situaciones concretas.

4.2.8.2. Análisis juego 6- Equipo 2

El equipo 2 aplica conceptos algebraicos para resolver el problema de la secuencia numérica, donde la analiticidad se hace explícita, siempre que se relaciona la secuencia numérica con el concepto de números al cuadrado, es decir, que eso indeterminado comenzaron a analizarlo al identificar que cada número en la secuencia es el resultado de elevar al cuadrado los números naturales consecutivos (1, 2, 3, 4, 5, 6). Esto implica pensar algebraicamente, reconocer el patrón y la relación entre los números de la secuencia y los números naturales. Además, la generalización de la secuencia al momento en que el equipo 2 explica cómo encontrar cualquier número en la secuencia está presente al utilizar una fórmula de elevar al cuadrado la posición en la secuencia o multiplicarla por sí misma dos veces. Esto muestra cómo puede ser aplicado de manera general para encontrar cualquier término en la misma, se tiene en cuenta que el equipo 2 menciono elementos de la fórmula general para cualquier posición de la secuencia.

4.2.8.3. Análisis juego 6- Equipo 3

El equipo 3 analizó y generalizó el patrón de la secuencia al identificar que cada término es el resultado de multiplicar la posición por dos. Esta comprensión muestra una relación entre los términos de la secuencia y su posición. El equipo 3 explica cómo encontrar cualquier término en la secuencia al utilizar la fórmula de multiplicar la posición deseada por dos, esto muestra una comprensión generalizada del patrón en la secuencia y cómo puede ser aplicado para encontrar cualquier término en la misma, aunque es importante resaltar que los estudiantes encontraron una fórmula general para cualquier posición y la hicieron verbalizada, pasa de lo particular a lo general, encuentra todas las posiciones posibles de la secuencia, aunque no detallaron la fórmula, aplicaron conceptos matemáticos de manera analítica para entender el patrón de la secuencia y generalizarlo para encontrar cualquier término en ella.

4.3. Categorías principales

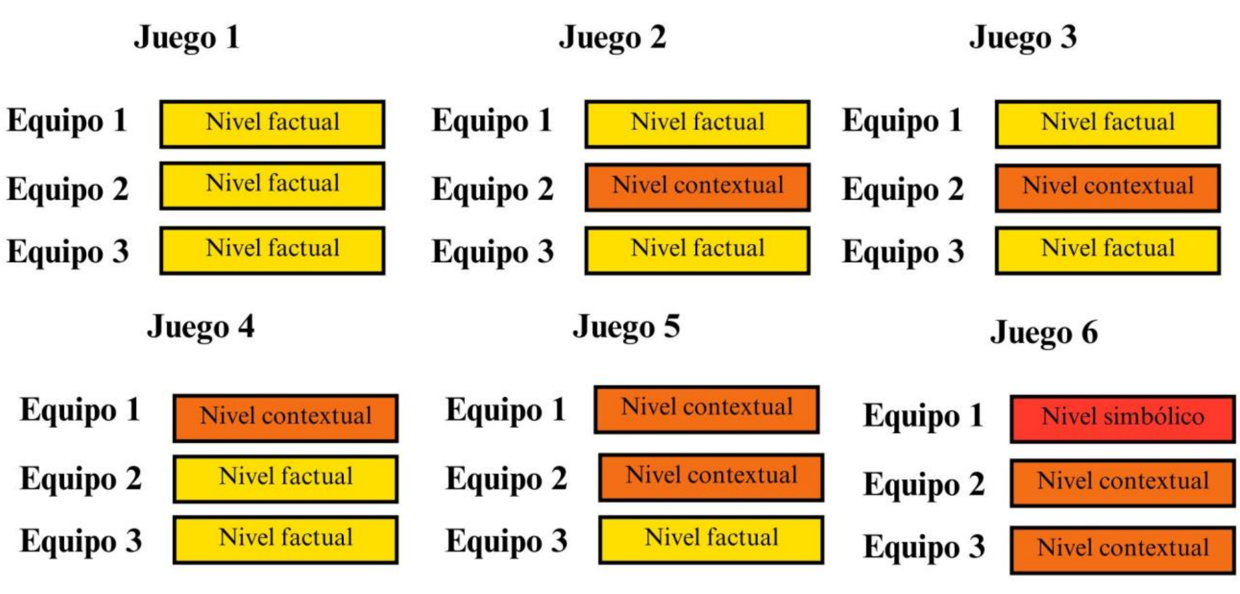


Figura 23. *Resultado de análisis*

La imagen presenta los resultados del análisis de seis juegos, donde los equipos fueron evaluados en tres niveles de estratificación: nivel factual, nivel contextual y nivel simbólico. Cada juego incluye la participación de tres equipos (Equipo 1, Equipo 2 y Equipo 3), y se observa cómo estos equipos transitaron por los diferentes niveles a lo largo del análisis. Inicialmente, en los juegos 1, 2 y 3, se observa que la mayoría de los equipos se encuentran predominantemente en el nivel factual. Este nivel es el más común, lo que indica que los equipos comenzaron con una comprensión básica y directa de la información. En el juego 1, todos los equipos (Equipo 1, Equipo 2 y Equipo 3) están en el nivel factual. En el juego 2, los Equipos 1 y 3 mantienen este nivel, mientras que el Equipo 2 comienza a moverse hacia el nivel contextual. En el juego 3, se repite una situación similar, con los Equipos 1 y 3 en el nivel factual y el Equipo 2 en el nivel contextual.

A medida que avanzan los juegos, los equipos comienzan a transitar hacia el nivel contextual. En el juego 4, el Equipo 1 ya está en el nivel contextual, mientras que los Equipos 2 y 3 permanecen en el nivel factual. Esta tendencia continúa en el juego 5, donde tanto el Equipo 1 como el Equipo 2 se encuentran en el nivel contextual, y solo el Equipo 3 sigue en el nivel factual. Este cambio sugiere que los equipos están empezando a desarrollar una comprensión de la información que se les presenta. Finalmente, en el juego 6, se observa una mayor diversificación en los niveles de estratificación. El Equipo 1 alcanza el nivel simbólico, el más avanzado y menos común, lo que indica una comprensión y análisis aún mayor. Los Equipos 2 y 3 están en el nivel contextual, lo que indica un progreso desde el nivel factual inicial.

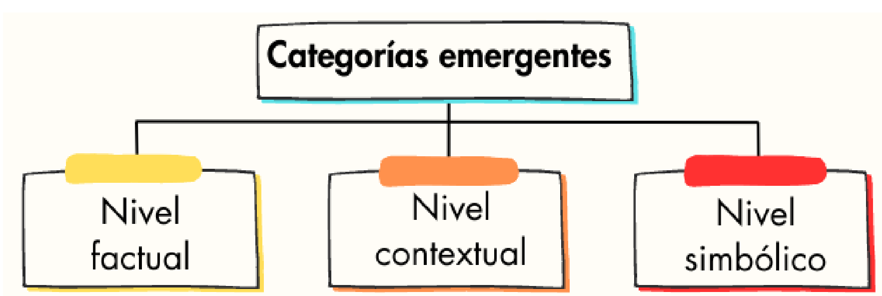


figura 24. *Categorías*

La codificación permite que las categorías a priori fueran codificadas, que ha dado lugar a tres categorías principales: Nivel Factual, Nivel Contextual y Nivel Simbólico. Estas categorías proporcionan una estructura organizativa esencial para ubicar y analizar los elementos recopilados en la investigación. La asignación de colores específicos a cada una de estas categorías facilitó la identificación y el reconocimiento de los elementos relacionados con el pensamiento algebraico en sus respectivos niveles. Esta organización permitió un análisis más preciso y detallado, adicionalmente, contribuyó a la comprensión de los datos obtenidos en relación con los diferentes niveles de pensamiento algebraico. Al hacer uso de esta estructura organizativa, se ha promovido una mayor coherencia y consistencia en el proceso de análisis, lo que ha contribuido a la fiabilidad y validez de los resultados obtenidos.

En el análisis de los juegos realizados para la investigación, se configuran unas categorías a través de la interpretación de datos obtenidos de las experiencias de los estudiantes en los juegos. Estas categorías se configuran en tres niveles: nivel factual, nivel contextual y nivel simbólico, cada uno aportando una dimensión a la comprensión de cómo los juegos permiten el aprendizaje al usarlo como herramienta pedagógica. A nivel factual, los datos revelaron la adquisición de conocimientos y habilidades específicas, tales como reconocimiento de patrones y secuencias algebraicas. En el nivel contextual, se observó cómo los estudiantes aplicaban estos conocimientos en situaciones concretas dentro del juego, lo que demuestra una habilidad para relacionar el aprendizaje con escenarios reales y prácticos, Finalmente, el nivel simbólico representó la interpretación y la abstracción de conceptos matemáticos, donde los estudiantes fueron capaces de discernir patrones y estructuras de mayor complejidad.

4. Conclusiones

El presente capítulo revela las conclusiones que surgen de la investigación orientada sobre cómo se estratifica el pensamiento algebraico a través de juegos. Este capítulo encapsula los análisis derivados del capítulo 4, que ofrece una visión esclarecedora de cómo los juegos han actuado como herramienta para estratificar los diversos estratos del pensamiento algebraico temprano en el ámbito de la educación. En el transcurso de estas conclusiones, se abordan las complejidades identificadas durante la investigación y se esbozan perspectivas para futuros estudios en este campo; este capítulo tiene como propósito la culminación reflexiva que resalta la innovación y el impacto de esta investigación en el pensamiento algebraico en el campo de la educación matemática.

5.1. Respuesta a la pregunta de investigación

La investigación se basó en la pregunta: ¿Cómo se manifiesta la estratificación del pensamiento algebraico a través de juegos? mediante la observación y el análisis de los estudiantes en diferentes niveles de estratificación se dio respuesta a este interrogante, donde los juegos proporcionaron un entorno interactivo de experimentación y aplicación de conceptos algebraicos. A medida que los estudiantes se involucraron en los juegos diseñados para estratificar el pensamiento algebraico, se pudo identificar que efectivamente los estudiantes alcanzaron los diferentes estratos de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2021). Los juegos implicaron la resolución de problemas algebraicos, donde los estudiantes demostraron una comprensión al reconocer patrones y secuencias que conforme avanzan en el juego se enfrentan a desafíos más complejos, lo que nos lleva analizar teóricamente los niveles de estratificación propuestos por Radford (2006b, 2021), quien en su teoría afirma que en el pensamiento algebraico se identifican tres niveles.

El estrato factual es donde los estudiantes trabajan con hechos y conceptos algebraicos de manera concreta y específica, hallando determinadas posiciones en una secuencia, esto implica reconocer y aplicar reglas y procedimientos algebraicos, sin necesariamente comprender la conexión entre los conceptos, en este nivel los estudiantes ponen de manifiesto diferentes medios semióticos de objetivación como las expresiones verbales y corporales, lo que se evidencio en los juegos propuestos en la metodología. El nivel contextual estuvo presente cuando los estudiantes comenzaron a comprender de manera general el patrón que se presentaba en las diferentes secuencias de juegos, algo que implicó que fueran de lo particular a lo general; por último, en el estrato simbólico los estudiantes desarrollan una comprensión de los conceptos algebraicos, utilizando la designación simbólica y llegando a una fórmula para generalizar el patrón y la secuencia presentada, esto implicó manipular símbolos algebraicos y expresiones matemáticas de manera generalizada, así como comprender las propiedades y relaciones algebraicas más allá de situaciones concretas.

El análisis de los datos desplegados en el transcurso de esta investigación constituye un componente que conlleva a unas conclusiones sobre la estratificación del pensamiento algebraico a través de los seis juegos diseñados. La premisa central del enfoque, era evaluar y clasificar los tres equipos participantes, compuestos por estudiantes del grado sexto, en los tres estratos de pensamiento algebraico mediante su desempeño en estos juegos, que se enmarcaron en patrones y secuencias específicamente. Los resultados obtenidos reflejan una distinción en el rendimiento de los equipos en cada juego, permitiendo una estratificación. La observación detallada de los datos ha proporcionado información sobre el grado de comprensión algebraica alcanzado por cada equipo. Además, la diversidad de los juegos ha permitido abordar distintos aspectos del pensamiento algebraico, desde conceptos básicos hasta desafíos complejos, lo que ha contribuido a una evaluación integral y donde se evidenciaron los diferentes niveles de estratificación propuestos por Radford (2006b).

Esta investigación ha revelado cómo el pensamiento algebraico puede ser manifestado mediante la integración de juegos matemáticos en el contexto de la educación. En primer lugar, se evidencia que los juegos proporcionan un entorno lúdico y motivador que favorece el desarrollo de habilidades algebraicas en los estudiantes, permitiéndoles experimentar conceptos indeterminados de manera tangible y participativa. La observación detallada de las interacciones durante los juegos ha permitido visualizar los diferentes estratos de pensamiento algebraico, desde la indeterminación, la analiticidad y la designación simbólica que son las características propias del pensamiento algebraico según Radford (2021), proporcionando así una estratificación de pensamiento presente en el desarrollo de los juegos planteados. Además, el juego ha demostrado ser una herramienta para fomentar la participación activa y el interés en la resolución de problemas algebraicos, promoviendo la aplicación de conocimientos adquiridos en situaciones prácticas.

Sin embargo, a pesar de que nuestra atención estaba inicialmente dirigida hacia una manifestación de la estratificación del pensamiento algebraico mediante el uso de juegos, descubrimos de manera consecuente e indirecta que se promovió el pensamiento algebraico entre los estudiantes participantes, puesto que el diseño y la implementación de la actividad propiciaron un entorno para el desarrollo de habilidades matemáticas más allá de lo previsto, a través de la interacción con el contenido del juego, los estudiantes no solo adquirieron conocimientos de álgebra, sino que también lograron una comprensión de estos conceptos. Esta comprensión no solo se limitó al ámbito académico, sino que también se manifestó en su capacidad para aplicar estos conceptos en situaciones cotidianas y resolver problemas de manera cotidiana.

En este sentido, se destaca además que el juego se convierte en un medio semiótico en el contexto de esta investigación, ya que los elementos visuales, auditivos y narrativos presentes en los juegos no solo proporcionaron entretenimiento, sino que también constituyeron un lenguaje semiótico que los estudiantes debieron comprender y utilizar para avanzar en cada uno de los juegos propuestos. Este reconocimiento como un medio semiótico amplío la comprensión de cómo los juegos si influyen en la forma en que interpretamos y nos relacionamos con el mundo que nos rodea, al considerar el juego como un medio semiótico, se reconoce su capacidad para comunicar información y significado de forma efectiva, lo que resalta su importancia y su papel en esta investigación.

Por otro lado, se observó que, a través del uso de juegos como herramienta para la consolidación de conceptos matemáticos, fue posible caracterizar distintos momentos de pensamiento que emergieron en los estudiantes. En primer lugar, se observa una fase inicial de pensamiento concreto, donde los estudiantes interactúan con los juegos de manera directa y tangible, manipulando piezas y realizando acciones específicas para resolver problemas algebraicos simples. Posteriormente, a medida que se enfrentaron a desafíos más complejos, se evidenció un progreso hacia un pensamiento abstracto, donde los estudiantes comienzan a identificar patrones, relaciones y estructuras matemáticas en los juegos. Este proceso promovió una comprensión de los conceptos algebraicos, al permitir a los estudiantes aplicar estrategias analíticas y de razonamiento deductivo para resolver problemas.

Finalmente, a medida que los estudiantes dominaron los juegos y los conceptos matemáticos asociados, alcanzaron un nivel de pensamiento reflexivo y crítico, donde fueron capaces de evaluar y justificar sus estrategias, así como de transferir sus conocimientos a situaciones del mundo real. Esta etapa del proceso de aprendizaje con juegos algebraicos les permitió a los estudiantes explorar nuevas formas de abordar problemas, fomentando la creatividad y la innovación en su pensamiento algebraico. Además, los estudiantes desarrollaron habilidades para la resolución de problemas algebraicos, lo que les prepara para enfrentar desafíos académicos con confianza y competencia; la integración de estos juegos en el aula fortaleció la comprensión de conceptos matemáticos e impulsó el desarrollo de habilidades cognitivas y la formación de una mentalidad de resolución de problemas que trasciende el ámbito académico hacia la vida cotidiana.

Las conclusiones obtenidas resaltan que los juegos no solo brindan la oportunidad de evaluar la comprensión conceptual, sino también de promover el pensamiento algebraico en contextos lúdicos. Se destaca la versatilidad de los juegos como herramientas de estratificación, adaptándose a diversos estilos de aprendizaje y ritmos individuales. Este enfoque pedagógico, demuestra ser inclusivo, ya que permite a estudiantes con habilidades diversas participar y desarrollar progresivamente sus capacidades algebraicas. Estos hallazgos no solo respaldan la eficacia de los juegos como instrumentos evaluativos, sino que también resaltan la necesidad de considerar enfoques pedagógicos innovadores y motivadores para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito del pensamiento algebraico, proporcionando así una base para futuras investigaciones y prácticas educativas en la educación matemática.

5.2. Objetivos propuestos

El objetivo general de la investigación es analizar cómo se estratifica el pensamiento algebraico en estudiantes de grado sexto a través de juegos, mediante una metodología que incluyó la observación de los participantes durante el desarrollo de juegos diseñados específicamente para fomentar el pensamiento algebraico, se identificaron diferentes estratos en el pensamiento algebraico, esto permitió el análisis de los datos recopilados y la observación de cómo los juegos proporcionaron oportunidades para que los estudiantes demostrarán habilidades algebraicas en niveles factual, contextual y simbólico. Desde la aplicación de reglas y procedimientos básicos hasta la resolución de problemas en contextos reales y la manipulación creativa de símbolos algebraicos, los juegos ofrecieron un entorno interactivo donde los estudiantes pudieron estratificar su pensamiento algebraico en los diferentes estratos.

El primer objetivo específico se enfocó en identificar qué juegos matemáticos proporcionan un acercamiento en conceptos y aprendizajes algebraicos, en donde las conclusiones derivadas de la exploración de juegos como "Álgebra al Ritmo de la Música", "Desafiando Dimensiones", "Tesoro Algebraico", "Fútbol Algebraico", "Sigue el Patrón" y " Museo de Fractales" sugieren un panorama que busca favorecer la enseñanza de conceptos y aprendizajes algebraicos mediante enfoques lúdicos. Estos juegos han demostrado ser herramientas efectivas para fomentar la comprensión de conceptos algebraicos de manera dinámica y participativa. "Álgebra al Ritmo de la Música" integra la creatividad musical con la resolución de problemas algebraicos, mientras que "Fútbol Algebraico" y "Desafiando Dimensiones" ofrecen desafíos tridimensionales que estimulan el pensamiento algebraico avanzado. "Sigue el Patrón" y "Tesoro Algebraico" se destacan por su capacidad para promover la aplicación práctica de habilidades algebraicas, y "Museo de Fractales" proporciona una experiencia visual única que fortalece la comprensión de estructuras algebraicas.

La incorporación de diversos elementos, como la creatividad, la tridimensionalidad, la aplicabilidad y lo visual, en estos recursos didácticos ha demostrado ser un enfoque eficaz para aproximar a los estudiantes a los conceptos algebraicos. Al integrar la creatividad, se estimula un aprendizaje personalizado al álgebra, permitiendo a los estudiantes encontrar conexiones entre su expresión individual y los conceptos algebraicos. La introducción de dimensiones tridimensionales desafía la comprensión convencional y promueve un pensamiento algebraico al exigir la visualización y manipulación de objetos en un espacio complejo. Asimismo, la aplicación práctica de conceptos en situaciones cotidianas favorece una comprensión del álgebra. Al conectar los conceptos abstractos con problemáticas del mundo real, los estudiantes internalizan sus aplicaciones prácticas.

El segundo objetivo de esta investigación es analizar cómo el juego puede ayudar a estratificar el pensamiento algebraico en estudiantes que han tenido acercamientos previos al álgebra; durante el estudio, se analiza que los juegos diseñados específicamente para abordar conceptos y habilidades propias del pensamiento algebraico, proporcionaron un entorno de aprendizaje interactivo y motivador para los estudiantes. A lo largo del proceso, se identificaron mejoras en la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos en los estudiantes participantes. Los resultados obtenidos demuestran que el uso de juegos en el aula puede ser una herramienta para fomentar el pensamiento algebraico, incluso en aquellos estudiantes que ya tienen algún conocimiento previo en este campo. En consecuencia, estas conclusiones respaldan la idea de que el juego puede ser una herramienta que permita manifestar los diferentes niveles de pensamiento en la enseñanza del álgebra y sugieren que su integración en el currículo puede contribuir positivamente al desarrollo de habilidades matemáticas fundamentales en los estudiantes.

El tercer objetivo buscó diseñar y aplicar una serie de juegos didácticos con la intención de enmarcarlos en el pensamiento algebraico, al aprovechar el juego como una herramienta para fomentar el aprendizaje, lo que implicó una cuidadosa planificación para garantizar la efectividad pedagógica y la alineación con los objetivos educativos. En primer lugar, se aborda la creación de situaciones lúdicas que presenten desafíos algebraicos graduales y contextualmente relevantes. Se seleccionaron los conceptos de secuencia y patrón y se estructuraron los juegos de manera que permitieron a los estudiantes transitar por los diferentes estratos de pensamiento algebraico. En este proceso de diseño, se incorporan estrategias que fomentaron la participación activa, la colaboración entre estudiantes y la resolución de problemas, además de la inclusión de elementos creativos y visuales que buscaron hacer los juegos atractivos y accesibles.

5.3. Aportes a otras líneas de investigación matemática

Los hallazgos y conclusiones de la investigación sobre la estratificación de pensamiento algebraico a través de juegos pueden tener varios aportes a otras líneas de investigación matemática, donde los resultados pueden ofrecer ideas y evidencia sobre la efectividad de utilizar enfoques lúdicos en la enseñanza de las matemáticas en general. Esto puede ser relevante para investigaciones que buscan explorar y promover metodologías educativas innovadoras para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos, donde se puedan realizar preguntas sobre ¿qué otros enfoques lúdicos se podrían utilizar en la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos? Los hallazgos pueden contribuir al campo de la tecnología educativa y el diseño de juegos educativos, pero ¿cómo pueden las estrategias y elementos del juego identificados servir como base para el diseño de herramientas educativas digitales centradas en el aprendizaje basado en juegos? Enfocando la investigación desde una perspectiva tecnológica.

El estudio proporciona información sobre cómo los aspectos motivacionales del aprendizaje pueden influir en el desarrollo del pensamiento algebraico. Esto puede ser relevante para investigaciones en psicología educativa que buscan comprender los procesos cognitivos y emocionales involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y cómo estos pueden ser mejorados mediante intervenciones educativas específicas, como por ejemplo los juegos. Esta investigación permite preguntarse por el diseño curricular de matemáticas, sobre ¿qué implicaciones pueden tener los resultados para el diseño e implementación de currículos matemáticos que integren actividades lúdicas y experiencias de juego? Y además ¿cómo pueden estos hallazgos apoyar la mejora de la calidad y efectividad de los programas de estudio en matemáticas en diferentes contextos educativos? Los resultados pueden tener implicaciones para el diseño y la implementación de currículos matemáticos promover el alcance de los diferentes estratos de pensamiento algebraico. Esto puede apoyar a investigaciones que buscan mejorar la calidad y la efectividad de los programas de estudios en matemáticas en diferentes contextos.

5.4. Consideraciones generales y finales

Puede ser conveniente diseñar juegos en el contexto del pensamiento algebraico donde se tenga en cuenta la diversidad de ritmos de aprendizaje entre los estudiantes y se apunte a los diferentes estratos del pensamiento algebraico, ya que, al considerar las variaciones individuales en el proceso de aprendizaje, se puede diseñar juegos que abarquen desde la indeterminancia en el álgebra hasta la designación simbólica. Estos juegos deben ser adaptables y flexibles, de manera que puedan ofrecer desafíos ajustados a las necesidades y habilidades de cada estudiante. Además, es importante que los juegos estén pensados en poner de manifiesto el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la creatividad, permitiendo a los estudiantes explorar y aplicar conceptos algebraicos en contextos variados. De esta manera, se promueve un aprendizaje inclusivo y enriquecedor que atiende a la diversidad de estilos de aprendizaje y niveles de competencia en el ámbito del pensamiento algebraico.

Al culminar esta indagación sobre la estratificación del pensamiento algebraico, se desprenden conclusiones que destacan la relevancia de abordar de manera integral y progresiva el desarrollo de habilidades algebraicas en los estudiantes. La identificación de distintos niveles de estratificación, desde el factual hasta el simbólico, no sólo subraya la complejidad del pensamiento algebraico, sino que también proporciona valiosas pautas para la planificación de estrategias pedagógicas efectivas y personalizadas. En términos amplios, estas conclusiones sugieren que la estratificación del pensamiento algebraico es un proceso evolutivo que requiere una atención cuidadosa a los diferentes niveles de comprensión. La adaptación de las estrategias pedagógicas para satisfacer las necesidades específicas de los estudiantes en cada fase es esencial para maximizar el impacto educativo. Asimismo, la atención a la diversidad de estilos de aprendizaje y la integración de enfoques que fomenten la participación activa son elementos clave para fortalecer el aprendizaje algebraico en su totalidad.

5.5. Recomendaciones

Se recomienda el uso de tablas como una herramienta para la investigación, ya que proporcionan una organización sistemática y clara de los datos recopilados. Las tablas permiten presentar de manera visual y concisa información cualitativa, facilitando la comparación y el análisis de datos. Además, su estructura ordenada y jerarquizada permite identificar patrones, tendencias y relaciones entre variables, lo que contribuye a la interpretación de los resultados y a la formulación de conclusiones. Asimismo, el uso de tablas mejora la comunicación de los hallazgos de la investigación, tanto en informes escritos como en presentaciones, al proporcionar una representación visual efectiva de los datos. Por lo tanto, se sugiere a los investigadores emplear tablas como una herramienta para mejorar la claridad, la precisión y la eficacia en la presentación y el análisis de datos en sus estudios.

En la investigación se presentó una limitación inicial que era cuáles juegos se iban a implementar, sin embargo, en lugar de verlo como un obstáculo, lo convertimos en una oportunidad para la creatividad. Decidimos crear nuestros propios juegos y actividades, aprovechando esta limitación a nuestro favor. Este proceso se convirtió en un reto de innovación y creación, donde exploramos nuevas ideas y enfoques para superar la restricción inicial. La limitación nos impulsó a pensar de manera más creativa y fuera de lo común, resultando en juegos que permitieran manifestar el pensamiento algebraico en diferentes contextos. Al final, logramos convertir la limitación en una ventaja, y los juegos y actividades resultantes fueron completamente originales sirviendo como herramienta para alcanzar nuestro objetivo general.

El diseño y la originalidad de los juegos presentan un desafío destacado en el ámbito educativo, ya que la concepción de los juegos como simples elementos de entretenimiento sin intención pedagógica clara puede limitar su potencial educativo. En nuestra investigación, encontramos que la creación propia de juegos se convierte en un aspecto crucial para superar esta barrera, ya que integra los objetivos educativos con la diversión y la lúdica. No obstante, observamos que el concepto tradicional de juego se rompe en los estudiantes participantes, quienes, al involucrarse en los juegos diseñados específicamente para esta investigación, experimentan una nueva comprensión del aprendizaje a través de la diversión, desafiando así las percepciones convencionales sobre la naturaleza y el propósito de los juegos en el contexto educativo.

5.6. Aportes de la investigación a la práctica pedagógica

Esta investigación desempeña un papel en la mejora continua de la práctica pedagógica al proporcionar evidencia, estudio y comparación de teoría sobre las estrategias y enfoques que aporten a la enseñanza y el aprendizaje. A través de estudios y análisis de datos, los investigadores pueden identificar las metodologías y técnicas que mejor se alinean con los objetivos educativos y las necesidades específicas de los estudiantes día a día. Estos hallazgos investigativos no solo ayudan a los profesores a tomar decisiones sobre cómo diseñar y adaptar sus prácticas de enseñanza, sino que también les brindan la oportunidad de conocer los diferentes avances en el campo de la educación. Además de proporcionar orientación práctica, la investigación en educación matemática también contribuye al desarrollo de teorías y marcos conceptuales que sustentan la práctica pedagógica.

Al investigar los procesos de aprendizaje, la motivación estudiantil, la interacción en el aula y el entorno educativo, está investigación da cuenta de cómo una estrategia diferente que se sale de la enseñanza tradicional permite que ocurran experiencias en el contexto escolar como lo es el aprendizaje motivador permanente en los estudiantes.

Por último, la investigación fomenta una cultura de reflexión y mejora continua tanto en las instituciones educativas como en los profesores en formación al fomentar una mentalidad de indagación y experimentación, así mismo se permite crear un ambiente propicio para la colaboración, el intercambio de ideas y la innovación en la enseñanza matemática, puesto que además los hallazgos de la investigación pueden servir como punto de partida para el diálogo profesional y el desarrollo profesional, donde los profesores pueden trabajar juntos para implementar y evaluar nuevas estrategias pedagógicas en sus aulas, esta cultura de investigación y mejora continua beneficia tanto a los profesores como a los maestros en formación y a los estudiantes, promoviendo un ambiente de aprendizaje enriquecedor.

6. Referencias

Aristizábal, J., Colorado, H. y Gutiérrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. *Sophia*,12(1), 117-125.

Álvarez, R. (2017). El juego como estrategia didáctica para la superación de errores y dificultades en la iniciación al álgebra en el grado octavo. *repositorio.uptc.* https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/handle/001/2652/TGT_1266.pdf;jsessionid=A48AAEF0948DC9B122C40D6E571CC55B?sequence=1

Alonso, N. (2021). El juego como recurso educativo: teorías y autores de renovación pedagógica.*uvadoc.uva.es.*https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/51451/TFG-L3005.pdf?sequence=1

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22(3).*

Bravo, S., Pérez, Y., Gonzales, M., Campos, E., y Díaz, O. (2021). Los juegos didácticos en la clase de consolidación de Matemática en la secundaria básica cubana. *Dilemas contemp. educ. política valores*, 8(2). https://doi.org/10.46377/dilemas.v8i2.2527

Bedón, V. y Leticia, C. (2023). Juegos de aprendizaje en línea para la formación de nociones lógico-matemática en Educación Inicial. *ReHuSo, 8(1), 2550-6587.*

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación, 32(1), 123-138.*

Callejo, M., Fernández, C. y García, A. (2019). La aprehensión cognitiva en la generalización de patrones visuales problemas /Aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones visuales. *Infancia y Aprendizaje / Revista para el Estudio de la Educación y el Desarrollo, 2019 vol. 42, núm. 4, 783–828,* https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1652447© 2019 Fundación Infancia y Aprendizaje

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2019). The impact of two different types of instructional tasks on the development of students' early algebraic thinking. *Journal for the study of education and development / childhood and learning, 44(3) ,503–552.* https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280 © 2020 childhood and learning foundation

Carrillo, D., Maurandi, A., y Olivares, P. (2020). Los juegos decrolyanos matemáticos y los catálogos de material escolar en España (1920–1936). *Pedagogía histórica,* 57(1),85–103. https://doi.org/10.1080/00309230.2020.1831029©2020CosturaPedagógicaHistórica

Chacha, X. (2022). El juego como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los niños de la escuela de educación básica carlos antonio mata coronel de la ciudad de azogues. *dspace.ups.edu.*

Das, B., Toub, T., Zosh, J., Michnick, J., Golinkoff, R., & Pasek, K. (2017).More than just fun: a place for games in playful learning. *Infancia y Aprendizaje / Journal for the Study of Education and Development, 40(2), 191–218.* https://doi.org/10.1080/02103702.2017.1292684© 2017 Fundacion Infancia y Aprendizaje

Cambo, J. (2023). El método lúdico como estrategia determinante para el aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones. *rcuisrael, 10(1).*

Edo, M., y Deulofeu, J. (2006).Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las ciencias, 24(2), 257–268.*

Edo, M., Planas, N., y Badillo, E. (2009).El aprendizaje matemático en un contexto de *juego.Revista europea de investigación sobre educación en la primera infancia 17(3), 325–341.https://www.researchgate.net/publication/228977466_Mathematical_learning_in_a_context_of_play*

Fernández, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de Ciencias.* https://ensciencias.uab.cat/article/view/v34-n1-fernandez-molina/1455-pdf-es

Freud, S. (1920). Obras completas: Más allá del principio del placer, psicología de las masas y análisis del yo, y otras obras. Volumen 18. Buenos Aires, Madrid: Amorrortu Editores, Alianza Editor. https://psicopatologia1unlp.com.ar/bibliografia/tp/histeria/Freud.%20Psicolog%C3%ADa%20de%20las%20masas%20y%20an%C3%A1lisis%20del%20yo.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a. ed.) México D.F.: McGraw-Hill.

Huizinga, J. (1968). Homo Ludens. *Emece editores, S.A., Buenos aires. 978(84)*
https://eva.isef.udelar.edu.uy/pluginfile.php/2157/mod_resource/content/3/Huizinga%20-%20Homo%20Ludens%20%281%29.pdf

Lasprilla, A., Vergel, R. y Camelo, F. (2012).Generalización de patrones figurales y medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes de 8 y 9 años. *core.ac.uk.* https://core.ac.uk/download/pdf/18590987.pdf

Lima, F.,Melo, E. y Tragalová, J. (2021). Apropriação por professores de jogos sobre Equação do 1º grau propostos em livros didáticos . *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, 23(3), 151-184.* https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/56317/38387

Meneses, M. y Monge, M. (2001). El juego en los niños: enfoque teórico. *Revista Educación 25(2), 113-124.* https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44025210

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: MEN. Recuperado de http://tinyurl.com/7t988s5

Molina, M., Ambrose, R. & Castro, E. (2004). In the transition from arithmetic to algebra: misconceptions of the equal sign. https://www.researchgate.net/publication/237235559_IN_THE_TRANSITION_FROM_ARITHMETIC_TO_ALGEBRA_MISCONCEPTIONS_OF_THE_EQUAL_SIGN

Peters, S. (1998). Playing while learning mathematics: the results of two interventional studies. *International Journal of Early Education, 6(1). https://www-tandfonline-com.udea.lookproxy.com/doi/epdf/10.1080/0966976980060105?needAccess=true&role=button*

Pincheira, N. y Alsina, A. (2021). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: implicaciones para la formación docente. *Revista Scielo.* https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning.* 5(1), 37-70.
Radford, L. (2006a). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*,61(1-2), 39-65.
Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.
Radford, L. (2006c). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,* Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 - 12, Vol. 1.
Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. ZDM - *The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.
Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), 37-62.
Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada, España: Editorial Comares.
Radford, L. (2021). La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la Teoría de la Objetivación. *El pensamiento algebraico en los primeros años: Diálogos y complementariedades entre la teoría de la objetividad y la teoría histórico-cultural (págs. 171-195). Biblioteca de física.* http://www.luisradford.ca/pub/2021%20-%20Radford%20-%20O%20ensino-aprendizagem%20da%20agebra%20na%20teoria%20da%20objetivacao_revised_SP.pdf
Ramos, L., Guifarro, M. y Casas, L. (2021). Dificultades en el aprendizaje del álgebra, un estudio con pruebas estandarizadas. *Revista scielo-br.udea, 35(70).* https://doi-org.udea.lookproxy.com/10.1590/1980-4415v35n70a21
Real Academia Española. (s.f.). Juego. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 31 de agosto, 2023, de https://dle.rae.es/jue
Sarlé, P., Rodríguez, I. y Rodríguez, E. (2010). El juego en el nivel inicial: Fundamentos y reflexiones en torno a su enseñanza. *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura* (1. ed)
https://oei.org.ar/lineas_programaticas/documentos/infanciaB01.pdf
Sarlé, P. (2011), Juego y educación inicial. *1a ed. - Buenos Aires : Ministerio de Educación de la Nación, 2011. ISBN 978-950-00-0891-4*
http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL006499.pdf
Sosa, L., Flores, E. y Carrillo, J. (2015). *Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato.* ensciencias.uab.cat. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v33-n2-sosa-flores-carrillo/1522-pdf-es
Turgut, S., Dogan, O. (2017). The Effect of Game-Assisted Mathematics Education on Academic Achievement in. *iejee,10(2). https://www.researchgate.net/publication/322213675_The_Effect_of_Game-*

Assisted_Mathematics_Education_on_Academic_Achievement_in_Turkey_A_Meta-Analysis_Study Turkey: A Meta-Analysis Study
Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa. *educación matemática*, *vol. 17, núm. 3.* http://funes.uniandes.edu.co/13103/1/Dolores2005Ense%C3%B1anza.pdf
Vargas, E., Gallego, A., Peláez, O., Arroyave, L. y Rodríguez, L. (2020). El juego como estrategia pedagógica para la enseñanza de las matemáticas: retos maestros de la primera infancia. revistas.udistrital.edu, 19(2).https://doi.org/10.14483/16579089.14133
Vargas, S., Segovia, D., Mora, L., y Crosetti. (2020). Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) aplicado a la enseñanza de la matemática en educación superior. Una revisión sistemática de literatura. *Form. Univ*, *13(1). http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000100013*
Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria (9-10 años). *(Tesis doctoral).* Universidad Distrital.
Vygotski, L. (2009). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.Lev S. Vygotski (1.ed) https://saberespsi.files.wordpress.com/2016/09/vygostki-el-desarrollo-de-los-procesos-psicolc3b3gicos-superiores.pdf

ANEXOS

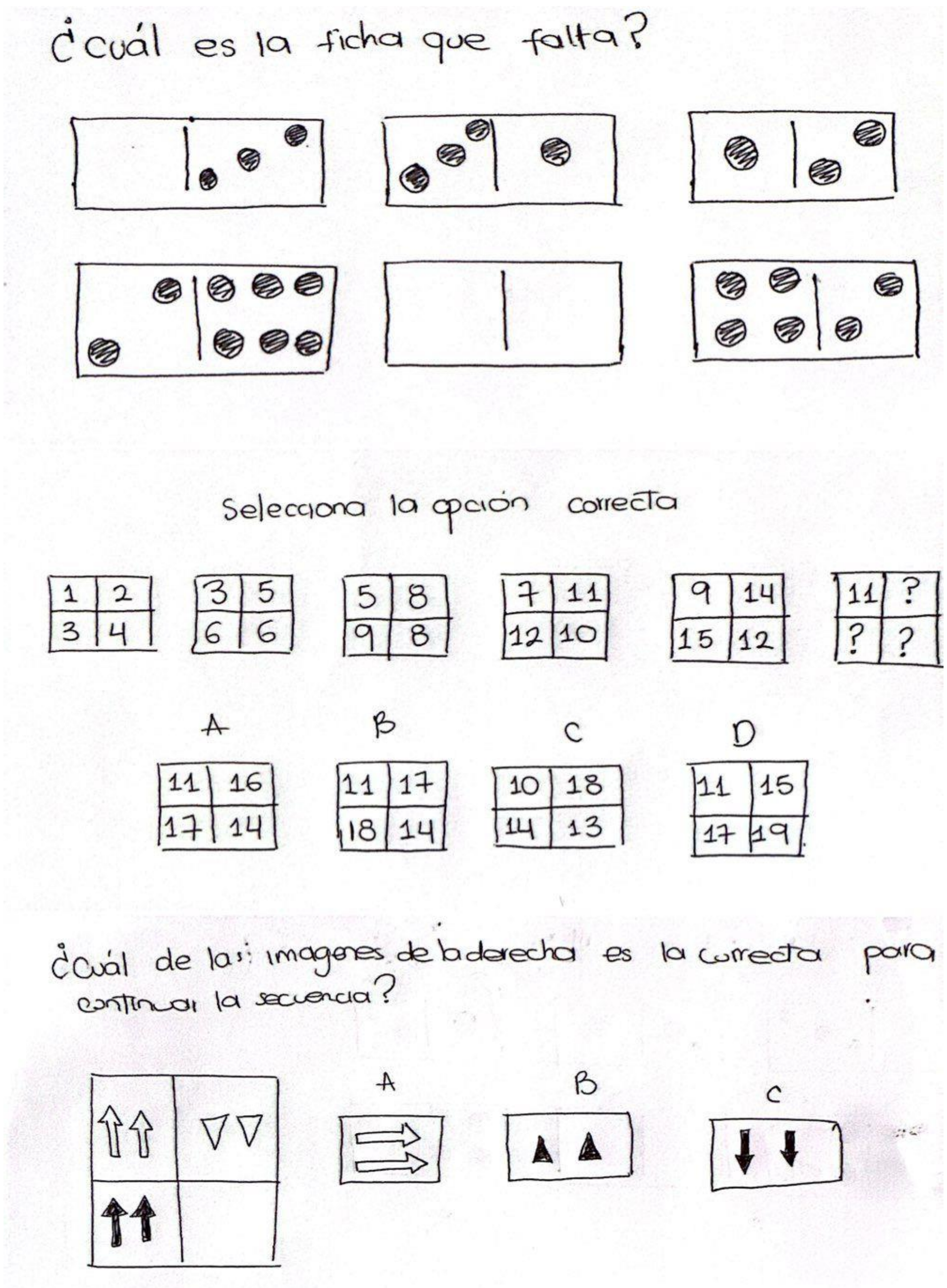
Anexo 1. Historia del tesoro: juego 3 tesoro algebraico

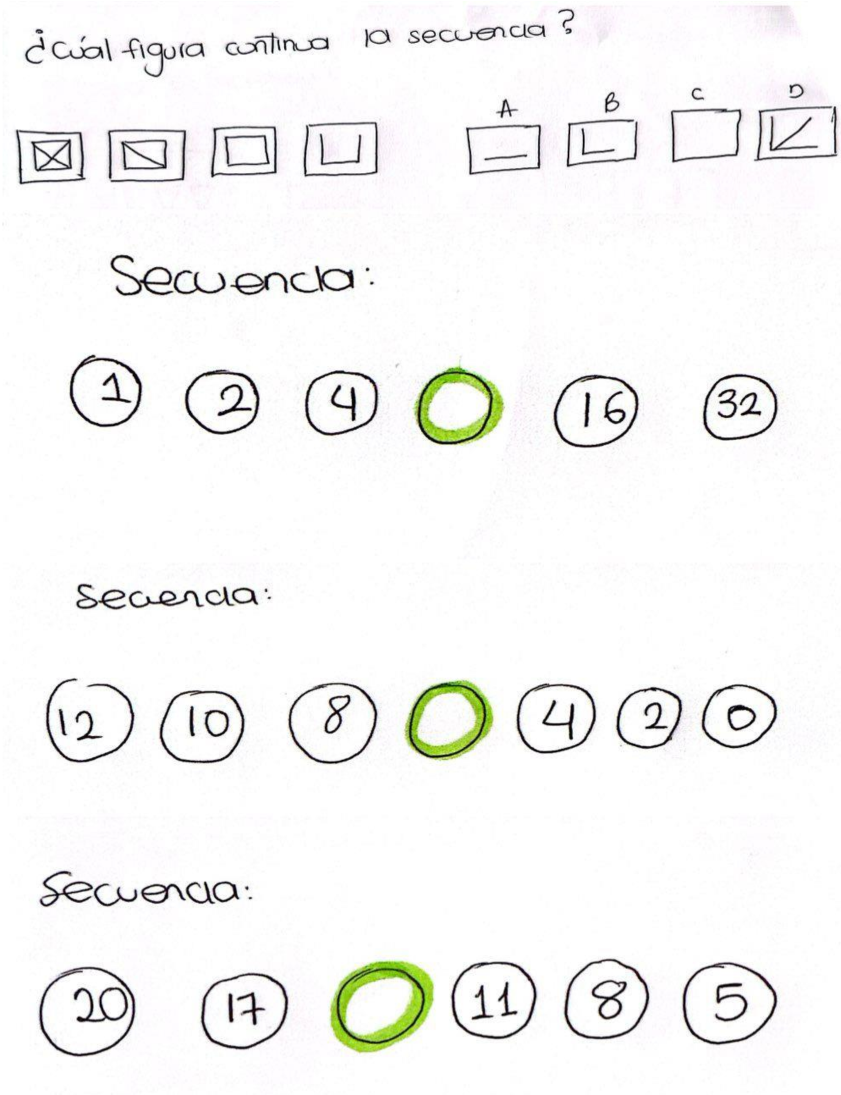
El misterio del tesoro perdido de la Institución Educativa Hernán Toro Agudelo
En la tranquila Institución Educativa Hernán Toro Agudelo, un día de lluvia torrencial reveló un secreto oculto durante generaciones. Mientras los trabajadores de mantenimiento inspeccionaban el techo de la antigua biblioteca, una sección dañada dejó caer un montón de libros empolvados al suelo. Entre los libros desplomados, un volumen antiguo de álgebra llamó la atención de un joven estudiante curioso, quien lo recogió con reverencia. Dentro de sus páginas, descubrió un mapa desgastado, con líneas trazadas y coordenadas marcadas de manera enigmática.

Era un mapa, un tesoro en sí mismo que indicaba la existencia de algo más: la "Gema de la Sabiduría", un tesoro mítico que se decía otorgaba un conocimiento inmenso de las matemáticas a quien lo obtuviera, sin embargo encontrarlo no era nada fácil pues el mapa no indicaba el lugar del tesoro, sino los lugares en donde se encontrarían pistas para llegar finalmente a él, las pistas solo eran descifrables si se resolvían las situaciones algebraicas que se encontraban en el lugar y hasta no hacerlo no se podría avanzar... La noticia del hallazgo se extendió rápidamente por la escuela, encendiendo la imaginación de los estudiantes y desatando una fiebre de búsqueda del tesoro.

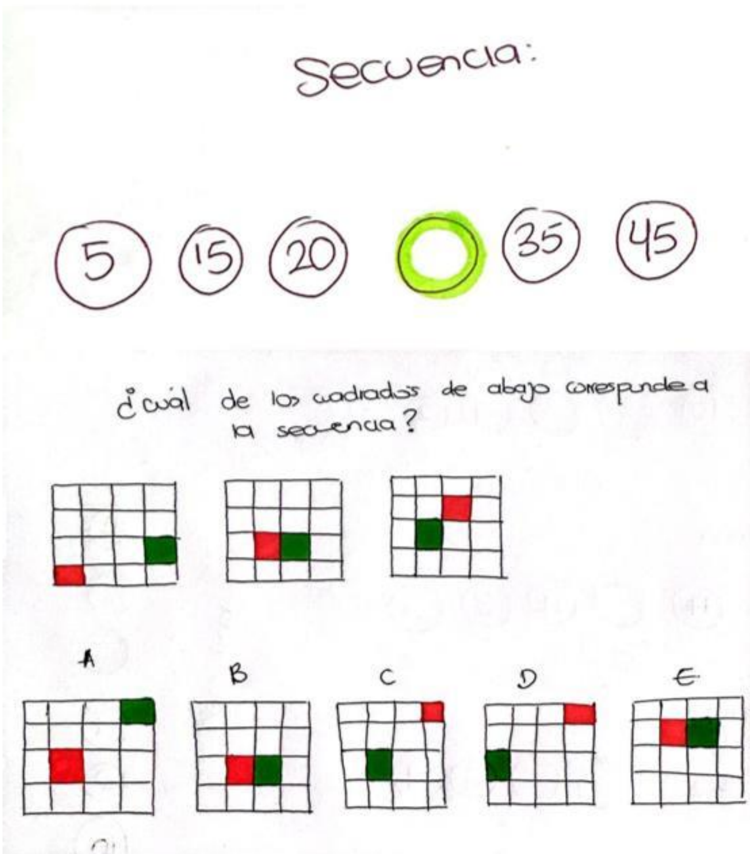
Tres equipos de estudiantes de sexto grado fueron los elegidos para adentrarse en la búsqueda del tesoro, puesto que cada uno poseía un conjunto único de habilidades matemáticas y ambiciones.

Anexo 2. Desafíos algebraicos: juego 3 tesoro algebraico

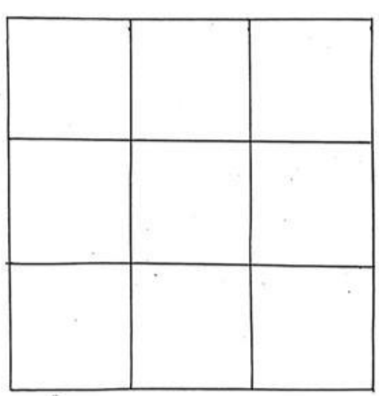



¿Cuál figura continua la secuencia?
A
B
C
D
Secuencia:
1
2
4
16
32
Secuencia:
12
10
8
4
2
0
Secuencia:
20
17
11
8
5

Secuencia:



¿Cuántos cuadrados ves en la figura?



Anexo 3. Cartas algebraicas: Juego 6 Football algebraico